

Universität
Rostock



Traditio et Innovatio

Über p -Verallgemeinerungen sphärisch-invarianter
stochastischer Prozesse

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Rostock

vorgelegt von

Klaus Müller, geb. am 16.12.1987 in Osterburg

aus Schwerin

Rostock, 31.05.2017

urn:nbn:de:qbv:28-diss2018-0181-2

Gutachter:

1. Prof. Dr. Wolf-Dieter Richter
Institut für Mathematik, Universität Rostock
2. Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachbereich Ingenieur- und Naturwissenschaften, Hochschule Merseburg
3. Prof. Dr. Zoltán Sasvári
Institut für Mathematische Stochastik, Technische Universität Dresden

Tag der Einreichung: 31.05.2017

Tag der öffentlichen Verteidigung: 22.09.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbetrachtungen	4
2.1	Stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen	4
2.2	Die Klasse der $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen	15
2.2.1	Allgemeine Einführung	15
2.2.2	Die Teilklasse der regulären Verteilungen	21
2.2.3	Die Teilklasse der singulären Verteilungen	23
3	Skalenmischungen der p-verallgemeinerten Normalverteilung	28
3.1	Skalenmischungen von Normalverteilungen	28
3.2	Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung	30
3.3	Beispiele und deren Mischungsverteilungen	40
3.3.1	Der Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung	40
3.3.2	Der Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung	47
3.3.3	Der Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ II-Verteilung	50
3.3.4	Konstruktion der $l_{n,p}$ -symmetrischen Slash-Verteilung	51
3.4	Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit beliebigem Erwartungswert und beliebiger Kovarianzmatrix	53
3.5	Simulation von Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit zwei Parametern	61
4	Sphärisch-invariante stochastische Prozesse und ihre p-Verallgemeinerungen	65
4.1	Stochastische Prozesse und der Existenzsatz von Kolmogorov	65
4.2	Sphärisch-invariante stochastische Prozesse	71
4.3	Existenz und Definition stochastischer Prozesse mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen	77
4.4	Eigenschaften und Simulationen von skalengemischten p -verallgemeinerten Gauß-Prozessen mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen	87
5	Zusammenfassung und Ausblick	98
	Literatur	101
A	Analytische Grundbegriffe und Hilfsmittel	108
A.1	Die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation	108
A.2	Das Stieltjes-Integral	110
A.3	Die Laplace- und die Laplace-Stieltjes-Transformation	114

A.4	Der Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder	114
B	Beweise und Ergänzungen	117
B.1	Beweise zu Abschnitt 2.1	117
B.2	Beweise zu Abschnitt 2.2	122
B.3	Beweise zu Abschnitt 3.2	130
B.4	Ergänzungen zu Abschnitt 3.4	133
C	Abbildungen	138
C.1	Abbildungen von Dichtegeneratoren $g^{(5,p)}$ von $\Phi_{g^{(5,p)}}$	138
C.2	Abbildungen von Simulationen von $SMN_{2,p}(\mu, \Sigma, G)$	140
C.3	Abbildungen von Simulationen von $SMAGP_p(m, S, G)$	147
D	Quellcodes	151
D.1	Quellcodes zur Darstellung von Dichtegeneratoren und Dichten	151
D.2	Quellcodes zur Simulation von $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$	158
D.3	Quellcodes zur Simulation von $SMAGP_p(m, S, G)$	175

Abbildungsverzeichnis

2.1	Dichtegeneratoren der zweidimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung und der $l_{2,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit festen Parametern $M = 3$, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	7
2.2	Dichten der zweidimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	8
2.3	Dichten der $l_{2,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit festen Parametern $M = 3$, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	8
C.1	Dichtegeneratoren $l_{5,p}$ -symmetrischer Kotz-Typ-Verteilungen für variierende Parameter $M > 1 - \frac{5}{p}$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	138
C.2	Dichtegeneratoren $l_{5,p}$ -symmetrischer Pearson-Typ VII-Verteilungen für verschiedene Parameter $M > \frac{5}{p}$ und $\nu > 0$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	138
C.3	Dichtegeneratoren $l_{5,p}$ -symmetrischer Pearson-Typ II-Verteilungen mit variierendem Parameter $\nu > 0$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	139
C.4	Dichtegeneratoren $l_{5,p}$ -symmetrischer Kotz-Typ-Verteilungen für $\beta = 1$ und verschiedene $1 - \frac{5}{p} < M \leq 1$ und $0 < \gamma \leq 1$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	139
C.5	Dichtegeneratoren $l_{5,p}$ -symmetrischer Slash-Verteilungen mit Parameter $\nu \in \{1, 2, 3\}$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	140
C.6	2000 Simulationen und die Lebesgue-Dichte der Rang-2-stetigen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierten Kotz-Typ-Verteilung mit den Parametern μ_1 und Σ_1 aus Abschnitt 3.5, $M = 1$, $\beta = 2$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	141
C.7	2000 Simulationen und die Lebesgue-Dichte der Rang-2-stetigen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierten Student- t -Verteilung mit den Parametern μ_1 und Σ_1 aus Abschnitt 3.5 und $\nu = 3$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	142
C.8	Ausschnitte der simulierten Punktwolken aus Abbildungen C.7	142
C.9	2000 Simulationen und die Lebesgue-Dichte der Rang-2-stetigen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierten Slash-Verteilung mit den Parametern μ_1 und Σ_1 aus Abschnitt 3.5 und $\nu = 5$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	143
C.10	350 Simulationen sowie die dichte-ähnliche Darstellung der Rang-1-stetigen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierten Kotz-Typ-Verteilung mit den Parametern μ_2 und Σ_2 aus Abschnitt 3.5, $M = 1$, $\beta = 2$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	144
C.11	350 Simulationen sowie die dichte-ähnliche Darstellung der Rang-1-stetigen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierte Student- t -Verteilung mit Parametern μ_2 und Σ_2 aus Abschnitt 3.5 und $\nu = 3$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	145
C.12	350 Simulationen sowie die dichte-ähnliche Darstellung der Rang-1-stetigen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierte Slash-Verteilung mit Parametern μ_2 und Σ_2 aus Abschnitt 3.5 und $\nu = 5$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	146

C.13 Simulationen des p -verallgemeinerten Standard-Gauß-Prozesses, des p -verallgemeinerten Standard-Student- t -Prozesses mit Parameter $\nu = 3$ und des p -verallgemeinerten Standard-Slash-Prozesses mit Parameter $\nu = 5$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	147
C.14 Je drei Simulationen des p -verallgemeinerten Standard-Gauß-Prozesses für $p = \frac{1}{2}$, des p -verallgemeinerten Standard-Student- t -Prozesses mit Parameter $\nu = 3$ für $p = 1$ sowie des p -verallgemeinerten Standard-Slash-Prozesses mit Parameter $\nu = 5$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 3\}$	148
C.15 Simulationen des p -verallgemeinerten Standard-Student- t -Prozesses mit Parameter $\nu = 2$ sowie des p -verallgemeinerten Standard-Slash-Prozesses mit Parameter $\nu = \{1, 3\}$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$	149
C.16 Simulationen des p -verallgemeinerten Standard-Gauß-Prozesses für $p = 1$ und verschiedene Diskretisierung des Intervalls $[0, 1]$	150
C.17 Graphen der Lage- und Skalierungsfunktionen m_i bzw. S_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, aus Abschnitt 4.4	150
C.18 Simulationen der p -verallgemeinerten Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zu den Lage- bzw. Skalierungsfunktionen aus Abbildung C.16 für $p = 3$	150

1 Einleitung

Die Termini der Zufallsvariablen und des Zufallsvektors erweiternd werden stochastische Prozesse in der Wahrscheinlichkeitstheorie als im Allgemeinen unendlich-dimensionale Zufallselemente eingeführt und können somit zur Beschreibung zeitabhängiger zufälliger Vorgänge in der Physik und Biologie, in der Finanzmathematik sowie in der Elektrotechnik wie beispielsweise zur Modellierung der Bewegung eines Teilchens, des Wertes einer Aktie oder von Störungen in elektrischen (Sprach-) Signalen verwendet werden. Aufgrund dieser weitreichenden Anwendungsfelder sind stochastische Prozesse sowie ihre Eigenschaften und auf ihnen basierende stochastische Modelle sowohl in der Wahrscheinlichkeitstheorie als auch in der mathematischen Statistik von immanenter Bedeutung. Grundlegend können stochastische Prozesse wahrscheinlichkeitstheoretisch auf zahlreiche Weisen konstruiert bzw. beschrieben werden. Neben den Konstruktionen u.a. über Familien von Zufallsvariablen, deren Elemente beispielsweise spezifische Autoregressionsvorschriften erfüllen oder als Koeffizienten in Reihendarstellungen auftreten, bildet der erstmals in Kolmogorov (1933) formulierte sowie bewiesene Existenzsatz von Kolmogorov eine fundamentale Aussage, mit der ein stochastischer Prozess unter gewissen Voraussetzungen derart konstruiert bzw. seine Existenz nachgewiesen werden kann, dass seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen mit einer vorliegenden Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen übereinstimmt, vergleiche Abschnitt 4.1. Insbesondere impliziert diese Konstruktion eines stochastischen Prozesses die explizite Kenntnis seiner Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen und infolgedessen die Möglichkeit, die Eigenschaften der Elemente dieser Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu studieren und zu Eigenschaften des stochastischen Prozesses bzw. eines stochastischen Prozesses mit derselben Familie endlich-dimensionaler Verteilungen, d.h. eines äquivalenten stochastischen Prozesses, ausweiten zu können. Jedoch, obwohl theoretisch jeder stochastische Prozess eine derartige Konstruktion über seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilung besitzt, ist ihre praktische Umsetzung nur für einige stochastische Prozesse möglich, da die Familien der endlich-dimensionalen Verteilungen zahlreicher stochastischer Prozesse nicht explizit bekannt und multivariate Verteilungen im Allgemeinen schwer zugänglich bzw. handhabbar sind.

Als Beispiele stochastischer Prozesse, für die diese Konstruktion anwendbar ist, werden in zahlreichen Textbüchern wie Schilling und Partzsch (2014) oder Shiryaev (1996) der Wiener-Prozess, der auch als Brownsche Bewegung bezeichnet wird, oder allgemeiner ein beliebiger Gauß-Prozess genannt bzw. mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov eingeführt. Über weitere Beispiele wie stochastische Prozesse mit unabhängigen Werten bzw. unabhängigen Zuwächsen oder Markov-Prozessen hinaus, bilden die in Vershik (1964) eingeführten sphärisch-invarianten stochastischen Prozesse eine umfassende Klasse von derart konstruierbaren stochastischen Prozessen, die in der Literatur auch als Klasse elliptischer stochastischer Prozesse bezeichnet wird und die insbesondere die Klasse

der Gauß-Prozesse beinhaltet. Weiterführend ist die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses nach Yao (1973) bzw. Kano (1994) eine die Voraussetzungen des Existenzsatzes von Kolmogorov erfüllende Teilmenge der Familie der Skalenmischungen von Normalverteilungen und der stochastische Prozess selbst ist gemäß Wise und jun. Gallagher (1978) infolgedessen äquivalent zum Produkt eines Gauß-Prozesses mit einer von diesem unabhängigen positiven Zufallsvariablen, siehe Abschnitt 4.2. Dabei wird der Begriff der Skalenmischung einer Normalverteilung unabhängig von den vorherigen Betrachtungen in Andrews und Mallows (1974) als die Verteilung des Produktes einer normalverteilten und einer von dieser unabhängigen positiven Zufallsvariablen eingeführt und u.a. in Lange und Sinsheimer (1993) zu Skalenmischungen von Normalverteilungen multivariat verallgemeinert, vergleiche Abschnitt 3.1, wodurch Skalenmischungen von Standard- bzw. von beliebigen Normalverteilungen eine Teilklasse der sphärischen bzw. der elliptisch konturierten Verteilungen bilden.

Wie im Titel erkennbar ist, liegt der Fokus dieser Arbeit auf der Untersuchung von p -Verallgemeinerungen sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse und insbesondere auf dem Nachweis ihrer Existenzen. Dabei bezeichnet der Terminus der p -Verallgemeinerung für $p > 0$ in der Literatur den Übergang von sphärischen zu den in Osiewalski und Steel (1993) eingeführten $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen oder von regulären elliptisch konturierten zu den in Richter (2014) eingeführten p -verallgemeinert elliptisch konturierten Verteilungen als zugrunde liegende Modellklassen bzw. die damit verbundenen Betrachtungen geeigneter nichteuklidischer Geometrien anstelle der euklidischen Geometrie. Beispielsweise werden p -verallgemeinerte trigonometrische Funktionen und eine p -verallgemeinerte Polarkoordinatentransformation, siehe Anhang A.1, in Richter (2007), ein p -verallgemeinerter Oberflächeninhalt in Richter (2009) sowie zahlreiche p -verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Statistiken wie die p -verallgemeinerten Versionen der Weibull-Verteilung, der Pearson-Typ II oder VII-Verteilungen, der χ^2 -Verteilung oder der Fisher-Verteilung in Gupta und Song (1997) und Richter (2009) eingeführt und studiert. Ein weiteres, wohlbekanntes Beispiel ist die bereits in Subbotin (1923) eingeführte n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung mit der Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

vergleiche Abschnitt 2.1. Weiter sind die obigen p -Verallgemeinerungen bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilungen insbesondere Elemente der Klasse $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen, siehe Abschnitt 2.1, die über die zuletzt genannten Arbeiten hinaus in Arellano-Valle und Richter (2012), Kalke (2013), Müller und Richter (2017a, 2017b) sowie den darin aufgeführten Referenzen studiert wird. Schließlich werden stetige $l_{n,p}$ -symmetrische

Verteilungen in Müller (2014) zu $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen erweitert, die sowohl die gewöhnlichen elliptisch konturierten Verteilungen als auch die p -verallgemeinert elliptisch konturierten Verteilungen als Spezialfälle enthalten, siehe Abschnitt 2.2.

In der vorliegenden Arbeit werden die Existenzen von reellen stochastischen Prozessen mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen und allgemeiner mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov nachgewiesen, die die Teilklassen der elliptischen stochastischen Prozesse mit sphärischen bzw. mit achsenparallel elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen p -verallgemeinern, siehe Abschnitt 4.3. Die auf der Basis dieser Existenzen eingeführten stochastischen Prozesse auf eine umfassende Klasse von Spezialfällen einschränkend, werden in Abschnitt 4.4 weitere Eigenschaften und Simulationen reeller stochastischer Prozesse mit einer Familie von achsenparallel konturierten Skalenmischungen multivariater p -verallgemeinerter Normalverteilungen als Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen studiert bzw. erläutert, wobei insbesondere die in Anhang C.3 angegebenen Trajektorien p -verallgemeinerter Gauß-, Student- t und Slash-Prozesse jeweils mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen visuell verglichen werden.

Zielführend auf diese Kernaussagen ist diese Arbeit wie folgt strukturiert. In Kapitel 2 werden zunächst Notationen und sowohl in der Literatur bekannte als auch neue Resultate bezüglich stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer sowie Rang- k -stetiger $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen für den weiteren Verlauf dieser Arbeit bereitgestellt und erläutert, wobei die Betrachtungen zur $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation, die zum Teil technischen Beweise der neuen Resultate und einige Abbildungen aus Gründen der besseren Lesbarkeit in den Anhängen A.1, B.1 bzw. B.2 und C.1 angegeben werden. Aufgrund der oben beschriebenen Zusammenhänge zwischen Skalenmischungen von Normalverteilungen und elliptischen stochastischen Prozessen, deren Literaturhistorien in den Abschnitten 3.1 bzw. 4.2 ausführlich dargestellt werden, thematisieren die Abschnitte 3.2 bzw. 3.4 Skalenmischungen multivariater p -verallgemeinerter Normalverteilungen zunächst ohne und anschließend mit zwei zusätzlichen Parametern und spezifizieren deren Eigenschaften, wobei die in den Anhängen A.2, A.3 und A.4 erläuterten Grundlagen zu Stieltjes-Integralen, zu (Laplace-) Stieltjes-Transformationen bzw. zum Begriff der vollständigen Monotonie und zum Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder verwendet werden. Darüber hinaus werden einerseits Beispiele und Gegenbeispiele dieser Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmt, siehe Abschnitt 3.3, sowie einige Simulationen anhand dreier Simulationsalgorithmen durchgeführt, siehe Abschnitt 3.5 und Anhang C.2, und andererseits ergänzende Beweise zu Abschnitt 3.2 sowie ergänzende Resultate zu Abschnitt 3.4 in den Anhängen B.4 bzw. B.3 angegeben. Als letzte Vorbereitung der obigen Kernaussagen dieser Arbeit gibt Abschnitt 4.1 eine allgemeine Einführung in die Theorie stochastischer Prozesse einschließlich des Existenzsatzes von Kolmogorov. Letztlich sei bemerkt, dass alle Abbildungen mit dem Programm Matlab in der Version R2014b erstellt wurden und dass die zugehörigen Quellcodes in Anhang D angegeben sind.

2 Vorbetrachtungen

Als Vorbereitung der nachfolgenden Kapitel werden in den Abschnitten 2.1 und 2.2 zunächst die Klassen der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen bzw. der Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen anhand ihrer Definition und einiger ihrer in der Literatur bekannten Eigenschaften erläutert. Zudem werden diese Ausführungen durch neue Resultate ergänzt, die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sind. Dazu bezeichnen allgemein $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen erweitert um die Null, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ die Menge der reellen Zahlen sowie $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der n -dimensionalen Spaltenvektoren mit reellen Komponenten.

2.1 Stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen

Neben der formalen Definition der Klasse der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen und einigen zugehörigen Bemerkungen werden in diesem Abschnitt einerseits Eigenschaften wie stochastische Darstellungen, Momente und Randverteilungen und andererseits zahlreiche wohlbekannte Beispiele dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen thematisiert und zudem in Spezialfällen visualisiert.

In der gesamten Arbeit seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $p > 0$ beliebig, aber fest. Weiter bezeichnen $|x|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, das p -Funktional in \mathbb{R}^n , welches für $p \geq 1$ eine Norm und nach Moszyńska und Richter (2012) für $0 < p \leq 1$ eine Antinorm ist, $S_{n,p}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_p = r\}$ die $l_{n,p}$ -Sphäre mit p -verallgemeinertem Radius $r \geq 0$ und $S_{n,p} = S_{n,p}(1)$ die $l_{n,p}$ -Einheitssphäre.

Eine Funktion $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $0 < I_n(g) < \infty$ heißt dichtegenerierende Funktion einer n -variaten Verteilung, wobei

$$I_n(g) = \int_0^\infty r^{n-1} g(r) dr. \quad (2.1)$$

Unter Verwendung der Notation $\omega_{n,p}$ des $l_{n,p}$ -verallgemeinerten Oberflächeninhalts der $l_{n,p}$ -Einheitssphäre $S_{n,p}$,

$$\omega_{n,p} = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n}{p^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}, \quad (2.2)$$

kann die folgende Definition einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung über ihre Lebesgue-Dichte angegeben werden.

Definition 2.1. Ein Zufallsvektor $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Lebesgue-Dichte

$$f_X(x) = \frac{g(|x|_p)}{\omega_{n,p} I_n(g)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

heißt stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilt mit dichtegenerierender Funktion g .

Bemerkt sei, dass Definition 2.1 im Vergleich zu früheren Arbeiten über stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen wie Gupta und Song (1997) und Richter (2009) einen Notationswechsel beinhaltet, der ausführlich in Müller und Richter (2016a) erläutert ist und der ermöglicht, diese Verteilungsklasse in die Klasse der stetigen sternförmigen Verteilungen einzubetten. Dabei sind stetige sternförmige Verteilungen in Richter (2014) derart definiert, dass ihre Lebesgue-Dichte aus einer dichtegenerierenden Funktion ausgewertet im Minkowski-Funktional eines Kontur definierenden Sternkörpers multipliziert mit einer passenden normierenden Konstanten obiger Produktstruktur besteht, und ein Sternkörper eine nichtleere sternförmige Menge, die kompakt ist, die mit dem topologischen Abschluss ihres Inneren übereinstimmt und die den Ursprung in ihrem Inneren enthält. Da die $l_{n,p}$ -Einheitssphäre $S_{n,p}$ ein Sternkörper ist, deren Minkowski-Funktional mit dem p -Funktional in \mathbb{R}^n übereinstimmt, sind stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen demzufolge Spezialfälle stetiger sternförmiger Verteilungen.

Die obige Lebesgue-Dichte $f_X(x)$ einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit dichtegenerierender Funktion g nimmt in allen Stellen $x \in S_{n,p}(r)$ für ein beliebiges, aber festes $r \geq 0$ denselben Wert an, der durch die Funktion h mit $h(s) = \frac{g(s)}{\omega_{n,p} I_n(g)}$, $s \geq 0$, also durch die dichtegenerierende Funktion g , festgelegt ist. Für eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset [0, \infty)$ sei g_1 eine weitere dichtegenerierende Funktion einer n -variater Verteilung mit $g_1(r) = g(r)$ für $r \in [0, \infty) \setminus N$ und $g_1(r) \neq g(r)$ für $r \in N$, d.h. g_1 stimmt Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$ mit g überein. Dann gilt $I_n(g_1) = I_n(g)$ und die Lebesgue-Dichte der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit dichtegenerierender Funktion g_1 stimmt Lebesgue-fast überall in \mathbb{R}^n mit f_X überein, da $\bigcup_{r \in N} S_{n,p}(r)$ eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes in \mathbb{R}^n ist. Da weiter Lebesgue-Dichten n -variater regulärer Verteilungen nach deren Definition als Radon-Nikodym-Ableitungen des zugrunde liegenden n -dimensionalen Wahrscheinlichkeitsmaßes nach dem Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^n nur Lebesgue-fast überall in \mathbb{R}^n eindeutig bestimmt sind, stimmen die stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen mit den dichtegenerierenden Funktionen g bzw. g_1 überein.

Weiter sei nun $C > 0$ konstant und $g_2(r) = C \cdot g(r)$, $r \geq 0$, für eine dichtegenerierende Funktion g . Dann gilt $I_n(g_2) = C \cdot I_n(g)$ und $\frac{g_2(|x|_p)}{\omega_{n,p} I_n(g_2)} = \frac{g(|x|_p)}{\omega_{n,p} I_n(g)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Somit stimmen die stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen zu den dichtegenerierenden Funktionen g bzw. g_2 ebenfalls überein.

Um die im vorherigen Absatz thematisierte Uneindeutigkeit dichtegenerierender Funktionen einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung zu eliminieren, heißt eine dichtegenerierende Funktion g einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit $I_n(g) = \frac{1}{\omega_{n,p}}$, d.h. $\omega_{n,p} I_n(g) = 1$, Dichtegenerator dieser Verteilung und wird nachfolgend mit $g^{(n,p)}$ bezeichnet. Zudem werden die stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung mit Dichtegenerator

$g^{(n,p)}$ und deren Lebesgue-Dichte mit $\Phi_{g^{(n,p)}}$ bzw. $\varphi_{g^{(n,p)}}$ bezeichnet, d.h.

$$\varphi_{g^{(n,p)}}(x) = g^{(n,p)}(|x|_p), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Trotz des Übergangs von dichtegenerierenden Funktionen zu Dichtegeneratoren bleibt die besprochene Uneindeutigkeit der Funktionen in Lebesgue-Nullmengen bestehen, siehe Bemerkung 2.1.

Bemerkung 2.1. Wie dichtegenerierende Funktionen sind Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$ eindeutig bestimmt. Sofern eine an einen Dichtegenerator gestellte Bedingung nicht überall, jedoch Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$ erfüllt ist, kann diese somit dennoch als erfüllt angesehen und weiter verwendet werden, wobei eine solche Vorgehensweise auch für Lebesgue-Dichten etabliert ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird dieser Aspekt der Nichteindeutigkeit von Dichtegeneratoren in Lebesgue-Nullmengen nur an ausgewählten Stellen explizit thematisiert und ein Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$ eindeutig bestimmter Dichtegenerator einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung wird als der Dichtegenerator dieser Verteilung bezeichnet.

Weiter stimmt die Klasse der stetigen $l_{n,2}$ -symmetrischen Verteilungen mit der Klasse der stetigen n -variaten sphärischen Verteilungen überein. Darüber hinaus sei an dieser Stelle bemerkt, dass $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen in einigen Arbeiten wie Gupta und Song (1997), Richter (2009) oder Müller und Richter (2016a) auch $l_{n,p}$ -sphärische Verteilungen genannt werden, wobei diese Bezeichnung insbesondere auf die hier betrachtete Teilklasse der stetigen Verteilungen übertragen werden kann.

Im Folgenden werden einige Beispiele von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen angegeben, siehe Gupta und Song (1997) und Müller und Richter (2016a, 2016b), und jeweils in einigen Spezialfällen dargestellt. Für Darstellungen weiterer Spezialfälle sei auf Müller und Richter (2017b) verwiesen.

Beispiel 2.1. a) Der Dichtegenerator der $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit Parametern $M > 1 - \frac{n}{p}$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ ist

$$g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(n,p)}(r) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} r^{p(M-1)} \exp\{-\beta r^{p\gamma}\}, \quad r > 0,$$

wobei

$$C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} = \left(\frac{p}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \frac{\gamma \beta^{\frac{n+p(M-1)}{p\gamma}} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p(M-1)}{p\gamma}\right)}.$$

b) Speziell ist der Dichtegenerator der $l_{n,p}$ -symmetrischen Potenz-Exponential-Vertei-

lung mit Parameter $\gamma > 0$

$$g_{PE;\gamma}^{(n,p)}(r) = g_{Kt;1,\frac{1}{p},\gamma}^{(n,p)}(r) = \left(\frac{p}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \frac{\gamma \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{p^{\frac{n}{p\gamma}} \Gamma\left(\frac{n}{p\gamma}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{p} r^{p\gamma}\right\}, \quad r \geq 0.$$

c) Insbesondere ist der Dichtegenerator der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung oder p -verallgemeinerten Laplace-Verteilung

$$g_{PE}^{(n,p)}(r) = g_{PE;1}^{(n,p)}(r) = \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \exp\left\{-\frac{1}{p} r^p\right\}, \quad r \geq 0.$$

Zur Vermittlung eines ersten Eindruckes sowohl der Dichtegeneratoren als auch der Dichten stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen sowie deren Zusammenhanges sind in Abbildung 2.1 die Dichtegeneratoren $g_{PE}^{(2,p)}$ der zweidimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung und $g_{Kt;3,1,2}^{(2,p)}$ der $l_{2,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit Parametern $M = 3$, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ jeweils für $p \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ dargestellt. Weiterführend sind die Dichten der zu diesen Dichtegeneratoren gehörigen stetigen $l_{2,p}$ -symmetrischen Verteilungen in den Abbildungen 2.2 bzw. 2.3 veranschaulicht. Für den Fall $n = 5$ und erneut $p \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ zeigt Abbildung C.1 darüber hinaus die Dichtegeneratoren $g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(5,p)}$ der $l_{5,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung für verschiedene Parameter $M > 1 - \frac{5}{p}$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$, um die Auswirkungen der Variation der Parameter auf die Dichtegeneratoren bzw. die zugehörigen Verteilungen aufzuzeigen.

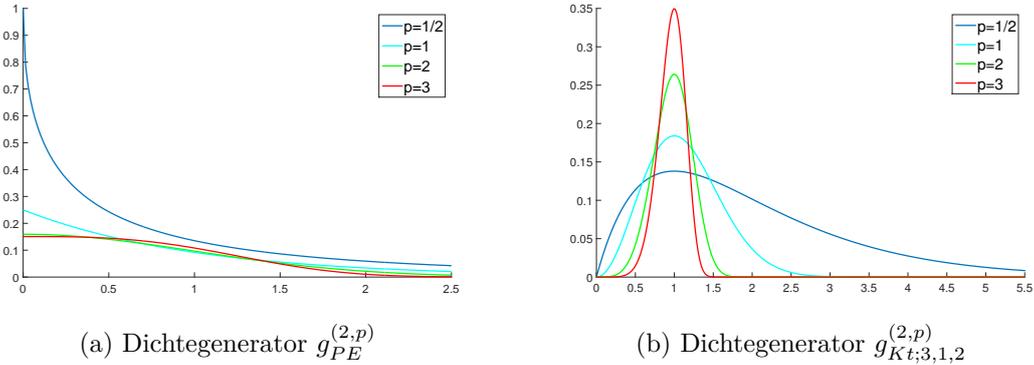
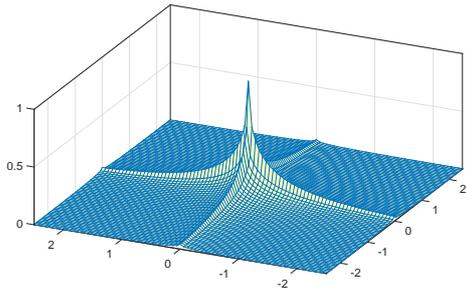
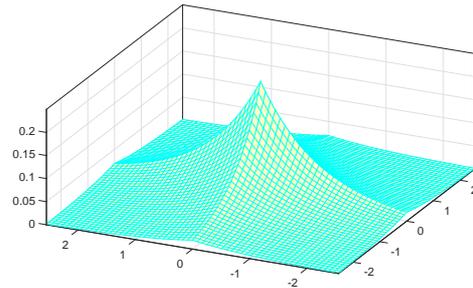


Abbildung 2.1: Dichtegeneratoren der zweidimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung und der $l_{2,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit festen Parametern $M = 3$, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ für $p \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

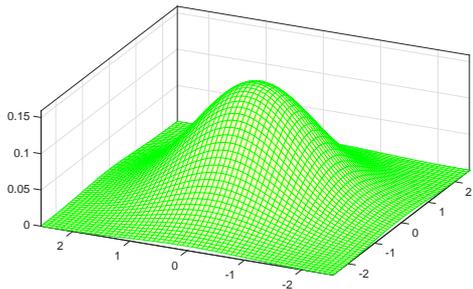
Bei Vergleichen der in den Abbildungen 2.1, 2.2 und 2.3 sowie C.1 dargestellten Funktionen sind die zahlreichen verschiedenen Skalierungen der Achsen zu beachten. Weiter ist in den Abbildungen 2.2 und 2.3 ersichtlich, dass die Dichteniveaumengen stetiger $l_{2,p}$ -symmetrischer Verteilungen $l_{2,p}$ -Sphären mit p -verallgemeinerten Radien sind. Durch die spezifische Gestalt der Dichte $\varphi_{g^{(n,p)}}$, siehe (2.4), wird deutlich, dass allgemeiner ei-



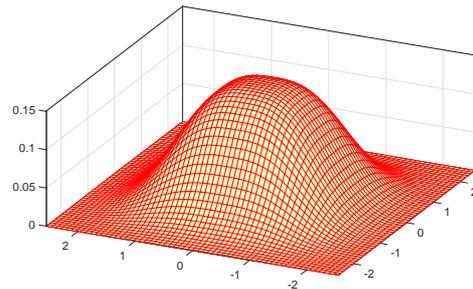
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$

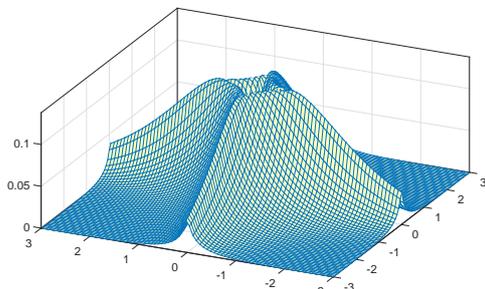


(c) $p = 2$

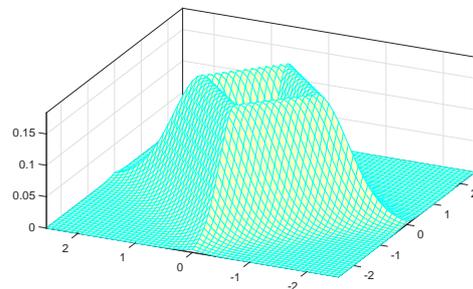


(d) $p = 3$

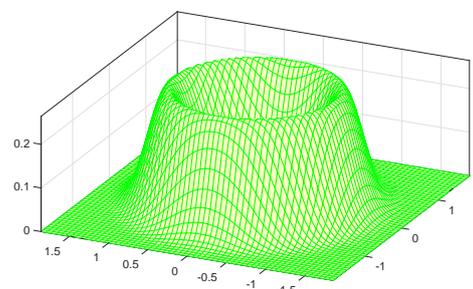
Abbildung 2.2: Dichten $\varphi_{g_{PE}^{(2,p)}}$ der zweidimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.



