

Theorie und Simulation von Zeitreihen mit Anwendungen auf die Aktienkursdynamik

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Rostock

vorgelegt von

Ralf Remer, geboren am 14.02.1976 in Schwerin

aus Sukow

Rostock, den 28.02.2005

Die Kurzdarstellung

Wir konzentrieren uns auf die stochastische Beschreibung von Prozessen in der Physik und auf dem Finanzmarkt. Wir analysieren theoretische Modelle, führen numerische Integrationen durch und vergleichen die Ergebnisse mit empirischen Daten. Wir nutzen dafür die von der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank gelieferten Hochfrequenzdaten des deutschen Aktienmarktes.

Wir ermitteln die gemeinsame WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der Geschwindigkeit und des Ortes des bekannten Ornstein-Uhlenbeck Prozesses. Wir unterstreichen die Übereinstimmung unserer Lösung mit der von Chandrasekhar. Weiterhin stellen wir die gemeinsamen Merkmale der modellierten Prozesse in der Physik und auf dem Finanzmarkt dar.

Wir fassen die bekannten empirischen Eigenschaften der Aktienmarktdaten zusammen und beschreiben ausgewählte Charakteristika mit Hilfe unserer Daten. Wir veranschaulichen die Aktienkursdynamik und leiten her, warum die logarithmierten Aktienpreisänderungen verwendet werden. Außerdem zeigen wir quantitativ, dass wir die Existenz der Markov Eigenschaft bei den Änderungen nicht ablehnen können.

Bei der Beschreibung der Aktienkursdynamik beschränken wir uns auf die Modelle mit stochastischer Volatilität. Wir führen zwei bekannte Modelle ein (Heston und Hull-White) und leiten eine Lösung für die Änderungen für kurze Zeiträume her. Wir vergleichen diese Lösung mit den empirischen Daten und analysieren die Unterschiede. Anschließend definieren wir neue Modelle, indem wir bekannte kombinieren oder Modelle der Physik auf den Aktienmarkt transformieren. Wir stellen für einige dieser Modelle die bessere Übereinstimmung mit den empirischen Aktienmarktdaten heraus.

Abstract

We concentrate on the stochastic description of processes in Physics and in the stock market. We analyze theoretical models, carry out numeric integration and compare results with empirical data. Therefore, we use high frequency data of the German stock market, delivered by the capital market database in Karlsruhe.

We calculate the joint probability density distribution of velocity and position following the well known Ornstein-Uhlenbeck process. We depict the agreement of our solution with former results by Chandrasekhar. Furthermore, we underline the common characteristics of modelled processes in Physics and finance.

We summarize the known stylized facts of the stock market data and describe selected properties with the help of our data. We illustrate the stock price dynamics and derive, why logarithmic stock price returns are always used. Despite this, we show quantitatively, that we can not reject the existence of the Markov property of the returns.

For the description of the stock price dynamics we focus on the models with stochastic volatility. We introduce two well known models (Heston and Hull-White) and derive a solution of the returns for short time lags. We compare this solution with the empirical data and analyze the differences. That is why, we introduce new models, with the help of combination of known ones or transformation of models from Physics to finance. We emphasize the better agreement of some of them with the empirical stock market data.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Einführung	1
1.1 Der Überblick	1
1.2 Die Einführung in Stochastische Prozesse	2
1.2.1 Die Fokker-Planck Gleichung	3
1.2.2 Die Langevin Gleichung	4
2 Die ausgewählten stochastischen Prozesse in der Physik	7
2.1 Die Brownsche Bewegung	7
2.1.1 Die eindimensionale gewöhnliche Brownsche Bewegung	9
2.1.2 Die (eindimensionale) geometrische Brownsche Bewegung	12
2.2 Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess	15
2.3 Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit linearem Potenzial	22
2.4 Der exponentielle Ornstein-Uhlenbeck Prozess	27
3 Die Analyse von empirischen Daten	31
3.1 Die Darstellung der Zeitreihen	31
3.1.1 Der Aufbau der Datenbank	31
3.1.2 Die zeitlichen Eigenschaften der Daten	33
3.2 Die einzeitige WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung	37
3.3 Die zweizeitige WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung	41
3.4 Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der Aktienkursänderungen	45
3.4.1 Die Berechnungsweisen der Änderungen	46
3.4.2 Die überlappenden und die nicht überlappenden Änderungen	47
3.5 Die empirisch festgestellten Eigenschaften	50
3.5.1 Die allgemeinen Merkmale	50
3.5.2 Die Autokorrelation	53
3.6 Die Untersuchung der Markov Eigenschaft bei den Aktienkursänderungen	58
3.6.1 Die Darstellung der Grundlagen	58
3.6.2 Der beispielhafte Test an der geometrischen Brownschen Bewegung	60
3.6.3 Der Test an ausgewählten Aktienkurszeitreihen	63
4 Die Aktienkursmodelle mit stochastischer Volatilität	64
4.1 Die stationäre WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der Varianz	66
4.1.1 Das Heston Modell	66
4.1.2 Das Hull-White Modell	68
4.2 Die Kurzzeitlösung für die logarithmierten Änderungen	69
4.2.1 Das Heston Modell	71
4.2.2 Das Hull-White Modell	73
4.3 Der Vergleich mit empirischen Daten	74
4.4 Die Zusammenfassung der Ergebnisse bekannter Modelle	78
4.5 Die Langzeitlösung des Heston Modells	79

5 Die Erweiterung der Modelle mit stochastischer Volatilität	81
5.1 Die Anwendung eines physikalischen Modells auf die Aktienkursdynamik	81
5.1.1 Das Log-Normal Modell	81
5.1.2 Das adaptierte Log-Normal Modell	84
5.2 Die Anpassung des Heston Modells	87
5.2.1 Das neue Modell	88
5.2.2 Das adaptierte Heston Modell	90
5.3 Das Kombinationsmodell	92
5.4 Die Analogie zu aktiven Brownschen Teilchen mit internem Energiedepot	99
5.4.1 Die Transformation auf einen positiven Definitionsbereich	101
5.4.2 Die stochastische Differentialgleichung	102
5.4.3 Die Anwendung auf die Aktienkursdynamik	102
5.5 Die Anpassung an die standardisierten Änderungen	105
6 Die Zusammenfassung und der Ausblick	110
A Die Integration der Volatilität des Heston Modells über die Zeit	112
B Die Modellgestaltung mit additivem Rauschen	117
B.1 Das Heston Modell	118
B.2 Das Hull-White Modell	119
C Die Chandrasekhar-Lösung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses	121
C.1 Die inkorrekte Lösung für die Geschwindigkeit	121
C.2 Die korrekte Lösung für die Geschwindigkeit	123
C.3 Die korrekte Lösung für die Geschwindigkeit und den Ort	124
D Die numerische Integration von analytischen Funktionen	129

1 Die Einführung

1.1 Der Überblick

Unsere Arbeit ist dem interdisziplinären Gebiet der „Econophysics“ bzw. der Physik sozio-ökonomischer Systeme zugeordnet. Wie in der Physik üblich steht auch in diesem Themengebiet die Ermittlung der statistischen Eigenschaften von empirischen Daten bzw. die Gewinnung von Informationen aus den Daten und der Vergleich der theoretischen Modelle mit der Empirie im Vordergrund [95]. Die empirischen Daten stammen ausschließlich aus sozialen (z. B. Straßenverkehr, Städtewachstum) oder ökonomischen Systemen (z. B. Industrieansiedlung).

In unserer Arbeit fokussieren wir uns auf die stochastische Beschreibung von Zeitreihen. Wir bauen dabei auf unsere vorherigen Arbeiten auf [89, 90]. Wir analysieren theoretische Modelle, vergleichen die analytischen Ergebnisse mit numerischen Simulationen und wenden die Ergebnisse auf empirisch gemessene Zeitreihen an. Grundsätzlich betrachten wir hierbei stochastische Prozesse in der Physik und auf dem Aktienmarkt.

Die beiden unterschiedlichen Anwendungsfelder weisen durchaus große Gemeinsamkeiten bei den stochastischen Modellierungen auf. So wurde die bekannte Brownsche Bewegung aus der Physik abgewandelt auf den Aktienmarkt bezogen und bildet weiterhin die Grundlage vieler praktisch angewandter Modelle. Hauptsächlich beschreiben wir aber die Dynamik in zwei Variablen. In der Physik ist dies der Ort x und die Geschwindigkeit v . Bei der Aktienkursdynamik sprechen wir über den Aktienkurs k und die Varianz v . Des Weiteren stimmt, aufgrund ähnlicher Modelle, das methodische Vorgehen zur analytischen Lösung der Gleichungssysteme überein (vergleiche Abschnitt 2.2 und Anhang A).

Der erste wesentliche Unterschied besteht darin, dass die Aktienkurse nur positiv definiert sind. Wir verwenden daher am Aktienmarkt das multiplikative anstelle des additiven Rauschens (siehe Abschnitt 1.2). Die zweite Differenz ist durch den Zusammenhang der beiden Variablen gegeben. So geht die Geschwindigkeit v in den deterministischen Term der stochastischen Differentialgleichung des Ortes x ein. Dagegen steht die Varianz v beim Aktienmarkt im Fluktuationsterm der Gleichung des Preises k . Die analytische Handhabbarkeit der Modellgleichungen wird hierdurch zusätzlich erschwert. Der dritte Unterschied besteht darin, dass die Geschwindigkeit v beobachtbar und messbar ist. Demgegenüber ist die Varianz v nicht beobachtbar und nicht handelbar [52].

In dem folgenden Abschnitt stellen wir kurz die für unsere Arbeit notwendigen Grundlagen der stochastischen Prozesse dar. Anschließend analysieren wir die beiden bekannten Modellierungsvarianten der Brownschen Bewegung, die Brownsche Bewegung und den Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Wir zeigen die Grundlagen und die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten auf.

In den weiteren Abschnitten konzentrieren wir uns auf die Aktienkursdynamik. Wir stellen die wesentlichen Merkmale unserer Datenbasis dar und analysieren die notwendigen Grundlagen (Markov Eigenschaft, siehe Abschnitt 3.6). Weiterhin leiten wir die grundsätzlichen Betrachtungsgrößen und ihre Berechnungsweisen her.

Danach stellen wir die beiden bekannten Modelle der Aktienkursmodellierung, das Heston und Hull-White Modell, dar. Sie zählen zu den Modellen mit stochastischer

Volatilität, da die Varianz v eine eigenständige stochastische Variable ist. Das ökonomische Äquivalent zu diesen Modellarten sind die GARCH Prozesse (englisch für Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) [20, 64]. Wir entwickeln die Kurzzeitlösung für beide Varianten (in Analogie zu [25]) und vergleichen sie mit ausgewählten empirischen Hochfrequenzzeitreihen des deutschen Aktienmarktes [57]. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Analyse haben wir bereits veröffentlicht [91, 92, 94]. In dem anschließenden Abschnitt stellen wir die in [25] entwickelte Langzeitlösung des Heston Modells dar und vergleichen sie mit numerischen Simulationen. Die Anwendung der Langzeitlösung auf die deutschen Aktienmarktdaten haben wir in [93] publiziert. In den darauffolgenden Abschnitten entwickeln wir neue Modelle zur Beschreibung der Preisdynamik, um die festgestellten Nachteile der bekannten Modellierungen zu beheben.

Im Anhang zeigen wir kurz eine Lösungsmöglichkeit des Heston Modells, eine Analogie zu einer vorhandenen Lösung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses sowie spezielle Grundlagen, die für unsere numerischen Simulationen notwendig sind.

Eine wichtige Voraussetzung und Annahme für die empirischen Betrachtungen in unserer Arbeit ist, dass der stochastische Prozess der Aktienkursdynamik stationär ist. Der Prozess selber darf nicht (explizit) von der Zeit abhängen. Die empirischen Ergebnisse (z. B. Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen) müssen unabhängig von dem Kalenderzeitraum sein, den die Zeitreihe umfasst.

Des Weiteren tätigen wir in unserer Arbeit grundsätzlich keine Aussage über Extremwerte oder Abfallraten von Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen bei betragsmäßig großen Werten, da unsere Datenbasis im Vergleich zu anderen Studien zu klein ist.

Da wir mit endlichen beispielhaften Zeitreihen des zu untersuchenden stochastischen Prozesses arbeiten, sind alle in dieser Arbeit errechneten Parameter im statistischen Sinne nur Schätzwerte. Auf eine genauere Analyse der Validität und eine Angabe der Konfidenzintervalle der Schätzwerte verzichten wir aber.

Abschließend wollen wir anmerken, dass wir die Begriffe Varianz, Fluktuationen oder Volatilität synonym für die Variable v bei der Aktienkursdynamik verwenden. Dies sei einschränkend hinzugefügt, da die Volatilität eigentlich als jährliche Standardabweichung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses definiert ist [1, 110]. Die in unserer Arbeit errechnete Volatilität wird am Finanzmarkt auch als historische Volatilität bezeichnet, da sie aus historischen Kursnotierungen berechnet wurde [63].

1.2 Die Einführung in Stochastische Prozesse

In unserer Arbeit werden wir uns ausschließlich auf die stochastische Beschreibung der Aktienkursdynamik beschränken. In diesem Abschnitt wollen wir kurz einige Grundlagen für die Beschreibung von stochastischen Prozessen darstellen. Eine detaillierte Analyse und Darstellung der Grundlagen werden wir nicht vornehmen, da es hierfür bereits einige Literatur gibt [36, 41, 50, 96, 104].

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt, ohne Verlust der allgemeinen Gültigkeit, auf eindimensionale stochastische Prozesse. Weiterhin betrachten wir in unserer Arbeit ausschließlich stochastische Prozesse, welche die „zeitliche“ Markov Eigenschaft erfüllen. Diese Eigenschaft werden wir in dem Abschnitt 3.6 näher betrachten.

Wir definieren $p(x, t) dx$ als Wahrscheinlichkeit, dass wir zum Zeitpunkt t ein Teil-

chen in dem eindimensionalen Intervall $[x, x + dx]$ treffen. $p(x, t)$ repräsentiert hierbei die Wahrscheinlichkeitsdichte mit den Eigenschaften

$$p(x, t) \geq 0 \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x, t) = 1 , \quad (2)$$

mit den natürlichen Grenzen bei minus und plus unendlich. Wir merken an, dass Variablentransformationen bei Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen nicht wie bei normalen Funktionen erfolgen. Es gilt nicht die Beziehung

$$g(z, t) = f(x(z), t) . \quad (3)$$

Vielmehr ist zu beachten, dass bei Umwandlungen der Variablen die Wahrscheinlichkeit $p(x, t) dx$ erhalten bleibt und nicht die Wahrscheinlichkeitsdichte, wie es durch die Relation (3) impliziert wird. Die Transformationsregel lautet daher

$$P(z, t) dz = p(x(z), t) dx , \quad (4)$$

bzw.

$$P(z, t) = p(x(z), t) \frac{dx}{dz} , \quad (5)$$

wobei wir dx/dz als Differential der Funktion $x(z)$ nach z auffassen.

Grundsätzlich bieten sich uns drei verschiedene Möglichkeiten, wie wir die Dynamik von stochastischen Prozessen charakterisieren können. Wir kennen als Beschreibungsmöglichkeiten die Master Gleichung, die Fokker-Planck Gleichung und die Lan-gevin Gleichung. Die Master Gleichung werden wir in dieser Arbeit kaum verwenden. Wir konzentrieren uns daher vorwiegend auf die anderen beiden Formalismen, die wir nachfolgend erläutern wollen.

1.2.1 Die Fokker-Planck Gleichung

Wir betrachten als Ausgangspunkt die Master Gleichung in der Form [100]

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' [w(x, x') p(x', t) - w(x', x) p(x, t)] , \quad (6)$$

mit den Übergangsraten bzw. -wahrscheinlichkeitsdichten $w(x, x')$ von x' zu x . Somit hat die Master Gleichung die Form einer Bilanzgleichung, bei der wir die Zuflüsse zu der Wahrscheinlichkeitsdichte am Ort x (in der Gleichung (6) rechte Seite, positiver Term) den Abflüssen (in der Gleichung (6) rechte Seite, negativer Term) gegenüberstellen. Wir nehmen jetzt an, dass bei infinitesimal kleinen Zeitschritten dt die Wahrscheinlichkeitsdichte am Ort x nur von der Dichte an unmittelbar benachbarten Orten x' beeinflusst wird. Wir erhalten so die Kramers-Moyal Entwicklung [96, 100]

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n [D_n(x, t) p(x, t)] \quad (7)$$

$$D_n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' (x' - x)^n w(x', x), \quad (8)$$

mit den Kramers-Moyal Koeffizienten $D_n(x, t)$ der Ordnung n . Das Pawula Theorem sagt aus, dass wir die Kramers-Moyal Entwicklung bei positiven Übergangsraten $w(x', x)$ nach dem ersten oder zweiten Term oder nach unendlich vielen Termen abbrechen können [96]. Verwenden wir dagegen endlich viele ($n > 2$), so können wir nicht garantieren, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, t)$ an beliebigen Orten x zu beliebigen Zeiten t größer Null ist (siehe Gleichung (1)). Ein Einbezug der Terme höherer Ordnung kann aber sinnvoll sein, wenn wir eine bessere Anpassung der Momente [96, 104]

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n p(x, t) \quad (9)$$

bei $n > 2$ an eine empirische (nicht normalverteilte) Dichteverteilung erreichen wollen. Wenn wir die Kramers-Moyal Entwicklung jedoch nach dem zweiten Term beenden, erhalten wir die bekannte Fokker-Planck Gleichung [96]

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) p(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} b^2(x, t) p(x, t) \right] \quad (10)$$

$$a(x, t) = D_1(x, t) \quad (11)$$

$$b(x, t) = \sqrt{D_2(x, t)}, \quad (12)$$

mit dem deterministischen oder Driftterm $a(x, t)$ und der Fluktuations- bzw. Diffusionsfunktion $b(x, t)$ in dem Term $b^2(x, t)/2$.

Ein Vorteil der Fokker-Planck Gleichung besteht darin, dass wir eine partielle Differentialgleichung definiert haben. Diese können wir mit den üblichen algebraischen Methoden bei Kenntnis der Anfangs- und Randbedingungen lösen. Die Stochastik oder der Zufall des Prozesses ist trotzdem enthalten. Wir betrachten ja die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, t)$ der Variablen $x(t)$ und nutzen die Gegebenheit aus, dass sich diese Verteilung deterministisch entwickelt und wir sie mittels der Evolutionsgleichung (10) beschreiben können.

1.2.2 Die Langevin Gleichung

Den stochastischen Prozess, definiert durch die Fokker-Planck Gleichung (10), können wir auch mit Hilfe einer stochastische Differentialgleichung, in der Physik als Langevin Gleichung bekannt, beschreiben. Die Langevin Gleichung für den betrachteten Prozess lautet [58, 78]

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW, \quad (13)$$

mit dem deterministischen Term $a(x, t) dt$ und dem stochastischen Term $b(x, t) dW$. Wir beschränken uns darauf, dass wir auch nur die Funktionen $a(x, t)$ und $b(x, t)$ als Drift- bzw. Fluktuationsterm bezeichnen werden. Wir erkennen, dass wir jetzt im Gegensatz zu der Fokker-Planck Gleichung nicht mehr die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, t)$ betrachten. Wir schauen uns statt dessen eine Trajektorie bzw. eine Realisierung $x(t)$ des stochastischen Prozesses X als Funktion der Zeit t an.

Das weiße Rauschen dW repräsentiert die Änderungen eines Wiener Prozesses $W(t)$ (entwickelt von Wiener 1923 [16]). Der Prozess ist definiert durch den Anfangswert $W(t = 0) = 0$ und den unabhängig voneinander, identisch verteilten Zuwächsen dW . Die Änderungen folgen einer Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Varianz dt . Darüber hinaus wollen wir darauf verweisen, dass der Wiener Prozess $W(t)$ nach der Zeit t nicht differenzierbar ist, da [58]

$$E[dW^2] = dt \quad (14)$$

für $dW = W(t + dt) - W(t)$ gilt. Hierbei bezeichnet $E[x]$ den Erwartungswert der Variablen x . Die Relation (14) hat zur Folge, dass das Integrationsergebnis der Differentialgleichung (13) bei zustandsabhängigem Fluktuationsterm von der Wahl der Stützstelle im Integrationsintervall abhängt. Somit ist die Differentialgleichung (13) ohne Angabe der Notation nicht vollständig definiert.

Die Stützstelle zur Integration kann grundsätzlich an jeder beliebigen Stelle innerhalb des Integrationsintervalls $[t, t + \Delta t]$ liegen. Hauptsächlich unterscheiden wir aber drei Notationen, und zwar die Itô, Stratonovich und die Klimontovich bzw. Hänggi Notation [58].

Bei der Itô Notation liegt die Stützstelle am linken Rand des Integrationsintervalls mit $\alpha = 0$ [58]

$$dx_i = a(x, t_I) \Delta t + b(x, t_I) dW_i \quad (15)$$

$$t_I = t_i + \alpha (t_{i+1} - t_i). \quad (16)$$

Bei der Klimontovich bzw. Hänggi Notation wählen wir die Stützstelle am rechten Integrationsrand mit $\alpha = 1$. Bei dem Stratonovich Formalismus wird die Integration genau in der Mitte $\alpha = 0.5$ des Integrationsintervalls durchgeführt. Um zu gewährleisten, dass zwei stochastische Differentialgleichungen in den beiden Formalismen (Itô und Stratonovich) den gleichen physikalischen Prozess beschreiben, gilt die folgende Transformationsbeziehung [58]

$$dx = \left[a(x, t) - \frac{1}{2} b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} b(x, t) \right] dt + b(x, t) \circ dW, \quad (17)$$

wobei jeweils $a(x, t)$ und $b(x, t)$ die entsprechenden Terme im Itô Formalismus sind. Die Verknüpfung \circ zwischen dem Fluktuationsterm und dem weißen Rauschen kennzeichnet die Stratonovich Notation. Wir wollen anmerken, dass die Transformationsbeziehungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen für eine Variablenänderung auch für stochastische Differentialgleichungen im Stratonovich Formalismus gelten. Wir definieren

$$dx = a_s(x, t) dt + b(x, t) \circ dW \quad (18)$$

$$y = f(x, t) \quad (19)$$

$$dy = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + a_s \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right] dt + b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \circ dW. \quad (20)$$

Durch die Wahl der Integrationsstützstelle in der Intervallmitte gilt diese Analogie. Hingegen gilt bei dem Itô Formalismus auf Grund der Stützstelle am linken Integrationsrand und der Eigenschaft der quadratischen Variation (siehe (14)) im Vergleich zu

gewöhnlichen Differentialgleichungen andere Transformationsbeziehungen. Es gilt für die Langevin Gleichung im Itô Formalismus folgende Relation [58]

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW \quad (21)$$

$$y = f(x, t) \quad (22)$$

$$dy = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + a \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \right] dt + b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dW. \quad (23)$$

Die obige Gleichung (23) bezeichnen wir auch als Itô Formel. Eine detailliertere Herleitung der Itô Formel ist in vielen Fachbüchern aufgeführt, u. a. in [16, 58, 74, 78, 87].

Wir wollen noch zwei Wege aufzeigen, dass die Itô Formel tatsächlich Gültigkeit besitzt. Wir verwenden als unsere Ausgangsgleichung für die stochastische Variable x die Langevin Gleichung (21) im Itô Formalismus. Wir kennen bereits die Transformationsbeziehung (17) zwischen dem Itô und dem Stratonovich Formalismus. Wir erhalten somit die Gleichung (17) als Langevin Gleichung im Stratonovich Formalismus für den betrachteten stochastischen Prozess. Nach Transformation der Variablen mit den Beziehungen (22) und (20) erhalten wir für die neue Zufallsvariable y folgende Langevin Gleichung im Stratonovich Formalismus

$$dy = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + a \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{2} b \frac{\partial}{\partial x} b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right] dt + b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \circ dW. \quad (24)$$

Die Rücktransformation der obigen Gleichung (24) in den Itô Formalismus, als Umkehr der Beziehung (17), errechnen wir folgendermaßen

$$\begin{aligned} dy &= \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + a \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) - \frac{1}{2} b \frac{\partial}{\partial x} b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) \right] dt + b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dW \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \quad (26)$$

$$dy = \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + a \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \right] dt + b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dW. \quad (27)$$

Wir erkennen, dass die so erhaltene Gleichung (27) mit der Itô Formel (23) übereinstimmt. Somit haben wir bewiesen, dass die Darstellungsweisen von stochastischen Differentialgleichungen und ihre Transformationsbeziehungen in sich konsistent sind.

Wir haben in den letzten Abschnitten die wesentlichen Grundlagen für die Betrachtung von stochastischen Prozessen in unserer Arbeit dargestellt. Wir zeigten die zur Charakterisierung von stochastischen Prozessen verfügbaren Darstellungsarten (Master, Fokker-Planck, Langevin Gleichung) inklusive ihrer Definitionsbedingungen und Transformationen. In den nächsten Abschnitten werden wir auch speziellere analytische Lösungsmethoden benötigen, die wir dann aber gleich konkret auf ein Beispiel anwenden werden (vergleiche Abschnitte 2.2, 2.3, 2.4 und Anhang A).

2 Die ausgewählten stochastischen Prozesse in der Physik

2.1 Die Brownsche Bewegung

Die Brownsche Bewegung ist nach dem schottischen Botaniker Robert Brown (1773 – 1858) benannt. Er war jedoch nicht der erste, der den heute als Brownsche Bewegung bekannten Prozess entdeckt hat. Vielmehr beobachtete der Holländer Antony van Leeuwenhoek (1632 - 1723) als erster die Bewegung von Teilchen in einer Lösung. Seine Schlussfolgerung war, gemessen an dem damaligen Kenntnisstand, zu verstehen: Bei den Teilchen musste es sich seiner Meinung nach um Lebewesen handeln. Der Zweite, der die Bewegung beobachtet hatte, und sich zugleich bewusst war, dass es sich nicht um Lebewesen, sondern um Teilchen handelte, war der ebenfalls holländische Physiker Jan Ingenhousz (1730 –1799). Jedoch blieben seine Beobachtungen der nicht holländischen Fachwelt verschlossen. Im Jahr 1828 machte schließlich der Schotte Robert Brown seine Entdeckungen [54]. Er beobachtete unter seinem Mikroskop Blütenpollen in einer Lösung und stellte fest, dass diese sich ständig in Bewegung befanden. 1900 entwickelte L. Bachelier die Lösung der Wahrscheinlichkeit für den Ort eines Teilchens bei einer eindimensionalen Brownschen Bewegung [2, 54]. Er verwies ebenfalls darauf, dass die Bewegung einen Markov Prozess darstellt. Das Problem der Brownschen Bewegung wurde dann 1905 von Einstein und Smoluchowski aus der Sicht der statistischen Mechanik quantitativ erfasst und beschrieben [29, 54]. Die Hauptkonzentration lag dabei auf der mittleren quadratischen Abweichung $\Delta x^2(\tau)$ von dem Ort x des beobachteten Teilchens in einer Zeitspanne τ . Sie wurde durch Mittelung über viele Beobachtungen folgendermaßen errechnet [100]

$$\langle \Delta x^2(\tau) \rangle = \langle (x_i - x_{i-1})^2 \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_i - x_{i-1})^2 . \quad (28)$$

Hierbei kennzeichnet x_i die Position des beobachteten Teilchens zu dem Zeitpunkt $i\tau$. Somit entspricht der Unterschied zwischen zwei Beobachtungen genau dem Zeitfenster τ . Die Mittelung wird über verschiedene Beobachtungszeitpunkte vorgenommen. D. h. die gesamte Trajektorie von $t = 0$ bis $t = L\tau$ wird in genau L nicht überlappende Trajektorien der Länge τ zerlegt. Einstein ermittelte dabei die heute sehr bekannte Relation [100]

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = \langle \Delta x^2(t) \rangle = 2 D t . \quad (29)$$

Somit entwickelt sich die mittlere quadratische Ortsabweichung linear mit der Zeit t .

Der Prozess der Brownsche Bewegung wurde ebenfalls makroskopisch beschrieben. Die erste Nebenbedingung bei dieser makroskopischen Beschreibung ist, dass die Anzahl der Teilchen in der beobachteten Lösung konstant ist. Die Gesamtanzahl der Teilchen N entspricht dabei dem Integral über die Teilchendichte $n(x, t)$ aller Orte x zu dem Zeitpunkt t [100]

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx . \quad (30)$$

Daraus ergibt sich die lokale Bedingung, dass sich die Teilchendichte am Ort x nur durch einen Zu- bzw. Abfluss zu unmittelbar benachbarten Orten $x + dx$ ändern kann.



Abbildung 1: Links ist der Entdecker der Brownschen Bewegung, der Holländer Antony van Leeuwenhoek (1632 - 1723), zu sehen. Rechts der Schotte Robert Brown (1773 – 1858), nach dem die Bewegung benannt ist.

Wir formulieren somit die bekannte Kontinuitätsgleichung [100]

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j(x, t) = 0, \quad (31)$$

wobei $j(x, t)$ den Fluss am Ort x zu der Zeit t kennzeichnet. Der Ansatz für den Fluss ist hierbei linear zu dem Unterschied in der Teilchendichte $n(x, t)$ an den benachbarten Orten x und $x + dx$ [100]

$$j(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x, t). \quad (32)$$

Wir erhalten somit für die makroskopische Beschreibung der Brownschen Bewegung folgende Gleichung [100]

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t). \quad (33)$$

Diese Gleichung beschreibt den Spezialfall der reinen Diffusion und wird deshalb auch als Diffusionsgleichung bezeichnet. Einstein ermittelte ebenfalls die Relation zwischen der Diffusionskonstanten D und der Temperatur T mit [100]

$$D = \frac{k_B T}{\gamma m}, \quad (34)$$

mit der Boltzmann Konstanten k_B , der Teilchenmasse m und dem Reibungskoeffizienten γ . Auf diese Beziehung werden wir im Abschnitt 2.2 zurückkommen. Wir wollen noch anmerken, dass die Konstante D nun zwei Bedeutungen hat. Auf der einen Seite dient sie der Beschreibung der mikroskopischen Bewegung, d. h. der Bewegung eines Teilchens in der Lösung (siehe Gleichung (29)). Auf der anderen Seite dient sie in der obigen Gleichung (33) der Beschreibung auf der makroskopischen Ebene für viele Teilchen.

Die mathematische Fundierung der Brownschen Bewegung erfolgte 1923 durch Norbert Wiener, nachdem die Mathematik von den Ideen von Borel, Lebesgue und Daniell

profitierte [54, 109]. Kiyosi Itô stellte 1946 den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Brownschen Bewegung und der Langevin Gleichung als kontinuierliche Beschreibung dar [53, 54].

Wir wollen uns im Folgenden auf die eindimensionale Bewegung konzentrieren. Wir zeigen die Lösungsmöglichkeiten des Prozesses anhand der Fokker-Planck sowie der Langevin Gleichung.

2.1.1 Die eindimensionale gewöhnliche Brownsche Bewegung

Die Fokker-Planck Gleichung Wir wollen nun die gewöhnlichen Brownschen Bewegung für den eindimensionalen Fall näher betrachten. Wir konzentrieren uns dabei zunächst auf die Fokker-Planck Gleichung. Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, t)$. Die Dichteverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit $p(x, t) dx$ an, dass sich das betrachtete Teilchen zu dem Zeitpunkt t an dem Ort $[x, x + dx]$ befindet. Einen Ansatz für die Fokker-Planck Gleichung haben wir bereits in dem vorherigen Abschnitt durch die Gleichung (33) für die Teilchendichte $n(x, t)$ gegeben. Wir wollen diese Gleichung nun für ein Teilchen näher betrachten, bei dem die Teilchendichte der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, t)$ entspricht. Wir untersuchen die Gleichung jedoch für den allgemeineren Fall mit Drift und Diffusion. D. h. zusätzlich zu der zufälligen, irregulären Bewegung (Diffusion) des Teilchens liegt eine im Mittel gerichtete Bewegung (Drift) vor. Wir erhalten daher folgende Formulierung [41, 48, 50, 96]

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t), \quad (35)$$

mit der Driftkonstanten μ und der Diffusionskonstanten D und den natürlichen Rändern bei minus und plus unendlich. Als Anfangsbedingung definieren wir, dass sich das Teilchen zu dem Zeitpunkt $t = 0$ mit Sicherheit an dem Ort x_0 befindet, d. h.

$$x(t = 0) = x_0 \quad (36)$$

$$p(x, t = 0) = \delta_{x, x_0}. \quad (37)$$

Die Lösung der Gleichung (35) mit der Nebenbedingung (37) können wir leicht errechnen. In der Gleichung ist die partielle Ableitung nach x bis zur zweiten Ordnung enthalten, der Ort x selber aber nur bis zur nullten Ordnung. Deshalb bietet sich die Fouriertransformation nach x an, mit [111]

$$\bar{p}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\alpha x] p(x, t) dx. \quad (38)$$

Mit Hilfe der Beziehung (38) transformieren wir die Gleichung (35) zu folgender Formulierung um

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{p}(\alpha, t) = -i\mu\alpha \bar{p} - D\alpha^2 \bar{p}. \quad (39)$$

Diese Gleichung können wir nach der Variablentrennung direkt integrieren und erhalten

$$\bar{p}(\alpha, t) = C \exp[-i\mu t \alpha - D t \alpha^2], \quad (40)$$

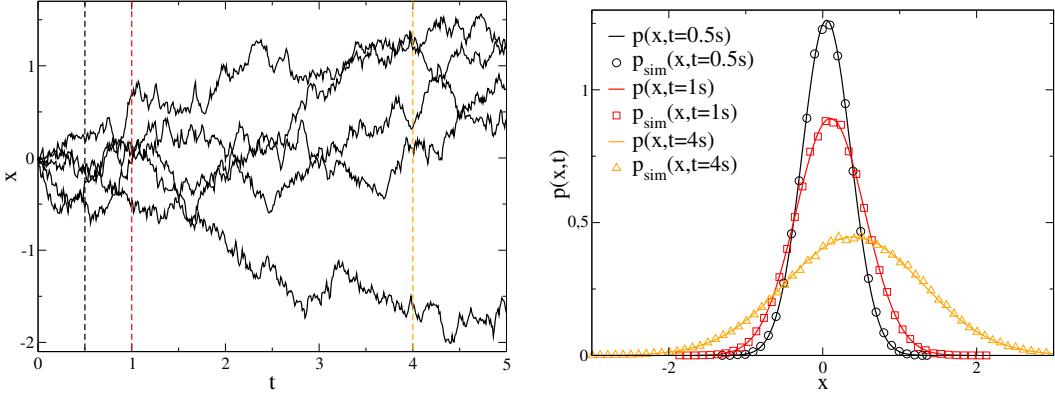


Abbildung 2: LINKS: Darstellung von 5 Trajektorien der Brownschen Bewegung. RECHTS: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, t)$ mit der Dichteverteilung $p_{sim}(x, t)$, die aus numerischen Simulationen der Langevin Gleichung mit 10^5 Trajektorien ermittelt wurde. Die Zeitpunkte sind $t = 0.5\text{ s}$, $t = 1\text{ s}$ und $t = 4\text{ s}$. Die Anfangsbedingung ist $x(t = 0\text{ s}) = 0\text{ m}$ und die Parameter sind $\mu = 0.1\text{ m s}^{-1}$ und $D = 0.1\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$.

mit der Integrationskonstanten C . Diese bestimmen wir über unsere Anfangsbedingung aus der Gleichung (37). Die Fouriertransformierte der Nebenbedingung (37) lautet

$$\bar{p}(\alpha, t = 0) = \exp [-i x_0 \alpha] . \quad (41)$$

Somit erhalten wir als vollständige Lösung im Fourierraum

$$\bar{p}(\alpha, t) = \exp [-(i \mu t + i x_0) \alpha - D t \alpha^2] . \quad (42)$$

Um nun die zeitabhängige Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, t)$ zu ermitteln, müssen wir die obige Gleichung (42) zurücktransformieren. Dabei wollen wir die folgenden beiden Beziehungen nutzen [111]

$$\mathcal{F} [\exp [-a \alpha^2]] = \frac{1}{\sqrt{2 \pi 2 a}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{x^2}{2 a} \right] \quad (43)$$

$$\mathcal{F} [\exp [i \alpha b] \bar{f}(\alpha, t)] (x, t) = f(x + b, t) , \quad (44)$$

mit einer beliebigen Funktion $\bar{f}(\alpha, t)$ im Fourierraum von x und einer Funktion $f(x, t)$ im normalen Raum. Durch Ausnutzen der oben genannten Beziehungen ermitteln wir als zeitabhängige Lösung für die eindimensionale gewöhnliche Brownsche Bewegung folgende Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi 2 D t}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_0 - \mu t)^2}{2 D t} \right] , \quad (45)$$

welche einer Gaufsschen Normalverteilung mit einem linear in der Zeit t wachsenden Mittelwert und einer ebenfalls linear in der Zeit wachsenden Varianz entspricht.

Die Langevingleichung In dem vorherigen Abschnitt haben wir die eindimensionale gewöhnliche Brownsche Bewegung anhand der Fokker-Planck Gleichung untersucht. Aus dem Abschnitt 1.2 sind uns noch die Master Gleichung und die stochastische Differentialgleichung oder Langevin Gleichung bekannt. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass bei dem einfachen Problem der gewöhnlichen Brownschen Bewegung auch eine Lösung über die Langevin Gleichung möglich ist. Aus dem Abschnitt 1.2 sind uns die Transformationsbeziehungen zwischen der Fokker-Planck Gleichung und der Langevin Gleichung in Itô Notation bekannt. Unter Nutzung dieser Beziehungen erhalten wir folgende Langevin Gleichung für die eindimensionale gewöhnliche Brownsche Bewegung [50, 78]

$$dx = \mu dt + \sqrt{2D} dW, \quad (46)$$

wobei wegen dem additiven Rauschen keine Notationsunterschiede bestehen. Die Anfangsbedingung haben wir bereits in der Gleichung (36) aufgeführt. Durch Integration der obigen Gleichung (46) nach der Zeit t erhalten wir für den Ort $x(t)$ des betrachteten Teilchens

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mu dt' + \int_0^t \sqrt{2D} dW(t'). \quad (47)$$

Aufgrund der bekannten Anfangsbedingung des Wiener Prozesses W mit $W(t=0) = 0$ entspricht die Integration über alle Änderungen dW von 0 bis t genau dem Wert $W(t)$ des Wiener Prozesses zum Zeitpunkt t . Wir ermitteln somit für $x(t)$ folgende Lösung

$$x(t) = x_0 + \mu t + \sqrt{2D} W(t). \quad (48)$$

Natürlich ist dies keine Lösung im deterministischen Sinne. Wir wissen nicht, welchen Wert $W(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t haben wird. Der Wiener Prozess W ist ein Zufallsprozess und somit ist W eine stochastische Variable. Wir können nur Wahrscheinlichkeitsaussagen tätigen, welchen Wert $W(t)$ zu dem Zeitpunkt t mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wird. Dabei wissen wir, dass der Wiener Prozess $W(t)$ einer Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Varianz t folgt. Durch Multiplikation von $\sqrt{2D}$ mit der stochastischen, normalverteilten Variablen $W(t)$ bleibt der Mittelwert des Produktes gleich und die Varianz verändert sich zu $2D t$. Und schließlich durch Addition der anderen Terme bleibt die Varianz dieser Summe gleich und der Mittelwert verändert sich um den addierten Betrag. Zusammenfassend haben wir also folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen

$$W(t) \sim N(0, t) \quad (49)$$

$$\sqrt{2D} W(t) \sim N(0, 2D t) \quad (50)$$

$$x(t) \sim N(x_0 + \mu t, 2D t), \quad (51)$$

wobei \sim folgt bedeuten soll und $N(a, b)$ für die Normalverteilung mit dem Mittelwert a und der Varianz b steht. Wir erhalten also auch mit Hilfe der Langevin Gleichung die zeitabhängige Lösung der Wahrscheinlichkeit $p(x, t) dx$, dass sich das betrachtete Teilchen zu dem Zeitpunkt t an dem Ort $[x, x+dx]$ befindet. Die Dichteverteilung $p(x, t)$ haben wir in der Gleichung (45) bereits aufgeführt, die identisch mit dem Ausdruck (51) ist.

In der Abbildung 2 (links) haben wir beispielhaft 5 Trajektorien der Brownschen Bewegung dargestellt. Zur Ermittlung der Bahnkurven haben wir die Langevin Gleichung mit Hilfe des explizite Ordnung 1.5 strengen Schemas simuliert [58]. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die Zeitmomente, für die wir die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{sim}(x, t)$ aus den 10^5 simulierten Trajektorien ermittelt haben. Die so numerisch errechnete Dichteverteilung haben wir zusammen mit der analytischen Lösung $p(x, t)$ aus der Gleichung (45) in der Abbildung 2 (rechts) dargestellt. Wir erkennen, dass beide Verteilungen für alle Zeitpunkte übereinstimmen.

2.1.2 Die (eindimensionale) geometrische Brownsche Bewegung

Die geometrische Brownsche Bewegung wurde 1946 von Kiyosi Itô entwickelt [53, 78] und basiert auf der gewöhnlichen Brownschen Bewegung. Der Unterschied zwischen den beiden Zufallsprozessen besteht darin, dass nicht die absoluten Änderungen dy der Variablen y der gewöhnlichen Brownschen Bewegung folgen, sondern die relativen Änderungen dy/y . Somit sind der Driftterm $a(y, t)$ und der Fluktuationsterm $b(y, t)$ aus der Gleichung (13) nicht mehr konstant, wie in der Gleichung (46) der gewöhnlichen Brownschen Bewegung, sondern linear von dem Zustand y abhängig. Wir erhalten als Langevin Gleichung im Itô Formalismus

$$\frac{dy}{y} = \mu dt + \sqrt{2D} dW, \quad (52)$$

mit den Konstanten μ und D . Für die Einführung einer solchen Bewegung gibt es drei Beweggründe. Erstens ergibt sich für den rein deterministischen Fall ein exponentielles Wachstum in y

$$y_{Det}(t) = y_0 \exp [\mu t], \quad (53)$$

mit der Anfangsbedingung $y(t = 0) = y_0$. Zweitens nimmt die Stärke der zufälligen Fluktuationen linear in y zu. Drittens ist die Variable y bei positivem Startwert y_0 nur positiv definiert. Hingegen waren bei der gewöhnlichen Brownschen Bewegung negative und positive Werte möglich. Insbesondere aus diesem Grund findet die geometrische Brownsche Bewegung breite Anwendung in der ökonomischen Modellierung, da dort viele Größen nur positiv sein können (Preis, Menge etc.).

Um die stochastische Differentialgleichung (52) der geometrischen Brownschen Bewegung lösen zu können, wollen wir eine Variablentransformation durchführen. Wir definieren die neue Variable x mit der Transformationsbeziehung

$$x(t) = \ln [y(t)/C], \quad (54)$$

mit der beliebigen Konstanten C , die wir gleich der Anfangsbedingung $C = y_0$ setzen. Wir transformieren die Gleichung (52) unter Anwendung der Itô Formel (23) oder dem Wechsel zum Stratonovich Formalismus (17) zu der neuen Formulierung

$$dx = (\mu - D) dt + \sqrt{2D} dW, \quad (55)$$

mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = 0$. Wir erkennen, dass wir im Gegensatz zu der gewöhnlichen Brownschen Bewegung den Term $-D dt$ erhalten haben. Die Lösung für die Variable x können wir nun leicht errechnen. Wie im vorigen Abschnitt 2.1

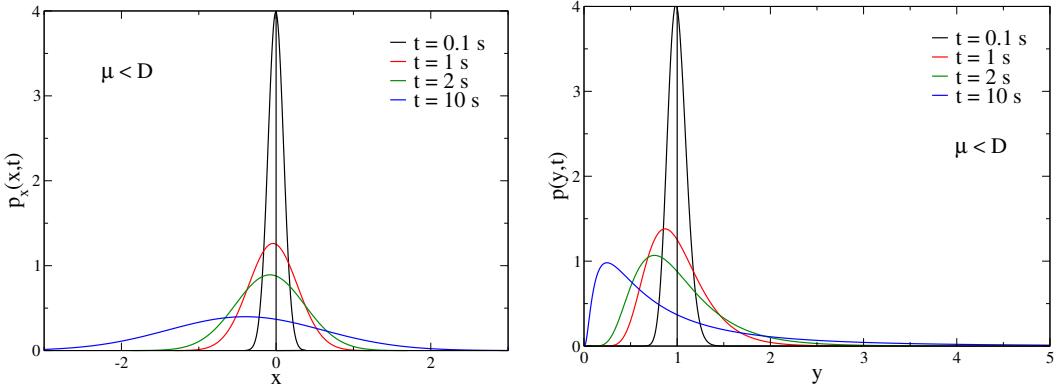


Abbildung 3: Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilungen $p_x(x, t)$ (links) und $p(y, t)$ (rechts) für die Zeitpunkte $t = 0.1 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 2 \text{ s}$ und $t = 10 \text{ s}$. Die Anfangsbedingung ist $y_0 = 1 \text{ m}$ und es gilt die Beziehung $\mu < D$.

können wir die Lösung direkt aus der Langevin Gleichung ermitteln oder nach Transformation zur Fokker-Planck Gleichung diese lösen. Wir erhalten in Analogie zu der Gleichung (46) und der dazugehörigen Lösung (45) folgende Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_x(x, t)$

$$p_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2Dt}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu - D)t)^2}{2Dt} \right]. \quad (56)$$

Die Lösung folgt somit einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $(\mu - D)t$ und der Varianz $2Dt$. Um nun die Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilung $p(y, t)$ für die ursprüngliche Variable y zu erhalten, nutzen wir in Anlehnung an die Relation (4) folgende Beziehung

$$p(y, t) = p_x(x, t) \frac{dx}{dy} = p_x(\ln[y/y_0], t) \frac{1}{y}. \quad (57)$$

Somit erhalten wir als Lösung für die geometrische Brownsche Bewegung die folgende Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilung

$$p(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2Dt}} \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\ln[y/y_0] - (\mu - D)t)^2}{2Dt} \right], \quad (58)$$

die wir auch als logarithmierte Normalverteilung bezeichnen. Wir merken an, dass sich der Erwartungswert für die jeweilige Variable x und y wie folgt entwickelt [74]

$$\langle x \rangle = (\mu - D)t \quad (59)$$

$$\langle y \rangle = y_0 \exp[\mu t]. \quad (60)$$

Anhand der obigen analytischen Lösung (siehe Gleichungen (56) und (58)) können wir drei grundlegende Fälle unterscheiden, die wir aus der Relation von μ zu D herleiten können. Für den Fall von $\mu < D$ haben wir einen linear in der Zeit abnehmenden Mittelwert für die logarithmierte Variable x . Die Normalverteilung (56) weist eine Verbreiterung in der Zeit t und eine Verschiebung des Mittelwertes zu negativen Werten auf

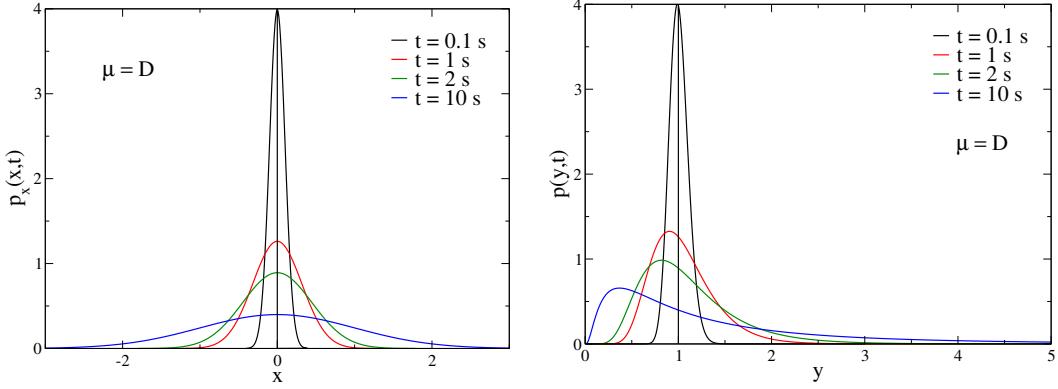


Abbildung 4: Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p_x(x,t)$ (links) und $p(y,t)$ (rechts) für die Zeitpunkte $t = 0.1 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 2 \text{ s}$ und $t = 10 \text{ s}$. Die Anfangsbedingung ist wieder $y_0 = 1 \text{ m}$ und die Beziehung $\mu = D$ für die reine Diffusion gilt.

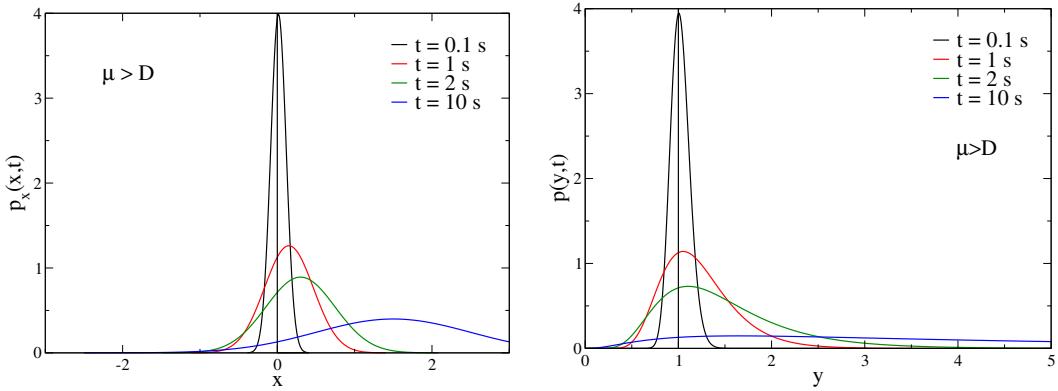


Abbildung 5: Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p_x(x,t)$ (links) und $p(y,t)$ (rechts) für die Zeitpunkte $t = 0.1 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, $t = 2 \text{ s}$ und $t = 10 \text{ s}$. Die Anfangsbedingung ist $y_0 = 1 \text{ m}$ und die Beziehung $\mu > D$ gilt.

(siehe Abbildung 3 links). Ähnliches gilt für die logarithmierte Normalverteilung (58), die sich ebenfalls verbreitert und eine Verschiebung des Wahrscheinlichkeitsmaximums hin zu kleinen Werten y aufzeigt (siehe Abbildung 3 rechts). Die Variable y strebt gegen Null für die Zeit t gegen unendlich [74]. Für den Fall der Gleichheit mit $\mu = D$ liegt in x ein reiner Diffusionsprozess vor. Die Normalverteilung (56) verbreitert sich wieder in der Zeit t und der Mittelwert bleibt in der Zeit konstant bei 0 (siehe Abbildung 4 links). Bei der logarithmierten Normalverteilung erkennen wir ebenfalls die Verbreiterung (siehe Abbildung 4 rechts). D. h. die Variable y fluktuiert zufällig zwischen großen und kleinen Werten [74]. Wir beobachten eine Verschiebung des Gipfels der Dichteverteilung hin zu $y = 0$, bei gleichzeitig sinkender Wahrscheinlichkeitsdichte je Wert $y > y_0$ (flacher werdend). Der Grund liegt darin, dass wir alle Werte von $x \in [-\infty, 0)$ auf den Bereich von $y \in [0, y_0]$ transformieren, und von $x \in [0, +\infty]$ auf $y \in [y_0, +\infty]$. Die Verbreiterung der Verteilung in x resultiert nun in einer Verbreiterung in y für $y \in [y_0, +\infty]$ und einer Faltung gemäß der Transformation (54) in dem Bereich $y \in [0, y_0]$. Darüber hinaus ergibt das Wahrscheinlichkeitsintegral für jeden Bereich 0.5. Für den dritten Fall mit $\mu > D$ erfolgt wieder eine Verbreiterung der Normalverteilung (56) in x und die Änderung des Mittelwertes hin zu positiven Werten (siehe Abbildung 5 links). In der logarithmierten Normalverteilung (58) erkennen wir wieder die Verbreiterung in y (asymmetrisch gemäß der Transformationsbeziehung (54), siehe Abbildung 5 rechts). Die Variable y tendiert gegen plus unendlich für die Zeit t gegen unendlich [74].