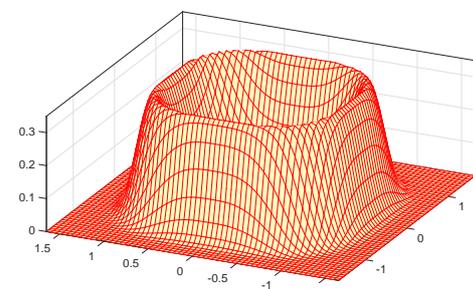
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$



(c) $p = 2$



(d) $p = 3$

Abbildung 2.3: Dichten $\varphi_{g_{Ki;3,1,2}^{(2,p)}}$ der $l_{2,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit Parametern $M = 3$, $\beta = 1$ und $\gamma = 2$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

ne stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung $l_{n,p}$ -Sphären mit p -verallgemeinerten Radien als Dichteniveaumengen besitzt.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung als Spezialfall der Klasse der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen von besonderer Bedeutung sein. Daher sei sie mit der gesonderten Notation $N_{n,p}$ versehen, d.h. $N_{n,p} = \Phi_{g_{PE}^{(n,p)}}$.

Beispiel 2.2. a) Der Dichtegenerator der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung mit Parametern $M > \frac{n}{p}$ und $\nu > 0$ ist

$$g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}(r) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \left(1 + \frac{r^p}{\nu}\right)^{-M}, \quad r \geq 0,$$

$$\text{wobei } C_{PT7;M,\nu}^{n,p} = \left(\frac{p}{2\Gamma(\frac{1}{p})}\right)^n \frac{\Gamma(M)}{\nu^{\frac{n}{p}} \Gamma(M - \frac{n}{p})}.$$

b) Der Dichtegenerator der $l_{n,p}$ -symmetrischen Student- t -Verteilung mit Parameter $\nu > 0$ ist

$$g_{St;\nu}^{(n,p)}(r) = g_{PT7;\frac{n+\nu}{p},\nu}^{(n,p)}(r) = \left(\frac{p}{2\Gamma(\frac{1}{p})}\right)^n \frac{\Gamma(\frac{n+\nu}{p})}{\nu^{\frac{n}{p}} \Gamma(\frac{\nu}{p})} \cdot \left(1 + \frac{r^p}{\nu}\right)^{-\frac{n+\nu}{p}}, \quad r \geq 0.$$

c) Speziell ist der Dichtegenerator der $l_{n,p}$ -symmetrischen Cauchy-Verteilung

$$g_C^{(n,p)}(r) = g_{St;1}^{(n,p)}(r) = \frac{p^n \Gamma(\frac{n+1}{p})}{2^n \left(\Gamma(\frac{1}{p})\right)^{n+1}} (1 + r^p)^{-\frac{n+1}{p}}, \quad r \geq 0.$$

In Abbildung C.2 sind für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ Illustrationen der Dichtegeneratoren $g_{PT7;M,\nu}^{(5,p)}$ der $l_{5,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung für verschiedene Parameter $M > \frac{5}{p}$ und $\nu > 0$ angegeben, die die Effekte einer Parametervariation verdeutlichen. Durch die erneute Wahl der Dimension $n = 5$ können ebenfalls Vergleiche zu den vorherigen Betrachtungen der $l_{5,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilungen, siehe Abbildung C.1, angestellt werden, wobei jedoch die unterschiedlichen Achsenskalierungen zu beachten sind.

Für die nachfolgende Angabe einer dritten Teilklasse der Familie der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen bezeichne $\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } t \in A \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, für den verbleibenden Teil dieser Arbeit die Indikatorfunktion der Menge $A \subset \mathbb{R}$.

Beispiel 2.3. Der Dichtegenerator der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ II-Verteilung mit Parameter $\nu > 0$ ist

$$g_{PT2;\nu}^{(n,p)}(r) = C_{PT2;\nu}^{n,p} (1 - r^p)^\nu \mathbb{1}_{(0,1)}(r), \quad r \geq 0,$$

wobei $C_{PT2;\nu}^{n,p} = \left(\frac{p}{2\Gamma(\frac{1}{p})}\right)^n \frac{\Gamma(\frac{n}{p} + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}$.

In Abbildung C.3 sind erneut für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ die Dichtegeneratoren $g_{PT2;\nu}^{(5,p)}$ der $l_{5,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ II-Verteilungen mit $\nu \in \{1, 2, 3\}$ dargestellt. Aufgrund der wiederholten Wahl der Dimension $n = 5$, jedoch unter Beachtung der sehr verschiedenen Achsenskalierungen, insbesondere im Fall $p = \frac{1}{2}$, können diese Visualisierungen mit denen der Abbildungen C.1 und C.2 verglichen werden.

In Müller und Richter (2016b) werden zwei Invarianzeigenschaften einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung angegeben und nach Richter (2009) ist eine geometrisch interpretierbare stochastische Darstellung einer solchen Verteilung bekannt, siehe Lemmata 2.1 und 2.2. Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit bezeichne dazu $\mathfrak{L}(X)$ die Verteilung einer Zufallsvariablen X , $X \stackrel{d}{=} Y$ den Fall, dass die Zufallsvariablen X und Y dieselbe Verteilung besitzen, und $X \sim \Phi$ bzw. $X \sim F$ die Fälle, dass die Zufallsvariable X die Verteilung Φ bzw. die Verteilungsfunktion F besitzt.

Lemma 2.1. *Das stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaß $\Phi_{g^{(n,p)}}$ ist permutations- und vorzeicheninvariant.*

Lemma 2.2. *Ein stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ verteilter Zufallsvektor X erfüllt die stochastische Darstellung*

$$X \stackrel{d}{=} R U_p^{(n)}. \quad (2.5)$$

Dabei ist $U_p^{(n)}$ n -dimensional p -verallgemeinert gleichverteilt auf $S_{n,p}$, R und $U_p^{(n)}$ sind stochastisch unabhängig und R ist eine nichtnegative Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_R(r) = \omega_{n,p} r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Nach Lemma 2.1 ist $\Phi_{g^{(n,p)}}$ insbesondere ein Element der Klasse \mathcal{SI} von vorzeicheninvarianten Verteilungen, siehe Arellano-Valle und del Pino (2004).

Mithilfe der in Abschnitt A.1 thematisierten $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation kann eine weitere stochastische Darstellung eines stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektors angegeben werden, siehe Lemma 2.3. Dabei erfolgt die erste Anwendung dieser Koordinatentransformation auf $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen in Richter (2009) und die stochastische Darstellung aus Lemma 2.3 ist für stetige $l_{2,p}$ -symmetrische Verteilungen in Richter (2015a, Beispiel 3.6) und insbesondere für die bivariate p -verallgemeinerte Normalverteilung in Kalke und Richter (2013, Abschnitt 3.1) formuliert. Für die Fälle der Norm konturierten Verteilungen in \mathbb{R}^2 sowie der p -verallgemeinerten elliptisch konturierten Verteilungen in \mathbb{R}^n ist eine entsprechende stochastische Darstellung in Richter (2015b, Theorem 4) bzw. Richter (2014, Bemerkung 11) und Richter (2017) angegeben, wobei die zuletzt genannte Verteilungsklasse auf den in Lemma 2.3 betrachteten Fall spezialisiert werden kann, vergleiche Abschnitte 2.2.1 und 2.2.2.

Lemma 2.3. *Ein stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ verteilter Zufallsvektor X erfüllt die stochastische Darstellung*

$$X \stackrel{d}{=} SHP_p^{(n)}(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}). \quad (2.7)$$

Dabei sind die nichtnegativen Zufallsvariablen $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ vollständig stochastisch unabhängig und besitzen die folgenden Lebesgue-Dichten:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \omega_{n,p} r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}, \\ f_{\Psi_i}(\psi_i) &= \frac{\omega_{n-i,p}}{\omega_{n-i+1,p}} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \mathbf{1}_{[0,\pi)}(\psi_i), \quad \psi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n-2, \\ f_{\Psi_{n-1}}(\psi_{n-1}) &= \frac{1}{\omega_{2,p}} \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} \mathbf{1}_{[0,2\pi)}(\psi_{n-1}), \quad \psi_{n-1} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei f_Z die zur Zufallsvariablen Z gehörige Lebesgue-Dichte bezeichnet.

Beweis. Siehe Anhang B.1. □

Zu den obigen Darstellungen der Dichten f_{Ψ_i} , $i = 1, \dots, n-1$, sei bemerkt, dass mithilfe von (2.2) weiter $\frac{\omega_{n-i,p}}{\omega_{n-i+1,p}} = \frac{p\Gamma(\frac{n-i+1}{p})}{2\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{n-i}{p})}$ und $\frac{1}{\omega_{2,p}} = \frac{p\Gamma(\frac{2}{p})}{(2\Gamma(\frac{1}{p}))^2}$ gilt.

In Arellano-Valle und Richter (2012) werden zudem beliebige Momente $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen und damit insbesondere die ersten beiden Momente der in dieser Arbeit betrachteten Teilklasse der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen bestimmt, siehe Lemma 2.4. Dazu bezeichnen $\mathbb{E}(X)$ und $\text{Cov}(X)$ den Erwartungswert bzw. die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors X sowie 0_n den Nullvektor des \mathbb{R}^n und I_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Lemma 2.4. *Sei $X \sim \Phi_{g^{(n,p)}}$. Dann ist $\mathbb{E}(X) = 0_n$, falls $\mathbb{E}(R) = \omega_{n,p} I_{n+1}(g^{(n,p)})$ endlich ist, und $\text{Cov}(X) = \sigma_{g^{(n,p)}}^2 I_n$, falls $\mathbb{E}(R^2) = \omega_{n,p} I_{n+2}(g^{(n,p)})$ endlich ist, wobei*

$$\sigma_{g^{(n,p)}}^2 = \tau_{n,p} \omega_{n,p} I_{n+2}(g^{(n,p)}) \quad \text{mit} \quad \tau_{n,p} = \frac{\Gamma(\frac{3}{p}) \Gamma(\frac{n}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p}) \Gamma(\frac{n+2}{p})}.$$

Weiter sind die Komponenten von X genau dann nicht nur unkorreliert, sondern sogar unabhängig, wenn $g^{(n,p)} = g_{PE}^{(n,p)}$.

Die Konstante $\sigma_{g^{(n,p)}}^2$ heißt dabei univariate Varianzkomponente. Der Hintergrund bzw. die Rechtfertigung dieser Namensgebung geht aus Lemma 2.7 hervor.

Die Existenz der ersten beiden Momente der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen aus den Beispielen 2.1, 2.2 und 2.3 und die zugehörigen Konstanten $\sigma_{g^{(n,p)}}^2$ sind im Anhang von Müller und Richter (2016b) angegeben. Für den Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung existieren demnach die ersten beiden Momente für alle Parameterwahlen

$M > 1 - \frac{n}{p}$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ und es gilt

$$\sigma_{g_{Kt;M,\beta,\gamma}}^{2(n,p)} = \beta^{-\frac{2}{p\gamma}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+2+p(M-1)}{p\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+p(M-1)}{p\gamma}\right)}.$$

Im speziellen Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Potenz-Exponential-Verteilung mit Parameter $\gamma > 0$ ist

$$\sigma_{g_{PE;\gamma}}^{2(n,p)} = p^{\frac{2}{p\gamma}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{p\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{p\gamma}\right)}.$$

Weiter gilt im Spezialfall der n -variaten p -verallgemeinerten Normalverteilung

$$\sigma_{g_{PE}}^{2(n)} = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)},$$

die bereits in Arellano-Valle und Richter (2012) bestimmt ist. Insbesondere ist damit die in Müller und Richter (2016b, Anhang A.1) angegebene Darstellung von $\sigma_{g_{PE;\gamma}}^{2(n,p)}$ nur für die Parameterwahl $\gamma = 1$ korrekt, da sie fälschlicherweise mit der Darstellung von $\sigma_{g_{PE}}^{2(n,p)}$ übereinstimmt. Das erste Moment eines $l_{n,p}$ -symmetrisch Pearson-Typ VII-verteilten Zufallsvektors existiert für alle $M > \frac{n+1}{p}$ und $\nu > 0$ und das zweite Moment für alle $M > \frac{n+2}{p}$ und $\nu > 0$. Dabei ist

$$\sigma_{g_{PT7;M,\nu}}^{2(n,p)} = \nu^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(M - \frac{n+2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(M - \frac{n}{p}\right)}.$$

Insbesondere existiert das erste Moment eines $l_{n,p}$ -symmetrisch Student- t -verteilten Zufallsvektors für alle $\nu > 1$ und das zweite für alle $\nu > 2$ mit

$$\sigma_{g_{St,\nu}}^{2(n,p)} = \nu^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)},$$

nicht jedoch die Momente der $l_{n,p}$ -symmetrischen Cauchy-Verteilung. Für den Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ II-Verteilung existieren die ersten beiden Momente für alle $\nu > 0$ mit

$$\sigma_{g_{PT2;\nu}}^{2(n,p)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n}{p} + \nu + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{p} + \nu + 1\right)}.$$

Für $k = 1, \dots, n-1$ sei nun $(X^{(1)\top}, X^{(2)\top})^\top \sim \Phi_{g(n,p)}$ mit $X^{(1)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $X^{(2)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. Mit dem erneuten Verweis auf den leichten Notationswechsel in Richter (2014) bzw. Müller und Richter (2016a) im Vergleich zu früheren Arbeiten erlauben der Randdichtegenerator $g_{(n)}^{(k,p)}$ der k -dimensionalen Randverteilung von $X^{(1)}$ und der bedingte Dichtegenerator $g_{[x^{(1)}]_p}^{(n-k,p)}$ der $(n-k)$ -dimensionalen bedingten Verteilung von $X^{(2)}$ gege-

ben $X^{(1)} = x^{(1)}$, $x^{(1)} \in \mathbb{R}^k$, mithilfe des Dichtegenerators $g^{(n,p)}$ die Darstellungen

$$g_{(n)}^{(k,p)}(r) = \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_{r^p}^{\infty} (y - r^p)^{\frac{n-k}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) dy, \quad r \in [0, \infty), \quad (2.8)$$

$$g_{[|x^{(1)}|_p]}^{(n-k,p)}(r) = \frac{g^{(n,p)}\left(\sqrt[p]{|x^{(1)}|_p^p + r^p}\right)}{g_{(n)}^{(k,p)}(|x^{(1)}|_p)}, \quad r \in [0, \infty), \quad (2.9)$$

siehe Arellano-Valle und Richter (2012), in der mithilfe dieser Notationen die nachfolgenden Aussagen bewiesen sind.

Lemma 2.5. *In der obigen Konstellation gilt*

$$\mathfrak{L}\left(X^{(1)}\right) = \Phi_{g_{(n)}^{(k,p)}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\left(X^{(2)} \mid X^{(1)} = x^{(1)}\right) = \Phi_{g_{[|x^{(1)}|_p]}^{(n-k,p)}}.$$

Für Indizes $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j_{i_1} \neq j_{i_2}$ für $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$ mit $i_1 \neq i_2$, d.h. für beliebige, aber paarweise verschiedene Indizes $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, kann der Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T \sim \Phi_{g^{(n,p)}}$ derart permutiert werden, dass X_{j_1}, \dots, X_{j_k} seine ersten k Komponenten bilden. Weiter liefert die Permutationsinvarianz stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen, siehe Lemma 2.1, dass der permutierte Zufallsvektor ebenfalls stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilt mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ ist, und schließlich folgt unter Verwendung von Lemma 2.5, dass

$$\mathfrak{L}\left((X_{j_1}, \dots, X_{j_k})^T\right) = \Phi_{g_{(n)}^{(k,p)}}.$$

Eine analoge Aussage kann wie folgt auch für die bedingten Verteilungen formuliert werden. Die $(n-k)$ -dimensionale bedingte Verteilung von $n-k$ beliebigen, aber paarweise verschiedenen Komponenten von X unter der Bedingung, dass der Vektor der beliebig permutierten, übrigen k Komponenten einen vorgegebenen Wert ξ , $\xi \in \mathbb{R}^k$, annimmt, ist die stetige $l_{n-k,p}$ -symmetrische Verteilung mit dem bedingten Dichtegenerator $g_{[|\xi|_p]}^{(n-k,p)}$ als Dichtegenerator. Nach der Permutation auf den obigen Fall folgt die Aussage aus dem zweiten Teil von Lemma 2.5.

Es sei bemerkt, dass der Randdichtegenerator $g_{(n)}^{(k,p)}$ in (2.8) für $k = 1, \dots, n-1$ wohldefiniert ist. Um die Terminologien im weiteren Verlauf der Arbeit zu vereinfachen und Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei zusätzlich $g_{(n)}^{(n,p)} = g^{(n,p)}$, wobei diese Notation heuristisch plausibel ist, da beim Übergang zur n -dimensionalen Randverteilung einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ faktisch kein Übergang zur Randverteilung stattfindet und damit die Randverteilung die Verteilung selbst ist. Folglich stimmen auch die zugehörigen Dichtegeneratoren überein.

Im folgenden Lemma 2.6 werden die sukzessive Bildung von Randverteilungen von stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen und deren Auswirkungen auf die Gestalt des Randdichtegenerators betrachtet. Genauer ergibt die gegebenenfalls iterative Anwendung von

Lemma 2.6, dass sich der Randdichtegenerator $g_{(n)}^{(k,p)}$ einer k -dimensionalen Randverteilung der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ nicht ändert, wenn der Übergang zur Randverteilung mit mehreren Zwischenschritten erfolgt.

Lemma 2.6. *Für $k = 1, \dots, n - 1$ erfüllt der Randdichtegenerator $g_{(n)}^{(k,p)}$ für alle $m \in \{1, \dots, n - k\}$ die Darstellung*

$$g_{(n)}^{(k,p)}(r) = \left(g_{(n)}^{(k+m,p)} \right)_{(k+m)}^{(k,p)}(r), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Siehe Anhang B.1. □

Der Spezialfall $k = 1$ des nachfolgenden Lemmas 2.7 liefert nun nachträglich eine Rechtfertigung der im Anschluss von Lemma 2.4 angegebenen Bezeichnung von $\sigma_{g^{(n,p)}}^2$ als univariate Varianzkomponente der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$.

Lemma 2.7. *Für $k = 1, \dots, n - 1$ gilt*

$$\sigma_{g_{(n)}^{(k,p)}}^2 = \sigma_{g^{(n,p)}}^2.$$

Beweis. Siehe Anhang B.1. □

Aufgrund von Lemma 2.7 hängt die univariate Varianzkomponente $\sigma_{g_{(n)}^{(1,p)}}^2 = \sigma_{g^{(n,p)}}^2$ nicht von der Dimension n des betrachteten stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ verteilten Zufallsvektors X ab, solange die Varianz $\sigma_{g_{(n)}^{(1,p)}}^2$ der stetig $l_{1,p}$ -symmetrisch mit dem univariaten Randdichtegenerator $g_{(n)}^{(1,p)}$ als Dichtegenerator verteilten Zufallsvariable X^* diese Eigenschaft besitzt. Gemäß Abschnitt 3.4 in Arellano-Valle und Richter (2012) sind die n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung und die $l_{n,p}$ -symmetrische Student- t -Verteilung Beispiele stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen mit dieser Eigenschaft, wobei im Anschluss an Lemma 2.4 in dieser Arbeit und im Anhang von Müller und Richter (2016b) Beispiele angegeben werden, in denen $\sigma_{g^{(n,p)}}^2$ explizit von n abhängt. Dadurch wird die zugehörige fehlerhafte Bemerkung in der ersten Hälfte von Abschnitt 3.4 in Arellano-Valle und Richter (2012) korrigiert.

Weitere Eigenschaften und Anwendungen stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen werden in zahlreichen Arbeiten, die zum Teil mit den bisher genannten übereinstimmen, betrachtet. Insbesondere wird in Richter (2009) die geometrische Maßdarstellung von $\Phi_{g^{(n,p)}}$ bereitgestellt, die u.a. zur Bestimmung exakter Verteilungen von Statistiken in stetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Grundgesamtheit anwendbar ist, siehe Richter (2012). Beispielsweise werden die exakten Verteilungen der p -verallgemeinerten t -Statistik in Richter (2007) und der p - und g -verallgemeinerten χ^2 -Statistik und der p -verallgemeinerten F -Statistik in Richter (2009) betrachtet. Die geometrische Maßdarstellung ebenfalls

direkt anwendend studieren Kalke, Richter und Thauer (2013) und Müller und Richter (2015, 2016a) die exakten Verteilungen von Summen, Produkten, Quotienten sowie Ordnungsstatistiken stetiger $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektoren. Unter Verwendung der in Arellano-Valle und Richter (2012) eingeführten Klasse der geschiefen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen werden die Verteilungen der Ordnungsstatistiken weiterführend in Batún-Cutz, González-Farías und Richter (2013) und Müller und Richter (2016b, 2017a) betrachtet, wobei die beiden zuletzt genannten Arbeiten eine erweiterte Form der Anwendung der geometrischen Maßdarstellung in Termen der auf Günzel, Richter, Scheutzow, Schicker und Venz (2012) und Richter und Venz (2014) basierenden und in Müller und Richter (2016b) eingeführten Maß-eines-Kegels Darstellung der Verteilungsfunktion einer geschiefen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung verwenden. Mit der Beschränkung der Betrachtungen auf Extremwertverteilungen werden in Müller und Richter (2017b) darüber hinaus zum einen deren asymptotisches Verhalten und zum anderen verschiedene Vorgehensweisen in der Modellierung extremer Daten thematisiert. Des Weiteren werden in Müller und Richter (2016b) die Begriffe der regulären Variation, der beschränkten regulären Variation und der Γ -Variation jeweils bezüglich des p -Funktionals eingeführt und deren Anwendbarkeit auf die in den Beispielen 2.1, 2.2 und 2.3 betrachteten Spezialfälle stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen überprüft. Schließlich sind Simulationsalgorithmen und Punktwolken stetiger $l_{2,p}$ -symmetrischer Verteilungen in Kalke und Richter (2013) und Richter (2015a, 2015b) angegeben.

2.2 Die Klasse der $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen

In der Literatur werden elliptisch konturierte Verteilungen als Verteilungen von linearen Transformationen sphärisch verteilter Zufallsvektoren eingeführt, siehe Kelker (1970) und Fang, Kotz und Ng (1990), und sind somit Verallgemeinerungen sphärischer Verteilungen. Durch eine analoge Herangehensweise wird eine Erweiterung der Klasse der zuvor thematisierten stetigen $l_{n,p}$ -sphärischen Verteilungen durch die Betrachtung spezifischer linearer Transformationen von entsprechend verteilten Zufallsvektoren zunächst in Arellano-Valle und Richter (2012) betrachtet und schließlich in Richter (2014) als Klasse der p -verallgemeinerten elliptisch konturierten Verteilungen eingeführt. Nachfolgend wird in Abschnitt 2.2.1 die in Müller (2014) eingeführte Klasse der $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen vorgestellt und das Studium ihrer Eigenschaften erweitert, wobei in den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 insbesondere die Teilklassen der regulären bzw. der singulären Verteilungen studiert und geometrisch analysiert werden.

2.2.1 Allgemeine Einführung

Seien in diesem Abschnitt $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und nichtnegativ definite Matrix mit positivem Rang k , d.h. $\text{rg}(\Sigma) = k$ und $1 \leq k \leq n$, wobei $\text{rg}(\Sigma)$ den Rang der Matrix Σ bezeichnet. Weiter heißt die Darstellung $\Sigma = AA^T$ eine Rang- k -

Zerlegung von Σ mit $\text{rg}(\Sigma) = k$, falls $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $\text{rg}(A) = k$. Aufbauend auf diesen Notationen wird in Müller (2014) die folgende Definition angegeben.

Definition 2.2. Die Verteilung des n -dimensionalen Zufallsvektors X mit

$$X \stackrel{d}{=} \mu + AY, \quad Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}}, \quad (2.10)$$

heißt Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilung mit Parametern μ und $\Sigma = AA^T$ und Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ und wird mit $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ bezeichnet.

Falls die Stetigkeit der Verteilung bzw. der Rang des Matrixparameters Σ kontextuell klar oder von minderer Bedeutung sind, werden Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen abkürzend nur als $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen bezeichnet. Nachfolgend werden einige Spezialfälle dieser Klasse multivariater Verteilungen betrachtet. Die erste hier besprochene Teilklasse ist die Klasse der Rang- k -stetigen achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen, die für die spezielle Wahl des Matrixparameters als nichtnegativ definite Diagonalmatrix vom Rang k entstehen. Diese Verteilungen sind im weiteren Verlauf dieser Arbeit von besonderer Bedeutung, siehe u.a. die Lemmata 2.9 und 2.10 in diesem Abschnitt, die Korollare 2.9 und 2.10 in Abschnitt 2.2.3 sowie Satz 4.6 und Definition 4.13 in Abschnitt 4.3. Außerdem sei bemerkt, dass die Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -sphärischen Verteilungen $EC_{n,p}(\mu, \Gamma_k, g^{(k,p)})$, wobei Γ_k eine $(n \times n)$ -Diagonalmatrix mit k Eins-Diagonaleinträgen und $n - k$ Null-Diagonaleinträgen ist, einen Spezialfall der Rang- k -stetigen achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen und damit auch der $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen bilden. Insbesondere sind stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen somit Rang- n -stetige $l_{n,p}$ -sphärische Verteilungen, d.h. $\Phi_{g^{(n,p)}} = EC_{n,p}(0_n, I_n, g^{(n,p)})$. Weiterhin stimmt die Klasse der $EC_{n,2}(\mu, \Sigma, g^{(k,2)})$ -Verteilungen mit der Klasse der gewöhnlichen (Rang- k -stetigen) elliptisch konturierten Verteilungen überein.

Durch die Spezialisierung von $g^{(k,p)}$ in (2.10) auf die in den Beispielen 2.1, 2.2 und 2.3 eingeführten Dichtegeneratoren entstehen die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Kotz-Typ-Verteilung $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(k,p)})$ mit Parametern $M > 1 - \frac{k}{p}$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$, die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Pearson-Typ VII-Verteilung $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{PT7;M,\nu}^{(k,p)})$ mit Parametern $M > \frac{k}{p}$ und $\nu > 0$ sowie die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Pearson-Typ II-Verteilung $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{PT2;\nu}^{(k,p)})$ mit Parameter $\nu > 0$, wobei jede der drei Verteilungen zudem die Parameter μ und Σ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ wie zuvor besitzt. Insbesondere heißen einerseits $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{Kt;1,\frac{1}{p},1}^{(k,p)}) = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{PE}^{(k,p)})$ die n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung mit Parametern μ und Σ und andererseits $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{PT7;\frac{k+\nu}{p},\nu}^{(k,p)}) = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{St;\nu}^{(k,p)})$ die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Student- t -Verteilung mit Parametern μ , Σ und ν , wobei diese abkürzend mit $N_{n,p}(\mu, \Sigma)$ bzw. $St_{n,p}(\mu, \Sigma, \nu)$ bezeichnet werden. Bezug nehmend auf die im vorherigen Abschnitt eingeführte Notation $N_{n,p}$ gilt damit $N_{n,p}(0_n, I_n) = N_{n,p}$.

Wie bereits in der obigen Originalreferenz angegeben, folgen die beiden Korollare 2.1 und 2.3 direkt aus Definition 2.2 und den Lemmata 2.2 bzw. 2.4 und geben eine stochastische Darstellung und die ersten beiden Momente und deren Existenz eines Rang- k -stetig $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Zufallsvektors an. Zusätzlich gibt Korollar 2.2 eine auf Lemma 2.3 basierende zweite stochastische Darstellung eines derart verteilten Zufallsvektors an.

Korollar 2.1. *Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$, wobei $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ und $\Sigma = AA^T$ eine Rang- k -Zerlegung von Σ ist. Dann erfüllt der Zufallsvektor X die stochastische Darstellung*

$$X \stackrel{d}{=} \mu + R \cdot AU_p^{(k)}. \quad (2.11)$$

Dabei folgt der k -dimensionale Zufallsvektor $U_p^{(k)}$ der k -dimensionalen p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf der $l_{k,p}$ -Einheitssphäre $S_{k,p}$, R und $U_p^{(k)}$ sind stochastisch unabhängig und R ist eine nichtnegative Zufallsvariable mit der Lebesgue-Dichte $f_R(r) = \omega_{k,p} r^{k-1} g^{(k,p)}(r) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(r)$, $r \in \mathbb{R}$.

Korollar 2.2. *Seien $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ und $\Sigma = AA^T$ eine Rang- k -Zerlegung von Σ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$. Dann erfüllt X die stochastische Darstellung*

$$X \stackrel{d}{=} \mu + A \cdot SHP_p^{(k)}(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}),$$

wobei $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}$ vollständig stochastisch unabhängige nichtnegative Zufallsvariablen sind, deren Lebesgue-Dichten in Lemma 2.3 für $n = k$ gegeben sind.

Korollar 2.3. *Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\text{rg}(\Sigma) = k \geq 1$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \mu$, falls $I_{k+1}(g^{(k,p)})$ endlich ist, und $\text{Cov}(X) = \sigma_{g^{(k,p)}}^2 \Sigma$, falls $I_{k+2}(g^{(k,p)})$ endlich ist.*

Damit stimmt der Lageparameter μ mit dem Erwartungswert von $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ überein, falls $I_{k+1}(g^{(k,p)}) < \infty$, und der Matrix-Skalierungsparameter Σ ist proportional zur Kovarianzmatrix, falls $I_{k+2}(g^{(k,p)}) < \infty$. Insbesondere hängt die Kovarianzmatrix von $AU_p^{(k)}$ nicht vom Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ ab und stimmt in jedem Fall mit $\tau_{k,p}\Sigma$ überein. Wie in Kelker (1970) für den Fall $p = 2$ bemerkt ist, sind die Korrelationsmatrizen von Zufallsvektoren mit einer Verteilung aus $\{EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)}) : \mu \in \mathbb{R}^n, g^{(k,p)} \text{ ist Dichtegenerator}\}$ identisch, wobei der symmetrische und nichtnegativ definite Matrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vom Rang k beliebig, aber fest gewählt ist.

Bemerkt sei, dass die Korollare 2.1 und 2.2 zur Simulation einer Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung verwendet werden können. Dazu sei an dieser Stelle auf die Algorithmen 3.2 und 3.3 aus Abschnitt 3.5 verwiesen, in denen der dortige spezifische Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(k,p)}$, siehe Korollar 3.1, durch einen beliebigen Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ einer stetigen $l_{k,p}$ -symmetrischen Verteilung ersetzt werden kann.

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit werden nun der Begriff der Rang- k -Zerlegung einer symmetrischen und nichtnegativ definiten Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vom Rang k mit $1 \leq k \leq n$

näher beleuchtet und einige zugehörige Notationen eingeführt. Aufgrund der Symmetrie von Σ liefert die Theorie der Spektralzerlegungen die Existenz einer orthogonalen Matrix $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer Diagonalmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass

$$\Sigma = VSV^T. \quad (2.12)$$

Bezeichnet v_j die j -te Spalte von V und λ_j den j -ten Diagonaleintrag von S , $j = 1, \dots, n$, d.h. $V = (v_1 \cdots v_n)$ und $S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dann bilden v_1, \dots, v_n eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von Σ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die zugehörigen Eigenwerte. Weiter gilt aufgrund der nichtnegativen Definitheit von Σ sowohl $\lambda_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, n$ als auch $\Sigma = \tilde{A}\tilde{A}^T$, wobei $\tilde{A} = V\sqrt{S}$ und $\sqrt{S} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Da der Rang einer symmetrischen Matrix mit der Anzahl ihrer von Null verschiedenen Eigenwerte übereinstimmt, existiert ferner eine Indexmenge $J_{>0} = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|J_{>0}| = k$ derart, dass $\lambda_j > 0$, falls $j \in J_{>0}$, und $\lambda_l = 0$, falls $l \in \{1, \dots, n\} \setminus J_{>0}$. D.h. $J_{>0}$ besteht genau aus den Indizes der positiven Eigenwerte von Σ . Daher sind die Spalten von \tilde{A} mit Indizes aus $\{1, \dots, n\} \setminus J_{>0}$ Null-Spalten, d.h. 0_n , und haben keinen Einfluss auf $\tilde{A}\tilde{A}^T$. Damit ist AA^T eine Rang- k -Zerlegung von Σ , wobei $A = (\sqrt{\lambda_{j_1}}v_{j_1} \cdots \sqrt{\lambda_{j_k}}v_{j_k}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ den Rang k besitzt, und Rangzerlegungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig, da eine Permutation der Spalten von A das Matrixprodukt AA^T nicht ändert.

Für den Rest dieser Arbeit, passend zu den obigen Notationen und falls notwendig nach einer Umnummerierung der Eigenwerte von Σ , seien $J_{>0} = \{1, \dots, k\}$, $S_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $V_1 = (v_1 \cdots v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $V_2 = (v_{k+1} \cdots v_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$. Dann besitzt V_1 den vollen Rang k , die Spalten von V_2 bilden eine Orthonormalbasis des Kerns von Σ und nach (2.12) gilt

$$V_1^T \Sigma V_1 = S_1 \quad \text{und} \quad V_2^T \Sigma V_2 = 0 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}. \quad (2.13)$$

Letztendlich ist $(V_1\sqrt{S_1})(V_1\sqrt{S_1})^T$ eine Rang- $\text{rg}(\Sigma)$ -Zerlegung von Σ , wobei $\sqrt{S_1} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$.

Für den Spezialfall $p = 2$ wurden zahlreiche weitere Eigenschaften studiert, siehe beispielsweise Kelker (1970), Cambanis, Huang und Simons (1981) oder Fang et al. (1990). Nachfolgend werden die Verteilungen von linearen Transformationen von elliptisch konturiert verteilten Zufallsvektoren und insbesondere ihre Randverteilungen betrachtet. Für reguläre elliptisch konturierte Verteilungen, d.h. für positiv definite Matrixparameter Σ , ist dazu in Theorem 5 (i) in Gomez, Gomez-Villegas und Marın (2003) die folgende Aussage formuliert, die hier mithilfe von Dichtegeneratoren anstelle von dichtegenerierenden Funktionen angegeben ist.

Bemerkung 2.2. Seien $X \sim EC_{n,2}(\mu, \Sigma, g^{(n,2)})$ mit $\text{rg}(\Sigma) = n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

mit $m < n$ und $\text{rg}(C) = m$. Dann ist

$$\mathfrak{L}(CX + b) = EC_{m,2}\left(C\mu + b, C\Sigma C^T, g_{(n)}^{(m,2)}\right).$$

Mithilfe der Notation von charakteristischen Generatoren anstelle von Dichtegeneratoren ist diese Aussage auch für nichtnegativ definite Matrixparameter Σ und beliebige Matrizen C bekannt, siehe Theorem 2.16 in Fang et al. (1990). Aus Bemerkung 2.2 folgt unmittelbar Bemerkung 2.3 über die Randverteilungen von regulären elliptisch konturierten Verteilungen, siehe Theorem 6 (i) in Gómez et al. (2003). Für allgemeine Matrixparameter Σ ist eine analoge Aussage als Korollar von Theorem 2.16 in Fang et al. (1990) zu finden.

Bemerkung 2.3. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T \sim EC_{n,2}(\mu, \Sigma, g^{(n,2)})$ mit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $\text{rg}(\Sigma) = n$. Außerdem sei $X^{(1)} = (X_1, \dots, X_m)^T$. Dann ist

$$X^{(1)} \sim EC_{m,2}\left(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1)}, g_{(n)}^{(m,2)}\right),$$

wobei $\mu^{(1)} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ und $\Sigma^{(1)} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$.

Der Beweis analoger Aussagen für $p > 0$ ist im Allgemeinen ein offenes Problem und soll in dieser Arbeit nicht weiter thematisiert werden. Stattdessen wird zum Abschluss dieses Abschnittes die Erweiterung der Bemerkungen 2.2 und 2.3 auf $p > 0$ für spezifische symmetrisch und nichtnegativ definite Matrixparameter Σ und spezifische Transformationsmatrizen C betrachtet, siehe Lemmata 2.8, 2.9 und 2.10, wobei die hier untersuchten Spezialfälle im weiteren Verlauf dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sind. In den Lemmata 2.11 und 2.12 in Abschnitt 2.2.3 werden zudem die Verteilungen zweier spezifischer linearer Transformationen studiert, deren Transformationsmatrizen eng mit dem symmetrischen und nichtnegativ definiten Matrixparameter Σ der betrachteten $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung in Verbindung stehen. Dazu bezeichne $e_k^{(n)}$ den k -ten Einheitsvektor des \mathbb{R}^n .

Lemma 2.8. Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$. Dann gilt für jede $(n \times n)$ -Permutationsmatrix M und jedes $b \in \mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{L}(MX + b) = EC_{n,p}\left(M\mu + b, M\Sigma M^T, g^{(k,p)}\right).$$

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

Lemma 2.9. Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit vom Rang $k \geq 1$. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass die Matrix $\Gamma\Sigma\Gamma = \text{diag}(\gamma_1^2\sigma_1^2, \dots, \gamma_n^2\sigma_n^2)$ vom Rang $k_\Gamma \geq 1$ ist. Dann ist

$$\mathfrak{L}(\Gamma X + b) = EC_{n,p}\left(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, g_{(k)}^{(k_\Gamma,p)}\right).$$

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

Nach Lemma 2.8 ist damit die Klasse der Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen abgeschlossen unter Bildung von Permutationen. Weiter sei bemerkt, dass die spezifischen, in Lemma 2.9 betrachteten linearen Transformationen achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturiert verteilter Zufallsvektoren mit Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ ebenfalls achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturiert verteilt sind, jedoch mit passend transformierten Parametern und insbesondere mit dem Randdichtegenerator $g_{(k)}^{(k_{\Gamma},p)}$ als Dichtegenerator. Der Übergang zu Randdichtegeneratoren ist plausibel, da lineare Transformationen die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse gegebenenfalls in einen affinen Unterraum abbilden. Damit wird der betrachtete Zufallsvektor in diesen Teilraum projiziert, wodurch der Übergang zu einer entsprechend dimensionalen Randverteilung erfolgt, die in den von der linearen Transformation erzeugten affinen Unterraum eingebettet ist. In Termen von Matrixrängen ist der Übergang zu Randdichtegeneratoren plausibel, da der Dimensionalitätsparameter innerhalb des Dichtegenerators den Rang des Matrixparameters der Verteilung widerspiegelt und da der Rang des Matrixparameters $\Gamma\Sigma\Gamma$ der Verteilung der linearen Transformation kleiner gleich als der Rang des ursprünglichen Matrixparameters Σ ist, d.h. $\text{rg}(\Gamma\Sigma\Gamma) \leq \text{rg}(\Sigma)$.

Die Lemmata 2.8 und 2.9 zeigen weiter, dass Lemma 4 aus Müller (2014) korrekt ist, falls die Matrix der linearen Transformation eine Permutationsmatrix ist oder falls sowohl der Matrixparameter innerhalb der zu transformierenden Verteilung als auch die Matrix der linearen Transformation selbst Diagonalmatrizen sind und das Produkt der beiden nicht vom Rang 0 ist. Der in der obigen Arbeit angegebene Beweis für die Verteilung einer beliebigen linearen Transformation eines $l_{n,p}$ -elliptisch konturiert verteilten Zufallsvektors mit beliebigem symmetrischen und nichtnegativ definiten Matrixparameter ist jedoch nicht vollständig, da das Matrixprodukt $(MA)(MA)^T$ im Allgemeinen keine Rangzerlegung von $M\Sigma M^T$ ist und da somit nicht sichergestellt ist, dass der Zufallsvektor $MX + b$ einer $l_{\tilde{n},p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit Dichtegenerator $g_{(\text{rg}(\Sigma))}^{(\text{rg}(\text{Cov}(MX+b)),p)}$ folgt, wobei in diesem Zusammenhang die Notationen $M \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times n}$ einer beliebigen Transformationsmatrix, $b \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und nichtnegativ definit mit der Rang- $\text{rg}(\Sigma)$ -Zerlegung AA^T und $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(\text{rg}(\Sigma),p)})$ mit Dichtegenerator $g^{(\text{rg}(\Sigma),p)}$ verwendet werden.

Im nachfolgenden Lemma werden die Randverteilungen achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen bestimmt und es stellt sich heraus, dass diese ebenfalls innerhalb dieser Klasse von Verteilungen liegen, d.h. achsenparallel $l_{k,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen für $k \leq n$ und mit einem Randdichtegenerator als Dichtegenerator sind. Insbesondere gibt Lemma 2.10 einen Fall an, in dem das auf dem nicht sichergestellten Lemma 4 basierende Korollar 13 aus Müller (2014) korrekt ist.

Lemma 2.10. *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit vom Rang $k \geq 1$. Für ein $m \in \mathbb{N}$*

mit $m \leq n$ seien weiter $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ derart, dass $j_1 < \dots < j_m$ und $|\{\eta \in \{1, \dots, m\} : \sigma_{j_\eta}^2 > 0\}| \geq 1$, und $X_J = (X_{j_1}, \dots, X_{j_m})^\top$ der zugehörige m -dimensionale Teilvektor von X . Dann ist

$$X_J \sim EC_{m,p}(\mu_J, \Sigma_J, g_{(k)}^{(k_J,p)}),$$

wobei $\mu_J = (\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_m})^\top$, $\Sigma_J = \text{diag}(\sigma_{j_1}^2, \dots, \sigma_{j_m}^2)$ und $k_J = \text{rg}(\Sigma_J) \geq 1$.

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

2.2.2 Die Teilklasse der regulären Verteilungen

Der nachfolgende Abschnitt betrachtet den Spezialfall einer $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit einem symmetrischen und positiv definiten Matrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. mit einer symmetrischen reellen $(n \times n)$ -Matrix Σ von vollem Rang n . Dazu werden einleitend die in Richter (2014) eingeführte p -verallgemeinerte elliptisch konturierte Verteilung und einige zugehörige Notationen vorgestellt und anschließend Verbindungen zur in dieser Arbeit betrachteten Klasse $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen aufgezeigt. Für jeden Vektor $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$ mit positiven reellen Komponenten und für jedes $p > 0$ sei das Funktional $|\cdot|_{a,p}$ definiert durch $|x|_{a,p}^p = \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^p$, $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, und die zugehörige Einheitskugel $E_{a,p} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{a,p} = 1\}$ heiße p -verallgemeinertes Ellipsoid in achsenparalleler Lage mit den Achsenlängen $2a_i$, $i = 1, \dots, n$. Unter Verwendung dieser Notationen heißt die Verteilung eines n -dimensionalen Zufallsvektors Z p -verallgemeinert elliptisch konturierte Verteilung mit Parametern $p > 0$, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$ mit $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $\nu \in \mathbb{R}^n$ und einer orthogonalen Matrix $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls eine nichtnegative Zufallsvariable R derart existiert, dass Z die stochastische Darstellung

$$O^\top(Z - \nu) \stackrel{d}{=} R \cdot U \tag{2.14}$$

erfüllt, wobei U und R stochastisch unabhängig sind und U der ebenfalls in Richter (2014) eingeführten p -verallgemeinerten elliptisch konturierten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{E_{a,p}} = E_{a,p} \cap \mathfrak{B}^n$ folgt. Die Verteilung von Z wird nachfolgend mit $EC_{a,p,q,\nu,O}$ bezeichnet. Eine zu (2.14) analoge stochastische Darstellung für einen bivariat normalverteilten Zufallsvektor wurde bereits in Dietrich, Kalke und Richter (2013) basierend auf Richter (2011) erzielt. Falls weiter $R \cdot U$ eine dichtegenerierende Funktion g einer n -variaten Verteilung, siehe (2.1), besitzt, dann erfüllt die Lebesgue-Dichte f_Z von Z nach Richter (2014) die Darstellung

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{a_1 \cdot \dots \cdot a_n \omega_{n,p} I_n(g)} g\left(\left|O^\top(z - \nu)\right|_{a,p}\right) \\ &= \frac{1}{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} g^{(n,p)}\left(\left|O^\top(z - \nu)\right|_{a,p}\right), \quad z \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei $g^{(n,p)}$ der in $[0, \infty)$ Lebesgue-fast überall eindeutig bestimmte Dichtegenerator der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit dichtegenerierender Funktion g ist.

Das nachfolgende Korollar 2.4 aus Müller (2014) zeigt, dass die Klasse der Rang- n -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen mit der Klasse der p -verallgemeinerten elliptisch konturierten Verteilungen übereinstimmt.

Korollar 2.4. *Mit den obigen Bezeichnungen und den beiden regulären Matrizen $\gamma = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ und $\Gamma = O\gamma^2O^\top$ gilt*

$$Z \sim EC_{n,p}(\nu, \Gamma, g^{(n,p)}).$$

Aufgrund der Regularität einer p -verallgemeinerten elliptisch konturierten Verteilung liefert Korollar 2.4 die Regularität der in diesem Abschnitt betrachteten Rang- n -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen. Insbesondere ist die in Korollar 2.2 betrachtete stochastische Darstellung für die Teilklasse der regulären $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen ohne die explizite Bestimmung der normierenden Konstanten der einzelnen Lebesgue-Dichten bereits in Richter (2014, Bemerkung 11) enthalten.

Für die geometrische Interpretation dieser Verteilungen bzw. ihrer Lebesgue-Dichten werden nun Dichteniveaumengen $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \varepsilon\}$ für beliebige Niveaus $\varepsilon \geq 0$ betrachtet. Mit den obigen Bezeichnungen erfüllen die Dichteniveaumengen der p -verallgemeinerten elliptisch konturierten Verteilung $EC_{a,p,q,\nu,O}$

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{R}^n : g^{(n,p)}(|O^\top(z - \nu)|_{a,p})\} &= \varepsilon \prod_{i=1}^n a_i = \{Ox + \nu \in \mathbb{R}^n : g^{(n,p)}(|x|_{a,p}) = \varepsilon \prod_{i=1}^n a_i\} \\ &= \{Ox + \nu \in \mathbb{R}^n : |x|_{a,p} = r_a(\varepsilon)\} \\ &= O \cdot E_{r_a(\varepsilon)a,p} + \nu, \end{aligned}$$

da $|x|_{a,p} = r$ und $|x|_{r \cdot a,p} = 1$ äquivalent sind und wobei $r_a(\varepsilon)$ derart gewählt ist, dass $g^{(n,p)}(r_a(\varepsilon)) = \varepsilon \prod_{i=1}^n a_i$. Bezeichnen o_1, \dots, o_n die Spalten von O , so heißt $O \cdot E_{r_a(\varepsilon)a,p} + \nu$ ein o_i -achsenparalleles p -verallgemeinertes Ellipsoid mit Achsenlängen $2r_a(\varepsilon)a_i$, $i = 1, \dots, n$, dessen Zentrum um ν verschoben ist, siehe Richter (2014).

Auf der Basis dieser Betrachtungen werden nun zum einen die Dichte einer Rang- n -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mithilfe des in dieser Arbeit verwendeten p -Funktional $|\cdot|_p$ anstelle von $|\cdot|_{a,p}$ formuliert und zum anderen die Dichteniveaumengen dieser Verteilung geometrisch interpretiert. Seien also $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $g^{(n,p)}$ ein Dichtegenerator einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung. Dann ist die Matrix Σ durch (2.13) mit einer $(n \times n)$ -Diagonalmatrix S_1 mit positiven Diagonaleinträgen und einer orthogonalen Matrix $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart verbunden, dass $(V_1\sqrt{S_1})(V_1\sqrt{S_1})^\top$ eine Rang- n -Zerlegung von Σ ist. Insbesondere existiert in diesem Fall die orthogonale Matrix V_2 nicht, da der Kern der Matrix Σ aufgrund ihrer Regularität trivial ist.

Bemerkung 2.4. Für $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(n,p)})$ erfüllt die Lebesgue-Dichte f_X von X die Darstellung

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}} g^{(n,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (x - \mu) \right|_p \right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

Ohne die konkrete Untersuchung der Gestalt der Rang- n -Zerlegung von Σ und unter Beachtung des nach Definition 2.1 beschriebenen Notationswechsels ist diese Lebesgue-Dichte bereits in Arellano-Valle und Richter (2012) enthalten.

Bezeichnen weiter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge von S_1 und v_1, \dots, v_n die Spalten von V_1 wie in (2.13), dann ist die Dichteniveaumenge von $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(n,p)})$ zum Niveau $\varepsilon \geq 0$ das v_i -achsenparallele p -verallgemeinerte Ellipsoid mit Achsenlängen $2r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)\sqrt{\lambda_j}$, $i = 1, \dots, n$, und einem um μ verschobenes Zentrum, wobei $r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)$ mit $\sqrt{\lambda} = (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ die Gleichung $g^{(n,p)}(r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)) = \varepsilon \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}$ erfülle.

Somit kann $\sqrt{S_1}$ als Skalierungsmatrix und V_1 als Rotationsmatrix interpretiert werden und (2.15) ist eine Verallgemeinerung des in Dietrich et al. (2013) betrachteten Falles bivariater Normalverteilungen auf den Fall Rang- n -stetiger $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen.

2.2.3 Die Teilklasse der singulären Verteilungen

Im Gegensatz zu Abschnitt 2.2.2 werden nachfolgend symmetrische und nichtnegativ definite, jedoch nicht positiv definite Matrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachtet. Diese besitzen folglich mindestens einen Eigenwert 0 und daher nicht den vollen Rang n . Für den ersten Teil existiere jedoch zudem mindestens ein positiver Eigenwert, wodurch $\text{rg}(\Sigma) = k$ für ein $0 < k < n$.

Die Notationen von (2.13) aufgreifend seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die nicht notwendigerweise verschiedenen positiven Eigenwerte von Σ , $\sqrt{S_1} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $V_1 = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $V_2 = (v_{k+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ derart, dass $(V_1 \sqrt{S_1})(V_1 \sqrt{S_1})^T$ eine Rang- k -Zerlegung von Σ ist, wobei v_1, \dots, v_k und v_{k+1}, \dots, v_n die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ bzw. zum $(n-k)$ -fachen Eigenwert 0 gehörigen Eigenvektoren sind und gemeinsam eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden. Weiter bezeichne $U_{V_2^T}(\mu)$ den k -dimensionalen affinen Teilraum $\{x \in \mathbb{R}^n : V_2^T x = V_2^T \mu\}$ des \mathbb{R}^n .

Zunächst werden nun die Verteilungen zweier spezifischer linearer Transformationen eines Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturiert verteilten Zufallsvektors bestimmt, wobei, im Vergleich zu den entsprechenden Aussagen in Müller (2014), Lemma 2.11 ohne die Anwendung des dortigen, nicht sichergestellten Lemmas 4 und Lemma 2.12 kürzer bewiesen werden.

Lemma 2.11. Seien $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ und $Z = V_1^T X$. Dann gilt

$$Z \sim EC_{k,p}(V_1^T \mu, S_1, g^{(k,p)}).$$

Insbesondere ist der Zufallsvektor Z somit regulär verteilt und besitzt die Lebesgue-Dichte

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_k}} g^{(k,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} (z - V_1^T \mu) \right|_p \right), \quad z \in \mathbb{R}^k.$$

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

Lemma 2.12. Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$. Dann gilt

$$V_2^T X = V_2^T \mu \quad P - \text{fast sicher.}$$

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

Nach Lemma 2.12 nimmt der Zufallsvektor X P -fast sicher Werte im k -dimensionalen affinen Unterraum $U_{V_2^T}(\mu)$ des \mathbb{R}^n an. Somit ist $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ und $0 < k < n$ nicht absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes in \mathbb{R}^n , d.h. eine singuläre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Die Kombination der beiden Lemmata 2.11 und 2.12 liefert die Verteilung der Orthogonalprojektion eines $l_{n,p}$ -elliptisch konturiert mit Parametern μ und Σ verteilten Zufallsvektors in den $\text{rg}(\Sigma)$ -dimensionalen affinen Unterraum $U_{V_2^T}(\mu)$, siehe Korollar 2.5. Anstelle der expliziten Betrachtung derartiger Orthogonalprojektionen werden singuläre Verteilungen in der Literatur mithilfe von dichte-ähnlichen Darstellungen charakterisiert, siehe Khatri (1968) und Rao (1973, Seiten 527-528) für singuläre Normalverteilungen oder Arellano-Valle und Azzalini (2006, Anhang C) für singuläre vereinheitlichte Schief-Normalverteilungen (*SUN*). Weitere Referenzen der dichte-ähnlichen Darstellungen sowie deren Anwendung auf singuläre $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen, siehe Korollar 2.6, sind in Müller (2014) angegeben.

Korollar 2.5. Falls $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$, dann besitzt die Orthogonalprojektion $Y = \Pi_{U_{V_2^T}(\mu)}(X)$ von X in $U_{V_2^T}(\mu)$ die Lebesgue-Dichte

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_k}} g^{(k,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (y - \mu) \right|_p \right), \quad y \in U_{V_2^T}(\mu),$$

und die Orthogonalprojektion von X in das orthogonale Komplement von $U_{V_2^T}(\mu)$ besitzt keine Wahrscheinlichkeitsmasse.

Korollar 2.6. Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$. Dann besitzt X im Sinne der zuvor genann-

ten Arbeiten die Dichte

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_k}} g^{(k,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (x - \mu) \right|_p \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.16)$$

und

$$V_2^T X = V_2^T \mu \quad P - \text{fast sicher}, \quad (2.17)$$

wobei (2.16) als Dichte in $U_{V_2^T}(\mu)$ interpretiert wird, in dem nach (2.17) die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse konzentriert ist.

Zum Aufzeigen der Verbindung der beiden vorherigen Korollare bezeichne $\lambda_{U_{V_2^T}(\mu)}^{(k)}$ das k -dimensionale, in $U_{V_2^T}(\mu)$ definierte Lebesgue-Maß, das ein Spezialfall des Hausdorff-Maßes ist. Für $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$, $Y = \Pi_{U_{V_2^T}(\mu)}(X)$ wie in Korollar 2.5 und $B \in \mathfrak{B}^n$ liefert Korollar 2.5

$$\begin{aligned} P(X \in B) &= P(Y \in (B \cap U_{V_2^T}(\mu))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_k}} \int_{B \cap U_{V_2^T}(\mu)} g^{(k,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (x - \mu) \right|_p \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_k}} \int_B g^{(k,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (x - \mu) \right|_p \right) \lambda_{U_{V_2^T}(\mu)}^{(k)}(dx). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Somit ist die von X induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P^X = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ absolut stetig bezüglich $\lambda_{U_{V_2^T}(\mu)}^{(k)}$. Weiter bestimmt (2.17) eindeutig den Teilraum $U_{V_2^T}(\mu)$ des \mathbb{R}^n , in dem das Lebesgue-Maß definiert wird, und (2.16) ist die Radon-Nikodym-Ableitung von P^X bezüglich $\lambda_{U_{V_2^T}(\mu)}^{(k)}$.

In Analogie zum in Abschnitt 2.2.2 betrachteten Fall von regulären $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen ist die Dichteniveaumenge der Orthogonalprojektion von X , $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$, in $U_{V_2^T}(\mu)$ zu einem Niveau $\varepsilon \geq 0$ das k -dimensionale v_i -achsenparallele p -verallgemeinerte Ellipsoid mit Achsenlängen $2r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$, und einem um μ verschobenen Zentrum, wobei $r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)$ mit $\sqrt{\lambda} = (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ derart gewählt ist, dass $g^{(k,p)}(r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)) = \varepsilon \prod_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i}$. Da das orthogonale Komplement keine Wahrscheinlichkeitsmasse besitzt, können dessen Dichteniveaumengen als leer definiert werden. Damit ergibt sich die folgende Bemerkung 2.5.

Bemerkung 2.5. a) Mit den obigen Notationen ist die Dichteniveaumenge einer zentrierten singulären $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung $EC_{n,p}(0_n, \Sigma, g^{(k,p)})$ zum Niveau $\varepsilon \geq 0$ das k -dimensionale v_i -achsenparallele p -verallgemeinerte Ellipsoid mit Achsenlängen $2r_{\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, k$, das in den k -dimensionalen affinen Teilraum $U_{V_2^T}(0_n)$ eingebettet ist.

- b) Die Dichteniveaumenge einer nichtzentrierten singulären $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ zum Niveau $\varepsilon \geq 0$ ist die Dichteniveaumenge von $EC_{n,p}(0_n, \Sigma, g^{(k,p)})$ zum selben Niveau ε , deren Zentrum nach μ verschoben ist.

Im zweiten Teil dieses Abschnittes wird die Klasse $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen derart erweitert, dass auch symmetrische und nichtnegativ definite Matrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vom Rang 0 zulässig sind. Zunächst sei bemerkt, dass Rangzerlegungen nur für Matrizen mit positiven Rängen wohldefiniert sind, wodurch die direkte Erweiterung dieser Verteilungsklasse mithilfe einer zu (2.10) analogen Herangehensweise nicht möglich ist. Aufgrund der im Anschluss an Korollar 2.6 thematisierten eindeutigen Charakterisierung einer Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung durch die Gleichungen (2.16) und (2.17) wird nachfolgend die Definition dieser Verteilungen via Korollar 2.6 anstelle von Definition 2.2 betrachtet. Weiter folgt aus der Annahme $\text{rg}(\Sigma) = 0$ unmittelbar $\Sigma = 0_{n \times n}$ mit dem n -fachen Eigenwert 0 und dem Kern \mathbb{R}^n mit der Orthonormalbasis $e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}$, wobei $0_{n \times n}$ die $(n \times n)$ -Nullmatrix bezeichnet. Da somit einerseits weder S_1 noch V_1 existieren und andererseits $V_2 = I_n$ gilt, entfällt die Betrachtung von (2.16) und für einen Zufallsvektor X , der einer Rang-0-stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Matrix-Skalierungsparameter $\Sigma = 0_{n \times n}$ folgt, liefert (2.17)

$$X = \mu \quad P - \text{fast sicher}, \quad (2.19)$$

wobei zum einen die Angabe des Matrix-Skalierungsparameters der Verteilung von X durch die Kenntnis ihres Rangs 0 redundant ist und zum anderen die Betrachtung der die Verteilung von X erzeugende Funktion aufgrund des Entfallens von (2.16) vernachlässigt werden kann. In diesem Fall gilt weiter

$$P(X \in B) = P(\mu \in B) = \mathbf{1}_B(\mu), \quad B \in \mathfrak{B}^n,$$

und die Verteilung von X stimmt mit der Dirac-Verteilung im Punkt μ überein. Dieses Resultat und die zugehörige Notation der charakterisierten Verteilung werden in der nachfolgenden Bemerkung thematisiert.

Bemerkung 2.6. Die Rang-0-stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilung mit Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ stimmt mit der Dirac-Verteilung im Punkt μ überein. Um im weiteren Verlauf der Arbeit Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird diese Verteilung in Anlehnung an die Notation aus Definition 2.2 mit $EC_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, g^{(0,p)})$ bezeichnet, wobei einerseits die Angabe des Matrixparameters $0_{n \times n}$ redundant und andererseits $g^{(0,p)}$ nicht als Dichtegenerator, sondern als Symbol zum Erhalt der Notation zu verstehen ist.

Die ersten beiden Momente der Rang-0-stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ ist in Korollar 2.7 angegeben, wobei diese aus Eigenschaften von Dirac-Verteilungen folgen und der Beweis in Anhang B.2 ausformuliert ist.

Korollar 2.7. Für $X \sim EC_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, g^{(0,p)})$ gilt $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\text{Cov}(X) = 0_{n \times n}$.

Unter Verwendung von (2.19) und der Notation aus Bemerkung 2.6 sind zudem die Aussagen der Lemmata 2.8, 2.9 und 2.10 um die verschiedenen Konstellationen erweiterbar, in denen die zuvor thematisierten Rang-0-stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen vorkommen können, siehe Korollare 2.8, 2.9 und 2.10, wobei $g_{(k)}^{(0,p)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ in Analogie zu $g^{(0,p)}$ keinen Randdichtegenerator darstellt, sondern als Symbol zur Vereinheitlichung der Notation dient.

Korollar 2.8. Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\text{rg}(\Sigma) = k \geq 0$. Dann gilt für jede $(n \times n)$ -Permutationsmatrix M und jedes $b \in \mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{L}(MX + b) = EC_{n,p}(M\mu + b, M\Sigma M^T, g^{(k,p)}).$$

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

Korollar 2.9. Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit vom Rang $k \geq 0$. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist

$$\mathfrak{L}(\Gamma X + b) = EC_{n,p}(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, g_{(k)}^{(k_\Gamma, p)}),$$

wobei $\Gamma\Sigma\Gamma = \text{diag}(\gamma_1^2\sigma_1^2, \dots, \gamma_n^2\sigma_n^2)$ und $k_\Gamma = \text{rg}(\Gamma\Sigma\Gamma) \geq 0$.

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

Korollar 2.10. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit vom Rang $k \geq 0$. Für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ seien weiter $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $j_1 < \dots < j_m$ und $X_J = (X_{j_1}, \dots, X_{j_m})^T$ der zugehörige m -dimensionale Teilvektor von X . Dann ist

$$X_J \sim EC_{m,p}(\mu_J, \Sigma_J, g_{(k)}^{(k_J, p)}),$$

wobei $\mu_J = (\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_m})^T$, $\Sigma_J = \text{diag}(\sigma_{j_1}^2, \dots, \sigma_{j_m}^2)$ und $k_J = \text{rg}(\Sigma_J) \geq 0$.

Beweis. Siehe Anhang B.2. □

3 Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung

Nach einem Literaturüberblick zu Skalenmischungen von gewöhnlichen Normalverteilungen in Abschnitt 3.1 wird nachfolgend die Verallgemeinerung zu Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung mit zwei Parametern in zwei Schritten betrachtet. Dazu werden in Abschnitt 3.2 zunächst Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung ohne weitere Parameter studiert und in Abschnitt 3.3 Klassen von Beispielen und Gegenbeispielen dieser Verteilungsklasse angegeben. Anschließend werden Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit einem Lage- und einem Skalierungsparameter sowie deren Eigenschaften und einige Beispiele untersucht, siehe Abschnitt 3.4, bevor Abschnitt 3.5 schließlich Simulationen dieser Verteilungen thematisiert.

3.1 Skalenmischungen von Normalverteilungen

In diesem ersten Abschnitt wird eine Einführung in die Literatur zu Skalenmischungen von Normalverteilungen vorgenommen, wobei im letzten Absatz zudem Arbeiten zu Skalenmischungen anderer Verteilungen und zur Erweiterung von Skalenmischungen zu Skalen-Lage-Mischungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufgeführt werden.

Für die Klasse der Skalenmischungen von Normalverteilungen existieren zahlreiche, bis auf die Betrachtung von Verschiebungs- und Skalierungstermen äquivalente Definitionen und verschiedene von der Bezeichnung als Skalenmischung von Normalverteilungen abweichende Namensgebungen, von denen nachfolgend jeweils einige angegeben werden. Sei dazu Z ein n -dimensional normalverteilter Zufallsvektor und V eine positive Zufallsvariable unabhängig von Z . Im univariaten Fall $n = 1$ ist eine Skalenmischung einer Normalverteilung erstmals in Andrews und Mallows (1974) als Verteilung des Produktes $V^{-1} \cdot Z$ eingeführt. In Lange und Sinsheimer (1993) hingegen wird eine Skalenmischung von Normalverteilungen als normale/ unabhängige Verteilung bezeichnet und für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathbb{R}^n$ durch die multivariate Verteilung des verschobenen Produktes $\mu + V^{-\frac{1}{2}} \cdot Z$ charakterisiert. Darüber hinaus verwendet Gneiting (1997) die stochastische Darstellung $V^{\frac{1}{2}} \cdot Z$ für $n = 1$ und Eltoft, Kim und Lee (2006) $\mu + \sqrt{V}\Gamma^{\frac{1}{2}}Z$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit den deterministischen Größen $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit mit Determinante $\det(\Gamma) = 1$. Neben der Bezeichnung als Skalenmischung von Normalverteilungen verweisen die Autoren der zuvor genannten Arbeiten zusätzlich auf die Bezeichnung als Varianzmischung von Normalverteilungen. Schließlich betrachten Gómez-Sánchez-Manzano, Gómez-Villegas und Marín (2006, 2008) die multivariate Verteilung von $\mu + V \cdot Z$ als Skalenmischung von Normalverteilungen, wobei $\mu \in \mathbb{R}^n$ konstant ist und Z einer zentrierten multivariaten Normalverteilung mit positiv definiten Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ folgt.