2.2 Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Der holländische Physiker Leonard Salomon Ornstein (1880 – 1941) und der holländisch-amerikanische Physiker George Eugene Uhlenbeck (1900 – 1988) publizierten 1930 einen Artikel zu den Grundlagen der Theorie eines freien Brownschen Teilchens [106]. Die in dieser Arbeit veröffentlichte Theorie zur Darstellung der Brownschen Bewegung ist heute als Ornstein-Uhlenbeck Prozess bekannt. Als Grundlage dieser Beschreibung dient die bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung [65]

$$m \frac{d}{dt} v = F(x, v, t), \quad (61)$$

mit einer Kraft F des betrachteten Teilchens, abhängig von dem Ort x , der Geschwindigkeit $v = dx/dt$ und der Zeit t . Diese zeitabhängige Kraft F muss nun näher spezifiziert werden. Zum einen ist bekannt, dass ein Teilchen aufgrund der Reibung zur Ruhe kommt, falls keine zusätzlichen Kräfte auf das Teilchen einwirken. Wir definieren daher den in der Geschwindigkeit linearen Ansatz für die Reibungskraft $F_R(v)$

$$F_R(v) = -m \gamma v, \quad (62)$$

die auch als Stokes Reibung bekannt ist [106]. Das Teilchen, dessen Ort und Geschwindigkeit wir betrachten, erfährt auch Krafteinwirkungen durch die Lösungsmittelteilchen. Da wir diese Kräfte aber aufgrund deren Vielzahl nicht einzeln deterministisch erfassen können, repräsentiert die stochastische Kraft $F_S(t)$ die Summe der auf das Teilchen zusätzlich einwirkenden Kräfte [106]

$$F_S(t) dt = m \sqrt{2B} dW(t) \quad (63)$$

$$\langle dW(t) \rangle = 0 \quad (64)$$

$$\langle dW(t) dW(t') \rangle = dt \delta(t - t') . \quad (65)$$

Durch Einsetzen der Reibungskraft $F_R(v)$ aus der Gleichung (62) und der stochastischen Kraft $F_S(t)$ der Gleichung (63) in die Newtonsche Bewegungsgleichung (61) erhalten wir das stochastische Differentialgleichungssystem des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses im Langevin Formalismus [78, 96, 106]

$$dx = v dt \quad (66)$$

$$dv = -\gamma v dt + \sqrt{2B} dW(t) . \quad (67)$$

Wir können dasselbe System auch als Fokker-Planck Gleichung erfassen, die wie folgt lautet ($p = p(x, v, t)$)

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\frac{\partial}{\partial x}[v p] + \frac{\partial}{\partial v}[\gamma v p] + \frac{\partial^2}{\partial v^2}[B p] . \quad (68)$$

Als Anfangsbedingungen setzen wir

$$p(x, v, t=0) = \delta_{x-x_0} \delta_{v-v_0} . \quad (69)$$

Die erhaltene Fokker-Planck Gleichung (68) wollen wir jetzt lösen. Da der Ort x nur in der ersten Ableitung auf der rechten Seite der Gleichung auftaucht, führen wir eine Fouriertransformation nach dieser Variablen durch. Wir definieren [111]

$$p(x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \exp[i k_x x] \bar{p}(k_x, v, t) \quad (70)$$

$$p = p(x, v, t) \quad (71)$$

$$\bar{p} = \bar{p}(k_x, v, t) . \quad (72)$$

Somit ergibt sich die Fokker-Planck Gleichung (68) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{p} = -i k_x v \bar{p} + \frac{\partial}{\partial v}[\gamma v \bar{p}] + \frac{\partial^2}{\partial v^2}[B \bar{p}] . \quad (73)$$

Die erhaltene Gleichung (73) enthält die zweite Ableitung nach der Geschwindigkeit v , hat aber die Geschwindigkeit v selber nur bis zur ersten Potenz enthalten. Daher führen wir ebenfalls eine Fouriertransformation nach v wie folgt durch [31]

$$\bar{p}(k_x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v \exp[i k_v v] \tilde{p}(k_x, k_v, t) \quad (74)$$

$$\begin{aligned} v \bar{p}(k_x, v, t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v i \frac{\partial}{\partial k_v} \exp[i k_v v] \tilde{p}(k_x, k_v, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v i \exp[i k_v v] \frac{\partial}{\partial k_v} \tilde{p}(k_x, k_v, t) \end{aligned} \quad (75)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(k_x, k_v, t) . \quad (76)$$

Somit ermitteln wir für die Fokker-Planck Gleichung (73) des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses folgende Formulierung im Fourierraum von x und v

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} = [k_x - \gamma k_v] \frac{\partial}{\partial k_v} \tilde{p} - B k_v^2 \tilde{p} \quad (77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} + [\gamma k_v - k_x] \frac{\partial}{\partial k_v} \tilde{p} = -B k_v^2 \tilde{p}. \quad (78)$$

Die obige Gleichung repräsentiert ein Cauchy Problem, das wir mit Hilfe der Methode der Charakteristiken lösen wollen. Wir wandeln dazu die Gleichung (78) in ein System von zwei Differentialgleichungen um

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{k}_v = \gamma \bar{k}_v - k_x \quad (79)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} = -B \bar{k}_v^2 \tilde{p}. \quad (80)$$

Hierbei ist \bar{k}_v eine Funktion der „intrinsischen“ Zeit τ mit der Eigenschaft $0 \leq \tau \leq t$. Weiterhin definieren wir die Randbedingung mit

$$\bar{k}_v(\tau = t) = k_v. \quad (81)$$

Die Anwendung der Methode der Variation der Konstanten ermöglicht die Lösung der Differentialgleichung (79) für die Variable \bar{k}_v . Die Lösung lautet wie folgt

$$\bar{k}_v(\tau) = \left[\bar{k}_0 - \frac{k_x}{\gamma} \right] \exp[\gamma \tau] + \frac{k_x}{\gamma}, \quad (82)$$

mit einer beliebigen Konstanten \bar{k}_0 . Durch Einbeziehung der aufgeführten Randbedingung (81) errechnen wir als vollständige Lösung

$$\bar{k}_v(\tau) = \left[k_v - \frac{k_x}{\gamma} \right] \exp[\gamma(\tau - t)] + \frac{k_x}{\gamma}. \quad (83)$$

Diese Gleichung nutzen wir nun zur Lösung der Differentialgleichung (80)

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 \exp[-\Phi(t)] \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= B \int_0^t \bar{k}_v^2(\tau) d\tau \\ &= B \left[\frac{A^2}{2\gamma} (\exp[2\gamma t] - 1) + C^2 t + 2 \frac{AC}{\gamma} (\exp[\gamma t] - 1) \right] \end{aligned} \quad (85)$$

$$A = \left[k_v - \frac{k_x}{\gamma} \right] \exp[-\gamma t] \quad (86)$$

$$C = \frac{k_x}{\gamma}. \quad (87)$$

Die Anfangsbedingung (69) für die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung im Fourierraum lautet

$$\tilde{p}(k_x, k_v, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i k_x x_0] \exp[-i k_v v_0]. \quad (88)$$

Bei Einsetzen der Anfangsbedingung in die Lösung für p ersetzen wir k_v mit dem äquivalenten $\bar{k}_v(0)$. Die vollständige Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $\tilde{p}(k_x, k_v, t)$ im Fourierraum lautet daher

$$\tilde{p}(k_x, k_v, t) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i k_x x_0] \exp[-i v_0 (A + C)] \exp[-\Phi(t)] \quad (89)$$

$$\Phi(t) = B \left[\frac{A^2}{2\gamma} (\exp[2\gamma t] - 1) + C^2 t + 2 \frac{AC}{\gamma} (\exp[\gamma t] - 1) \right] \quad (90)$$

$$A = \left[k_v - \frac{k_x}{\gamma} \right] \exp[-\gamma t] \quad (91)$$

$$C = \frac{k_x}{\gamma}. \quad (92)$$

Um die eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung im Geschwindigkeitsraum v zu erhalten, integrieren wir über alle Orte x und nutzen die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} p_v(v, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, v, t) = \sqrt{2\pi} \bar{p}(0, v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v \exp[i k_v v] \tilde{p}(0, k_v, t) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[\tilde{p}(0, k_v, t)](v, t), \end{aligned} \quad (93)$$

wobei $\mathcal{F}[k](x)$ für die inverse Fouriertransformation oder Fourierrücktransformation steht. Somit ist die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung für die Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt t die Fourierücktransformation der Lösung im Fourierraum, wenn wir $k_x = 0$ setzen. Wir errechnen demgemäß

$$p_v(v, t) = \sqrt{2\pi} F[\tilde{p}(0, k_v, t)](v, t) \quad (94)$$

$$\tilde{p}(0, k_v, t) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i k_v v_0 \exp[-\gamma t]] \exp[-\phi(t) k_v^2] \quad (95)$$

$$\phi(t) = \frac{B}{2\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]) \quad (96)$$

$$\mathcal{F}[\exp[-\phi(t) k_v^2]](v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\phi(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{v^2}{2\phi(t)}\right] \quad (97)$$

$$\mathcal{F}[\bar{f}(k_v, t)](v, t) = f(v, t) \quad (98)$$

$$\mathcal{F}[\exp[i k_v b] \bar{f}(k_v, t)](v, t) = f(v + b, t). \quad (99)$$

Wir erhalten somit die vollständige Lösung im Geschwindigkeitsraum v mit

$$p_v(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_v^2(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(v - v_0 \exp[-\gamma t])^2}{\sigma_v^2(t)}\right] \quad (100)$$

$$\sigma_v^2(t) = \frac{B}{\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]). \quad (101)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_v(v, t)$ für die Geschwindigkeit v zu der Zeit t haben wir in der Abbildung 6 für drei ausgewählte Zeitpunkte dargestellt. Die gepunkte Linie kennzeichnet hierbei unsere Anfangsbedingung $p_v(v, t = 0 \text{ s}) = \delta_{v-v_0}$ mit $v_0 = 1 \text{ m/s}$. Die gestrichelte Linie entspricht dem Mittelwert der Geschwindigkeit in der

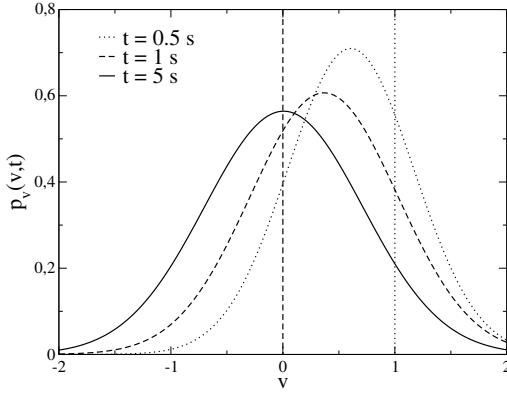


Abbildung 6: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_v(v, t)$ aus der Gleichung (100) für drei verschiedene Zeitpunkte. Die gewählten Parameter sind $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingung lautet $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

Grenze für t gegen unendlich. Die Relaxation der Verteilung hin zu der Gleichgewichtsverteilung als stationäre Lösung ist in der Abbildung sehr gut zu erkennen. In der Abbildung 7 haben wir den Driftterm $\frac{\partial}{\partial v}(\gamma v p_v(v, t))$, den Diffusionsterm $\frac{\partial^2}{\partial v^2}(B p_v(v, t))$ und deren Summe $\frac{\partial}{\partial t}p_v(v, t)$ über die Geschwindigkeit v dargestellt. Es ist sehr gut zu erkennen, wie beide Terme bei kleinen Zeiten t (Abbildung 7 links, $t = 0.5 \text{ s}$) die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_v(v, t)$ hin zu der stationären Lösung verändern. Ebenfalls ist ersichtlich, dass sich bei großen Zeiten beide Terme aufheben (durchgezogene Linie bei Null), woraus die stationäre Dichteverteilung für die Geschwindigkeit v resultiert.

Wenn wir für die Gleichung (100) die Grenze für die Zeit t gegen unendlich betrachten, ergibt sich die uns bekannte Maxwell-Verteilung [96]

$$p_v(v, t) = \frac{m}{\sqrt{2\pi k_B T}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}\right] \quad (102)$$

$$B = \gamma k_B T/m, \quad (103)$$

mit der Temperatur T , der Teilchenmasse m und der Boltzmann Konstanten k_B . Wir sehen, dass die Fluktuationen der Geschwindigkeit eines Teilchens unmittelbar mit der Temperatur bzw. der thermischen Energie $k_B T$ verknüpft sind. Diese Aussage ist als Fluktuations-Dissipations-Theorem bekannt und durch die Gleichung (103) beschrieben.

In der gleichen Verfahrensweise können wir die Lösung für die Ortswahrscheinlichkeitsdichte errechnen

$$p_x(x, t) = \sqrt{2\pi} F[\tilde{p}(k_x, 0, t)] \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k_x, 0, t) &= \frac{1}{2\pi} \exp[-ik_x x_0] \exp[-ik_x v_0(1 - \exp[-\gamma t])/\gamma] \exp[-\omega(t) k_x^2] \\ \omega(t) &= -\frac{3}{2} \frac{B}{\gamma^3} - \frac{B}{2\gamma^3} \exp[-2\gamma t] + \frac{B}{\gamma^2} t + 2 \frac{B}{\gamma^3} \exp[-\gamma t]. \end{aligned} \quad (105)$$

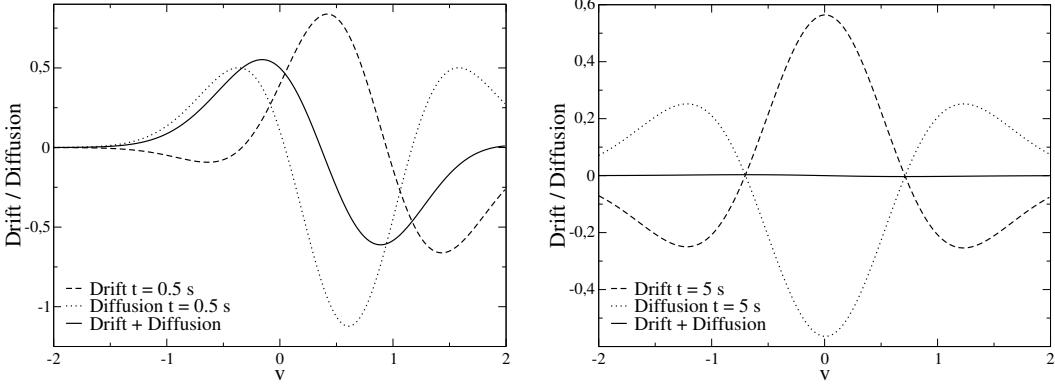


Abbildung 7: Darstellung des Driftterms und des Diffusionsterms sowie deren Summe über die Geschwindigkeit v für zwei verschiedene Zeitpunkte. Die gewählten Parameter sind $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingung lautet $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

Somit erhalten wir als Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_x(x, t)$ des Ortes x zu der Zeit t

$$p_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x - \mu_x(t))^2}{\sigma_x^2(t)}\right] \quad (106)$$

$$\mu_x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - \exp[-\gamma t]) \quad (107)$$

$$\sigma_x^2(t) = \frac{2B}{\gamma^2} t - 3 \frac{B}{\gamma^3} + 4 \frac{B}{\gamma^3} \exp[-\gamma t] - \frac{B}{\gamma^3} \exp[-2\gamma t]. \quad (108)$$

Die zeitabhängige Entwicklung der Varianz $\sigma_x^2(t)$ des Ortes x wurde als erstes von Ornstein hergeleitet [106]. Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für den Ort x in der Zeit t haben wir in der Abbildung 8 dargestellt. Die gepunktete Linie zeigt wieder unsere gewählte Anfangsbedingung mit $p_x(x, t = 0 \text{ s}) = \delta_{x-x_0}$ mit $x_0 = 0 \text{ m}$. Die gestrichelte Linie steht für den Mittelwert des Ortes in der Grenze für die Zeit t gegen unendlich. Das Zerfließen der Verteilung mit zunehmender Zeit t ist sehr gut zu erkennen.

Wenn wir die Varianz im Ort x näher betrachten, so erkennen wir, dass wir für Zeiten t gegen unendlich bzw. für $\gamma t \gg 1$ folgende Beziehung haben

$$\sigma_x^2 \sim \frac{2B}{\gamma^2} t = 2D t. \quad (109)$$

D. h. die mittlere quadratische Abweichung im Ort x steigt linear in der Zeit t an, wobei der Parameter $D = B/\gamma^2$ als Diffusionskonstante bekannt ist. Diese Streuung im Ortsraum x hatte Albert Einstein (1879 – 1955) als Erster für ein frei bewegliches Teilchen gelöst [106]. Er hatte somit das Langzeitverhalten der Varianzdynamik richtig ermittelt. Das lineare Verhalten der Varianz des Ortes x bei großen Zeiten t wird noch einmal in der Abbildung 9 verdeutlicht.

Um die Rücktransformation der Lösung im Fourierraum zu ermöglichen, schreiben wir die Lösung aus der Gleichung (92) etwas modifiziert auf, und zwar

$$\tilde{p}(k_x, k_v, t) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i k_x \mu_x] \exp[-i k_v \mu_v]$$

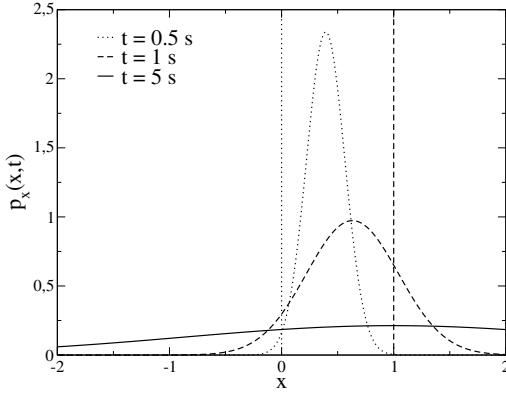


Abbildung 8: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_x(x, t)$ aus der Gleichung (106) für drei verschiedene Zeitpunkte. Die gewählten Parameter sind $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingungen lauten $x_0 = 0 \text{ m}$ und $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

$$\exp[-\sigma_x^2 k_x^2 - \sigma_v^2 k_v^2 - \sigma_{xv}^2 k_v k_x] \quad (110)$$

$$\mu_x = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - \exp[-\gamma t]) \quad (111)$$

$$\mu_v = v_0 \exp[-\gamma t] \quad (112)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{B}{2\gamma^3} (1 - \exp[-2\gamma t]) + \frac{B}{\gamma^2} t - 2 \frac{B}{\gamma^3} (1 - \exp[-\gamma t]) \quad (113)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{B}{2\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]) \quad (114)$$

$$\sigma_{xv}^2 = -\frac{B}{\gamma^2} (1 - \exp[-2\gamma t]) + 2 \frac{B}{\gamma^2} (1 - \exp[-\gamma t]). \quad (115)$$

Zunächst wollen wir die Variable k_v zurücktransformieren. Hierbei verwenden wir die bekannte Lösung aus Gleichung (110) im Fourieraum leicht modifiziert mit

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k_x, k_v, t) &= \frac{1}{2\pi} \exp[-i k_x \mu_x] \exp[-i k_v \bar{\mu}_v] \\ &\quad \exp[-\sigma_x^2 k_x^2 - \sigma_v^2 k_v^2] \\ \bar{\mu}_v &= \mu_v - i \sigma_{xv}^2 k_x. \end{aligned} \quad (116)$$

Unter Ausnutzung der bekannten Beziehungen bei der Fourierreücktransformation aus der Gleichung (99) ermitteln wir die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\bar{p}(k_x, v, t)$ mit

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{2\sigma_v^2}} \exp[-i k_x \mu_x] \exp[-\sigma_x^2 k_x^2] \\ &\quad \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(v - (\mu_v - i \sigma_{xv}^2 k_x))^2}{2\sigma_v^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{2\sigma_v^2}} \exp[-i k_x \bar{\mu}_x] \exp[-\bar{\sigma}_x^2 k_x^2] \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right] \end{aligned} \quad (117)$$

$$\bar{\mu}_x = \mu_x + (v - \mu_v) \sigma_{xv}^2 / (2\sigma_v^2) \quad (118)$$

$$\bar{\sigma}_x^2 = \sigma_x^2 - \sigma_{xv}^4 / (4\sigma_v^2). \quad (119)$$

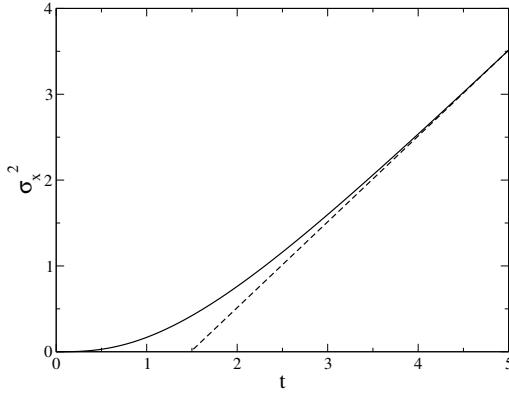


Abbildung 9: Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Varianz σ_x^2 des Ortes x eines Brownschen Teilchens in der Zeit t (siehe Gleichung (108)). Die gestrichelte Linie hat den Anstieg $2D = 2B/\gamma^2$ aus dem linearen Term $2Dt$, der bei großen Zeiten dominant wird (siehe Gleichung (109)). Die gewählten Parameter sind $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$.

Die so erhaltene Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung \bar{p} können wir leicht zu der von uns gewünschten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ zurücktransformieren

$$p(x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2\sigma_v^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi 2\bar{\sigma}_x^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \bar{\mu}_x)^2}{2\bar{\sigma}_x^2}\right]. \quad (120)$$

Nach geeigneter Transformation stimmt unsere Lösung mit der in [12, 13] überein (Details siehe Anhang C). Die Wahrscheinlichkeitsdichte p wird in den Einheiten s/m^2 angegeben. Wir haben somit die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung errechnet, mit der wir die Wahrscheinlichkeit angeben können, dass wir ein Teilchen an dem Ort $[x, x + dx]$ mit der Geschwindigkeit $[v, v + dv]$ zum Zeitpunkt t antreffen. Die erhaltene Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ haben wir in der Abbildung 10 dargestellt. Die Verbreiterung in Ortsrichtung x mit zunehmender Zeit t , sowie das stationäre Profil in Geschwindigkeitsrichtung v sind sehr gut zu erkennen. Weiterhin ist leicht zu sehen, dass eine reine Multiplikation der eindimensionalen Verteilungen für den Ort x und der Geschwindigkeit v nicht die gegenseitige Abhängigkeit beachtet.

2.3 Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit linearem Potenzial

In dem vorherigen Abschnitt haben wir den bekannten Ornstein-Uhlenbeck Prozess behandelt und die zeitabhängige Lösung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ermittelt. Die Bewegung selber läuft in einem Raumgebiet mit konstantem Potenzial ab, das wir auf Null normiert hatten. Wir wollen jetzt den gleichen Prozess mit einem linearen Potenzial in x betrachten. Wir definieren das Potenzial mit

$$U(x) = -m\gamma\theta x. \quad (121)$$

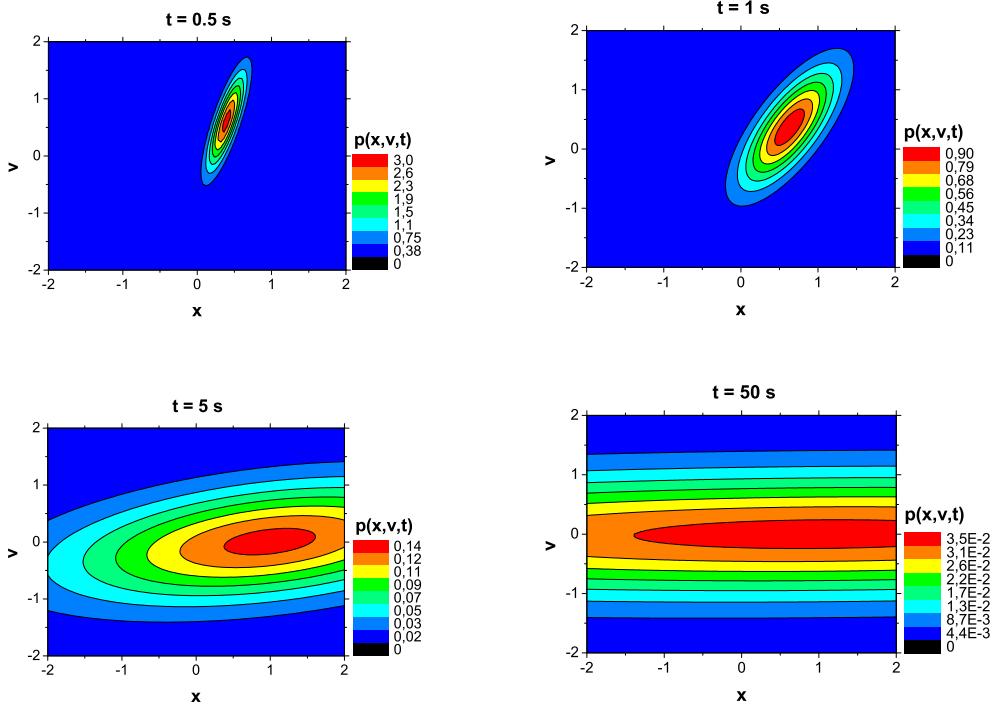


Abbildung 10: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, v, t)$ aus der Gleichung (120) für vier verschiedene Zeitpunkte $t = 0.5$ s (links oben), $t = 1$ s (rechts oben), $t = 5$ s (links unten) und $t = 50$ s (rechts unten). Die gewählten Parameter sind $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingungen sind $x_0 = 0 \text{ m}$ und $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

Durch die bekannte Beziehung von [65]

$$F_{ext}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x), \quad (122)$$

erhalten wir einen konstanten Kraftterm $F_{ext} = m \gamma \theta$ in der Bewegungsgleichung (61), zusätzlich zu der Reibungskraft F_R (Gleichung (62)) und der stochastischen Kraft F_S (Gleichung (63)). Dementsprechend ergibt sich das Gleichungssystem im Langevin Formalismus zu

$$dx = v dt \quad (123)$$

$$dv = \gamma(\theta - v) dt + \sqrt{2B} dW(t). \quad (124)$$

Gegenüber dem Standardfall (67) enthält die Gleichung (124) den zusätzlichen Term $\gamma \theta dt$. Der Parameter θ gibt dabei den Mittelwert der Geschwindigkeit v an. Die äquivalente Fokker-Planck Gleichung für die zeitabhängige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, v, t) = p$ lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\frac{\partial}{\partial x}[v p] - \frac{\partial}{\partial v}[\gamma \theta p] + \frac{\partial}{\partial v}[\gamma v p] + \frac{\partial^2}{\partial v^2}[B p]. \quad (125)$$

Nach zweimaliger Fouriertransformation analog dem vorherigen Abschnitt mit $\bar{p} = \tilde{p}(k_x, v, t)$ und $\tilde{p} = \tilde{p}(k_x, k_v, t)$ erhalten wir folgende zu lösende Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} + [\gamma k_v - k_x] \frac{\partial}{\partial k_v} \tilde{p} = -[B k_v^2 + i \gamma \theta k_v] \tilde{p}. \quad (126)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass das charakteristische Gleichungssystem sich nur bezüglich \tilde{p} und nicht bezüglich $\bar{k}_v(\tau)$ ändert. Somit können wir die Lösung für $\bar{k}_v(\tau)$ aus der Gleichung (83) übernehmen. Die Lösung für \tilde{p} errechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} = -[B \bar{k}_v^2 + i \gamma \theta \bar{k}_v] \tilde{p} \quad (127)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 \exp[-\Phi(t)] \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^t d\tau \{B \bar{k}_v^2(\tau) + i \gamma \theta \bar{k}_v(\tau)\} \\ &= \frac{B A^2}{2 \gamma} (\exp[2 \gamma t] - 1) + B C^2 t + 2 \frac{B A C}{\gamma} (\exp[\gamma t] - 1) \\ &\quad + i \theta A (\exp[\gamma t] - 1) + i \gamma \theta C t \end{aligned} \quad (129)$$

$$A = \left[k_v - \frac{k_x}{\gamma} \right] \exp[-\gamma t] \quad (130)$$

$$C = \frac{k_x}{\gamma}. \quad (131)$$

Die Anfangsbedingungen sind die gleichen wie im vorherigen Abschnitt. Damit ergibt sich ebenfalls die gleiche Konstante \tilde{p}_0 .

Wir wollen die obige Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung im Fourierraum analog der Gleichung (110) umstellen. Wir ermitteln

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k_x, k_v, t) &= \frac{1}{2 \pi} \exp[-i k_x \mu_x] \exp[-i k_v \mu_v] \\ &\quad \exp[-\sigma_x^2 k_x^2 - \sigma_v^2 k_v^2 - \sigma_{xv}^2 k_v k_x] \end{aligned} \quad (132)$$

$$\mu_x = x_0 + \left(\frac{v_0}{\gamma} - \frac{\theta}{\gamma} \right) (1 - \exp[-\gamma t]) + \theta t \quad (133)$$

$$\mu_v = v_0 \exp[-\gamma t] + \theta (1 - \exp[-\gamma t]) \quad (134)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{B}{2 \gamma^3} (1 - \exp[-2 \gamma t]) + \frac{B}{\gamma^2} t - 2 \frac{B}{\gamma^3} (1 - \exp[-\gamma t]) \quad (135)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{B}{2 \gamma} (1 - \exp[-2 \gamma t]) \quad (136)$$

$$\sigma_{xv}^2 = -\frac{B}{\gamma^2} (1 - \exp[-2 \gamma t]) + 2 \frac{B}{\gamma^2} (1 - \exp[-\gamma t]). \quad (137)$$

Wir erhalten somit für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess in einem linearen Potenzial eine analoge Lösung mit nur leicht modifizierten Parametern

$$p(x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi 2 \sigma_v^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(v - \mu_v)^2}{2 \sigma_v^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2 \pi 2 \bar{\sigma}_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \bar{\mu}_x)^2}{2 \bar{\sigma}_x^2} \right] \quad (138)$$

$$\bar{\mu}_x = \mu_x + (v - \mu_v) \sigma_{xv}^2 / (2 \sigma_v^2) \quad (139)$$

$$\bar{\sigma}_x^2 = \sigma_x^2 - \sigma_{xv}^4 / (4 \sigma_v^2). \quad (140)$$

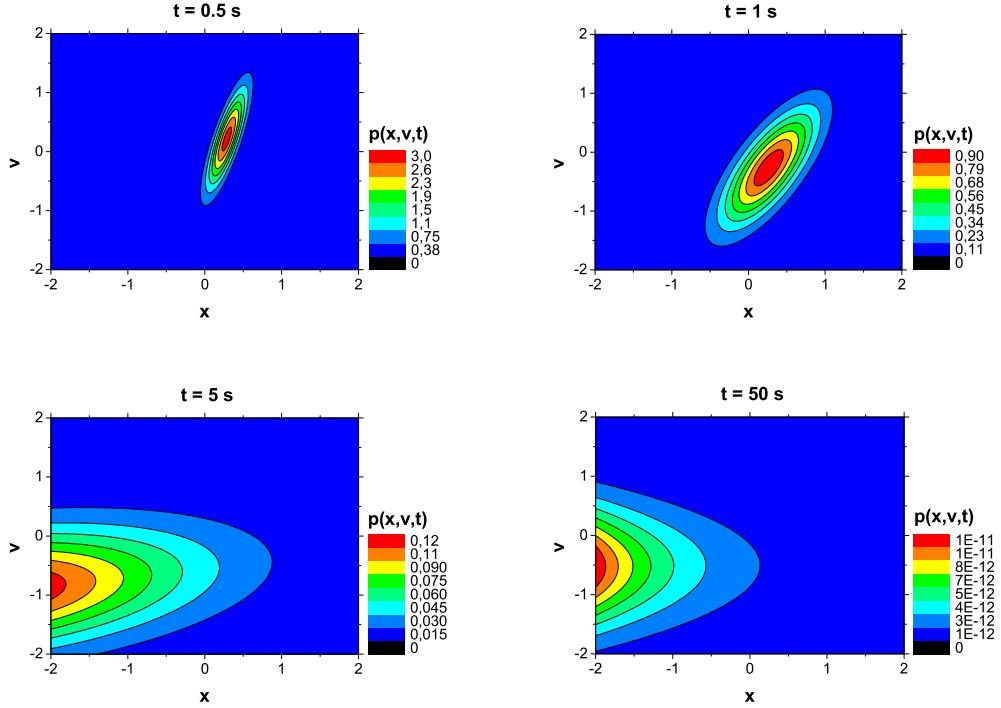


Abbildung 11: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, v, t)$ aus der Gleichung (138) für vier verschiedene Zeitpunkte $t = 0.5 \text{ s}$ (links oben), $t = 1 \text{ s}$ (rechts oben), $t = 5 \text{ s}$ (links unten) und $t = 50 \text{ s}$ (rechts unten). Die gewählten Parameter sind $\theta = -1 \text{ m/s}$, $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingungen lauten $x_0 = 0 \text{ m}$ und $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

Die erhaltene Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, v, t)$ haben wir in der Abbildung 11 dargestellt. Der Drift und die Verbreiterung in Ortsrichtung x mit zunehmender Zeit, sowie das stationäre Profil in Geschwindigkeitsrichtung v (jetzt mit einem von null verschiedenen Mittelwert) sind sehr gut zu erkennen. Beim Vergleich der Lösungen für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit konstantem Potenzial (normiert auf Null im vorherigen Abschnitt, siehe Gleichung (120)) und mit linearem Potenzial (siehe Gleichung (138)) können wir die gleiche analytische Form der zweidimensionalen Gaußverteilung feststellen. Die Varianzen (und die Korrelation zwischen dem Ort x und der Geschwindigkeit v) sind bei beiden Lösungen identisch. Das Potenzial hat hingegen die Mittelwerte μ_v und $\bar{\mu}_x$ verändert. Die Geschwindigkeit v relaxiert jetzt für $t \rightarrow \infty$ gegen den Mittelwert θ . Hierdurch haben wir ebenfalls einen deterministischen Drift in dem Ort x in Höhe von θt , zuzüglich des Einflusses der Anfangsbedingung durch den Differenzbetrag $1/\gamma(v_0 - \theta)$. Setzen wir den Parameter θ gleich Null, so geht die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, v, t)$ aus der Gleichung (138) des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses mit linearem Potenzial in die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, v, t)$ aus der Gleichung (120) des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses mit konstantem

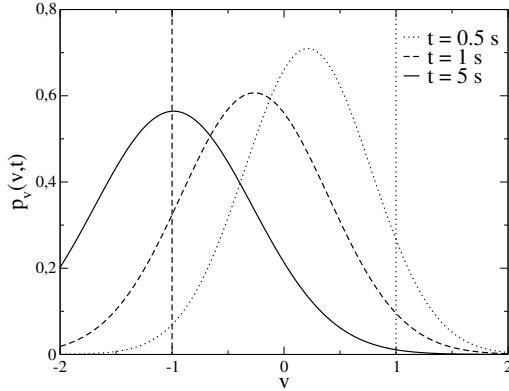


Abbildung 12: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p_v(v, t)$ aus der Gleichung (141) für drei verschiedene Zeitpunkte. Die gewählten Parameter sind $\theta = -1 \text{ m/s}$, $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingung setzen wir mit $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

Potenzial über.

Aus der gemeinsamen Lösung (138) für den Ort x und die Geschwindigkeit v können wir wieder die eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen für die jeweilige Variable alleine ableiten. Für die Geschwindigkeit v ermitteln wir

$$p_v(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2\sigma_v^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2} \right] \quad (141)$$

$$\mu_v = v_0 \exp[-\gamma t] + \theta (1 - \exp[-\gamma t]) \quad (142)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{B}{2\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]). \quad (143)$$

Die zeitabhängige Lösung für die Geschwindigkeit v haben wir in der Abbildung 12 dargestellt. Wir erkennen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung wieder einer Gaußverteilung entspricht. Durch die Einführung des linearen Potenzials im Ortsraum hat sich der Mittelwert der stationären Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung nach θ verschoben. Die Varianz (bzw. die Fluktuation der Geschwindigkeit) ist jedoch durch das lineare Potenzial nicht beeinflusst.

Wir errechnen aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ die eindimensionale Verteilung für den Ort x . Die zeitabhängige Lösung lautet

$$p_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2\sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (144)$$

$$\mu_x = x_0 + \left(\frac{v_0}{\gamma} - \frac{\theta}{\gamma} \right) (1 - \exp[-\gamma t]) + \theta t \quad (145)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{B}{2\gamma^3} (1 - \exp[-2\gamma t]) + \frac{B}{\gamma^2} t - 2 \frac{B}{\gamma^3} (1 - \exp[-\gamma t]). \quad (146)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_x(x, t)$ des Ortes x zu der Zeit t haben wir in der Abbildung 13 dargestellt. Auch diese Verteilung folgt einer Gaußverteilung. Die

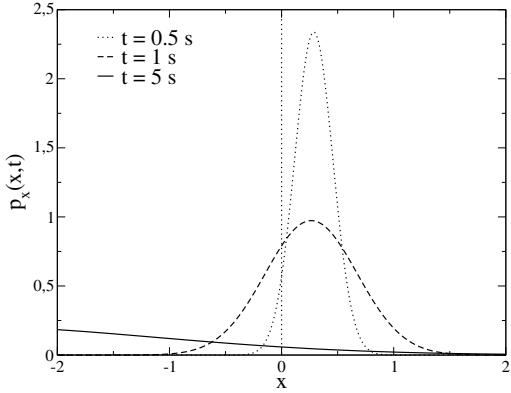


Abbildung 13: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_x(x, t)$ aus der Gleichung (144) für drei verschiedene Zeitpunkte. Die gewählten Parameter sind $\theta = -1 \text{ m/s}$, $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingungen lauten $x_0 = 0 \text{ m}$ und $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

Varianz (bzw. die Fluktuation im Ortsraum) wird durch die Einführung des linearen Potenzials nicht beeinflusst. Da aber die Geschwindigkeit gegen eine festen Wert θ strebt, wird der zeitliche Mittelwert von dem Ort x durch einen linearen Term θt im Limes für die Zeit t gegen unendlich dominiert.

Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit linearem Potenzial unterscheidet sich nur in den Mittelwerten der zweidimensionalen Gaußverteilung von dem normalen Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Wir haben daher in der Abbildung 14 den Mittelwert der Geschwindigkeit μ_v in Abhängigkeit von dem Mittelwert des Ortes μ_x für die Zeiten t von 0 s bis 5 s abgebildet. Die Beziehung der beiden Mittelwerte verläuft beim normalen Ornstein-Uhlenbeck Prozess immer linear mit einem festen Anfangspunkt (entsprechend unseren gesetzten Anfangsbedingungen) $\mu_x = x_0$, $\mu_v = v_0$ und einem festen Endpunkt $\mu_x = x_0 + v_0/\gamma$, $\mu_v = 0$ für den Grenzfall t gegen unendlich. Bei dem Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit linearem Potenzial hingegen ist die Beziehung zwischen den beiden Mittelwerten immer nichtlinear für $\theta \neq 0$. Der Anfangspunkt ist aufgrund der gleichen Anfangsbedingungen identisch. Der Endpunkt ist für $\mu_x(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, $\mu_v(t \rightarrow \infty) = \theta$. Daher resultiert auch die nichtlineare Beziehung der beiden Mittelwerte.

2.4 Der exponentielle Ornstein-Uhlenbeck Prozess

Wir haben folgendes Gleichungssystem im Langevin Formalismus gegeben

$$dx = \theta \exp [a v] dt \quad (147)$$

$$dv = -\gamma v dt + \sqrt{2B} dW(t). \quad (148)$$

Da jetzt die Geschwindigkeit v in der Exponentialfunktion enthalten ist, kann der Ort x nur positive Werte annehmen, wenn wir im Positiven starten. Darüber hinaus kann der Ort in der Zeit nur zunehmen. Eine Verringerung in der Zeit ist nicht möglich. Wir

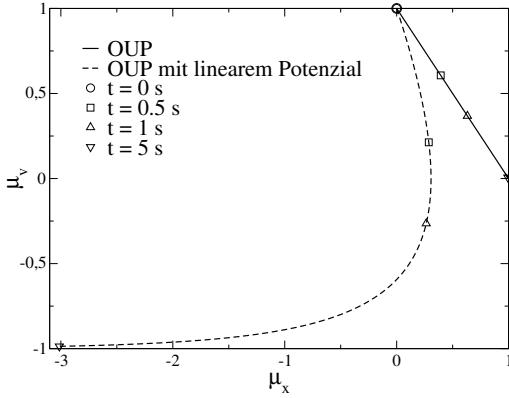


Abbildung 14: Darstellung des Mittelwertes der Geschwindigkeit μ_v über den Mittelwert des Ortes μ_x für die Zeiten t von 0 s bis 5 s. OUP steht als Abkürzung für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Die gewählten Parameter sind $\theta = -1 \text{ m/s}$, $B = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ und $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Anfangsbedingungen setzen wir mit $x_0 = 0 \text{ m}$ und $v_0 = 1 \text{ m/s}$.

können wieder leicht die Fokker-Planck Gleichung formulieren mit $p = p(x, v, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\frac{\partial}{\partial x} [\theta \exp [a v] p] + \frac{\partial}{\partial v} [v p] + \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B p]. \quad (149)$$

Als Anfangsbedingungen setzen wir

$$p(x, v, t = 0) = \delta_{x-x_0} \delta_{v-v_0} \quad (150)$$

$$p(0, v, t) = 0 \text{ für } x_0 > 0. \quad (151)$$

Wir führen zunächst eine Laplacetransformation des Ortes x durch, da dieser nur positiv definiert ist. Die Beziehung lautet daher

$$\bar{p}(k_x, v, t) = \int_0^{+\infty} dx \exp [-k_x x] p(x, v, t). \quad (152)$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{p} = -\theta \exp [a v] k_x \bar{p} + \frac{\partial}{\partial v} (v \bar{p}) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (B \bar{p}). \quad (153)$$

Wir wollen ebenfalls eine Fouriertransformation bezüglich der Geschwindigkeit v vornehmen

$$\bar{p}(k_x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v \exp [i k_v v] \tilde{p}(k_x, k_v, t) \quad (154)$$

$$\exp [a v] \bar{p}(k_x, v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_v \exp [i (k_v + i a) v] \tilde{p}(k_x, k_v + i a, t) \quad (155)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(k_x, k_v, t). \quad (156)$$

Wir ermitteln somit die Bewegungsgleichung im Fourierraum als

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(k_x, k_v, t) = -\theta k_x \tilde{p}(k_x, k_v + i a, t) - \gamma k_v \frac{\partial}{\partial k_v} \tilde{p}(k_x, k_v, t) - B k_v^2 \tilde{p}(k_x, k_v, t). \quad (157)$$

Taylorentwicklung Wir können nun die Funktion \tilde{p} an der Stelle k_v entwickeln. Hierbei beziehen wir aber nur die erste Ordnung mit ein. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} + [\gamma k_v + i a \theta k_x] \frac{\partial}{\partial k_v} \tilde{p} = -[\theta k_x + B k_v^2] \tilde{p}. \quad (158)$$

Diese Gleichung können wir auch durch Umkehrung der Integraltransformationen wieder im Langevin Formalismus schreiben, um zu ermitteln, welchem System diese Näherung entsprechen würde. Wir ermitteln

$$dx = \theta dt [1 + a v] \quad (159)$$

$$dv = -\gamma v dt + \sqrt{2B} dW(t). \quad (160)$$

Durch die Einbeziehung zu geringer Ordnungen kann dx jetzt auch negativ werden, was vorher nicht möglich war. Aus diesem Grund verwenden wir diese Gleichungen nicht weiter.

Erzeugende Funktionen Eine zweite Möglichkeit zur Lösung der Gleichung (157) wäre die Nutzung von erzeugenden Funktionen. Hierbei stellen wir zunächst die beiden Gleichungen (siehe vorherigen Abschnitt) bezüglich k_v und \tilde{p} auf. Weiterhin ersetzen wir die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion \tilde{p} durch deren erzeugende Funktion $G(k_x, z, t)$ durch die folgenden Beziehungen

$$G(k_x, z, t) = \sum_{k_v=-\infty}^{+\infty} z^{k_v} \tilde{p} \quad (161)$$

$$z^{-i a} G(k_x, z, t) = \sum_{k_v=-\infty}^{+\infty} z^{k_v-i a} \tilde{p} \quad (162)$$

$$z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(k_x, z, t) + z \frac{\partial}{\partial z} G(k_x, z, t) = \sum_{k_v=-\infty}^{+\infty} k_v^2 z^{k_v} \tilde{p}. \quad (163)$$

Wir transformieren dementsprechend die charakteristische Gleichung für \tilde{p} zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(k_x, k_v, t) = -\theta k_x \tilde{p}(k_x, k_v + i a, t) - B \bar{k}_v^2 \tilde{p}(k_x, k_v, t) \quad (164)$$

$$\bar{k}_v = k_v \exp [\gamma (\tau - t)] \quad (165)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(k_x, k_v, t) = -\theta k_x \tilde{p}(k_x, k_v + i a, t) - B k_v^2 \exp [2 \gamma (\tau - t)] \tilde{p}(k_x, k_v, t) \quad (166)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G = -\theta k_x z^{-i a} G - B \exp [2 \gamma (\tau - t)] \left(z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} G + z \frac{\partial}{\partial z} G \right). \quad (167)$$

Diese Gleichung ist aufgrund der ersten und zweiten Ableitung nur schwer lösbar. Eine Fouriertransformation erbringt auch keine Vorteile, da z bis zur zweiten Ordnung in der Gleichung enthalten ist.

Somit ist es mit den uns bekannten Methoden nicht möglich, die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ des exponentiellen Ornstein-Uhlenbeck Prozesses analytisch zu ermitteln.

3 Die Analyse von empirischen Daten

3.1 Die Darstellung der Zeitreihen

Die empirischen Aktienkurse haben wir von der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank der Universität Karlsruhe erworben [57]. Die Preise sind ausschließlich Notierungen des deutschen Aktienmarktes, und zwar des Parketthandels in Frankfurt am Main und des Xetra Handels (Electronic Exchange Trading). Der gesamte verfügbare Datenbestand umfasst den Zeitraum vom 2. Mai 1996 bis zum 28. Dezember 2001. Die vorhandenen Zeiten sind jedoch für die einzelnen Handelsplattformen verschieden. So gehen die Zeitreihen des Parketthandels vom 2. Mai 1996 bis zum 31. Dezember 1999 und die des computerbasierten Handels vom 4. Januar 1999 bis zum 28. Dezember 2002.

Wir sind damit der Umstellung der Berechnungsbasis des Deutschen Aktienindex (Dax) gefolgt. Der Dax Index wurde am 1. Juli 1988 als Fortführung des Index der Börsen-Zeitung eingeführt und ist ein Performance Index, der aus 30 deutschen Aktienwerten verschiedener Branchen errechnet wird. Ein Performance Index bezieht Dividenden u. ä. als Wiederanlage mit ein und beachtet so den Zinseszinseffekt. Die Kriterien für die Auswahl der Unternehmen sind hierbei der Börsenumsatz (Orderbuchumsatz) und die Börsenkapitalisierung (Free Float). Die Basis des Dax ist ultimo 1987 1.000 Punkte. Die Gewichtung der einzelnen Kurs erfolgt anhand der frei verfügbaren Aktien der jeweiligen Gesellschaft. Des Weiteren wird der Index um Kapitalveränderungen, Bezugsrechte und Dividenden bereinigt [47]. In dem uns zur Verfügung stehenden Zeitraum notiert der Dax Index jede Minute (bis zum 10. Juli 1997) bzw. alle 15 Sekunden. Bis zum 21. Juni 1999 wurde der Dax aus den Notierungen des Parketthandels in Frankfurt am Main errechnet. Aber aufgrund der zunehmenden Bedeutung und Umsatzstärke des computerbasierten Handels, wurden ab dem 21. Juni die Aktienkurse des Xetra Handels als Bezugsbasis ausgewählt.

Wir verfügen über insgesamt 54 Zeitreihen. Sie bestehen dabei aus dem Dax Index selber und den 30 Aktiengesellschaften, aus denen der Dax in dem Gesamtzeitraum berechnet wurde. Da diese sich im Laufe der Zeit geändert haben, sind es insgesamt mehr als 31 Zeitreihen (30 Aktien und der Dax selber).

Die Aktienpreise sind Hochfrequenzdaten (engl. auch tick-by-tick), d. h. in der Datenbank ist jede Transaktion aufgezeichnet, die in dem jeweiligen Zeitraum auf dem jeweiligen Handelsplatz für die jeweilige Aktie ausgeführt wurde.

3.1.1 Der Aufbau der Datenbank

Die von der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank erhaltenen Daten transformierten wir zunächst auf das für uns erforderliche Format. Wir haben die uns interessierenden Daten einer Notierung aus den gelieferten Dateien extrahiert. Eine Notierung in unserer Datenbank umfasst den Ausführungszeitpunkt (auf die hundertstel Sekunde genau), den festgestellten Preis, das gehandelte Volumen (Anzahl der gekauften Aktien) sowie die Handelsflagge (siehe Tabelle 1). Die Handelsflagge kennzeichnet die Art der ausgeführten Transaktion. Wir unterscheiden dabei vor allem zwischen laufenden Transaktionen (V für variabel) und Auktionen (Eröffnungs- EA, Intraday- IA, Schlussauktion SA). Die Auktionen haben wir bei den meisten Berechnungen nicht miteinbezogen, da die zu dem jeweils festgestellten Kurs umgesetzten Volumina Verzerrungen

Tag	Uhrzeit	Kurs	Volumen	Handelsflagge
20010226	9:00:17.19	52,85	14801	EA
20010226	9:00:19.82	52,85	700	V
20010226	9:00:23.01	52,86	300	V
20010226	9:00:23.01	52,8	3200	V
20010226	9:00:38.24	52,7	100	V
20010226	9:02:01.98	52,56	100	V
20010226	9:02:02.57	52,85	7000	V

Tabelle 1: Beispielzeilen der aufbereiteten Dateien von Aktienkursdaten (anhand der DaimlerChrysler AG)

bewirken würden.

Weiterhin haben wir die deutschen Wertpapierkennnummern (sechsstellige Zahl) auf die internationalen Wertpapierkennnummern umgestellt, da zu dem damaligen Zeitpunkt die Einführung der internationalen Kennzahl auch auf dem deutschen Aktienmarkt schon bevorstand. Die neue Kennzahl haben wir durch Voranstellen von „DE000“ und anfügen von „,0“ an die deutsche Wertpapierkennziffer abgeleitet. Des Weiteren wird durch die Suffixe „Xe“ (Xetra), „Fl“ (Parkett, engl. Floor) und „Bo“ (für engl. Both, folgend der Dax Umstellung) der Handelsplatz der Kursnotierungen kenntlich gemacht.

Die Notierungen (siehe Tabelle 1) haben wir in komprimierten Dateien abgespeichert, deren Dateiname aus der Wertpapierkennnummer, dem Handelsplatzzusatz, dem Aufzeichnungsbeginn und -ende besteht. Eine Datei umfasst dabei maximal ein Jahr. Die einzige Transformation, die wir bei Erstellung der Datenbank vorgenommen haben, ist die Umrechnung der auf „D-Mark“ lautenden Kursnotierungen in Euro. Die Karlsruher Kapitalmarktdatenbank hat die Daten bereits aufgearbeitet und Fehler korrigiert. Zusätzlich haben wir kleine auftretende Fehler beseitigt. Um die Kurse so original wie möglich zu erhalten, haben wir aber weiter keine Transformationen oder Anpassungen vorgenommen.

Zum effektiven Umgang mit der vorhandenen Datenbank haben wir ein entsprechendes Computerprogramm entwickelt. Wir wählten dabei die Programmiersprache Java, um eine größtmögliche Betriebssystemunabhängigkeit zu gewährleisten. Das Programm dient vornehmlich drei Zwecken. Erstens soll es eine übersichtliche und leicht bedienbare grafische Benutzeroberfläche anbieten. Zweitens soll es die vorhandenen Zeitreihen und deren Zeiträume dynamisch erkennen und eine einfache Auswahl der zu bearbeitenden Kursreihe und des interessierenden Zeitraum gewährleisten. Drittens muss es möglich sein, schnell und ohne großen Aufwand neue Bearbeitungsmethoden zu generieren, die dynamisch durch das Programm erkannt und miteinbezogen werden. Alle drei Zwecke werden durch unser Programm erfüllt und dies bei höchster möglicher Portabilität.

In der ersten Maske (siehe Abbildung 15 links) können wir die interessierende Aktiengesellschaft und den jeweiligen Handelsplatz bestimmen. In der zweiten Maske wird der gewünschte Zeitraum für alle ausgewählten Zeitreihen definiert. In der dritten Maske (siehe Abbildung 15 rechts) können wir mehrere Bearbeitungsreihenfolgen der vorhandenen Methoden festlegen. Dabei wird in den Programmdateien dynamisch nach

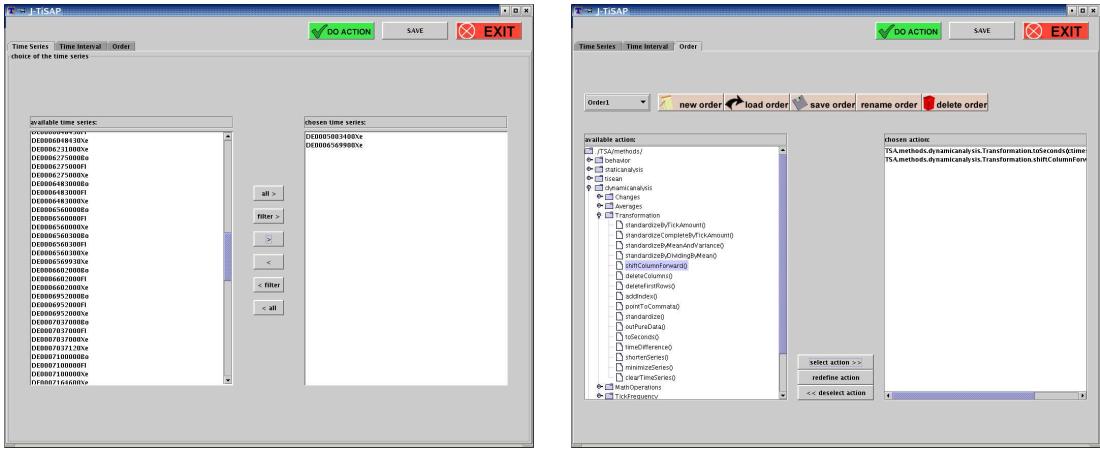


Abbildung 15: Darstellung der Maske der Zeitreihenauswahl (links) und der Maske für die Methodenauswahl (rechts) unseres Analyseprogramms.

den vorhandenen Methoden gesucht. Die Beschreibung der Methoden sowie deren notwendige Übergabeparameter werden anschließend aus einer Datendatei gelesen, die unkompliziert zu erstellen ist. Somit ist eine gute Ausgangsbasis geschaffen, um zeitefektiv neue Methoden an den vorhandenen empirischen Daten zu testen.

3.1.2 Die zeitlichen Eigenschaften der Daten

Wir betrachten die Aktienkursdynamik als ein Beispiel der Theorie von Zeitreihen. Wir müssen daher zunächst aus unserer Datenbank Zeitreihen gewinnen. Jede Zeile der Datenbank enthält einen Aktienkurs. Doch wie definieren wir nun unsere Zeitreihe bzw. welches ist die Basis der dynamischen Größe des Aktienpreises?

Die Transaktionsnummer Wir finden zwei grundsätzliche Darstellungsvarianten des Kurses, über die Zeit und über die Transaktionsnummer. Jede Zeile in unserer Datenbank entspricht einer ausgeführten Transaktion. Für jede Aktie auf dem jeweiligen Handelsplatz können wir die Zeilen durchnummernieren und erhalten so die Transaktionsnummer (gleich Zeilennummer). Eine Darstellung des Aktienpreises über die Transaktionsnummer ergibt eine Zeitreihe, da die Transaktionen zeitlich geordnet sind und nacheinander ablaufen (siehe Abbildung 16). Die Abstände zwischen den Preisen der fortlaufenden Transaktionen sind in der Bezugsbasis der Transaktionsnummer konstant und gleich Eins. Diese Basis hat den Vorteil, dass die Zeitreihe bereits in der Datenbank als homogene Zeitreihe vorliegt (Abstände in der Basis sind konstant, d. h. homogen). Eine zusätzliche Aufbereitung mit Fehlermöglichkeiten und Interpretationsspielräumen ist nicht notwendig. Weiterhin ist diese Variante vorteilhaft, wenn wir die Annahme tätigen, dass der Preis durch die Anzahl der Transaktionen beeinflusst wird und sich unabhängig von dem dazwischen vergangenen Zeitraum entwickelt (Wochenende oder eine Sekunde). Wenn wir diese Annahme nicht bekräftigen, ist dies ebengenau der Nachteil dieses Verfahrens. Ein weiterer Nachteil ist, dass die Zeitreihe nur diskret vorliegt.