Grundlegend zeigen die in den zuvor genannten Arbeiten jeweilig angegebenen Dichten, dass gegebenenfalls zentrierte Skalenmischungen von Normalverteilungen symmetrische Verteilungen sind. In Andrews und Mallows (1974) wird nun die Frage betrachtet, welche univariaten symmetrischen Verteilungen als Skalenmischungen von Normalverteilungen darstellbar sind. Falls f_X die Dichte der symmetrischen Verteilung von X ist, so stellt sich heraus, dass die vollständige Monotonie der Funktion h mit $h(\cdot) = f_X(\sqrt{\cdot})$ in $(0, \infty)$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit der Verteilung von X als Skalenmischung einer Normalverteilung ist. Diese Fragestellung wurde in Lange und Sinsheimer (1993) erneut aufgegriffen und in Proposition 3 mit dem Ergebnis multivariat verallgemeinert, dass eine sphärische Verteilung mit der Dichte $f(\cdot|\cdot|_2)$ genau dann eine normale/ unabhängige Verteilung ist, wenn h_1 mit $h_1(r) = f(\sqrt{2r})$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ ist. Dieses Resultat wird ebenfalls in Theorem 8 in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) unter Verwendung des Begriffes einer expandierenden Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ohne Herstellung eines Bezuges zu Lange und Sinsheimer (1993) bewiesen.

Nach Andrews und Mallows (1974) und West (1987) sind die univariaten Pearson-Typ VII-Verteilungen bzw. exponentielle Potenz-Verteilungen Beispiele von Skalenmischungen einer Normalverteilung. Als Spezialfälle dieser Familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind damit insbesondere die Normalverteilung selbst, die Student- t -Verteilung und die Cauchy-Verteilung in der Klasse der Skalenmischungen einer Normalverteilung enthalten. Weitere Beispiele dieser Klasse sind die univariate Laplace-Verteilung, die univariate logistische Verteilung oder die univariate Slash-Verteilung, die u.a. in Gneiting (1997) betrachtet werden. Multivariate Beispiele wie die multivariate kontaminierte Normalverteilung, die multivariate K -Verteilung oder die multivariaten Pendants der zuvor genannten univariaten Verteilungen sind u.a. in Lange und Sinsheimer (1993), Eltoft et al. (2006) oder Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) angegeben.

Zudem werden in der Literatur zahlreiche Anwendungen von Skalenmischungen von Normalverteilungen besprochen. So diskutieren beispielsweise Lange und Sinsheimer (1993) den Zusammenhang dieser Verteilungsklasse zu EM-Algorithmen für kleinste L_p -Regression oder adaptive robuste Regression basierend auf Student- t -, Slash- oder kontaminierten Normalverteilungsfamilien oder Liu (1996) die Bayessche Schätzung von multivariaten linearen Regressionsmodellen unter Verwendung von Skalenmischungen von Normalverteilungen mit vollständig bekannten Vorhersagevariablen (Einflussgrößen) und möglicherweise fehlenden Werten der Ergebnisvariablen (Zielgrößen). Weitere Anwendungen sind in der Theorie von natürlichen Bildern, in Versicherungen oder im Bereich der quantitativen Genetik zu finden, siehe Wainwright und Simoncelli (2000), Choy und Chan (2003) bzw. Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2008).

Über die in diesem Abschnitt bisher angegebenen Arbeiten hinaus betrachten Gupta und Varga (1993, 1995) matrixwertige Skalenmischungen von Normalverteilungen sowie deren Eigenschaften und Spezialfälle und Hashorva (2012) studiert die exakten Asym-

ptotiken der Verteilungsenden in bivariaten Skalenmischungsmodellen. Weitere Beispiele von univariaten Skalenmischungen einer Normalverteilung und einige ihrer Eigenschaften wie Momente, Varianz, Schiefe oder Kurtosis werden durch die explizite Betrachtung verschiedener Mischungsverteilungen in Karim (2016) angegeben.

Aktuellere Anwendungen sind aus Skalenmischungen von Normalverteilungen bestehende Modelle für die robuste multivariate lineare Regression mit fehlenden Daten, siehe Ala-Luhtala und Piché (2016), ein Homogenitätstest in Skalenmischungen von Normalverteilungen, siehe Niu, Li und Zhang (2016), oder eine adaptive robuste Regression mit als stetige Skalenmischungen von Normalverteilungen modellierten Fehlern, siehe Seo, Noh, Lee und Yoon (2017).

In der Literatur werden zudem einerseits Skalenmischungen zahlreicher anderer Verteilungen betrachtet. Hierzu zählen u.a. Skalenmischungen von Kotz-Typ-Verteilungen mit inversen verallgemeinerten Gammaverteilungen als Mischungsverteilungen in Arslan (2005), von matrixwertigen Cauchy-Verteilungen mit Exponentialverteilungen als Mischungsverteilungen in Sarr und Gupta (2011) und von multivariaten exponentiellen Potenz-Verteilungen in Dang, Browne und McNicholas (2015). Über den Begriff der Skalenmischung hinaus werden andererseits Skalen-Lage-Mischungen von Normalverteilungen in Mencía und Sentana (2009), von Kotz-Typ-Verteilungen mit erweiterten verallgemeinerten inversen Normalverteilungen als Mischungsverteilungen in Arslan (2009) oder von multivariaten Schiefnormalverteilungen in Arslan (2015) als Erweiterung des Begriffes der Skalenmischung betrachtet.

3.2 Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung

Dieser Abschnitt betrachtet nun eine p -Verallgemeinerung der Klasse von Skalenmischungen von Normalverteilungen und beruht grundlegend auf Arellano-Valle und Richter (2012, Abschnitt 3.3). Dabei ist die einleitende Definition 3.1 jedoch leicht variiert, wobei sowohl die Änderung als auch ihre Motivation in Bemerkung 3.1 besprochen werden. Zu Beginn sei zudem an die Notation $N_{n,p}$ der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, $N_{n,p} = \Phi_{g_{PE}}^{(n,p)}$, aus Abschnitt 2.1 erinnert.

Definition 3.1. Sei $Z \sim N_{n,p}$. Weiter besitze die positive Zufallsvariable V die Verteilungsfunktion G und sei Z unabhängig von V . Dann heißt die Verteilung des n -dimensionalen Zufallsvektors X mit

$$X \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} \cdot Z \tag{3.1}$$

eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung G . Die Verteilung von X werde mit $SMN_{n,p}(G)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.1. In Arellano-Valle und Richter (2012, Abschnitt 3.3) wird zudem die Unabhängigkeit der Verteilungsfunktion G von V von der Dimension n gefordert, wodurch die Dimension n insbesondere kein Parameter der Verteilung der Zufallsvariablen V ist. In dieser Arbeit wird diese Forderung an einigen späteren Stellen, an denen diese Eigenschaft benötigt wird, explizit hinzugenommen.

Für den Spezialfall $p = 2$ stimmt Definition 3.1 mit der Charakterisierung normaler/unabhängiger Verteilungen aus Lange und Sinsheimer (1993) überein, sofern dort der Verschiebungsterm als 0_n und die Kovarianzmatrix der multivariater Normalverteilung im Produktterm als I_n gewählt wird. Aufgrund der in Abschnitt 3.1 dargestellten zahlreichen äquivalenten Definition dieser Klasse von Verteilungen können ebenfalls Beziehungen zu anderen dort genannten Referenzen hergestellt werden, worauf in dieser Arbeit jedoch verzichtet wird.

Nach Arellano-Valle und Richter (2012) gibt das folgende Lemma 3.1 eine erste stochastische Darstellung einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung an und zeigt grundlegend, dass die Klasse dieser Verteilungen eine Teilklasse der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen ist. Aufgrund der zentralen Bedeutung von Lemma 3.1 bzw. des nachstehenden Korollars 3.1 als grundlegende Strukturaussagen einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung werden die jeweils in Arellano-Valle und Richter (2012) angegebenen Beweise zum besseren Verständnis in Anhang B.3 reproduziert.

Lemma 3.1. *Für $X \sim SMN_{n,p}(G)$ gilt*

$$X \stackrel{d}{=} R \cdot U_p^{(n)}, \quad (3.2)$$

wobei $U_p^{(n)}$ p -verallgemeinert gleichverteilt auf $S_{n,p}$ ist, R und $U_p^{(n)}$ stochastisch unabhängig sind und R eine nichtnegative Zufallsvariable mit folgender Lebesgue-Dichte ist:

$$f_R(r) = \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} r^{n-1} \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Beweis. Siehe Arellano-Valle und Richter (2012) bzw. Anhang B.3. □

Nach Lemma 3.1 sind Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen mit spezifischen Dichtegeneratoren, die in Arellano-Valle und Richter (2012) und im nachfolgenden Korollar 3.1 angegeben sind. Dazu sei $C_p = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}$ die Normierungskonstante der univariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung.

Korollar 3.1. *Es gilt*

$$SMN_{n,p}(G) = \Phi_{g_{SMN;G}^{(n,p)}},$$

wobei

$$g_{SMN;G}^{(n,p)}(r) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Siehe Arellano-Valle und Richter (2012) bzw. Anhang B.3. \square

Als direkte Folgerung aus Korollar 3.1 ist in Korollar 3.2 eine zweite stochastische Darstellung einer Skalenmischung der p -verallgemeinerten Normalverteilung auf der Basis von Lemma 2.3 angegeben.

Korollar 3.2. Für $X \sim SMN_{n,p}(G)$ gilt

$$X \stackrel{d}{=} SHP_p^{(n)}(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}),$$

wobei die nichtnegativen Zufallsvariablen $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ vollständig stochastisch unabhängig sind, R die Lebesgue-Dichte f_R aus (3.3) besitzt und die zu $\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ gehörigen Lebesgue-Dichten in Lemma 2.3 angegeben sind.

Nachfolgend werden nun die ersten beiden Momente und eine spezifische bedingte Verteilung von $SMN_{n,p}(G)$ mit einer Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen betrachtet. Für die erstgenannte Eigenschaft wird zunächst ein vorbereitendes Lemma über die univariate Varianzkomponente von $SMN_{n,p}(G)$ bewiesen, bevor die Aussage in Korollar 3.3 festgehalten wird.

Lemma 3.2. Es ist

$$\sigma_{g_{SMN;G}}^{2(n,p)} = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right) = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v)$$

mit der Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen V . Insbesondere ist $\sigma_{g_{SMN;G}}^{2(n,p)}$ unabhängig von n , falls G diese Eigenschaft besitzt.

Beweis. Grundlegend ist

$$\sigma_{g^{(n,p)}}^2 = \tau_{n,p} \omega_{n,p} I_{n+2}(g^{(n,p)}).$$

Weiter gilt mit dem Satz von Fubini und der Transformation $s = r\sqrt[p]{v}$ mit $\frac{dr}{ds} = v^{-\frac{1}{p}}$

$$\begin{aligned} I_{n+2}(g_{SMN;G}^{(n,p)}) &= \int_0^\infty r^{n+1} g_{SMN;G}^{(n,p)}(r) dr \\ &= C_p^n \int_0^\infty r^{n+1} \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) dr \\ &= C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} \int_0^\infty r^{n+1} e^{-\frac{(r\sqrt[p]{v})^p}{p}} dr dG(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} v^{-\frac{n+1}{p}} v^{-\frac{1}{p}} \int_0^\infty s^{n+1} C_p^m e^{-\frac{s^p}{p}} ds dG(v) \\
&= \left(\int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v) \right) \cdot I_{n+2}(g_{PE}^{(n,p)})
\end{aligned}$$

und somit

$$\sigma_{g_{SMN;G}^{(n,p)}}^2 = \left(\int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v) \right) \cdot \tau_{n,p} \omega_{n,p} I_{n+2}(g_{PE}^{(n,p)}) = \sigma_{g_{PE}^{(n,p)}}^2 \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v).$$

Die Behauptung folgt nun mithilfe von $\sigma_{g_{PE}^{(n,p)}}^2$ aus Abschnitt 2.1. \square

Korollar 3.3. Sei $X \sim SMN_{n,p}(G)$ mit der Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen V .

a) Falls $\mathbb{E}(V^{-\frac{1}{p}}) = \int_0^\infty v^{-\frac{1}{p}} dG(v) < \infty$, dann $\mathbb{E}(X) = 0_n$.

b) Falls $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}}) = \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v) < \infty$, dann $\text{Cov}(X) = \sigma_{g_{SMN;G}^{(n,p)}}^2 I_n$.

Beweis. Infolge von Korollar 3.1 und Lemma 2.4 existiert der Erwartungswert von X , falls $I_{n+1}(g_{SMN;G}^{(n,p)}) < \infty$, und stimmt in diesem Fall mit 0_n überein. Sofern darüber hinaus zudem $I_{n+2}(g_{SMN;G}^{(n,p)}) < \infty$, so existiert auch die Kovarianzmatrix von X und es gilt $\text{Cov}(X) = \sigma_{g_{SMN;G}^{(n,p)}}^2 I_n$. Für $m \in \{1, 2\}$ gilt zunächst mithilfe der konkreten Gestalt des Dichtegenerators $g_{SMN;G}^{(n,p)}$ und des Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
I_{n+m}(g_{SMN;G}^{(n,p)}) &= \int_0^\infty r^{n+m-1} g_{SMN;G}^{(n,p)}(r) dr = C_p^n \int_0^\infty r^{n+m-1} \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) dr \\
&= C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} \int_0^\infty r^{n+m-1} e^{-\frac{r^p}{p}v} dr dG(v)
\end{aligned}$$

und weiter unter Verwendung der Integraltransformation $s = \frac{r^p}{p}v$ bzw. $r = p^{\frac{1}{p}}v^{-\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}}$ mit $\frac{dr}{ds} = p^{\frac{1}{p}-1}v^{-\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p}-1}$ und erneut des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
I_{n+m}(g_{SMN;G}^{(n,p)}) &= C_p^m \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} \int_0^\infty p^{\frac{n+m-1}{p}} v^{-\frac{n+m-1}{p}} s^{\frac{n+m-1}{p}} e^{-s} p^{\frac{1}{p}-1} v^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}-1} ds dG(v) \\
&= C_p^m p^{\frac{n+m}{p}-1} \int_0^\infty v^{-\frac{m}{p}} \int_0^\infty s^{\frac{n+m}{p}-1} e^{-s} ds dG(v) \\
&= C_p^m p^{\frac{n+m}{p}-1} \Gamma\left(\frac{n+m}{p}\right) \int_0^\infty v^{-\frac{m}{p}} dG(v).
\end{aligned}$$

Folglich gilt die Behauptung, da $I_{n+m}(g_{SMN;G}^{(n,p)})$ für $m \in \{1, 2\}$ genau dann endlich ist, wenn $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{m}{p}}\right) = \int_0^\infty v^{-\frac{m}{p}} dG(v)$ endlich ist. \square

Über Korollar 3.3 hinaus können die Eigenschaften und Anwendungen stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen, die im Verlauf von Abschnitt 2.1 erläutert bzw. am Ende angedeutet sind, unter Verwendung der Identität aus Korollar 3.1 auf den Fall einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung übertragen werden. Die Betrachtung der Verteilungen spezifischer linearer Transformationen und insbesondere von Randverteilungen von Zufallsvektoren, deren Verteilung eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung ist, erfolgt durch den Übergang zu geeigneten Spezialfällen der in Anhang B.4 angegebenen Resultate.

Als zweite Eigenschaft wird die bedingte Verteilung der Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Mischungsverteilung G unter der Bedingung, dass die positive Mischungsvariable V , $V \sim G$, einen Wert v annimmt, $v \in (0, \infty)$, betrachtet, siehe Lemma 3.3. Gemäß Abschnitt 2.2.1 bezeichne dabei $N_{n,p}(\mu, \Sigma)$ die n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ .

Lemma 3.3. *Seien $X \sim SMN_{n,p}(G)$ und $V \sim G$ eine positive Zufallsvariable. Dann*

$$\mathfrak{L}(X \mid V = v) = N_{n,p}\left(0_n, v^{-\frac{2}{p}} I_n\right), \quad v > 0.$$

Beweis. Sei $Z \sim N_{n,p}$ unabhängig von V . Nach Definition 3.1 gilt dann $X \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} Z$ und aus der stochastischen Unabhängigkeit von Z und V folgt für $B \in \mathfrak{B}^n$

$$P(X \in B \mid V = v) = P\left(V^{-\frac{1}{p}} Z \in B \mid V = v\right) = P\left(Z \in v^{\frac{1}{p}} B\right), \quad v > 0.$$

Mit der Transformation $z = v^{\frac{1}{p}} x$ mit der Jacobi-Determinante $\left|\frac{dz}{dx}\right| = v^{\frac{n}{p}}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} P(X \in B \mid V = v) &= \int_{v^{\frac{1}{p}} B} g_{PE}^{(n,p)}(|z|_p) dz = \int_B v^{\frac{n}{p}} g_{PE}^{(n,p)}\left(\left|v^{\frac{1}{p}} x\right|_p\right) dx \\ &= \int_B v^{\frac{n}{p}} g_{PE}^{(n,p)}\left(\left|\sqrt{v^{-\frac{2}{p}}} I_n^{-1} I_n^T(x - 0_n)\right|_p\right) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit $\left(\det\left(\sqrt{v^{-\frac{2}{p}}} I_n\right)\right)^{-1} = \det\left(\sqrt{v^{\frac{2}{p}}} I_n\right) = \sqrt{v^{\frac{2n}{p}}} = v^{\frac{n}{p}}$. Somit ist der Integrand von (3.4) die Dichte der Rang- n -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit den Parametern 0_n und $\left(I_n \sqrt{v^{-\frac{2}{p}}} I_n\right) \left(I_n \sqrt{v^{-\frac{2}{p}}} I_n\right)^T = v^{-\frac{2}{p}} I_n$ und dem Dichtegenerator $g_{PE}^{(n,p)}$ und es folgt

$$\mathfrak{L}(X \mid V = v) = EC_{n,p}\left(0_n, v^{-\frac{2}{p}} I_n, g_{PE}^{(n,p)}\right) = N_{n,p}\left(0_n, v^{-\frac{2}{p}} I_n\right), \quad v > 0.$$

\square

Wie auch in der Literatur für den Fall $p = 2$ aufgeführt, rechtfertigt Lemma 3.3 die zusätzliche Bezeichnung von $SMN_{n,p}(G)$ als Varianzmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, wobei in dieser Arbeit weiterhin der Begriff der Skalenmischung verwendet wird.

Rückblickend zeigt Korollar 3.1, dass die Familie der Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung eine Teilklasse der Familie der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen bildet, deren Elemente Dichtegeneratoren von der spezifischen Gestalt $g_{SMN;G}^{(n,p)}$ besitzen. Dabei bleibt jedoch noch offen, wann eine stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist. Der nachfolgende Satz 3.1 gibt nun unter Verwendung der in Definition A.6 eingeführten Eigenschaft der vollständigen Monotonie eine notwendige und hinreichende Bedingung für diese Darstellbarkeit an.

Satz 3.1. *Die stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung $\Phi_{g^{(n,p)}}$ mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$ ist genau dann eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, wenn die Funktion h mit $h(y) = g^{(n,p)}\left(y^{\frac{1}{p}}\right)$ vollständig monoton in $[0, \infty)$ ist.*

In dieser Arbeit werden zwei Beweise von Satz 3.1 angegeben. Der nachfolgende Beweis 1 ist angelehnt an Andrews und Mallows (1974), in der Satz 3.1 speziell für $p = 2$ und $n = 2$ erstmals bewiesen ist. Für $p = 2$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig erfolgt der Beweis von Satz 3.1 in Lange und Sinsheimer (1993), wobei dort äquivalenterweise die vollständige Monotonie von h_1 mit $h_1(y) = h(2y) = g^{(n,2)}(\sqrt{2y})$ in $(0, \infty)$ gefordert wird. Diese Äquivalenz ist für den allgemeinen Fall $p > 0$ zu Beginn des an Lange und Sinsheimer (1993) angelehnten Beweises 2 von Satz 3.1 in Anhang B.3 gezeigt.

Beweis 1 von Satz 3.1. Für den gesamten Beweis sei $X \sim \Phi_{g^{(n,p)}}$. Zunächst sei nun die Verteilung von X eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Mischungsverteilung G . Dann besitzt $\mathfrak{L}(X)$ nach Korollar 3.1 den Dichtegenerator

$$g^{(n,p)}(r) = g_{SMN;G}^{(n,p)}(r) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v), \quad r \geq 0,$$

und somit ist

$$h(y) = g_{SMN;G}^{(n,p)}\left(y^{\frac{1}{p}}\right) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{y}{p}v} dG(v), \quad y \geq 0.$$

Für $y > 0$ ist weiter $h'(y) = -\frac{1}{p}C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}+1} e^{-\frac{y}{p}v} dG(v)$ und somit induktiv

$$\frac{d^m h}{dy^m}(y) = \left(-\frac{1}{p}\right)^m C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}+m} e^{-\frac{y}{p}v} dG(v), \quad y > 0.$$

Da für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $y > 0$

$$(-1)^m \frac{d^m h}{dy^m}(y) = \frac{C_p^n}{p^m} \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}+m} e^{-\frac{y}{p}v} dG(v) \geq 0$$

gilt, ist die Einschränkung $h|_{(0,\infty)}$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ und somit h vollständig monoton in $[0, \infty)$.

Sei nun umgekehrt die Funktion h mit $h(y) = g^{(n,p)}\left(y^{\frac{1}{p}}\right)$ vollständig monoton in $[0, \infty)$, also $h|_{(0,\infty)}$ vollständig monoton in $(0, \infty)$. Nach dem Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder in der Formulierung aus Widder (1946), siehe Satz A.9, ist $h(y)$ für alle $0 < y < \infty$ als Laplace-Stieltjes-Transformierte einer nichtfallenden Funktion α darstellbar, d.h.

$$h(y) = \int_0^\infty e^{-yt} d\alpha(t), \quad 0 < y < \infty,$$

wobei das Integral für alle $0 < y < \infty$ existiert (konvergiert). Sei nun

$$\beta(t) = \int_1^t C_p^{-n} v^{-\frac{n}{p}} d\alpha\left(\frac{1}{p}v\right), \quad t > 0.$$

Nach den Sätzen A.6 und A.8 ist

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_0^\infty e^{-yt} d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-y\left(\frac{1}{p}v\right)} d\alpha\left(\frac{1}{p}v\right) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{1}{p}yv} C_p^{-n} v^{-\frac{n}{p}} d\alpha\left(\frac{1}{p}v\right) \\ &= C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{1}{p}yv} d\beta(v), \quad y > 0, \end{aligned}$$

und damit

$$g^{(n,p)}(r) = h(r^p) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} d\beta(v), \quad r > 0.$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $G(v) = \beta(v) - \lim_{t \searrow 0} \beta(t)$, $v > 0$, die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariablen ist. Zunächst ist G nichtfallend, da α nichtfallend ist und da somit für $0 < v_1 \leq v_2$ gilt

$$\begin{aligned} G(v_2) - G(v_1) &= \beta(v_2) - \beta(v_1) = \int_{v_1}^{v_2} C_p^{-n} v^{-\frac{n}{p}} d\alpha\left(\frac{1}{p}v\right) \\ &= C_p^{-n} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i^{-\frac{n}{p}} \left(\alpha\left(\frac{1}{p}x_{i+1}\right) - \alpha\left(\frac{1}{p}x_i\right) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $0 < v_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = v_2$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung des Intervalls $[v_1, v_2]$ mit der größten Schrittweite $\Delta = \max_{i=0,\dots,k-1} (x_{i+1} - x_i)$ und den Zwischenstellen

$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$, ist. Es bleibt zu zeigen, dass $1 = \lim_{v \rightarrow \infty} G(v) - \lim_{t \searrow 0} G(t)$.
Zunächst ist

$$\lim_{v \rightarrow \infty} G(v) - \lim_{t \searrow 0} G(t) = \lim_{v \rightarrow \infty} (G(v) - G(v^{-1})) = \lim_{v \rightarrow \infty} (\beta(v) - \beta(v^{-1})).$$

Sei dazu weiter $\tilde{g}^{(n,p)}(z, r) = C_p^n \int_{z^{-1}}^z v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} d\beta(v)$, $1 < z < \infty$, eine links- und rechtsseitig trunkeerte Version des Dichtegenerators $g^{(n,p)}$. Damit gilt mithilfe des Satzes von Fubini und der Integraltransformation $s = r \sqrt[p]{v}$ mit $\frac{dr}{ds} = v^{-\frac{1}{p}}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{n-1} \tilde{g}^{(n,p)}(z, r) dr &= \int_0^\infty \int_{z^{-1}}^z C_p^n v^{\frac{n}{p}} r^{n-1} e^{-\frac{r^p}{p}v} d\beta(v) dr \\ &= \int_{z^{-1}}^z v^{\frac{n}{p}} \int_0^\infty C_p^n r^{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{p}(r \sqrt[p]{v})\right\} dr d\beta(v) \\ &= \int_{z^{-1}}^z v^{\frac{n}{p}} v^{-\frac{n-1}{p}} v^{-\frac{1}{p}} \int_0^\infty s^{n-1} g_{PE}^{(n,p)}(s) ds d\beta(v) \\ &= \int_{z^{-1}}^z I_n(g_{PE}^{(n,p)}) d\beta(v) \\ &= \frac{1}{\omega_{n,p}} \int_{z^{-1}}^z 1 d\beta(v) \\ &= \frac{1}{\omega_{n,p}} (\beta(z) - \beta(z^{-1})), \quad z > 1, \end{aligned}$$

da $g_{PE}^{(n,p)}$ ein Dichtegenerator und daher $\omega_{n,p} I_n(g_{PE}^{(n,p)}) = 1$ ist. Infolge der Nichtnegativität der Integranden von $\tilde{g}^{(n,p)}(z, r)$ und $g^{(n,p)}(r) = h(r^p)$ gilt weiter $0 \leq r^{n-1} \tilde{g}^{(n,p)}(z, r) \leq r^{n-1} g^{(n,p)}(r)$ für alle $z > 1$ und alle $r > 0$. Da für alle $r > 0$ weiter $r^{n-1} \tilde{g}^{(n,p)}(z, r)$ aufgrund seiner Struktur und seiner Nichtnegativität monoton wachsend in z ist und für $z \rightarrow \infty$ gegen $r^{n-1} g^{(n,p)}(r)$ konvergiert, liefert der Satz der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo-Levi)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \beta(z) - \beta(z^{-1}) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \omega_{n,p} \int_0^\infty r^{n-1} \tilde{g}^{(n,p)}(z, r) dr \\ &= \omega_{n,p} \int_0^\infty \left(\lim_{z \rightarrow \infty} r^{n-1} \tilde{g}^{(n,p)}(z, r) \right) dr \\ &= \omega_{n,p} \int_0^\infty r^{n-1} g^{(n,p)}(r) dr \\ &= \omega_{n,p} I_n(g_{PE}^{(n,p)}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Somit ist G definiert durch $G(v) = \beta(v) - \lim_{t \searrow 0} \beta(t)$, $v > 0$, die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariablen und mithilfe von Satz A.6 gilt

$$\begin{aligned} g^{(n,p)}(r) &= h(r^p) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} d\beta(v) \\ &= C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} d\left(\beta(v) - \lim_{t \searrow 0} \beta(t)\right) \\ &= C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v), \quad r > 0. \end{aligned}$$

Damit stimmt $g^{(n,p)}$ Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$ mit dem Dichtegenerator der Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung G überein und folglich ist $X \sim SMN_{n,p}(G)$. \square

Mit der Bereitstellung des Kriteriums in Satz 3.1 ist vollständig bekannt, ob eine stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist. Um die spezifischen Eigenschaften dieser Teilklasse der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen nutzen zu können, wird jedoch oft explizit die Mischungsverteilung benötigt. Diese kann mithilfe der nachfolgenden Korollare 3.4 bzw. 3.5 bestimmt werden. Aufgrund der Definition der vollständigen Monotonie in $[0, \infty)$ und der in Bemerkung 2.1 thematisierten Uneindeutigkeit von Dichtegeneratoren in Lebesgue-Nullmengen werden nachfolgend ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Einschränkung der Dichtegeneratoren auf die Definitionsbereiche $(0, \infty)$ betrachtet.

Korollar 3.4. *Seien $X \sim \Phi_{g^{(n,p)}}(\sqrt[p]{\cdot})$ und $g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ mit der inversen Laplace-Stieltjes-Transformierten α , d.h.*

$$g^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) = \mathcal{L}(\alpha)(y) \int_0^\infty e^{-yt} d\alpha(t), \quad y > 0.$$

Dann gilt $X \sim SMN_{n,p}(G)$ und die Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen erfüllt die Gleichung

$$\alpha(t) = \frac{p}{\omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_1^t z^{\frac{n}{p}} dG(pz), \quad t > 0.$$

Beweis. Nach dem zweiten Teil von Beweis 1 von Satz 3.1 existiert eine nichtfallende Funktion α mit $g^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) = \int_0^\infty e^{-yt} d\alpha(t)$, $y > 0$. Da $X \sim SMN_{n,p}(G)$ für eine passende Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen, gilt nach Korollar 3.1 außerdem $g^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) = g_{SMN;G}^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{1}{p}yv} dG(v)$, $y > 0$. Zusammen gilt mit der Trans-

formation $z = \frac{1}{p}v$ zunächst

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-yt} d\alpha(t) &= C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{1}{p}yv} dG(v) = C_p^n \int_0^\infty p^{\frac{n}{p}} z^{\frac{n}{p}} e^{-zv} dG(pz) \\ &= \frac{p}{\omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_1^t z^{\frac{n}{p}} e^{-zv} dG(pz) \end{aligned}$$

und weiter nach Satz A.6

$$\alpha(t) = \frac{p}{\omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_1^t z^{\frac{n}{p}} dG(pz), \quad t > 0.$$

□

Für den Spezialfall $p = 2$ entspricht dieses Resultat der Aussage von Theorem 10 in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) für $\mu = 0_n$ und $\Sigma = I_n$, wobei dort Skalenmischungen von gewöhnlichen Normalverteilungen auf eine andere, aber äquivalent Art und Weise definiert werden. Durch die Transformation der beiden Definitionen ineinander entsteht die Beziehung $G(pz) = 1 - H\left((pz)^{-\frac{1}{p}}\right)$ zwischen der obigen Funktion G und der Funktion H aus Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006). Mit derselben Transformation stimmt das nachfolgende Resultat für $p = 2$ mit der Aussage von Korollar 11 aus Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) überein.

Korollar 3.5. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Korollar 3.4 ist die Verteilung der positiven Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion G genau dann absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes mit Dichte f_G , wenn α absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist. In diesem Fall gilt sowohl*

$$g^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) = \int_0^\infty e^{-yt} f_\alpha(t) dt, \quad y > 0,$$

mit $f_\alpha(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t)$, $t > 0$, als auch

$$f_G(s) = \omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{\frac{n}{p}-2} \cdot s^{-\frac{n}{p}} f_\alpha\left(\frac{s}{p}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Da f_G die Lebesgue-Dichte der Verteilung einer positiven Zufallsvariablen bezeichnet, gilt insbesondere $f_G(s) = 0$ für alle $s \leq 0$. Für $t > 0$ gilt nach Korollar 3.4

$$f_\alpha(t) = \frac{p}{\omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} t^{\frac{n}{p}} \frac{dG(pt)}{dt} = \frac{p^2}{\omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} t^{\frac{n}{p}} \cdot f_G(pt)$$

und durch Umstellen nach f_G und Substitution mit $s = pt$

$$f_G(s) = \omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{-2} \left(\frac{s}{p}\right)^{-\frac{n}{p}} f_\alpha\left(\frac{s}{p}\right), \quad s > 0.$$

□

In den entsprechenden Aussagen in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) gehen die Autoren, bedingt durch ihren Ansatz über expandierende und semiexpandierende Folgen, explizit auf die in Bemerkung 2.1 besprochene Uneindeutigkeit von Dichtegeneratoren bzw. dichtegenerierenden Funktionen in Lebesgue-Nullmengen ein. Dies bedeutet insbesondere, dass sie in den Spezialfällen für $p = 2$ der Korollare 3.4 und 3.5 fordern, dass die Funktion $g^{(n,2)}(\sqrt{\cdot})$ Lebesgue-fast überall in $(0, \infty)$ als Laplace-Stieltjes-Transformierte von α darstellbar ist. In dieser Arbeit kann aufgrund von Bemerkung 2.1 auf die ausdrückliche Behandlung dieses Sachverhalts verzichtet werden, wodurch die Notation vereinfacht und die Lesbarkeit verbessert wird.