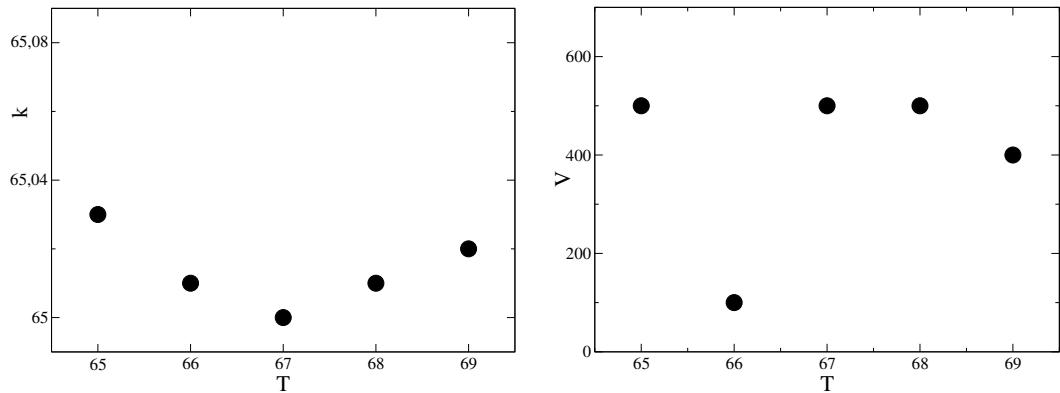


Abbildung 16: Darstellung der aufgezeichneten Werte mehrerer Transaktionen der Adidas-Salomon AG am 02.01.2001 um 13 Uhr über die fortlaufende Transaktionsnummer des Handelstages. Die Einheit des Aktienkurses k ist Euro je Stück und des Volumens V Stück. Die Transaktionsnummer ist eine natürliche Zahl ohne Einheit.

Eine kontinuierliche Beschreibung in Form von stochastischen Differentialgleichungen ist nicht möglich, da nur ganzzahlige Transaktionsnummern existieren.

Ein Merkmal der Notierungen ist deren Ausführungszeitpunkt, d. h. jede Notierung ist zeitlich genau fixiert. Wenn wir die Aktienkursdaten in einer Zeit t betrachten wollen, besteht die Frage, welche Zeitform wir als Grundlage definieren. Als Zeitbasis können uns die physikalische Zeit, die Markt- oder Handelszeit und die intrinsische Zeit dienen.

Die physikalische Zeit Die Notierungen sind in der physikalischen Zeit aufgezeichnet, d. h. der kalendermäßige Tag und die genaue Uhrzeit sind festgelegt. Diese Zeit als Basis zu verwenden ist aber ungünstig, da die Aktien nicht zu allen Tageszeiten gehandelt werden. An Feiertagen, Wochenenden und Nächten liegen keine Notierungen vor. Deshalb haben wir diese Zeitform als Basis verworfen.

Die Marktzeit Die Marktzeit t umfasst dabei nur die Öffnungszeiten des jeweiligen Handelsplatzes und beachtet nicht die handelsfreie Zeit. Wir müssen jedoch entscheiden, wie groß wir den handelsfreien Zeitraum ansetzen (zwischen letztem Schlusszeitpunkt und nächstem Anfangszeitpunkt). Wir setzen diesen Zeitraum gleich unserem Mindestintervall von 1 s. Bei der Ermittlung der Marktzeit aus den empirischen Aufzeichnungen mussten wir beachten, dass die regulären Öffnungszeiten während des Gesamtzeitraumes stark schwankten (siehe Tabelle 2). Darüber hinaus lagen auch einzelne Handelstage vor, an denen die regulären Öffnungszeiten durchbrochen wurden und so eine Extrabehandlung notwendig ist. Der Nachteil der Marktzeit ist, dass Zeiträume wie das ganze Wochenende genauso behandelt werden wie Sekundenübergänge.

Bei Betrachtung der Notierungen in der Marktzeit t stellen wir fest, dass der Zeitunterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Transaktionen variiert. Die Notierungen sind inhomogen in der Marktzeit t verteilt. Für die in dieser Arbeit folgenden Be trachtungen ist es aber notwendig, dass wir die vorliegende inhomogene Zeitreihe in eine homogene Zeitreihe umwandeln. D. h. die zeitlichen Abstände Δt zwischen den

vom (Tag)	bis einschließlich (Tag)	von (Uhrzeit)	bis (Uhrzeit)
02.05.1996	30.06.1998	10.30	13.30
01.07.1998	21.06.1999	08.30	16.30
22.06.1999	17.09.1999	08.30	17.00
20.09.1999	01.06.2000	09.00	17.30
02.06.2000	28.12.2001	09.00	20.00
Ausnahmen:			
	21.07.1997	12.30	14.30
	23.07.1997	10.30	14.30
	30.12.1998	08.30	13.30
	30.12.1999	09.00	14.00
	29.12.2000	09.00	14.00
	28.12.2001	09.00	14.00

Tabelle 2: Darstellung der Öffnungszeiten der Börse vom 02.05.1996 bis zum 28.12.2001 entsprechend der Berechnungsgrundlage des Dax

Werten der Zeitreihe sollten gleich sein. Aufgrund der Datenlage definierten wir den zeitlichen Mindestabstand zwischen zwei Transaktionen auf 1 Sekunde. Bei gleichzeitigen Transaktionen, bei denen immer die gesamte Zeit bis auf die hundertstel Sekunde übereinstimmt, vernachlässigen wir die zuerst aufgezeichnete. Wir wollten durch Verschiebungen (vor/zurück) vermeiden, dass bei starkem Handel Verzerrungen auftreten können.

Bei der Homogenisierung der Zeitreihe stellte sich daher die Frage, welche Notierungsmerkmale wir für zwischen zwei Transaktionen liegende Zeitpunkte definieren. Dies erstreckte sich vor allem auf den Aktienkurs und das Volumen. Wir können die Aktienkurse von zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten grundsätzlich mit Hilfe von beliebigen Funktionen (z. B. linear/nichtlinear) verbinden. Unsere Betrachtungen haben wir dabei auf die beiden gebräuchlichsten reduziert. Dies ist zum einen die lineare Interpolation von zwei aufeinander folgenden Aktienkursen $k(t_1)$ und $k(t_2)$ für die da zwischenliegenden Zeitpunkte [20]. Der Kurs für einen beliebigen Zeitpunkt zwischen t_1 und t_2 ergibt sich

$$k(t_1 + \Delta t < t_2) = k(t_1) + \frac{\Delta t}{t_2 - t_1} [k(t_2) - k(t_1)]. \quad (168)$$

Der Nachteil hierbei ist, dass wir Informationen zeitlich vorweggreifen. Der errechnete Kurs k zum Zeitpunkt $t_1 + \Delta t < t_2$ enthält dann bereits Informationen des späteren Zeitpunktes t_2 .

Die zweite Variante zur Homogenisierung ist mehr an dem Zufallswanderer in der Physik orientiert. Wir sagen, dass der Aktienkurs durch das Einwirken einer Kraft mit zufälliger Stärke in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ zu dem Zeitpunkt $t_1 \leq t' \leq t_2$ verändert wird. Die homogene Zeitreihe verläuft wie eine Stufenfunktion in der Marktzeit t . Wir müssen nur festlegen, wann die Zufallskraft in dem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ bzw. die Stufe auftreten soll. Wir definieren, dass der alte Aktienkurs $k(t_1)$ solange gilt bis ein neuer

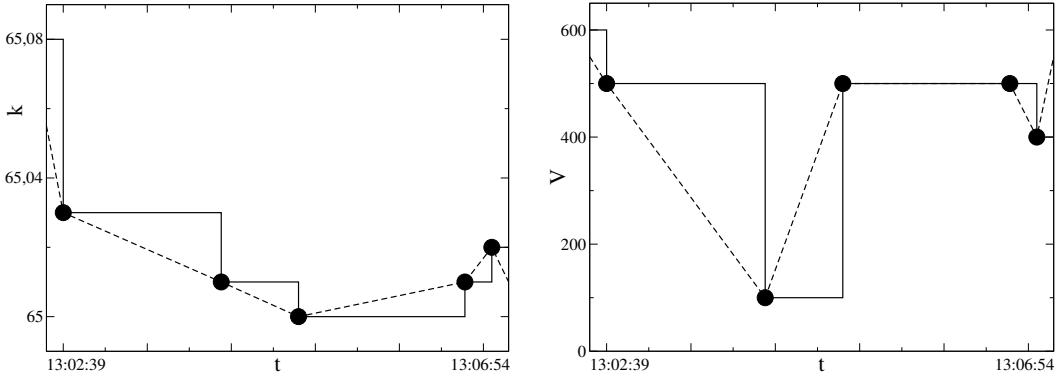


Abbildung 17: Darstellung der aufgezeichneten Werte einer Transaktion und des zeitlichen Ablaufs mehrerer Transaktionen der Adidas-Salomon AG am 02.01.2001 um 13 Uhr. Die Einheit des Aktienkurses k ist Euro je Stück, des Volumens V Stück und der Zeit t Stunde:Minuten:Sekunden. Die gestrichelte Linie zeigt die lineare Interpolation und die durchgezogene die letzte Tick Interpolation.

Aktienkurs notiert wurde (d. h. bis ausschließlich t_2). Dieses Vorgehen entspricht einer rechten Stufe und wird auch als letzte Tick Interpolation bezeichnet [20]. Im Prinzip entspricht damit unsere Homogenisierung dem realen Handel. Solange ein Anleger zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 nach dem Aktienkurs fragt, wird ihm der letzte notierte Kurs als Preisrichtlinie genannt werden. Wir haben die Art der gewählten Homogenisierung in der Abbildung 17 dargestellt.

In der Abbildung 18 haben wir den relativen Anteil der einzelnen Jahre der inhomogenen Zeitreihe an unserer Datenbank dargestellt. In der linken Abbildung haben wir die Anzahl der Transaktionen eines Jahres summiert und durch die Gesamtzahl der Transaktionen der jeweils betrachteten Aktie geteilt. Da in den aufgezeichneten Jahren das Handelsvolumen (Anzahl der ausgeführten Transaktionen) sehr zugenommen hat, steigen die relativen Gewichte der einzelnen Jahre stark an. Nach der Homogenisierung der Zeitreihe liegt für jede Sekunde der Marktzeit t eine Notierung vor. Das relative Gewicht eines Jahres der homogenen Zeitreihe wird durch die Anzahl der Handelsminuten bestimmt. In der rechten Abbildung haben wir daher das relative Gewicht der Minuten eines Jahres dargestellt. Wir haben die Anzahl der Handelsminuten eines Jahres durch die Gesamtanzahl an Handelsminuten geteilt. Die relativen Gewichte der einzelnen Jahre sind im Prinzip unabhängig von der Berechnungsmethode. D. h. die Anzahl der Transaktionen ist im gleichen Umfang gestiegen, wie die Handelszeit zugenommen hat.

Die intrinsische Zeit Das Ziel der Einführung dieser Zeitform ist die Elimination von saisonalen Effekten, insbesondere innerhalb eines Tages bei Hochfrequenzdaten. Dieses Ziel soll durch eine Verbindung der Marktzeit t mit der Handelsstärke in diesem Zeitraum erreicht werden. Die Indikatoren der Handelsstärke und die Berechnungsweise der intrinsischen Zeit sind nicht einheitlich, sondern stark von dem Benutzer abhängig [20, 69]. In dieser Arbeit werden wir diese Zeitform nicht verwenden, da die statistischen

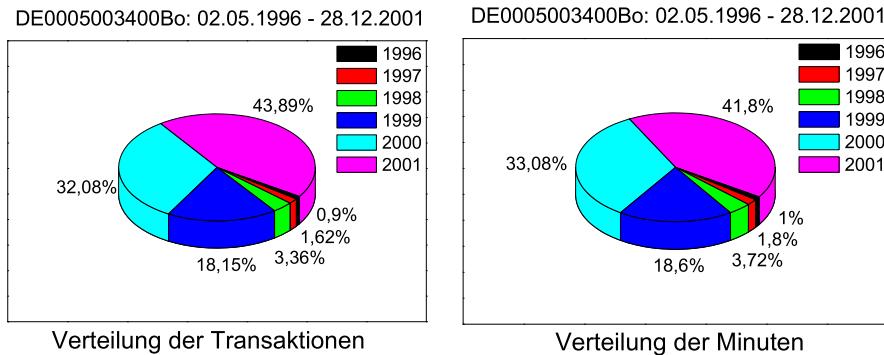


Abbildung 18: Darstellung der relativen Gewichte der einzelnen Jahre.

Merkmale der so aufbereiteten Daten stark von den benutzten Methoden bestimmt werden. Darüber hinaus ist es unser Ziel, die Merkmale, die durch die intrinsische Zeit erfasst werden, in unsere stochastischen Differentialgleichungen miteinzubeziehen, um so die Dynamik der Aktienpreisbildung zu erfassen.

3.2 Die einzeitige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

In unserer Arbeit wollen wir uns auf eine stochastische Beschreibung der Aktienkursdynamik konzentrieren. Wir nehmen an, dass wir die Entwicklung des Aktienkurses k in der Zeit t nicht deterministisch angeben können. Vielmehr gehen wir davon aus, dass wir höchstens die Wahrscheinlichkeit angeben können, mit der ein bestimmter Aktienkurs k zu einem bestimmten Zeitpunkt t vorliegt. Der weitere Ansatz ist dann, dass wir die Entwicklung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung deterministisch beschreiben können.

Um die aus den theoretischen Modellen erhaltene Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung mit den empirischen Daten zu vergleichen, ist es notwendig, aus den empirischen Aktienkursen die Dichteverteilung zu bestimmen. Wir konzentrieren uns zunächst auf die einzeitige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(k, t)$. Die Wahrscheinlichkeit $p(k, t) dk$ gibt an, dass wir zum Zeitpunkt t einen Aktienkurs k' in dem Intervall $[k, k + dk]$ antreffen. Wir haben die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung aufgrund der nur positiv definierten Preise k dabei folgendermaßen normiert

$$1 = \int_0^{+\infty} dk p(k, t) . \quad (169)$$

Nach der Homogenisierung der Zeitreihe unserer Datenbank liegt für jeden sekundengenauen Zeitpunkt der Marktzeit t ein Aktienkurs $k(t)$ vor. Wenn wir jetzt die einzeitige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung hierfür angeben, würde es eine Deltaverteilung für den vorliegenden Aktienkurs geben. Wie erhalten wir jetzt aber eine richtige (nicht deltaartige) Verteilung? Grundsätzlich können wir eine Aktienpreiszeitreihe als eine

Realisierung des stochastischen Prozesses der Aktienkursdynamik betrachten. D. h. uns liegt eine Trajektorie vor. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung können wir ermitteln, indem wir die Wahrscheinlichkeit aus einem Ensemble an Trajektorien errechnen. Voraussetzung ist, dass die Mitglieder des Ensembles die gleichen Eigenschaften aufweisen. Wir könnten also über alle Aktiengesellschaften mitteln, wenn wir davon ausgehen, dass sie dieselben Eigenschaften besitzen. Wir verneinen dies jedoch. Zum einen notieren die Preise selber auf viel zu unterschiedlichem Wertniveau. Am 4. Januar 1999 (Eröffnung Xetra Handel) notierte z. B. die Adidas-Salomon Aktie bei 90.20 EUR/Stck, die Veba Aktie bei 51.90 EUR/Stck und die Allianz Aktie bei 318.50 EUR/Stck. Zum anderen repräsentieren die Kurse auch den Wert des Unternehmens, der durch eine Vielzahl von fundamentalen und Marktdaten beeinflusst wird. Diese sind bei Betrachtung des Aktienkurses zu unterschiedlich, als dass wir alle Zeitreihen zu einem Ensemble zusammenfassen können.

Stattdessen nutzen wir das Zeitmittel. Dafür setzen wir neben der Stationarität des Zufallsprozesses die Ergodizität voraus, da bei einem ergodischen und stationären Zufallsprozess das Ensemblemittel äquivalent dem Zeitmittel ist (Konvergenz des zeitlichen Mittelwertes zu dem tatsächlichen Erwartungswert) [17, 25]. Wir betrachten die Realisierungen innerhalb eines festen Zeitintervalls Δt als repräsentativ für das Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ (nehmen die gleichen Eigenschaften an) und errechnen aus ihnen die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(k, t)$.

Die Dichteverteilung errechnen wir, indem wir zunächst den uns interessierenden Zeitpunkt t festlegen. Anschließend definieren wir das Zeitfenster Δt , unter der Bedingung, dass die in diesem Zeitfenster realisierten Transaktionen für das Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ repräsentativ sind. Je kleiner wir Δt wählen, um so mehr nähern wir uns der Deltaverteilung an. Je größer wir es wählen, desto höher ist die Gefahr, dass wir Aktienkurse mit unterschiedlichen Eigenschaften miteinbeziehen. Wir wählten ein Zeitfenster von $\Delta t = 1$ h. Zum einen ist die Datencharakteristik innerhalb dieses Intervalls sehr gleich, zum anderen wird so eine ausreichende Anzahl an Daten innerhalb des Zeitintervalls gewährleistet.

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ermitteln wir, indem wir die Aktienkurse des definierten Zeitintervalls auswerten. Wir definieren für den Kurs Intervalle der Größe Δk . Da der Aktienkurs bedingt durch seine Basiseinheit Euro je Stück diskret vorliegt, ist grundsätzlich ein Kursintervall für die Ermittlung der Dichteverteilung nicht notwendig. Das Intervall ist dadurch indirekt mit einem Cent je Stück vorgegeben. Um aber eine genügend große Anzahl an Kursnotierungen in den Intervallen zu gewährleisten, definieren wir ein größeres Intervall Δk . Wir ermitteln die Anzahl $N(k, \Delta k)$ der Aktienkurse k' mit $k \leq k' < k + \Delta k$. Die einzeitige Wahrscheinlichkeitsdichte $p(k, t)$ erhalten wir dann durch

$$p(k, t) = \frac{N(k, \Delta k)}{\Delta k \sum_{i=0}^{\infty} N(i \Delta k, \Delta k)}. \quad (170)$$

Im statistischen Sinne gibt k die untere Klassengrenze an. Die so ermittelte Dichteverteilung dient uns als Schätzung für die theoretische Wahrscheinlichkeit

$$p(k, t) dk = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(k' \in [k, k + \Delta k], t' \in [t, t + \Delta t])}{N(k' \in [0, \infty], t' \in [t, t + \Delta t])}, \quad (171)$$

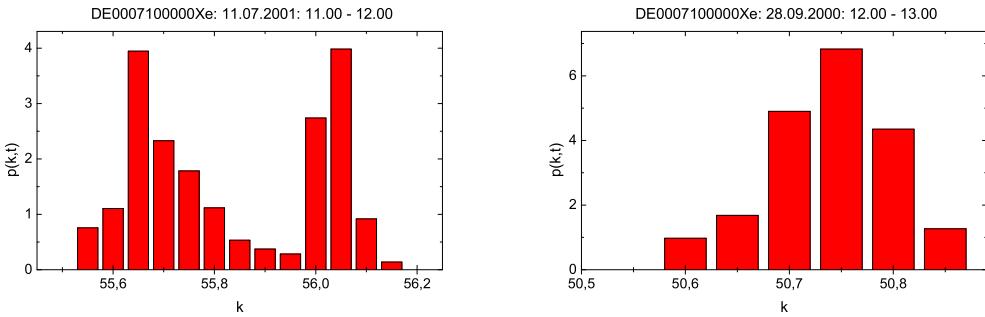


Abbildung 19: Darstellung der einzeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(k,t)$ der DaimlerChrysler AG des Xetra Handels vom 11. Juli 2001 und vom 28. September 2000. Das Intervall beim Aktienkurs ist $\Delta k = 0.05$ EUR/Stk, das Zeitintervall $\Delta t = 1$ h und die Zeitpunkte $t = 11$ Uhr und $t = 12$ Uhr.

welche unter Beachtung der Normierungsbedingung (169) bei der Berechnung aus einer Aktienkurszeitreihe immer eine Deltaverteilung ergeben würde. Die Funktion $N(\cdot)$ repräsentiert dabei die Anzahl an Ereignissen (Kursen) $k'(t')$, welche die aufgeführten Bedingungen erfüllen.

In der Abbildung 19 haben wir beispielhaft zwei einzeitige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der DaimlerChrysler AG für den 11. Juli 2001 (links) und den 28. September 2000 (rechts) dargestellt. Zur Ermittlung der Dichteverteilung haben wir bei dem Aktienkurs ein Preisintervall von 0.05 EUR je Stück und ein Zeitintervall von, wie schon erwähnt, $\Delta t = 1$ h festgelegt. Wir erkennen, dass die beiden Verteilungen sehr verschieden sind. Die rechte Verteilung in der Abbildung 19 ist wie erwartet. Sie besitzt ein Maximum. Die Aktienkurse zu diesem Zeitpunkt des 28. September 2000 um 12 Uhr streuen zufällig um den Mittelwert von etwa 50.75 Euro je Stück.

Die linke Verteilung vom 11. Juli 2001 zeigt jedoch Unterschiede. Die Breite der linken Verteilung ist gegenüber der rechten höher. Außerdem besitzt die Verteilung zwei Maxima. Somit können wir die Grundthese nicht bestätigen, dass die Aktienkurse zu der betreffenden Zeit um einen Aktienkurs zufällig fluktuierten. Vielmehr zeigt sich bei genauerer Analyse, dass sich der Mittelwert in dem betreffenden Zeitintervall von einer Stunde zu dem höheren Wert verschoben hat. Bei der Wahl eines kleineren Zeitintervalls von 20 Minuten zeigt sich ebenfalls eine (fast) symmetrische Verteilung mit nur einem Maximum.

Unser Ziel war es nun, den Aktienkurs stochastisch zu modellieren, d. h. einen Determinismus in der zeitlichen Entwicklung der Dichteverteilungen zur Beschreibung zu nutzen. Bei der Analyse der einzeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen des Aktienkurses k treten jedoch starke Differenzen auf. Bei den gewählten Intervallen treten neben den Verteilungen mit einem Maximum und zwei Maxima auch, insbesondere zu Handelsbeginn, Gleichverteilungen der Preise in einem begrenzten Bereich auf. Des Weiteren differieren die Mittelwerte der Verteilung $p(k,t)$ genauso stark wie die Varianzen. Dies wird nochmals in der Abbildung 20 veranschaulicht. Wir haben in der Abbildung die einzeitigen Dichteverteilungen der DaimlerChrysler AG des 11. Juli

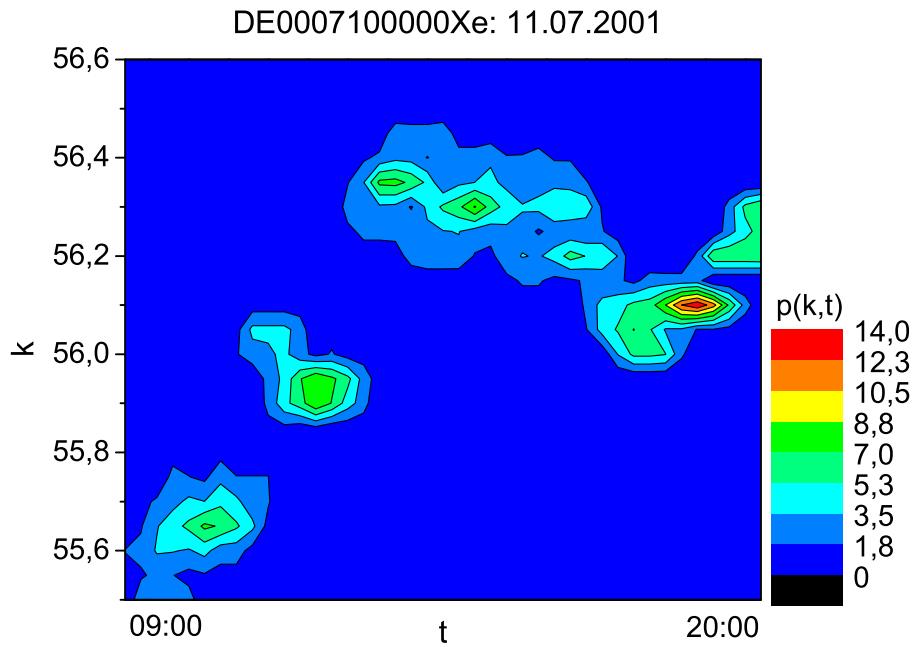


Abbildung 20: Darstellung des Verlaufes der einzeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(k, t)$ der DaimlerChrysler AG des Xetra Handels vom 11. Juli 2001. Das Zeitintervall ist $\Delta t = 1$ h und das Aktienkursintervall beträgt $\Delta k = 0.05$ EUR/Stk. Die Zeitpunkte t sind gleitend von der Eröffnungszeit 9 Uhr bis zur Schlusszeit 20 Uhr.

2001 dargestellt. Die Abbildung ist eine dreidimensionale in Form des Contour Plots, d. h. der Wert der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichte (oder besser ein bestimmtes Werteneveau) wird durch eine Farbe repräsentiert. Um den Übergang von der zweidimensionalen Darstellungsweise zu der dreidimensionalen besser zu veranschaulichen haben wir nochmals die Abbildung 21 miteinbezogen. Die zweidimensionalen Verteilungen sind somit „Schnitte“ durch dreidimensionale, da wir einen bestimmten Zeitpunkt t betrachten. Die (schwarz dargestellte) Verteilung in der Abbildung unten rechts repräsentiert dabei den „Schnitt“ entlang der schwarzen Linie des Contour Plots, die (rot dargestellte) Verteilung den „Schnitt“ zu dem Betrachtungszeitpunkt der roten Linie.

Wir haben die einzeitigen Dichteveerteilungen $p(k, t)$ für die benannten Intervalle für einen Tag dargestellt, um die zeitliche Entwicklung der Verteilungen zu verdeutlichen. Die Abbildung zeigt, dass sich der Aktienkurs an diesem Tag positiv entwickelt hat. Der Aktienkurs streut zu bestimmten Zeitpunkten und entsprechenden Zeitintervallen zufällig um einen Mittelwert (entspricht den Verteilungen mit einem Maximum). Bei den Übergängen der Kursniveaus treten entsprechend die Gleichverteilung und die Verteilung mit zwei Maxima auf.

In dem nächsten Abschnitt betrachten wir ein Beispiel für mehrzeitige Wahrschein-

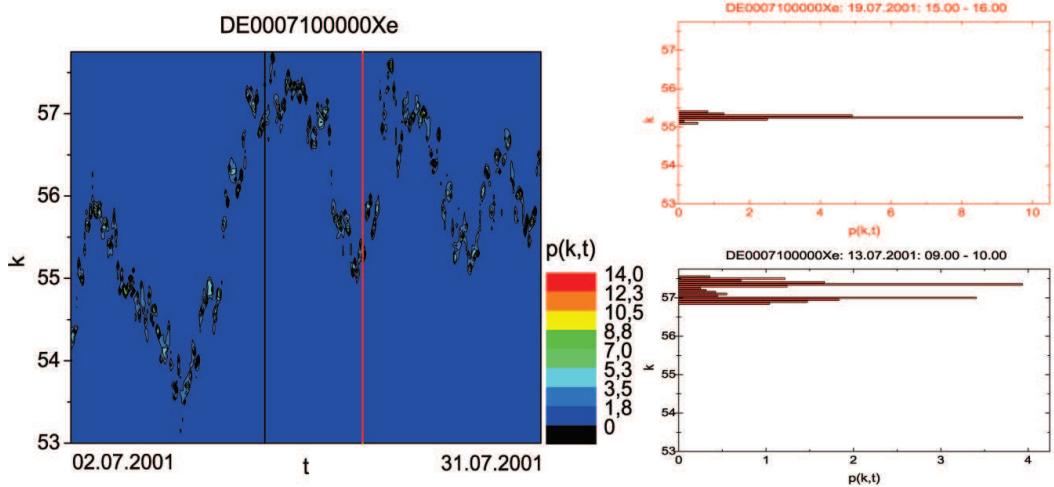


Abbildung 21: Darstellung der Entwicklung der einzeitigen Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilung $p(k, t)$ der DaimlerChrysler AG des Xetra Handels vom Juli 2001. Das Intervall des Aktienpreises beträgt $\Delta k = 0.05$ EUR/Stk und das Zeitintervall $\Delta t = 1$ h. Die Zeitpunkte t sind gleitend über den gesamten Monat.

lichkeitsdichte-Verteilungen näher. Wir wollen durch den Einbezug von Aktienkursen k zu verschiedenen Zeitpunkten t mehr über die Dynamik des (stochastischen) Prozesses erfahren.

3.3 Die zweizeitige Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilung

In dem vorherigen Abschnitt haben wir uns die einzeitigen Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilungen $p(k, t)$ zu bestimmten Zeitpunkten t als Momentaufnahmen angeschaut. Ziel ist das Finden eines Determinismus in der zeitlichen Entwicklung der Bestimmungsgrößen der Dichte-Verteilung.

Wie können wir aber die Dynamik der Größen herausfinden, wenn wir nur Verteilungen zu definierten Zeitpunkten anschauen? Im vorherigen Abschnitt 3.2 haben wir uns geholfen, in dem wir bei den dreidimensionalen Abbildungen den zeitlichen Verlauf der einzeitigen Dichte-Verteilungen über verschiedene Zeiträume analysiert haben. Es war jedoch kein Determinismus in den Momenten der Verteilung ersichtlich. Wir haben jedoch ständig betont, dass wir nur einzeitige Dichte-Verteilungen betrachten. D. h. eine Abhilfe zur Analyse der Dynamik ist die Änderung der aggregierten Größe der einzeitigen Verteilung hin zu mehrzeitigen.

Um die Dynamik zu erfassen und zu veranschaulichen und somit verschiedene Zeitpunkte miteinzubeziehen, betrachten wir in diesem Abschnitt die einfachste mehrzeitige Dichte-Verteilung, die zweizeitige. Die Dichte-Verteilung $p_2(k_1, t_1; k_2, t_2)$ beschreibt die gemeinsame (unbedingte) Wahrscheinlichkeit $p_2 dk_1 dk_2$, dass wir den Aktienkurs k' zu dem Zeitpunkt t_1 in dem Intervall $[k_1, k_1 + dk_1]$ und den Aktienkurs k'' zu dem späteren Zeitpunkt t_2 in dem Intervall $[k_2, k_2 + dk_2]$ finden. Die 2 kennzeichnet dabei

die zweizeitige Wahrscheinlichkeitsdichte. Wir definieren die Normierung mit

$$1 = \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 p_2(k_1, t_1; k_2, t_2). \quad (172)$$

Somit finden wir mit Sicherheit einen beliebigen Aktienkurs k' zu dem Zeitpunkt t_1 und einen Preis k'' zu der Zeit t_2 . Wir hoffen, dass wir so einen besseren Einblick in die deterministische Dynamik der Verteilungen erhalten. Wir betrachten zwei Zeitpunkte und die Veränderungen der Wahrscheinlichkeit der Kurse zwischen ihnen.

Zur Ermittlung der theoretischen zweizeitigen Wahrscheinlichkeit nach der folgenden Formel

$$\frac{p_2(k_1, t_1; k_2, t_2) dk_1 dk_2}{N(k' \in [k_1, k_1 + \Delta k], t' \in [t_1, t_1 + \Delta t], k'' \in [k_2, k_2 + \Delta k], t'' \in [t_2, t_2 + \Delta t])} = \frac{N(k' \in [0, \infty], t' \in [t_1, t_1 + \Delta t], k'' \in [0, \infty], t'' \in [t_2, t_2 + \Delta t])}{N(k' \in [0, \infty], t' \in [t_1, t_1 + \Delta t], k'' \in [0, \infty], t'' \in [t_2, t_2 + \Delta t])} \quad (173)$$

$$p(k_1, t_1) = \int_0^\infty p_2(k_1, t_1; k_2, t_2) dk_2, \quad (174)$$

haben wir wieder die bekannten endlichen Intervalle von $\Delta k = 0.05$ EUR/Stck und $\Delta t = 1$ h gewählt.

In der Abbildung 22 haben wir die Entwicklung der zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_2(k_1, t_1; k_2, t_2)$ für zunehmende Zeitdifferenzen $t_2 - t_1$ dargestellt. Die Darstellung ist wieder eine dreidimensionale Abbildung als Contour Plot, wobei die Farben die Werte der Wahrscheinlichkeitsdichte repräsentieren. Um ein besseres Verständnis für diese Grafik zu erhalten, haben wir die beiden Zeitpunkte t_1 und t_2 zunächst gleich gesetzt. Bei einer Projektion entlang der x-Achse (Integration über alle Aktienkurse k_2) bzw. bei Projektion entlang der y-Achse (Integration über alle Aktienkurse k_1) ermitteln wir dieselbe einzeitige Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(k, t)$. Aus diesem Grund haben wir auch einen einwandfreien diagonalen Verlauf der Dichteverteilung bezogen auf die k_1 und k_2 Ebene.

Ausgehend von dieser Verteilung erhöhen wir nun sukzessive den zeitlichen Abstand von $t_2 - t_1$. Wir erkennen, dass sich die diagonale Verteilung zunehmend verbreitert. Des Weiteren entstehen „Inseln“, d. h. abgegrenzte Gebiete, bei denen die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte lokale Maxima erreicht. Wir sehen, dass bei größerer zeitlicher Differenz die gesamte Fläche genutzt wird. Ein ansteigender Aktienkurs würde vorliegen, wenn bei gleicher Skaleneinteilung ausschließlich die linke obere Ecke durch die Verteilung belegt wäre. Dann würde bei dem früheren Zeitpunkt t_1 ein niedrigerer Preis vorliegen als bei der späteren Zeit t_2 .

In dem rechten mittleren Bild der Abbildung 22 erkennen wir, dass bei einem Aktienkurs von $k_1 \sim 55$ EUR/Stck zum Zeitpunkt t_1 verschiedene Aktienkurse k_2 bei dem späteren Zeitpunkt t_2 vorliegen (d. h. große Breite bzw. Varianz der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{1|1}(k_2, t_2 | k_1, t_1) = p_2(k_1, t_1; k_2, t_2) / p(k_1, t_1)$). Dies kann zwei Ursachen haben. Erstens, zu dem Zeitpunkt t_1 trat ein Seitwärtstrend auf. D. h. die Aktienpreise der ausgeführten Transaktionen waren alle auf etwa gleichem Niveau von in

diesem Beispiel 55 EUR/Stck. Oder zweitens, es wurden in dem Zeitintervall $[t_1, t_1 + \Delta t]$ nur wenige Transaktionen ausgeführt. Aufgrund unserer Homogenisierungsvariante der Zeitreihe (letzter Kurs behält Gültigkeit bis ein neuer notiert wird) wird der festgestellte Kurs dann für das gesamte (lange) Zeitintervall fortgeschrieben. Aus beiden Varianten resultiert dann die geringe Varianz des Kurses k_1 zu dem Zeitpunkt t_1 .

Die hier dargestellten Grafiken bilden einen kleinen Ausschnitt der Verteilungen, die wir betrachtet haben. Wir haben in der Abbildung 22 eine Aktie ausgewählt (Daimler-Chrysler AG) und die beiden Zeitpunkte t_1 und t_2 definiert (beide immer am gleichen Tag). Unsere Datenbank umfasst jedoch 54 Zeitreihen und über 5 Jahre an Aufzeichnungen.

Trotzdem mussten wir auch bei dem Betrachten der zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung erkennen, dass ebenfalls wie bei der einzeitigen Dichteverteilung sich nur schwer ein Determinismus herausfiltern lässt. Weder die Entwicklung bei zunehmender zeitlicher Differenz $t_2 - t_1$ noch die tatsächliche zeitliche Entwicklung für simultan fortschreitende Zeitpunkte t_1 und t_2 lässt auf eine deterministische Entwicklung der Bestimmungsgrößen der Dichteverteilung $p_2(k_1, t_1; k_2, t_2)$ schließen bzw. diese erkennen. D. h. die Ableitung einer stochastischen Beschreibung der Aktienkursdynamik aus der einzeitigen und der zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung des Aktienkurses k ist uns nicht gelungen. Es hat sich vielmehr gezeigt, dass viele funktionale Verlaufsformen der Dichteverteilungen (mit ein oder zwei Maxima, gleichverteilt etc.) und stark variierende Momente möglich sind.

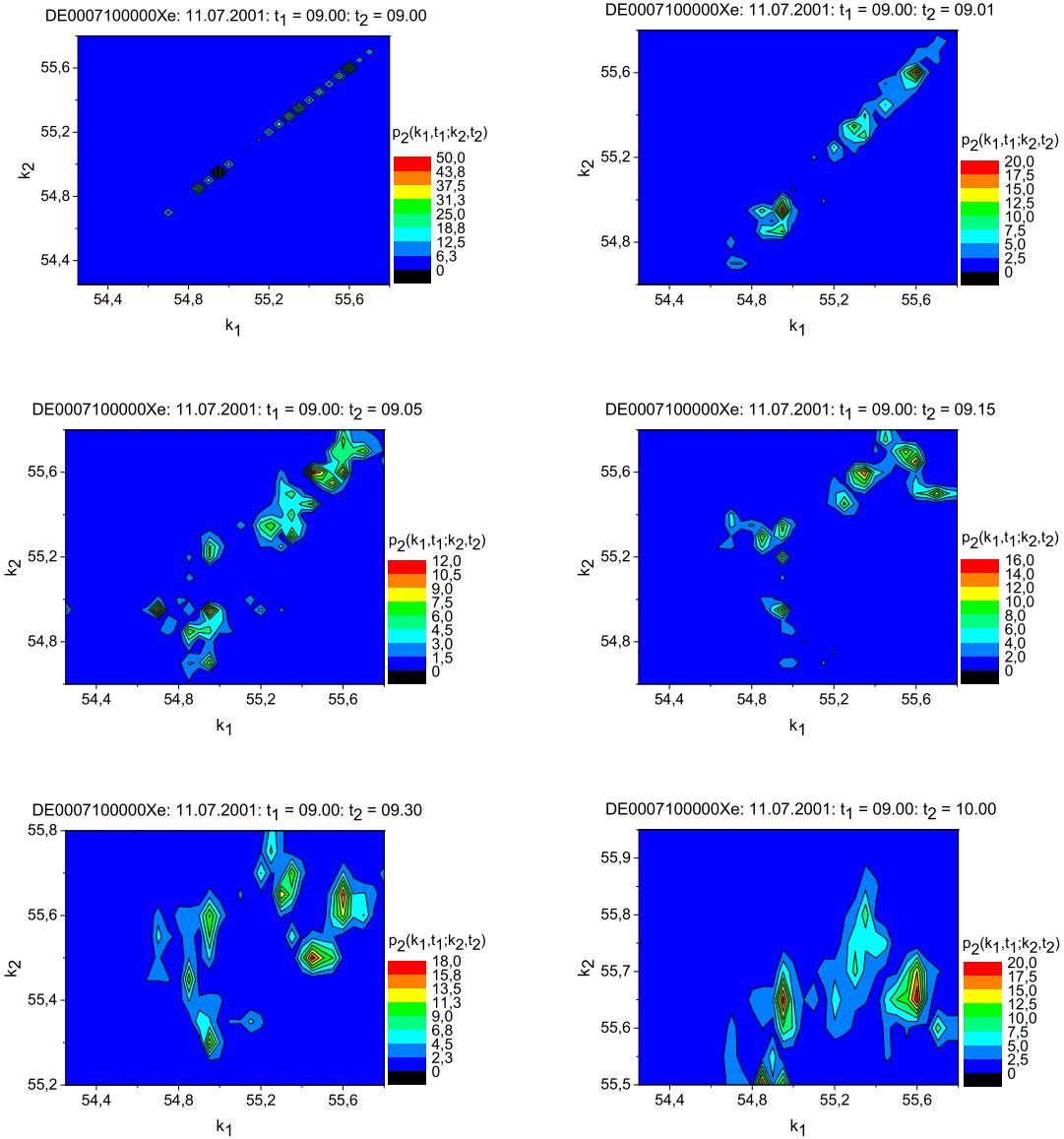


Abbildung 22: Darstellung der Entwicklung der zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_2(k_1, t_1; k_2, t_2)$ mit zunehmenden Zeitabstand $t_2 - t_1$ am Beispiel der DaimlerChrysler AG (Xetra Handel) vom 11. Juli 2001. Die Intervalle wählten wir mit $\Delta k = 0.05$ EUR/Stck und $\Delta t = 1$ h.

3.4 Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Aktienkursänderungen

In dem vorherigen Abschnitt hatte wir versucht, eine stochastische Beschreibung der Aktienkursentwicklung zu erhalten, indem wir verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (einzeitige oder zweizeitige) betrachten. Mit dieser Variante hatten wir keinen Erfolg. Aber warum nicht?

Dazu müssen wir genauer betrachten, was uns eigentlich als Ausgangsbasis vorliegt. Wir haben immer speziell nur eine Aktie als eine Zeitreihe betrachtet. Wir haben dann Dichteverteilungen aus den originär (also gegeben) vorliegenden Aktienkursen errechnet, indem wir ein endliches Zeitintervall nutzten (meist mit $\Delta t = 1 \text{ h}$). Weiterhin gehen wir davon aus, dass die Aktienkursdynamik ein stochastischer Prozess ist. Die vorliegende Zeitreihe ist dann eine realisierte Trajektorie dieses Prozesses.

In den einleitenden Abschnitten (z. B. Abschnitt 2.2) haben wir bereits stochastische Prozesse, deren Differentialgleichungen und Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen betrachtet. Wenn wir nun nur eine Trajektorie der Geschwindigkeit v des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses gegeben hätten und daraus die ein- bzw. zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Geschwindigkeit errechnen würden. Wir glauben nicht, dass wir anhand dieser einen Trajektorie die stochastische Differentialgleichung für die Entwicklung der Bestimmungsgrößen ableiten könnten. Das Problem besteht vielmehr darin, dass wir zur Erfassung des stochastischen Prozesses über viele Trajektorien mitteln sollten. Daraus könnten wir wieder die Dichteverteilungen errechnen und die Entwicklung der Momente betrachten.

Doch wie können wir nun mehrere Trajektorien zur Verteilungsermittlung erhalten? Die Voraussetzung für diese Mittelung ist, dass die enthaltenen Trajektorien die gleichen Charakteristika aufweisen (z. B. bei dem Ornstein-Uhlenbeck Prozess oder bei der Brownschen Bewegung die gleiche Temperatur der Lösung). Bei Betrachtung des Aktienkurses k lehnen wir daher die Schaffung eines Ensembles aus den Kursen mehrerer Unternehmen ab (siehe Abschnitt 3.2).

Vielmehr müssen wir versuchen, aus der gegebenen Trajektorie mehrere zu gewinnen. Wenn wir die Aktienkursdynamik als Zufallsprozess auffassen, so nehmen wir an, dass die zeitliche Entwicklung des Preises durch zufällige Ereignisse beeinflusst wird. D. h. die Veränderungen des Aktienkurses innerhalb eines definierten Zeitintervalls τ sind Ausdruck der aufgetretenen stochastischen Ereignisse. Betrachten wir nun diese Änderungen des Preises als unsere stochastische Größe, so können wir aus der gegebenen Zeitreihe viele Trajektorien der Länge τ generieren. Es ergibt sich damit für uns ein Ensemble, da alle Mitglieder die gleichen grundlegenden Eigenschaften aufweisen (gleiche Aktiengesellschaft) und bei adäquater Berechnung die gleiche Skala umfassen. Darüber hinaus sind die Änderungen als Zielgröße besser geeignet als der Preis k , da das Interesse der Händler und Anleger hierin besteht, die Verteilung der Änderungen stärker symmetrisch ist und der generierende Zufallsprozess fast stationär ist [20]. Für die Übereinstimmung des Ensemblemittels mit dem Zeitmittel setzen wir wieder einen stationären und ergodischen Zufallsprozess voraus (siehe Abschnitt 3.2). Die mittlere Veränderung des Aktienkurses k steht dann für die mittlere Wirkung der zufällig in einem Intervall τ auftretenden Ereignisse. Jetzt stellen sich uns die folgenden zwei Fragen. Welche Veränderungen wollen wir als Zielgröße definieren? Wie unterteilen wir die

Zeitreihe mit dem Zeitfenster von Null bis t in die Subintervalle mit der Länge τ ?

3.4.1 Die Berechnungsweisen der Änderungen

Wir können die Änderungen des Aktienkurses k während einer Zeitspanne τ auf verschiedene Arten berechnen. Wir wollen uns daher auf die drei bekanntesten Berechnungsweisen beschränken. Die absoluten Änderungen ermitteln wir gemäß der folgenden Formel [70]

$$r_a(t, \tau) = k(t + \tau) - k(t) . \quad (175)$$

Wir berechnen somit die Differenz zwischen den beiden (zeitverschiedenen) Kursnotierungen. Die relativen Änderungen kalkulieren wir dagegen folgendermaßen [70]

$$r_r(t, \tau) = k(t + \tau)/k(t) . \quad (176)$$

D. h. wir errechnen den Quotienten der beiden Preise. Die dritte Variante, die der logarithmierten Änderungen, errechnen wir wie nachfolgend [20]

$$r_l(t, \tau) = \ln[k(t + \tau)/k_0] - \ln[k(t)/k_0] \quad (177)$$

$$= \ln[r_r(t, \tau)] . \quad (178)$$

Bei diesen Änderungen ermitteln wir die absolute Differenz zwischen den logarithmierten Aktienkursen. Doch welche Berechnungsvariante wollen wir nun verwenden?

In dem vorherigen Abschnitt 2.1 haben wir bereits zwei Beispiele für stochastische Prozesse kennengelernt. Würde der Aktienkurs der gewöhnlichen Brownschen Bewegung folgen, so könnten wir die folgende stochastische Differentialgleichung definieren

$$dk = \mu dt + \sigma dW . \quad (179)$$

Wir wissen bereits, dass die Änderungen dk einer Normalverteilung folgen. Betrachten wir nun den Grenzwert des Zeitintervalls τ gegen Null für die absoluten Änderungen $r_a(t, \tau)$, so erkennen wir leicht die Gleichheit

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} r_a(t, \tau) = dk . \quad (180)$$

D. h. bei Unterstellung der Brownschen Bewegung als zugrunde liegenden dynamischer Prozess ist es sinnvoll, die absoluten Änderungen zu verwenden.

Wir wissen jedoch, dass die geometrische Brownsche Bewegung für den Aktienkurs als Dynamik entwickelt wurde und einige wesentliche Charakteristiken widerspiegelt. So sichert die geometrische Bewegung einen nur positiv definierten Aktienkurs, was bei der gewöhnlichen Brownschen Bewegung nicht der Fall wäre. Die geometrischen Brownschen Bewegung ist wie folgt definiert (siehe Abschnitt 2.1.2)

$$dk = \mu k dt + \sigma k dW \quad (181)$$

$$dx = (\mu - 0.5 \sigma^2) dt + \sigma dW \quad (182)$$

$$x = \ln[k(t)/k_0] , \quad (183)$$

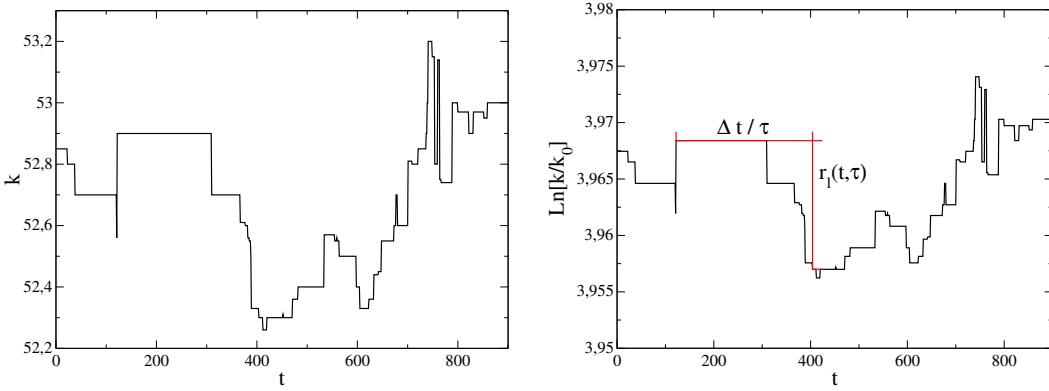


Abbildung 23: Der Aktienkurs $k(t)$ (links) und der logarithmierte Aktienkurs $\ln[k(t)/k_0]$ sowie die logarithmierten Änderungen $r_l(t, \tau)$ der DaimlerChrysler AG (Xetra Handel) am 26. Februar 2001 (09.00–09.15 Uhr). Die Konstante beträgt $k_0 = 1$ EUR/Stck.

mit der Konstanten k_0 . Wir wissen bereits, dass nicht die Änderungen dk einer Normalverteilung folgen, sondern die Änderungen $dx = dk/k$ der transformierten Variablen x . Wir betrachten jetzt den Grenzwert der logarithmierten Änderungen und erhalten

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} r_l(t, \tau) = dx . \quad (184)$$

Wir sehen die Äquivalenz der logarithmierten Änderungen mit den Änderungen der transformierten Variablen der geometrischen Brownschen Bewegung. Da wir diese Bewegung als Grundlage für unsere weiteren Ausführungen und die Modelle mit stochastischer Volatilität verwenden, werden wir uns auf die logarithmierten Änderungen konzentrieren. In der Abbildung 23 haben wir unsere Vorgehensweise noch einmal grafisch dargestellt. In den späteren Abschnitten werden wir die logarithmierten Änderungen nur abhängig von der Zeitdauer τ betrachten und als $y(\tau)$ bezeichnen.

3.4.2 Die überlappenden und die nicht überlappenden Änderungen

In dem vorherigen Abschnitt haben wir uns auf die Art der Änderungen festgelegt, auf die wir uns im weiteren konzentrieren wollen. Die verbliebene Frage ist, wie wir die Zeitreihe von 0 bis t in die Subintervalle der Zeitdauer τ unterteilen wollen. Wir haben dabei grundsätzlich die Wahl zwischen überlappenden und nicht überlappenden Zeitintervallen. Wir haben die beiden Varianten in der Abbildung 24 dargestellt.

Bei nicht überlappenden Zeitintervallen teilen wir die Zeitreihe mit der Länge t in t/τ Subintervalle der Länge τ . Der Endzeitpunkt eines Intervalls ist hierbei der Anfangszeitpunkt des nächstfolgenden Intervalls. Wir erhalten somit die Endzeitpunkte der Subintervalle mit $i\tau$ und $i = 1, \dots, t/\tau$. Der Nachteil dieser Variante ist, dass die Anzahl der generierten Trajektorien mit zunehmender Intervalllänge τ stark sinkt.

Diesen Nachteil der nicht überlappenden Zeitintervalle versuchen wir mit den überlappenden Intervallen auszugleichen. Wir starten wieder mit dem ersten Intervall mit den beiden Zeitpunkten $[0, \tau]$. Den Anfangs- und Endzeitpunkt der nächstfolgenden

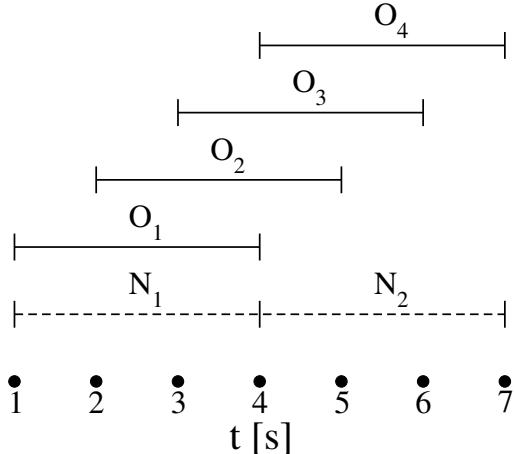


Abbildung 24: Vergleich der überlappenden Intervalle (durchgezogene Linie, Bezeichnung O - overlapping) und der nicht überlappenden Intervalle (gestrichelte Linie, Bezeichnung N - non-overlapping) der Länge $\tau = 4$ s bei der Gesamtlänge von $t = 7$ s.

Intervalle verschieben wir jedoch nicht um τ (wie bei den nicht überlappenden Änderungen), sondern um die Zeitspanne $m \Delta t$. Hierbei gibt m den Überlappungsfaktor an [20]. Setzen wir $m = \tau / \Delta t$ erhalten wir die nicht überlappenden Intervalle. Δt ist der Zeitabstand zwischen den diskreten Zeitpunkten der homogenen Zeitreihe, bei unserer Datenbank 1 s. Den Überlappungsfaktor setzen wir auf 1. Die Voraussetzung für die Verwendung von überlappenden Änderungen ist wieder die Annahme der Ergodizität [23] (siehe vorherigen Abschnitt).

Wir werden im Nachfolgenden grundsätzlich die überlappenden Zeitintervalle verwenden. Der Vorteil besteht in der hohen Anzahl an Trajektorien der Zeitlänge τ , die wir durch diese Variante gewinnen. Der Nachteil ist die Abhängigkeit der Trajektorien untereinander, die mit zunehmender Überlappung ansteigt. Die Abhängigkeit entsteht dadurch, dass die Zeitintervalle überlappen und somit zu den jeweiligen festen Zeitpunkten auftretende Ereignisse in den diesen Zeitpunkt erfassende Subintervalle enthalten sind.