3.3 Beispiele und deren Mischungsverteilungen

In diesem Abschnitt werden nun Beispiele der Klasse der Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung und deren potentielle Mischungsverteilungen erläutert. Mit der Wahl des Dichtegenerators $g^{(n,p)}$ der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung als einer der Dichtegeneratoren der drei Teilklassen der $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung, siehe Beispiel 2.1, der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung, siehe Beispiel 2.2, und der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ II-Verteilung, siehe Beispiel 2.3, liegt der Fokus in den ersten drei Abschnitten auf der Überprüfung der nach Satz 3.1 notwendigen und hinreichenden Bedingung der vollständigen Monotonie der Funktion h mit $h(\cdot) = g^{(n,p)}(\sqrt{\cdot})$ in $[0, \infty)$. Wie vor Korollar 3.4 erläutert, erfolgt dabei erneut die Betrachtung der Einschränkungen der Funktionen auf $(0, \infty)$ und der vollständigen Monotonie in $(0, \infty)$. Abschließend wird in Abschnitt 3.3.4 eine weitere Teilklasse der Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung durch die Wahl einer spezifischen Mischungsverteilung konstruiert.

In den nachfolgenden Abschnitten 3.3.1, 3.3.2 und 3.3.3 bezeichne für $m \in \mathbb{N}_0$ jeweils $f^{(m)}(z)$ die m -te Ableitung einer Funktion f an der Stelle z . Diese Notation ist nicht zu verwechseln mit der Notation eines Dichtegenerators $g^{(n,p)}$ einer stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung.

3.3.1 Der Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung

In diesem ersten Abschnitt werden nun diejenigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilungen, siehe Beispiel 2.1, bestimmt, die als Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar sind. Nach einer kurzen Einführung in

die Theorie stabiler Verteilungen werden darüber hinaus die zugehörigen Mischungsverteilungen dieser Skalenmischungen bestimmt. Die nachfolgenden zwei Bemerkungen sind zunächst vorbereitender Natur und dienen dabei der Vereinfachung bzw. der Verkürzung des Beweises der ersten Hauptaussage dieses Abschnittes.

Bemerkung 3.2. Die Funktion h_1 mit $h_1(z) = z^{M-1}$, $z > 0$, ist für alle $M \leq 1$ vollständig monoton in $(0, \infty)$.

Beweis. Zunächst ist h_1 unendlich oft differenzierbar in $(0, \infty)$. Für $M = 1$ gilt offensichtlich $(-1)^m h_1^{(m)}(z) \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, da $h_1^{(0)}(z) = h_1(z) = 1$ und alle höheren Ableitungen verschwinden. Sei also $M < 1$. Zunächst gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$h_1^{(m)}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(m+1-M)}{\Gamma(1-M)} z^{M-(m+1)}, \quad z > 0.$$

Für den dazu gehörigen induktiven Beweis nach m ist der Induktionsanfang für $m = 0$ und $m = 1$ erfüllt, da

$$h_1^{(0)}(z) = h_1(z) = (-1)^0 \frac{\Gamma(1-M)}{\Gamma(1-M)} z^{M-1}$$

und

$$h_1^{(1)}(z) = (M-1) z^{M-2} = -(1-M) z^{M-2} = -\frac{\Gamma(2-M)}{\Gamma(1-M)} z^{M-2}.$$

Für den Induktionsschritt $m \rightarrow m+1$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} h_1^{(m+1)}(z) &= \frac{dh_1^{(m)}}{dz}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(m+1-M)}{\Gamma(1-M)} (-(m+1-M)) z^{M-(m+1)-1} \\ &= (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(m+1-M)}{\Gamma(1-M)} \frac{\Gamma(m+2-M)}{\Gamma(m+1-M)} z^{M-(m+2)} \\ &= (-1)^{m+1} \frac{\Gamma((m+1)+1-M)}{\Gamma(1-M)} z^{M-((m+1)+1)}. \end{aligned}$$

Für $M < 1$ folgt damit

$$(-1)^m \frac{d^m h_1}{dz^m}(z) = (-1)^m h_1^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(m+1-M)}{\Gamma(1-M)} z^{M-(m+1)} \geq 0, \quad z > 0,$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und somit die vollständige Monotonie von h_1 in $(0, \infty)$ für alle $M \leq 1$. \square

Bemerkung 3.3. Die Funktion $h_2: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_2(z) = \beta z^\gamma$ ist für alle $\beta > 0$ und alle $0 < \gamma \leq 1$ eine positive Funktion auf $(0, \infty)$ mit vollständig monotoner Ableitung.

Beweis. Offensichtlich ist h_2 für die angegebenen Parameterbereiche positiv im Intervall $(0, \infty)$ und ihre Ableitung $h_2^{(1)}(z) = \beta \gamma z^{\gamma-1}$ nach Korollar A.1 und Bemerkung 3.2 vollständig monoton in $(0, \infty)$ für alle $\beta > 0$ und alle $0 < \gamma \leq 1$. \square

Die erste Hauptaussage dieses Abschnittes ist das nachstehende Korollar 3.6 über $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilungen, die als Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilungen dargestellt werden können.

Korollar 3.6. *Eine $l_{n,p}$ -symmetrische Kotz-Typ-Verteilung ist für alle Parameter M , β und γ mit $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$ als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar.*

Beweis. Grundlegend folgt die Behauptung der Darstellbarkeit als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung aus Satz 3.1, sofern

$$h(z) = g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z}) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} z^{M-1} e^{-\beta z^\gamma}, \quad z > 0,$$

vollständig monoton in $(0, \infty)$ ist. Diese Eigenschaft verlangt zunächst die Nichtpositivität der ersten Ableitung $h^{(1)}$ von h in $(0, \infty)$. Da

$$h^{(1)}(z) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} z^{M-2} e^{-\beta z^\gamma} (M - 1 - \beta \gamma z^\gamma), \quad z > 0,$$

gilt $h^{(1)}(z) \leq 0$ genau dann, wenn $M - 1 - \beta \gamma z^\gamma \leq 0$ bzw. wenn $\frac{M-1}{\beta \gamma} \leq z^\gamma$. Damit muss $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$ gelten, um $h^{(1)}(z) \leq 0$ für alle $z > 0$ zu sichern, da andernfalls $h^{(1)}$ auf dem Intervall $(0, \sqrt[p]{\frac{M-1}{\beta \gamma}})$ positiv ist. Des Weiteren benötigt die vollständige Monotonie von h in $(0, \infty)$ die Nichtnegativität der zweiten Ableitung $h^{(2)}$ von h im Intervall $(0, \infty)$, für die für $z > 0$ gilt

$$h^{(2)}(z) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} z^{M-3} e^{-\beta z^\gamma} \left(\beta^2 \gamma^2 z^{2\gamma} + \beta \gamma (3 - 2M - \gamma) z^\gamma + (M^2 - 3M + 2) \right).$$

Die partielle Ableitung des Termes $T = \beta^2 \gamma^2 z^{2\gamma} + \beta \gamma (3 - 2M - \gamma) z^\gamma + (M^2 - 3M + 2)$ nach dem Parameter M ist $-2\beta \gamma z^\gamma + 2M - 3$. Da diese für alle $z \in (0, \infty)$ und alle Parameter $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ auf dem zuvor bereits eingeschränkten Parameterbereich $\left(1 - \frac{n}{p}, 1\right]$ von M negativ ist, ist T monoton fallend in M für $M \leq 1$ und es genügt folglich die Betrachtung des Falles $M = 1$, da der Term T in diesem Fall im angegebenen Bereich minimal ist. Für $M = 1$ vereinfacht sich jedoch der Term T zu

$$\beta \gamma z^\gamma (\beta \gamma z^\gamma + 1 - \gamma)$$

und dieser ist, mit einer analogen Argumentation wie für die Nichtpositivität von $h^{(1)}$, genau dann nichtnegativ für alle $z > 0$, wenn $\gamma \leq 1$. Damit sind die Parameterbereiche, für die die zugehörige $l_{n,p}$ -symmetrische Kotz-Typ-Verteilung als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist, höchstens $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$. Mithilfe der Notationen der Funktionen h_1 und h_2 aus den Bemerkungen 3.2 und 3.3 und den zugehörigen Aussagen gilt

$$h(z) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} h_1(z) \cdot e^{-h_2(z)}, \quad z > 0.$$

Aus der vollständigen Monotonie von h_1 in $(0, \infty)$ für alle $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$ nach Bemerkung 3.2 und aus der vollständigen Monotonie von $e^{-h_2(\cdot)}$ in $(0, \infty)$ für alle $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$ nach Korollar A.2 und Bemerkung 3.3 folgt mithilfe von Korollar A.1 die vollständige Monotonie von h in $(0, \infty)$ für alle $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$. \square

In Abbildung C.4 ist der Dichtegenerator $g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(5,p)}$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ in einigen Spezialfällen dargestellt, in denen die zugrunde liegende $l_{5,p}$ -symmetrische Verteilung als Skalenmischung der 5-dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist. Dabei wird die Variation der Parameter M und γ in den durch Korollar 3.6 bereitgestellten Parameterbereichen exemplarisch untersucht und der Parameter β wird mit Verweis auf Abbildung C.1, in der die Auswirkung der Variation des Parameters β aufgezeigt ist, konstant als $\beta = 1$ gewählt.

Das nachfolgende Korollar betrachtet nun die ebenfalls in Beispiel 2.1 besprochenen Spezialfälle der $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung und ihre jeweilige Zugehörigkeit zur Klasse der Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung.

Korollar 3.7. *Eine $l_{n,p}$ -symmetrische Potenz-Exponential-Verteilung ist für alle Parameter γ mit $0 < \gamma \leq 1$ als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar. Insbesondere ist die n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung eine Skalenmischung von sich selbst.*

Für den euklidischen Fall $p = 2$ wurde die Aussage von Korollar 3.7 mit gewissen Umparametrisierungen sowohl innerhalb der Potenz-Exponential-Verteilung als auch in der Definition der Skalenmischung für den univariaten Fall $n = 1$ in West (1987) und Gneiting (1997) und für den multivariaten Fall in Lange und Sinsheimer (1993) bzw. Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2008) erzielt.

Im zweiten Teil dieses Abschnittes werden die jeweilig zugehörigen Mischungsverteilungen unter Verwendung von Korollar 3.5 bestimmt. Dazu wird zunächst die Klasse der univariaten stabilen Verteilungen gemäß Samorodnitsky und Taqqu (1994, Definition 1.1.6) eingeführt.

Definition 3.2. Eine Zufallsvariable X besitzt eine stabile Verteilung, falls Parameter $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \tau \leq 1$ und $\mu \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass die charakteristische Funktion von X darstellbar ist als

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\tau \operatorname{sign}(\theta) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) + i\mu\theta \right\} & , \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ -\sigma |\theta| \left(1 + i\tau \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(\theta) \ln |\theta| \right) + i\mu\theta \right\} & , \alpha = 1 \end{cases},$$

wobei $\operatorname{sign}(\theta)$ das Vorzeichen von $\theta \in \mathbb{R}$ angibt. Weiter werde die Verteilung von X mit $S_\alpha(\sigma, \tau, \mu)$ bezeichnet, α heißt der Stabilitätsindex und σ , τ und μ sind eindeutig bestimmt.

In der Literatur wird $S_\alpha(\sigma, \tau, \mu)$ meist mithilfe ihrer charakteristischen Funktion charakterisiert, da die zugehörige Dichte, die hier mit $f_{st;\alpha}(\cdot|\sigma, \tau, \mu)$ bezeichnet wird und deren Existenz und Stetigkeit für alle Parameter aus den angegebenen Bereichen bekannt ist, in lediglich drei Spezialfällen in geschlossener Form angegeben werden kann, siehe Zolotarev (1986). Diese sind

$$f_{st;2}(x|\sigma, \tau, \mu) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_{st;1}(x|\sigma, 0, \mu) = \frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und

$$f_{st;\frac{1}{2}}(x|\sigma, 1, \mu) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right\} \mathbb{1}_{(\mu, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Somit stimmt $S_2(\sigma, \tau, \mu)$ für alle Parameter $\tau \in [-1, 1]$ mit der univariaten Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz $2\sigma^2$ und $S_1(\sigma, 0, \mu)$ bzw. $S_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \mu)$ mit der univariaten Cauchy- bzw. Lévy-Verteilung jeweils mit dem Lageparameter μ und dem Skalierungsparameter σ überein. Außerdem existieren zahlreiche äquivalente Parametrisierungen der Klasse der stabilen Verteilungen, die zusammen mit einigen Eigenschaften in Samorodnitsky und Taqqu (1994), in Uchaikin und Zolotarev (1999) bzw. in Zolotarev (1986) diskutiert werden. Für das Anliegen dieses Abschnittes ist die in Proposition 1.2.12 in Samorodnitsky und Taqqu (1994) angegebene Eigenschaft von besonderem Interesse und wird nachfolgend als Proposition 3.1 formuliert.

Proposition 3.1. *Die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}(e^{-yX})$, $y > 0$, der Zufallsvariablen X mit $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, ist für $0 < \alpha \leq 2$ und $\sigma > 0$ gegeben durch*

$$\mathbb{E}(e^{-yX}) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\sigma^\alpha}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}y^\alpha\right\} & , \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{\sigma \frac{2}{\pi}y \ln(y)\right\} & , \alpha = 1 \end{cases}.$$

Abschließend sei bemerkt, dass Janson (2011) einen Überblick über die Theorie stabiler Verteilungen und einige ihrer Eigenschaften gibt.

Die Bestimmung von Mischungsverteilungen vorbereitend werden zunächst die Laplace-Transformierten von vier spezifischen Funktionen bereitgestellt werden. Bezeichne dazu zusätzlich δ die Dirac- δ -Distribution mit der Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$.

Lemma 3.4. *Für die Funktion f_1 mit $f_1(t) = \frac{t^{-M}}{\Gamma(1-M)}$, $t > 0$, gilt für $1 - \frac{n}{p} < M < 1$*

$$\mathcal{L}(f_1)(z) = z^{M-1}, \quad z > 0.$$

Beweis. Siehe Formel (1) in Erdélyi, Magnus, Oberhettinger und Tricomi (1954a, Abschnitt 5.4). \square

Lemma 3.5. Für f_2 mit $f_2(t) = f_{st;\gamma}(t|\sigma, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, mit $\sigma = \left(\beta \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ gilt für $\beta > 0$ und $0 < \gamma < 1$

$$\mathcal{L}(f_2)(z) = e^{-\beta z^\gamma}, \quad z > 0.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Proposition 3.1 durch die Wahl von $\sigma^\gamma = \beta \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)$. \square

Erwähnt sei, dass die Aussage von Lemma 3.5 mit der von Beispiel 3.14 in Janson (2011) übereinstimmt. Zudem kann Lemma 3.5 mithilfe der Kohlrausch-Funktionen e^{-z^γ} , deren Zusammenhang zu stabilen Verteilungen beispielsweise in Anderssen, Husain und Loy (2004) thematisiert wird und die die Laplace-Transformierten der Dichten von γ -stabilen Verteilungen sind, siehe Pollard (1946) bzw. Theorem 1 in Feller (1971, Kapitel XIII.6), auch ohne die Verwendung von Proposition 3.1 bewiesen werden.

Lemma 3.6. Für f_3 mit $f_3(t) = \delta(t - \beta)$, $t \in \mathbb{R}$, gilt für $\beta > 0$

$$\mathcal{L}(f_3)(z) = e^{-\beta z}, \quad z > 0.$$

Beweis. Mithilfe der definierenden Eigenschaft der Dirac- δ -Distribution gilt $\mathcal{L}(f_3)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \delta(t - \beta) dt = e^{-\beta z}$, $z > 0$. \square

Mit den Teilergebnissen der Lemmata 3.4, 3.5 und 3.6 wird im nachfolgenden Lemma 3.7 die inverse Laplace-Transformation von $g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(n,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ zusammengesetzt.

Lemma 3.7. Für alle Parameter M , β und γ mit $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$ gilt

$$g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z}) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \mathcal{L}(f)(z), \quad z > 0,$$

wobei für alle $\beta > 0$

$$\frac{f(t)}{C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p}} = \begin{cases} \delta(t - \beta) & , M = 1, \gamma = 1 \\ f_{st;\gamma}(t|\sigma, 1, 0) & , M = 1, 0 < \gamma < 1 \\ \frac{1}{\Gamma(1-M)} (t - \beta)^{-M} & , 1 - \frac{n}{p} < M < 1, \gamma = 1 \\ \frac{1}{\Gamma(1-M)} \int_0^t (t - s)^{-M} f_{st;\gamma}(s|\sigma, 1, 0) ds & , 1 - \frac{n}{p} < M < 1, 0 < \gamma < 1 \end{cases},$$

$t > 0$, mit $\sigma = \left(\beta \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Beweis. Zunächst zerlegt die innerhalb der Funktion f angegebene Fallunterscheidung den Parameterbereich in disjunkte Teilbereiche. In den Fällen $M = 1$, $\beta > 0$ und $\gamma = 1$ bzw. $M = 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma < 1$ folgt die Aussage direkt aus den Lemmata 3.5 und

3.6. Für die übrigen beiden Fälle wird der folgende Zwischenschritt benötigt. Für eine Funktion h mit $h(z) = C \cdot h_1(z) \cdot h_2(z)$, $z > 0$, mit in $(0, \infty)$ vollständig monotonen Funktionen h_1 und h_2 gilt nach Formel (20) in Erdélyi et al. (1954a, Abschnitt 4.2) bzw. Formel (25) in Prudnikov, Brychkov und Marichev (1992, Abschnitt 1.1.1) für alle $z > 0$

$$h(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad \text{mit} \quad f(t) = C \int_0^t f_2(s) f_1(t-s) ds, \quad t > 0,$$

wobei $h_i(z) = \mathcal{L}(f_i)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f_i(t) dt$, $i = 1, 2$. Seien nun $h(z) = g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z}) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} z^{M-1} e^{-\beta z^\gamma}$, $C = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p}$, $h_1(z) = z^{M-1}$ und $h_2(z) = e^{-\beta z^\gamma}$. Für den Fall $1 - \frac{n}{p} < M < 1$ und $0 < \gamma < 1$ sind die zu h_1 und h_2 gehörigen Funktionen f_1 und f_2 in den Lemmata 3.4 bzw. 3.5 bestimmt und die Behauptung folgt direkt durch Einsetzen in die obige Formel der Funktion f . Für $1 - \frac{n}{p} < M < 1$ und $\gamma = 1$ ist f_1 ebenfalls in Lemma 3.4, jedoch f_2 in Lemma 3.6 bestimmt und aus der Definition der Dirac- δ -Distribution folgt

$$f(t) = C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p} \int_0^t \delta(s - \beta) \frac{1}{\Gamma(1-M)} (t-s)^{-M} ds = \frac{C_{Kt;M,\beta,\gamma}^{n,p}}{\Gamma(1-M)} (t-\beta)^{-M}, \quad t > 0.$$

□

Die Mischungsverteilungen der als Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbaren $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilungen folgen nun mithilfe von Korollar 3.5.

Korollar 3.8. *Die $l_{n,p}$ -symmetrische Kotz-Typ-Verteilung mit den Parametern M , β und γ mit $1 - \frac{n}{p} < M \leq 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$ ist als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar und die zugehörige Mischungsverteilung besitzt die Lebesgue-Dichte*

$$f_G(s) = \omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{\frac{n}{p}-2} \cdot s^{-\frac{n}{p}} f\left(\frac{s}{p}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

wobei f die inverse Laplace-Transformierte von $g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(n,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ aus Lemma 3.7 bezeichnet.

Für den Spezialfall $p = 2$ ist die obige Mischungsverteilung für die Teilklasse der Potenz-Exponential-Verteilungen in Gneiting (1997) mit Verweis auf Lange und Sinsheimer (1993) und West (1987) bestimmt.

Wie in Beispiel 2.1 angegeben, spezialisiert sich die $l_{n,p}$ -symmetrische Kotz-Typ-Verteilung mit den Parametern $M = 1$, $\beta = \frac{1}{p}$ und $\gamma = 1$ zur n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung. Diese ist offensichtlich eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung und die positive Zufallsvariable V in (3.1) ist Diracverteilt im Punkt 1, deren Verteilungsfunktion im Folgenden mit G_1^N gegeben durch

$G_1^N(t) = \mathbf{1}_{(1,\infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, bezeichnet wird. Dieses Resultat folgt ebenfalls aus Korollar 3.8. Durch Spezialisierung der dortigen Parameter auf $M = 1$, $\beta = \frac{1}{p}$ und $\gamma = 1$ gilt zunächst $C_{Kt;1,\frac{1}{p},1}^{n,p} = C_p^n$ und damit

$$\begin{aligned} f_G(s) &= \omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{\frac{n}{p}-2} \cdot s^{-\frac{n}{p}} \cdot C_p^n \cdot \delta\left(\frac{s}{p} - \frac{1}{p}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s) \\ &= \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n}{p^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{\frac{n}{p}-2} \frac{p^{n-\frac{n}{p}}}{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n} \cdot s^{-\frac{n}{p}} \delta\left(\frac{s}{p} - \frac{1}{p}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s) \\ &= \frac{1}{p} s^{-\frac{n}{p}} \delta\left(\frac{s}{p} - \frac{1}{p}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die zu dieser Dichte gehörige Mischungsverteilung ist die Dirac-Verteilung im Punkt 1, da mithilfe der Transformation $s_1 = \frac{s}{p}$ mit $\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{p}$ und der definierenden Eigenschaft der Dirac- δ -Distribution für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-\infty}^t f_G(s) ds = \frac{1}{p} \int_0^t s^{-\frac{n}{p}} \delta\left(\frac{s}{p} - \frac{1}{p}\right) ds \\ &= \int_0^{\frac{t}{p}} p^{-\frac{n}{p}} s_1^{-\frac{n}{p}} \delta\left(s_1 - \frac{1}{p}\right) ds_1 \\ &= p^{-\frac{n}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,\frac{1}{p}t)}(s_1) s_1^{-\frac{n}{p}} \delta\left(s_1 - \frac{1}{p}\right) ds_1 = \mathbf{1}_{(0,\frac{1}{p}t)}\left(\frac{1}{p}\right) = G_1^N(t). \end{aligned}$$

Speziell für $p = 2$ werden diese Betrachtungen explizit in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) durchgeführt.

3.3.2 Der Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung

In diesem zweiten Abschnitt wird nun die Klasse der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilungen, siehe Beispiel 2.2, betrachtet und gezeigt, dass jedes Element dieser Klasse von Verteilungen als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist, siehe Korollar 3.9. Zusätzlich sind in Korollar 3.11 die zugehörigen Mischungsverteilungen angegeben.

Korollar 3.9. *Eine $l_{n,p}$ -symmetrische Pearson-Typ VII-Verteilung ist für alle Parameter $M > \frac{n}{p}$ und $\nu > 0$ als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar.*

Beweis. Sei $h(z) = g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z}) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-M}$, $z \geq 0$. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}_0$ zunächst induktiv

$$h^{(m)}(z) = (-1)^m C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\Gamma(M+m)}{\nu^k \Gamma(M)} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-(M+m)}, \quad z > 0,$$

da für alle $z > 0$ durch $h^{(0)}(z) = h(z)$ und

$$h^{(1)}(z) = -C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{M}{\nu} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-M-1} = -C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\Gamma(M+1)}{\nu\Gamma(M)} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-(M+1)}$$

der Induktionsanfang für $m = 0$ und $m = 1$ erfüllt ist und da für den Induktionsschritt $m \rightarrow m + 1$ weiter gilt

$$\begin{aligned} h^{(m+1)}(z) &= \frac{dh^{(m)}}{dz}(z) = (-1)^m C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\Gamma(M+m)}{\nu^m\Gamma(M)} \left(-\frac{M+m}{\nu}\right) \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-(M+m)-1} \\ &= (-1)^{m+1} C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\Gamma(M+m)}{\nu^m\Gamma(M)} \frac{\Gamma(M+m+1)}{\nu\Gamma(M+m)} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-(M+m+1)} \\ &= (-1)^{m+1} C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\Gamma(M+(m+1))}{\nu^{m+1}\Gamma(M)} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-(M+(m+1))}, \quad z > 0. \end{aligned}$$

Da somit $(-1)^m \frac{d^m h}{dz^m}(z) = (-1)^m h^{(m)}(z) \geq 0$ für alle $z > 0$, ist die Funktion h für alle Parameter $M > \frac{n}{p}$ und $\nu > 0$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ und Satz 3.1 liefert die Darstellbarkeit von $\Phi_{g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}}$ als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung. \square

Infolge dieses Korollars sind die ebenfalls in Beispiel 2.2 thematisierten Spezialfälle der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung als Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar, siehe Korollar 3.10.

Korollar 3.10. *Eine $l_{n,p}$ -symmetrische Student- t -Verteilung ist für alle Parameter $\nu > 0$ als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar. Insbesondere erfüllt damit auch die $l_{n,p}$ -symmetrische Cauchy-Verteilung diese Darstellbarkeit.*

Für den Spezialfall $p = 2$ wurde bereits in Andrews und Mallows (1974) gezeigt, dass Pearson-Typ VII-Verteilungen Skalenmischungen der gewöhnlichen Normalverteilung sind. Der beinhaltete Spezialfall der multivariaten Student- t -Verteilung wird darüber hinaus auch in Lange und Sinsheimer (1993) und Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) behandelt, wobei der elliptisch konturierte anstelle des sphärischen Verteilungsfalls betrachtet wird.

Die Bestimmung der zugehörigen Mischungsverteilungen gemäß der Korollare 3.4 bzw. 3.5 benötigt zunächst die inverse Laplace-Transformierte der Komposition aus dem Dichtegenerator $g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}$ und der p -ten Wurzelfunktion $\sqrt[p]{\cdot}$. Diese wird im nachfolgenden Lemma 3.8 zur Verfügung gestellt.

Lemma 3.8. *Für f mit $f(t) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\nu^M}{\Gamma(M)} t^{M-1} e^{-\nu t}$, $t > 0$, gilt für alle $M > \frac{n}{p}$ und $\nu > 0$*

$$\mathcal{L}(f)(z) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)^{-M} = g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z}), \quad z > 0.$$

Beweis. Sei $h(z) = g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z})$, $z > 0$. Für h_1 mit $h_1(\zeta) = h(\nu\zeta) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} (1 + \zeta)^{-M}$, $\zeta > 0$, gilt nach Formel (1) in Erdélyi et al. (1954a, Abschnitt 5.4)

$$h_1(\zeta) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \int_0^\infty e^{-\zeta t} \frac{1}{\Gamma(M)} t^{M-1} e^{-t} dt, \quad \zeta > 0.$$

Mithilfe der Transformation $t = \nu s$ mit $\frac{dt}{ds} = \nu$ ist somit

$$\begin{aligned} h(z) &= h_1\left(\frac{z}{\nu}\right) = C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\nu}t} \frac{1}{\Gamma(M)} t^{M-1} e^{-t} dt \\ &= C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \int_0^\infty e^{-zs} \frac{\nu^M}{\Gamma(M)} s^{M-1} e^{-\nu s} ds = \int_0^\infty e^{-zs} f(s) ds, \quad z > 0. \end{aligned}$$

□

Die zur jeweiligen Darstellung von $\Phi_{g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}}$ als Skalenmischung von $N_{n,p}$ gehörige Mischungsverteilung folgt mithilfe von Korollar 3.5 direkt aus Lemma 3.8 und ist im nachfolgenden Korollar 3.11 angegeben. Dazu bezeichne $\Gamma(a, b)$ die Gamma-Verteilung mit Parametern $a > 0$ und $b > 0$, die die Lebesgue-Dichte $\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, besitzt.

Korollar 3.11. *Die $l_{n,p}$ -symmetrische Pearson-Typ VII-Verteilung mit den Parametern M und ν mit $M > \frac{n}{p}$ und $\nu > 0$ ist die Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung $\Gamma\left(M - \frac{n}{p}, \frac{\nu}{p}\right)$ mit der Lebesgue-Dichte*

$$f_G(s) = \frac{\left(\frac{\nu}{p}\right)^{M - \frac{n}{p}}}{\Gamma\left(M - \frac{n}{p}\right)} s^{M - \frac{n}{p} - 1} e^{-\frac{\nu}{p}s} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Durch Einsetzen der inversen Laplace-Transformierten f von $g_{PT7;M,\nu}^{(n,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ aus Lemma 3.8 in die allgemeine Vorschrift der Lebesgue-Dichte der Mischungsverteilung, siehe Korollar 3.5, gilt

$$\begin{aligned} f_G(s) &= \omega_{n,p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{\frac{n}{p}-2} \cdot s^{-\frac{n}{p}} \cdot C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\nu^M}{\Gamma(M)} \cdot \left(\frac{s}{p}\right)^{M-1} e^{-\nu \frac{s}{p}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s) \\ &= \omega_{n,p} C_{PT7;M,\nu}^{n,p} \frac{\nu^M \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma(M)} p^{\frac{n}{p}-M-1} \cdot s^{M - \frac{n}{p} - 1} e^{-\nu \frac{s}{p}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s) \\ &= \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n}{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \frac{p^n}{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n} \frac{\Gamma(M)}{\nu^{\frac{n}{p}} \Gamma\left(M - \frac{n}{p}\right)} \frac{\nu^M \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma(M)} p^{\frac{n}{p}-M-1} \cdot s^{M - \frac{n}{p} - 1} e^{-\frac{\nu}{p}s} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s) \\ &= \frac{\nu^{M - \frac{n}{p}} p^{\frac{n}{p}-M}}{\Gamma\left(M - \frac{n}{p}\right)} s^{M - \frac{n}{p} - 1} e^{-\frac{\nu}{p}s} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Eine äquivalente Darstellung dieser Mischungsverteilung ist für den Spezialfall $n = 1$ und $p = 2$ in Andrews und Mallows (1974) bestimmt.

Nach Richter (2007) bezeichne $\chi^p(\nu)$ die χ^p -Verteilung bzw. die p -verallgemeinerte χ^2 -Verteilung mit Parameter $\nu > 0$, deren Lebesgue-Dichte f gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{p^{\frac{\nu}{p}} \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)} x^{\frac{\nu}{p}-1} e^{-\frac{x}{p}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Notation $\frac{\chi^p(\nu)}{\nu}$ der Verteilung von $\frac{1}{\nu}\Xi$ mit $\Xi \sim \chi^p(\nu)$ besitzt $\frac{\chi^p(\nu)}{\nu}$ nach dem Dichtetransformationssatz weiter die Lebesgue-Dichte

$$\frac{\left(\frac{\nu}{p}\right)^{\frac{\nu}{p}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)} \xi^{\frac{\nu}{p}-1} e^{-\frac{\nu}{p}\xi} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt damit $\frac{\chi^p(\nu)}{\nu} = \mathfrak{L}\left(\frac{1}{\nu}\Xi\right) = \Gamma\left(\frac{\nu}{p}, \frac{\nu}{p}\right)$ für alle $\nu > 0$. Somit ist die $l_{n,p}$ -symmetrische Student- t -Verteilung mit Parameter $\nu > 0$, d.h. die $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilung mit Parametern $M = \frac{n+\nu}{p}$ und $\nu > 0$, speziell die Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung $\frac{\chi^p(\nu)}{\nu}$ bzw. $\Gamma\left(\frac{\nu}{p}, \frac{\nu}{p}\right)$, deren Verteilungsfunktion im weiteren Verlauf der Arbeit mit $G_{\nu/p}^{St}$ bezeichnet wird. Für den Spezialfall $p = 2$ ist die Mischungsverteilung mithilfe der χ^2 -Verteilung in Lange und Sinsheimer (1993) und mithilfe der Gamma-Verteilung in Gneiting (1997) und Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) dargestellt.

Durch die weitere Spezialisierung auf $\nu = 1$ folgt, dass die $l_{n,p}$ -symmetrische Cauchy-Verteilung eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung $\chi^p(1)$ bzw. $\Gamma\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)$ ist. Unter Beachtung der Parametrisierung der Familie der Skalenmischungen der Normalverteilungen ist dies für $p = 2$ neben den oben genannten Arbeiten auch in Andrews und Mallows (1974) zu finden.

3.3.3 Der Fall der $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ II-Verteilung

Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Abschnitten wird nun eine Teilklasse von stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen angegeben, aus der kein Element als Skalenmischung darstellbar ist, siehe Korollar 3.12.