Daraus resultiert die Frage, ob wir durch die Verwendung von überlappenden Intervallen eine höhere statistische Signifikanz erzielen können als bei der Anwendung von nicht überlappenden Zeitintervallen. In [20] wurde dies am Beispiel von Änderungen untersucht, die identisch und unabhängig normalverteilt mit dem Mittelwert 0 und der Varianz σ^2 sind. Das wesentliche Ergebnis ist, dass der statistische Fehler grundsätzlich, aber nicht immer, verringert werden kann. So ist die statistische Signifikanz bei der Berechnung des Mittelwertes der Änderungen unabhängig von der Art der Überlappung der Zeitintervalle. Die Änderungen r_i für ein definiertes Zeitintervall $\tau = m \Delta t$ können wir aus den Änderungen r'_i der Intervalllänge $\tau' = \Delta t$ wie folgt errechnen

$$r_i = \sum_{j=1}^m r'_{i-m+j}. \quad (185)$$

Wir errechnen somit den Mittelwert der Änderungen r einer Zeitreihe mit der Anzahl

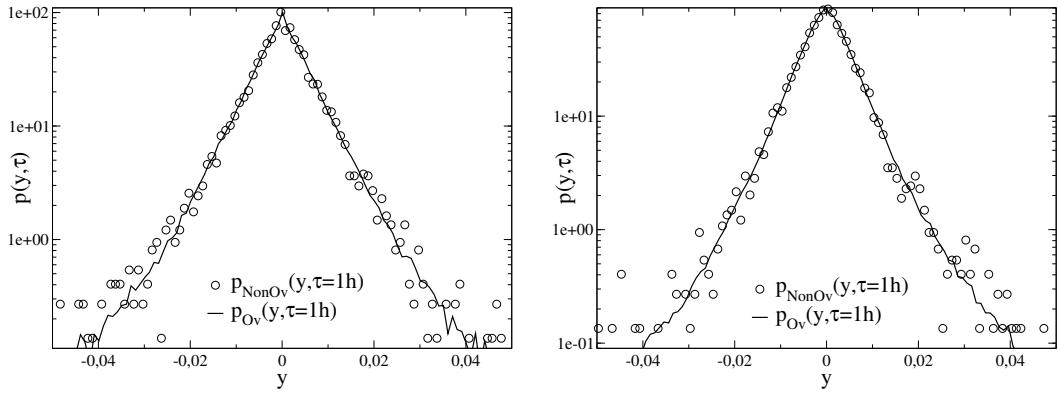


Abbildung 25: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(y, \tau)$ der logarithmierten Änderungen über das Zeitintervall τ der Adidas-Salomon AG (links, Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) und der DaimlerChrysler AG (rechts, Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001). Ov kennzeichnet die Berechnung der Dichteverteilung aus überlappenden Änderungen, $NonOv$ die Kalkulation aus nicht überlappenden Änderungen.

n an nicht überlappenden Zeitintervallen $m \Delta t$ aus den überlappenden Änderungen folgendermaßen

$$\begin{aligned} \langle r_{Ov} \rangle &= \frac{1}{a-v} \sum_{i=m}^a r_i = \frac{1}{a-v} \sum_{i=m}^a \sum_{j=1}^m r'_{i-m+j} \\ &= \frac{1}{a-v} \sum_{i=1}^v [i(r'_i + r'_{i+m-1-i})] + \frac{m}{a-v} \sum_{i=m}^{a-v} r'_i \end{aligned} \quad (186)$$

$$a = m n \quad (187)$$

$$v = m - 1. \quad (188)$$

Aus den nicht überlappenden Änderungen ermitteln wir den Mittelwert

$$\langle r_{NonOv} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{m i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r'_{i-m+j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a r'_i. \quad (189)$$

Bei dem Vergleich der rechten Seite der Gleichung (186) mit der Gleichung (189) erkennen wir, dass die Differenz mit n^{-1} für die Grenze n gegen unendlich verschwindet. Der statistische Fehler verringert sich bei der gleichen Grenze mit $n^{-1/2}$ bei beiden Intervallvarianten. Bei der Wahl von $m = 1$ für die überlappenden Änderungen ergibt sich $v = 0$, so dass wir die Übereinstimmung von $\langle r_{Ov} \rangle = \langle r_{NonOv} \rangle$ erhalten.

In [20] wird mit Hilfe der gleichen Methode gezeigt, dass der statistische Fehler bei der Schätzung des zweiten Moments der Änderungen durch die Verwendung von überlappenden Änderungen verringert werden kann. Abhängig von der Intervalllänge $m \Delta t$ ist eine Reduktion des statistischen Fehlers bis auf $2/3$ des Fehlers bei nicht überlappenden Intervallen möglich (Beweis und Details siehe [20]).

In der Abbildung 25 zeigen wir noch einmal die Äquivalenz der Verwendung von überlappenden und nicht überlappenden Intervallen. Wir haben dort für zwei aus-

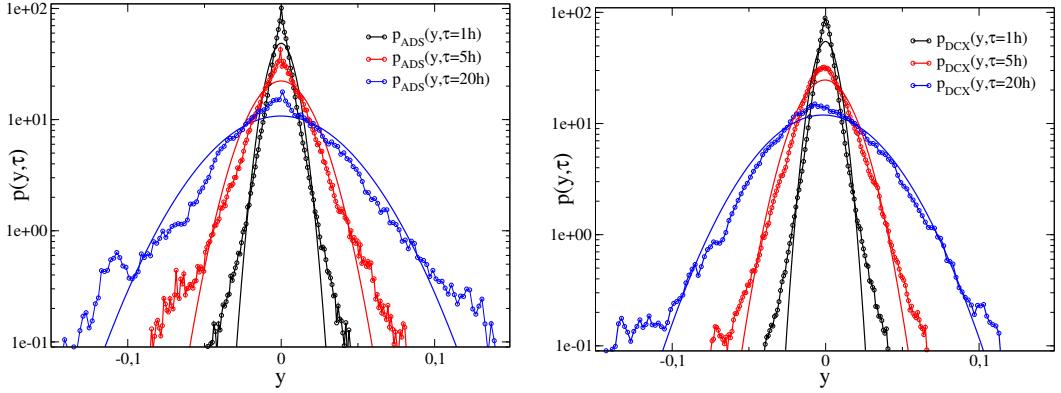


Abbildung 26: Darstellung der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(y, \tau)$ der logarithmierten Aktienkursänderungen für verschiedene Zeitintervalle τ für die Adidas-Salomon AG (links) und die DaimlerChrysler AG (rechts) (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001). Die durchgezogenen Linien ohne Kreise sind Normalverteilungen mit den ersten beiden Momenten, errechnet aus den jeweiligen empirischen Verteilungen.

gewählte Aktiengesellschaften die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y jeweils aus überlappenden und nicht überlappenden Änderungen errechnet. Wir sehen die Äquivalenz der beide Verteilungen und die geringeren Schwankungen in den Enden der Verteilung bei Verwendung von überlappenden Intervallen. Daher verwenden wir in den folgenden Abschnitten, soweit nicht anders definiert, die überlappenden Änderungen zur Berechnung der Dichteverteilungen.

3.5 Die empirisch festgestellten Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir ausgewählte grundlegende Charakteristika der Aktienkurse darstellen. Diese grundlegenden empirischen und statistischen Eigenschaften wurden in den letzten Jahren stark erforscht, insbesondere auch wegen der Verfügbarkeit von Hochfrequenzdaten [9, 17, 70, 107]. Diese Merkmale werden im Englischen auch als „stylized empirical facts“ bezeichnet. Darunter verstehen wir die gemeinsamen (statistischen) Merkmale von Kapitalmarktprodukten, die für verschiedene Instrumente, Märkte und Zeitfenster gelten [17]. Wir analysieren diese Eigenschaften anhand von einzelnen Unternehmen und nicht am Beispiel zusammengefasster Aktien (wie z. B. in [62]). In dem nächsten Abschnitt stellen wir allgemeine Merkmale bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$ dar. In dem darauffolgenden Abschnitt gehen wir näher auf die Autokorrelation ein.

3.5.1 Die allgemeinen Merkmale

In der Abbildung 26 haben wir beispielhaft die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$ für verschiedene Zeitfenster τ und verschiedene Aktiengesellschaften dargestellt. Die Leptokurtosis der Dichteverteilung ist bei diesen kleinen Zeitskalen sehr gut zu erkennen. Sie beinhaltet eine starke Konzentration der

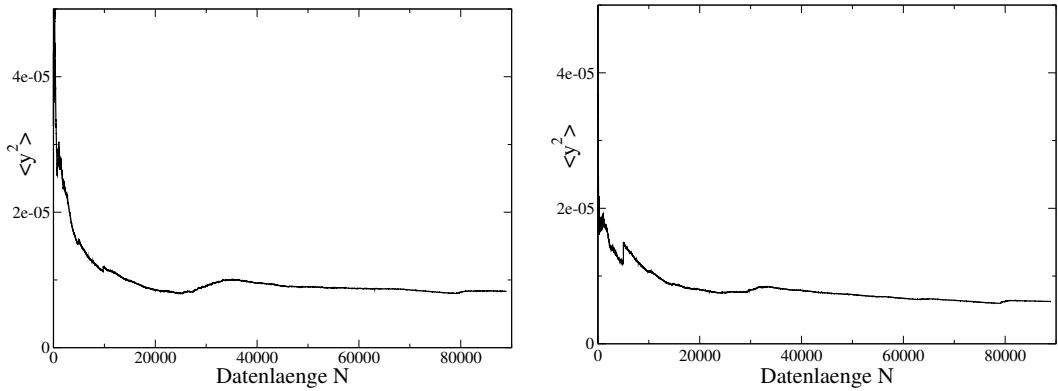


Abbildung 27: Darstellung der Konvergenz des zweiten Moments der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$ für das Zeitintervall $\tau = 5 \text{ min}$ mit zunehmender Datenlänge N am Beispiel der Adidas-Salomon AG (links) und der Veba AG (rechts) (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001). Die Gesamtzeit t ergibt sich durch $t = N \tau$.

Wahrscheinlichkeitsmasse um den Mittelwert und breite Enden (hohe Wahrscheinlichkeit von betragsmäßig großen Werten von y) im Vergleich zu einer Gaußverteilung [1, 17, 110]. Auch andere Untersuchungen beobachten keine Gaußverteilung für kurze Zeiten τ , weder an normalen Handelstagen, noch für die Mitte oder die Enden der Dichteverteilung [63]. Die Leptokurtosis bleibt auch bestehen, wenn die Änderungen nicht über die Zeitspanne τ sondern über die Differenz in den Transaktionsnummern ΔT berechnet werden. Die zu beobachtende Leptokurtosis ist stärker für Intradaydaten (Hochfrequenzdaten) als für tägliche Kurse [17]. Die Dichteverteilung der Änderungen ist aber von der Marktkapitalisierung der betreffenden Aktiengesellschaft abhängig [63]. Sowohl die Skala als auch die Form der Verteilung werden durch die Kapitalisierung beeinflusst [63]. Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung wird stärker leptokurtisch bei abnehmender Marktkapitalisierung [63]. Eine andere Studie bewies, dass die Standardabweichung σ der logarithmierten Änderungen y mit zunehmender Marktkapitalisierung K bis auf ein konstantes Niveau bei großen Kapitalisierungen abnimmt (linear im doppellogarithmischen Diagramm) [80]. Ein Beispiel mit täglichen Änderungen ergab hier ein Potenzgesetzverhalten $\sigma \sim 1/K^\beta$ mit $\beta \sim 0.2$ [80].

Auch die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Änderungen der Marktindizes, die das Durchschnittsverhalten der Preisfluktuationen der darin enthaltenen Aktien repräsentieren, konvergieren nicht zu einer Gaußverteilung [80]. D. h. die Addition der einzelnen leptokurtischen Dichteverteilungen ergibt keine Normalverteilung. Sondern auch die Änderungen der Marktindizes sind leptokurtisch verteilt [80].

Die logarithmierten Änderungen y können wir mit Hilfe des Mittelwertes und der Varianz standardisieren (siehe Abschnitt 5.5). Der Abfall der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung der standardisierten Änderungen s folgt einem Potenzverlauf

$$P(|s| > x, \tau) \sim \frac{1}{x^\alpha}, \quad (190)$$

sowohl für negative als auch für positive Änderungen [81]. Nur bei betragsmäßig kleinen

Änderungen kann die Gültigkeit des Potenzgesetzes durch die Diskrettheit der Preise eingeschränkt werden [81]. Der Exponent α ist endlich und liegt zwischen 2 und 5 [17, 42]. In [40] wurde ebenfalls eine Abfallrate von $\alpha \sim 3$ für verschiedene Aktiengrößen, Zeiträume und Märkte gemessen. In [81] wurde die Rate α mit Hilfe verschiedener Methoden geschätzt. Es ergab sich immer die Beziehung $\alpha \sim 3$ (genauer: $\alpha = 3.1$ für positive Änderungen, $\alpha = 2.84$ für negative). In einer früheren Studie der gleichen Arbeitsgruppe wurde ein Exponent $\alpha \sim 3$ der standardisierten Änderungen z für das Zeitfenster $\tau = 5$ min des S&P Index und 1000 einzelner Unternehmen ermittelt [80]. Die unterschiedlichen Exponenten für positive/negative Änderungen entsprechen der Gewinn-Verlust-Asymmetrie [17]. D. h. es treten große Verluste auf, denen aber keine gleich großen Gewinne gegenüberstehen. Insbesondere weil der Exponent nicht sicher größer als oder gleich 3 ist, berechnen wir in unserer Arbeit keine Momente höher als die zweite Ordnung. Obwohl z. B. die Kurtosis eine genaue Auskunft über die Schiefe der empirischen Verteilung gegenüber der Gaußverteilung geben könnte [17]. Aufgrund des Wertes des Exponenten α garantiert größer 2 existiert das zweite Moment der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Aktienkursänderungen [81], was in der Vergangenheit auch schon negiert wurde. Die Existenz des zweiten Moments können wir auch an dessen Konvergenz bei zunehmender Datenlänge erkennen (siehe Abbildung 27, für den S&P Index siehe [17]).

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(y, \tau)$ der Änderungen y behält die funktionelle Form über verschiedene Zeitskalen τ [81]. Für große Zeiten τ konvergiert sie aber zu einer Gaußverteilung [3, 17, 42, 80, 81, 102]. Die Zeitspanne τ der Gültigkeit des Potenzgesetzes (190) ist jedoch strittig. In [81] ist das Potenzverhalten für viele Zeiten τ gültig. Es erfolgt erst ab der Zeitspanne $\tau > 16$ d (d steht für die Zeiteinheit Tag) die Konvergenz zu einer Gaußverteilung mit einer niedrigen Konvergenzrate. Bei Simulationen mit der empirisch ermittelten Dichteverteilung ergab sich eine Übereinstimmung mit der Gaußverteilung erst ab dem Zeitintervall von $\tau = 256$ d [81]. Eine ähnliche Zeitskalierung bei der Dichtefunktion der Preisänderungen wurde auch für andere Basisdaten (z. B. Baumwolle) festgestellt [42]. Dagegen wurden in [102] ausgewählte Kapitalwerte einzeln analysiert. Die Untersuchung ergab bei kürzeren Zeitfenstern τ (mikroskopisch) ebenfalls das Potenzgesetz. Fundamental wurde das Potenzverhalten bei kleinen Zeiträumen (kleiner als eine Stunde) durch die Diskrettheit der Preise und der Transaktionsanzahl, sowie der Korrelation zwischen aufeinander folgenden Transaktionen begründet (Einfluss der Marktstruktur, Handelsweise) [102]. Bei mesoskopische Zeiten (Stunde bis Monat) zeigte sich ein exponentieller Abfall und bei großen Zeiten (makroskopisch) die Konvergenz zur Gaußverteilung (Einfluss von makroökonomischen Faktoren) [102]. Die in den beiden Studien verwandten Zeitreihen sind im Verhältnis zu der uns verfügbaren relativ lang, weshalb wir keine statistisch validen Aussagen zu dem Skalenverhalten unserer Daten tätigen können.

Eine wichtige Frage zu der Dichteverteilung der Änderungen ist, wodurch die breiten Enden gegenüber der Gaußverteilung entstehen. Wir wollen dazu im Folgenden die wichtigsten neuesten Untersuchungen zusammenfassen.

In einer Studie wurden die logarithmierten Kursänderungen y mit der Volatilität skaliert. Dadurch zeigte die Dichteverteilung der skalierten Änderungen Gaußschen Enden/Flügel [81]. Dies wurde in [17] ähnlich durchgeführt (Korrektur bezüglich der Volatilitätscluster), wo auch eine Reduktion der breiten Enden beobachtet wurde. Deshalb

analysiert z. B. eine Untersuchung die Volatilität der Änderungen [79, 82]. Dabei wird die Volatilität in die Transaktionsanzahl (des betreffenden Intervalls τ) und die Schwankungen W aufgeteilt. Es zeigt sich, dass die Residuen e (standardisierte Änderungen geteilt durch diese beiden Größen) zwar normalverteilt sind (siehe auch [43]). Aber die breiten Enden in der Verteilung der Änderungen z werden vornehmlich durch W verursacht [79, 81].

Es gibt auch Studien zu dem Einfluss der gehandelten Stückzahl in dem Intervall τ auf die Preisänderung $y(\tau)$. Es wurde gezeigt, dass die gleiche standardisierte Transaktionsgröße (standardisiert über die durchschnittliche Stückzahl) bei höher kapitalisierten Aktien einen geringeren Preiseinfluss hat [60, 61]. Ein direkter Zusammenhang zwischen den breiten Enden der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Änderungen und den Transaktionsvolumina ist jedoch strittig (Details siehe [35, 40, 83]).

Es gibt noch zahlreiche andere Untersuchungen, die z. B. die breiten Enden über die Nachfragefluktuationen [82], die Nachfrage-Angebotsdifferenz [85] oder die Wartezeitverteilung [108] erklären oder die Wartezeit genauer analysieren [88, 105]. Aufgrund des gegebenen zeitlichen Rahmens und der verfügbaren Aktiendaten haben wir keine eigenen Untersuchungen in diese Richtungen unternommen.

Ein weiteres Merkmal der Aktienkursänderungen ist deren Intermittenz [17]. Das bedeutet, dass die Änderungen über alle Zeitskalen τ sehr variabel sind und deren Varianz σ^2 nicht zeitkonstant ist (wie z. B. bei dem theoretischen Modell der geometrischen Brownschen Bewegung). Diese Zeitabhängigkeit wird auch als Heteroskedastizität bezeichnet [9]. Weiterhin liegt bei der Volatilität eine Asymmetrie in den Zeitskalen vor [17]. D. h. die grobe Messung der Volatilität sagt die feinskalierte Volatilität besser voraus als umgekehrt [17].

Es beschäftigen sich auch einige Studien [3, 17, 66, 68] mit den Saisonalitäten in den Aktienkursdaten (z. B. Filtern des Mittagseffekts in [68]). Insbesondere bei den Wechselkursen wird versucht, diese saisonalen Effekte durch verschiedene Skalierungen zu umgehen [20, 21]. Den Einfluss auf die von uns zu analysierende Größe der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung betrachten wir als gering, weshalb wir die in dem Abschnitt 3.1.2 dargestellte Homogenisierung verwenden. Außerdem wollen wir die Daten so wenig wie möglich transformieren, um keine künstlichen Effekte zu generieren.

Wir haben ebenfalls den Verlauf des Mittelwertes $\langle y \rangle$ und der Varianz σ^2 der Änderungen y über ansteigende Zeitfenster τ untersucht. Wir haben den Verlauf für kurze Zeiten τ in der Abbildung 28 dargestellt. Wir erkennen sehr gut den linearen Anstieg beider Größen, in Übereinstimmung mit [102]. In [67] wurde die Varianz bei Wechselkursen untersucht. Dabei zeigte sich auch, dass die mittlere Volatilität (bereinigt um τ) über alle Zeitfenster τ annähernd konstant ist (entspricht einem linearen Anstieg der Volatilität der Änderungen y). Die Dichteverteilung der Varianz ändert sich dabei hin zur Gaußverteilung bei großen Zeiten τ [67].

3.5.2 Die Autokorrelation

Eine wichtige und auch zahlreich in der Literatur untersuchte Eigenschaft von Zeitreihen ist die Korrelation. Im Gegensatz zu den zeitpunktbezogenen Werten des Mittelwertes und der Varianz enthält der Korrelationskoeffizient Informationen über die zeitliche Entwicklung des Systems [56]. Die Korrelation misst die Stärke des linearen

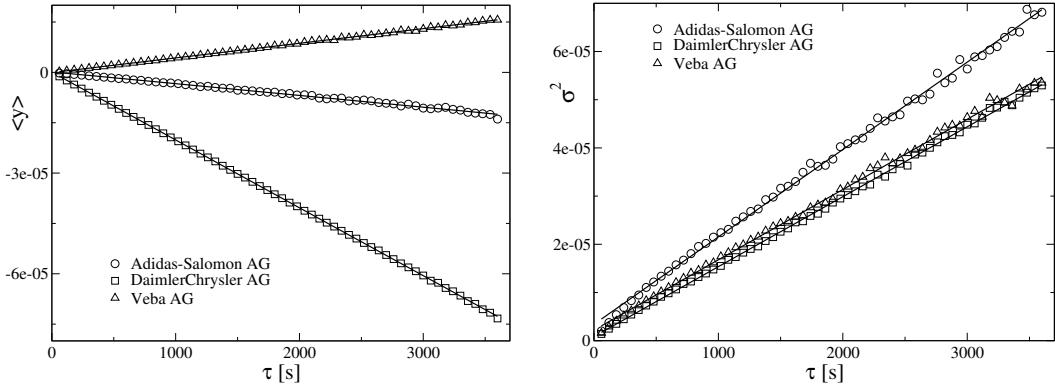


Abbildung 28: Darstellung der Abhängigkeit des Mittelwertes und der Varianz der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$ von dem Zeitfenster τ am Beispiel der Adidas-Salomon AG, DaimlerChrysler AG und der Veba AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001).

Zusammenhangs zwischen zwei Zeitreihen. Sie ist normiert auf ein Intervall zwischen -1 und $+1$, wobei $+1$ einem gleichgerichteten linearen Zusammenhang entspricht [111]. Wir wollen jedoch nicht die Korrelation zwischen verschiedenen Aktienkurszeitreihen untersuchen (wie z. B. in [45, 63, 84]), sondern die Korrelation innerhalb einer Zeitreihe. Die Autokorrelation r_n misst die Korrelation einer Zeitreihe mit sich selber, verschoben um n Werte (auch englisch als lag (Zeitverzug) bezeichnet). Wir berechnen die Autokorrelation einer beliebigen endlichen Zeitreihe X mit den Realisierungen x_i mit $i = 1, \dots, N$ nach der bekannten Formel [56]

$$r(n) = \frac{\sum_{i=n+1}^N (x_i - \langle x \rangle)(x_{i-n} - \langle x \rangle)}{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (191)$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (192)$$

Definitionsgemäß ermitteln wir bei $n = 0$ die Autokorrelation mit $r(0) = 1$ [56]. Die stochastischen Prozesse weisen immer eine fallende Autokorrelation auf, wobei der genaue Verlauf von den Eigenschaften des betrachteten stochastischen Prozesses abhängt. Bei kontinuierlicher Zeit erhalten wir die Autokorrelationsfunktion $r(t)$ mit $t = n \Delta t$ [56], wobei Δt der zeitliche Abstand zwischen den äquidistant verteilten Werten der Zeitreihe ist. Entsprechend dem Wiener-Khinchin Theorem ist die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion gleich dem Potenz Spektrum [56], was wir auch für numerische Berechnungen ausnutzen können.

Um festzustellen, ob die ermittelten empirischen Autokorrelationskoeffizienten signifikant sind, können wir einen statistischen Test durchführen. Bei dem statistischen Test des Korrelationskoeffizienten fragen wir, ob sich der aus der Stichprobe (die Aktienkurszeitreihe) ermittelte Korrelationskoeffizient $r(n)$ von dem tatsächlichen der Grundgesamtheit $\rho(n)$ unterscheidet oder nicht. Da wir keine genauen Angaben über den

Korrelationskoeffizienten der Grundgesamtheit besitzen, nehmen wir an, dass er Null ist $\rho(n) = 0$. Die Nullhypothese des durchzuführenden statistischen Tests lautet daher, dass sich der ermittelte Korrelationskoeffizient $r(n)$ nicht von Null unterscheidet. Die Unabhängigkeitshypothese wird abgelehnt, falls folgende Beziehung gilt [111]

$$\frac{r(n) \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r(n)^2}} > t(\alpha, N-2), \quad (193)$$

mit der Obergrenze N (siehe Gleichung (191)) und mit $t(\alpha, N-2)$, welcher der Student t-Verteilung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α und $N-2$ Freiheitsgraden entnommen wird. Durch die obige Beziehung (193) können wir den kritischen Wert $r_c(n)$ des Korrelationskoeffizienten $r(n)$ errechnen (auch Zufallshöchstwert genannt [59]), bei deren Überschreiten die Nullhypothese abgelehnt wird. Wir erhalten daher folgende Formulierung

$$r_c(n) = \pm \sqrt{\frac{t(\alpha, N-2)^2}{t(\alpha, N-2)^2 + N-2}}. \quad (194)$$

In unseren Tests des Autokorrelationskoeffizienten setzen wir aufgrund unserer großen Datenanzahl von z. B. $N \sim 400.000$ bei Einminutenintervallen den Wert $t(\alpha, N-2)$ auf den Wert, gegen den die Student-t-Verteilung konvergiert. Wir definieren eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% bzw. ein Konfidenzniveau von 99% und setzen demzufolge $t(0.01, \infty) = 2.326$ [5].

Wir wollen nun die Autokorrelation der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses näher betrachten. Wir definieren demzufolge unsere Zielgröße (siehe Gleichung (177)) mit

$$y(\tau) = \ln [k(t+\tau)/k(t)]. \quad (195)$$

Die Resultate für die logarithmierten Änderungen bei einem Zeitfenster von $\tau = 1 \text{ min}$ haben wir in der Abbildung 29 dargestellt. In der Abbildung links sind die Ergebnisse für die empirische Betrachtung der Änderungen bei der Adidas-Salomon AG und der DaimlerChrysler AG dargestellt. Zum Vergleich ist in der Abbildung rechts das Ergebnis für die logarithmierten Änderungen eines zeitlich unkorrelierten Zufallsprozesses (geometrische Brownsche Bewegung) abgebildet.

Wir erkennen, dass die Autokorrelationen des beispielhaften Zufallsprozesses für keine Verschiebung n signifikant von Null verschieden sind. Sie liegen immer bei oder unter dem ermittelten Zufallshöchstwert. Demgegenüber sind die Autokorrelationen bei den empirischen Aktienkurszeitreihen zumindest für $n \leq 10$ statistisch signifikant. Da wir die Autokorrelation von minütlichen Änderungen betrachten, entspricht diese Verschiebung einem Zeitfenster von $\Delta t = 10 \cdot 1 \text{ min}$.

Dieses Ergebnis wird durch ähnliche Untersuchungen in der Literatur bestätigt. Die negative signifikante Autokorrelation tritt nur bei der Analyse von Hochfrequenz- oder Intradaydaten auf. Die Analysen bestätigen, dass bei den Aktienkursänderungen die Autokorrelation bei Zeitintervallen von $\Delta t \geq 15 \text{ min}$ als Null angesehen werden kann [3, 7, 17, 18, 33, 34, 76]. Markttechnisch gesehen, dürfen solche Korrelationen auch nicht vorhanden sein, da sie für die Marktteilnehmer leicht erkennbar wären und für einen ertragreichen Handel ausgenutzt werden könnten. Dieser Handel wiederum würde die bestehenden Korrelationen reduzieren (auch als „weisen“ des Spektrums bezeichnet) [17]. Diese Tatsache stimmt auch mit der effizienten Markthypothese überein, die

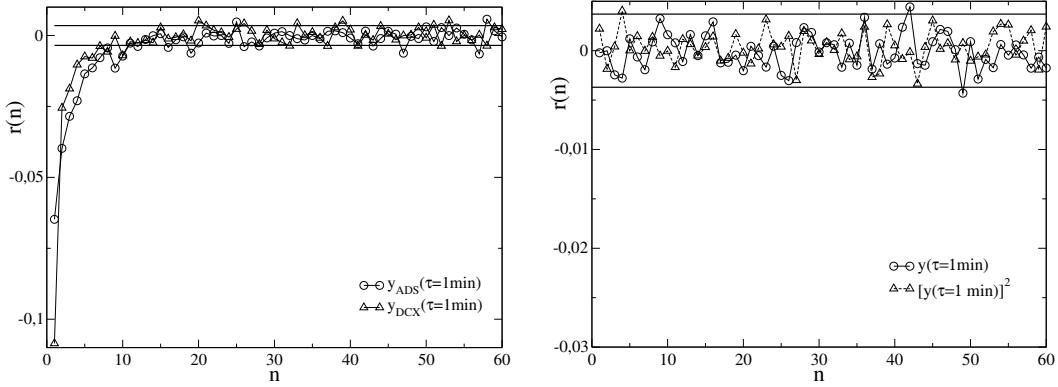


Abbildung 29: LINKS: Darstellung der Autokorrelation $r(n)$ der logarithmierten Aktienkursänderungen $y(\tau)$ der Adidas-Salomon AG (ADS) und der DaimlerChrysler AG (DCX) (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für die Zeitspanne $\tau = 1$ min über die Verschiebung (lag) n . RECHTS: Darstellung der Autokorrelation $r(n)$ der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$, ihrer absoluten Werte $|y(\tau)|$ und ihrer quadrierten Werte $[y(\tau)]^2$ für einen unkorrelierten Zufallsprozess über die Verschiebung n . Die eingezeichneten Geraden entsprechen den Zufallshöchstwerten $r_c(n)$ bei einem Konfidenzniveau von 99 %.

besagt, dass es nicht möglich ist, zukünftige Kurse nur aus ihren Vergangenen vorherzusagen [42].

Die Autokorrelation wurde auch an Änderungen für ein Zeitfenster von $\tau = 5$ min untersucht [81]. Die Auswertungen zeigten, dass eine klare Antikorrelation für $\Delta t < 30$ min vorliegt und sie darüber nicht signifikant sind. Die von uns durchgeföhrten Untersuchungen für das Intervall von 5 min zeigen Antikorrelation und die Unkorreliertheit für die gleichen Zeiten Δt . Bei anderen Untersuchungen wurde eine Autokorrelation der logarithmierten Änderungen mit einem exponentiellen Abfall ermittelt, mit einer Zeitskala bzw. charakteristischen Abfallrate von etwa 4 Minuten [42].

Die Begründung für die negative Korrelation in den Hochfrequenzdaten wird in der Angebots-Nachfrage-Preisspanne gesucht. Der festgestellte Preis pendelt zwischen dem Angebots- und dem Nachfragepreis und verursacht so die gemessene negative Korrelation [17]. Eine andere Erklärung wäre das Auftreten eines Market Maker, der die Preise entsprechend steuert [17].

Es werden ebenfalls bei Änderungen y über großen Zeitintervalle τ , wie z. B. Wochen oder Monate, Autokorrelationen festgestellt. Aufgrund der geringen Datenmenge sind diese aber statistisch unzuverlässig [17]. Da unsere Datenlänge im Vergleich zu den dort verwandten Zeitreihen kurz ist, haben wir diese Untersuchung nicht durchgeföhr.

Wir wollen jedoch noch einmal explizit darauf hinweisen, dass keine statistisch signifikante (lineare) Autokorrelation in den Änderungen y nicht bedeutet, dass sie unabhängig voneinander verteilt sind. Es besteht die Möglichkeit von komplizierteren funktionalen Beziehungen und von Korrelationen in höheren Momenten [42]. Deshalb haben wir auch die Autokorrelationen $r(n)$ von den absoluten logarithmierten Änderungen $|y(\tau)|$ und den quadrierten $[y(\tau)]^2$ untersucht.

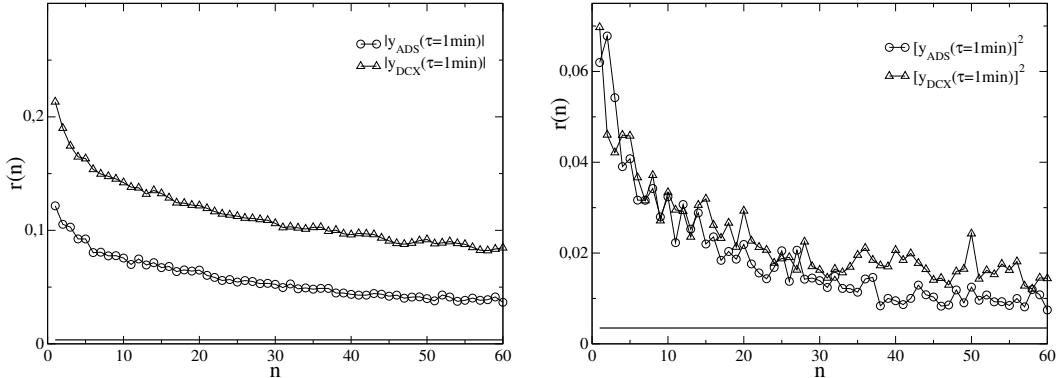


Abbildung 30: LINKS: Darstellung der Autokorrelation $r(n)$ der absoluten logarithmierten Aktienkursänderungen $|y(\tau)|$ für die Zeitspanne $\tau = 1$ min über die Verschiebung (lag) n . RECHTS: Darstellung der Autokorrelation $r(n)$ der quadrierten logarithmierten Änderungen $[y(\tau)]^2$ über die Verschiebung n . Die Änderungen sind abgebildet für die Adidas-Salomon AG (ADS) und die DaimlerChrysler AG (DCX) (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001). Die eingezeichneten Geraden entsprechen den Zufallshöchstwerten $r_c(n)$ bei einem Konfidenzniveau von 99 %.

In der Abbildung 30 haben wir die Autokorrelationen für die absoluten und quadrierten logarithmierten Änderungen dargestellt. Wir erkennen zum einen, dass die Autokorrelationen $r(n)$ für alle dargestellten Verschiebungen n statistisch signifikant sind. Zum anderen erfolgt der Abfall der Autokorrelationen sehr langsam und nicht exponentiell. D. h. es liegen hier langreichweitige, statistisch signifikante Autokorrelationen vor. Aufgrund dieser positiven Autokorrelation sprechen wir auch von sogenannten Volatilitätsclustern, d. h. Tage mit hoher Varianz werden von Tagen mit hoher Varianz gefolgt und umgekehrt [17, 30]. Auch diese Ergebnisse stimmen mit bekannten Untersuchungen am Aktienmarkt überein.

Die Autokorrelation der absoluten logarithmierten Änderungen für verschiedene Potenzen α zeigt den höchsten Wert bei $\alpha = 1$ [17], was bei uns ebenfalls zutrifft. Darüber hinaus folgt der Abfall der Autokorrelation einem Potenzgesetz der Form

$$r_\alpha(\Delta t) \sim \frac{a}{(\Delta t)^\beta}, \quad (196)$$

mit der Relation $\Delta t = n \tau$. Bei verschiedenen empirischen Untersuchungen wurde β zwischen 0.2 und 0.4 gemessen [17, 112]. Weitere Studien bestätigen ebenfalls die Abfallrate in den absoluten Änderungen mit $\beta = 0.34$ [81] oder mit β zwischen 0.1 und 0.3 für die Zeitspanne Δt von einigen Stunden bis Monate [67]. Es wurde auch festgestellt, dass die langreichweitigen Korrelationen in den Änderungen vor allem durch die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Transaktionen begründet wird [81], was auch [17] bestätigt. Dies bestärkt auch eine andere Studie [44]. In [7] wird die langreichweite Korrelation in der Transaktionsanzahl am Beispiel von Tagesdaten bestätigt. Darüber hinaus wurde in einer Untersuchung festgestellt, dass die Autokorrelationen in der Volatilität durch das zufällige Mischen der Zeitreihe zerstört werden [66].

Ein weiterer wichtiger Punkt, den wir nicht genauer untersuchen, ist der Leverage Effekt (Hebeleffekt) oder die Volatilitätsasymmetrie. Der Effekt beschreibt die negativen Korrelationen zwischen vergangenen relativen Änderungen und zukünftiger Volatilität [8, 17]. D. h. die Volatilität steigt an, wenn der Preis fällt. Die durchschnittliche Abfallzeit ist dabei 10 Tage bei Indizes und 50 Tage bei Einzelaktien, die Korrelationsamplitude dafür aber bei Indizes deutlich höher [8].

Aufgrund der gezeigten Unkorreliertheit der logarithmierten Änderungen und den signifikanten Korrelationen der absoluten Änderungen erfolgt in theoretischen Modellen auch eine Aufspaltung der Änderungen in einen neuen Variable v , die Korrelationen aufweist, und einem unkorreliertem Rauschterm [17]. Wir werden auf solche Modelle in dem Abschnitt 4 näher eingehen.

Die Markov Eigenschaft, als weiteren wichtigen Aspekt bei der Beschreibung von dynamischen Systemen mit Hilfe von stochastischen Prozessen, werden wir im nächsten Abschnitt analysieren.

3.6 Die Untersuchung der Markov Eigenschaft bei den Aktienkursänderungen

3.6.1 Die Darstellung der Grundlagen

Eine wichtige Voraussetzung und Vereinfachung für die Ausführungen in unserer Arbeit ist die Annahme der Markov Eigenschaft für den zu modellierenden Prozess der Aktienkursdynamik. Diese Eigenschaft beinhaltet, dass der zukünftige Zustand des Systems (bei uns der Aktienkurs) nur von dem gegenwärtigen Zustand und den entsprechenden Übergangsraten abhängt. Der zukünftige Zustand wird nicht durch die Vergangenheit bestimmt, wodurch folgende Äquivalenz vorliegt [41, 50, 55, 96, 104]

$$p_N(x_N, t_N | x_1, t_1; \dots x_{N-1}, t_{N-1}) = p_2(x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1}), \quad (197)$$

mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_N(\cdot)$ und den Zeitrelationen $t_1 \leq t_2 \dots t_{N-1} \leq t_N$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_2(\cdot)$ wird auch als Übergangs-wahrscheinlichkeit bezeichnet. Ist diese nur von der Zeitdifferenz $t_N - t_{N-1}$ abhängig, liegt ein homogener Markov Prozess vor [50].

Grundsätzlich könnten wir auch mit unserer Arbeit fortfahren, ohne die Markov Eigenschaft konkret nachzuweisen. Die mathematische Handhabbarkeit der Gleichungen wird bei Annahme der Eigenschaft wesentlich vereinfacht. Es wäre dann zu untersuchen, inwieweit wir mit Hilfe dieser Annahme den empirisch beobachteten Prozess qualitativ gut beschreiben können, ohne die Markov Eigenschaft aufheben zu müssen. Darüber hinaus ist zu beachten, dass uns empirisch nur diskrete und endlich viele Realisierungen des stochastischen Prozesses zur Verfügung stehen. Deshalb kann oft nur ein endlich langes Gedächtnis nachgewiesen werden.

Wir wollen im Folgenden die Markov Eigenschaft bei der Aktienkursdynamik untersuchen. Dafür definieren wir als Erstes unsere Zielgröße x . Wir betrachten jede Aktiengesellschaft als einen eigenständigen Zufallsprozess. Die empirischen Aktienkurse $k(t)$ bilden eine Realisierung (Trajektorie) dieses Prozesses. Da uns nur eine Trajektorie vorliegt und sich die Kurse k im Zeitverlauf stark ändern, scheidet diese Größe

aus (siehe Abschnitt 3.2). Wir verwenden statt dessen wieder den logarithmierten Aktienkurs $x(t) = \ln[k(t)/k_0]$ und der Wahl der Konstanten $k_0 = k(t=0)$ (siehe Gleichung (177)). Darüber hinaus beschränken wir uns auf den Nachweis folgender Gleichheit (siehe [38, 95])

$$p_3(x_3, t_3 | x_1, t_1; x_2, t_2) = p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2), \quad (198)$$

mit der Nebenbedingung $t_1 \neq 0$. Bei der numerischen Implementierung haben wir nun die Möglichkeit, die beiden Dichteverteilungen getrennt voneinander zu berechnen. Anschließend können wir die errechneten Dichteverteilungen bei bestimmten x_1, t_1 für alle x_2, t_2 und x_3, t_3 miteinander vergleichen. Aber wie vorher erwähnt, stehen uns nur endlich viele Werte zur Verfügung. Um die statistische Aussagekraft nicht einzuschränken, müssen alle Werte x_3 unabhängig voneinander sein. D. h. wir müssen für $x(t)$ die nicht überlappenden Änderungen aus der vorhandenen Zeitreihe errechnen, was unseren Datensatz zusätzlich reduziert. Des Weiteren wird der statistische Test nicht an den Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen, sondern an den Häufigkeitsverteilungen durchgeführt. Diese Verteilung entspricht der Wahrscheinlichkeitsverteilung multipliziert mit der Gesamtanzahl der Ereignisse (Datenlänge).

Die Häufigkeitsverteilungen errechnen wir, indem wir endliche Intervalle Δx_i bestimmen und die errechnete Häufigkeit über die Klassenmitte auftragen. Die Gesamtanzahl der möglichen Werte x_3 ist durch die Zeitspanne t_3 und die Gesamtzeitdauer T der Zeitreihe definiert. Nun wird diese feste Anzahl auf eine dreidimensionale Matrix ($p_3(\cdot)$) und eine zweidimensionale Matrix ($p_2(\cdot)$) aufgeteilt. Dadurch ist die Häufigkeit je Element bei der dreidimensionalen Matrix deutlich geringer als bei der zweidimensionalen.

Um dies zu vermeiden gehen wir einen anderen Weg. Wir errechnen die Dichteverteilung $p_3(\cdot)$. Anschließend betrachten wir die Verteilungen $p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1; x_2 = a, t_2)$ für jeden möglichen Wert a separat. Dabei testen wir die Dichteverteilung $p_1(x_3, t_3 | x_1 = b, t_1; x_2 = a, t_2)$ für jedes b gegen jede Verteilung $p_1(x_3, t_3 | x_1 \neq b, t_1; x_2 = a)$. Wir definieren n_i als die Anzahl an Intervallen je Variable x_i . Wir führen dann für jedes $x_2 = a$ genau $n_1(n_1 - 1)/2$ statistische Tests aus, also insgesamt $n_2 n_1(n_1 - 1)/2$ Tests.

Wir müssen nun weiterhin beachten, dass wir auch tatsächlich Verteilungen gegeneinander testen. D. h. es ist auf eine ausreichende Anzahl an Einträgen je Intervall und auf eine ausreichende Anzahl an „belegten“ Intervallen zu achten. Um eine ausreichende Anzahl an Häufigkeiten je Intervall zu gewährleisten, definieren wir einen Schwellwert. Liegt die Häufigkeit in einem Intervall unter diesem definierten Wert, wird sie auf Null gesetzt. Wir haben als Schwellwert 4 gewählt, um die Nebenbedingung des verwendeten Chi-Quadrat Homogenitätstests zu erfüllen [5]. Wir betonen damit, dass auftretende Häufigkeiten von unter 4 statistisch nicht valide genug sind.

Um eine ausreichende Anzahl an „belegten“ Intervallen zu gewährleisten, konzentrieren wir uns aufgrund der geringen Anzahl an Ereignissen nur auf den Mittelteil der Verteilungen. Dabei definieren wir den Mittelteil folgendermaßen. Wir errechnen die Mittelwerte μ_i und die Standardabweichung σ_i für die Werte x_i mit $i = 1, 2, 3$. Wir testen jetzt nur solche Intervalle, die folgender Bedingung genügen

$$x_i \in [\mu_i - \sigma_i, \mu_i + \sigma_i]. \quad (199)$$

Wir stellen somit sicher, dass die Anzahl an Intervallen und die zugehörigen Häufigkeiten groß genug sind, wir aber auf der anderen Seite trotzdem einen repräsentativen Teil der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung testen.

Um die Tests nun durchführen zu können, müssen wir noch festlegen, welchen statistischen Test wir verwenden werden. Wir nutzen den Chi-Quadrat Homogenitätstest. Dieser Test ist ein Zwei- oder Mehrstichprobentest. Es wird getestet, ob die Stichproben aus einer Grundgesamtheit stammen. Somit lautet die Nullhypothese, dass die Stichproben aus einer Grundgesamtheit stammen. Dieser Test ist verteilungsunabhängig, d. h. es können auch nicht normalverteilte Messwerte getestet werden. Wir definieren den Testwert [6]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(h_{ij}^o - h_{ij}^e)^2}{h_{ij}^e} \quad (200)$$

$$h_{ij}^e = \frac{h_i h_j}{n} \quad (201)$$

$$n = \sum_{i=1}^r h_i = \sum_{j=1}^c h_j. \quad (202)$$

Hierbei ist h_{ij}^o die beobachtete Häufigkeit im Intervall i der Stichprobe j , h_{ij}^e die erwartete Häufigkeit, h_i die Zeilensumme, h_j die Spalten- bzw. Stichprobensumme und n die Gesamtsumme. Ist der so ermittelte Wert größer als der theoretische Testwert χ_c^2 , wird die Nullhypothese (eine Grundgesamtheit) abgelehnt. Die Anzahl der Freiheitsgrade ergibt sich dabei zu $v = (r - 1)(c - 1)$.

3.6.2 Der beispielhafte Test an der geometrischen Brownschen Bewegung

Bevor wir nun den statistischen Test an empirischen Aktienkurszeitreihen ausführen, wollen wir die Funktionsweise an einer simulierten Zeitreihe einschätzen. Wir verwenden als modellhaften stochastischen Prozess die geometrische Brownsche Bewegung mit der bekannten Bewegungsgleichung in Itô Notation (siehe Abschnitt 2.1.2)

$$dk = \mu k dt + \sigma k dW, \quad (203)$$

mit dem Aktienkurs k und den Konstanten μ und σ .

Unsere Vorgehensweise ist dabei wie folgt. Wir legen feste Werte μ_0 und σ_0 für die beiden Parameter fest. Anschließend simulieren wir die Gleichung (203) mit Hilfe des expliziten strengen Schemas der Ordnung 1.5, mit einer Konvergenz von 1.5 im strengen Sinn [58]. Die dabei simulierte Länge und zeitlich diskrete Auflösung der Zeitreihe entspricht den empirisch vorhandenen Aktienkurszeitreihen. D. h. wir speichern den Wert k für jede Sekunde für insgesamt 3 Jahre mit je 220 Arbeitstage und 10 Stunden je Tag in einer separaten Datei.

Die so generierten Werte unterziehen wir dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Chi-Quadrat Homogenitätstest. Die Werte $x(t) = \ln[k(t)/k_0]$ mit $k_0 = k(t = 0)$ errechnen wir für die drei verschiedene Zeitfenster. Wir orientieren uns bei den Zeitrelationen t_1 zu t_2 zu t_3 an der Literatur mit $t_1 = 1/3 t_3$ sowie $t_2 = 2/3 t_3$ [95]. Wir verwenden dabei die spezielle Wahl mit $t_3 = 3\,600$ s, da uns dieses Zeitfenster in den

x_2	h_i^o
-0.0079	97.0
-0.0039	899.0
0.0001	1540.0
0.0041	770.0
0.0081	93.0

Tabelle 3: Ermittelte Gesamthäufigkeiten h_i^o je Intervall $x_2 + \Delta x_2$, aufgetragen über die Klassenmitte.

folgenden Abschnitten am meisten interessiert. Da wir nicht überlappende Änderungen x_3 ermitteln, generieren wir insgesamt 6 599 Datenpaare (x_1, x_2, x_3) (wegen 3 Jahre x 220 Tage x 10 Stunden - 1 (wegen x_0)).

Mit Hilfe dieser Datenpaare führen wir den Chi-Quadrat Homogenitätstest in der vorher beschriebenen Vorgehensweise durch. Wir wählen die diskreten Intervalle mit $\Delta x_1 = \Delta x_3 = 0.002$ und $\Delta x_2 = 0.004$. Von den insgesamt 6 599 Datenpaaren wurden 576 (8.73 %) nicht weiter betrachtet. Diese fielen in solche Intervalle $[x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}]$, deren Häufigkeit insgesamt 4 nicht überstieg.

In der Tabelle 3 haben wir die Gesamthäufigkeiten h_i^o aufgetragen, die insgesamt in den jeweiligen Intervallen $x_2 + \Delta x_2$ auftreten. Dabei haben wir nur die Intervalle von x_2 betrachtet, die in dem relevanten Bereich $x_2 \in [\mu_2 - \sigma_2, \mu_2 + \sigma_2]$ liegen, um eine genügend hohe Anzahl an belegten Intervallen zu gewährleisten. Somit hat sich die Anzahl der Datenpaare auf nun 3 399 reduziert.

In der Tabelle 4 haben wir die Chi-Quadrat Homogenitätstestergebnisse für die simulierte Trajektorie der geometrischen Brownschen Bewegung dargestellt. Die detaillierten Testergebnisse haben wir dabei nach dem Intervall x_2 (angegeben als Klassenmittelwert) und nach den Intervallen x_1 (angegeben als Reihennummer i und j) untergliedert. Für jeden durchgeführten Test haben wir den errechneten Chi-Quadrat Wert und den theoretischen Testwert angegeben. Von den 32 möglichen Tests konnten wir aufgrund der ungenügender Datenmenge (zu geringe Intervallanzahl) 11 nicht durchführen. Von den durchgeführten 21 Tests haben wir bei 16 Tests (76,2 %) die Markov Eigenschaft nicht abgelehnt (true als Testergebnis).

Wie können wir das Testergebnis nun zusammenfassend beurteilen? Zum einen werden bei einem solchen Nachweistest hohe Anforderungen an die Datenmenge gestellt. Viele Datenpaare haben wir nicht in den Test miteinbezogen, da die Anzahl an Häufigkeiten im betroffenen Intervall zu gering war. Des Weiteren haben wir auch viele Datenpaare nicht testen können, da die Anzahl an Intervallen zu gering ist. Das Testergebnis ist aber durchaus positiv. Wir konnten immerhin bei insgesamt 76,2 % der durchgeführten Tests das Vorhandensein der Markov Eigenschaft nicht ausschließen. Dieses Testergebnis lässt zwar nicht die Aussage zu, dass die Markov Eigenschaft in der gewählten simulierten Zeitreihe bestätigt wird. Jedoch können wir auch die Ablehnung der Gültigkeit der Markov Eigenschaft nicht vornehmen.

x_2	Reihe i	Reihe j	v	χ^2	χ_c^2	Testergebnis
-0.0079	0.0	1.0	3.0	19.8613	7.815	false
-0.0079	0.0	2.0	3.0	11.5825	7.815	false
-0.0039	0.0	1.0	5.0	4.0506	11.07	true
-0.0039	0.0	2.0	5.0	5.7382	11.07	true
-0.0039	0.0	3.0	5.0	12.7834	11.07	false
-0.0039	1.0	2.0	5.0	1.9239	11.07	true
-0.0039	1.0	3.0	5.0	7.1329	11.07	true
-0.0039	2.0	3.0	5.0	7.3826	11.07	true
0.0001	0.0	1.0	5.0	1.0324	11.07	true
0.0001	0.0	2.0	5.0	1.1192	11.07	true
0.0001	0.0	3.0	5.0	7.023	11.07	true
0.0001	1.0	2.0	5.0	2.372	11.07	true
0.0001	1.0	3.0	5.0	6.493	11.07	true
0.0001	2.0	3.0	5.0	6.7243	11.07	true
0.0041	0.0	1.0	4.0	17.3378	9.488	false
0.0041	1.0	2.0	5.0	9.561	11.07	true
0.0041	1.0	3.0	4.0	6.6851	9.488	true
0.0041	2.0	3.0	5.0	11.1647	11.07	false
0.0081	0.0	1.0	2.0	5.4562	5.991	true
0.0081	0.0	2.0	2.0	5.4706	5.991	true
0.0081	1.0	2.0	2.0	0.1816	5.991	true

Tabelle 4: Darstellung der Chi-Quadrat Homogenitätstestergebnisse je Intervall x_2 für die getesteten Verteilungen von x_3 für verschiedene x_{1i} und x_{1j} unter Angabe der Freiheitsgrade v , dem ermittelten Testwert χ^2 und dem theoretischen Testwert χ_c^2 .

Aktienkurszeitreihe	Durchgeführte Tests	Nichtablehnung	Nichtablehnung (%)
DE0005003400Bo	13	4	31
DE0005003400Xe	21	14	67
DE0007100000Bo	10	5	50
DE0007100000Xe	8	3	38
DE0007614400Bo	11	6	55
DE0007614400Xe	11	5	45

Tabelle 5: Darstellung der Chi-Quadrat Homogenitätstestergebnisse je Aktienkurszeitreihe.

3.6.3 Der Test an ausgewählten Aktienkurszeitreihen

Wir führen jetzt den Chi-Quadrat Homogenitätstest an den empirischen Aktienkurszeitreihen durch. Wir gehen dabei wie in den vorherigen Abschnitten beschrieben vor. Wir berechnen die logarithmierten Änderungen x_i des Aktienkurses für die drei verschiedenen Zeitfenster $t_1 = 1\,200$ s, $t_2 = 2\,400$ s und $t_3 = 3\,600$ s. Wir betrachten wieder nur die Intervalle $x_i + \Delta x_i$, die sich in dem Bereich von $[\mu_i - \sigma_i, \mu_i + \sigma_i]$ befinden. Wir setzen die Intervallbreite auf $\Delta x_1 = \Delta x_3 = 0.002$ sowie $\Delta x_2 = 0.004$.

In der Tabelle 5 haben wir die Chi-Quadrat Homogenitätstestergebnisse für die jeweiligen empirischen Zeitreihen dargestellt. Wir führen jeweils die Anzahl der durchgeführten Tests, sowie die Anzahl der erfolgreichen Tests (nicht abgelehnte Testergebnisse) auf. Wir haben für jede getestete Aktiengesellschaft (Adidas-Salomon AG, DaimlerChrysler AG, Veba AG) zwei unterschiedlich lange Zeitreihen verwendet. Zum einen nur die Zeitreihe des Xetra Handels *Xe*, maximal vom 01.01.1999 bis zum 28.12.2001. Zum anderen die Zeitreihe *Bo* vom 02.05.1996 bis zum 28.12.2001, mit dem Börsenplatz folgend der Dax Umstellung von dem Frankfurter Parketthandel auf den Xetra Handel.

Grundsätzlich können wir sagen, dass die Testergebnisse positiv sind. Wir konnten im Durchschnitt bei 50 % der durchgeführten Tests die Markov Eigenschaft nicht ablehnen. Darüber hinaus erkennen wir deutlich Unterschiede bei der verwendeten Zeitreihe. So wirkt sich die kürzere Xetra Zeitreihe nur bei der Adidas-Salomon AG in einem verbesserten Testergebnis aus. Bei den anderen verringert sich die relative Anzahl der positiven Testergebnisse. Wir haben den Chi-Quadrat Homogenitätstest auch für verschiedene Zeiten t_3 bis zu 2 h durchgeführt. Die Testergebnisse waren dabei den aufgeführten (siehe Tabelle 5) ähnlich.

Wir haben in den letzten drei Abschnitten eine Möglichkeit aufgezeigt, wie wir die Markov Eigenschaft in der Zeitreihe quantitativ testen können. Aufbauend auf vorhandenen Beurteilungen in der Literatur [95] haben wir einen statistischen Test zur Einschätzung der Markov Eigenschaft durchgeführt. Es hat sich bei der von uns verwendeten Testdurchführung und den definierten Zeitfenstern gezeigt, dass die Gültigkeit der Markov Eigenschaft bei den Aktienkurszeitreihen nicht grundsätzlich abgelehnt werden kann. Aufgrund dieses Testergebnisses werden wir in den folgenden Abschnitten theoretische Modelle formulieren, unter der Annahme der Gültigkeit der Markov Eigenschaft.

4 Die Aktienkursmodelle mit stochastischer Volatilität

In den letzten Jahren haben die Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der quantitativen Finanzwirtschaft stark zugenommen [10, 11, 22, 99]. Die Gebiete von großem Interesse, insbesondere für die Praktiker, sind vor allem das Risikomanagement und die Derivate [19, 24, 98]. Aber um das Risiko optimal zu begrenzen, müssen wir wenigstens ein paar Basisfakten über die Aktienkursdynamik kennen, zumindest die grundlegenden Eigenschaften des Kursverlaufes (chaotisch oder stochastisch, Gaußverhalten oder nicht). Deshalb wollen wir in den folgenden Abschnitten unsere Aufmerksamkeit auf die Aktienkursdynamik selber lenken.

Die quantitative Beschreibung startete mit der berühmten Arbeit von Bachelier [2, 26] im Jahre 1900. Er entwickelte die Darstellung für die Brownsche Bewegung, fünf Jahre vor Einstein [29]. Die Ausarbeitungen von Bachelier dienten Itô als Motivation für die Entwicklung der geometrischen Brownschen Bewegung [54, 78]. Diese Bewegung wurde dann vielfach in der Ökonomie angewandt, u. a. auch auf dem Finanzmarkt. Hierbei wird die Aktienkursentwicklung als stochastischer Prozess beschrieben, der einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt (siehe Abschnitt 2.1.2). Die Langevin Gleichung in dem Itô Formalismus ist bekannt als [78, 58, 74, 101]

$$dk = \mu k dt + \sigma k dW(t), \quad (204)$$

mit dem Aktienkurs k zu dem Zeitpunkt t , μ als den zeitkonstanten Drift (oder als konstante Wachstumsrate), σ als die zeitunabhängige Fluktuationsstärke (Schwankung) und $dW(t)$ als die zeitabhängigen Änderungen eines Wiener Prozesses $W(t)$. Als Resultat dieser Beschreibung folgt der logarithmierte Aktienkurs $x(t) = \ln[k(t)/k_0]$, mit einer beliebigen Konstanten k_0 , einer Gaußverteilung (siehe Abbildung 31), mit einem zeitabhängigen Mittelwert $\langle x \rangle(t) = (\mu - \sigma^2/2)t + x_0$ und einer zeitabhängigen Varianz von $\langle x^2 \rangle(t) - [\langle x \rangle(t)]^2 = \sigma^2 t$, wenn der Anfangswert $x(t=0) = x_0$ ist.

Die geometrische Brownsche Bewegung stellte die Basis für weitere Forschungen auf dem Gebiet des Aktienmarktes dar, so z. B. für die Black-Scholes Gleichung [4] sowie die Arbeiten von Merton [72]. Aber in den letzten Jahren zeigte sich, dass die Beschreibung nicht mit den empirischen Eigenschaften der Aktienkursdynamik übereinstimmt. Als Erstes wurde dies 1959 von Osborne entdeckt [71, 75]. Es wurde festgestellt, dass die empirischen Dichteverteilungen der Änderungen dx nicht gaußverteilt, sondern leptokurtisch verteilt sind [1, 37, 110] (siehe Abschnitt 3.5, vergleiche Abbildung 31 und 26).

Allgemein gibt es verschiedene Wege, um die breiten Enden der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung darzustellen [81]. Wir können die Aktienkursentwicklung z. B. mit Hilfe der Student t Verteilung, mit einer exponentiell gedämpften Lévy Verteilung, einer hyperbolischen Verteilung, einer inversen Gaußverteilung und mit einer Log-Normalen Kombination von Gaußverteilungen modellieren [17, 81]. In unserer Arbeit konzentrieren wir uns auf die dritte Variante, weil dort die breiten Enden aufgrund der Dynamik des zugrundeliegenden Prozesses entstehen und nicht explizit durch die Dichteverteilung des Rauschterms vorgegeben werden. Außerdem kann so die weit akzeptierte geometrische Brownsche Bewegung als Ausgangspunkt dienen.

Die Modelle mit stochastischer Volatilität beschreiben die Aktienkursentwicklung mit Hilfe der Log-Normalen Kombination von Gaußverteilungen. Um dies zu erreichen,

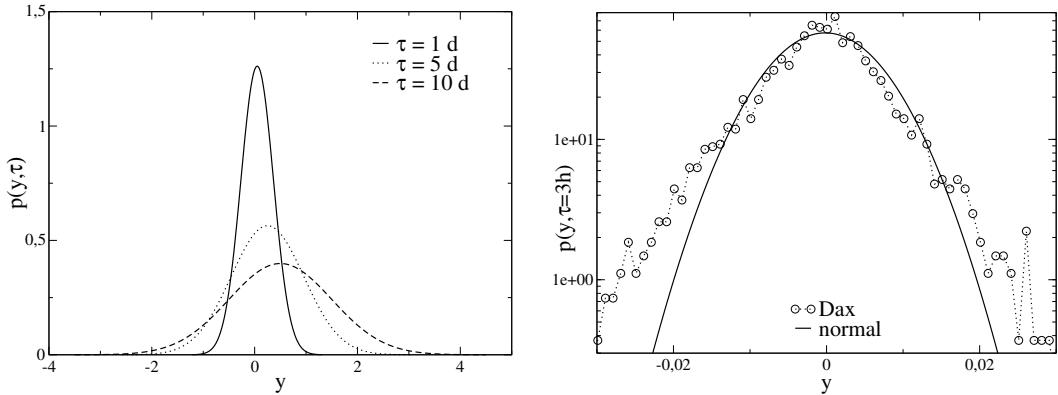


Abbildung 31: LINKS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der geometrischen Brownschen Bewegung für die Änderungen $y(\tau) = x(\tau) - x(0)$ des logarithmierten Aktienkurses $x(\tau) = \ln [k(\tau)/k_0]$ für verschiedene Zeiten τ . Die Anfangsbedingung ist $x(\tau = 0) = 0$ und die Parameter sind $\mu = 0.1 \text{ d}^{-1}$ und $\sigma^2 = 0.1 \text{ d}^{-1}$. RECHTS: Darstellung der empirischen WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung des Dax für die Änderungen $y(\tau)$ des logarithmierten Aktienkurs (Indexstand) für $\tau = 3 \text{ h}$ gegenüber einer Normalverteilung mit den geschätzten ersten beiden Momenten.

ist in diesen Modellen die Varianz $v = \sigma^2$ kein Parameter mehr, sondern ist eine eigenständige Variable. Außerdem ist die Varianz genauso wie der Aktienkurs k eine stochastische Variable. Dies stimmt mit empirischen Beobachtungen überein, die ein zufälliges Verhalten der Varianz entdeckt haben [17, 37] (siehe Abschnitt 3.5). Deshalb erhalten wir jetzt ein System von stochastischen Differentialgleichungen, welches die Aktienkursdynamik charakterisiert. Die stochastischen Differentialgleichungen als Langevin Gleichungen im Itô Formalismus lauten wie folgt [49, 51]

$$\begin{aligned} dk &= \mu k dt + \sqrt{v(t)} k dW_k(t) \\ dv &= a_v(v, k, t) dt + b_v(v, k, t) dZ_v(t) \\ dZ_v(t) &= \rho dW_k(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_v(t). \end{aligned} \quad (205)$$

Die Rauschterme $dW_i(t)$ sind wieder die Inkremente eines Wiener Prozesses und sind unabhängig und identisch normalverteilt. Der Korrelationskoeffizient ρ gibt die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen den Fluktuationen des Aktienkurses $k(t)$ und der Varianz $v(t)$ an.

Die Analyse der empirischen Aktienkurse zeigt, dass die Varianz sich mittelwerts-erhaltend entwickelt [30, 37, 97]. Das bedeutet, dass sie zufällig um einen langfristigen Mittelwert fluktuiert. Darüber hinaus sind die Fluktuationen der Varianz sogar noch persistent, d. h. Tage mit hoher Varianz werden von Tagen mit ebenfalls hoher Varianz gefolgt und umgekehrt [15, 77]. Diese empirischen Fakten führen uns zu dem Ansatz, die Varianz als mittelwertserhaltenden Prozess zu modellieren. Daher definieren wir für den Driftterm $a_v(v, k, t)$ die folgende Beziehung (Itô Formalismus) [25, 37, 49, 51]

$$a_v(v, k, t) = \gamma (\theta - v). \quad (206)$$

Der Parameter θ ist der Wert von der Varianz v (gewöhnlich gleich dem langfristigen Mittelwert gesetzt), zu dem die Varianz in der Relaxationszeit $1/\gamma$ relaxiert. Der Ansatz für den deterministischen Term ist uns bereits von dem Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit linearem Potenzial bekannt (siehe Gleichung (124)).

Beide Modelle, die wir analysieren wollen, das Heston und das Hull-White Modell, gehören zu den Modellen mit stochastischer Volatilität und beschreiben die Varianzdy namik mit Hilfe eines mittelwertserhaltenden Prozesses. Die Ansätze unterscheiden sich nur in dem Diffusionsterm. Der Fluktuationsterm des Hull-White Modells $b_v^{HW}(v, k, t)$ und des Heston Modells $b_v^H(v, k, t)$ sind gegeben als [39, 49, 51, 73]

$$b_v^{HW}(v, k, t) = \tilde{\kappa} v \quad (207)$$

$$b_v^H(v, k, t) = \kappa \sqrt{v(t)}, \quad (208)$$

wobei die Parameter κ und $\tilde{\kappa}$ die Stärke der stochastischen Fluktuationen der Varianz v repräsentieren. Wir verwenden verschiedene Notationen für die Parameter, weil wir sie nicht direkt vergleichen können, da die Einheiten verschieden sind. Die grundlegende Beziehung zwischen den beiden Modellparametern ist durch $\kappa = \tilde{\kappa} \sqrt{\theta}$ gegeben. Der stochastische Prozess der Varianz des Heston Modells ist in der Finanzliteratur auch als Cox-Ingersoll-Ross Prozess und in der Mathematik als Feller Prozess bekannt [25].

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf die beiden dargestellten Modelle fokussieren, da sie am Aktienmarkt weit bekannt und intensiv verwendet werden. Mit Hilfe der stationären Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz leiten wir eine Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Änderungen des logarithmierten Aktienkurses $x(t)$ für kurze Zeitintervalle τ her. Das Heston Modell wurde analytisch in [25] gelöst, wobei aber die Lösung im Fourieraum der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung vorliegt. In [25] wurde auch eine Näherung für die Dichteverteilung für kurze Zeiten τ gezeigt, die mit unserer Lösung übereinstimmt. Es existiert in [25] ebenfalls eine Näherung für lange Zeiten. Beide Näherungen wurden erfolgreich auf empirische Aktienkursdaten angewandt [102, 103].

4.1 Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz

In der empirischen Analyse und beim Anpassen der beiden Modelle an empirische Aktienkursdaten wird der Korrelationskoeffizient ρ häufig zu Null gesetzt [25]. Auf der anderen Seite zeigt die empirische Analyse, die den Korrelationskoeffizienten miteinbe zieht, dass der Koeffizient sehr klein ist. Somit hat er nur einen geringen Einfluss auf die beschriebene Dynamik. Deshalb nehmen wir $\rho \ll 1$ an, so dass wir die Dynamik der Varianz als ein eigenständiges und unabhängiges Problem analysieren können.

4.1.1 Das Heston Modell

In dem Heston Modell ohne Korrelation wird die Varianzdy namik als stochastische Differentialgleichung bzw. als Langevin Gleichung im Itô Formalismus wie folgt beschrieben [49]

$$dv = \gamma(\theta - v) dt + \kappa \sqrt{v} dW_v(t). \quad (209)$$

Für die weiteren Betrachtungen der Varianz wollen wir die Langevin Gleichung in eine adäquate Fokker-Planck Gleichung transformieren (siehe Abschnitt 1.2, Gleichungen (10) bis (13)). Wir ermitteln demgemäß

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (210)$$

$$S(v, t) = \gamma \theta p(v, t) - \gamma v p(v, t) - \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} [v p(v, t)] . \quad (211)$$

Wir sind jetzt an der stationären Lösung der Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der Varianz v interessiert. In dem stationären Regime ist die Wahrscheinlichkeitsdichte eines beliebigen Wertes der Varianz v konstant in der Zeit t . Somit ist der linke Term auf der rechten Seite in der Gleichung (210) gleich Null. Weiterhin können wir die stationäre Lösung errechnen, indem wir die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $S(v, t)$ in der Gleichung (211) zu Null setzen. Dies ist möglich, da in eindimensionalen Systemen die Stationarität das Gleichgewicht miteinschließt [96]. Daher erhalten wir die folgende Gleichung

$$0 = \left[\gamma \theta - \gamma v - \frac{\kappa^2}{2} \right] p_{st}(v) - \frac{\kappa^2}{2} v \frac{\partial}{\partial v} p_{st}(v) . \quad (212)$$

Durch Lösung der obigen Gleichung (212) in Bezug auf die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{st}^H(v)$ erhalten wir

$$p_{st}^H(v) = C v^{[2 \gamma \theta / \kappa^2 - 1]} \exp \left[-\frac{2 \gamma}{\kappa^2} v \right] , \quad (213)$$

wobei H für das Heston Modell steht. Die Integrationskonstante C ist durch die Normierungsbedingung

$$1 = \int_{v=0}^{\infty} dv p_{st}(v) , \quad (214)$$

zu berechnen. Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{st}^H(v)$ der Varianz $v(t)$ des Heston Modells ohne Korrelation lautet wie folgt

$$\begin{aligned} p_{st}^H(v) &= \frac{a^a}{\Gamma(a) \theta^a} v^{a-1} \exp \left[-\frac{a}{\theta} v \right] \\ a &= \frac{2 \gamma \theta}{\kappa^2} . \end{aligned} \quad (215)$$

Die stationäre Lösung der Varianz des Heston Modells (215) ist in der Abbildung 32 für die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$ und die dimensionslose Zeit $T = \gamma t$ dargestellt. Wir haben die Varianzdynamik numerisch simuliert, indem wir Trajektorien als Realisierung der Langevin Gleichung (209) errechneten. Hierfür nutzten wir das numerische Integrationsverfahren als explizites strenges Schema der Ordnung 1.5, mit einer Konvergenz von 1.5 im strengen Sinn [58]. Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $\hat{p}_{sim}(u, T)$, ermittelt aus den errechneten Trajektorien, stimmt für Zeiten $T \gg 1$ sehr gut mit der stationären Lösung $\hat{p}_{st}(u)$ überein. Dies geht auch mit der Gültigkeit der stationären Dichtevertteilung für Zeiten $t \gg 1/\gamma$ einher. Das System benötigt diese Zeit, um die Anfangsbedingungen „zu vergessen“.

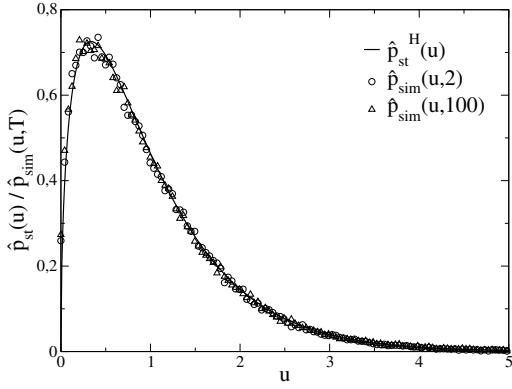


Abbildung 32: Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\hat{p}_{st}^H(u)$ der dimensionslosen Varianz $u = v/\theta$ des Heston Modells ist gegenüber der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\hat{p}_{sim}(u, T)$ dargestellt, die wir aus der numerischen Simulation von 10^5 Trajektorien ermittelt haben. Die Parameter sind $\gamma = 0.06 \text{ d}^{-1}$, $\theta = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ d}^{-1}$ und $\kappa = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ d}^{-1}$.

Für die empirische Analyse benötigen wir nicht die exakte Lösung für die Zeiten $t < 1/\gamma$, da unsere Datenbasis erst im Jahr 1996 beginnt. Aber der Handel der Aktien, deren Aktienkurse in unserer Datenbank enthalten sind, hat viel eher begonnen. Deshalb können wir bei den von uns gespeicherten Zeiten annehmen, dass, wenn der Aktienkurs sich analog dem Heston Modell entwickelt, sich die Varianz bereits im stationären Regime befindet.

4.1.2 Das Hull-White Modell

Die Varianzdynamik des Hull-White Modells ohne Korrelation ist durch die folgende Langevin Gleichung im Itô Formalismus gegeben [51]

$$dv = \gamma(\theta - v) dt + \tilde{\kappa} v dW(t). \quad (216)$$

Wir wollen jetzt ebenfalls die Fokker-Planck Gleichung des Hull-White Modells mit Hilfe der Relationen aus den Gleichungen (10) bis (13) herleiten. Wir erhalten für die Dynamik der Varianz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \\ S(v, t) &= \gamma \theta p(v, t) - \gamma v p(v, t) - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} [v^2 p(v, t)]. \end{aligned} \quad (217)$$

Durch das Setzen der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $S(v, t)$ zu Null können wir die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung errechnen. Für das Hull-White Modell lautet die stationäre Lösung wie folgt

$$\begin{aligned} p_{st}^{HW}(v) &= \frac{a^a \theta^{a+1}}{\Gamma(a)} v^{-(a+2)} \exp\left[-\frac{a \theta}{v}\right] \\ a &= \frac{2 \gamma}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{2 \gamma \theta}{\kappa^2}, \end{aligned} \quad (218)$$

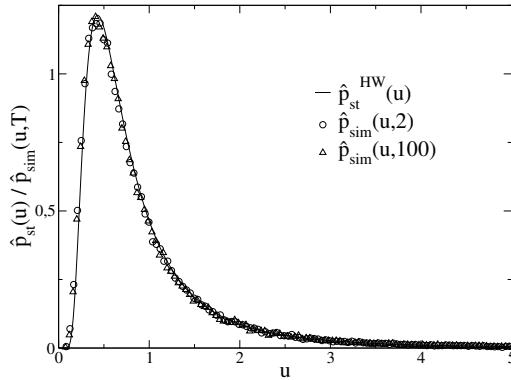


Abbildung 33: Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\hat{p}_{st}^{HW}(u)$ als Funktion der dimensionslosen Varianz $u = v/\theta$ für das Hull-White Modell ist gegenüber der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\hat{p}_{sim}(u, T)$ dargestellt, die aus der numerischen Simulation von 10^5 Trajektorien ermittelt wurde. Die Parameter sind $\gamma = 0.06 \text{ d}^{-1}$, $\theta = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ d}^{-1}$ und $\tilde{\kappa} = 0.28 \text{ d}^{-1/2}$.

wobei *HW* das Hull-White Modell kennzeichnet.

In der Abbildung 33 haben wir die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der dimensionslosen Varianz u und der dimensionslosen Zeit T gegenüber der Dichteverteilung der numerischen Simulationen dargestellt. Wir haben wieder das explizite Ordnung 1.5 strenge Schema bei der Numerik verwendet [58]. Die Abbildung illustriert die Übereinstimmung zwischen den simulierten Daten und der stationären Lösung.

Die beiden Modelle der Varianzdynamik unterscheiden sich nur in der Potenz der Varianz in dem Fluktuationsterm $b_v(v, k, t)$ mit 0.5 für das Heston Modell und 1 für Hull-White (siehe Gleichungen (209) und (216)). Wir möchten die stationären Lösungen der beiden Modelle für die dimensionslose Varianz u vergleichen. Wir passen hierbei den Parameter $\tilde{\kappa}$ des Hull-White Modells durch die zuvor schon genannte Relation von $\tilde{\kappa} = \kappa/\sqrt{\theta}$ an. Somit können wir die beiden Lösungen dann wirklich vergleichen.

Die Abbildung 34 zeigt die beiden stationären Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen für vergleichbare Parameter. Wir stellen fest, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte von kleinen Werten der Varianz v bei dem Heston Modell höher ist. Im Gegensatz dazu ist die Dichte von großen Werten bei dem Hull-White Modell höher. Es ist hier noch anzumerken, dass sich die Lösung des Hull-White Modells etwas „wellenartig“ um die des Heston Modells bewegt (das Modell mit der jeweils höchsten Dichte wechselt dreimal). Diese Struktur werden wir bei der Kurzzeitlösung wiedertreffen.

4.2 Die Kurzzeitlösung für die logarithmierten Änderungen

Wir haben in den vorherigen Teilabschnitten die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz v der beiden Modell hergeleitet. Die erste Frage ist, ob wir ebenfalls die stationäre Lösung des Aktienkurses k errechnen können, wenn wir die stationäre Verteilung der Varianz kennen. Bei der Dynamik der Varianz wird die Diffusion, die durch den Rauschterm verursacht wird, eingeschränkt durch den Driftterm, der in der Physik gewöhnlich aus dem (ortsabhängigen) Potenzial errechnet wird. In

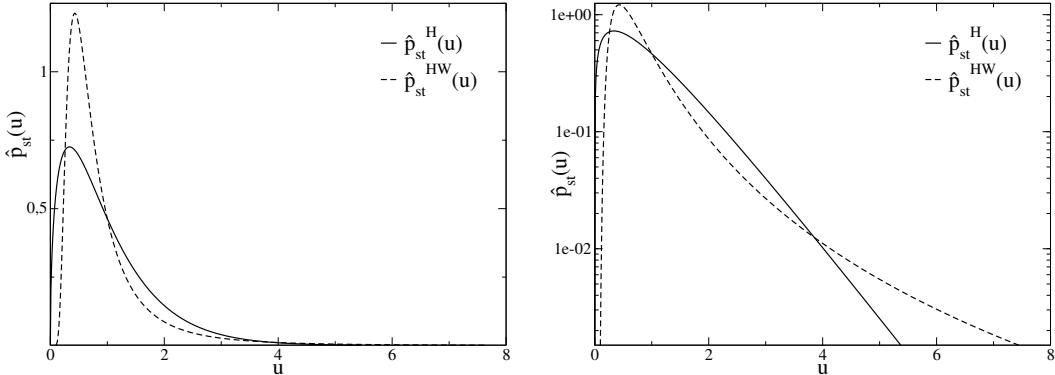


Abbildung 34: Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der dimensionslosen Varianz $u = v/\theta$ des Heston Modells und des Hull-White Modells ist dargestellt. Die Parameter sind $\gamma = 0.06 \text{ d}^{-1}$, $\theta = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ d}^{-1}$ und $\kappa = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ d}^{-1}$.

diesem Sinne „zieht“ der mittelwertserhaltende Drift die Varianz v auf den langfristigen Mittelwert θ zurück. Deswegen erhalten wir bei der Varianzdynamik ein stationäres Regime. Die Varianz fluktuiert dann zufällig um den Parameter θ .

Im Gegensatz dazu, schränkt der Driftterm der Aktienkursdynamik die Diffusion des Preises nicht ein. Deshalb ist die stationäre Verteilung des Aktienkurses erreicht, wenn jeder Aktienkurs k die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte hat, d. h. das die Preise gleichverteilt sind.

Wir wollen nun unsere Aufmerksamkeit auf die kurzen Zeitskalen lenken. Die empirische Analyse von Aktienkursen zeigt, dass die Relaxationszeit $1/\gamma$ der Varianz v etwa 22 Tage beträgt (speziell für Indices [25]). Verglichen mit den uns interessierenden Zeitskalen der logarithmierten Änderungen von ungefähr einer Stunde ist das sehr lang. Das führt uns zu der Schlussfolgerung, dass wir die Varianz v in dem uns interessierenden kurzen Zeitfenster als konstant ansehen können.

Deshalb wollen wir die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der Änderungen des logarithmierten Aktienkurses x für kurze Zeitfenster τ herleiten. Wir nutzen hierbei die Beziehung der bedingten Wahrscheinlichkeiten mit

$$p(k, t) = \int_0^{+\infty} p(k, t | v, t) p(v, t) dv. \quad (219)$$

Wie in dem Abschnitt 4.1.2 erklärt, können wir anstelle der zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p(v, t)$ die stationäre Lösung $p_{st}(v)$ verwenden. Weiterhin wollen wir uns nicht auf den Aktienkurs k selber, sondern auf die Änderungen $y = dx$ des logarithmierten Aktienkurses $x = \ln[k(t)/k_0]$ mit $k(t=0) = k_0$ in dem Zeitintervall $\tau = dt$ konzentrieren. Daher ermitteln wir in Analogie zu der Beziehung (219) folgende Relation

$$p_s(y, \tau) = \int_0^{\infty} p(y, \tau | v) p_{st}(v) dv, \quad (220)$$

wobei $p_s(y, \tau)$ kennzeichnet, dass die Varianz v sich im stationären Regime befinden muss. Die stationäre Verteilung $p_{st}(v)$ haben wir bereits in dem Abschnitt 4.1 errechnet. Aber um die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$ herzuleiten, benötigen wir einen Ansatz für die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y, \tau | v)$.

Wir wissen, dass für den Fall der konstanten Varianz $v' = \sigma^2$ das Heston und das Hull-White Modell zu der geometrischen Brownschen Bewegung übergehen (für die Parameter $\kappa = 0 \text{ d}^{-1}$, $\tilde{\kappa} = 0 \text{ d}^{-1/2}$, $v(t=0) = v'$, $\theta = v'$). Wegen des verwendeten normalverteilten Rauschterms $dW_k(t)$ ergibt sich die Lösung für die logarithmierten Änderungen y wie folgt (siehe Gleichung (56))

$$p(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v' \tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + \frac{1}{2} v' \tau)^2}{v' \tau} \right]. \quad (221)$$

Bei der geometrischen Brownschen Bewegung haben wir eine deltaartig verteilte Varianz v (d. h. die Varianz ist konstant), so dass wir die obige Gleichung (221) zu der folgenden Beziehung transformieren können

$$p(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p(v) \quad (222)$$

$$p(y, \tau | v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v \tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + \frac{1}{2} v \tau)^2}{v \tau} \right] \quad (223)$$

$$p(v) = \delta(v - v'). \quad (224)$$

D. h. die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(y, \tau | v)$ der logarithmierten Änderungen $y(\tau)$ ist eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu \tau - 0.5 v \tau$ und der Varianz $v \tau$.

Mit Hilfe des Integrals (220), der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (Gleichung (223)) und den speziellen stationären Verteilungen der Varianz wollen wir im Folgenden die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen für kurze Zeitskalen τ errechnen.

4.2.1 Das Heston Modell

Für das Heston Modell nutzen wir die Integralbeziehung der Gleichung (220), die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz v aus der Gleichung (215) und die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (223). Das zu lösende Integral lautet wie folgt

$$\begin{aligned} p_s^H(y, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \tau}} \frac{a^a}{\Gamma(a) \theta^a} \\ &\quad \int_{v=0}^\infty dv \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - (\mu - \frac{1}{2} v) \tau)^2}{v \tau} \right] v^{a-3/2} \exp \left[-\frac{a v}{\theta} \right]. \end{aligned} \quad (225)$$

Wir ersetzen die logarithmierten Änderungen y durch die driftlosen logarithmierten Änderungen $z = y - \mu \tau$, so dass die Gleichung (225) zu der nachfolgenden Formulierung transformiert wird

$$\begin{aligned} p_s^H(z, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \frac{a^a}{\Gamma(a)\theta^a} \exp\left[-\frac{z}{2}\right] \\ &\quad \int_0^\infty dv \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\tau} \frac{1}{v} - \left(\frac{\tau}{8} + \frac{a}{\theta}\right)v\right] v^{a-3/2}. \end{aligned} \quad (226)$$

Das oben aufgeführte Integral ist lösbar [46]. Für die driftlosen logarithmierten Änderungen z im Heston Modell erhalten wir daher die folgende Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_s^H(z, \tau)$ für kurze Zeitintervalle τ

$$\begin{aligned} p_s^H(z, \tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \exp\left[-\frac{z}{2}\right] \left[\frac{z^2}{1/4 + 2b}\right]^{(a-0.5)0.5} \\ &\quad K_{a-0.5}\left(\sqrt{z^2(1/4 + 2b)}\right) \\ b &= a/(\theta\tau), \end{aligned} \quad (227)$$

wobei $K_i(x)$ die modifizierte Bessel Funktion (oder MacDonald Funktion) der Ordnung i repräsentiert.

Wenn wir für kurze Zeitintervalle τ die Relation $1/4 \ll 2b$ beachten, erhalten wir die gleiche Kurzzeitnäherung wie in [25]. Weiterhin hat unsere Lösung für kurze Zeitfenster τ die gleiche Struktur wie die Näherung für große Zeitintervalle $\gamma\tau \gg 2$ in [25].

Wir haben einen Vorfaktor für die Normierung der Wahrscheinlichkeit auf 1. Gefolgt wird dieser von einem exponentiellen Term $\exp[-z/2]$, der die Asymmetrie in der Verteilung der logarithmierten Änderungen y des Heston Modells ausdrückt. Die Lösung besteht aus gewichteten Normalverteilungen mit der Varianz $v\tau$ und dem Mittelwert $(\mu - 0.5v)\tau$. Der sinkende Mittelwert bei steigender Varianz bewirkt die auftretende Asymmetrie in der Lösung für das Heston Modell.

Sowohl die Kurzzeitlösung als auch die Langzeitlösung bestehen aus der gleichen modifizierten Bessel Funktion. Nur die Ordnung der Funktion ist verschieden. Sie ist immer gleich 1 bei der Langzeitnäherung [25] und ist parameterabhängig mit $a - 0.5$ für die kurzen Zeitfenster τ .

Wir haben auch das Heston Modell numerisch simuliert. Hierfür nutzten wir den Integrationsalgorithmus als explizites strenges Schema der Ordnung 1.0 [58] (Konvergenz von 1.0) und simulierten damit die Langevin Gleichung im Itô Formalismus. Wir haben aber auf unser Gleichungssystem zu achten, da selbst in dem Fall ohne Korrelation ($\rho = 0$) zwischen den Rauschtermen des Aktienkurses k und der Varianz v kein diagonales Rauschen vorliegt. Vielmehr hängt die Stärke des Rauschterms des Aktienkurses von den Änderungen der Varianz v ab, so dass auch der Preis indirekt von den Änderungen des Wiener Prozesses $dW_v(t)$ beeinflusst wird.

Die Abbildung 35 zeigt die theoretische Lösung $p_s^H(y, \tau)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{sim}(y, \tau)$, die wir aus den numerischen Simulationen für verschiedene Zeitfenster τ errechnet haben. Es ist offensichtlich, dass die Verteilungen für die ausgewählten Zeiten τ übereinstimmen.

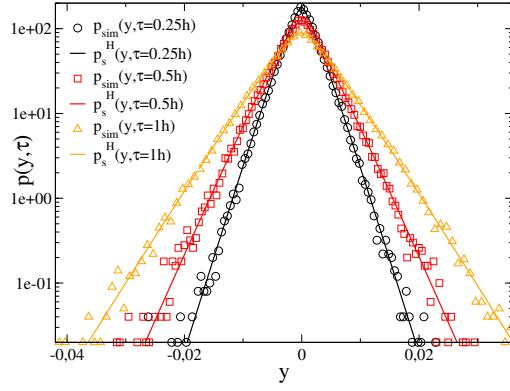


Abbildung 35: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_s^H(y, \tau)$ der logarithmierten Änderungen y des Heston Modells ist gegenüber der Dichteverteilung $p_{sim}(y, \tau)$ dargestellt, die wir aus den numerischen Simulationen des Heston Modells erhalten haben. Die Zeitfenster sind $\tau = 0.25$ h, $\tau = 0.5$ h und $\tau = 1$ h.

4.2.2 Das Hull-White Modell

Für das Hull-White Modell benutzen wir ebenfalls die Integralbeziehung (220), die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung aus der Gleichung (223) und die stationäre Verteilung der Varianz v aus der Gleichung (218). Das Integral des Hull-White Modells, das wir zu lösen haben, hat die folgende Form

$$\begin{aligned} p_s^{HW}(y, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \frac{a^a \theta^{a+1}}{\Gamma(a)} \\ &\int_{v=0}^{\infty} dv \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y - (\mu - \frac{1}{2}v)\tau)^2}{v\tau}\right] v^{-(a+5/2)} \exp\left[-\frac{a\theta}{v}\right]. \end{aligned} \quad (228)$$

Wir führen wieder die driftlosen logarithmierten Änderungen $z = y - \mu\tau$ ein. Das Integral aus der Gleichung (228) lautet dann

$$\begin{aligned} p_s^{HW}(y, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \frac{a^a \theta^{a+1}}{\Gamma(a)} \exp\left[-\frac{z}{2}\right] \\ &\int_0^{\infty} dv \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2\tau} + a\theta\right)\frac{1}{v} - \frac{1}{8}\tau v\right] v^{-a-5/2}. \end{aligned} \quad (229)$$

Das obige Integral (229) ist ebenfalls lösbar [46] und hat die gleiche Struktur wie das Integral (226) des Heston Modells. Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für die drift-

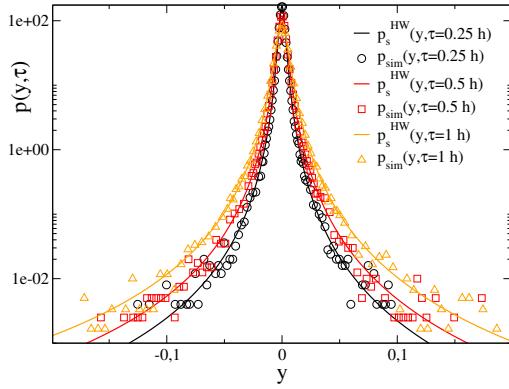


Abbildung 36: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_s^{HW}(y, \tau)$ der logarithmierten Änderungen y des Hull-White Modells ist gegenüber der Dichteverteilung $p_{sim}(y, \tau)$ dargestellt, die wir aus den numerischen Simulationen des Hull-White Modells errechnet haben. Die Zeitintervalle sind $\tau = 0.25$ h, $\tau = 0.5$ h und $\tau = 1$ h.

losen logarithmierten Änderungen z des Hull-White Modells ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned}
p_s^{HW}(z, \tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^a}{\Gamma(a)} (\theta \tau)^{a+1} \exp\left[-\frac{z}{2}\right] \left[4(z^2 + \tilde{b})\right]^{\tilde{\alpha}/2} \\
&\quad K_{\tilde{\alpha}} \left[\sqrt{1/4(z^2 + \tilde{b})} \right] \\
\tilde{\alpha} &= -(a + 3/2) \\
\tilde{b} &= 2a\theta\tau,
\end{aligned} \tag{230}$$

mit $K_i(x)$ als modifizierte Bessel Funktion (oder MacDonald Funktion) der Ordnung i .

Wir haben die Langevin Gleichungen im Itô Formalismus des Hull-White Modells simuliert. Dabei verwendeten wir wieder das explizite 1.0 strenge Schema [58]. Auch bei dem Hull-White Modell haben wir kein diagonales Rauschen.

In der Abbildung 36 haben wir die Kurzzeitlösung $p_s^{HW}(y, \tau)$ für die logarithmierten Änderungen y gegenüber Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $p_{sim}(y, \tau)$ dargestellt, die wir aus den simulierten Trajektorien ermittelten. Wir können die Übereinstimmung zwischen der analytischen Lösung und den aus Simulationen erhaltenen Verteilungen bestätigen.

4.3 Der Vergleich mit empirischen Daten

In diesem Abschnitt wollen wir feststellen, inwieweit die aufgeführten theoretischen Modelle die empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen korrekt widerspiegeln. Wir setzen einen stationären und ergodischen Zufallsprozess bei der Aktienkursdynamik voraus. Dazu merken wir an, dass wir bezüglich des genauen Verlaufs der Enden der Dichteverteilungen der logarithmierten Änderungen y aufgrund der vorhandenen Zeitreihenlänge keine statistisch validen Angaben tätigen können (siehe Abschnitt 3.5). Wir nehmen jedoch an, dass das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von betragsmäßig

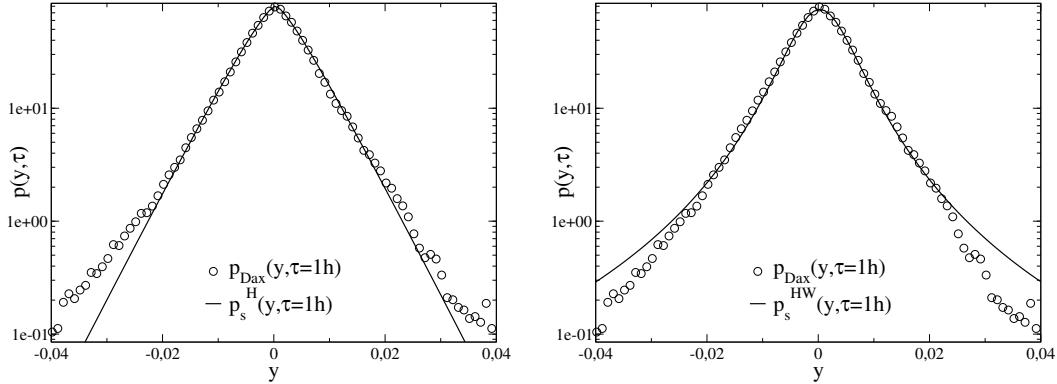


Abbildung 37: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y des Heston Modells $p_s^H(y, \tau)$ ist dargestellt gegenüber der errechneten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{Dax}(y, \tau)$ des Dax Index (02.05.1996 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 24.2$, $a = 1.36$, $\theta = 5.15 \cdot 10^{-5}$ h^{-1} und $\mu = 3.03 \cdot 10^{-4}$ h^{-1} . RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y des Hull-White Modells $p_s^{HW}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{Dax}(y, \tau)$ des Dax Index (02.05.1996 – 28.12.2001) für das Zeitintervall $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 54.1$, $a = 0.08$, $\theta = 3.21 \cdot 10^{-4}$ h^{-1} und $\mu = 2.97 \cdot 10^{-4}$ h^{-1} dargestellt.

kleinen Änderungen zu der Wahrscheinlichkeit von betragsmäßig großen Änderungen bei zunehmender Zeitreihenlänge konstant bleibt (aufgrund der Stationarität). D. h. der Verlauf der Dichteverteilung bei betragsmäßig kleinen Änderungen hängt nur von der Aktie und dem Zeitfenster τ ab, aber nicht von dem betrachteten Kalenderzeitraum. In [63] wird diese Stabilität für die Phasen der normalen Handelsaktivität (keine Börsen-, „Crashes“) bestätigt.

Zur Anpassung der Modellparameter an die empirischen Verteilungen definieren wir unsere Zielgröße wie folgt [111]

$$\chi^2 = \sum_i (p_{theo}(y_i, \tau) - p_{emp}(y_i, \tau))^2, \quad (231)$$

mit der Dichteverteilung $p_{theo}(y_i, \tau)$ des Modells und $p_{emp}(y_i, \tau)$ der jeweiligen Aktie. D. h. wir beziehen die Wahrscheinlichkeitsdichte direkt ein (ohne Logarithmus oder relative Abweichung). Dadurch erreichen wir vor allem eine Anpassung bei den hohen Wahrscheinlichkeitsdichtewerten, die bei den statistisch validen, (betragsmäßig) kleinen Änderungen liegen.

In den Abbildungen 37,38 und 40 haben wir die errechnete Kurzzeitlösung gegenüber empirischen Verteilungen für die logarithmierten Änderungen y bei einem Zeitfenster von $\tau = 1$ h dargestellt. Die empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen haben wir auf Grundlage der vorhandenen Datenbasis errechnet [57]. Wir haben hierbei den Dax Index (siehe Abbildung 37), die DaimlerChrysler AG (Abbildung 38) sowie die Adidas-Salomon AG (Abbildung 40) ausgewählt. Die Kursnotierungen der Einzelaktien haben wir dem Xetra Handel vom 4. Januar 1999 bis zum 28. Dezember 2002 entnom-

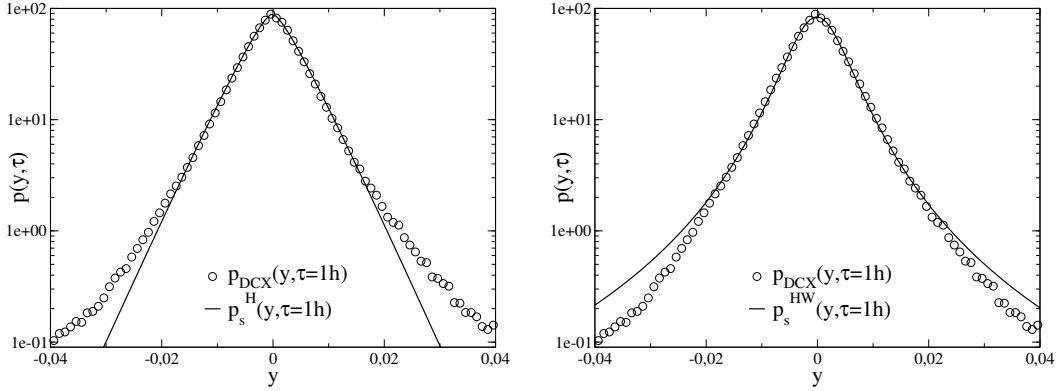


Abbildung 38: LINKS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der logarithmierten Änderungen y des Heston Modells $p_s^H(y, \tau)$ ist abgebildet gegenüber der ermittelten WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ der DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitintervall $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 28.3$, $a = 1.4$, $\theta = 4.02 \cdot 10^{-5}$ h $^{-1}$ und $\mu = -1.09 \cdot 10^{-4}$ h $^{-1}$. RECHTS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der logarithmierten Änderungen y für das Hull-White Modell $p_s^{HW}(y, \tau)$ ist dargestellt gegenüber der errechnete WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ der DaimlerChrysler AG für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 54.1$, $a = 0.12$, $\theta = 1.66 \cdot 10^{-4}$ h $^{-1}$ und $\mu = -1.01 \cdot 10^{-4}$ h $^{-1}$.

men. Die Indexstände des Dax nutzten wir vom 2. Mai 1996 bis zum 28. Dezember 2002. In den Abbildungen 39 und 41 zeigen wir die Kurzzeitlösung gegenüber den empirischen Verteilungen für die Zeitfenster von $\tau = 15$ min und $\tau = 30$ min. Dabei haben wir für die theoretische Lösung die Parameter verwendet, die wir bei der Anpassung der Verteilung bei dem Zeitintervall von $\tau = 1$ h ermittelt haben. Grundsätzlich können wir feststellen, dass die Unterschiede zwischen der Kurzzeitlösung und den empirischen Verteilungen für alle Zeitreihen und alle Zeitfenster gleich sind.

Das Heston Modell gibt den mittleren Teil der empirischen WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung gut wieder. In diesem Gebiet sind die Abweichungen zwischen der theoretischen Lösung und der empirischen Kurve marginal. Weiterhin beschreibt die Modellverteilung die Höhe der empirischen Verteilung sehr gut, d. h. beide haben die gleiche maximale Wahrscheinlichkeitsdichte. Der Verlauf der DichteVerteilung wird durch das Heston Modell gut wiedergegeben. Jedoch unterschätzt das Heston Modell die Eintrittswahrscheinlichkeit von großen Änderungen y (vergleiche [102]), die in der Finanzanalyse sehr wichtig sind.

Diese Aussage können wir tätigen, obwohl der Verlauf der Enden der empirischen DichteVerteilungen statistisch nicht valide ist. Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit in dem statistisch validen Bereich der Änderungen, von z. B. $y_{min} = -0.025$ bis $y_{max} = 0.024$ bei der Adidas-Salomon AG, bei dem Heston Modell 0.9919 gegenüber 0.9847 bei der empirischen DichteVerteilung der Adidas-Salomon AG. Durch die Normierung der Wahrscheinlichkeit auf 1 unterschätzt das Heston Modell das Eintreten von betragsmäßig großen Änderungen und überschätzt das Auftreten von kleinen Änderungen.

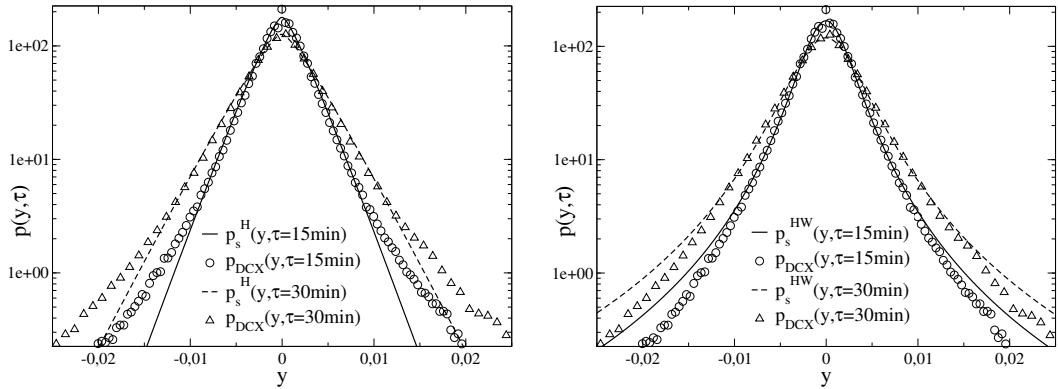


Abbildung 39: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y für das Heston Modell $p_s^H(y, \tau)$ ist abgebildet im Vergleich zu der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ der DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für die Zeitintervalle $\tau = 15$ min und $\tau = 30$ min mit den Parametern aus der Abbildung 38 links. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y des Hull-White Modells $p_s^{HW}(y, \tau)$ ist dargestellt gegenüber der errechneten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ der DaimlerChrysler AG für die Zeitfenster $\tau = 15$ min und $\tau = 30$ min mit den Parametern aus der Abbildung 38 rechts.

Im Allgemeinen trifft die Kurzzeitlösung des Hull-White Modells die empirische Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung nicht sehr gut (siehe Abbildungen 37 bis 41). Trotzdem scheint das Hull-White Modell den richtigen Kurvenverlauf (wellenartig) im mittleren Teil der Dichteverteilung zu haben (in Übereinstimmung mit der empirischen Kurve, siehe dazu auch Datenverlauf in [95]). D. h. die Kurzzeitlösung des Hull-White Modells bewegt sich wellenartig um die Lösung des Heston Modells (Analogie zum Verhalten der Varianz zueinander (Abbildung 34)), was bei den empirischen Dichteverteilungen genauso ist. Im Gegensatz zum Heston Modell, überschätzt das Hull-White Modell das Auftreten von großen logarithmierten Änderungen y (vergleiche [73]).

Somit müsste ein Modell mit stochastischer Volatilität, dass die empirischen Daten besser widerspiegeln soll, eine Kombination der beiden vorgestellten Modelle sein. Für Werte der Varianz v kleiner als θ scheint das Heston Modell die passendere Beschreibung der empirischen Dynamik zu liefern. Deshalb trifft das Heston Modell die Höhe und den mittleren Teil der Verteilung auch sehr gut. In dem Wertebereich $v/\theta < 1$ dominiert der stochastische Term $b(v, k, t)$ den deterministischen $a(v, k, t)$. Aber für Werte der Varianz v größer als der langfristige Mittelwert θ ist der deterministische Term vorherrschend. D. h. die Relaxationskraft ist stärker, was zu einer geringen Wahrscheinlichkeitsdichte für große Werte der Varianz v und einer ebenfalls geringen Dichte von großen Änderungen y führt. Folglich scheint in diesem Bereich für $v/\theta > 1$ das Hull-White Modell die bessere Beschreibung zu sein.

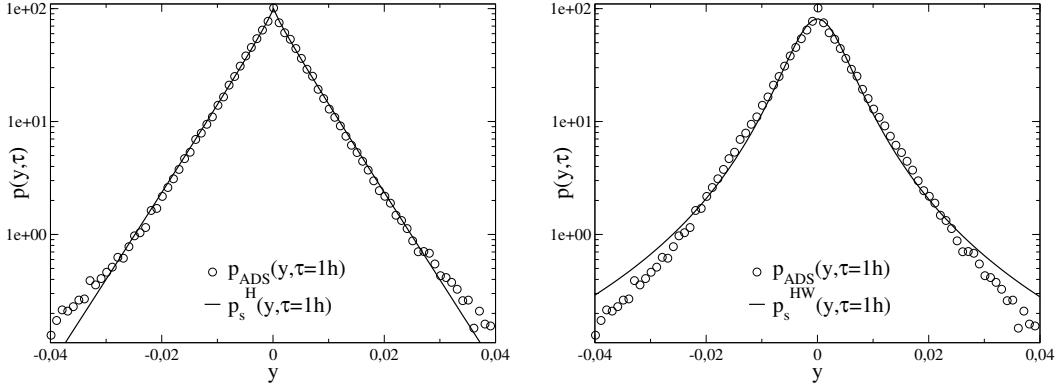


Abbildung 40: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y für das Heston Modell $p_s^H(y, \tau)$ ist abgebildet im Vergleich zu der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ der Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitintervall $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 45.5$, $a = 0.9$, $\theta = 5.96 \cdot 10^{-5}$ h $^{-1}$ und $\mu = 6.58 \cdot 10^{-5}$ h $^{-1}$. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y des Hull-White Modells $p_s^{HW}(y, \tau)$ ist dargestellt gegenüber der errechneten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ der Adidas-Salomon AG für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 633.5$, $a = 2.54 \cdot 10^{-4}$, $\theta = 7.44 \cdot 10^{-2}$ h $^{-1}$ und $\mu = 2.58 \cdot 10^{-5}$ h $^{-1}$.

4.4 Die Zusammenfassung der Ergebnisse bekannter Modelle

Wir haben die beiden sehr bekannten Modelle mit stochastischer Volatilität analysiert. Für die Modelle ohne Korrelation haben wir die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz v hergeleitet. Es zeigten sich Unterschiede zwischen den beiden Verteilungen, insbesondere bei sehr kleinen Werten und bei großen Werten der Varianz.

Wir nutzten die stationäre Verteilung der Varianz um die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y bei kleinen Zeitskalen τ zu ermitteln. Wir können eine gute Übereinstimmung des Heston Modells mit den empirischen Daten des deutschen Aktienmarktes bestätigen. Jedoch wird das Eintreten von großen Änderungen von beiden Modellen nicht gut wiedergegeben (Unterschätzungen bei dem Heston Modell, Überschätzungen bei dem Hull-White Modell). Um die empirische Aktienkursdynamik treffend zu beschreiben, scheint eine Kombination der beiden Modelle notwendig.

Trotzdem werden einige empirische Fakten nicht durch die beiden Modelle wiedergegeben. So wird der „Hebeleffekt“ (leverage effect) nicht erfasst [8]. Er beinhaltet einen Anstieg der Varianz v , wenn der Aktienkurs k fällt (siehe Abschnitt 3.5). Weiterhin beachten beide Modelle nicht den Anstieg der Varianz (in einem festen Zeitintervall τ) durch eine höhere Anzahl an ausgeführten Transaktionen in diesem Intervall [44, 79]. Darüber hinaus fällt die Autokorrelation der Varianz bei den betrachteten Modellen exponentiell ab, bei den empirischen Aktienkursdaten jedoch nach einem Potenzgesetz (Details siehe Abschnitt 3.5).

Ein wirklich gutes Modell, dass die empirische Aktienkursdynamik sehr gut be-

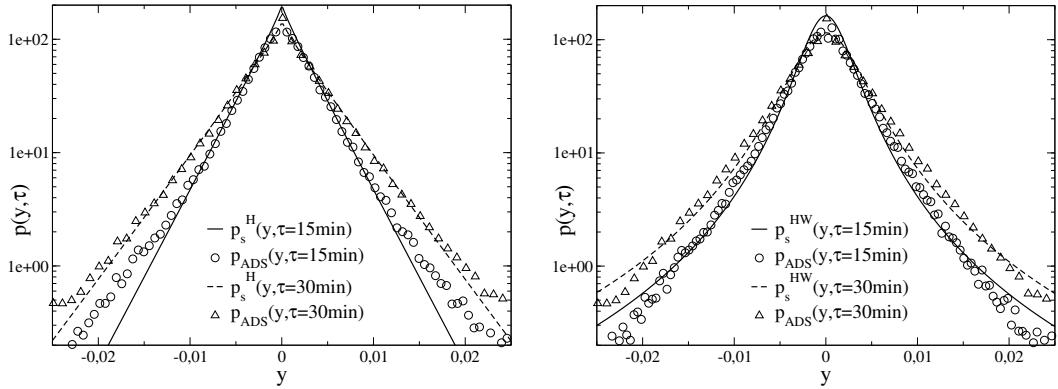


Abbildung 41: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y für das Heston Modell $p_s^H(y, \tau)$ ist abgebildet im Vergleich zu der errechneten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ der Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für die Zeitintervalle $\tau = 15$ min und $\tau = 30$ min mit den Parametern aus der Abbildung 40 links. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen y des Hull-White Modells $p_s^{HW}(y, \tau)$ ist dargestellt gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ der Adidas-Salomon AG für die Zeitfenster $\tau = 15$ min und $\tau = 30$ min mit den Parametern aus der Abbildung 40 rechts.

schreibt, sollte eine Kombination beider Modelle sein und auch die neuen empirischen Ergebnisse miteinbeziehen.

4.5 Die Langzeitlösung des Heston Modells

Das Heston Modell mit Korrelation wurde in [25] analytisch gelöst. Hierbei wurde mit Hilfe der Fokker-Planck Gleichung die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $P(x, v, t)$ des logarithmierten Aktienkurses x , der Varianz v und der Zeit t ermittelt. Die Vorgehensweise ist analog unserem Lösungsablauf in dem Anhang A. Die Fourierrücktransformation der Lösung im Fourieraum zu der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $P(x, v, t)$ ist nicht möglich. Die uns interessierende Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, t)$ des logarithmierten Aktienkurses x bei dem Heston Modell ohne Korrelation lautet daher [25]

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \exp[i k_x (x - \mu t) + F(k_x, t)] \quad (232)$$

$$\begin{aligned} F(k_x, t) &= \frac{a}{2} \gamma t - a \ln \left[\cosh \left[\frac{t \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2} (k_x^2 - i k_x)}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \gamma^2 + \kappa^2 (k_x^2 - i k_x)}{2 \gamma \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2} (k_x^2 - i k_x)} \sinh \left[\frac{t \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2} (k_x^2 + i k_x)}{2} \right] \right] \end{aligned} \quad (233)$$

$$a = \frac{2 \gamma \theta}{\kappa^2}. \quad (234)$$

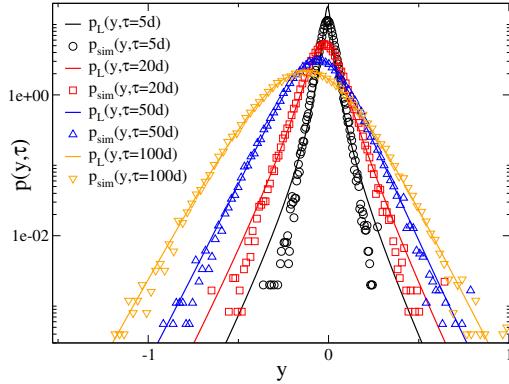


Abbildung 42: Vergleich der Langzeitlösung $p_L(x, t)$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilung $p_{sim}(x, t)$, die aus numerischen Simulationen von 10^5 Trajektorien ermittelt wurde. Die Zeitpunkte sind $\tau = 5$ d, $\tau = 20$ d, $\tau = 50$ d und $\tau = 100$ d.