Korollar 3.12. *Eine $l_{n,p}$ -symmetrische Pearson-Typ II-Verteilung ist für kein $\nu > 0$ als Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar.*

Beweis. Sei $h(z) = g_{PT2;\nu}^{(n,p)}(\sqrt[p]{z}) = C_{PT2;\nu}^{n,p} (1-z)^\nu \mathbf{1}_{(0,1)}(z)$, $z > 0$, und zunächst $\nu \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt die $(\nu - 1)$ -te Ableitung $h^{(\nu-1)}$ von h die Gleichung

$$h^{(\nu-1)}(z) = (-1)^{\nu-1} C_{PT2;\nu}^{n,p} \nu! (1-z) \mathbf{1}_{(0,1)}(z), \quad z > 0,$$

und ist in $z = 1$ nicht differenzierbar, da

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{h^{(\nu-1)}(1+\delta) - h^{(\nu-1)}(1)}{\delta} = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{0-0}{\delta} = 0,$$

jedoch

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{h^{(\nu-1)}(1-\delta) - h^{(\nu-1)}(1)}{-\delta} = (-1)^{\nu-1} C_{PT2;\nu}^{n,p} \nu! \lim_{\delta \searrow 0} \frac{(1 - (1-\delta))}{-\delta} = (-1)^\nu C_{PT2;\nu}^{n,p} \nu!,$$

wodurch der Grenzwert des Differenzenquotienten in $z = 1$ nicht existiert. Demzufolge ist h für $\nu \in \mathbb{N}$ nicht unendlich oft differenzierbar in $(0, \infty)$ und insbesondere nicht vollständig monoton in $(0, \infty)$. Sei nun $\nu \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$, also $m < \nu < m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$h^{(m)}(z) = (-1)^m C_{PT2;\nu}^{m,p} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} (1-z)^{\nu-m} \mathbb{1}_{(0,1)}(z), \quad z > 0,$$

nicht differenzierbar in $z = 1$, da der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten von $h^{(m)}(z)$ in $z = 1$ nicht existiert, da aufgrund von $\nu - m - 1 < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \searrow 0} \frac{h^{(m)}(1-\delta) - h^{(m)}(1)}{-\delta} &= (-1)^m C_{PT2;\nu}^{m,p} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \lim_{\delta \searrow 0} \frac{\delta^{\nu-m} - 0}{-\delta} \\ &= (-1)^{m+1} C_{PT2;\nu}^{m,p} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \lim_{\delta \searrow 0} \delta^{\nu-m-1} \in \{\infty, -\infty\}. \end{aligned}$$

Damit ist h auch für $\nu \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ nicht vollständig monoton in $(0, \infty)$. \square

Für $p = 2$ wurde dieses Resultat bereits in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) erzielt.

3.3.4 Konstruktion der $l_{n,p}$ -symmetrischen Slash-Verteilung

Zum Abschluss des Abschnittes 3.3 zu Beispielen und Gegenbeispielen von Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung wird nun eine spezifische Mischungsverteilung betrachtet, wodurch eine weitere Klasse von Beispielen von Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung eingeführt wird. Sei V dazu eine positive Zufallsvariable mit der vom Parameter $\nu > 0$ abhängigen Lebesgue-Dichte

$$g_\nu^{Sl}(y) = \nu y^{\nu-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

und bezeichne G_ν^{Sl} die zugehörige Verteilungsfunktion.

Definition 3.3. Die Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der zur obigen Verteilungsfunktion G_ν^{Sl} gehörigen Mischungsverteilung heißt $l_{n,p}$ -symmetrische Slash-Verteilung mit Parameter $\nu > 0$.

Für den Spezialfall $p = 2$ sind Slash-Verteilungen in Rogers und Tukey (1972) eingeführt und u.a. in Lange und Sinsheimer (1993) als Skalenmischung der gewöhnlichen Normalverteilung identifiziert. Da eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Mischungsverteilung G nach Korollar 3.1 mit der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen mit Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(n,p)}$ übereinstimmt, folgt Korollar 3.13 direkt aus Definition 3.3 bzw. aus der konkreten Gestalt der Mischungsverteilung.

Korollar 3.13. *Die $l_{n,p}$ -symmetrische Slash-Verteilung mit Parameter $\nu > 0$ ist die stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung mit dem Dichtegenerator*

$$g_{Sl;\nu}^{(n,p)}(r) = \nu C_p^n \int_0^1 v^{\frac{n}{p} + \nu - 1} e^{-\frac{r^p}{p}v} dv, \quad r \geq 0.$$

Eine dem obigen Dichtegenerator zugrunde liegende dichtegenerierende Funktion ist für den Fall $p = 2$ in Beispiel 8.3 in Richter (2013) angegeben. Wie auch für die bisher betrachteten Teilklassen der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen wird der Dichtegenerator $g_{Sl;\nu}^{(n,p)}$ für den Fall $n = 5$, $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ und $\nu \in \{1, 2, 3\}$ in Abbildung C.5 dargestellt, wobei die verschiedenen Skalierungen der Achsen zu beachten sind. Letztlich werden in Korollar 3.14 die ersten beiden Momente der $l_{n,p}$ -symmetrischen Slash-Verteilung betrachtet.

Korollar 3.14. *Sei $X \sim \Phi_{g_{Sl;\nu}^{(n,p)}}$, d.h. der n -dimensionale Zufallsvektor X folgt der $l_{n,p}$ -symmetrischen Slash-Verteilung mit Parameter $\nu > 0$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = 0_n$, falls $\nu > \frac{1}{p}$, und $\text{Cov}(X) = \sigma_{g_{Sl;\nu}^{(n,p)}}^2 I_n$ mit $\sigma_{g_{Sl;\nu}^{(n,p)}}^2 = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})} \frac{p\nu}{p\nu - 2}$, falls $\nu > \frac{2}{p}$.*

Beweis. Zunächst existieren der Erwartungswert bzw. die Kovarianzmatrix von X mit $X \sim \Phi_{g_{Sl;\nu}^{(n,p)}}$, falls $\int_0^\infty v^{-\frac{1}{p}} dG_\nu^{Sl}(v)$ bzw. $\int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG_\nu^{Sl}(v)$ endlich sind, siehe Korollar 3.3. Da für $m \in \mathbb{N}$ und $\nu > \frac{m}{p}$

$$\int_0^\infty v^{-\frac{m}{p}} dG_\nu^{Sl}(v) = \nu \int_0^1 v^{\nu - \frac{m}{p} - 1} dv = \frac{\nu}{\nu - \frac{m}{p}} \left[v^{\nu - \frac{m}{p}} \right]_{v=0}^1 = \frac{p\nu}{p\nu - m}$$

gilt, jedoch die Integrale

$$\int_0^\infty v^{-\frac{m}{p}} dG_\nu^{Sl}(v) = \frac{\nu}{\nu - \frac{m}{p}} \left[v^{\nu - \frac{m}{p}} \right]_{v=0}^1 = \frac{\nu}{\nu - \frac{m}{p}} \left(1 - \lim_{R \searrow 0} R^{\nu - \frac{m}{p}} \right)$$

für $0 < \nu < \frac{m}{p}$ und $\int_0^\infty v^{-\frac{m}{p}} dG_\nu^{Sl}(v) = \frac{m}{p} \int_0^1 v^{-1} dv$ für $\nu = \frac{m}{p}$ nicht konvergieren, existiert der Erwartungswert von X für alle Parameter $\nu > \frac{1}{p}$ und die Kovarianzmatrix von X für alle Parameter $\nu > \frac{2}{p}$. Unter Verwendung von $\sigma_{g_{Sl;\nu}^{(n,p)}}^2 = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})} \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG_\nu^{Sl}(v)$ gemäß Lemma 3.2 folgt die konkrete Gestalt der Momente schließlich aus Korollar 3.3. \square

3.4 Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit beliebigem Erwartungswert und beliebiger Kovarianzmatrix

Aufbauend auf Abschnitt 3.2 werden nachfolgend Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit beliebigem Erwartungswert und beliebiger Kovarianzmatrix eingeführt. Im gesamten Abschnitt seien dazu $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und nichtnegativ definite Matrix vom Rang k .

Mit dem Verweis auf die in Abschnitt 2.2.1 eingeführte Notation $N_{n,p}(\mu, \Sigma)$ der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ , d.h. der Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit den Parametern μ und Σ und dem Dichtegenerator $g_{PE}^{(k,p)}$, seien nun V eine positive Zufallsvariable, G die Verteilungsfunktion von V und $Z \sim N_{n,p}(0_n, \Sigma)$ unabhängig von V .

Definition 3.4. Die Verteilung eines n -dimensionalen Zufallsvektors X mit

$$X \stackrel{d}{=} \mu + V^{-\frac{1}{p}} \cdot Z \quad (3.5)$$

heißt Rang- k -stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Parametern μ und Σ und Mischungsverteilung G , wobei $k = \text{rg}(\Sigma)$, und werde mit $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ bezeichnet.

Da $SMN_{n,p}(G) = SMN_{n,p}(0_n, I_n, G)$, ist dies offenbar eine Erweiterung der Klasse der Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung. In Analogie zu Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen kann zum einem das Attribut der Rang- k -Stetigkeit vernachlässigt werden, falls dieses kontextuell klar oder von minderer Bedeutung ist. Zum anderen bildet die Klasse der Rang- k -stetigen achsenparallel konturierten Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilung G einen für den weiteren Verlauf dieser Arbeit bedeutenden Spezialfall der in Definition 3.4 eingeführten Klasse von Verteilungen, der angenommen wird, wenn Σ eine nichtnegativ definite $(n \times n)$ -Diagonalmatrix vom Rang k ist, siehe u.a. Definition 4.15. Weiter stimmt die Klasse der $SMN_{n,2}(\mu, \Sigma, G)$ -Verteilungen für positiv definite Matrixparameter Σ mit der in Lange und Sinsheimer (1993) eingeführten Klasse der normalen/ unabhängigen Verteilungen überein, die ihrerseits mithilfe geeigneter Umparametrisierungen der in Eltoft et al. (2006) bzw. in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006, 2008) betrachteten Klasse der Varianz- bzw. Skalenmischungen von Normalverteilungen entspricht.

Im nachfolgenden ersten Teil dieses Abschnittes wird zunächst der Fall eines Matrixparameters Σ mit positivem Rang, d.h. $1 \leq k \leq n$, betrachtet. Mit dem Verweis auf den Absatz über Rangzerlegungen von Matrizen am Ende von Abschnitt 2.2.1 und die darin verwendeten Notationen seien insbesondere die zu Σ gehörigen Matrizen S_1, V_1

und V_2 wie in (2.13), d.h. $(V_1\sqrt{S_1})(V_1\sqrt{S_1})^\top$ ist eine Rang- k -Zerlegung von Σ und die Spalten von V_2 bilden eine Orthonormalbasis des Kerns von Σ . Um Missverständnisse zu vermeiden, wird an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass V in dem in diesem Abschnitt thematisierten Zusammenhang eine positive Zufallsvariable und nicht wie in Abschnitt 2.2.1 die Matrix der Eigenvektoren von Σ bezeichnet.

Das nachfolgende Lemma 3.9 bereitet die Einordnung der Verteilung $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ in die Klasse der Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen vor, die in Korollar 3.15 vorgenommen wird.

Lemma 3.9. *Für einen n -dimensionalen Zufallsvektor X gilt $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ genau dann, wenn*

$$X \stackrel{d}{=} \mu + V_1\sqrt{S_1}\tilde{X} \quad \text{mit } \tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G).$$

Beweis. Da $(V_1\sqrt{S_1})(V_1\sqrt{S_1})^\top$ eine Rang- k -Zerlegung von Σ ist, gilt mithilfe der positiven Zufallsvariablen $V \sim G$ und der Definitionen 2.2 und 3.4

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} \mu + V^{-\frac{1}{p}} \cdot Z && \text{mit } Z \sim N_{n,p}(0_n, \Sigma) \\ &\stackrel{d}{=} \mu + V^{-\frac{1}{p}} \cdot V_1\sqrt{S_1}\tilde{Z} && \text{mit } \tilde{Z} \sim N_{k,p} \\ &= \mu + V_1\sqrt{S_1}V^{-\frac{1}{p}} \cdot \tilde{Z} && \text{mit } \tilde{Z} \sim N_{k,p} \\ &\stackrel{d}{=} \mu + V_1\sqrt{S_1}\tilde{X} && \text{mit } \tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G) \end{aligned}$$

und damit die behauptete Äquivalenz. □

Da eine Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung eine stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung ist, kann mithilfe von Lemma 3.9 und Definition 2.2 für $k \geq 1$ geschlussfolgert werden, dass die Klasse der Rang- k -stetigen Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Parametern μ und Σ und Mischungsverteilung G eine Teilklasse der Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten Verteilungen bildet, die durch Spezialisierung des Dichtegenerators entsteht, siehe Korollar 3.15.

Korollar 3.15. *Für $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und nichtnegativ definit mit Rang $k \geq 1$ gilt*

$$SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G) = EC_{n,p}\left(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)}\right).$$

Mithilfe dieser Einordnung folgen direkt zwei weitere stochastische Darstellungen und Aussagen über Regularität bzw. Singularität und Dichten bzw. dichte-ähnliche Darstellungen von $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ aus den entsprechenden Resultaten aus Abschnitt 2.2 durch Spezialisierung des Dichtegenerators, siehe Korollare 3.16 – 3.19.

Korollar 3.16. Sei $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$. Dann erfüllt der Zufallsvektor X die stochastische Darstellung

$$X \stackrel{d}{=} \mu + R \cdot V_1 \sqrt{S_1} U_p^{(k)}.$$

Dabei folgt der k -dimensionale Zufallsvektor $U_p^{(k)}$ der k -dimensionalen p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf der $l_{k,p}$ -Einheitssphäre $S_{k,p}$, R und $U_p^{(k)}$ sind stochastisch unabhängig und R ist eine nichtnegative Zufallsvariable mit der Lebesgue-Dichte $f_R(r) = \omega_{k,p} r^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(r) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(r)$, $r \in \mathbb{R}$.

Korollar 3.17. Sei $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$. Dann erfüllt X die stochastische Darstellung

$$X \stackrel{d}{=} \mu + V_1 \sqrt{S_1} \cdot SHP_p^{(k)}(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}),$$

wobei die nichtnegativen Zufallsvariablen $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}$ vollständig stochastisch unabhängig sind und die folgenden Lebesgue-Dichten besitzen:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \omega_{k,p} r^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(r) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}, \\ f_{\Psi_i}(\psi_i) &= \frac{\omega_{k-i,p} (\sin(\psi_i))^{k-i-1}}{\omega_{k-i+1,p} (N_p(\psi_i))^{k-i+1}} \mathbb{1}_{[0,\pi)}(\psi_i), \quad \psi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k-2, \\ f_{\Psi_{k-1}}(\psi_{k-1}) &= \frac{1}{\omega_{2,p} (N_p(\psi_{k-1}))^2} \mathbb{1}_{[0,2\pi)}(\psi_{k-1}), \quad \psi_{k-1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 2.2 bezeichnen nun $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die nicht notwendigerweise verschiedenen, positiven Eigenwerte der Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$.

Korollar 3.18. Sei $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, d.h. $\text{rg}(\Sigma) = n$. Dann ist X regulär verteilt mit der Lebesgue-Dichte

$$f_X(x) = \frac{C_p^n}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n}} \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} \exp \left\{ -\frac{v}{p} \left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (x - \mu) \right|_p \right\} dG(v), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Korollar 3.19. Sei $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und nichtnegativ definit, aber nicht positiv definit mit positivem Rang k , d.h. $1 \leq k < n$. Dann ist X singulär verteilt und besitzt im Sinne von Korollar 2.6 und den davor genannten Arbeiten die dichte-ähnliche Darstellung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_k}} g_{SMN;G}^{(k,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^T (x - \mu) \right|_p \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.6)$$

und

$$V_2^T X = V_2^T \mu \quad P - f.s.. \quad (3.7)$$

Wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, bestimmt (3.7) eindeutig den affinen linearen Unterraum $U_{V_2^\top}(\mu)$ des \mathbb{R}^n , in dem die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse konzentriert ist, und (3.6) kann als Dichte in $U_{V_2^\top}(\mu)$ interpretiert werden. Die Radon-Nikodym-Ableitung von $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit Σ wie in Korollar 3.19 nach dem im Unterraum $U_{V_2^\top}(\mu)$ definierten Lebesgue-Maß $\lambda_{U_{V_2^\top}(\mu)}$ erfüllt damit für $\lambda_{U_{V_2^\top}(\mu)}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung

$$\frac{C_p^k}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_k}} \int_0^\infty v^{\frac{k}{p}} \exp \left\{ -\frac{v}{p} \left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^\top (x - \mu) \right|_p^p \right\} dG(v).$$

Basierend auf Korollar 3.3 und Lemma 3.9 stellt Korollar 3.20 die ersten beiden Momente einer Rang- k -stetigen Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung für ein $k \geq 1$ und jeweils eine zugehörige Existenzbedingung bereit.

Korollar 3.20. *Seien $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ und $V \sim G$.*

a) Falls $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{1}{p}}\right) = \int_0^\infty v^{-\frac{1}{p}} dG(v) < \infty$, dann $\mathbb{E}(X) = \mu$.

b) Falls $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right) = \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v) < \infty$, dann $\text{Cov}(X) = \sigma_{SMN;G}^{2(k,p)} \Sigma$.

Beweis. Nach Lemma 3.9 gilt zunächst $X \stackrel{d}{=} \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X}$ mit $\tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G)$. Da somit $\mathbb{E}(X) = \mu + V_1 \sqrt{S_1} \mathbb{E}(\tilde{X})$ und $\text{Cov}(X) = (V_1 \sqrt{S_1}) \text{Cov}(\tilde{X}) (V_1 \sqrt{S_1})^\top$ gilt, existiert $\mathbb{E}(X)$ bzw. $\text{Cov}(X)$ genau dann, wenn $\mathbb{E}(\tilde{X})$ bzw. $\text{Cov}(\tilde{X})$ existiert. Korollar 3.3 liefert letztlich die Behauptung, da $(V_1 \sqrt{S_1}) (V_1 \sqrt{S_1})^\top$ eine Rang- k -Zerlegung von Σ ist. \square

In Lemma 3.10 wird nun schließlich die bedingte Verteilung der Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Parametern μ und Σ und Mischungsverteilung G unter der Bedingung $V = v$, $v > 0$, bestimmt, wobei $V \sim G$. In Analogie zum Absatz nach Lemma 3.3 kann demzufolge $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ ebenfalls als Varianzmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilung G bezeichnet werden.

Lemma 3.10. *Seien $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ und $V \sim G$ eine positive Zufallsvariable. Dann*

$$\mathfrak{L}(X \mid V = v) = N_{n,p}\left(\mu, v^{-\frac{2}{p}} \Sigma\right), \quad v > 0.$$

Beweis. Sei $Z \sim N_{n,p}(0_n, \Sigma)$ unabhängig von V . Unter Verwendung von Definition 3.4 und der Unabhängigkeit von Z und V gilt für alle $B \in \mathfrak{B}^n$ und alle $v > 0$

$$\begin{aligned} P(X \in B \mid V = v) &= P\left((\mu + V^{-\frac{1}{p}} Z) \in B \mid V = v\right) = P\left((\mu + v^{-\frac{1}{p}} Z) \in B\right) \\ &= P\left((\mu + v^{-\frac{1}{p}} V_1 \sqrt{S_1} \tilde{Z}) \in B\right), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{Z} \sim N_{k,p}$. Seien $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k}$ die Diagonaleinträge von $\sqrt{S_1}$. Dann ist $\tilde{A}\tilde{A}^T$ mit

$$\tilde{A} = v^{-\frac{1}{p}} V_1 \sqrt{S_1} = V_1 v^{-\frac{1}{p}} \sqrt{S_1} = V_1 \cdot \text{diag}\left(v^{-\frac{1}{p}} \sqrt{\lambda_1}, \dots, v^{-\frac{1}{p}} \sqrt{\lambda_k}\right)$$

eine Rang- k -Zerlegung von $v^{-\frac{2}{p}} \Sigma$. Für $Y = \mu + \tilde{A}\tilde{Z}$ und alle $v > 0$ gilt somit $Y \sim N_{n,p}\left(\mu, v^{-\frac{2}{p}} \Sigma\right)$ und die Behauptung folgt schließlich aus

$$P(X \in B \mid V = v) = P(Y \in B), \quad B \in \mathfrak{B}^n.$$

□

Zum Abschluss dieses Abschnittes gibt einerseits Satz 3.2 eine notwendige und hinreichende Bedingung an, wann eine Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilung eine Rang- k -stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung ist, vergleiche Satz 3.1. Andererseits werden in den Korollaren 3.21 und 3.22 Gleichungen zur Bestimmung der Mischungsverteilung G angegeben, wenn bekannt ist, dass eine Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilung als Rang- k -stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist, vergleiche Korollare 3.4 und 3.5.

Satz 3.2. *Sei $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$. Es gilt $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ genau dann für die Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen, wenn die Funktion h mit $h(y) = g^{(k,p)}(\sqrt[p]{y})$ in $[0, \infty)$ vollständig monoton ist.*

Beweis. Sei zunächst $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ für eine Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen. Nach Korollar 3.15 ist somit $g^{(k,p)} = g_{SMN;G}^{(k,p)}$ und nach Satz 3.1 ist $g_{SMN;G}^{(k,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ vollständig monoton in $[0, \infty)$. Seien nun umgekehrt $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ und $h(\cdot) = g^{(k,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ vollständig monoton in $[0, \infty)$. Aufgrund dieser vollständigen Monotonie ist $g^{(k,p)}$ nach Satz 3.1 der Dichtegenerator einer Verteilung aus

$$\{SMN_{k,p}(G) : G \text{ ist Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariablen}\},$$

d.h. für einen $l_{k,p}$ -symmetrisch mit Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ verteilten Zufallsvektor \tilde{X} , $\tilde{X} \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$, gilt $\tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G)$ für eine passende Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen. Mit der Rangzerlegung $(V_1 \sqrt{S_1})(V_1 \sqrt{S_1})^T$ von Σ gilt weiter

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X} && \text{mit } \tilde{X} \sim \Phi_{g^{(k,p)}} \\ &= \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X} && \text{mit } \tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G) \end{aligned}$$

und Lemma 3.9 impliziert

$$X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G).$$

□

Für den euklidischen Fall $p = 2$ und einen symmetrischen und positiv definiten Matrixparameter Σ stimmt Satz 3.2 mit Theorem 8 in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) überein, wobei dort, wie schon am Ende von Abschnitt 3.2 beschrieben, die Uneindeutigkeit von Dichtegeneratoren in Lebesgue-Nullmengen explizit behandelt wird. In Analogie zu den entsprechenden Resultaten in Abschnitt 3.2 werden nachfolgend anstelle von $[0, \infty)$ der eingeschränkte Definitionsbereich $(0, \infty)$ der Dichtegeneratoren und die vollständige Monotonie in $(0, \infty)$ betrachtet.

Korollar 3.21. *Seien $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ und $g^{(k,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ mit der inversen Laplace-Stieltjes-Transformierten α , d.h.*

$$g^{(k,p)}(\sqrt[p]{y}) = \int_0^{\infty} e^{-yt} d\alpha(t), \quad y > 0.$$

Dann gilt $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ und die Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen erfüllt die Darstellung

$$\alpha(t) = \frac{p}{\omega_{k,p} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right)} \int_1^t z^{\frac{k}{p}} dG(pz), \quad t > 0.$$

Beweis. Nach Definition 2.2 gilt für $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\text{rg}(\Sigma) = k$ zunächst

$$X \stackrel{d}{=} \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X} \quad \text{mit } \tilde{X} \sim \Phi_{g^{(k,p)}}.$$

Da $g^{(k,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ ist, liefert Korollar 3.4 für $n = k$ zum einen $\tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G)$ und zum anderen die implizite Darstellung

$$\alpha(t) = \frac{p}{\omega_{k,p} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right)} \int_1^t z^{\frac{k}{p}} dG(pz), \quad t > 0,$$

der Verteilungsfunktion G , wobei α die inverse Laplace-Stieltjes-Transformierte von $g^{(k,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ ist. Lemma 3.9 zeigt letztendlich $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$. \square

Für $p = 2$ und symmetrische und positiv definite Matrizen Σ ist dieses Resultat äquivalent zur Aussage von Theorem 10 in Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006). Wie im Anschluss an den Beweis von Korollar 3.4 beschrieben, kann die Äquivalenz mithilfe der Transformation $G(pz) = 1 - H\left((pz)^{-\frac{1}{p}}\right)$ gezeigt werden. Folglich ist das nachfolgende Korollar, dessen Beweis mit dem Beweis von Korollar 3.5 für $n = k$ übereinstimmt, für den zuvor betrachteten Spezialfall äquivalent zu Korollar 11 aus Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006).

Korollar 3.22. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Korollar 3.21 ist die zur Verteilungsfunktion G gehörige Verteilung genau dann absolut stetig bezüglich des*

Lebesgue-Maßes mit Dichte f_G , wenn α absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist. In diesem Fall gilt neben

$$g^{(k,p)}(\sqrt[p]{y}) = \int_0^{\infty} e^{-yt} f_{\alpha}(t) dt, \quad y > 0,$$

mit $f_{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t)$, $t > 0$, auch

$$f_G(s) = \omega_{k,p} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right) p^{\frac{k}{p}-2} \cdot s^{-\frac{k}{p}} f_{\alpha}\left(\frac{s}{p}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Analogien in den Aussagen der Sätzen 3.1 und 3.2 und der Korollare 3.4 und 3.21 sowie 3.5 und 3.22 ist die Verteilung $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ genau dann als Rank- k -stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilungen G darstellbar, wenn $\Phi_{g^{(k,p)}}$ als Skalenmischung der k -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung G darstellbar ist. Somit können die in Abschnitt 3.3 diskutierten Beispiele und Gegenbeispiele einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung direkt in die hier betrachtete Klasse Rang- k -stetiger Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilungen übertragen werden, siehe Korollare 3.23 – 3.26, wobei die vollständigen Beweise dieser Aussagen analog zu denen in den jeweiligen Abschnitten 3.3.1 – 3.3.4 mit $n = k$ geführt werden können. Die Bezeichnungen und Notationen aus Abschnitt 2.2.1 erweiternd heißt dazu $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{Sl;\nu}^{(k,p)})$ für $\nu > 0$ die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Slash-Verteilung mit Parametern μ , Σ und ν und wird nachfolgend mit $Sl_{n,p}(\mu, \Sigma, \nu)$ bezeichnet.

Korollar 3.23. Die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Kotz-Typ-Verteilung mit den Parametern μ , Σ , M , β und γ mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$, $1 - \frac{k}{p} < M \leq 1$, $\beta > 0$ und $0 < \gamma \leq 1$ stimmt mit der Rang- k -stetigen Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilung G mit der Lebesgue-Dichte

$$f_G(s) = \omega_{k,p} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right) p^{\frac{k}{p}-2} \cdot s^{-\frac{k}{p}} f\left(\frac{s}{p}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

überein, wobei f die inverse Laplace-Transformierte von $g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(k,p)}(\sqrt[p]{\cdot})$ aus Lemma 3.7 mit $n = k$ bezeichnet.

Korollar 3.24. Die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Pearson-Typ VII-Verteilung mit den Parametern μ , Σ , M und ν mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$, $M > \frac{k}{p}$ und $\nu > 0$ ist die Rang- k -stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilung $\Gamma\left(M - \frac{k}{p}, \frac{\nu}{p}\right)$ mit der

$$f_G(s) = \frac{\left(\frac{\nu}{p}\right)^{M-\frac{k}{p}}}{\Gamma\left(M-\frac{k}{p}\right)} s^{M-\frac{k}{p}-1} e^{-\frac{\nu}{p}s} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Korollar 3.25. Die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Pearson-Typ II-Verteilung mit den Parametern μ , Σ und ν mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ ist für kein $\nu > 0$ als Rang- k -stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ darstellbar.

Korollar 3.26. Die Rang- k -stetige $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Slash-Verteilung mit den Parametern μ , Σ und ν mit $k = \text{rg}(\Sigma) \geq 1$ und $\nu > 0$ stimmt mit der Rang- k -stetigen Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilung G_ν^{Sl} mit der Lebesgue-Dichte $g_\nu^{Sl}(y) = \nu y^{\nu-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(y)$, $y \in \mathbb{R}$ überein.

Unter Verwendung der Notationen aus den Abschnitten 2.2.1 und 3.3 implizieren die Korollare 3.23 und 3.24 insbesondere $N_{n,p}(\mu, \Sigma) = SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G_1^N)$ sowie $St_{n,p}(\mu, \Sigma, \nu) = SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G_{\nu/p}^{St})$ und Korollar 3.26 liefert $Sl_{n,p}(\mu, \Sigma, \nu) = SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G_\nu^{Sl})$.

Schließlich wird nun, in Analogie zum zweiten Teil von Abschnitt 2.2.3, der Fall eines Matrixparameters $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vom Rang 0, d.h. $\Sigma = 0_{n \times n}$, betrachtet. Gemäß Bemerkung 2.6 und der darin eingeführten Notation Rang-0-stetiger $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen gilt für einen Zufallsvektor Z mit $\mathfrak{L}(Z) = N_{n,p}(0_n, 0_{n \times n}) = EC_{n,p}(0_n, 0_{n \times n}, g_{PE}^{(0,p)})$ zunächst

$$Z = 0_n \quad P - \text{fast sicher.}$$

Folglich stimmt die Rang-0-stetige Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und $\Sigma = 0_{n \times n}$ und der Mischungsverteilung G mit der Dirac-Verteilung im Punkt μ überein, da ein Zufallsvektor X mit $X \sim SMN_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, G)$ nach Definition 3.4 zuerst $X \stackrel{d}{=} \mu + V^{-\frac{1}{p}} \cdot Z$ mit $V \sim G$ unabhängig von $Z \sim N_{n,p}(0_n, 0_{n \times n})$ erfüllt und somit

$$X = \mu \quad P - \text{fast sicher}$$

gilt. Aufgrund dieser Übereinstimmung hängt $SMN_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, G)$ insbesondere nicht von der Wahl der Mischungsverteilung G ab, wobei diese aus Gründen der Einheitlichkeit der Notation weiter mitgeführt wird.

Basierend auf den obigen Betrachtungen zu Rang-0-stetigen Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung können Korollar 3.15 um den Fall eines Matrixparameters vom Rang 0 erweitert und die ersten beiden Momente Rang-0-stetiger Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung in Analogie zu Korollar 2.7 angegeben werden, siehe Korollare 3.27 und 3.28.

Korollar 3.27. Seien $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und nichtnegativ definit mit beliebigem Rang $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und G die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariablen. Dann gilt

$$SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G) = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)}).$$

Korollar 3.28. Für $X \sim SMN_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, G)$ gilt $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\text{Cov}(X) = 0_{n \times n}$.

Des Weiteren werden in Anhang B.4 zunächst eine charakteristische Eigenschaft der Randdichtegeneratoren $\left(g_{SMN;G}^{(n,p)}\right)_{(n)}^{(k,p)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit der Mischungsverteilung G , siehe Korollar B.1, bereitgestellt und anschließend zur Bestimmung der Verteilung von spezifischen linearen Transformationen und der Randverteilungen Rang- k -stetiger achsenparallel konturierter Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, siehe Korollare B.3 und B.4, verwendet. Darüber hinaus wird in Korollar B.2 die Verteilung von aus der Multiplikation mit einer Permutationsmatrix und einer Verschiebung bestehenden linearen Transformationen Rang- k -stetiger Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung bestimmt.

3.5 Simulation von Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit zwei Parametern

In diesem Abschnitt werden drei Algorithmen zur Simulation von Rang- k -stetigen Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit beliebigem Erwartungswert und beliebiger Kovarianzmatrix mit positivem Rang k angegeben und Realisierungen eines derart verteilten Zufallsvektors in verschiedenen Parameterkonstellationen erzeugt. Hierbei ist die Betrachtung von Matrixparametern mit positiven Rängen keine Beschränkung der Allgemeinheit, da Rang-0-stetige Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung nach dem vorherigen Absatz mit Dirac-Verteilungen übereinstimmen und da derart verteilte Zufallsvektoren P -fast sicher einen Wert annehmen.

Seien nachfolgend stets $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und nichtnegativ definite Matrix mit positivem Rang k , G die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariablen und der Zufallsvektor X folge der Rang- k -stetigen Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ und Σ und der Mischungsverteilung G , d.h. $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$. Unter Verwendung der Notationen aus Abschnitt 2.2.1 sei zudem $\left(V_1 \sqrt{S_1}\right) \left(V_1 \sqrt{S_1}\right)^T$ eine Rang- k -Zerlegung von Σ .

Der Algorithmus 3.1, der die explizite Kenntnis der Mischungsverteilung G in geschlossener Form voraussetzt, basiert auf den in Lemma 3.9 und Definition 3.1 bereitgestellten stochastischen Darstellungen von X bzw. \tilde{X} mit $\tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G)$.