Wenn wir jetzt den Grenzfall für große Zeiten $\gamma t \gg 2$ betrachten, ist gemäß [25] die Relation $t \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2 (k_x^2 + i k_x)} \gg 2$ gegeben. Somit vereinfacht sich der Integrationskern $F(k_x, t)$ aus der Gleichung (233) zu

$$F(k_x, t) = \frac{a}{2} t \left(\gamma - t \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2 (k_x^2 + i k_x)} \right). \quad (235)$$

Mit Hilfe dieser Näherung erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_L(x, t)$ für große Zeiten t als Langzeitlösung des Heston Modells [25]

$$p_L(x, t) = \frac{(\gamma^2 + 0.25 \kappa^2) a t}{2 \pi \kappa} \exp \left[\frac{a}{2} \gamma t \right] \exp \left[-\frac{x - \mu t}{2} \right] K_1(z)/z \quad (236)$$

$$z = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 0.25 \kappa^2}}{\kappa} \sqrt{(x - \mu t)^2 + \left(\frac{a}{2} \kappa t \right)^2}, \quad (237)$$

mit der modifizierten Bessel Funktion erster Ordnung $K_1(z)$.

In der Abbildung 42 haben wir die Langzeitnäherung aus der Gleichung (236) mit numerischen Simulationen verglichen. Hierbei simulierten wir die Langevin Gleichung mit Hilfe des numerischen Integrationsverfahrens als explizites strenges Schema der Ordnung 1.5 [58] und additivem Rauschen (siehe Abschnitt B). Es ist zu erkennen, dass die Näherung für die großen Zeiten $\gamma \tau \gg 2$ mit den Simulationen sehr gut übereinstimmt (in unserem Beispiel ab $\tau = 50$ d bei einer Relaxationszeit von etwa 20 Tagen). Bei kürzeren Zeiten können wir jedoch keine Äquivalenz feststellen.

Aufgrund dieser notwendigen großen Zeitspanne ($\tau = 50$ d, d sind Handelstage) gegenüber der vorhandenen Zeitreihenlänge von etwa 3 Jahren des Xetra Handels, führen wir hier keinen Vergleich mit empirischen Daten durch. Bei Anpassungen von empirischen Dichteverteilungen an die Langzeitlösung (236) für kleinere Zeitfenster τ gibt es Abweichungen (Details siehe [93]).

5 Die Erweiterung der Modelle mit stochastischer Volatilität

In den nachfolgenden Abschnitten stellen wir andere Modelle mit stochastischer Volatilität vor. Zum einen transformieren wir aus der Physik bekannte Prozesse auf den Aktienmarkt und überprüfen die Übereinstimmung mit empirischen Daten. Auf der anderen Seite wollen wir die beiden bereits vorgestellten Modelle abwandeln und kombinieren, um eine bessere Anpassungsgüte an die empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen zu erhalten. Wir betrachten alle nachfolgenden Modelle ohne Korrelation zwischen dem logarithmierten Aktienkurs x und der Varianz v (siehe Abschnitt 4).

5.1 Die Anwendung eines physikalischen Modells auf die Aktienkursdynamik

Im Nachfolgenden werden wir andere Ansätze diskutieren, welche die Aktienkursdynamik mit Hilfe von Modellen mit stochastischer Volatilität beschreiben. Als Ausgangsbasis verwenden wir in diesem Abschnitt den in der Physik bekannten Ornstein-Uhlenbeck Prozess (siehe Abschnitt 2.2). Wir definieren die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit \bar{v} als stochastische Differentialgleichung im Langevin Formalismus [106]

$$d\bar{v} = -\gamma \bar{v} dt + \sqrt{2 \bar{D}} dW_v(t) . \quad (238)$$

Dabei dient die obige Gleichung (238) zur Beschreibung der Geschwindigkeit \bar{v} der Brownschen Bewegung. Diese Bewegung wurde ebenfalls zur quantitativen Beschreibung der Aktienkursdynamik verwendet. Hierfür war eine Variablentransformation notwendig, um den positiven Definitionsbereich des Aktienpreises einzuhalten (siehe Abschnitt 2.1). Im Folgenden wollen wir nun in Analogie zu der Transformation der Brownschen Bewegung verfahren, um den Ornstein-Uhlenbeck Prozess zur Darstellung des Aktienkursverlaufes zu nutzen.

5.1.1 Das Log-Normal Modell

Das Modell Wir transformieren die Geschwindigkeit \bar{v} zu der Varianz des Aktienkurses v durch die bekannte Relation $\bar{v}(t) = c \ln[v(t)/\theta]$. Hierbei stellt θ den langfristigen Mittelwert der Fluktuationen v dar und c dient nur dem Erhalt der richtigen Einheiten für \bar{v} . Wir erhalten nach Transformation der Variablen \bar{v} zu v folgende stochastische Differentialgleichung

$$dv = -\gamma v \ln[v/\theta] dt + \sqrt{2 \bar{D}} v dW_v \quad (239)$$

$$\bar{D} = \bar{D}/c^2 , \quad (240)$$

die wir jetzt als Langevin Gleichung im Itô Formalismus auffassen. Die Gleichung (239) definieren wir zusammen mit der Entwicklungsgleichung für den logarithmierten Aktienkurs x als Log-Normal Modell

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} v \right) dt + \sqrt{v} dW_x . \quad (241)$$

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung Um die stationäre Dichteverteilung der Varianz v zu errechnen, ermitteln wir die adäquate Fokker-Planck-Gleichung zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz v wie folgt (siehe Abschnitt 1.2)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (242)$$

$$S(v, t) = -\frac{\partial}{\partial v} (\gamma v \ln [v/\theta] p(v, t)) - \frac{\partial^2}{\partial v^2} (D v^2 p(v, t)). \quad (243)$$

Die stationäre Lösung für die eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung von v erhalten wir durch Nullsetzen der Wahrscheinlichkeitsflussdichte $S(v, t)$

$$0 = [\gamma v \ln [v/\theta] + 2 D v] p_{st}(v) + D v^2 \frac{\partial}{\partial v} p_{st}(v). \quad (244)$$

Wir erhalten somit die folgende stationäre Verteilungsfunktion $p_{st}^{LN}(v)$ für das Log-Normal Modell LN

$$p_{st}^{LN}(v) = C v^{-2} \exp \left[-\frac{\gamma}{2D} \ln^2 [v/\theta] \right] \quad (245)$$

$$C = \sqrt{\frac{\theta^2 \gamma}{2 \pi D}} \exp \left[-\frac{D}{2\gamma} \right] \quad (246)$$

$$p_{st}^{LN}(v) = \sqrt{\frac{\gamma}{2 \pi D}} v^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{D} \left(\ln [v/\theta] + \frac{D}{\gamma} \right)^2 \right]. \quad (247)$$

Für die ersten beiden Momente dieser Verteilung errechnen wir

$$\langle v \rangle = \theta \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{D}{\gamma} \right] \quad (248)$$

$$\langle v^2 \rangle = \theta^2. \quad (249)$$

Zum Vergleich dieser Verteilung mit dem Heston und Hull-White Modell setzen wir den Parameter $D = \tilde{\kappa}^2/2 = \kappa^2/(2\theta)$. Die dimensionslose Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung mit $u = v/\theta$ lautet folgendermaßen

$$\hat{p}_{st}^{LN}(u) = \sqrt{\frac{\gamma}{2 \pi D}} u^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{D} \left(\ln [u] + \frac{D}{\gamma} \right)^2 \right]. \quad (250)$$

Die stationäre Dichteverteilung der Varianz haben wir zusammenfassend im nächsten Abschnitt grafisch dargestellt.

Die Kurzzeitlösung der logarithmierten Änderungen Um nun die erhaltene stationäre Lösung für die Varianz auf die logarithmierten Änderungen des Aktienkurses anzuwenden, ist es wieder notwendig, dass bekannte Integral zu lösen (siehe Abschnitt 4.2)

$$p_s^{LN}(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p_{st}^{LN}(v), \quad (251)$$

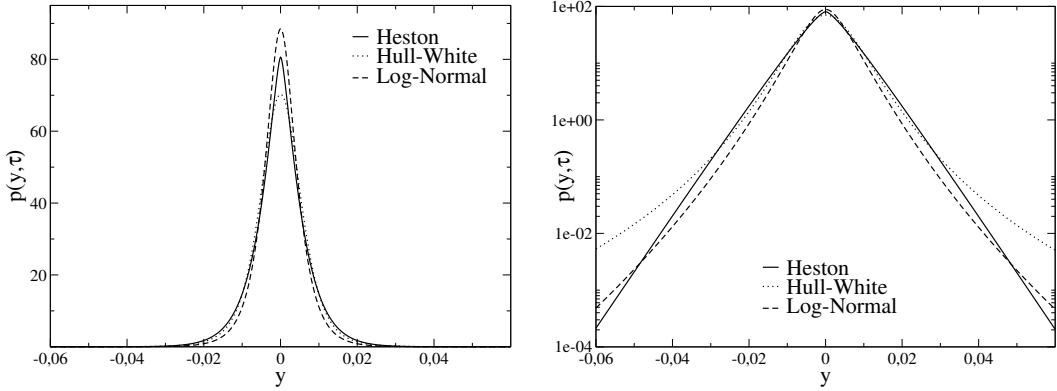


Abbildung 43: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilungen der logarithmierter Änderungen des Aktienkurses des Heston, Hull-White und Log-Normal Modells für vergleichbare Parameter und das Zeitfenster $\tau = 1$ h. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 3 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$.

mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilung aus der Gleichung (223) und der stationären Lösung (247). Leider ist es nicht möglich, für das vorliegende Integral einen analytischen Ausdruck zu finden. Aus diesem Grund wollen wir die Lösung numerisch errechnen. Hierzu überführen wir zunächst die Varianz v in die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$ und transformieren anschließend den Definitionsbereich von Null bis unendlich auf Null bis Eins mit Hilfe der folgenden Transformation

$$f = \frac{u}{1+u} \quad (252)$$

$$u = \frac{f}{1-f} \quad (253)$$

$$\frac{du}{df} = \frac{1}{(1-f)^2}. \quad (254)$$

Somit ergibt sich das numerisch zu lösende Integral wie folgt

$$p_s^{LN}(y, \tau) = \int_0^1 df p(y, \tau | f) \check{p}_{st}^{LN}(f) \quad (255)$$

$$p(y, \tau | f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\theta f/(1-f)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y - \mu\tau + 0.5\tau\theta f/(1-f))^2}{\tau\theta f/(1-f)}\right] \quad (256)$$

$$\check{p}_{st}^{LN}(f) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} f^{-2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{D} \ln[f/(1-f)]^2 - \frac{1}{2}\frac{D}{\gamma}\right] \quad (257)$$

$$\check{p}_{st}^{LN}(f) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} f^{-2} \exp\left[-\frac{1}{2}a \ln[f/(1-f)]^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{a}\right]. \quad (258)$$

Als Integrationsalgorithmus verwendeten wir die Simpson Regel (siehe Anhang D) [86]. In der Abbildung 43 haben wir die beiden bekannten Modelle des Aktienmarktes, Heston und Hull-White, mit dem Log-Normal Modell verglichen. Wir erkennen deutlich,

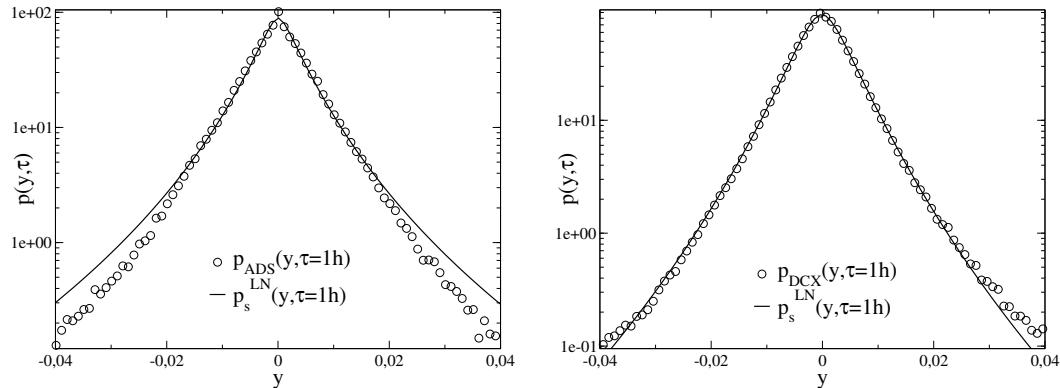


Abbildung 44: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des Log-Normal Modells $p_s^{LN}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ für die Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 301.5$, $a = 0.48$, $\theta = 2.70 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 3.25 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ dargestellt. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des Log-Normal Modells $p_s^{LN}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ für die DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 18.3$, $a = 0.88$, $\theta = 8.82 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = -1.02 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ dargestellt.

dass das Log-Normal Modell bei vergleichbaren Parametern eine größere Höhe als die anderen beiden Modelle erreicht und die Eintrittswahrscheinlichkeit von großen Änderungen liegt zwischen dem Heston Modell (geringe Wahrscheinlichkeitsdichte) und dem Hull-White Modell (hohe Dichte).

Der Vergleich mit empirischen Daten In der Abbildung 44 links haben wir das Log-Normal Modell an eine empirische Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der Adidas-Salomon AG angepasst. Wir erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit von betragsmäßig großen Aktienkursänderungen überschätzt und die Höhe etwas zu niedrig geschätzt wird. In der Abbildung 44 rechts ist die theoretische Kurzzeitlösung an die Verteilung der logarithmierten Änderungen y der DaimlerChrysler AG angepasst. Wir sehen eine gute Übereinstimmung zwischen dem theoretischen und dem empirischen Verteilungsverlauf.

5.1.2 Das adaptierte Log-Normal Modell

Das Modell Unser Ausgangspunkt ist jetzt wieder die Gleichung (239). Wir wollen aber nun untersuchen, wie sich die stationäre Lösung des Log-Normal Modells für die Varianz und die Kurzzeitlösung für die logarithmierten Änderungen verändert, wenn wir die Ausgangsgleichung als eine Langevin Gleichung im Stratonovich Formalismus auffassen. Durch Transformation in eine Langevin Gleichung des Itô Formalismus ergibt

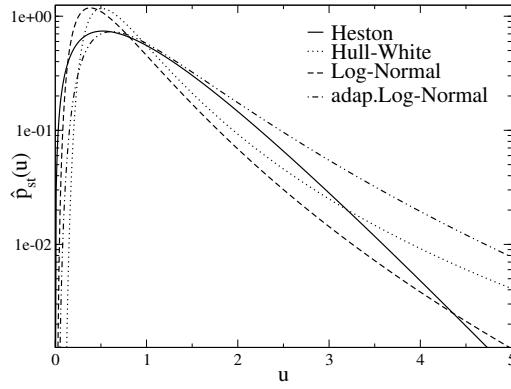


Abbildung 45: Vergleichende Darstellung der stationären Lösung des Heston, Hull-White Modells und des abgeleiteten Ornstein-Uhlenbeck Prozesses als Log-Normal und adaptiertes Log-Normal Modell.

sich für das adaptierte Log-Normal Modell

$$dv = -\gamma v \ln [v/\theta] dt + D v dt + \sqrt{2 D} v dW_v . \quad (259)$$

Die Dynamik des Aktienkurses wird auch in dem adaptierten Log-Normal Modell durch die Gleichung (241) beschrieben.

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung Wir formulieren die zugehörige Fokker-Planck Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz v des adaptierten Log-Normal Modells wie folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (260)$$

$$S(v, t) = \frac{\partial}{\partial v} [v (-\gamma \ln [v/\theta] + D) p(v, t)] - \frac{\partial^2}{\partial v^2} (D v^2 p(v, t)) . \quad (261)$$

Die stationäre Lösung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung errechnen wir wieder durch Nullsetzen der Wahrscheinlichkeitsflussdichte $S(v, t)$

$$0 = [\gamma v \ln [v/\theta] + D v] p_{st}(v) + D v^2 \frac{\partial}{\partial v} p_{st}(v) . \quad (262)$$

Somit erhalten wir als stationäre Verteilung $p_{st}^{aLN}(v)$ des adaptierten Log-Normal Modells aLN

$$p_{st}^{aLN}(v) = C v^{-1} \exp \left[-\frac{\gamma}{2 D} \ln^2 [v/\theta] \right] \quad (263)$$

$$C = \sqrt{\frac{\gamma}{2 \pi D}} \quad (264)$$

$$p_{st}^{aLN}(v) = \sqrt{\frac{\gamma}{2 \pi D}} v^{-1} \exp \left[-\frac{\gamma}{2 D} \ln^2 [v/\theta] \right] . \quad (265)$$

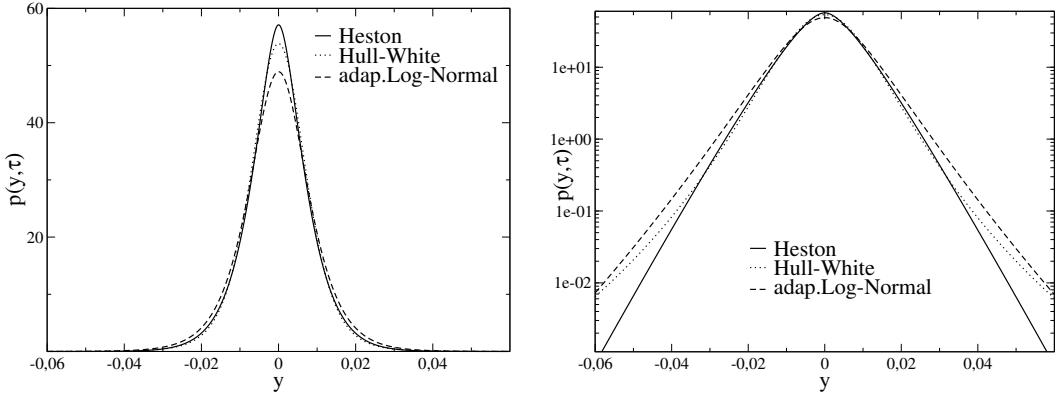


Abbildung 46: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteveorlungen der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses des Heston, Hull-White und adaptierten Log-Normal Modells für vergleichbare Parameter und das Zeitfenster $\tau = 1$ h. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 3 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$.

Die ersten beiden Momente dieser Verteilung errechnen wir als

$$\langle v \rangle = \theta \exp \left[\frac{D}{2\gamma} \right] \quad (266)$$

$$\langle v^2 \rangle = \theta^2 \exp \left[\frac{2D}{\gamma} \right]. \quad (267)$$

Wir haben ebenfalls in dem adaptierten Log-Normal Modell die gleiche Parametertransformation mit $D = \tilde{\kappa}^2/2 = \kappa^2/(2\theta)$. Die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$ folgt der Verteilung

$$\hat{p}_{st}^{aLN}(u) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} u^{-1} \exp \left[-\frac{\gamma}{2D} \ln^2[u] \right]. \quad (268)$$

In der Abbildung 45 haben wir die beiden stationären Lösungen der Varianz v der aus dem Ornstein-Uhlenbeck Prozess abgeleiteten Modelle mit den bekannten Modellen von Heston und Hull-White verglichen. Wir erkennen deutlich, dass das adaptierte Log-Normal Modell die größte Wahrscheinlichkeitsdichte von großen Werten der dimensionslosen Varianz u besitzt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von sehr kleinen Werten der Fluktuationen u ist geringer als bei dem Heston und dem Log-Normal Modell, jedoch größer als bei dem Hull-White Modell.

Die Kurzzeitlösung der logarithmierten Änderungen Um die erhaltene statio-näre Wahrscheinlichkeitsdichteveorlungen wieder auf die logarithmierten Änderungen des Aktienkurses anzuwenden, ist die Lösung des bekannten Integrals notwendig

$$p_s^{aLN}(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p_{st}^{aLN}(v). \quad (269)$$

Auch dieses Integral ist wie bei dem Log-Normal Modell nicht analytisch lösbar. Wir transformieren daher wieder die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$ zu der Variablen

$f = u/(1+u)$. Wir erhalten somit das numerisch zu lösende Integral

$$p_s^{aLN}(y, \tau) = \int_0^1 df p(y, \tau | f) \check{p}_{st}^{aLN}(f) \quad (270)$$

$$p(y, \tau | f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\theta f/(1-f)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y - \mu\tau + 0.5\tau\theta f/(1-f))^2}{\tau\theta f/(1-f)}\right] \quad (271)$$

$$\check{p}_{st}^{aLN}(f) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \frac{1}{f(1-f)} \exp\left[-\frac{\gamma}{2D} \ln[f/(1-f)]^2\right] \quad (272)$$

$$\check{p}_{st}^{aLN}(f) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{1}{f(1-f)} \exp\left[-\frac{a}{2} \ln[f/(1-f)]^2\right]. \quad (273)$$

Zur numerischen Integration nutzten wir wieder den Simpson Algorithmus [86]. In der Abbildung 46 haben wir das adaptierte Log-Normal Modell mit den bekannten Heston und Hull-White Modellen dargestellt. Wir erkennen, dass das adaptierte Modell die geringste Höhe der Dichteverteilung aufweist. Das ist bereits bei der stationären Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu sehen, da das betrachtete Modell nur eine geringe Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von kleinen Werten der Varianz u besitzt. Im Gegensatz dazu ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von großen Werten der Schwankungen u hoch. Dies zeigt sich in der ebenfalls hohen Wahrscheinlichkeitsdichte von betragsmäßig großen logarithmierten Änderungen im Vergleich zum Heston und Hull-White Modell.

Der Vergleich mit empirischen Daten Bei der Anpassung der theoretischen Kurzzeitlösung an empirische Daten des deutschen Aktienmarktes in Abbildung 47 erkennen wir ähnliche Abweichungswerte wie bei dem Log-Normal Modell. Bei der Anpassung an die Adidas-Salomon AG im Xetra Handel wird die Höhe der Verteilung etwas zu niedrig geschätzt, wohingegen das Eintreten von großen logarithmierten Änderungen überschätzt wird. Bei der DaimlerChrysler AG wird die empirische Verteilung dagegen, ähnlich wie beim Log-Normal Modell sehr gut getroffen. Die Höhe der Verteilung und die Eintrittswahrscheinlichkeit von betragsmäßig großen Änderungen wird gut geschätzt.

5.2 Die Anpassung des Heston Modells

Grundsätzlich haben wir im Abschnitt 4 festgestellt, dass das Heston Modell die Höhe und den mittleren Teil der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Änderungen des logarithmierten Aktienkurses x sehr gut darstellt. Da aber die Wahrscheinlichkeit auf eins normiert ist, müssen bei Gültigkeit der vorhergegangenen Aussagen auch die Enden der Verteilung gut wiedergegeben werden. Dies ist aber nicht der Fall. Das Heston Modell unterschätzt die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von großen logarithmierten Änderungen des Aktienkurses.

Da das Heston Modell die Enden unterschätzt und die Wahrscheinlichkeit normiert ist, muss die Wahrscheinlichkeitsmasse bei der Dichteverteilung des Heston Modells an anderer Stelle liegen und „fehlt“ dadurch an den Enden. Ein Grund hierfür kann der Vorteil des Hull-White Modells sein, welches den Verlauf der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (Kurvenform) treffender wiedergibt als das Heston Modell. Ei-

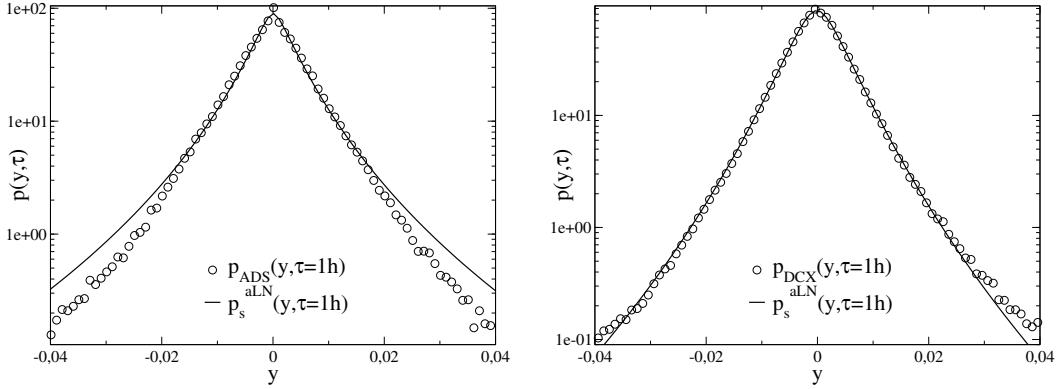


Abbildung 47: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des adaptierten Log-Normal Modells $p_s^{aLN}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ für die Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 293.2$, $a = 0.46$, $\theta = 3.40 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ and $\mu = 3.43 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ dargestellt. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des adaptierten Log-Normal Modells $p_s^{aLN}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ für die DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 18.3$, $a = 0.88$, $\theta = 2.84 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ and $\mu = -1.02 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ dargestellt.

ne Ursache für diesen „besseren“ Verlauf könnte das multiplikative Rauschen linear in der Varianz v sein, gegenüber dem Rauschen in der Quadratwurzel von v beim Heston Modell.

5.2.1 Das neue Modell

Unser Ziel ist die Konstruktion eines abgewandelten Modells, was sich im Grunde wie das Heston Modell verhält, aber ein Rauschen linear in der Varianz v aufweist. Hierfür setzen wir die Bedingung, dass das relative Verhältnis zwischen dem stochastischen Term $b(v)$ und dem deterministischen Term $a(v)$ der Langevin Gleichung in Itô Notation

$$dv = a(v) dt + b(v) dW_v , \quad (274)$$

für alle v gleich bleibt. Wir fordern somit

$$\frac{b^H(v)}{a^H(v)} = \frac{b^N(v)}{a^N(v)} , \quad (275)$$

wobei H für das Heston Modell und N für das neue Modell steht.

Das Modell Wir erhalten nun das Rauschen linear in v , indem wir beide Terme mit \sqrt{v} erweitern. Wir formulieren daher folgende neue stochastische Differentialgleichung

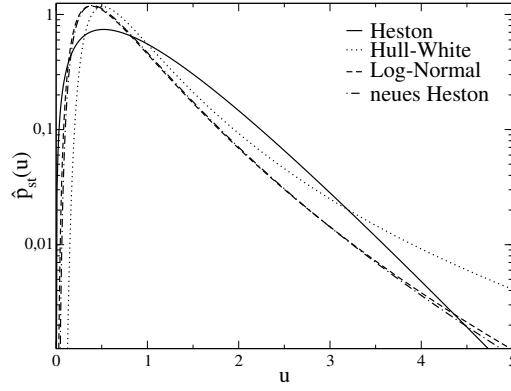


Abbildung 48: Die stationären Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen des Heston, Hull-White, Log-Normal und des neuen Modells sind über die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$ für vergleichbare Parameter dargestellt. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$.

als Langevin Gleichung im Itô Formalismus

$$dv = \bar{\gamma}(\theta\sqrt{v} - v^{3/2}) dt + \tilde{\kappa} v dW \quad (276)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma/\sqrt{\theta} \quad (277)$$

$$\tilde{\kappa} = \kappa/\sqrt{\theta}. \quad (278)$$

Die Dynamik für den logarithmierten Aktienkurs x ist wieder durch die Gleichung (241) gegeben.

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung Wir ermitteln die äquivalente Fokker-Planck Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v, t)$ der Varianz v zum Zeitpunkt t mit

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (279)$$

$$S(v, t) = \bar{\gamma} \theta \sqrt{v} p(v, t) - \bar{\gamma} v^{3/2} p(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\tilde{\kappa}^2}{2} v^2 p(v, t) \right]. \quad (280)$$

Die stationäre Lösung der Verteilung können wir leicht durch Nullsetzen der Wahrscheinlichkeitsflussdichte $S(v, t)$ errechnen. Somit erhalten wir folgende zeitunabhängige Lösung für das neue Modell

$$p_{st}^N(v) = \frac{\theta}{4} \frac{1}{K_2[2\sqrt{16\bar{\gamma}^2\theta/\tilde{\kappa}^4}]} \frac{1}{v^2} \exp \left[-\frac{4\bar{\gamma}\theta}{\tilde{\kappa}^2\sqrt{v}} - \frac{4\bar{\gamma}\sqrt{v}}{\tilde{\kappa}^2} \right] \quad (281)$$

$$\hat{p}_{st}^N(u) = \frac{1}{4K_2[4a]} \frac{1}{u^2} \exp \left[-\frac{2a}{\sqrt{u}} - 2a\sqrt{u} \right] \quad (282)$$

$$a = \frac{2\bar{\gamma}\sqrt{\theta}}{\tilde{\kappa}^2}. \quad (283)$$

Die obige stationäre Lösung des neuen Modells haben wir in der Abbildung 48 dargestellt. Wir erkennen, dass das neue Modell zu dem hergeleiteten Log-Normal Modell nur marginale Unterschiede aufweist. Da wir das Log-Normal Modell bereits in dem Abschnitt 5 ausführlich betrachtet haben, ist eine detailliertere Betrachtung des neuen Modells nicht notwendig.

5.2.2 Das adaptierte Heston Modell

In dem vorherigen Teilabschnitt haben wir versucht, ein dem Heston Modell ähnliches Modell aufzubauen. Bei dem Vergleich der stationären Wahrscheinlichkeitsdichteveerteilungen sind jedoch kaum Übereinstimmungen mit dem Heston Modell zu finden. Und das, obwohl wir auf das relative Verhältnis des stochastischen Terms zu dem deterministischen Term geachtet haben.

Die stationäre Dichtevertteilung errechnen wir aus der Fokker-Planck Gleichung. In die Fokker-Planck Gleichung geht der stochastische Term zum Quadrat hälftig ein und bildet den Diffusionsterm. Wenn wir jetzt das Verhältnis von dem Diffusionsterm und dem Driftterm des Heston und des neuen Modells betrachten, dann erkennen wir eine unterschiedliche Relation. Wir haben dann den Driftterm um den Faktor \sqrt{v} zu gering erweitert.

Das Modell Daher formulieren wir jetzt unser neues adaptiertes Heston Modell als stochastische Differentialgleichung im Langevin Formalismus als Itô Notation

$$dv = \tilde{\gamma}(\theta v - v^2) dt + \tilde{\kappa} v dW \quad (284)$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma/\theta \quad (285)$$

$$\tilde{\kappa} = \kappa/\sqrt{\theta}. \quad (286)$$

Die Aktienkursdynamik ist wieder äquivalent zu der Gleichung (241).

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung Die entsprechende Fokker-Planck Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p(v, t)$ lautet

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (287)$$

$$S(v, t) = \tilde{\gamma} \theta v p(v, t) - \tilde{\gamma} v^2 p(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\kappa^2}{2} v^2 p(v, t) \right]. \quad (288)$$

Die stationäre Lösung errechnen wir wieder durch Nullsetzen der Wahrscheinlichkeitsflussdichte $S(v, t)$ und erhalten

$$p_{st}^{aH}(v) = \frac{a^{a-1}}{\theta^{a-1} \Gamma[a-1]} v^{a-2} \exp \left[-\frac{a}{\theta} v \right] \quad (289)$$

$$\hat{p}_{st}^{aH}(u) = \frac{a^{a-1}}{\Gamma[a-1]} u^{a-2} \exp[-a u] \quad (290)$$

$$a = 2\tilde{\gamma}\theta/\tilde{\kappa}. \quad (291)$$

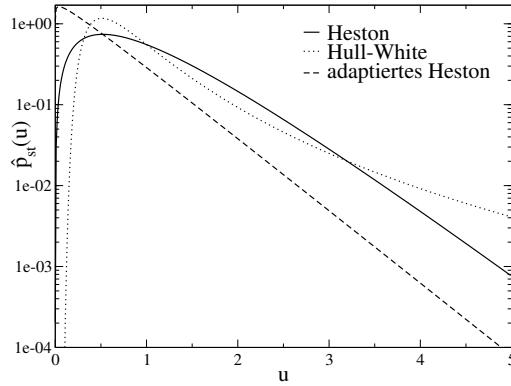


Abbildung 49: Die stationären Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilungen des Heston, Hull-White und des adaptierten Heston Modells sind über die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$ für vergleichbare Parameter dargestellt. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$.

Die stationären Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilungen haben wir in der Abbildung 49 dargestellt. Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte des adaptierten Heston Modells bei kleinen Werten der dimensionslosen Varianz u größer ist als beim Heston und Hull-White Modell. Im Gegensatz dazu ist die Wahrscheinlichkeitsdichte bei mittleren und großen Werten der Varianz u geringer als bei den anderen beiden Modellen.

Die Kurzzeitlösung der logarithmierten Änderungen Wir wollen nun ebenfalls die erhaltene stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilung auf die logarithmierten Änderungen des Aktienkurses beziehen. Hierfür ist wieder die Lösung des bekannten Integrals notwendig. Wir erhalten folgende Formulierung

$$p_s^{aH}(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p_{st}^{aH}(v) \quad (292)$$

$$p(y, \tau | v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v \tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + 0.5 v \tau)^2}{v \tau} \right] \quad (293)$$

$$p_{st}^{aH}(v) = \frac{a^{a-1}}{\theta^{a-1} \Gamma[a-1]} v^{a-2} \exp \left[-\frac{a}{\theta} v \right] \quad (294)$$

$$a = 2\tilde{\gamma}\theta/\tilde{\kappa}^2. \quad (295)$$

Die Kurzzeitlösung für die logarithmierten Änderungen y bei kurzen Zeitintervallen τ lautet ähnlich wie bei dem Heston und Hull-White Modell

$$\begin{aligned} p_s^{aH}(z, \tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b^{a-1}}{\Gamma[a-1]} \exp \left[-\frac{z}{2} \right] \left[\frac{z^2}{1/4 + 2b} \right]^{(a-1.5)0.5} \\ &\quad K_{a-1.5} \left[\sqrt{z^2 (1/4 + 2b)} \right] \\ b &= a/(\theta \tau). \end{aligned} \quad (296)$$

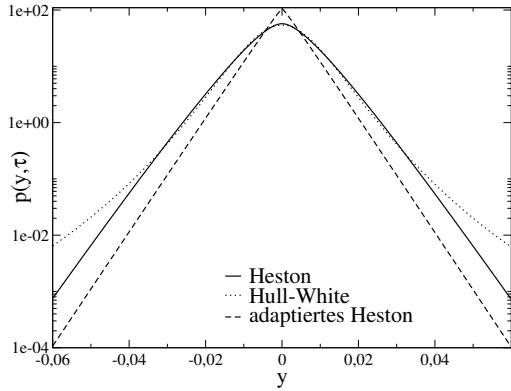


Abbildung 50: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilungen der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses des Heston, Hull-White und adaptierten Heston Modells für vergleichbare Parameter und das Zeitfenster $\tau = 1$ h. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 3 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$.

In der Abbildung 50 haben wir die Kurzzeitlösung des adaptierten Heston Modells mit dem Heston und dem Hull-White Modell verglichen. Der Verlauf der Verteilungen zueinander ist ähnlich wie bei dem Vergleich der stationären Wahrscheinlichkeitsdichteveverteilungen der Varianz. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von betragsmäßig kleinen logarithmierten Änderungen y ist bei dem adaptierten Modell größer, wohingegen die Dichte von großen logarithmierten Änderungen kleiner ist. Die Enden des adaptierten Modells sind daher nicht so stark ausgeprägt wie bei den anderen beiden Modellen.

Der Vergleich mit empirischen Daten In der Abbildung 51 haben wir das adaptierte Modell beispielhaft an zwei empirischen Verteilungen des deutschen Aktienmarktes angepasst. Die Anpassungsgüte ist in beiden Abbildungen ähnlich. Das adaptierte Heston Modell unterschätzt bei beiden empirischen Zeitreihen das Eintreten von großen logarithmierten Änderungen y . Die Höhe der Verteilung wird dagegen bei beiden empirischen Verteilungen sehr gut getroffen.

Weiterhin stellen wir fest, dass die angepasste theoretische Kurzzeitlösung des adaptierten Heston Modells identisch ist mit der Anpassung des Heston Modells an die gleiche empirische Verteilung. Die Parameter des adaptierten Heston Modells haben sich so angepasst, dass wir die Lösung des Heston Modells erhalten. Der Nachteil ist, dass wir somit kein fundamental neues Modell hergeleitet haben. Der Vorteil ist, dass wir ein dem Heston Modell sehr ähnliches Modell mit einem in v linearen Rauschterm der Varianzdynamik generiert haben. Beide Modelle weisen somit bei entsprechend angepassten Parametern ähnliche Charakteristika auf.

5.3 Das Kombinationsmodell

Mit Hilfe der Einführung eines Rauschterms in der Varianzdynamik, der linear in der Varianz v verläuft, wollten wir eine bessere Anpassung der theoretischen Verteilung an die empirischen Daten erreichen. Insbesondere sollte der günstige Kurvenverlauf eines

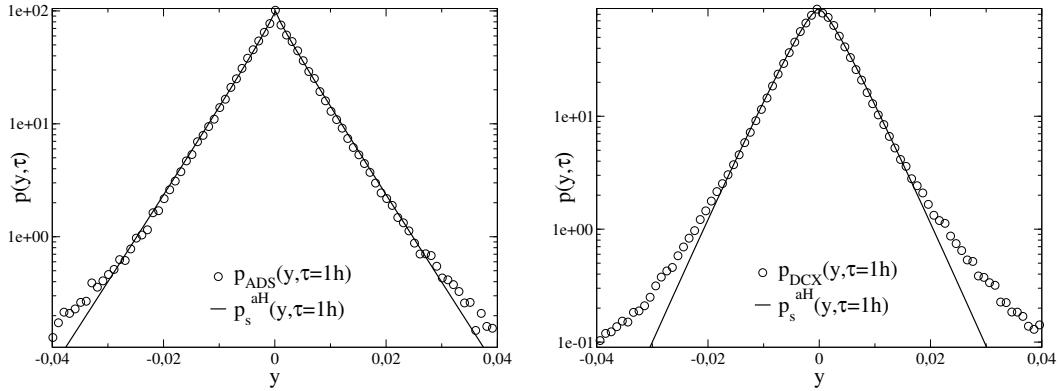


Abbildung 51: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des adaptierten Heston Modells $p_s^{aH}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ für die Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 45.5$, $a = 1.9$, $\theta = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 6.58 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ dargestellt. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des adaptierten Heston Modells $p_s^{aH}(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ für die DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 28.3$, $a = 2.4$, $\theta = 6.87 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = -1.09 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ dargestellt.

„Ausläufers“ der Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung des Hull-White Modells in das Heston Modell integriert werden, um breitere Enden in der Dichtevertteilung der logarithmierten Änderungen y zu erhalten. Dies ist durch die Aufrechterhaltung der Relation des stochastischen Terms $b(v)$ und des deterministischen Terms $a(v)$ der Langevin Gleichung, sowie des Diffusionsterms $0.5 b^2(v)$ und Driftterms $a(v)$ der Fokker-Planck Gleichung des Heston Modells nicht gelungen.

Wir wollen nun versuchen, durch eine sinnvolle Kombination des Heston und Hull-White Modells eine neues Modell zu generieren, dass eine bessere Anpassung an empirische Verteilungen ermöglicht.

Zunächst wollen wir wieder die bestehenden Relationen der Rausch- und Driftterme der beiden Modelle betrachten. Aufgrund der Erkenntnisse in den beiden vorherigen Teilausschnitten nutzen wir im Folgenden die Fokker-Planck Gleichung. Wir hatten durch Aufrechterhaltung der Relation in der Fokker-Planck Gleichung das adaptierte Heston Modell geschaffen, welches die gleichen Eigenschaften wie das Heston Modell aufweist. Daher präferieren wir die Gleichung gegenüber der Langevin Gleichung. Wir betrachten das Verhältnis des Driftterms $a(v)$ gegenüber dem Diffusionsterm $0.5 b^2(v)$ und erhalten für die beiden Modelle (H für das Heston Modell, HW das Hull-White Modell)

$$r_H = \frac{a_H(v)}{0.5 b_H^2(v)} = \frac{2 [\gamma (\theta - v)]}{\kappa^2 v} = \frac{a}{v} - \frac{a}{\theta} \quad (297)$$

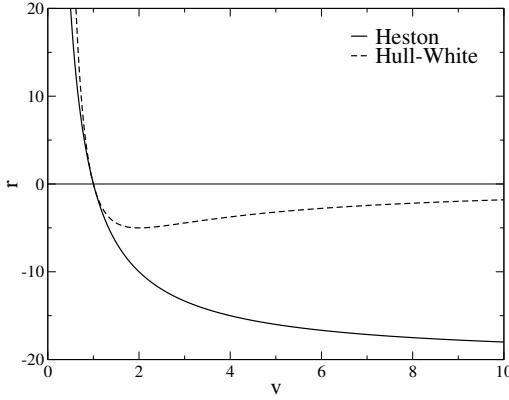


Abbildung 52: Darstellung der Relation r des Driftterms zu dem Diffusionsterm des Heston und Hull-White Modells über die Varianz v . Die Parameter sind $a = 2$ und $\theta = 1 \text{ h}^{-1}$.

$$r_{HW} = \frac{a_{HW}(v)}{0.5 b_{HW}^2(v)} = \frac{2 [\gamma (\theta - v)]}{\tilde{\kappa}^2 v^2} = \frac{a \theta}{v^2} - \frac{a}{v} \quad (298)$$

$$a = \frac{2 \gamma \theta}{\kappa^2} = \frac{2 \gamma}{\tilde{\kappa}^2}. \quad (299)$$

Den Verlauf der Relation r des Heston und Hull-White Modells über die Varianz v haben wir in der Abbildung 52 dargestellt. An der Grenze der Varianz v gleich Null strebt die Relation beider Modelle gegen plus unendlich, wodurch eine nur positiv definierte Varianz v gewährleistet wird. Lediglich die Konvergenzstärke ist mit v^{-1} (Heston Modell) und v^{-2} (Hull-White Modell) verschieden. Die Grenzwerte für die Varianz gegen plus unendlich sind jedoch unterschiedlich, mit Null für das Hull-White Modell und einem festen Wert a/θ bei dem Heston Modell.

Bei der Anpassung der theoretischen Kurzzeitlösung der logarithmierten Änderungen y an die empirischen Aktienkursdaten haben wir gesehen, dass das Heston Modell die Wahrscheinlichkeit von betragsmäßig kleinen Werten in y sehr gut anpasst (siehe Abschnitt 4). Die Wahrscheinlichkeitsdichte bei kleinen Änderungen y wird vorwiegend durch die Wahrscheinlichkeitsdichte von kleinen Varianzen v determiniert. Somit ist die Beschreibung des Heston Modells bei kleinen Werten von v sehr gut. Bei der Relation r_H ergibt sich für kleine Werte v gegen Null

$$r_H \sim \frac{a}{v}. \quad (300)$$

Das Hull-White Modell hat dagegen die richtige Kurvenform der Wahrscheinlichkeitsdichte bei großen logarithmierten Änderungen y , die vorwiegend durch große Werte der Varianz v bestimmt werden. Die Relation r_{HW} ergibt sich daher an der Grenze für v gegen unendlich zu

$$r_{HW} \sim -\frac{a}{v}. \quad (301)$$

Das Interessante ist, dass die Relation der beiden Modelle an den verschiedenen Grenzen betragsmäßig gleich ist mit a/v . Deshalb wollen wir in diesem Teilabschnitt ein Modell

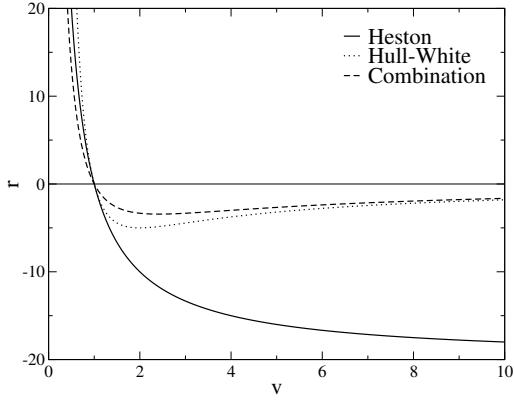


Abbildung 53: Darstellung der Relation r des Driftterms zu dem Diffusionsterm des Heston, Hull-White und Kombinationsmodells über die Varianz v . Die Parameter sind $a = 2$ und $\theta = 1 \text{ h}^{-1}$.

definieren, dass für die Varianz v gegen Null das Verhalten des Heston Modells und für v gegen unendlich das Verhalten des Hull-White Modells aufweist. Wir setzen daher folgende Relation r_C

$$r_C = \frac{\theta}{\theta + v} \left(\frac{a}{v} + \frac{a}{v} \right) - \frac{a}{v} = \frac{\theta}{\theta + v} \frac{2a}{v} - \frac{a}{v}, \quad (302)$$

für das neue Kombinationsmodell C . Die Relation r_C haben wir in der Abbildung 53 dargestellt. Wir sehen, dass die neue Relation die gewünschte Kombination aus der Relation des Heston Modells und des Hull-White Modells aufweist. Wir fassen die Terme der Relation r_C zusammen und ermitteln

$$\begin{aligned} r_C &= \frac{a(\theta - v)}{\theta v + v^2} \\ &= \frac{\gamma(\theta - v)}{\tilde{\kappa}^2/2(\theta v + v^2)}. \end{aligned} \quad (303)$$

Das Modell Wir erhalten somit unser neues Kombinationsmodell als stochastische Differentialgleichung im Langevin Formalismus als Itô Notation

$$dv = \gamma(\theta - v) dt + \tilde{\kappa} \sqrt{\theta v + v^2} dW_v \quad (304)$$

$$\tilde{\kappa} = \kappa/\sqrt{\theta}. \quad (305)$$

Wir sehen, dass das neue Modell eine tatsächliche Kombination aus dem Heston und Hull-White Modell ist. Der deterministische Term bleibt unverändert und ist gleich dem aus den anderen beiden Modellen. Der stochastische Term $b^2(v)$ dagegen besteht aus einer linearen Kombination der beiden bekannten Fluktuationsterme. Der logarithmierte Aktienkurs x entwickelt sich wieder bezüglich der bekannten Gleichung (241).

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung Wir formulieren nun die Fokker-Planck Gleichung des Kombinationsmodells für die zeitliche Entwicklung der

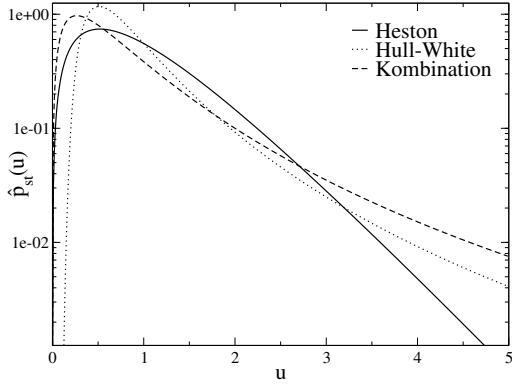


Abbildung 54: Darstellung der stationären Wahrscheinlichkeitsdichte des Heston, Hull-White und des Kombinationsmodells über die dimensionslose Varianz u für vergleichbare Parameter. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$.

Wahrscheinlichkeitsdichte $p(v, t)$ wie folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (306)$$

$$S(v, t) = \gamma \theta p(v, t) - \gamma v p(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\theta v + v^2) p(v, t) \right]. \quad (307)$$

Durch Nullsetzen der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $S(v, t)$ errechnen wir die statio-näre Lösung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für $\gamma t \gg 1$

$$p_{st}^C(v) = \frac{4^a \theta^{1+a} \Gamma[0.5 + a]}{\sqrt{\pi} \Gamma[a]} (\theta + v)^{-1-2a} v^{a-1} \quad (308)$$

$$a = \frac{2\gamma}{\tilde{\kappa}}, \quad (309)$$

bzw. für die dimensionslose Varianz $u = v/\theta$

$$\hat{p}_{st}^C(u) = \frac{4^a \Gamma[0.5 + a]}{\sqrt{\pi} \Gamma[a]} (1 + u)^{-1-2a} u^{a-1}. \quad (310)$$

Die stationäre Verteilung haben wir in der Abbildung 54 vergleichend mit dem Heston und Hull-White Modell dargestellt. Bei kleinen Werten der Varianz u ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des Kombinationsmodells wie bei dem adaptierten Heston Modell höher als die des Heston und Hull-White Modells. Bei großen Varianzwerten ist eben-falls die Wahrscheinlichkeitsdichte bei dem Kombinationsmodell am größten.

Die Kurzzeitlösung der logarithmierten Änderungen Um die erhaltene statio-näre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Varianz v wieder auf die logarithmierten Änderungen y des Aktienkurses zu beziehen, ist die Lösung des bekannten Integrals

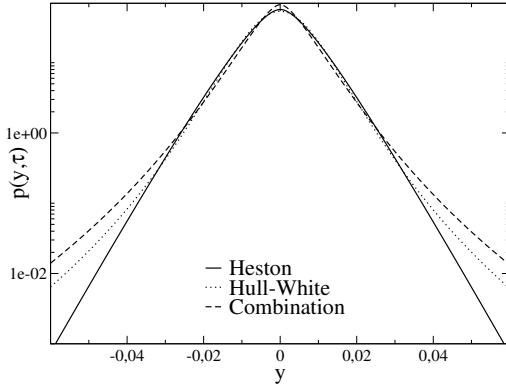


Abbildung 55: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses des Heston, Hull-White und des Kombinationsmodells für vergleichbare Parameter und das Zeitfenster $\tau = 1$ h. Die Parameter sind $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$, $\theta = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\kappa = 6 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 3 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$.

notwendig

$$p_s^C(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p_{st}^C(v) \quad (311)$$

$$p(y, \tau | v) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi v \tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + 0.5 v \tau)^2}{v \tau} \right] \quad (312)$$

$$p_{st}^C(v) = \frac{4^a \theta^{1+a} \Gamma[0.5 + a]}{\sqrt{\pi} \Gamma[a]} (\theta + v)^{-1-2a} v^{a-1} \quad (313)$$

$$a = 2 \gamma / \tilde{\kappa}^2. \quad (314)$$

Das obige Integral ist nicht analytisch ausdrückbar, so dass wir erneut auf die bekannte numerische Integration zurückgreifen, mit

$$p_s^C(y, \tau) = \int_0^1 dv p(y, \tau | f) \check{p}_{st}^C(f) \quad (315)$$

$$p(y, \tau | f) = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \theta \tau f / (1-f)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + 0.5 \theta \tau f / (1-f))^2}{\theta \tau f / (1-f)} \right] \quad (316)$$

$$\check{p}_{st}^C(f) = \frac{4^a \Gamma[0.5 + a]}{\sqrt{\pi} \Gamma[a]} (1-f)^a f^{a-1}, \quad (317)$$

nach Anwendung der Transformationsbeziehungen aus den Gleichungen (252) bis (254). Bei der numerischen Integration nutzten wir wieder den Simpson Algorithmus [86]. In der Abbildung 55 haben wir die Kurzzeitlelösung der logarithmierten Änderungen y für das Zeitfenster $\tau = 1$ h dargestellt. Wie aus der stationären Dichteverteilung der Varianz zu erwarten, weist das Kombinationsmodell die größte Höhe und die breitesten Enden auf. Des Weiteren können wir feststellen, dass das Kombinationsmodell den Kur-

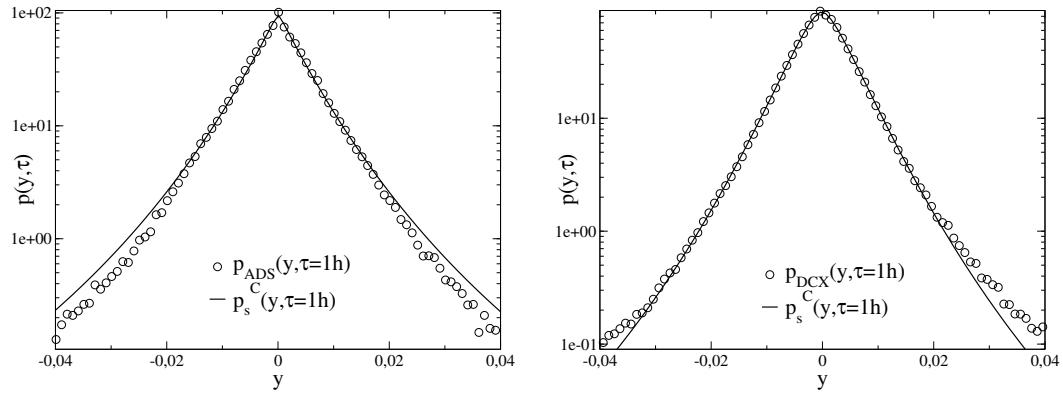


Abbildung 56: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des Kombinationsmodells $p_s^C(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ für die Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 135.45$, $a = 1.02$, $\theta = 8.55 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 4.35 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ dargestellt. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses y des Kombinationsmodells $p_s^C(y, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ für die DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 14.6$, $a = 1.86$, $\theta = 4.8 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = -1.05 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ dargestellt.

verlauf des Hull-White Modells aufzeigt. Dieser Verlauf hat sich bereits im Vergleich mit den empirischen Daten als sehr gut erwiesen.

Der Vergleich mit empirischen Daten Bei der Anpassung der theoretischen Kurzzeitlösung des Kombinationsmodells an die empirischen Verteilungen zeigen sich wieder Unterschiede. In der Abbildung 56 links ist die Anpassung an die Verteilung der logarithmierten Änderungen y der Adidas-Salomon AG zu sehen. Das Kombinationsmodell trifft gut die Höhe der empirischen Verteilung, überschätzt aber das Auftreten von großen Änderungen y . Auf der anderen Seite gibt das Modell sehr gut die empirische Verteilung der Änderungen der DaimlerChrysler AG wieder. Die Höhe und die Enden der Verteilung werden durch die theoretische Lösung sehr gut approximiert. Bei den Enden liegt lediglich ein leichtes Unterschätzen der Wahrscheinlichkeitsdichte vor.

5.4 Die Analogie zu aktiven Brownschen Teilchen mit internem Energie depot

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf die aus der Literatur bekannte Modellierung von aktiven Brownschen Teilchen beziehen [28, 100]. Wir übernehmen den dort definierten Reibungsterm für die zeitliche Dynamik der Geschwindigkeit v . Hierbei vergleichen wir verschiedene Reibungsterme und zeigen deren Auswirkungen auf die zeitliche Dynamik der Geschwindigkeit oder Varianz v' . Wir konzentrieren uns hierfür zunächst nur auf die deterministische Entwicklung der Geschwindigkeit. Wir können die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v' wie folgt formulieren

$$dv' = -\tilde{\gamma}(v') v' dt , \quad (318)$$

mit der allgemeinen geschwindigkeitsabhängigen Reibungsfunktion $\tilde{\gamma}(v')$. Für den einfachen Fall der Stokes Reibung ergibt sich diese Funktion zu

$$\tilde{\gamma}(v') = \gamma , \quad (319)$$

mit der beliebigen, positiv definierten Konstanten γ als Interpretation der Relaxationszeit $1/\gamma$.

Der von uns bisher verwandte deterministische Term für die Varianz v' (Aktienmarkt) oder die Geschwindigkeit v' (Ornstein-Uhlenbeck) lautet

$$dv' = \gamma (\theta - v') dt , \quad (320)$$

mit der Relaxationszeit $1/\gamma$ und dem langfristigen Mittelwert θ . Bei dem Ornstein-Uhlenbeck Prozess haben wir den zur Stokes Reibung zusätzlichen Term $\gamma \theta$ als lineares Potenzial in dem Ort x interpretiert. Wir können den gleichen Term aber auch zu der Reibungsfunktion $\tilde{\gamma}(v')$ dazuzählen. Dann erhalten wir die Reibungsfunktion für die bisher verwendeten Fälle mit

$$\tilde{\gamma}(v') = \gamma \left(1 - \frac{\theta}{v'} \right) . \quad (321)$$

Ein Nachteil der Reibungsfunktion aus der Gleichung (321), mit der Singularität an der Grenze v' gegen Null, ist in [32] diskutiert. Es wurde demzufolge in [32] ein Ansatz entwickelt, der keine Singularität bei v' gegen Null aufweist und zusätzlich die Stokes Reibung als Grenzfall für v' gegen unendlich beinhaltet. Die so erhaltene Reibungsfunktion ist definiert als [14, 27, 32, 100]

$$\tilde{\gamma}(v') = \gamma + \bar{\gamma}(v') \quad (322)$$

$$\bar{\gamma}(v') = -\frac{q}{v'^2 + (c/d)} . \quad (323)$$

Die obige Reibungsfunktion diente zur Modellierung von aktiven Brownschen Teilchen. Das Modell beinhaltet, dass die Teilchen die Reibungsenergie in ein internes Energie depot aufnehmen können. Sie sind dann imstande, diese Energie zu einem späteren Zeitpunkt abzugeben und so in kinetische Energie umzuwandeln. Bei der Energieabgabe zur Geschwindigkeitserhöhung ist die Reibungsfunktion negativ, während sie bei

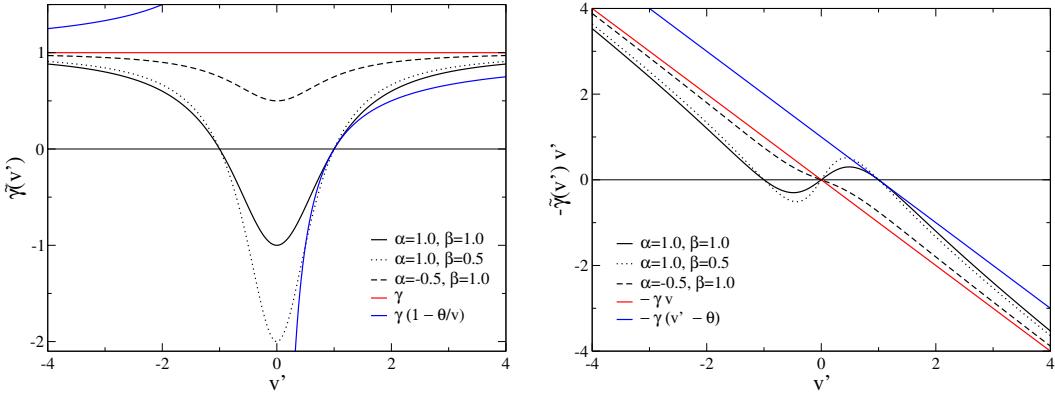


Abbildung 57: LINKS: Darstellung der Reibungsfunktion $\tilde{\gamma}(v')$ aus Gleichung (324) für verschiedene Parameter und im Vergleich zu der Stokes Reibung γ und der Reibung $\gamma(1 - \theta/v)$. RECHTS: Darstellung des Driftterms $-\tilde{\gamma}(v') v'$ gemäß den Gleichungen (324) und (318) für verschiedene Konstanten und im Vergleich zur Stokes Reibung $-\gamma v'$ und der Reibung $\gamma(\theta - v')$.

der Stokes Reibung ja nur positiv definiert war. Hierbei ist die Konstante $q > 0$ der Energiezufluss von einem externen Energiereservoir zum internen Energiespeicher des Teilchens. Der Parameter $c > 0$ beschreibt die interne Dissipation, $d > 0$ steuert die Umwandlung der internen zu kinetischer Energie. Mit Definition von neuen Kontrollparametern können wir die Reibungsfunktion $\tilde{\gamma}(v')$ umschreiben zu [14, 27]

$$\tilde{\gamma}(v') = \gamma \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{v'^2 + \beta} \right) = \gamma \frac{v'^2 - \alpha}{v'^2 + \beta} \quad (324)$$

$$\alpha = \frac{q}{\gamma} - \beta ; \quad \beta = \frac{c}{d}. \quad (325)$$

Wir haben die Reibungsfunktion aus der Gleichung (324) in der Abbildung 57 dargestellt.

Den Driftterm für das Modell mit der Reibungsfunktion von aktiven Brownschen Teilchen erhalten wir durch Einsetzen der Reibungsfunktion $\tilde{\gamma}(v')$ aus der Gleichung (324) in die Gleichung (318). Wir wollen explizit darauf hinweisen, dass α die Rolle eines Bifurkationsparameters übernimmt [14]. Bei Werten von $\alpha \leq 0$ gibt es bei dem Driftterm nur eine Nullstelle bei $v' = 0$, wobei dieser Punkt stabil ist. Darüber hinaus nimmt die Reibungsfunktion $\tilde{\gamma}(v')$ nur positive Werte an, d. h. es erfolgt keine Energiezufluss auf das Teilchen durch Umwandlung der inneren Energie in kinetische Energie. Dies wird auch ersichtlich, wenn wir beachten, dass α bei $\beta > q/\gamma$ negativ ist. Der Parameter β selber ist groß bei Gültigkeit der Relation $c > d$, wobei c die interne Dissipation kennzeichnete.

Bei positiven Werten von α können wir drei Nullstellen für v' errechnen. Wir erhalten somit den instabilen Punkt bei $v' = 0$ und die beiden stabilen Punkte bei $v' = \pm\sqrt{\alpha}$. Ein Vorteil dieser Formulierung für die Reibungsfunktion liegt damit auch in ihrer Bistabilität bezüglich v .

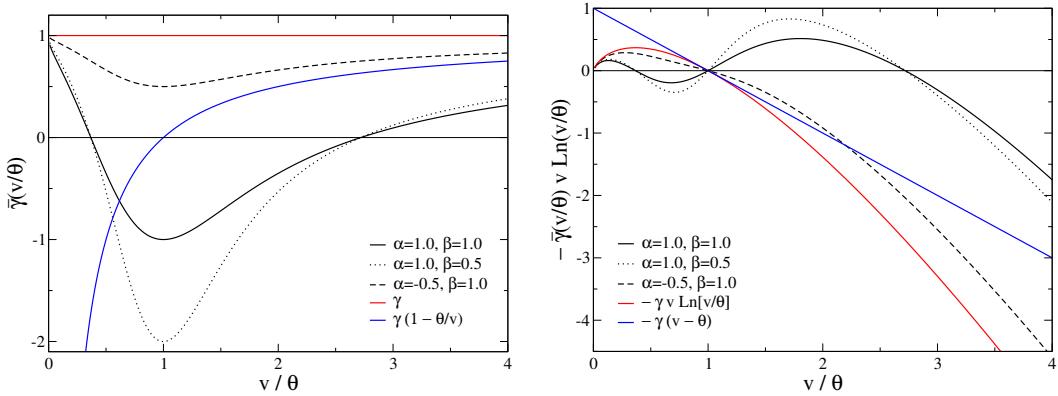


Abbildung 58: LINKS: Darstellung der Reibungsfunktion $\bar{\gamma}(v)$ aus der Gleichung (329) für verschiedene Parameter und im Vergleich zu der Stokes Reibung γ und der Reibung $\gamma(1 - \theta/v)$. RECHTS: Darstellung des Driftterms aus der Gleichung (327) und der Reibungsfunktion $\bar{\gamma}(v)$ der Gleichung (329) gegenüber der transformierten Stokes Reibung und der Reibung $\gamma(\theta - v)$.

Die Driftterme für die drei verschiedenen Reibungsfunktionen (Gleichungen (319), (321) und (324)) haben wir in der Abbildung 57 dargestellt.

5.4.1 Die Transformation auf einen positiven Definitionsbereich

Wir wollen die Reibungsfunktion, beschrieben durch die Gleichung (324), auch auf den Aktienmarkt anwenden. Da dort aber die Geschwindigkeit v der Varianz bzw. der Volatilität entspricht, haben wir nur einen positiven Definitionsbereich. Würden wir die Reibungsfunktion direkt ohne Transformationen übernehmen, hätten wir in v keine Bistabilität mehr. In dem Abschnitt 5.1 haben wir die in der Physik bekannte Stokes Reibung transformiert, und zwar mit der bekannten Beziehung

$$v' = \ln [v/\theta], \quad (326)$$

mit der positiven Konstanten θ . Für die Stokes Reibung (Gleichung (319) in die Gleichung (318) eingesetzt) erhalten wir

$$dv = \bar{\gamma}(v) v \ln [v/\theta] \quad (327)$$

$$\bar{\gamma}(v) = \gamma. \quad (328)$$

Um die Bistabilität der Reibungsfunktion $\bar{\gamma}(v')$ auch in v zu gewährleisten, wählen wir wieder die Transformationsbeziehung (326). Wir erhalten somit die Reibungsfunktion $\bar{\gamma}(v')$ zu

$$\bar{\gamma}(v) = \gamma \frac{(\ln [v/\theta])^2 - \alpha}{(\ln [v/\theta])^2 + \beta}. \quad (329)$$

Bei Einsetzen der Reibungsfunktion (329) in die Gleichung (327) entsteht der neue Driftterm für die Bewegungsgleichung der Varianz v . Die so erhaltene transformierte Reibungsfunktion haben wir im Vergleich zu der Stokes Reibung und der Reibungsfunktion aus der Gleichung (321) in der Abbildung 58 dargestellt.

5.4.2 Die stochastische Differentialgleichung

Wir haben bisher die neue Reibungsfunktion aus [14, 27, 32, 100] eingeführt und bekannten Reibungstermen gegenübergestellt. Des Weiteren wurde der Definitionsbereich auf nur positive Werte der Varianz v transformiert. Wir wollen den so erhaltenen deterministischen Term der Bewegungsgleichung für v in eine stochastische Differentialgleichung einbetten. Dafür wählen wir den stochastischen Term oder Fluktuationsterm des Hull-White Modells. Dabei entwickelt sich die Fluktuationssstärke linear in der Volatilität v . Wir ermitteln so die stochastische Differentialgleichung in Itô Notation für das abgeleitete Modell

$$dv = -\gamma \frac{(\ln[v/\theta])^2 - \alpha}{(\ln[v/\theta])^2 + \beta} v \ln[v/\theta] dt + \sqrt{2D} v dW_v, \quad (330)$$

mit der Diffusionskonstanten D . In den vorherigen Abschnitten der Aktienkursdynamik haben wir für verschiedene Modelle mit stochastischer Varianz v eine Kurzzeitlösung errechnet. Wir benötigen hierfür die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Volatilität v . Nachfolgend wollen wir diese stationäre Lösung für das abgeleitete Modell errechnen.

Wir können die Dynamik der Varianz v auch mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(v, t)$ und der Fokker-Planck Gleichung erfassen. Wir erhalten auf Basis der Gleichung (330) folgende Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Dichteverteilung (siehe Gleichungen (10) bis (13))

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(v, t) + \frac{\partial}{\partial v} S(v, t) \quad (331)$$

$$S(v, t) = -\gamma \frac{(\ln[v/\theta])^2 - \alpha}{(\ln[v/\theta])^2 + \beta} v \ln[v/\theta] p(v, t) - D \frac{\partial}{\partial v} [v^2 p(v, t)]. \quad (332)$$

Die stationäre Lösung $p_{st}^{AP}(v)$ errechnen wir wieder durch Nullsetzen des Wahrscheinlichkeitsdichteflusses $S(v, t)$. Demgemäß ermitteln wir folgenden Ausdruck

$$p_{st}^{AP}(v) = C_0 v^{-2} [(\ln[v/\theta])^2 + \beta]^{\gamma(\alpha+\beta)/2D} \exp\left[-\frac{\gamma}{2D} (\ln[v/\theta])^2\right], \quad (333)$$

mit der Normierungskonstanten C_0 . In der Abbildung 59 haben wir die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für die Volatilität v mit verschiedenen Parameterkombinationen dargestellt.

5.4.3 Die Anwendung auf die Aktienkursdynamik

Die zuvor behandelten verschiedenen Reibungsfunktionen wollen wir nun auf den Aktienmarkt beziehen. In dem Abschnitt 5.1 haben wir bereits die transformierte Stokes Reibung angewandt. Die andere bekannte Reibungsfunktion tauchte bereits in vielen Aktienkursmodellen auf, u. a. in den Heston und Hull-White Modellen. Wir konzentrieren uns daher im Folgenden ausschließlich auf das abgeleitete Modell mit dem deterministischen Term in Analogie zu den aktiven Brownschen Teilchen. Daher definieren wir zunächst unser Gleichungssystem aus stochastischen Differentialgleichungen in Itô

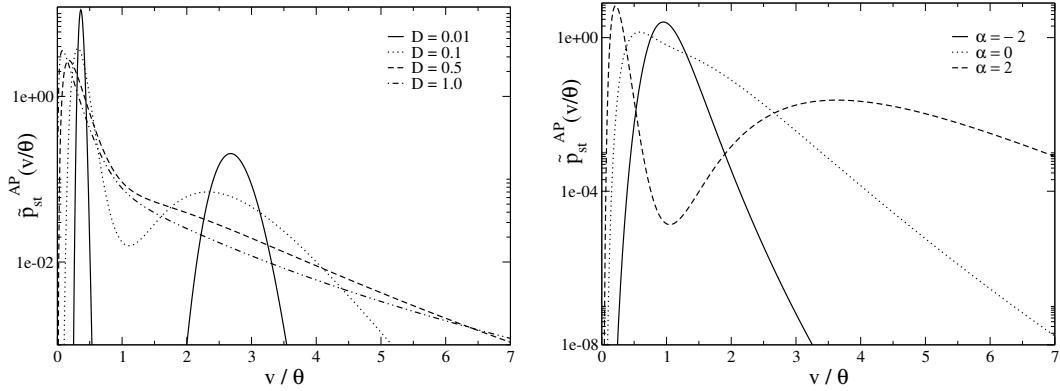


Abbildung 59: Darstellung der stationären Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{st}^{AP}(v)$ aus der Gleichung (333) für die dimensionslose Varianz v/θ . Links für verschiedene Fluktuationskonstanten D und rechts für verschiedene Parameter α . (Auf die Angabe der Einheiten wurde verzichtet.)

Notation wie folgt

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} v \right) dt + \sqrt{v} dW_k \quad (334)$$

$$dv = -\gamma \frac{(\ln[v/\theta])^2 - \alpha}{(\ln[v/\theta])^2 + \beta} v \ln[v/\theta] dt + \sqrt{2D} v dW_v, \quad (335)$$

mit dem logarithmierten Aktienkurs $x(t) = \ln[k(t)/k_0]$, dem Parameter μ und der Bewegungsgleichung für die Volatilität v in Übereinstimmung mit der Gleichung (330). Wie insbesondere aus dem vorherigen Abschnitt 4 bekannt, können wir für die logarithmierten Änderungen y und für kurze Zeiten τ die Kurzzeitlösung folgendermaßen angeben (siehe Gleichungen (220) und (223))

$$p_s^{AP}(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p_{st}^{AP}(v) \quad (336)$$

$$p(y, \tau | v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v \tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + \frac{1}{2} v \tau)^2}{v \tau} \right], \quad (337)$$

mit der Wahrscheinlichkeit $p_s^{AP}(y, \tau) dy$, dass wir die logarithmierte Aktienkursänderung y bei dem Zeitfenster τ beobachten. Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_{st}^{AP}(v)$ der Varianz v ist modellabhängig. Wir verwenden jetzt die im vorherigen Abschnitt errechnete Dichteverteilung (333). Wir erhalten somit das relevante Integral zu

$$p_s^{AP}(y, \tau) = \int_0^\infty dv p(y, \tau | v) p_{st}^{AP}(v) \quad (338)$$

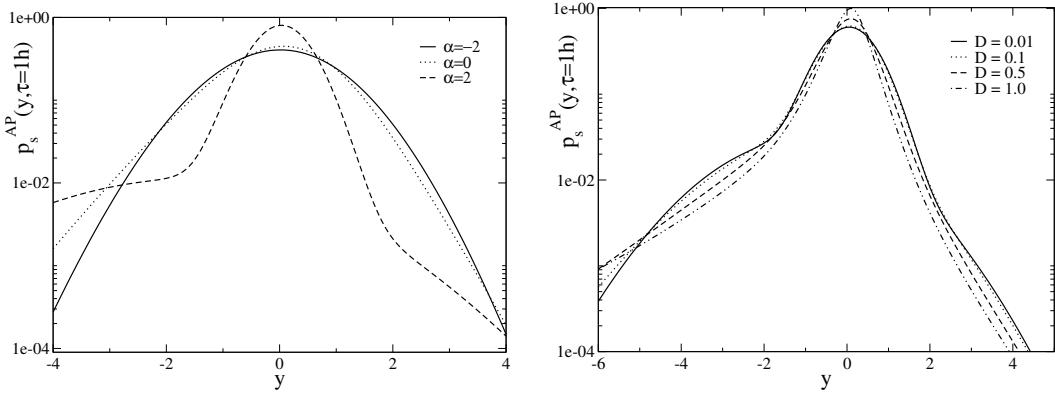


Abbildung 60: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p_s^{AP}(y, \tau)$ aus der Gleichung (338) für die logarithmierten Änderungen y bei einem Zeitfenster von $\tau = 1$ h für verschiedene Parameter α (links) und D (rechts). (Auf die Angabe der Einheiten wurde verzichtet.)

$$p(y, \tau | v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v \tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + \frac{1}{2} v \tau)^2}{v \tau} \right] \quad (339)$$

$$p_{st}^{AP}(v) = C_0 v^{-2} [(\ln[v/\theta])^2 + \beta]^{\gamma(\alpha+\beta)/2D} \exp \left[-\frac{\gamma}{2D} (\ln[v/\theta])^2 \right]. \quad (340)$$

Da wir bei der stationären Lösung für die Varianz v die Integrationskonstante C_0 nicht weiter analytisch darstellen konnten, können wir auch hier das Integral analytisch nicht ermitteln. Wir haben in der Abbildung 60 das Integral (338) für ausgewählte Parameter dargestellt. Das Integral selber haben wir numerisch unter Verwendung des Simpson Algorithmus errechnet [86] (siehe Anhang D). Es ist sehr gut zu erkennen, dass sich die Bistabilität in der stationären Lösung von v bei $\mu > 0$ auch in der Kurzzeitlösung widerspiegelt. Die Asymmetrie vor allem zur rechten Seite kommt zustande, da bei zunehmender Varianz v (hin zum zweiten stabilen Wert von v) der Mittelwert der Verteilung $p(y, \tau | v)$ kleiner wird.

Im Folgenden wollen wir die Kurzzeitlösung des neuen Modells für aktive Brown-sche Teilchen an empirische Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der logarithmierten Aktienkursänderung y für das Zeitfenster $\tau = 1$ h anpassen. Wir reduzieren hierfür die Anzahl der Parameter von 6 auf 5. Wir definieren daher für die Reduktion die Relation mit

$$b = \frac{\gamma}{2D}. \quad (341)$$

Über die Bestimmung dieses „reduzierten“ Parameter verzichten wir auf die einzelne Bestimmung der Parameter γ und D . Bei der Anpassung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen können wir nur deren Relation ermitteln, nicht jedoch deren absoluten Werte.

In der Abbildung 61 haben wir die besten erzielten Anpassungen für die beiden Aktien Adidas-Salomon AG und DaimlerChrysler AG dargestellt. Wir erkennen deutlich die sehr gute Übereinstimmung mit der DaimlerChrysler AG, mit einer hohen Anpassungsgüte. Demgegenüber ist die Anpassung an die Adidas-Salomon AG nicht sehr

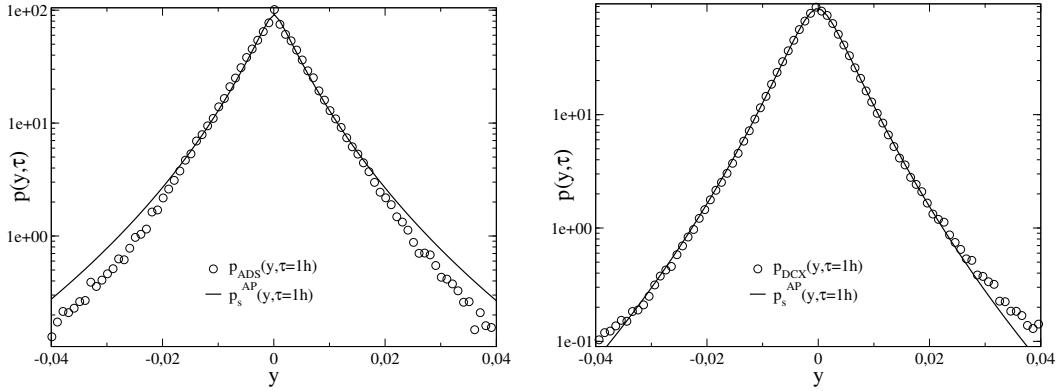


Abbildung 61: LINKS: Vergleich der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{ADS}(y, \tau)$ der Adidas-Salomon AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) mit der Kurzzeitlösung $p_s^{AP}(y, \tau)$ des Modells der aktiven Brownschen Teilchen für $\tau = 1$ h. Die Anpassungsgüte beträgt $\chi^2 = 232.3$ und die Parameter sind $\theta = 2.33 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$, $\alpha = -2.48 \cdot 10^{17}$, $\beta = 99.26$, $b = 1.13 \cdot 10^{-16}$ und $\mu = 4.00 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$. RECHTS: Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{DCX}(y, \tau)$ der DaimlerChrysler AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) und der Kurzzeitlösung $p_s^{AP}(y, \tau)$ des Modells der aktiven Brownschen Teilchen für $\tau = 1$ h. Die Güte der Anpassung ist $\chi^2 = 17.53$ und die Parameter sind $\theta = 8.64 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $\alpha = -246.05$, $\beta = 99.30$, $b = 0.19$ und $\mu = -1.02 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$.

gut. Wir haben in den vorherigen Abschnitten bereits Modelle betrachtet, die hier eine deutlich bessere Annäherung erzielen. Wir können feststellen, dass bei beiden Anpassungen der Parameter α als Bifurkationsparameter negativ ist. D. h. die empirische Verteilung in der Volatilität v ist monostabil bzw. eingipflig. Dies ist auch deutlich im Verlauf der Dichtevertteilung für die Aktienkursänderungen y zu sehen (vergleiche mit Abbildung 60).

Abschließend lässt sich beurteilen, dass das hier betrachtete Modell der aktiven Brownschen Teilchen keinen signifikanten Vorteil gegenüber den zuvor behandelten Modellen aufweist. Zwar ist die Anpassungsgüte bei der DaimlerChrysler AG sehr gut, jedoch haben wir dafür auch 2 Modellparameter mehr. Des Weiteren kann zumindest mit den von uns durchgeführten Anpassungstests an empirische Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilungen der logarithmierten Aktienkursänderungen y eine Bistabilität in der Varianz v nicht bestätigt werden.

5.5 Die Anpassung an die standardisierten Änderungen

In der Literatur werden oft anstelle der logarithmierten Änderungen y die standardisierten Änderungen s verwendet. Wir definieren diese Änderungen als

$$s = \frac{y - \langle y \rangle}{\sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}}. \quad (342)$$

D. h. die logarithmierten Änderungen werden standardisiert, in dem wir die von der Normalverteilung her bekannte Transformation benutzen. Wir erhalten durch den Ab-

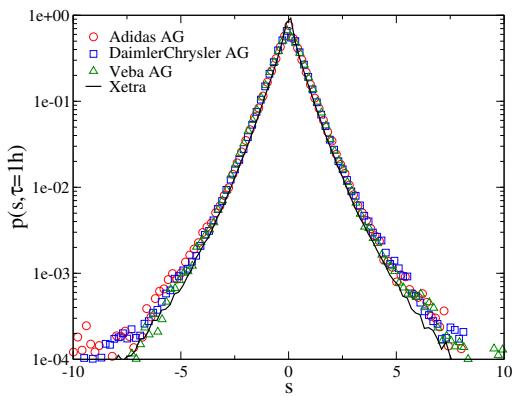


Abbildung 62: Vergleichende Darstellung der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen s des Aktienkurses. Die Verteilungen der Adidas-Salomon AG, DaimlerChrysler AG, Veba AG und der Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h sind abgebildet.

zug des Mittelwertes einen neuen Mittelwert von null und durch Division durch die Standardabweichung eine neue Varianz von eins der standardisierten Änderungen.

In der Abbildung 62 haben wir eine empirische Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ermittelt. Hierfür haben wir die Änderungen aller Aktien, aus denen sich der Dax Index in der Zeit vom 04.01.1999 bis zum 28.12.2001 zusammengesetzt hat, standardisiert. Anschließend haben wir die Verteilung dieser Änderungen zusammenfassend ermittelt. Wir erkennen aus der Abbildung 62, dass die ermittelte Verteilung aller Aktien gut mit den ausgewählten Verteilungen der Einzelaktien übereinstimmt.

Mit der standardisierten Dichteverteilung aller Aktien müssen wir aber vorsichtig umgehen. So kann es z. B. sein, dass wir die unterschiedliche Leptokurtosis (siehe Abschnitt 3.5) der Einzelverteilungen nicht vollständig harmonisieren. Dadurch würden wir verschiedenartige Verteilungen zusammenfassen. Dies würde aber der Voraussetzung der Ensemblemittelung widersprechen, die gleiche Charakteristika der Ensemblemitglieder fordert (Details siehe Abschnitt 3.2). Bei der hier vorgenommenen Mittelung über alle Aktien unterstellen wir, dass wir gleichartige Aktien zusammenfassen. Dies stellen wir sicher, indem wir nur deutsche Werte des Dax Index miteinbeziehen. Da sie den Anforderungen des Dax Index genügen, unterstellen wir eine ähnliche Leptokurtosis dieser umsatz- und kapitalstarken Aktiengesellschaften.

Die unterschiedlichen Skalen der logarithmierten Änderungen y vereinheitlichen wir durch die Anwendung der Standardisierung. Die standardisierten Änderungen umfassen eine einheitliche Skala (Mittelwert, Varianz) und können zusammengefasst werden. Wir haben zum Vergleich in der Abbildung 63 die Verteilung der logarithmierten Änderungen y und der standardisierten s für das Zeitfenster $\tau = 30$ min dargestellt.

Wir passen jetzt die theoretischen Kurzzeitlösungen der ermittelten Modelle an die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen s des Aktienkurses an. Um diese Änderungen an die theoretischen Verteilungen anzupassen, müssen wir den Mittelwert $\langle y \rangle$ und die Varianz $\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$ der

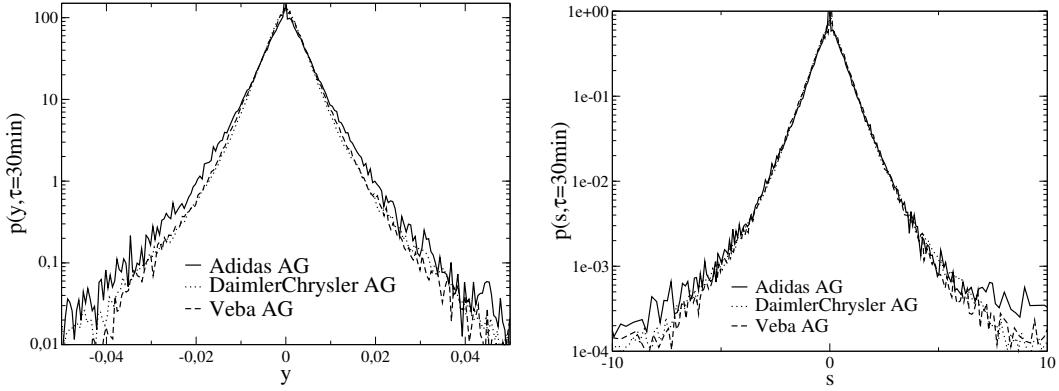


Abbildung 63: Darstellung der empirischen WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der logarithmierten Änderungen y (links) und der standardisierten logarithmierten Änderungen s (rechts). Die Verteilungen wurden aus den Änderungen der Adidas-Salomon AG, DaimlerChrysler AG und der Veba AG (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 30$ min ermittelt.

theoretischen Verteilung ermitteln. Aufgrund der von uns gewählten Integralformulierung zur Ermittlung der Kurzzeitlösung definieren wir die Größen wie folgt

$$\langle y \rangle = \mu \tau - 0.5 \tau \int_0^\infty dv v p_{st}(v) \quad (343)$$

$$\langle y \rangle = \mu \tau - 0.5 \tau \theta \quad (344)$$

$$\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \tau \int_0^\infty dv v p_{st}(v) \quad (345)$$

$$\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \tau \theta. \quad (346)$$

Somit erhalten wir die standardisierten Änderungen als

$$s = \frac{y - (\mu \tau - 0.5 \theta \tau)}{\sqrt{\theta \tau}} \quad (347)$$

$$s = \frac{z + 0.5 \theta \tau}{\sqrt{\theta \tau}} \quad (348)$$

$$z = y - \mu \tau. \quad (349)$$

Um nun die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der standardisierten Änderungen s zu errechnen, definieren wir

$$\tilde{p}_s(s, \tau) ds = p(y, \tau) dy \quad (350)$$

$$\tilde{p}_s(s, \tau) = p(y, \tau) \frac{dy}{ds} \quad (351)$$

$$\tilde{p}_s(s, \tau) = p(\sqrt{\theta \tau} s - 0.5 \theta \tau, \tau) \sqrt{\theta \tau}. \quad (352)$$

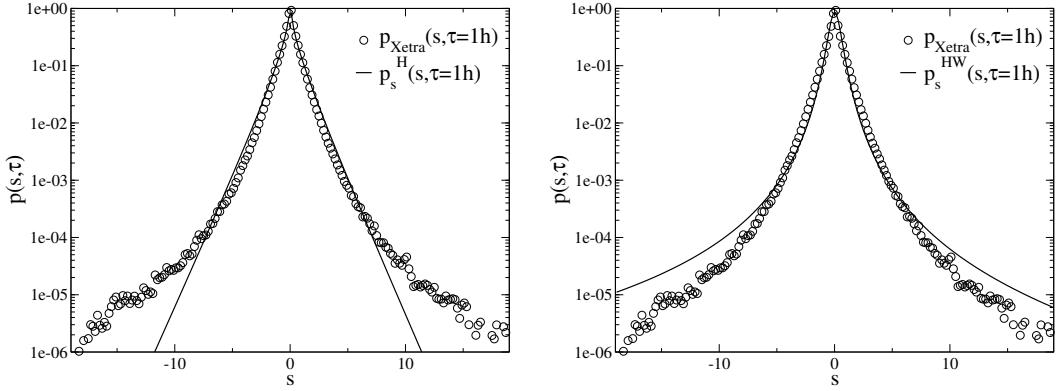


Abbildung 64: LINKS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen des Aktienkurses s des Heston Modells $\tilde{p}_s^H(s, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{Xetra}(s, \tau)$ für die Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 0.0292$, $a = 0.512$ und $\theta = 0.00114 \text{ h}^{-1}$ dargestellt. RECHTS: Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen des Aktienkurses s des Hull-White Modells $\tilde{p}_s^{HW}(s, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $p_{Xetra}(s, \tau)$ für die Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 0.0541$, $a = 0.208$, $\theta = 0.00103 \text{ h}^{-1}$ dargestellt.

Mit Hilfe der Formulierung aus der Gleichung (352) können wir die aus den empirischen Daten ermittelte Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $\tilde{p}_s(s, \tau)$ an die theoretische Kurzzeitlösung $p_s(y, \tau)$ anpassen. Wir müssen nur zwei Parameter schätzen, die Relation a und den Varianzmittelwert θ .

In den Abbildung 64 bis 66 haben wir die empirische Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung aller im Dax enthaltenen Aktien (von 1999 bis 2001) für den Xetra Handel mit den Dichtevertteilungen der Modelle verglichen (bis auf das Modell der aktiven Brown-schen Teilchen). Bei allen Modellen sehen wir die bekannte Anpassungsgüte wie bei den Einzelaktien. Wir können jedoch feststellen, dass die charakteristischen Unterschiede zwischen der empirischen Dichtevertteilung und denen der Modelle besser zu erkennen sind. Die Enden der empirischen Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung werden abhängig vom Modell unter- oder überschätzt. Das Kombinationsmodell passt sich gemessen am Chi-Quadrat Wert am besten der empirischen Verteilung an, gefolgt vom adaptierten Heston Modell und dem Heston Modell. D. h. die Modelle, die nicht dem Heston Modell ähneln, weisen tendenziell eine schlechtere Anpassungsgüte auf. Die Gründe hierfür sind aber verschieden. Das Hull-White Modell erreicht nicht die Höhe der empirischen Dichtevertteilung. Die Log-Normal Modelle treffen die Wahrscheinlichkeitsdichte der Enden nicht sehr gut. Die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilungen des Hull-White Modells und des Kombinationsmodells haben den gleichen Verlauf wie die empirische Verteilung (wellenartig in den Änderungen y). Sie treffen aber trotzdem nicht das richtige Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von betragsmäßig kleinen Änderungen (Höhe der Verteilung) zu betragsmäßig großen Änderungen (Enden der Verteilung).

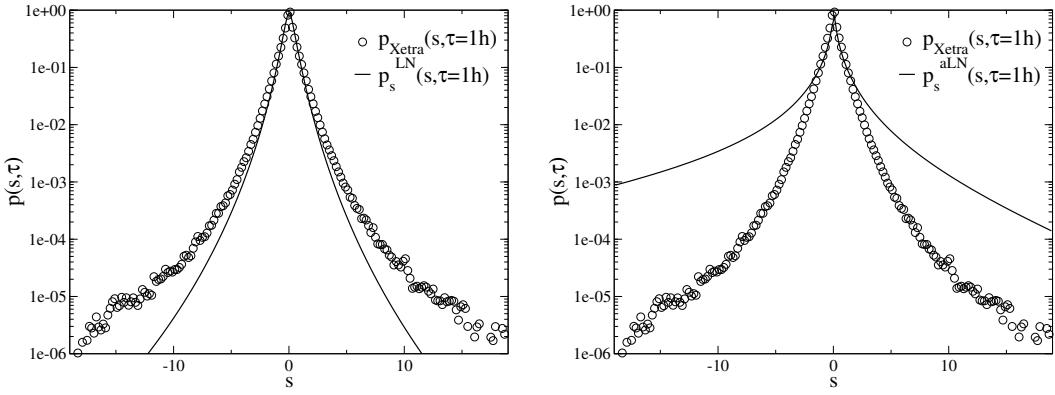


Abbildung 65: LINKS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen des Aktienkurses s des Log-Normal Modells $\tilde{p}_s^{LN}(s, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung $p_{Xetra}(s, \tau)$ für die Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 0.0314$, $a = 0.741$ und $\theta = 0.00156$ h^{-1} dargestellt. RECHTS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen des Aktienkurses s des adaptierten Log-Normal Modells $\tilde{p}_s^{aLN}(s, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung $p_{Xetra}(s, \tau)$ für die Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 0.1714$, $a = 0.144$, $\theta = 0.00963$ h^{-1} dargestellt.

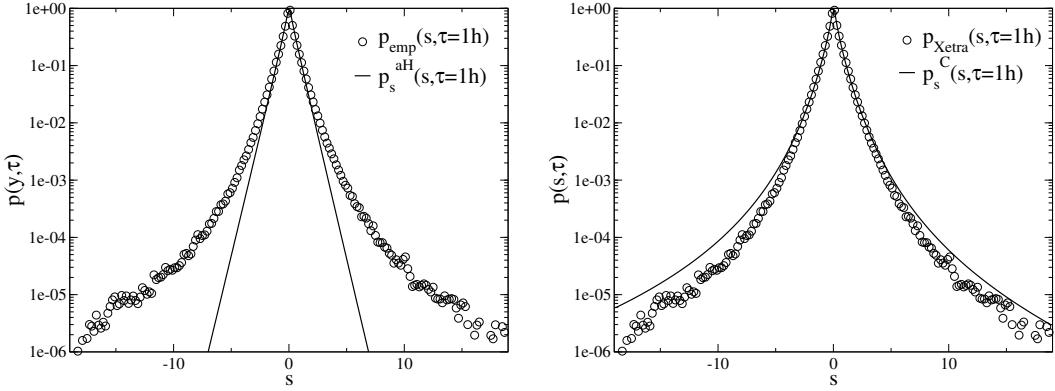


Abbildung 66: LINKS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen des Aktienkurses s des adaptierten Heston Modells $\tilde{p}_s^{aH}(s, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung $p_{Xetra}(s, \tau)$ für die Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 0.0101$, $a = 1.858$ und $\theta = 0.00152$ h^{-1} dargestellt. RECHTS: Die WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung der standardisierten logarithmierten Änderungen des Aktienkurses s des Kombinationsmodells $\tilde{p}_s^C(s, \tau)$ ist gegenüber der ermittelten WahrscheinlichkeitsdichteVerteilung $p_{Xetra}(s, \tau)$ für die Aktien des Dax Index (Xetra Handel, 04.01.1999 – 28.12.2001) für das Zeitfenster $\tau = 1$ h mit $\chi^2 = 0.00194$, $a = 0.748$, $\theta = 0.00138$ h^{-1} dargestellt.

6 Die Zusammenfassung und der Ausblick

Wir betrachteten in unserer Arbeit verschiedene stochastische Prozesse in der Physik und auf dem Aktienmarkt. Wir haben für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess (inklusive linearem Potenzial) die Wahrscheinlichkeit $p(x, v, t) dx dv$, dass wir ein Teilchen am Ort $[x, x + dx]$ mit der Geschwindigkeit $[v, v + dv]$ zum Zeitpunkt t antreffen, mit Hilfe der Lösungsmethode in [25] gelöst. Wir zeigten die Übereinstimmung mit der Lösung in [12, 13] (siehe Abschnitt 2.2 und Anhang C). Diese Lösungsmethode haben wir auf die zeitintegrierte Varianz v des Heston Modells angewandt und die Lösung im Laplaceraum erhalten (siehe Anhang A).

In dem Abschnitt 3 stellten wir unsere Datenbank dar und führten die grundlegenden Merkmale auf. Wir haben die Dynamik des Aktienkurses mit Hilfe der einzeitigen und zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen verdeutlicht. Wir leiteten her, warum am Aktienmarkt die logarithmierten Änderungen des Aktienkurses anstelle des Preises selber betrachtet werden. Wir fassten die in bisherigen Studien ermittelten empirischen Merkmale der Aktienkursdaten zusammen. Dabei zeigten wir ausgewählte Eigenschaften beispielhaft an unseren Daten. Darüber hinaus haben wir quantitativ nachgewiesen, dass die Gültigkeit der Markov Eigenschaft bei den Aktienpreisänderungen nicht abgelehnt werden kann.

In den Abschnitten 4 und 5 haben wir Modelle mit stochastischer Volatilität analysiert. Da die Volatilität am Aktienmarkt nicht handelbar und messbar ist, fokussierten wir uns auf die Änderungen des Aktienpreises. Wir wollten feststellen, inwieweit die Modelle die empirische Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der logarithmierten Änderungen des Aktienkurses richtig widerspiegeln. Wir nutzten dabei als Zeitreihen die von der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank [57] gelieferten Hochfrequenzdaten deutscher Aktien.

Wir entwickelten eine Lösungsmöglichkeit für kurze Zeitfenster τ (in Analogie zu [25]). Diese Methode wendeten wir sowohl auf das Heston als auch auf das Hull-White Modell an. Die erhaltenen Kurzzeitlösungen haben wir dann mit den empirisch ermittelten Dichteverteilungen verglichen. Wir stellten die Gemeinsamkeiten und Unterschiede heraus. Wir verglichen die Modelle auch mit der Dichteverteilung von standardisierten Änderungen, die wir aus mehreren Aktien zusammengefasst haben. Es zeigt sich, dass hier die gleichen Unterschiede und Gemeinsamkeiten bestehen, jedoch stärker hervortreten.

Um die festgestellten Nachteile der beiden bekannten Modelle zu beheben, transformierten wir in der Physik bekannte Modelle oder Funktionen auf den Aktienmarkt. Dabei beachteten wir sowohl die Begrenzung des Definitionsbereichs als auch den Erhalt des Modelltypischen (z. B. Bistabilität des Modells für aktive Brownsche Teilchen). Darüber hinaus haben wir die beiden bekannten Modelle kombiniert, indem wir nur die Vorteile der jeweiligen Variante ausnutzten. Dieses Kombinationsmodell zeigte bei dem Vergleich mit bestimmten empirischen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen eine höhere Anpassungsgüte.

In unserer Arbeit haben wir uns vor allem auf die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung und deren korrekte Nachbildung konzentriert. Künftig könnte noch untersucht werden, inwieweit die Modelle auch die anderen empirischen Merkmale der Daten richtig wiedergeben.

Desweiteren ist das Kombinationsmodell kein ideales Modell, welches die verschiedenen empirisch validierten Eigenschaften der Zeitreihen vollständig und richtig abbildet. Wir können künftig auch erweiterte Modellvarianten analysieren. So könnten wir den Einfluss der Anzahl an ausgeführten Transaktionen innerhalb eines Zeitintervalls τ untersuchen und entsprechende Modellierungsvarianten miteinbeziehen. Desweiteren ist zu prüfen, inwieweit eine variable Relaxationszeit $1/\gamma$ eine bessere Übereinstimmung mit empirischen Daten erzielt. So ist bei konstanter Relaxationszeit die Autokorrelation der Varianz exponentiell abfallend, während sie bei dem Einbezug verschiedener Relaxationen nach einem Potenzgesetz abfällt. Dies würde dann mit der empirisch festgestellten Autokorrelation der Volatilität einhergehen.

Darüber hinaus sei anzumerken, dass wir die Korrelation zwischen der Kurs- und der Varianzentwicklung auf Null gesetzt haben. Es ist konkreter zu prüfen, inwieweit die Aufhebung dieser Einschränkung dem empirischen Hebeleffekt (Leverage Effekt, siehe Abschnitt 3.5) gerecht wird.

Abschließend wollen wir erwähnen, dass der Umfang an aufgezeichneten Hochfrequenzdaten mit zunehmender Kalenderzeit enorm zunimmt. Somit sind künftig auch für die großen Zeitfenster τ und die betragsmäßig großen Änderungen y statistisch valide Aussagen möglich.

A Die Integration der Volatilität des Heston Modells über die Zeit

Wie wir in dem Abschnitt 4.5 dargestellt haben, wurde das Heston Modell in [25] analytisch gelöst. Die ermittelte zeitabhängige Lösung liegt im Fourieraum des logarithmierten Aktienkurses x vor. Eine Rücktransformation ist jedoch nicht möglich. Deshalb wollen wir einen anderen Ansatz wählen. Wir kennen bereits für kurze Zeiten τ die Integralrelation aus der Gleichung (220). Diese gilt, solange wir v als konstant in dem kurzen Zeitfenster τ betrachten können. Können wir das Integral der Volatilität v über die Zeit τ nicht mehr linear approximieren, so ist dessen genaue Kenntnis für eine gültige Lösung notwendig. D. h. wir können die Integralrelation (220) für kurze Zeiten umformulieren zu einer Relation, die bei jeder beliebigen Zeit τ gilt, mit

$$p(y, \tau) = \int_0^{+\infty} da p(y, \tau | a) p(a, \tau) \quad (353)$$

$$p(y, \tau | a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - \mu \tau + 0.5 a)^2}{a} \right] \quad (354)$$

$$a = \int_0^\tau v(t') dt'. \quad (355)$$

D. h. bei Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(a, \tau)$ der zeitintegrierten Volatilität a ist evtl. eine analytische Lösung des Heston Modells möglich. Wir erhalten zur Beschreibung der Dynamik der zeitintegrierten Volatilität a folgendes stochastische Differentialgleichungssystem als Langevin Gleichungen in Itô Notation

$$da = v dt \quad (356)$$

$$dv = \gamma(\theta - v) dt + \kappa \sqrt{v} dW(t). \quad (357)$$

Bei Überführung des obigen Gleichungssystems in die äquivalente Fokker-Planck Gleichung ergibt sich für die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p = p(a, v, t | v_i)$ mit den Anfangsbedingungen $v(t=0) = v_i$ und $a(t=0) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -v \frac{\partial}{\partial a} p - \frac{\partial}{\partial v} (\gamma(\theta - v) p) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\kappa^2}{2} v p \right) \quad (358)$$

$$p(a, v, 0 | v_i) = \delta_a \delta_{v-v_i}. \quad (359)$$

Detailliert lautet die Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -v \frac{\partial}{\partial a} p - \gamma \theta \frac{\partial}{\partial v} p + \gamma \frac{\partial}{\partial v} (v p) + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (v p). \quad (360)$$

Für die vorliegende Problemstellung definieren wir die nachfolgenden Randbedingungen

$$p(a, 0, t | v_i) = 0 \quad (361)$$

$$p(0, v, t | v_i) = \delta_{v-v_i} \delta_t. \quad (362)$$

Um die aufgestellte Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(a, v, t)$ zu lösen, transformieren wir die zeitintegrierte Fluktuation a zu ihrem Laplace Äquivalent α mit

$$\bar{p}(\alpha, v, t | v_i) = \int_0^\infty da \exp[-\alpha a] p(a, v, t | v_i) \quad (363)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} p = \alpha \bar{p} - \delta_{v-v_i} \delta_t. \quad (364)$$

Wir errechnen für die Verteilung $\bar{p}(\alpha, v, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{p} = -\alpha v \bar{p} - \gamma \theta \frac{\partial}{\partial v} \bar{p} + \gamma \frac{\partial}{\partial v} (v \bar{p}) + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (v \bar{p}) + v \delta_{v-v_i} \delta_t. \quad (365)$$

Wir führen ebenfalls eine Laplace Transformation bezüglich v aus, mit den Beziehungen

$$\tilde{p}(\alpha, \beta, t | v_i) = \int_0^\infty dv \exp[-\beta v] \bar{p}(\alpha, v, t | v_i) \quad (366)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial v^n} (v \bar{p}) = -\beta^n \frac{\partial}{\partial \beta} \tilde{p} \quad (367)$$

$$v_i \exp[-\beta v_i] \delta_t = \int_0^\infty dv \exp[-\beta v] v \delta_{v-v_i} \delta_t. \quad (368)$$

Die zu lösende Gleichung (365) ergibt sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} + \left(\frac{\kappa^2}{2} \beta^2 + \gamma \beta - \alpha \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \tilde{p} = v_i \exp[-\beta v_i] \delta_t - \gamma \theta \beta \tilde{p}. \quad (369)$$

Die obige Gleichung ist als Cauchy Problem sehr gut bekannt. Daher erhalten wir folgendes charakteristisches Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\beta} = \frac{\kappa^2}{2} \bar{\beta}^2 + \gamma \bar{\beta} - \alpha \quad (370)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} = v_i \exp[-\bar{\beta} v_i] \delta_t - \gamma \theta \bar{\beta} \tilde{p}. \quad (371)$$

Die erste Gleichung (370) der Variablen $\bar{\beta}$ ist unabhängig von der zweiten Gleichung, so dass wir diese zuerst lösen wollen. Die Gleichung ist vom Riccati Typ und durch Variablentransformation lösbar. Hierfür benötigen wir eine spezielle Lösung, die wir mit $\bar{\beta}_{1,2}$ errechnen [111]

$$0 = \frac{\kappa^2}{2} \bar{\beta}^2 + \gamma \bar{\beta} - \alpha \quad (372)$$

$$\bar{\beta}_{1,2} = -\frac{\gamma}{\kappa^2} \pm \frac{b}{\kappa^2} \quad (373)$$

$$b = \sqrt{\gamma^2 + 2 \kappa^2 \alpha}. \quad (374)$$

Da wir nun eine spezielle Lösung haben, führen wir zur Lösung der Riccati Gleichung von $\bar{\beta}$ die folgende Variablentransformation durch [111]

$$\bar{\beta}(\tau) = \bar{\beta}_{1,2} + \frac{1}{y(\tau)} . \quad (375)$$

Für die neue Variable y erhalten wir folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\tau} y = -b y - \frac{\kappa^2}{2} . \quad (376)$$

Die obige lineare Differentialgleichung ist mit Hilfe des Propagator lösbar. Wir erhalten schließlich für $y(\tau)$ [111]

$$y(\tau) = \left(y_0 + \frac{\kappa^2}{2b} \right) \exp[-b\tau] - \frac{\kappa^2}{2b} . \quad (377)$$

Bei Einsetzen der Lösung (377) in die Gleichung (375) errechnen wir für $\bar{\beta}(\tau)$

$$\bar{\beta}(\tau) = \frac{b - \gamma}{\kappa^2} + \left[\left(y_0 + \frac{\kappa^2}{2b} \right) \exp[-b\tau] - \frac{\kappa^2}{2b} \right]^{-1} . \quad (378)$$

Bis jetzt haben wir die Konstante y_0 noch nicht spezifiziert. Daher fordern wir jetzt, dass $\bar{\beta}(\tau = t) = \beta$. Deshalb ermitteln wir

$$y_0 = \left[\frac{\kappa^2}{\kappa^2 \beta + \gamma - b} + \frac{\kappa^2}{2b} \right] \exp[b t] - \frac{\kappa^2}{2b} , \quad (379)$$

so dass sich für $\bar{\beta}(\tau)$ als Lösung der Gleichung (370)

$$\bar{\beta}(\tau) = \frac{b - \gamma}{\kappa^2} + \left[\left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2 \beta + \gamma - b} + \frac{\kappa^2}{2b} \right) \exp[b(t - \tau)] - \frac{\kappa^2}{2b} \right]^{-1} \quad (380)$$

ergibt. Die Gleichung (380) können wir jetzt zur Lösung der Differentialgleichung (371) nutzen. Wir erhalten als Ergebnis

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 \exp[-\gamma \theta (\bar{\Phi}(t) + \bar{\Phi}(0))] \quad (381)$$

$$+ \int_0^t \exp[-\gamma \theta (\bar{\Phi}(t) + \bar{\Phi}(0))] v_i \exp[-\bar{\beta}(\tau) v_i] \delta_\tau d\tau \quad (382)$$

$$\bar{\Phi}(t) = \int \bar{\beta}(\tau) d\tau \quad (383)$$

$$\tilde{p} = (\tilde{p}_0 + v_i \exp[-\bar{\beta}(0) v_i]) \exp[-\gamma \theta \Phi(t)] \quad (384)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \bar{\beta}(\tau) d\tau \quad (385)$$

$$\Phi(t) = \frac{b - \gamma}{\kappa^2} t + \frac{2}{\kappa^2} \ln[y_0] - \frac{2}{\kappa^2} \ln \left[\frac{\kappa^2}{\kappa^2 \beta + \gamma - b} \exp[b t] \right] . \quad (386)$$

Unsere Lösung für \tilde{p} liest sich wie folgt

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= [p_0 + v_i \exp[-\bar{\beta}(0) v_i]] \exp\left[-\gamma \theta t \left(\frac{b-\gamma}{\kappa^2}\right)\right] \\ &\quad \left[1 + \frac{\kappa^2 \beta + \gamma - b}{2b} (1 - \exp[-b t])\right].\end{aligned}\quad (387)$$

Bisher haben wir die Anfangsbedingung nicht beachtet. Aufgrund der Gleichung (359) lautet die Anfangsbedingung für \tilde{p}

$$\tilde{p} = \exp[-\bar{\beta}(0) v_i]. \quad (388)$$

Somit erhalten wir für die Konstante p_0

$$p_0 = (1 - v_i) \exp[-\bar{\beta}(0) v_i]. \quad (389)$$

Deshalb vereinfacht sich unsere Lösung (387) zu

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \exp[-\bar{\beta}(0) v_i] \exp\left[-\gamma \theta t \left(\frac{b-\gamma}{\kappa^2}\right)\right] \\ &\quad \left[1 + \frac{\kappa^2 \beta + \gamma - b}{2b} (1 - \exp[-b t])\right]^{-D}.\end{aligned}\quad (390)$$

Die obige Gleichung (390) beinhaltet ebenfalls die Anfangsbedingung der Varianz mit v_i . Die Anfangsvarianz v_i liegt mit folgender Wahrscheinlichkeit $p_s(v_i) dv_i$ vor

$$p_s(v_i) = \frac{D^D}{\Gamma(D) \theta^D} v^{D-1} \exp[-D v / \theta] \quad (391)$$

$$D = \frac{2\gamma\theta}{\kappa^2}. \quad (392)$$

Wir können daher die Anfangsbedingung v_i abintegrieren mit $\hat{p}(\alpha, \beta, t)$

$$\hat{p} = \int_0^\infty dv_i \tilde{p} p_s \quad (393)$$

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \left(\frac{D}{\theta}\right)^D \left(\bar{\beta}(0) + \frac{D}{\theta}\right)^{-D} \exp\left[-\gamma \theta t \left(\frac{b-\gamma}{\kappa^2}\right)\right] \\ &\quad \left[1 + \frac{\kappa^2 \beta + \gamma - b}{2b} (1 - \exp[-b t])\right]^{-D}.\end{aligned}\quad (394)$$

Für die Lösung des Heston Modells ist es nicht notwendig, dass wir die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(a, v, t)$ ermitteln. Uns genügt $p_a(a, t)$ und wir errechnen durch Integration über die Varianz v

$$\tilde{p}(\alpha, 0, t) = \int_0^\infty dv \bar{p}(\alpha, v, t) \quad (395)$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\alpha, 0, t) &= \left(\frac{D}{\theta}\right)^D \left(\bar{\beta}(0) + \frac{D}{\theta}\right)^{-D} \exp\left[-\gamma\theta t \left(\frac{b-\gamma}{\kappa^2}\right)\right] \\ &\quad \left[1 + \frac{\gamma-b}{2b} (1 - \exp[-bt])\right]^{-D}\end{aligned}\tag{396}$$

$$\bar{\beta}(0) = \frac{b-\gamma}{\kappa^2} + \left[\left(\frac{\kappa^2}{\gamma-b} + \frac{\kappa^2}{2b}\right) \exp[b t] - \frac{\kappa^2}{2b}\right]^{-1}\tag{397}$$

$$b = \sqrt{\gamma^2 + 2\kappa^2\alpha}\tag{398}$$

$$P(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[(\sigma + i\tau)a] \tilde{p}(\sigma + i\tau, 0, t) d\tau,\tag{399}$$

wobei σ eine beliebige Konstante darstellt. Die Lösung $\tilde{p}(\alpha, 0, t)$ im Laplaceraum ist zu folgendem Ausdruck transformierbar

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\alpha, 0, t) &= (2\gamma)^D \exp[D t / 2] b^{-2-D} \exp[-(D+1)b t / 2] \\ &\quad \frac{(b^2 \cosh[b t / 2] + b\gamma \sinh[b t / 2])^{D+1}}{(b^2 \sinh[b t / 2] + 2b\gamma \cosh[b t / 2] + \gamma^2 \sinh[b t / 2])^D}.\end{aligned}\tag{400}$$

Leider ist auch diese Lösung nicht in den normalen Raum für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(a, t)$ der zeitintegrierten Varianz a analytisch transformierbar, d. h. unser Versuch der expliziten Lösung des Heston Modells über die zeitintegrierte Volatilität a ist nicht gelungen.