Algorithmus 3.1. 1) Erzeugung eines k -dimensionalen p -verallgemeinert normalverteilten Zufallsvektors \tilde{Z}

(a) Erzeugung von k unabhängig und identisch univariat p -verallgemeinert normalverteilten Zufallsvariablen $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_k$

(b) Bildung von $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_k)^\top$

2) Erzeugung der univariaten Zufallsvariablen V mit der Verteilungsfunktion G

3) Bildung des Produktes $\tilde{X} = V^{-\frac{1}{p}} \cdot \tilde{Z}$

4) Bildung der linearen Transformation $X = \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X}$

Im obigen Algorithmus besitzen die unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_k$ in Schritt 1) gemäß Beispiel 2.1 jeweils die Lebesgue-Dichte $g^{(1,p)}(|\tilde{z}|) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma(\frac{1}{p})} \exp\left\{-\frac{|\tilde{z}|^p}{p}\right\}$, $\tilde{z} \in \mathbb{R}$. Weiter folgt \tilde{X} in Schritt 3) des Algorithmus 3.1 nach Definition 3.1 der Skalenmischung der k -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Mischungsverteilung G und in Schritt 4) besitzt X die gewünschte Verteilung, d.h. $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$, siehe Lemma 3.9.

Im Gegensatz zu Algorithmus 3.1 verwenden die nachfolgenden Algorithmen 3.2 und 3.3 lediglich die explizite Kenntnis des Dichtegenerators $g_{SMN;G}^{(n,p)}$ von $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G) = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)})$ anstelle der Mischungsverteilung G und basieren auf Korollar 3.17 bzw. dem Zusammenwirken der Lemmata 2.2, 3.1 und 3.9.

Algorithmus 3.2. 1) Erzeugung der folgenden k univariaten Zufallsvariablen mit den jeweils angegebenen Lebesgue-Dichten

(a) R mit $f_R(r) = \omega_{k,p} r^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(r) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(r)$, $r \in \mathbb{R}$

(b) Ψ_i mit $f_{\Psi_i}(\psi_i) = \frac{\omega_{k-i,p} (\sin(\psi_i))^{k-i-1}}{\omega_{k-i+1,p} (N_p(\psi_i))^{k-i+1}} \mathbb{1}_{[0,\pi)}(\psi_i)$, $\psi_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1, \dots, k-2$

(c) Ψ_{k-1} mit $f_{\Psi_{k-1}}(\psi_{k-1}) = \frac{1}{\omega_{2,p} (N_p(\psi_{k-1}))^2} \mathbb{1}_{[0,2\pi)}(\psi_{k-1})$, $\psi_{k-1} \in \mathbb{R}$

2) Bildung $\tilde{X} = SHP_p^{(k)}(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1})$

3) Bildung der linearen Transformation $X = \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X}$

Algorithmus 3.3. 1) Erzeugung eines k -dimensionalen auf $S_{k,p}$ p -verallgemeinert gleichverteilten Zufallsvektors $U_p^{(k)}$

(a) Erzeugung von k unabhängig und identisch univariat p -verallgemeinert normalverteilten Zufallsvariablen $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_k$

(b) Bildung von $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_k)^\top$ und $R_{\tilde{Z}} = |\tilde{Z}|_p$

(c) Bildung von $U_p^{(k)} = \frac{\tilde{Z}}{R_{\tilde{Z}}}$

2) Erzeugung der univariaten Zufallsvariablen $R_{\tilde{X}}$ mit der Lebesgue-Dichte $f_{R_{\tilde{X}}}(r) = \omega_{k,p} r^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(r) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(r)$, $r \in \mathbb{R}$

3) Bildung des Produktes $\tilde{X} = R_{\tilde{X}} U_p^{(k)}$

4) Bildung der linearen Transformation $X = \mu + V_1 \sqrt{S_1} \tilde{X}$

In Schritt 1) des Algorithmus 3.3 ist \tilde{Z} k -dimensional p -verallgemeinert normalverteilt, $\tilde{Z} \sim \Phi_{g_{PE}^{(k,p)}}$, und der k -dimensionale Zufallsvektor $U_p^{(k)}$ wird gemäß Lemma 2.2 bzw. dessen Beweis in Richter (2009) durch Normierung des Zufallsvektors \tilde{Z} mit dem p -verallgemeinerten Radius $R_{\tilde{Z}}$ von \tilde{Z} gebildet. Anschließend erfolgt in Schritt 2) zunächst die Simulation der p -verallgemeinerten Radiusvariablen $R_{\tilde{X}}$ der Skalenmischung der k -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Mischungsverteilung G , die nach Korollar 3.1 mit der stetigen $l_{k,p}$ -symmetrischen Verteilung mit dem spezifischen Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(k,p)}$ übereinstimmt, und in Schritt 3) die Bildung von $\tilde{X} \sim SMN_{k,p}(G)$ gemäß Lemma 3.1. Unter Verwendung der linearen Transformation aus Lemma 3.9 wird schließlich in Schritt 4) die Realisierung des zu simulierenden Zufallsvektors $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ gebildet.

Zu den obigen drei Algorithmen sei zum einen bemerkt, dass sie im Spezialfall $p = 2$, d.h. zur Simulation sphärisch-invarianter bzw. elliptisch konturierter Zufallsvektoren, in Rangaswamy, Weiner und Öztürk (1995) angegeben sind, wobei Algorithmus 3.2 mit einem Verweis auf Berechnungsschwierigkeiten lediglich angedeutet ist. Zum anderen sind weitere Algorithmen zur Simulation der uni- und multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung sowie deren Vor- und Nachteile in Kalke und Richter (2013) thematisiert und im R-Modul „pgnorm“ implementiert, siehe Kalke (2015). Zudem können die Algorithmen 3.2 und 3.3 auch zur Simulation beliebiger Rang- k -stetiger $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen verwendet werden, indem der Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(k,p)}$ in Schritt 1) von Algorithmus 3.2 bzw. in Schritt 2) von Algorithmus 3.3 durch einen beliebigen Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ einer stetigen $l_{k,p}$ -symmetrischen Verteilung ersetzt wird.

Die Implementierungen der Algorithmen 3.1, 3.2 und 3.3 in Matlab sind in Anhang D.2 angegeben, wobei zur Simulation einer univariaten Zufallsvariablen mit einer vorgegebenen Verteilungsfunktion jeweils die Inversionsmethode und zur Invertierung dieser Verteilungsfunktion an einer gegebenen Stelle selbst jeweils Bisektion bzw. Intervallhalbierung mit einer Genauigkeit von 10^{-10} verwendet werden. Zur Simulation einer Radiusvariablen R mit der Lebesgue-Dichte $f_R(r) = \omega_{k,p} r^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(r) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(r)$, $r \in \mathbb{R}$, siehe Algorithmen 3.2 und 3.3, wird weiter die Verteilungsfunktion $F_R(r) = \omega_{k,p} \int_0^r \rho^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(\rho) d\rho$ von R durch $\omega_{k,p} \int_{10^{-10}}^r \rho^{k-1} g_{SMN;G}^{(k,p)}(\rho) d\rho$ von unten approximiert, um gegebenenfalls durch Singularitäten des Integranden für $\rho = 0$ hervorgerufenen Integrationsproblemen vorzubeugen. Dabei ist zu beachten, dass diese Approximation fehlschlägt, falls die Zufallsvariable R mit großer Wahrscheinlichkeit Werte kleiner als 10^{-10} annimmt, da dieser Anteil der Wahrscheinlichkeitsmasse aufgrund der Approximation vernachlässigt wird.

Unter Verwendung der Implementierungen können nun Punktwolken bestehend aus Simulationen einer Rang- k -stetigen Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeiner-

ten Normalverteilung erzeugt werden, wobei in dieser Arbeit speziell der Fall $n = 2$ betrachtet wird. Einerseits werden für $\mu_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\text{rg}(\Sigma_1) = 2$ jeweils 2000 Realisierungen von $EC_{2,p}\left(\mu_1, \Sigma_1, g_{Kt;1,2,\frac{1}{2}}^{(2,p)}\right)$, die nach Korollar 3.23 als Skalenmischung der zweidimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist, mithilfe von Algorithmus 3.3 und $SMN_{2,p}\left(\mu_1, \Sigma_1, G_{3/p}^{St}\right) = St_{2,p}(\mu_1, \Sigma_1, 3)$ sowie $SMN_{2,p}\left(\mu_1, \Sigma_1, G_5^{Sl}\right) = Sl_{2,p}(\mu_1, \Sigma_1, 5)$ mithilfe von Algorithmus 3.1 für $p \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ simuliert. Die erzeugten Punktwolken sind in den Abbildungen C.6, C.7 und C.9 jeweils auf der linken Seite dargestellt und auf der jeweiligen rechten Seite ist die in Korollar 3.18 bereitgestellte Lebesgue-Dichte der auf der linken Seite simulierten Verteilung visualisiert. Darüber hinaus sind in Abbildung C.8 vergrößerte Ausschnitte der linken Seiten von Abbildung C.7 dargestellt. Damit wird in den Abbildungen C.6, C.7 bzw. C.8 und C.9 deutlich, dass die Dichteniveaumengen der simulierten Verteilungen rotierte p -verallgemeinerte Ellipsen mit um μ_1 verschobenen Zentren sind, wobei die Rotation, wie am Ende von Abschnitt 2.2.2 erläutert, durch die orthonormierten Eigenvektoren vom Matrixparameter Σ_1 festgelegt ist. Für $\mu_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\text{rg}(\Sigma_2) = 1$ zeigen die Abbildungen C.10, C.11 und C.12 auf den linken Seiten andererseits jeweils 350 Simulationen von $EC_{2,p}\left(\mu_2, \Sigma_2, g_{Kt;1,2,\frac{1}{2}}^{(1,p)}\right)$, erzeugt mit Algorithmus 3.2, und $SMN_{2,p}\left(\mu_2, \Sigma_2, G_{3/p}^{St}\right)$ sowie $SMN_{2,p}\left(\mu_2, \Sigma_2, G_5^{Sl}\right)$, erzeugt mit Algorithmus 3.1, für $p \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ und auf den rechten Seiten die zu diesen Rang-1-stetigen Skalenmischungen der bivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung gehörigen dichte-ähnlichen Darstellungen, siehe Korollar 3.19, wobei die dunklen, grün-bräunlich gefärbten Bereiche die orthogonalen Komplemente des affinen linearen Unterraums sind, in dem die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse konzentriert ist. Weiter können die Algorithmen 3.2 und 3.3 zur Simulation der Punktwolken der spezifischen $l_{2,p}$ -elliptisch konturierten Kotz-Typ-Verteilungen gegeneinander ausgetauscht werden. Des Weiteren zeigen insbesondere die rechten Seiten der Abbildungen C.6 – C.12 jeweils einzeln betrachtet, dass die Schwere der Enden der Verteilungen innerhalb eines konkreten Verteilungsfalles für einen wachsenden Parameter $p > 0$ abnimmt. Darüber hinaus legt der Vergleich der Abbildungen für die feste Betrachtung von μ_1 und Σ_1 oder μ_2 und Σ_2 nahe, dass die Schwere der Enden der Verteilungen $EC_{2,p}\left(\mu_i, \Sigma_i, g_{Kt;1,2,\frac{1}{2}}^{(\text{rg}(\Sigma_i),p)}\right)$, $SMN_{2,p}\left(\mu_i, \Sigma_i, G_5^{Sl}\right) = Sl_{2,p}(\mu_i, \Sigma_i, 5)$ und $SMN_{2,p}\left(\mu_i, \Sigma_i, G_{3/p}^{St}\right) = St_{2,p}(\mu_i, \Sigma_i, 3)$, $i = 1, 2$, in dieser Reihenfolge speziell für $p = \{2, 3\}$ zunimmt, jedoch speziell für $p = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ abnimmt, wobei an dieser Stelle insbesondere auf die stark variierenden Skalierungen der Achsen in den linken Seiten der Abbildungen hingewiesen sei. Schließlich sei bemerkt, dass die Implementierungen dieser und dreier weiterer Beispiele für die Fälle $n = 3$ und $k = 1, 2, 3$ in Anhang D.2 angegeben sind.

4 Sphärisch-invariante stochastische Prozesse und ihre p -Verallgemeinerungen

Im bisherigen Verlauf dieser Arbeit werden ausschließlich endlich-dimensionale Zufallsvektoren mit spezifischen Verteilungen betrachtet. Im bevorstehenden Kapitel erfolgt nun die Betrachtung von Familien $\{X_t\}_{t \in I}$ von auf ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierten Zufallsvariablen und damit der Übergang zu im Allgemeinen unendlich-dimensionalen Zufallselementen, wobei I im Allgemeinen eine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen bezeichnet. Dabei kann I als Menge von Zeitpunkten, die Zufallsvariable X_t beispielsweise als der Aufenthaltsort eines Teilchens zur Zeit $t \in I$ und demzufolge die auf I definierte Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ für ein $\omega \in \Omega$ als Bewegung, d.h. als zeitliche Abfolge von Aufenthaltsorten, eines Teilchen interpretiert werden.

Vorbereitend werden dazu in Abschnitt 4.1 zunächst grundlegende Gesichtspunkte stochastischer Prozesse sowie der Existenzsatz von Kolmogorov vorgestellt. Anschließend werden, nach einem Literaturüberblick zu sphärisch-invarianten bzw. elliptischen stochastischen Prozessen in Abschnitt 4.2, die Existenzen von p -Verallgemeinerungen dieser stochastischen Prozesse in Abschnitt 4.3 studiert und entsprechende stochastische Prozesse eingeführt, deren grundlegende Eigenschaften sowie Simulationen in Abschnitt 4.4 bereitgestellt werden.

4.1 Stochastische Prozesse und der Existenzsatz von Kolmogorov

Nach der Angabe der Definition eines stochastischen Prozesses und der Erläuterung von einigen zugehörigen Definitionen und Notationen wird in diesem Abschnitt die Konstruktion bzw. die Existenz stochastischer Prozesse mithilfe des Satzes von Kolmogorov thematisiert, wobei dieser schließlich zum Nachweis der Existenz von Gauß-Prozessen verwendet wird. Dabei beziehen sich dieser Abschnitt und insbesondere die verwendeten Notationen auf Bauer (2002, Kapitel VIII). Aktuellere Referenzen sind Capasso und Bakstein (2012, Kapitel 2), Lindgren (2013, Kapitel 1) und Sasvári (2013). Zunächst erfolgt nun die formale Definition eines stochastischen Prozesses gefolgt von einigen Erläuterungen. Im gesamten Abschnitt sei dazu I eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} .

Definition 4.1. Stochastischer Prozess heißt jedes Quadrupel $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \{X_t\}_{t \in I})$, wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_t\}_{t \in I}$ eine Familie von auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierten Zufallsvariablen mit Werten in einem gemeinsamen Messraum (E, \mathfrak{B}) ist. Man nennt I die Parameter- oder Zeitmenge und (E, \mathfrak{B}) den Zustandsraum des stochastischen Prozesses. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die durch $t \mapsto X_t(\omega)$ definierte Abbildung von I in E ein Pfad des stochastischen Prozesses.

Abkürzend wird hierbei der stochastische Prozess $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \{X_t\}_{t \in I})$ oft durch $\{X_t\}_{t \in I}$ und der Zustandsraum (E, \mathfrak{B}) meist nur durch E bezeichnet. Falls speziell $E = \mathbb{R}$, so

heißt $\{X_t\}_{t \in I}$ ein reeller stochastischer Prozess. Weiter heißen Pfade auch Trajektorien oder Realisierungen eines stochastischen Prozesses und da jedem $\omega \in \Omega$ ein Pfad, d.h. eine Abbildung von I nach E , zugeordnet wird, werden stochastische Prozesse auch als zufällige Funktionen bezeichnet.

Sei nun $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \{X_t\}_{t \in I})$ ein stochastischer Prozess mit der Parametermenge I und dem Zustandsraum (E, \mathfrak{B}) . Für $\emptyset \neq J \subseteq I$ seien weiter E^J die Menge aller Abbildungen von J in E , d.h. die Produktmenge $\prod_{t \in J} E_t = \left\{ f: J \rightarrow \bigcup_{t \in J} E_t \mid f(t) \in E_t \text{ für } t \in J \right\}$, in welcher jeder Faktor E_t gleich E ist, \mathfrak{B}^J die σ -Algebra $\bigotimes_{t \in J} \mathfrak{B}_t$ in E^J , wobei jedes $\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}$ ist, und $X_J = \bigotimes_{t \in J} X_t$ die Produktabbildung von Ω nach E^J , durch die jedem $\omega \in \Omega$ die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ von J in E zugeordnet wird. Damit ist X_J eine (E^J, \mathfrak{B}^J) -messbare Funktion und damit eine Zufallsvariable und die gemeinsame Verteilung P_J der Familie $\{X_t\}_{t \in J}$ stimmt mit der von X_J induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung P^{X_J} überein, d.h. $P_J = P^{X_J}$. Mit diesen Notationen besitzt der stochastische Prozess $(\Omega, \mathfrak{A}, P, \{X_t\}_{t \in I})$ eine äquivalente Formulierung als Zufallselement $X_I: (\Omega, \mathfrak{A}, P) \rightarrow (E^I, \mathfrak{B}^I, P_I)$, wodurch die zuvor erwähnte gleichbedeutende Bezeichnung als zufällige Funktion verdeutlicht wird.

Für zwei nichtleere Teilmengen J und H von I mit $J \subseteq H \subseteq I$ sei nun

$$p_J^H: E^H \rightarrow E^J$$

die \mathfrak{B}^H - \mathfrak{B}^J -messbare Projektionsabbildung von E^H in E^J , die jedem Element der Menge E^H aller Abbildungen von H in E ihre Restriktion auf J zuordnet, d.h. $p_J^H(f) = f|_J$ für $f \in E^H$. Speziell für $H = I$ bezeichne weiter

$$p_J = p_J^I.$$

Damit gilt $X_J = p_J^H \circ X_H$ und somit

$$\begin{aligned} P_J(A) &= P^{p_J^H \circ X_H}(A) = \left\{ \omega \in \Omega: (p_J^H \circ X_H)(\omega) \in A \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega: X_H(\omega) \in (p_J^H)^{-1}(A) \right\} \\ &= P^{X_H} \left((p_J^H)^{-1}(A) \right) \\ &=: (p_J^H \circ P_H)(A), \quad A \in \mathfrak{B}^J. \end{aligned}$$

und insbesondere $P_J = p_J \circ P_I$, wobei $p_J^H \circ P_H$ als Bezeichnung zu verstehen ist. Speziell für eine endliche, nichtleere Teilmenge $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ von I und für $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ gilt außerdem

$$P_J(B_1 \times \dots \times B_n) = P(\{\omega \in \Omega: X_J(\omega) \in B_1 \times \dots \times B_n\})$$

$$= P(\{\omega \in \Omega: X_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \in B_n\}).$$

Die Betrachtung dieses Spezialfalls führt zur Interpretation, dass P_J das eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathfrak{B}^J derart ist, dass für n Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}$ die Zahl $P_J(B_1 \times \dots \times B_n)$ mit der Wahrscheinlichkeit übereinstimmt, dass der stochastische Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ in den Zeitpunkten t_j jeweils einen Wert aus B_j , $j = 1, \dots, n$, annimmt.

Sei $\mathcal{H}(I) = \{J \subseteq I: J \neq \emptyset, |J| < \infty\}$ die Menge aller endlichen, nichtleeren Teilmengen von I . In der vorliegenden Arbeit werden dabei die Elemente von $\mathcal{H}(I)$ stets als geordnete Mengen mit verschiedenen Elementen angesehen, wobei der Terminus der geordneten Menge aus Shiryaev (1996, Seite 168) entnommen ist und bedeutet, dass sich die Mengen $\{t_1, t_2\}$ und $\{t_2, t_1\}$ mit $t_1 \neq t_2$ voneinander unterscheiden. Um Missverständnisse zu vermeiden, sei explizit darauf hingewiesen, dass die Betrachtung geordneter Mengen nicht bedeutet, dass die Elemente einer Menge geordnet sein müssen, sondern dass die Reihenfolge, in der die Elemente in der Menge aufgelistet sind, entscheidend ist. Die nachfolgende Definition 4.2 führt die für den weiteren Verlauf bedeutende Eigenschaft der Projektivität einer Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ein.

Definition 4.2. Eine Familie $\{Q_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)} = \{Q_J: J \in \mathcal{H}(I)\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (E^J, \mathfrak{B}^J) , $J \in \mathcal{H}(I)$, heißt projektiv über E , falls für je zwei Mengen $J, H \in \mathcal{H}(I)$ mit $J \subseteq H$ gilt

$$Q_J = p_J^H \circ Q_H.$$

Nach Kolmogorov (1956, Seite 29) kann die Projektivität einer Familie $\{Q_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (E^J, \mathfrak{B}^J) , $J \in \mathcal{H}(I)$, durch die folgenden Kolmogorovschen Konsistenzbedingungen nachgewiesen werden:

- 1) Für alle $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in I$ und alle $A^{(n)} \in \mathfrak{B}^{\{t_1, \dots, t_n\}}$ gilt

$$Q_{\{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}}(A^{(n)} \times E) = Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A^{(n)}). \quad (4.1)$$

- 2) Für alle $t_1, \dots, t_n \in I$, alle $A^{(n)} \in \mathfrak{B}^{\{t_1, \dots, t_n\}}$ und jede Permutation π von $\{1, \dots, n\}$ gilt

$$Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A^{(n)}) = Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}(A_{\pi}^{(n)}), \quad (4.2)$$

wobei $A_{\pi}^{(n)} = \{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})^T: (x_1, \dots, x_n)^T \in A^{(n)}\}$.

Diese Bedingungen sind in Sasvári (2013, Anhang F) neben der obigen Darstellung in Termen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, siehe Theorem F.3.3, ebenfalls in Termen von charakteristischen Funktionen, siehe Bemerkung F.3.4, und weiter auch in Bhattacharya und Waymire (2007, Kapitel 10) angegeben.

Mit den obigen Notationen heißt die Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ bzw. $\{(E^J, \mathfrak{B}^J, P_J)\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen bzw. -räumen definiert durch

$$P_J = P^{X_J}, \quad J \in \mathcal{H}(I),$$

Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen des stochastischen Prozesses $\{X_t\}_{t \in I}$ mit Zustandsraum (E, \mathfrak{B}) , wobei durch die vorherigen Betrachtungen deutlich wird, dass diese Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen projektiv über E ist. Der in Satz 4.1 und ursprünglich in Kolmogorov (1933) formulierte Existenzsatz von Kolmogorov bzw. das aus diesem folgende Korollar 4.1 geben an, unter welchen Bedingungen ein stochastischer Prozess existiert, der eine vorgegebene Familie als Familie von endlich-dimensionalen Verteilungen besitzt. Diesen Satz vorbereitend heißt zunächst ein Raum (M, ρ) polnisch, falls (M, ρ) ein vollständiger und separabler metrischer Raum ist. Dabei heißt ein metrischer Raum (M, ρ) vollständig, falls für jede Cauchyfolge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ ein Element $x \in M$ mit $\rho(x_k, x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ existiert, d.h. falls jede Cauchyfolge aus M gegen ein Element von M konvergiert. Des Weiteren heißt ein metrischer Raum (M, ρ) separabel, falls eine abzählbare Menge M^* mit $M^* \subset M \subset \overline{M^*}$ existiert, d.h. falls M eine dichte Teilmenge besitzt, wobei $\overline{M^*}$ den topologischen Abschluss von $M^* \subseteq M$ bezüglich ρ bezeichnet.

Satz 4.1 (Existenzsatz von Kolmogorov). *Sei (E, ρ) ein polnischer Raum, \mathfrak{B} die σ -Algebra seiner Borelschen Mengen und I eine beliebige, nichtleere Menge. Dann existiert zu jeder über E projektiven Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (E^J, \mathfrak{B}^J) , $J \in \mathcal{H}(I)$, genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_I auf (E^I, \mathfrak{B}^I) mit*

$$p_J^I \circ P_I = P_J \quad \text{für alle } J \in \mathcal{H}(I).$$

Man nennt das Wahrscheinlichkeitsmaß P_I den projektiven Limes der Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ und schreibt

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{H}(I)} P_J = \varprojlim_{J \in \mathcal{H}(I)} P_J := P_I.$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 schlussfolgert das nachfolgende Korollar die Existenz eines stochastischen Prozesses mit einer vorgegebenen projektiven Familie als seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen.

Korollar 4.1. *Sei (E, ρ) ein polnischer Raum, \mathfrak{B} die σ -Algebra seiner Borelschen Mengen und $I \neq \emptyset$. Dann existiert zu jeder über E projektiven Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (E^J, \mathfrak{B}^J) , $J \in \mathcal{H}(I)$, ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum E und Parametermenge I derart, dass $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen ist.*

Die Beweise von Satz 4.1 und Korollar 4.1 sind in Bauer (2002, Seite 307 ff.) angegeben.

Weiter heißt der stochastische Prozess $\left(E^I, \mathfrak{B}^I, \varprojlim_{J \in \mathcal{H}(I)} P_J, \{p_{\{t\}}^I\}_{t \in I} \right)$, dessen Existenz in

Korollar 4.1 nachgewiesen ist, der zur projektiven Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ gehörige kanonische Prozess bzw. erster kanonischer Prozess.

Im Gegensatz zu den obigen Betrachtungen auf der Basis geordneter Mengen ist der Existenzsatz von Kolmogorov u.a. in Borovkov (2013, Seite 625) und Shiryaev (1996, Seite 167) basierend auf ungeordneten Mengen formuliert, wobei die Mengen $\{t_1, t_2\}$ und $\{t_2, t_1\}$ mit $t_1 \neq t_2$ unter der Annahme der Betrachtung ungeordneter Mengen identisch sind, vergleiche Absatz vor Definition 4.2. Darüber hinaus entfällt die Kolmogorovsche Konsistenzbedingung (4.2) im Falle der Betrachtung ungeordneter anstelle geordneter Mengen, siehe Shiryaev (1996, Seite 168).

Speziell für eine endliche Parametermenge I gilt $I \in \mathcal{H}(I)$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß P_I , dessen Existenz in Satz 4.1 gezeigt ist, ist bereits durch die zugrunde liegende projektive Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen gegeben. Weiter wird P_I in diesem Fall durch einen $|I|$ -dimensionalen Zufallsvektor induziert und der zur projektiven Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ gehörige kanonische Prozess stimmt mit diesem Zufallsvektor überein.

Im verbleibenden Teil der vorliegenden Arbeit werden die Betrachtungen auf reelle stochastische Prozesse beschränkt, d.h. auf die spezielle Wahl des Zustandsraumes $E = \mathbb{R}$, wobei die in den jeweiligen Referenzen angegebenen Definitionen und Aussagen zum Teil für stochastische Prozesse mit beliebigen Zustandsräumen formuliert sind.

Als eine erste Anwendung des Existenzsatzes von Kolmogorov bzw. dessen Korollar 4.1 werden nachfolgend Gauß-Prozesse eingeführt und insbesondere deren Existenz nachgewiesen. Bezeichne dazu $\Phi_{\mu, \Sigma}^{(n)}$ die n -dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ und symmetrischer und nichtnegativ definiten Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die die charakteristische Funktion

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i t^\top \mu - \frac{1}{2} t^\top \Sigma t \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

und, sofern $\det(\Sigma) > 0$, d.h. Σ positiv definit, die Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

besitzt. Weiter bezeichne \mathcal{N}_n die Menge aller n -dimensionalen Normalverteilungen, d.h.

$$\mathcal{N}_n = \left\{ \Phi_{\mu, \Sigma}^{(n)} : \mu \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch und nichtnegativ definit} \right\},$$

und $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n$ die Familie aller endlich-dimensionalen Normalverteilungen.

Definition 4.3. Ein reeller stochastischer Prozess heißt Gauß-Prozess, wenn seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eine Teilmenge von \mathcal{N} ist.

Den Existenznachweis von Gauß-Prozessen vorbereitend werden in den Definitionen 4.4

und 4.5 das Konzept der Äquivalenz von stochastischen Prozessen sowie, in Analogie zum Erwartungswert und zur Kovarianzmatrix, mit deren Hilfe endlich-dimensionale Verteilungen charakterisiert werden können, die Begriffe der Erwartungs- und Kovarianzfunktion eines stochastischen Prozesses, sofern deren Existenz gewährleistet ist, eingeführt. Dazu heißt zunächst ein reeller stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ mit $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ für alle $t \in I$ ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung. Weiter bezeichnen $\text{Var}(X_t)$ die Varianz der Zufallsvariablen X_t und $\text{Cov}(X_s, X_t)$ die Kovarianz zwischen den Zufallsvariablen X_s und X_t .

Definition 4.4. Zwei reelle stochastische Prozesse $\{X_t\}_{t \in I}$ und $\{Y_t\}_{t \in I}$ mit gleicher Parametermenge I heißen äquivalent, wenn sie zur selben Familie $\{P_J\}_{J \in \mathcal{H}(I)}$ endlich-dimensionaler Verteilungen führen.

Definition 4.5. Sei $\{X_t\}_{t \in I}$ ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung. Dann heißen $m: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ die Erwartungsfunktion und $\Gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ die Kovarianzfunktion von $\{X_t\}_{t \in I}$.

Weiter heißt eine Funktion $\Gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ zum einen symmetrisch, falls $\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$ für alle $s, t \in I$, und zum anderen nichtnegativ definit, falls $\sum_{s, t \in I} \Gamma(s, t) \lambda_s \lambda_t \geq 0$ für jede Familie $\{\lambda_t\}_{t \in I}$ mit $\lambda_t \neq 0$ für höchstens endlich viele $t \in I$. Unter Verwendung dieser Begrifflichkeiten und basierend auf Korollar 4.1 des Existenzsatzes von Kolmogorov liefert der nachfolgende Satz schließlich die Existenz von Gauß-Prozessen mit spezifischen Erwartungs- und Kovarianzfunktionen.

Satz 4.2. Für $I \neq \emptyset$ existiert zu jeder Funktion $m: I \rightarrow \mathbb{R}$ und jeder symmetrischen und nichtnegativ definiten Funktion $\Gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ein Gauß-Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ mit m als Erwartungs- und Γ als Kovarianzfunktion und dieser ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Dieses Resultat geht ebenfalls aus dem im nachfolgenden Abschnitt 4.2 angegebenen Literaturüberblick über sphärisch-invariante stochastische Prozesse, die Gauß-Prozesse als Spezialfälle enthalten, hervor. Zum Abschluss dieses Abschnittes werden die Eigenschaften der starken bzw. schwachen Stationarität von stochastischen Prozessen und die Definition weißen Rauschens, siehe Definitionen 4.6, 4.7 und 4.8 gemäß Sasvári (2013), als Vorbereitung der nachfolgenden Abschnitte bereitgestellt.

Definition 4.6. Ein reeller stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ heißt stark stationär, wenn einerseits für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t_1, \dots, t_n \in I$ und andererseits für alle $h \in \mathbb{R}$ derart, dass $t_1 + h, \dots, t_n + h \in I$, die reellwertigen Zufallsvektoren $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$ und $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})^T$ dieselbe Verteilung besitzen.

Definition 4.7. Ein reeller stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ zweiter Ordnung, dessen Erwartungsfunktion m konstant ist und dessen Kovarianzfunktion Γ an der Stelle $(s, t) \in$

$I \times I$ eine Funktion von $s-t$, d.h. $\Gamma(s, t) = K(s-t)$ für eine auf $\{s-t: s, t \in I\}$ definierte reellwertige Funktion K , ist, heißt schwach stationär.

Definition 4.8. Ein reeller stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ zweiter Ordnung heißt weißes Rauschen mit Erwartungswert μ , $\mu \in \mathbb{R}$, und Varianz σ^2 , $\sigma^2 \geq 0$, falls die Zufallsvariablen X_t , $t \in I$, unkorreliert sind und $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ und $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ für alle $t \in I$ gilt.

Somit ist einerseits jeder stark stationäre reelle stochastische Prozess zweiter Ordnung zugleich schwach stationär, wobei die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt. Andererseits ist weißes Rauschen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 schwach stationär mit der spezifischen Funktion K gegeben durch $K(0) = \sigma^2$ und $K(h) = 0$ für alle $h \neq 0$.