B Die Modellgestaltung mit additivem Rauschen

Da wir die beiden bekannten Aktienkursmodelle mit stochastischer Volatilität nicht analytisch lösen können, wollen wir die Lösung numerisch errechnen. Nach einer gezielten Auswahl des numerischen Algorithmus haben wir uns für das Strenge Ordnung 1.5 explizite Schema entschieden [58]. Dieses Verfahren bietet eine Konvergenz von 1.5 im strengen Sinne. Diese Konvergenz soll absichern, dass die simulierten Trajektorien des stochastischen Prozesses mit denen des (theoretischen) Itô Prozesses übereinstimmen. Die strenge Konvergenz α wird definiert als [58]

$$E[|X(t) - Y(N)|] \leq C h^\alpha, \quad (401)$$

mit der endlichen Konstanten C und der positiven Konstanten h_0 mit der Schrittweite $h \in (0, h_0)$. X präsentiert hierbei den Beispieldpfad des Itô Prozesses und Y den des angenäherten Prozesses. Wir wollen noch anmerken, dass die Konvergenz bei Simulation von stochastischen Differentialgleichungen auch geringer als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sein kann. So beträgt die strenge Konvergenz des Euler Verfahrens nur 0.5, da beim Wiener Prozess die mittlere quadratische Ordnung nur h ist [58].

Die beiden Modelle weisen jeweils in beiden stochastischen Differentialgleichungen, des Aktienkurses und der Varianz, multiplikatives Rauschen auf. Um die hohe Konvergenz der Simulation zu sichern, ist daher eine Einschätzung des Diffusionsterm an verschiedenen Stützstellen des Integrationsintervalls notwendig. Könnten wir den Rauschterm unabhängig von dem jeweiligen Zustand k oder v machen, würde sich die Anzahl der Rechenoperationen je Zeitschritt h verringern. Damit würde die notwendige Rechenzeit entsprechend absinken.

Wir wollen daher versuchen, die Rauschterme der jeweiligen Differentialgleichung von dem Zustand unabhängig zu gestalten und somit additives Rauschen einführen. Es bleibt nur der Rauschterm des Aktienkurses abhängig von der Varianz, da wir diese Verbindung nicht durch Transformation auflösen können. Das Ziel besteht somit darin, ein lineares stochastisches Differentialgleichungssystem als Langevin Gleichung in folgender Form herzuleiten

$$dx = a_x(z) dt + b_x(z) dW_x \quad (402)$$

$$dz = a_z(z) dt + b_z dW_z, \quad (403)$$

mit den Variablen x und z , der Konstanten b_z und den beliebigen Funktionen $a_x(z)$, $a_z(z)$ und $b_x(z)$. Das explizite Integrationsschema mit der strengen Ordnung 1.5 lauten dementsprechend für x

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a_x \Delta + b_x \Delta W_x \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left[\left[a_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) - a_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{20} \right. \\ &\quad \left. + \left[b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) - b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{21} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta} \left[[a_x(z_n + 0.5 a_z \Delta) - a_x] 2 I_{00} \right. \\ &\quad \left. + \left[a_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) - 2 a_x + a_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{00} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta) - b_x] 2 I_{01} \\
& + \left[b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) - 2 b_x + a_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{01} \\
& + \frac{1}{2 \Delta} \left[\left[b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) - b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{121} \right. \\
& + \left[b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) - b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{211} \\
& + \left. \left[b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + 2 b_z \sqrt{\Delta}) - b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta) \right. \right. \\
& \left. \left. - b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) + b_x(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{221} \right], \quad (404)
\end{aligned}$$

mit den mehrfachen Itô Integralen I . Für die Variable z ermitteln wir

$$\begin{aligned}
z_{n+1} = & z_n + b_z \Delta W_z \\
& + \left[a_z(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) - a_z(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] I_{20} \\
& + \frac{1}{4} \Delta \left[2 a_z + \left[a_z(z_n + 0.5 a_z \Delta + b_z \sqrt{\Delta}) + a_z(z_n + 0.5 a_z \Delta - b_z \sqrt{\Delta}) \right] \right]. \quad (405)
\end{aligned}$$

Es ist zu erkennen das sich das Schema für die Variable z deutlich vereinfacht hat (vergleiche [58]). Der Integrationsalgorithmus für x hat sich dagegen nur etwas vereinfacht, da die Abhängigkeit von der sich zeitlich ändernden Variablen z nicht aufgehoben werden kann. Trotzdem konnten wir die Anzahl der Stützstellen sowie der notwendigen mehrfachen Itô Integrale I reduzieren und so die Simulationszeit senken.

Wir zeigen im Folgenden, wie wir die beiden bekannten Modelle auf die stochastischen Differentialgleichungen mit additivem Rauschen zurückführen können.

B.1 Das Heston Modell

Das Heston Modell ist als lineares stochastisches Differentialgleichungssystem mit den folgenden Langevin Gleichungen im Itô Formalismus gegeben [49]

$$dk = \mu k dt + \sqrt{v} k dW_k \quad (406)$$

$$dv = \gamma (\theta - v) dt + \kappa \sqrt{v} dW_v. \quad (407)$$

Die Reduktion der Gleichung des Aktienkurses k auf additives Rauschen erhalten wir durch die bekannte Transformation, welche wir auch schon bei der geometrischen Bewegung durchgeführt haben (siehe Abschnitt 2.1.2)

$$x = \ln [k(t)/k_0], \quad (408)$$

mit der beliebigen Konstanten k_0 und erhalten durch Anwendung der Itô Formel (siehe Gleichung (23)) oder der Anwendung des Stratonovich Formalismus (Gleichung (17))

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} v \right) dt + \sqrt{v} dW_k \quad (409)$$

$$dv = \gamma (\theta - v) dt + \kappa \sqrt{v} dW_v. \quad (410)$$

Somit haben wir beim Aktienkurs zunächst unser Ziel des additiven Rauschens erreicht. Die Varianz v besitzt gemäß den Anpassungen an empirische Aktienkurse sehr kleine Werte (siehe Abschnitt 4.3). Um die numerischen Fehlerquellen zu minimieren, überführen wir zunächst die Varianz v zu der dimensionslosen Varianz u . Dies verbessert die Simulation von u bzw. v , aber natürlich nicht die Simulation des logarithmierten Aktienkurses x . Wir erhalten

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} \theta u \right) dt + \sqrt{\theta u} dW_k \quad (411)$$

$$du = \gamma (1 - u) dt + \tilde{\kappa} \sqrt{u} dW_v \quad (412)$$

$$u = v/\theta \quad (413)$$

$$\tilde{\kappa} = \kappa/\sqrt{\theta}. \quad (414)$$

Um nun ebenfalls bei der Varianz u nur additives Rauschen zu erhalten, muss, ähnlich wie bei der geometrischen Brownschen Bewegung, eine Variablentransformation durchgeführt werden. Wir definieren

$$dz = \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (415)$$

$$z = 2\sqrt{u} \quad (416)$$

$$u = \frac{z^2}{4}, \quad (417)$$

wobei sich diese Beziehung aus der Division der Gleichung (412) durch \sqrt{u} ergibt. Bei der Variablentransformation müssen wir wieder die Beziehungen aus den Gleichungen (23) oder (17) beachten. Wir ermitteln für die Gleichung (412) jetzt im Stratonovich Algorithmus

$$du = \gamma dt - \gamma u dt - \frac{1}{4} \tilde{\kappa}^2 dt + \tilde{\kappa} \sqrt{u} \circ dW_v. \quad (418)$$

Somit erhalten wir unser neues Gleichungssystem zur Simulation von Trajektorien mit additivem Rauschen

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{8} \theta z^2 \right) dt + \sqrt{\frac{\theta}{4} z^2} dW_k \quad (419)$$

$$dz = \frac{2\gamma}{|z|} dt - \frac{1}{2} \gamma |z| dt - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2|z|} dt + \tilde{\kappa} dW_v. \quad (420)$$

Der Ausdruck $|z|$ entsteht aus der Formulierung $\sqrt{z^2}$ durch das Ersetzen von \sqrt{u} mit $u = z^2/4$. Mit Hilfe der durchgeführten Transformationen haben wir das Heston Modell mit additivem Rauschen dargestellt. Wir können somit die vereinfachten Simulationsalgorithmen aus den Gleichungen (404) bzw. (405) zur Reduzierung der Rechenzeit nutzen.

B.2 Das Hull-White Modell

Wir wollen ebenfalls beim Hull-White Modell additives Rauschen einführen. Das sto-chastische Differentialgleichungssystem als Langevin Gleichungen im Itô Formalismus

lautet vor Transformation

$$dk = \mu k dt + \sqrt{v} k dW_k \quad (421)$$

$$dv = \gamma (\theta - v) dt + \tilde{\kappa} v dW_v . \quad (422)$$

Nach der bekannten Transformation des Aktienkurses (408) und dimensionsloser Varianz (413) erhalten wir

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} \theta u \right) dt + \sqrt{\theta u} dW_k \quad (423)$$

$$du = \gamma (1 - u) dt + \tilde{\kappa} u dW_v . \quad (424)$$

Wir transformieren die Bewegungsgleichung der Varianz u wieder in den Stratonovich Formalismus und ermitteln

$$du = \gamma dt - \gamma u dt - \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^2 u dt + \tilde{\kappa} u \circ dW_v . \quad (425)$$

Wir wenden jetzt die Transformation $z = \ln [u]$ an (siehe Gleichungen (415) bis (417)), um die obige Gleichung (425) mit additivem Rauschen zu erhalten. Unser Gleichungssystem zur Simulation der Trajektorien lautet für das Hull-White Modell demnach wie folgt

$$dx = \left(\mu - \frac{1}{2} \theta \exp [z] \right) dt + \sqrt{\theta \exp [z]} dW_k \quad (426)$$

$$dz = \gamma \exp [-z] dt - \gamma dt - \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^2 dt + \tilde{\kappa} dW_v . \quad (427)$$

C Die Chandrasekhar-Lösung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses

In dem Artikel [12, 13] wird ebenfalls der Ornstein-Uhlenbeck Prozess näher betrachtet. Es wird die zeitabhängige Lösung der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ des Ortes x und der Geschwindigkeit v analytisch errechnet. Dieses Problem wird zum einen mit Hilfe der Langevin Gleichungen gelöst und zum anderen über die Fokker-Planck Gleichung. Hierbei sei anzumerken, dass die in [13] vorgestellte Lösung korrekt, der Lösungsweg über die Fokker-Planck Gleichung aber inkorrekt ist. Um die Inkorrektheit der dargestellten Rechenweise zu beweisen, wollen wir das Problem ausschließlich für die Geschwindigkeit v betrachten. Dort kennen wir die exakte analytische Lösung, da sie auch über die Berechnung der Momente und der Annahme einer Gaußschen Normalverteilung zum richtigen Ergebnis führt. Wir haben für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p = p(v, t)$ daher folgende Differentialgleichung als Ausgangsbasis

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \gamma \frac{\partial}{\partial v} (v p) + B \frac{\partial^2}{\partial v^2} p \quad (428)$$

$$= \gamma p + \gamma v \frac{\partial}{\partial v} p + B \frac{\partial^2}{\partial v^2} p, \quad (429)$$

mit der Anfangsbedingung

$$p(v, t = 0) = \delta_{v-v_0}. \quad (430)$$

Die Lösung ist bekannt und lautet

$$p(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2\sigma_v}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(v - v_0 \exp[-\gamma t])^2}{2\sigma_v} \right] \quad (431)$$

$$\sigma_v = \frac{B}{2\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]). \quad (432)$$

C.1 Die inkorrekte Lösung für die Geschwindigkeit

Um die Gleichung (429) zu lösen, wollen wir wieder die in [13] verwendete Variablentransformation bezüglich v durchführen. Wir definieren die Beziehung in Übereinstimmung mit [13] als

$$z = z(v, t) = v \exp[\gamma t]. \quad (433)$$

Durch die gegebene Variablenumrechnung erhalten wir für die Fokker-Planck Gleichung die folgenden Transformationsbeziehungen für $P = P(z, t)$

$$P dz = p dv \quad (434)$$

$$p = P \frac{dz}{dv} = P \exp[\gamma t] \quad (435)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \exp[\gamma t] \frac{\partial}{\partial z} \quad (436)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} = \exp[2\gamma t] \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (437)$$

Die Zeitableitung wird dabei wie folgt geändert [13]

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \frac{\partial}{\partial t} P + \gamma z \frac{\partial}{\partial z} P. \quad (438)$$

Demzufolge ergibt sich die Gleichung (429) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \gamma P + B \exp[2\gamma t] \frac{\partial^2}{\partial z^2} P. \quad (439)$$

Zur Lösung der obigen Gleichung (439) führen wir eine Fouriertransformation bezüglich der Variablen z durch, gemäß der bekannten Formel

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \exp[i k_z z] F(k_z, t). \quad (440)$$

Für die Differentialgleichung (439) errechnen wir dann

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \gamma F - B \exp[2\gamma t] k_z^2 F. \quad (441)$$

Die obige Gleichung (441) lässt sich leicht lösen. Die Funktion F im Fourierraum lautet demzufolge

$$F(k_z, t) = C \exp[\gamma t] \exp\left[-\frac{B}{2\gamma} \exp[2\gamma t] k_z^2\right], \quad (442)$$

mit der Integrationskonstanten C . Diese wollen wir über die gesetzte Anfangsbedingung (430) mit

$$v(t=0) = v_0 \quad (443)$$

$$z(t=0) = z_0 = v_0 \quad (444)$$

$$P(z, t=0) = \delta_{z-v_0} \quad (445)$$

$$F(k_z, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-i k_z v_0] \quad (446)$$

bestimmen. Wir ermitteln somit die vollständige Lösung im Fourierraum mit

$$F(k_z, t) = \frac{\exp[\gamma t]}{\sqrt{2\pi}} \exp[-i k_z v_0] \exp\left[\left(\frac{B}{2\gamma} - \frac{B}{2\gamma} \exp[2\gamma t]\right) k_z^2\right]. \quad (447)$$

Die Rücktransformation in den normalen Raum mit der Variablen z ist möglich. Die Transformationsregeln sind bekannt (siehe Abschnitt 2.2). Wir errechnen als Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $P(z, t)$, die die Differentialgleichung (439) erfüllt, die Formel

$$P(z, t) = \frac{\exp[\gamma t]}{\sqrt{2\pi 2A}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(z-v_0)^2}{2A}\right] \quad (448)$$

$$A = \frac{B}{2\gamma} (\exp[2\gamma t] - 1). \quad (449)$$

Diese Verteilung können wir nun zu der Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(v, t)$ in der Variablen v umwandeln, in dem wir die Beziehung (435) anwenden. Wir erhalten dann

$$p(v, t) = \frac{\exp[2\gamma t]}{\sqrt{2\pi 2A}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(v \exp[\gamma t] - v_0)^2}{2A}\right]. \quad (450)$$

Um die obige Gleichung (450) in die Form der Gleichung (100) zu bringen, wollen wir den Faktor A zu der Varianz σ_v^2 transformieren, indem wir $\exp[2\gamma t]$ ausklammern. Wir errechnen demzufolge

$$p(v, t) = \frac{\exp[\gamma t]}{\sqrt{2\pi 2\sigma_v^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(v - v_0 \exp[-\gamma t])^2}{2\sigma_v^2}\right] \quad (451)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{B}{2\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]). \quad (452)$$

Wir erkennen, dass die so ermittelte Lösung (451) für die Differentialgleichung (429) nicht mit der bereits errechneten und bekannten Lösung (100) übereinstimmt. Des Weiteren erkennen wir an der Struktur der Gleichung (451) sehr leicht, dass die Normierung von Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen mit

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv p(v, t) \quad (453)$$

nicht erfüllt. Wir haben dies ebenfalls numerisch überprüft. D. h. auf dem Rechenweg von Chandrasekhar [13] hat sich ein Fehler eingeschlichen, den wir im nachfolgenden Abschnitt darstellen wollen.

C.2 Die korrekte Lösung für die Geschwindigkeit

Auch in diesem Abschnitt wollen wir die Gleichung (429) lösen, indem wir die bekannte Variablentransformation (433) bezüglich v vornehmen. Wegen der Beziehung (433) behalten die Relationen (435) bis (437) ihre Gültigkeit. Wir korrigieren lediglich die Zeitableitung in die richtige Variante mit

$$\frac{\partial}{\partial t} p(v, t) = \frac{\partial}{\partial t} (P(z, t) \exp[\gamma t]) \quad (454)$$

$$= \gamma \exp[\gamma t] P(z, t) + \exp[\gamma t] \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) + \gamma z \exp[\gamma t] \frac{\partial}{\partial z} P(z, t). \quad (455)$$

Wir erhalten daher als Differentialgleichung für $P = P(z, t)$ anstelle der Gleichung (429) den folgenden Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial t} P = B \exp[2\gamma t] \frac{\partial^2}{\partial z^2} P, \quad (456)$$

wo im Gegensatz zu der Gleichung (439) der Term γP fehlt. Wir führen wieder die Fouriertransformation bezüglich der Variablen z durch (siehe Gleichung (440)) und erhalten im Fourierraum für $F = F(k_z, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} F = -B \exp[2\gamma t] k_z^2 F. \quad (457)$$

Wir ermitteln die Lösung mit

$$F(k_z, t) = C \exp \left[-\frac{B}{2\gamma} \exp [2\gamma t] k_z^2 \right]. \quad (458)$$

Unter Nutzung der Anfangsbedingung (446) errechnen wir die richtige vollständige Lösung im Fourierraum mit

$$F(k_z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp [i v_0 k_z] \exp \left[\left(\frac{B}{2\gamma} - \frac{B}{2\gamma} \exp [2\gamma t] \right) k_z^2 \right]. \quad (459)$$

Nach Rücktransformation in den normalen Raum erhalten wir für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $P(z, t)$ die Lösung

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2A}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(z - v_0)^2}{2A} \right] \quad (460)$$

$$A = \frac{B}{2\gamma} (\exp [2\gamma t] - 1). \quad (461)$$

Die Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(v, t)$ ermitteln wir unter Anwendung der Transformationsbeziehung (435)

$$p(v, t) = \frac{\exp [\gamma t]}{\sqrt{2\pi 2A}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(v \exp [\gamma t] - v_0)^2}{2A} \right]. \quad (462)$$

Wir ersetzen wieder die Konstante A durch die Varianz σ_v^2 , um die Gleichungen (462) und (100) vergleichbar zu machen. Wir ermitteln die korrekte Lösung in Übereinstimmung mit (100)

$$p(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2\sigma_v^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(v - v_0 \exp [-\gamma t])^2}{2\sigma_v^2} \right] \quad (463)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{B}{2\gamma} (1 - \exp [-2\gamma t]), \quad (464)$$

die auch die Integrationsbeziehung (453) zur Normierung erfüllt. Das falsche Ergebnis (451) kommt durch eine fehlerhafte Transformation der Gleichung (429) zu der Gleichung (439) mit der neuen Variablen z zustande. Der Grund ist die Nichtbeachtung des Erhalts der Wahrscheinlichkeit bei der Durchführung der Variablenumwandlung.

C.3 Die korrekte Lösung für die Geschwindigkeit und den Ort

In diesem Abschnitt wollen wir den in [13] dargestellten Lösungsweg korrigiert darstellen. Das Verfahren zur Lösung des Problems weicht von unserem ab (siehe Abschnitt 2.2) und ist übersichtlicher. In unseren folgenden Betrachtungen beschränken wir uns aber auf das eindimensionale Problem, d. h. nur für eine Orts- und eine Geschwindigkeitsrichtung. In [13] wurde das Problem dreidimensional gelöst. Wir haben wieder die Ausgangsgleichung für den Ort x und die Geschwindigkeit v , die einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess folgen. Die Ausgangsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ ist als Fokker-Planck Gleichung gegeben mit

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -v \frac{\partial}{\partial x} p + \gamma p + \gamma v \frac{\partial}{\partial v} p + B \frac{\partial^2}{\partial v^2} p. \quad (465)$$

Wir definieren die neuen Variablen ρ und r wie nachfolgend

$$\rho = v \exp [\gamma t] \quad (466)$$

$$r = x + \frac{1}{\gamma} v. \quad (467)$$

Um nun die Gleichung (465) in die neuen Variablen überführen zu können, ermitteln wir die folgenden Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (468)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \exp [\gamma t] \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial r} \quad (469)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} = \exp [2\gamma t] \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\gamma} \exp [\gamma t] \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (470)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung transformiert sich dabei wie folgt [96]

$$p(x, v, t) dx dv = P(r, \rho, t) dr d\rho \quad (471)$$

$$p(x, v, t) = P(r, \rho, t) \frac{dr d\rho}{dx dv} = P(r, \rho, t) D \quad (472)$$

$$D = \left| \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{d\rho}{dx} & \frac{d\rho}{dv} \\ \frac{dr}{dx} & \frac{dr}{dv} \end{pmatrix} \right| = \left| \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & \exp [\gamma t] \\ 1 & 1/\gamma \end{pmatrix} \right| \quad (473)$$

$$p(x, v, t) = P(r, \rho, t) \exp [\gamma t], \quad (474)$$

wobei Det für die Determinante der Matrix steht. Demzufolge transformiert sich dabei die Zeitableitung korrekterweise wie folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \frac{\partial}{\partial t} (P \exp [\gamma t]) \quad (475)$$

$$= \gamma \exp [\gamma t] P + \exp [\gamma t] \frac{\partial}{\partial t} P + \exp [\gamma t] \gamma \rho \frac{\partial}{\partial \rho} P; \quad (476)$$

d. h. die Gleichung (465) lautet für die neuen Variablen ρ und r

$$\frac{\partial}{\partial t} P = B \exp [2\gamma t] \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} P + \frac{B}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} P + \frac{2B}{\gamma} \exp [\gamma t] \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial r} P. \quad (477)$$

Über die angegebenen Variablentransformationen ist es uns gelungen, eine reine Diffusionsgleichung in den neuen Variablen zu erhalten. Die Gleichung ist durch die veränderte Zeitableitung nicht identisch mit der Lösung in [13] und spart uns einen weiteren Zwischen schritt. Die Lösung der folgenden Differentialgleichung [13]

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \alpha^2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W + 2\alpha(t)\beta(t) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} W + \beta^2(t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} W \quad (478)$$

ist bekannt als

$$W(x, y, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{c}} \exp \left[-\frac{1}{2c} (a x^2 + 2 h x y + b y^2) \right] \quad (479)$$

$$a = 2 \int_0^t dt \beta^2(t) \quad (480)$$

$$b = 2 \int_0^t dt \alpha^2(t) \quad (481)$$

$$h = -2 \int_0^t dt \alpha(t) \beta(t) \quad (482)$$

$$c = a b - h^2, \quad (483)$$

wobei die Anfangsbedingung mit $W(x, y, t=0) = \delta_{x=0} \delta_{y=0}$ gilt. Dass die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $W(x, y, t)$ die Integrationsbeziehung

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy W(x, y, t) \quad (484)$$

zur Normierung erfüllt, haben wir im Anhang D numerisch überprüft. Gemäß diesen aufgeführten Beziehungen und den Anfangsbedingungen mit $\rho(t=0) = \rho_0$ und $r(t=0) = r_0$ errechnen wir die Lösung für die Gleichung (477) wie folgt

$$P(r, \rho, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{c}} \exp \left[-\frac{1}{2c} (a(\rho - \rho_0)^2 + 2h(\rho - \rho_0)(r - r_0) + b(r - r_0)^2) \right] \quad (485)$$

$$a = \frac{2B}{\gamma^2} t \quad (486)$$

$$b = \frac{B}{\gamma} (\exp[2\gamma t] - 1) \quad (487)$$

$$h = -\frac{2B}{\gamma^2} (\exp[\gamma t] - 1) \quad (488)$$

$$c = a b - h^2. \quad (489)$$

Durch Rücktransformation zu den bekannten Variablen v und x erhalten wir die Lösung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ mit

$$\begin{aligned} p(x, v, t) = & \frac{\exp[\gamma t]}{2\pi\sqrt{c}} \exp \left[-\frac{1}{2c} (a(v \exp[\gamma t] - v_0)^2 \right. \\ & + 2h(v \exp[\gamma t] - v_0)(x + v/\gamma - x_0 - v_0/\gamma) \\ & \left. + b(x + v/\gamma - x_0 - v_0/\gamma)^2) \right]. \end{aligned} \quad (490)$$

Die obige Gleichung (490) können wir aber nicht direkt mit unserer Lösung (120) vergleichen, da sich die Notationen unterscheiden. Wir definieren zunächst folgende Beziehungen

$$b = 2\sigma_v^2 \exp[2\gamma t] \quad (491)$$

$$\exp[-2\gamma t] c = 2\sigma_v^2 \left(a - \frac{h^2}{b} \right) \quad (492)$$

$$= 2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2 \quad (493)$$

$$= \frac{2B}{\gamma^2} t - \frac{4B}{\gamma^3} \frac{(1 - \exp[-\gamma t])^2}{(1 - \exp[-2\gamma t])}. \quad (494)$$

Unter Ausnutzung dieser Relationen erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2\sigma_v^2 \left(a - \frac{h^2}{b} \right)} (a(v - v_0 \exp[-\gamma t])^2 \right. \\ &\quad + 2h \exp[-\gamma t] (v - v_0 \exp[-\gamma t]) (x + v/\gamma - x_0 - v_0/\gamma) \\ &\quad \left. + 2\sigma_v^2 (x + v/\gamma - x_0 - v_0/\gamma)^2) \right]. \end{aligned} \quad (495)$$

Wir setzen zur Abkürzung jetzt

$$V = v - v_0 \exp[-\gamma t] \quad (496)$$

$$X = x + v/\gamma - x_0 - v_0/\gamma. \quad (497)$$

Wir fassen die Gleichung (495) weiter zusammen und ermitteln

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{V^2}{2\sigma_v^2} \right. \\ &\quad \left. \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2} \left(\frac{h^2}{b} V^2 + 2h \exp[-\gamma t] V X + 2\sigma_v^2 X^2 \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (498)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{V^2}{2\sigma_v^2} \right. \\ &\quad \left. \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2\bar{\sigma}_x^2} \left(\frac{h^2}{b^2 \exp[-2\gamma t]} V^2 + \frac{2h}{b \exp[-\gamma t]} V X + X^2 \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (499)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{V^2}{2\sigma_v^2} \right. \\ &\quad \left. \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{2\bar{\sigma}_x^2} \left(X + \frac{h}{b \exp[-\gamma t]} V \right)^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (500)$$

Wir betrachten nur den Term der zweiten Exponentialfunktion in der Gleichung (500). Wir ergänzen den Term um V/γ und errechnen

$$X + \frac{h}{b \exp[-\gamma t]} V = X + \frac{h}{b \exp[-\gamma t]} V + \frac{V}{\gamma} - \frac{V}{\gamma} \quad (501)$$

$$= X - \frac{V}{\gamma} + \frac{\sigma_{xv}^2}{2\sigma_v^2} V \quad (502)$$

$$= x - \bar{\mu}_x. \quad (503)$$

Wir ermitteln demgemäß die Lösung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung in Übereinstimmung mit der Gleichung (120) als

$$p = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sigma_v^2 2\bar{\sigma}_x^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(v - \mu_v)^2}{2\sigma_v^2}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x - \bar{\mu}_x)^2}{2\bar{\sigma}_x^2}\right]. \quad (504)$$

Wir haben somit aufgezeigt, dass unsere Lösung für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x, v, t)$ des Ortes x und der Geschwindigkeit v des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses mit der in [13] übereinstimmt. Dies ist besonders zu betonen, da zwei verschiedene Rechenwege verwendet wurden. Gegenüber der Darstellung in [13] haben wir den Rechenweg hier korrekt dargestellt.

D Die numerische Integration von analytischen Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir darstellen, wie wir Funktionen numerisch integrieren können. Bei unseren Betrachtungen in den vorherigen Abschnitten haben wir die Numerik öfter angewandt, da die Integration analytisch oft nicht durchgeführt werden kann.

Mit der Anwendung der Numerik verfolgen wir vornehmlich zwei Ziele. Zum einen soll die Funktion von weniger Variablen abhängen, da uns z. B. eine Größe nicht interessiert bzw. eine empirisch nicht messbar ist. Zum anderen wollen wir auch Integrationsbedingungen wie die Normierung von Wahrscheinlichkeitsdichteveerteilungen rechnerisch überprüfen.

Bei der Durchführung der Numerik müssen wir besonders auf zwei Punkte achten. Welchen Integrationsalgorithmus verwenden wir? Wie handhaben wir die Integrationsgrenzen, die oft bei unendlich liegen?

Um die Integrationsgrenzen einhalten zu können und den dabei entstehenden Fehler möglichst klein zu halten, führen wir eine Variablentransformation durch. Wir haben dabei die Transformationen so gewählt, dass wir $+\infty$ auf 1, 0 auf 0 und $-\infty$ auf -1 abbilden. Durch die gewählten Variablenumwandlungen können wir zwar die Grenzen selber auch nicht numerisch darstellen, wir können uns ihnen aber schon sehr dicht annähern. Darüber hinaus nehmen wir eine asymmetrische Transformation vor. Diese wählen wir so, dass wir bei äquidistanten Schritten in der neuen Variable viele Werte in der alten Variable um 0 herum erfassen, wo sich die Funktion stark ändert. Dagegen beziehen wir an den jeweiligen Grenzen zu unendlich nur wenige Werte mit ein, da die Funktion hier zum einen sehr glatt verläuft und sich nur gering ändert und zum anderen nur einen geringen Beitrag zum Gesamtintegral leistet.

Wir wollen die Variablentransformation an einem Beispiel betrachten. Wir wählen dabei die bekannte Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung aus dem Anhang C. Die Funktion lautet

$$p(\psi, \phi, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp\left[-\frac{1}{2\Delta} (a\phi^2 + 2h\phi\psi + b\psi^2)\right] \quad (505)$$

$$\Delta = ab - h^2 \quad (506)$$

$$a = \frac{2B}{\gamma^2} t \quad (507)$$

$$b = \frac{B}{\gamma} (\exp[2\gamma t] - 1) \quad (508)$$

$$h = -\frac{2B}{\gamma^2} (\exp[\gamma t] - 1). \quad (509)$$

Wir wollen nun bei dieser Funktion (505) die Integrationsbedingung

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi p(\psi, \phi, t) \quad (510)$$

überprüfen.

Wir wählen hierzu die geeignete Variablentransformation mit

$$z = \tanh[\psi] \quad (511)$$

$$\psi = \operatorname{artanh}[z] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+z}{1-z} \right] \quad (512)$$

$$y = \tanh[\phi] \quad (513)$$

$$\phi = \operatorname{artanh}[y] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+y}{1-y} \right]. \quad (514)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung transformiert sich dementsprechend mit

$$P(z, y, t) = p(\psi, \phi, t) D \quad (515)$$

$$D = \left| \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \frac{d\psi}{dz} & \frac{d\psi}{dy} \\ \frac{d\phi}{dz} & \frac{d\phi}{dy} \end{pmatrix} \right| = \left| \operatorname{Det} \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2-1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2-1} \end{pmatrix} \right|. \quad (516)$$

Wir können so die Wahrscheinlichkeitsdichtevertteilung $P(z, y, t)$ für die transformierten Variablen ermitteln als

$$\begin{aligned} p(\psi, \phi, t) &= \frac{1}{z^2-1} \frac{1}{y^2-1} \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \\ &\exp \left[-\frac{1}{2\Delta} (a (\operatorname{artanh}[y])^2 + 2h \operatorname{artanh}[y] \operatorname{artanh}[z] + b (\operatorname{artanh}[z])^2) \right]. \end{aligned} \quad (517)$$

Dementsprechend lautet das Integral (510) jetzt

$$S = 1 = \int_{-1}^{+1} dz \int_{-1}^{+1} y P(z, y, t). \quad (518)$$

Dieses Integral S wollen wir nun numerisch ermitteln. Wir haben die Simpson Regel als Integrationsalgorithmus ausgewählt. Sie lautet [86]

$$\int_{y_1}^{y_3} f(y) dy = \Delta y \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{2}{3} f_2 + \frac{1}{3} f_3 \right) + \mathcal{O}(\Delta y^5 f^{(4)}), \quad (519)$$

mit der Schrittweite Δy und der vierten Ableitung $f^{(4)}$ der Funktion f an einer beliebigen Stelle im Intervall $[y_1, y_3]$. Die Regel ist korrekt für Polynome bis zur dritten Ordnung. Nach unseren praktischen Erfahrungen ist diese Simpson Regel einfach implementierbar und erzielt für unsere Zwecke sehr gute Ergebnisse, solange die Funktionen glatt sind. Wir haben daher ausschließlich diesen Integrationsalgorithmus verwendet.

In der Abbildung 67 haben wir das Integral S aus der Gleichung (518) über die Anzahl der Stützstellen dargestellt. Wir erkennen, dass das Integral wie erwartet mit

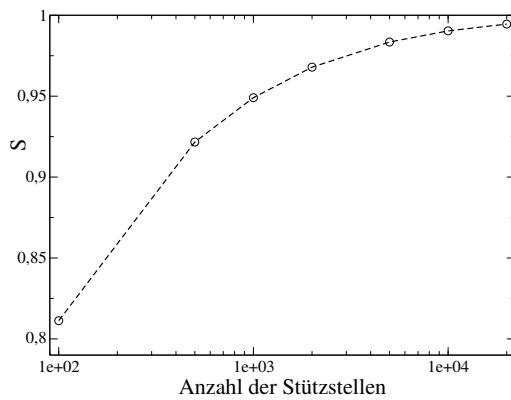


Abbildung 67: Darstellung des numerisch approximierten Integrals S aus der Gleichung (518) über die Anzahl der Stützstellen.

zunehmender Anzahl an Stützstellen gegen 1 konvergiert. Wir sehen auch, dass bereits für 20 000 Schritte die Abweichungen sehr gering ausfallen.

Wir haben in diesem Abschnitt gezeigt, dass wir mit der Simpson Regel einfache, glatte Funktionen numerisch integrieren können. Die Integrationsgrenzen sind durch Transformationen handhabbar. Wir können so mit der relativ einfachen Methode schnell Ergebnisse erzielen.

Literatur

- [1] ALEXANDER, C.: *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*. John Wiley & Sons, LTD, Chichester, 2001.
- [2] BACHELIER, L.: *Théorie de la Spéculation*. Doktorarbeit, Faculté des Sciences de Paris, 1900.
- [3] BAVIERA, R., M. PASQUINI, M. SERVA, D. VERGNI und A. VULPIANI: *Forecast in Foreign Exchange Markets*. The European Physical Journal B, 20:473–479, 2001.
- [4] BLACK, F. und M. SCHOLES: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81:637–654, 1973.
- [5] BLEYMÜLLER, J. und G. GEHLERT: *Statistische Formeln, Tabellen und Programme*. Verlag Franz Vahlen GmbH, München, 8. Auflage, 1996.
- [6] BLEYMÜLLER, J., G. GEHLERT und H. GÜLICHER: *Statistik für Wirtschaftswissenschaftler*. Verlag Franz Vahlen GmbH, München, 11. Auflage, 1998.
- [7] BONANNO, G., F. LILLO und R. N. MANTEGNA: *Dynamics of the Number of Trades of Financial Securities*. Physica A, 280:136–141, 2000.
- [8] BOUCHAUD, J.-P., A. MATAZZ und M. POTTERS: *Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model*. Physical Review Letters, 87(22):228701, 2001.
- [9] BOUCHAUD, J.-P. und M. POTTERS: *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [10] BÜHLER, W., H. HAX und R. SCHMIDT (Herausgeber): *Empirical Research on the German Capital Market*. Contributions to Management Science. Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 1999.
- [11] CAMPBELL, J. Y., A. W. LO und A. C. MACKINLAY: *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
- [12] CHANDRASEKHAR, S.: *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*. Reviews of Modern Physics, 15(1):1–89, 1943.
- [13] CHANDRASEKHAR, S.: *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*. In: WAX, N. (Herausgeber): *Selected papers on noise and stochastic processes*. Dover publications, New York, 1954.
- [14] CHETVERIKOV, A. und J. DUNKEL: *Phase Behavior and Collective Excitations of the Morse Ring Chain*. The European Physical Journal B, 35:239–253, 2003.
- [15] CIZEAU, P., Y. LIU, M. MEYER, C.-K. PENG und H. E. STANLEY: *Volatility Distribution in the S&P500 Stock Index*. Physica A, 245:441–445, 1997.

- [16] COFFEY, W. T., YU. P. KALMYKOV und J. T. WALDRON: *The Langevin Equation*. World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey, 2. Auflage, 2004.
- [17] CONT, R.: *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues*. Quantitative Finance, 1:223–236, 2001.
- [18] CONT, R., M. POTTERS und J.-P. BOUCHAUD: *Scaling in Stock Market Data: Stable Laws and Beyond*. In: DUBRULLE, GRANER und SORNETTE (Herausgeber): *Scale Invariance and beyond*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [19] COX, J. C. und S. A. ROSS: *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*. Journal of Financial Economics, 3:145–166, 1976.
- [20] DACOROGNA, M. M., R. GENCAY, U. A. MÜLLER, R. B. OLSEN und O. V. PICTET: *An Introduction to High Frequency Finance*. Academic Press, San Diego, 2001.
- [21] DACOROGNA, M. M., U. A. MÜLLER, R. D. DAVE, O. V. PICTET, R. B. OLSEN und J. R. WARD: *Fractals and Intrinsic Time - A Challenge to Econometricians*. In: FULDA, EKKEHARD und MANFRED HÄRTER (Herausgeber): *Neue Ansätze der Prognostik*. Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main, 1997.
- [22] DANA, R.-A. und M. JEANBLANC: *Financial Markets in Continuous Time*. Springer Finance. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [23] DANIEL, G.: *Stochastic Volatility in a Quantitative Model of Stock Market Returns*. Master Thesis, arXiv:cs.CE/0304009, April 2003.
- [24] DETTLING, M. und P. BÜHLMANN: *Volatility and Risk Estimation with Linear and Nonlinear Methods Based on High Frequency Data*. Applied Financial Economics, 14:717–729, 2004.
- [25] DRĂGULESCU, A. A. und V. M. YAKOVENKO: *Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility*. Quantitative Finance, 2:443–453, 2002.
- [26] DROŻDŹ, S., J. KWAPIEŃ, F. GRÜMMER, F. RUF und J. SPETH: *Are the Contemporary Financial Fluctuations Sooner Converging to Normal?* Acta Phys. Pol. B, 34:4293–4306, 2003.
- [27] DUNKEL, J., W. EBELING, J. W. P. SCHMELZER und G. RÖPKE: *A Dissipative One-Dimensional Collision Model with Intermediate Energy Storage*. Physica D, 185:158–174, 2003.
- [28] EBELING, W. und I. SOKOLOV: *Statistical Thermodynamics and Stochastic Theory of Nonlinear Systems far from Equilibrium*. Series on Advances in Statistical Mechanics. World Scientific, New Jersey, 2005.

- [29] EINSTEIN, A.: *Über die von der Molekularkinetischen Theorie der Wärme Geförderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten Suspendierten Teilchen*. Annalen der Physik, 17:549–560, 1905.
- [30] ENGLE, R. F. und A. J. PATTON: *What Good is a Volatility Model?* Quantitative Finance, 1:237–245, 2001.
- [31] ERDÉLY, A.: *Tables of Integral Transforms*, Band I. McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
- [32] ERDMANN, U., W. EBELING, L. SCHIMANSKY-GEIER und F. SCHWEITZER: *Brownian Particles far from Equilibrium*. The European Physical Journal B, 15:105–113, 2000.
- [33] FAMA, E. F.: *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. Journal of Finance, 25:383–417, 1971.
- [34] FAMA, E. F.: *Efficient Capital Markets: II*. Journal of Finance, 46:1575–1613, 1991.
- [35] FARMER, J. D. und F. LILLO: *On the Origin of Power-Law Tails in Price Fluctuations*. Quantitative Finance, 4:C7–11, 2004.
- [36] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Band I. John Wiley & Sons, New York, 3. Auflage, 1968.
- [37] FOUCHE, J.-P., G. PAPANICOLAOU und K. R. SIRCAR: *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [38] FRIEDRICH, R., J. PEINKE und CH. RENNER: *How to Quantify Deterministic and Random Influences on the Statistics of the Foreign Exchange Market*. Physical Review Letters, 84:5224–5227, 2000.
- [39] FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. und L. SÖGNER: *Bayesian Estimation of the Heston Stochastic Volatility Model*. In: LEOPOLD-WILDBURGER, ULRIKE, FRANZ RENDL und GERHARD WÄSCHER (Herausgeber): *Operations Research Proceedings 2002*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [40] GABAIX, X., P. GOPIKRISHNAN, V. PLEROU und H. E. STANLEY: *A Theory of Power-Law Distributions in Financial Market Fluctuations*. Nature, 423:267–270, 2003.
- [41] GARDINER, C. W.: *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 2004.
- [42] GOPIKRISHNAN, P., V. PLEROU, L. A. N. AMARAL, M. MEYER und H. E. STANLEY: *Scaling of the Distribution of Fluctuations of Financial Market Indices*. Physical Review E, 60:5305–5316, 1999.

- [43] GOPIKRISHNAN, P., V. PLEROU und X. GABAIX: *Price Fluctuations and Market Activity*. In: TAKAYASU, H. (Herausgeber): *Empirical science of financial fluctuations*, Seiten 12–17. Springer Verlag, 2002.
- [44] GOPIKRISHNAN, P., V. PLEROU, X. GABAIX und H. E. STANLEY: *Statistical Properties of Share Volume Traded in Financial Markets*. Physical Review E, 62(4):R4493–4496, 2000.
- [45] GOPIKRISHNAN, P., B. ROSENOW, V. PLEROU und H. E. STANLEY: *Quantifying and Interpreting Collective Behavior in Financial Markets*. Physical Review E, 64:035106R, 2001.
- [46] GRADSTEIN, I. S. und I. M. RYSHIK: *Tables of Series, Products and Integrals*, Band I. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1981.
- [47] GROUP, DEUTSCHE BÖRSE: *Dax Kurzinformation*. <http://deutsche-boerse.com>, März 2004.
- [48] HAKEN, H.: *Synergetik – Eine Einführung, Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1983.
- [49] HESTON, S. L.: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency*. The Review of Financial Studies, 6(2):327–343, 1993.
- [50] HONERKAMP, J.: *Stochastische Dynamische Systeme: Konzepte, Numerische Methoden, Datenanalysen*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Basel, Cambridge, New York, 1990.
- [51] HULL, J. und A. WHITE: *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. The Journal of Finance, XLII(2):281–300, 1987.
- [52] ILINSKI, K.: *The Nature of Volatility*. <http://www.wilmott.com>, 2001.
- [53] ITÔ, K.: *On a Stochastic Integral Equation*. Proc. Japan Acad., 22:32–35, 1946.
- [54] ITÔ, K. und H. P. MCKEAN: *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
- [55] KAMPEN, N. G. VAN: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1992.
- [56] KANTZ, H. und T. SCHREIBER: *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [57] KAPITALMARKTDATENBANK: *Dax und seine Aktien*. Lieferung der Aktienkurse, Universität Karlsruhe, 2002.
- [58] KLOEDEN, P. E. und E. PLATEN: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Application of Mathematics. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.

- [59] KUECK, U.: *Statistik*. Skript zur Vorlesung Statistik an der Universität Rostock, 1998.
- [60] LILLO, F., J. D. FARMER und R. N. MANTEGNA: *Single Curve Collapse of the Price Impact Function for the New York Stock Exchange*. arXiv: cond-mat/0207428, 2002.
- [61] LILLO, F., J. D. FARMER und R. N. MANTEGNA: *Master Curve for Price-Impact Function*. Nature, 421:129, 2003.
- [62] LILLO, F. und R. N. MANTEGNA: *Statistical Properties of Statistical Ensembles of Stock Returns*. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 3(3):405–408, 2000.
- [63] LILLO, F. und R. N. MANTEGNA: *Variety and Volatility in Financial Markets*. Physical Review E, 62(5):6126, 2000.
- [64] LILLO, F. und R. N. MANTEGNA: *Dynamics of a Financial Market Index after a Crash*. arXiv: cond-mat/0209685, 2002.
- [65] LINDNER, A.: *Grundkurs Theoretische Physik*. Teubner Studienbücher: Physik. B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 1997.
- [66] LIU, Y., P. GOPIKRISHNAN, P. CIZEAU, M. MEYER, C.-K. PENG und H. E. STANLEY: *Statistical Properties of the Volatility of Price Fluctuations*. Physical Review E, 60(2):1390–1400, 1999.
- [67] LYNCH, P. E. und G. O. ZUMBACH: *Market Heterogeneities and the Causal Structure of Volatility*. Quantitative Finance, 3:320–331, 2003.
- [68] MALEVERGNE, Y., V. PISARENKO und D. SORNETTE: *Empirical Distributions of Log-Returns: Between the Stretched Exponential and the Power Law*. arXiv: physics/0305089, 2003.
- [69] MANDELBROT, B. B.: *Fractals and Scaling in Finance*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [70] MANTEGNA, R. N. und H. E. STANLEY: *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [71] MASOLIVER, J. und J. PERELLÓ: *A Correlated Stochastic Volatility Model Measuring Leverage and Other Stylized Facts*. International journal of theoretical and applied finance, 5(5):541–562, 2002.
- [72] MERTON, R.: *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics Management Science, 4:141–183, 1973.
- [73] MICCICHÈ, S., G. BONANNO, F. LILLO und R. N. MANTEGNA: *Volatility in Financial Markets: Stochastic Models and Empirical Results*. Physica A, 314:756–761, 2002.

- [74] OKSENDAL, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 6. Auflage, 2003.
- [75] OSBORNE, M. F. M.: *Brownian Motion in the Stock Market*. Operations Research, 7:145–173, 1959.
- [76] PAGAN, A.: *The Econometrics of Financial Markets*. Journal of Empirical Finance, 3:15–102, 1996.
- [77] PASQUINI, M. und M. SERVA: *Multiscaling and Clustering of Volatility*. Physica A, 269:140–147, 1999.
- [78] PAUL, W. und J. BASCHNAGEL: *Stochastic Processes: From Physics to Finance*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [79] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN, L. A. N. AMARAL, X. GABAIX und H. E. STANLEY: *Economic Fluctuations and Anomalous Diffusion*. Physical Review E, 62(3):R3023–R3026, 2000.
- [80] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN, L. A. N. AMARAL, M. MEYER und H. E. STANLEY: *Scaling of the Distribution of Price Fluctuations of Individual Companies*. Physical Review E, 60(6):6519–6529, 1999.
- [81] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN, X. GABAIX, L. A. N. AMARAL und H. E. STANLEY: *Price Fluctuations, Market Activity and Trading Volume*. Quantitative Finance, 1:262–269, 2001.
- [82] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN, X. GABAIX und H. E. STANLEY: *Quantifying Stock-Price Response to Demand Fluctuations*. Physical Review E, 66:027104, 2002.
- [83] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN, X. GABAIX und H. E. STANLEY: *On the Origin of Power-Law Fluctuations in Stock Prices*. Quantitative Finance, 4:C11–15, 2004.
- [84] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN, B. ROSENOW, L. A. N. AMARAL, T. GUHR und H. E. STANLEY: *Random Matrix Approach to Cross Correlations in Financial Data*. Physical Review E, 65:066126, 2002.
- [85] PLEROU, V., P. GOPIKRISHNAN und H. E. STANLEY: *Two-Phase Behaviour of Financial Markets*. Nature, 421:130, 2003.
- [86] PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANNERY: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 1996.
- [87] PROTTER, P. E.: *Stochastic Integration and Differential Equations*. Application of Mathematics. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2004.
- [88] RABERTO, M., E. SCALAS und F. MAINARDI: *Waiting-Times and Returns in High-Frequency Financial Data: An Empirical Study*. Physica A, 314:749–755, 2002.

- [89] REMER, R.: *Stochastische Prozesse in der Finanzwirtschaft aus der Sicht der Physik*. Seminararbeit, Universität Rostock, 01.04.2000.
- [90] REMER, R.: *Darstellung und Bewertung Ausgewählter Quantitativer Beschreibungen von Aktienkursverläufen*. Diplomarbeit, Universität Rostock, 28.08.2001.
- [91] REMER, R. und R. MAHNKE: *Application of Heston and Hull-White Model to German Dax Data*. Quantitative Finance, 4:1–9, 2004.
- [92] REMER, R. und R. MAHNKE: *Application of Heston Model and its Solution to German Dax Data*. Physica A, 344:236–239, 2004.
- [93] REMER, R. und R. MAHNKE: *Probabilistic Analysis of Dax High Frequency Data*. In: BUIKIS, A., R. ČIEGIS und A. D. FITT (Herausgeber): *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2002*, Seiten 347–351. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [94] REMER, R. und R. MAHNKE: *Stochastic Volatility Models and their Application to German Dax Data*. Fluctuation and Noise Letters, 4:R67–R78, 2004.
- [95] RENNER, Ch., J. PEINKE und R. FRIEDRICH: *Evidence of Markov Properties of High Frequency Exchange Rate Data*. Physica A, 298:499–520, 2001.
- [96] RISKEN, H.: *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [97] SABANIS, S.: *Stochastic Volatility and the Mean Reverting Process*. The Journal of Futures Markets, 23:33–47, 2003.
- [98] SAMUELSON, P. A.: *Rational Theory of Warrant Pricing*. Industrial Management Review, 6:13–31, 1965.
- [99] SANDMANN, K.: *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [100] SCHWEITZER, F.: *Brownian Agents and Active Particles*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [101] SEYDEL, R.: *Tools for Computational Finance*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2004.
- [102] SILVA, A. C., R. E. PRANGE und V. M. YAKOVENKO: *Exponential Distribution of Financial Returns at Mesoscopic Time Lags: A new Stylized Fact*. Physica A, 344:227–235, 2004.
- [103] SILVA, A. C. und V. M. YAKOVENKO: *Comparison Between the Probability Distribution of Returns in the Heston Model and Empirical Data for Stock Indexes*. Physica A, 324:303–310, 2003.
- [104] SORNETTE, D.: *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Self-organization, and Disorder: Concepts and Tools*. Springer Series in Synergetics. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2004.

- [105] TAKAYASU, M., H. TAKAYASU und M. P. OKAZAKI: *Transaction Interval Analysis of High Resolution Foreign Exchange Data*. In: TAKAYASU, H. (Herausgeber): *Empirical science of financial fluctuations*, Seiten 18–25. Springer Verlag, 2002.
- [106] UHLENBECK, G. E. und L. S. ORNSTEIN: *On the Theory of the Brownian Motion*. Physical Review, 36:823–841, 1930.
- [107] VOIT, J.: *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- [108] WAGNER, F.: *Volatility Cluster and Herding*. Physica A, 322:607–619, 2003.
- [109] WIENER, N.: *Differential Space*. Journal of Mathematical Physics, 2:131–174, 1923.
- [110] WILMOTT, P.: *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, LTD, Chichester, 2000.
- [111] ZEIDLER, E. (Herausgeber): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1996.
- [112] ZUMBACH, G. O.: *Volatility Processes and Volatility Forecast with Long Memory*. Quantitative Finance, 4:70–86, 2004.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und ohne fremde Hilfe verfasst habe, keine außer den von mir angegebenen Hilfsmitteln und Quellen dazu verwendet habe und die den benutzten Werken inhaltlich und wörtlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Rostock, den 28.02.2005

Danksagung

Ich möchte mich natürlich bei allen bedanken, die mich während meiner Promotionszeit unterstützt haben. Insbesondere danke ich Reinhart Mahnke für die starke wissenschaftliche Unterstützung. Bei Marina Hertzfeldt bedanke ich mich für die Hilfestellung bei den vielen notwendigen Anträgen und Abrechnungen. Weiterhin möchte ich Julia Hinkel, Jevgenijs Kaupužs, Ihor Lubashevsky und Peter Wagner für die vielen Diskussionen und Anregungen danken.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei Reinhart, Julia und Marina für die schöne und heitere Zeit, vor allem während der DAAD Sommerschulen in Russland.

Abschließend möchte ich hervorheben, dass mir das Graduiertenkolleg „Stark korrelierte Vielteilchensysteme“ am Institut für Physik die finanzielle Basis für meine Promotion und die Reisen zu den Fachtagungen gegeben hat.

Wissenschaftlicher Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name, Vorname: Remer, Ralf
Geburtsdatum: 14.02.1976
Anschrift: Bahnhofsstr. 28, 19079 Sukow

Ausbildung

- | | |
|-----------|--|
| 1982–1989 | Gesamtschule in Schwerin |
| 1989–1994 | Sportgymnasium in Schwerin,
Abschluss Abitur |
| 1995–1998 | Lehre zum Bankkaufmann in Schwerin |
| 1997–2001 | Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Rostock,
Abschluss Diplom-Kaufmann |
| 2000 | Seminararbeit in Zusammenarbeit mit dem Fachbereich Physik,
Thema „Stochastische Prozesse in der Finanzwirtschaft
aus der Sicht der Physik“ |
| 2001 | Diplomarbeit in Zusammenarbeit mit dem Fachbereich Physik,
Thema „Darstellung und Bewertung ausgewählter
quantitativer Beschreibungen von Aktienkursverläufen“ |
| 2002–2005 | Doktorand an der Universität Rostock, Institut für Physik,
Stipendiat des Graduiertenkollegs „Stark korrelierte Viel-
teilchensysteme“ |