4.2 Sphärisch-invariante stochastische Prozesse

In der Literatur bilden Gauß-Prozesse zum einen ein wichtiges Beispiel für die Konstruktion stochastischer Prozesse mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov, siehe Satz 4.1, über die Familie ihrer endlich-dimensionalen Verteilungen. Obwohl theoretisch jeder stochastische Prozess derart charakterisiert werden kann, ist diese Art der Konstruktion praktisch nur für wenige stochastische Prozesse anwendbar, da multivariate Verteilungen im Allgemeinen schwer handhabbar sind. Zum anderen sind zahlreiche theoretische Resultate auf die Betrachtung von Normalverteilungen bzw. von Gauß-Prozesse beschränkt, wodurch diese insbesondere in Anwendungen von zentraler Bedeutung sind. Zwei spezifische dieser Resultate sind die Abgeschlossenheit von Gauß-Prozessen bei linearen Operationen und die Linearität der Lösungen von mittleren quadratischen Schätzproblemen über Gauß-Prozessen. In Vershik (1964) ist gezeigt, dass diese beiden Eigenschaften indes nicht Gauß-Prozesse, sondern sphärisch-invariante stochastische Prozesse eindeutig charakterisieren, die Gauß-Prozesse als Spezialfälle enthalten. Dabei werden sphärisch-invariante stochastische Prozesse in der zuvor genannten Arbeit derart als stochastische Prozesse bestehend aus quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen eingeführt, dass zwei Zufallsvariablen dieses Prozesses, die die gleiche Varianz besitzen, auch der gleichen Verteilung folgen. Weiterhin wird in Vershik (1964) gezeigt, dass, falls ein sphärisch-invarianter stochastischer Prozess ergodisch ist, dann ist es ein Gauß-Prozess. Dabei ist, grob gesprochen, ein stochastischer Prozess ergodisch, wenn alle seine wahrscheinlichkeitstheoretischen und statistischen Eigenschaften aus einer hinreichend langen Realisierung bestimmt oder abgelesen werden können.

Ein erstes Studium der Eigenschaften dieser stochastischen Prozesse erfolgt in Blake und Thomas (1968), wobei u.a. multivariate charakteristische Funktionen und zugehörige Dichten als Hankel-Transformationen oder Beziehungen zwischen sphärischer Invarianz und Normalität untersucht werden. Dabei werden in Blake und Thomas (1968, Seite 15) einige Bemerkungen zur Konstruktion dieser stochastischen Prozesse über ihre Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov, d.h.

zur Erfüllung der Konsistenzbedingungen (4.1) und (4.2), siehe Abschnitt 4.1, angestellt. Insbesondere muss dazu die univariate Funktion, die ausgewertet in einer quadratischen Form die charakteristische Funktion von endlich vielen beliebigen Zufallsvariablen eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses darstellt, unabhängig von der Anzahl der gewählten Zufallsvariablen sein. Tatsächlich ist eine univariate Funktion ausgewertet in einer quadratischen Form die charakteristische Funktion einer elliptisch konturierten Verteilungen, die in Kelker (1970) als Lage-Skalierungsverallgemeinerung sphärischer Verteilungen eingeführt werden. Die explizite namentliche Verknüpfung von elliptisch konturierten Verteilungen mit sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen erfolgt in Chu (1973). Weiterhin bemerken Blake und Thomas, dass ein sphärisch-invarianter stochastischer Prozess durch die Angabe seiner Erwartungswert- und Kovarianzfunktion und der zuvor thematisierten univariaten Funktion vollständig festgelegt ist, vergleiche Satz 4.2 in Abschnitt 4.1.

Die Charakterisierung eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses über seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen ist u.a. in Picinbono (1970) zu finden, in der der Zusammenhang zwischen speziellen gemischten Gauß-Prozessen und sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen untersucht wird. Zu Picinbonos Resultat, dass die betrachtete spezielle Klasse gemischter Gauß-Prozesse eine Teilklasse der Klasse der sphärisch-invarianten stochastischen Prozesse ist, wird in Yao (1973, Seite 604) bemerkt, dass der Unterschied der beiden Klassen durch die fehlende Forderung der Kolmogorovschen Konsistenzbedingungen an die Familie der charakteristischen Funktionen der endlich-dimensionalen Verteilungen hervorgerufen wird.

In Kingman (1972) wird gezeigt, dass für eine unendliche Folge X_1, X_2, \dots von reellen Zufallsvariablen mit der Eigenschaft, dass der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ für jedes n eine sphärische Verteilung besitzt, eine reelle und nichtnegative Zufallsvariable V derart existiert, dass die X_n , $n \in \mathbb{N}$, bedingt auf V unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz V sind. Diese Folge von Zufallsvariablen bildet einen Spezialfall sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse mit der Indexmenge $\{1, 2, \dots\}$, wobei in Kingman (1972) kein Bezug zu den vorherigen Arbeiten hergestellt wird.

Wie zuvor erwähnt, bezieht sich Chu (1973) auf reguläre elliptisch konturierte Verteilungen und betrachtet sphärisch-invariante stochastische Prozesse als stochastische Prozesse, deren Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eine Teilmenge der regulären elliptisch konturierten Verteilungen bildet. Aufgrund dieser Beziehung wird in Chu (1973) bevorzugt die Bezeichnung als elliptische stochastische Prozesse anstelle von sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen verwendet. Aufbauend auf diese einleitenden Betrachtungen wird die Dichte einer zentrierten elliptisch konturierten Verteilung mit positiv definitem Matrixparameter als Integral einer Gewichtsfunktion und der Dichte einer spezifischen zentrierten Normalverteilung über den positiven reellen Zahlen dargestellt, wobei die Gewichtsfunktion maßgeblich von der inversen Laplace-Transformierten der dichtegenerierenden Funktion der betrachteten elliptisch konturierten Verteilung ab-

hängt. Auf Basis dieser Darstellung einer regulären elliptisch konturierten Verteilung als Mischung von regulären Normalverteilungen werden Eigenschaften von regulären elliptisch konturierten Verteilungen wie Momente, Verteilung linearer Transformationen, Randverteilungen und bedingten Verteilungen studiert, wobei diese jeweils auf die entsprechenden Eigenschaften von Normalverteilungen zurückgeführt werden.

Aus den bisherigen Arbeiten ist bekannt, dass die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses eine Teilmenge der regulären elliptisch konturierten Verteilungen ist. Auf der Grundlage der Kolmogorovschen Konsistenzbedingungen, die explizit in Termen von charakteristischen Funktionen angegeben werden, wird in Yao (1973) gezeigt, dass eine Familie von regulären elliptisch konturierten Verteilungen genau dann die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses ist, wenn alle Elemente der Familie als zufällige Mischungen von entsprechend dimensional Normalverteilungen mit ein und derselben Mischungsverteilung darstellbar sind. Diese notwendige und hinreichende Bedingung wird dabei neben der Formulierung in Termen von Dichten, siehe Satz 4.3, ebenfalls in Termen von charakteristischen Funktionen angegeben und der Begriff der zufälligen Mischung ist äquivalent zum Begriff der Skalenmischung.

Satz 4.3. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konsistenz einer Familie $\{p_n(\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$ von Dichten der endlich-dimensionalen Verteilungen eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses ist*

$$p_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\rho_n|^{-\frac{1}{2}} h_n(x^T \rho_n^{-1} x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei ρ_n eine symmetrische und positiv definite $(n \times n)$ -Matrix ist und $h_n(r)$ als Lebesgue-Stieltjes-Integral für $0 < r < \infty$ durch

$$h_n(r) = \int_0^\infty v^{-n} e^{-\frac{r}{2v^2}} dF(v), \quad 0 < r < \infty,$$

gegeben ist, $h_n(r)$ als stetig in $r = 0$ definiert ist und $F(v)$ eine beliebige Verteilungsfunktion mit dem Träger $(0, \infty)$ ist.

Im zweiten Teil von Yao (1973) werden sphärisch-invariante Zufallsvektoren betrachtet, die als Zufallsvektoren definiert sind, deren Komponenten Werte eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses sind. Mithilfe dieser Darstellungssätze werden anschließend Eigenschaften von Verteilungen sphärisch-invarianter Zufallsvektoren wie Momente, bedingte Erwartungen und Verteilungen linearer Transformationen betrachtet. Insbesondere geht daraus hervor, dass die Klasse der Verteilungen sphärisch-invarianter Zufallsvektoren abgeschlossen unter linearen Transformationen ist und dass die bedingte Erwartung eines Teilvektors eines sphärisch-invarianten Zufallsvektors gegeben den verbleibenden Teil dieses Vektors linear in den bedingenden Variablen ist, d.h. dass

mittlere quadratische Schätzprobleme über sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen lineare Lösungen besitzen. Den Abschluss von Yao (1973) bilden Betrachtungen zum binären Standard-Erkennungsproblem zur Erkennung eines deterministischen Signals in additivem, als sphärisch-invariantem Zufallsvektor modelliertem Rauschen mithilfe eines Likelihood-Quotienten-Tests.

In Analogie zu Vershiks Definition von sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen wird in Gualtierotti (1974) ein sphärisch-invariantes Zylindermengenmaß über einem reellen separablen Hilbertraum eingeführt und als Mischung von Gauß-Zylindermengenmaßen auf diesem Raum dargestellt. Des Weiteren werden in Goldman (1976) u.a. vier Beispiele von sphärisch-invarianten Zufallsvektoren angegeben, die nicht aus einem sphärisch-invarianten stochastischen Prozess entstehen.

Die Verbindung der Klasse der sphärisch-invarianten stochastischen Prozesse zur beinhaltenen Klasse der Gauß-Prozesse wird in Wise und jun. Gallagher (1978) weiter untersucht. Anstelle von sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen, einerseits, zweiter Ordnung wie in Vershik (1964) und Blake und Thomas (1968) und, andererseits, mit regulären endlich-dimensionalen Verteilungen wie in Yao (1973) betrachten Wise und jun. Gallagher allgemeinere sphärisch-invariante stochastische Prozesse, deren endlich-dimensionale Verteilungen gegebenenfalls singuläre elliptisch konturierte Verteilungen sind. Dabei geben die Autoren insbesondere an, dass die Formulierung des Darstellungssatzes eines sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses in Termen von charakteristischen Funktionen aus Yao (1973) auch in dieser allgemeineren Konstellation gilt. Unter Verwendung des Konzepts der Äquivalenz zweier stochastischer Prozesse, siehe Definition 4.4, wird in Wise und jun. Gallagher (1978) zunächst formuliert, dass ein stochastischer Prozess genau dann ein sphärisch-invarianter stochastischer Prozess ist, wenn er äquivalent zum Produkt eines zentrierten Gauß-Prozesses mit einer von diesem Gauß-Prozess unabhängigen nichtnegativen Zufallsvariablen ist, siehe Lemma 4.1. Dabei heißen eine Zufallsvariable und ein stochastischer Prozess stochastisch unabhängig, falls die Zufallsvariable stochastisch unabhängig von jeder Zufallsvariablen aus diesem stochastischen Prozess ist. Basierend auf Lemma 4.1 zeigen Wise und jun. Gallagher anschließend mithilfe von Eigenschaften von Stieltjes-Integralen und der Verteilungsfunktion des Betrages einer Zufallsvariable, dass die Eigenschaft der Nichtnegativität der reellen, vom zentrierten Gauß-Prozess unabhängigen Zufallsvariablen redundant ist, siehe Satz 4.4.

Lemma 4.1. *Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ ist genau dann ein sphärisch-invarianter stochastischer Prozess, wenn er äquivalent zu einem stochastischen Prozess der Form $\{A \cdot Y_t\}_{t \in I}$ ist, wobei A eine nichtnegative Zufallsvariable und $\{Y_t\}_{t \in I}$ ein von A unabhängiger zentrierter Gauß-Prozess ist.*

Satz 4.4. *Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in I}$ ist genau dann ein sphärisch-invarianter stochastischer Prozess, wenn er äquivalent zu einem stochastischen Prozess der Form $\{B \cdot Y_t\}_{t \in I}$ ist, wobei B eine reellwertige Zufallsvariable und $\{Y_t\}_{t \in I}$ ein von B unabhän-*

giger zentrierter Gauß-Prozess ist.

Die Autoren bemerken zudem, dass dieses Resultat zum einen eine einfache Veranschaulichung dafür liefert, dass ein ergodischer sphärisch-invarianter stochastischer Prozess ein Gauß-Prozess ist, da eine Trajektorie des sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses keine Informationen über die zufällige Amplitude $|B|$ enthält und da die Amplitude nicht zufällig ist, wenn ein Gauß-Prozess vorliegt. Zum anderen wird dadurch deutlich, dass die Klasse der sphärisch-invarianten stochastischen Prozesse abgeschlossen unter deterministischen linearen Transformationen ist, da dies für die Klasse der Gauß-Prozesse gilt. Schließlich stellen Wise und jun. Gallagher eine geeignete Methode für das Studium der Pfadeigenschaften von spezifischen sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen auf der Grundlage der Pfadeigenschaften von Gauß-Prozessen vor.

In Huang und Cambanis (1979) werden grundlegende Eigenschaften sphärisch-invarianten stochastischer Prozesse sowie ihre Darstellung in Termen von Gauß-Prozessen bereitgestellt. Darauf aufbauend wird die Struktur des nichtlinearen Raumes der sphärisch-invarianten stochastischen Prozesse zweiter Ordnung und die Unterscheidung von zwei Elementen dieses Raumes untersucht. Unter Ausnutzung der Struktur des Raumes lösen die Autoren nichtlineare Schätzprobleme und bestimmen eine untere Schranke für den mittleren quadratischen Fehler einer nichtlinearen Vorhersage für eine spezifische Klasse von Vorhersageproblemen. Darüber hinaus wird in Conte und Longo (1987) bemerkt, dass die Darstellbarkeit eines stationären sphärisch-invarianten stochastischen Prozesses als Mischung von Gauß-Prozessen bezüglich einer Verteilung als Spezialfall des allgemeinen Ergoden-Darstellungssatzes betrachtet werden kann, der aussagt, dass alle stationären nichtergodischen stochastischen Prozesse als Mischungen ergodischer stochastischer Prozesse darstellbar sind.

Ohne Referenz auf relevante vorherige Literatur wie beispielsweise Yao (1973) oder Wise und jun. Gallagher (1978) werden in Kano (1994) fünf äquivalente Bedingungen angegeben, unter denen eine Familie von elliptisch konturierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Kolmogorowschen Konsistenzbedingungen erfüllt, wobei die betrachtete Familie von elliptisch konturierten Verteilungen durch die zugehörige Familie von Dichtegeneratoren charakterisiert wird. Eines dieser Kriterien ist dabei die Darstellbarkeit der elliptisch konturierten Verteilungen als Skalenmischungen von Normalverteilungen, wobei die Mischungsverteilungen jeweils identisch und insbesondere unabhängig von der jeweiligen Dimension der zugrunde liegenden elliptisch konturierten Verteilung sind. Neben der Formulierung dieser Bedingung in Termen von stochastischen Darstellungen zeigt Kano die Äquivalenzen dazu, dass die Randdichtegeneratoren der Elemente aus der Familie der Dichtegeneratoren wieder Elemente der Familie sind oder dass die zugehörigen charakteristischen Funktionen der elliptisch konturierten Verteilungen unabhängig von ihrer jeweiligen Dimension sind. Im letzten Abschnitt in Kano (1994) werden einerseits multivariate Normal-, Student- t - oder Cauchy-Verteilungen als Beispiele und andererseits

Pearson-Typ II-Verteilungen oder multivariate logistische Verteilungen als Gegenbeispiele für Familien elliptisch konturierter Verteilungen angegeben, die die Kolmogorovschen Konsistenzbedingungen erfüllen. Fälschlicherweise werden dabei Kotz-Typ-Verteilungen und Pearson-Typ VII-Verteilungen in der Liste der Gegenbeispiele aufgeführt, obwohl die zuvor genannten Verteilungen Spezialfälle dieser Verteilungsklassen sind.

Yao (2003) gibt eine klar strukturierte Zusammenfassung zahlreicher Arbeiten unter Angabe thematisch sortierter Referenzen. Dabei gibt Yao zunächst eine Abschwächung des Darstellungssatzes sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse aus Yao (1973) auf eine stetige Mischungsverteilungen an und verdeutlicht insbesondere die Verbindung zu Gauß-Prozessen. Anschließend werden weitere theoretische Eigenschaften wie bedingte Erwartungen, mittlere quadratische Schätzungen, die Abgeschlossenheit bezüglich linearer Transformationen sowie der Zusammenhang zu stochastischen Prozessen mit schweren Enden thematisiert. Nach der Diskussion einiger Anwendungen auf die Modellierung von Kurvenverläufen bandbreitenlimitierter Sprachsignale, von Radarstörflecken, von Störungen in Funkausbreitungen und von Kanalglättung oder Anordnungsaufbereitung wird die Erzeugung und Simulation von sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen basierend auf Brehm und Stammler (1987), Conte, Longo und Lops (1991) und Rangaswamy et al. (1995) betrachtet.

In Gómez-Sánchez-Manzano et al. (2006) werden die Konzepte expandierender und semiexpandierender Folgen von Verteilungen eingeführt, mit deren Hilfe anschließend der Zusammenhang zwischen Folgen elliptisch konturierter Verteilungen und Skalenmischungen von Normalverteilungen besprochen wird. Insbesondere wird dabei der Dichtegenerator einer elliptisch konturierter Verteilung fester Dimension Lebesgue-fast überall als Laplace-Stieltjes-Transformierte einer Funktion ausgedrückt, die selbst als Stieltjes-Integral bezüglich der Mischungsverteilung darstellbar ist. Im Falle der absoluten Stetigkeit der Mischungsverteilung kann daraus ein direkter funktionaler Zusammenhang zwischen der Lebesgue-Dichte der Mischungsverteilung und einer inversen Laplace-Transformierten geschlussfolgert werden.

Über den hier gegebenen Literaturüberblick über die Theorie sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse hinaus werden zum einen in Du und Ma (2011) sphärisch-invariante Zufallsfelder eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften studiert. Zum anderen werden in Biglieri, Yao und Yang (2015) Fadings, d.h. Schwankungen der Empfangsfeldstärke bei Funkübertragungen, mithilfe von sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen modelliert und in Zhang, El Korso und Pesavento (2017) wird die Zielerfassung und Leistungsauswertung von Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) Radaren unter Vorhandensein von als sphärisch-invarianten stochastischer Prozess modellierten Störungen untersucht.

4.3 Existenz und Definition stochastischer Prozesse mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen

Aufbauend auf den in Abschnitt 4.2 gegebenen Literaturüberblick sphärisch-invarianter bzw. elliptischer stochastischer Prozesse werden in diesem Abschnitt die Existenzen von p -Verallgemeinerungen dieser stochastischen Prozesse mithilfe des Korollar 4.1 des Existenzsatzes von Kolmogorov thematisiert und die entsprechenden stochastischen Prozesse eingeführt.

In Anlehnung an Kano (1994) führt die nachfolgende Definition zunächst den Begriff der Konsistenz einer Folge von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen ein, die sowohl für die Existenznachweise im Fall $p = 2$ in Kano (1994) als auch für die bereits angedeuteten Existenznachweise für den in dieser Arbeit betrachteten allgemeinen Fall $p > 0$ von zentraler Bedeutung ist.

Definition 4.9. Eine Folge $g^{(p)} = \{g^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen heißt konsistent, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(n+1,p)} \left(|(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^T|_p \right) dx_{n+1} = g^{(n,p)} \left(|(x_1, \dots, x_n)^T|_p \right) \quad (4.3)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Mit dem Verweis auf Bemerkung 2.1 wird deutlich, dass es für den Nachweis der Eigenschaft der Konsistenz einer Folge $g^{(p)}$ von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen genügt, die Bedingung (4.3) für Lebesgue-fast alle $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen, wobei die Erfüllung von (4.3) für den Fall $p = 2$ in Kano (1994) explizit nur für Lebesgue-fast alle $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gefordert ist. Nachfolgend zeigt Bemerkung 4.1 die Wohldefiniertheit von Definition 4.9 durch die Angabe einer konsistenten Folge von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen.

Bemerkung 4.1. Die Folge $g_{PE}^{(p)} = \{g_{PE}^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Dichtegeneratoren aller endlich-dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilungen ist konsistent.

Beweis. Aufgrund der Gestalt des Dichtegenerators $g_{PE}^{(n+1,p)}$ und der daraus resultierenden Faktorisierbarkeit gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_{PE}^{(n+1,p)} \left(|(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^T|_p \right) dx_{n+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} C_p^{n+1} \exp \left\{ -\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^p \right\} dx_{n+1} \\ &= C_p^n e^{-\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} C_p e^{-\frac{1}{p} |x_{n+1}|^p} dx_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_{PE}^{(n,p)}(|x|_p) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{g_{PE}^{(1,p)}}(x_{n+1}) dx_{n+1} \\
&= g_{PE}^{(n,p)}\left(|(x_1, \dots, x_n)^\top|_p\right).
\end{aligned}$$

□

Über die Notation $g_{PE}^{(p)}$ hinaus bezeichne $g_{SMN;G}^{(p)} = \{g_{SMN;G}^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Dichtegeneratoren aller Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit ein und derselben Mischungverteilung G , die insbesondere nicht von der Dimension n der jeweiligen Verteilung abhängt. Für den weiteren Verlauf dieses Abschnittes besitze die Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen stets die nachfolgende Eigenschaft:

$$G \text{ ist unabhängig von der Indexvariablen der Folge } g_{SMN;G}^{(p)}, \quad (4.4)$$

vergleiche Bemerkung 3.1. Beispiele von in dieser Arbeit bereits thematisierten Mischungverteilungen bzw. ihrer Verteilungsfunktionen, die die Eigenschaft (4.4) besitzen, sind die Dirac-Verteilung im Punkt 1, die Gamma-Verteilung mit den Parametern $a = \frac{\nu}{p}$ und $b = \frac{\nu}{p}$ sowie die Verteilung mit der Lebesgue-Dichte g_ν^{Sl} , d.h. die zur n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, zur $l_{n,p}$ -symmetrischen Student- t -Verteilung mit Parameter $\nu > 0$ bzw. zur $l_{n,p}$ -symmetrische Slash-Verteilung mit Parameter $\nu > 0$ gehörigen Mischungverteilungen mit den Verteilungsfunktionen G_1^N , $G_{\nu/p}^{St}$ bzw. G_ν^{Sl} , siehe Abschnitt 3.3. Hingegen sind die Lebesgue-Dichten der Mischungverteilungen von als Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbaren $l_{n,p}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilungen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Pearson-Typ VII-Verteilungen, siehe Korollare 3.8 und 3.11, im Allgemeinen abhängig von der Dimension n und die zugehörigen Verteilungsfunktionen erfüllen somit Eigenschaft (4.4) im Allgemeinen nicht.

Mit den obigen Notationen zeigt Lemma 4.2, dass nicht nur $g_{PE}^{(p)}$, sondern sogar $g_{SMN;G}^{(p)}$ mit einer die obige Eigenschaft (4.4) besitzende Verteilungsfunktion G konsistent ist.

Lemma 4.2. *Die Folge $g_{SMN;G}^{(p)}$ mit einer Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen mit der Eigenschaft (4.4) ist konsistent.*

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mithilfe der Symmetrie des gewöhnlichen Betrages, des Satzes von Fubini und der Integraltransformation $y = v^{-\frac{1}{p}}z$ mit $\frac{dy}{dz} = v^{-\frac{1}{p}}$ zunächst für $r \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g_{SMN;G}^{(n+1,p)}\left(\sqrt[p]{r^p + |y|^p}\right) dy &= 2 \int_0^{\infty} g_{SMN;G}^{(n+1,p)}\left(\sqrt[p]{r^p + y^p}\right) dy \\
&= 2C_p^{n+1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v^{\frac{n+1}{p}} \exp\left\{-\frac{r^p + y^p}{p}v\right\} dG(v) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C_p^{n+1} \int_0^\infty v^{\frac{n+1}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} \int_0^\infty e^{-\frac{y^p}{p}v} dy dG(v) \\
&= 2C_p^{n+1} \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} \int_0^\infty e^{-\frac{z^p}{p}v} dz dG(v) \\
&= \left(C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) \right) \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\frac{1}{p})} \int_0^\infty e^{-\frac{z^p}{p}} dz \right).
\end{aligned}$$

Da G die Eigenschaft (4.4) besitzt und somit nicht von $n+1$ abhängt, stimmt der erste Faktor der letzten Zeile der obigen Gleichungskette mit dem Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(n,p)}$ an der Stelle r überein. Aufgrund von

$$\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\frac{1}{p})} \int_0^\infty e^{-\frac{z^p}{p}} dz = C_p \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{|z|^p}{p}} dz = \int_{-\infty}^\infty \varphi_{g_{PE}^{(1,p)}}(z) dz = 1,$$

ist die Gleichung (4.3) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $(x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, da mit $r = \left| (x_1, \dots, x_n)^\top \right|_p$ und $y = x_{n+1}$ schließlich gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty g_{SMN;G}^{(n+1,p)} \left(\left| (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^\top \right|_p \right) dx_{n+1} &= \int_{-\infty}^\infty g_{SMN;G}^{(n+1,p)} \left(\sqrt[p]{r^p + |y|^p} \right) dy \\
&= g_{SMN;G}^{(n,p)}(r) \\
&= g^{(n,p)} \left(\left| (x_1, \dots, x_n)^\top \right|_p \right).
\end{aligned}$$

□

Die nachfolgende Anwendung des in Definition 4.9 eingeführten Begriffes vorbereitend, gibt Korollar 4.2 eine äquivalente Formulierung von Gleichung (4.3) unter Verwendung von Randdichtegeneratoren an.

Korollar 4.2. *Eine Folge $g^{(p)} = \{g^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen ist genau dann konsistent, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$g_{(n+1)}^{(n,p)} = g^{(n,p)}.$$

Beweis. Wegen $\omega_{1,p} = 2$ und mithilfe der Transformation $\tilde{y} = |x|_p^p + y^p$ mit $\frac{dy}{d\tilde{y}} = \frac{1}{p} (\tilde{y} - |x|_p^p)^{\frac{1}{p}-1}$ gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty g^{(n+1,p)} \left(\sqrt[p]{|x|_p^p + |y|^p} \right) dy &= 2 \int_0^\infty g^{(n+1,p)} \left(\sqrt[p]{|x|_p^p + y^p} \right) dy \\
&= \frac{\omega_{1,p}}{p} \int_{|x|_p^p}^\infty (\tilde{y} - |x|_p^p)^{\frac{1}{p}-1} g^{(n+1,p)} \left(\sqrt[p]{\tilde{y}} \right) d\tilde{y}
\end{aligned}$$

$$= g_{(n+1)}^{(n,p)}(|x|_p)$$

und die Behauptung folgt direkt aus Definition 4.9. \square

Somit ist eine Folge $g^{(p)}$ von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen genau dann konsistent, wenn der zum $(n+1)$ -ten Folgenglied $g^{(n+1,p)}$ von $g^{(p)}$ gehörige Randdichtegenerator $g_{(n+1)}^{(n,p)}$ mit dem n -ten Folgenglied $g^{(n,p)}$ von $g^{(p)}$ übereinstimmt, wobei die Verifikation dieser Identität gemäß Bemerkung 2.1 Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$ genügt.

Im verbleibenden Teil dieses Abschnittes wird nun zwei Schritte der p -Verallgemeinerung sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse thematisiert. Für den ersten dieser Schritte wird in Satz 4.5 die Projektivität einer Familie stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen mit Dichtegeneratoren aus einer konsistenten Folge $g^{(p)}$ gezeigt.

Satz 4.5. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und $g^{(p)} = \{g^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konsistente Folge von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen. Dann ist die Familie*

$$\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I = \bigcup_{n=1}^{|I|} \Phi_{g^{(n,p)}}$$

stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen mit Dichtegeneratoren aus $g^{(p)}$ projektiv über \mathbb{R} .

Beweis. Für t_1, \dots, t_n, t_{n+1} aus I sei $Q_{\{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}}(\cdot) = \Phi_{g^{(n+1,p)}}(\cdot)$ die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung eines stetig $l_{n+1,p}$ -symmetrisch mit Dichtegenerator $g^{(n+1,p)} \in g^{(p)}$ verteilten Zufallsvektors. Dann gilt nach dem ersten Teil von Lemma 2.5 und mithilfe von Korollar 4.2, d.h. der Konsistenz-Eigenschaft der Folge $g^{(p)}$, für $A \in \mathfrak{B}^n$

$$Q_{\{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}}(A \times \mathbb{R}) = \Phi_{g^{(n+1,p)}}(A \times \mathbb{R}) = \Phi_{g_{(n+1)}^{(n,p)}}(A) = \Phi_{g^{(n,p)}}(A) = Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A),$$

da $\Phi_{g^{(n+1,p)}}(A \times \mathbb{R})$ die in A ausgewertete n -dimensionale Randverteilung der ersten n Komponenten eines $\Phi_{g^{(n+1,p)}}$ -verteilten Zufallsvektors beschreibt. Da weiter die zum Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ zugehörige Verteilung $\Phi_{g^{(n,p)}}$ ein Element von $\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I$ ist, erfüllt $\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I$ die erste Kolmogorovsche Konsistenzbedingung (4.1). Sei nun π eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ und M die zugehörige $(n \times n)$ -Permutationsmatrix. Weiter sei $Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(\cdot) = \Phi_{g^{(n,p)}}(\cdot)$ wie zuvor die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsvektors X mit $X \sim \Phi_{g^{(n,p)}}$. Da das stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaß $\Phi_{g^{(n,p)}}$ nach Lemma 2.1 permutationsinvariant ist, gilt $Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}} = Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}$. Somit erfüllt $\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I$ ebenfalls die zweite Kolmogorovsche Konsistenzbedingung (4.2), da mithilfe der Transformation $y = M^T x$ mit $|\det(\frac{dx}{dy})| = |\det(M)| = 1$ und der Permutationsinvarianz des p -Funktionals in \mathbb{R}^n für $A \in \mathfrak{B}^n$ gilt

$$Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}(A_\pi) = Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(MA) = \int_{MA} g^{(n,p)}(|x|_p) dx = \int_A g^{(n,p)}(|My|_p) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A g^{(n,p)}(|y|_p) dy \\
&= Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A),
\end{aligned}$$

wobei $MA = \{Mx : x \in A\} = \{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})^T : (x_1, \dots, x_n)^T \in A\} = A_\pi$. \square

Nach Korollar 4.1 aus dem Existenzsatz von Kolmogorov existiert in einem polnischen Raum zu jeder projektiven Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein stochastischer Prozess, der diese Familie als Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen besitzt. Da \mathbb{R} versehen mit der Standardmetrik einen polnischen Raum bildet, rechtfertigt Satz 4.5 den in Definition 4.10 eingeführten reellen stochastischen Prozess.

Definition 4.10. Ein reeller stochastischer Prozess mit einer nichtleeren Parametermenge I heißt stochastischer Prozess mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen endlich-dimensionalen Verteilungen zur Folge $g^{(p)} = \{g^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, wenn $\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I$ seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen und $g^{(p)}$ konsistent ist.

Wie in Bemerkung 4.1 gezeigt, ist die Folge $g_{PE}^{(p)}$ der Dichtegeneratoren aller endlich-dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilungen konsistent. Die Spezialisierung des stochastischen Prozesses aus Definition 4.10 auf die Folge $g_{PE}^{(p)}$, d.h. die Betrachtung von stochastischen Prozessen, deren endlich-dimensionale Verteilungen multivariate p -verallgemeinerte Normalverteilungen sind, erfolgt in Definition 4.11.

Definition 4.11. Ein stochastischer Prozess mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen endlich-dimensionalen Verteilungen zur Folge $g_{PE}^{(p)} = \{g_{PE}^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt p -verallgemeinerter Standard-Gauß-Prozess und wird mit SGP_p bezeichnet.

Weiter ist in Lemma 4.2 gezeigt, dass nicht nur $g_{PE}^{(p)}$, sondern sogar $g_{SMN;G}^{(p)}$ für jede die Eigenschaft (4.4) besitzende Mischungsverteilung G konsistent ist. Die zu diesen spezifischen Folgen von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen gehörigen Spezialfälle der in Definition 4.10 eingeführten stochastischen Prozesse mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen endlich-dimensionalen Verteilungen werden in Definition 4.12 betrachtet.

Definition 4.12. Ein stochastischer Prozess mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen endlich-dimensionalen Verteilungen zur Folge $g_{SMN;G}^{(p)} = \{g_{SMN;G}^{(n,p)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit einer Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen mit der Eigenschaft (4.4) heißt skalengemischter p -verallgemeinerter Standard-Gauß-Prozess mit Mischungsverteilung G und wird mit $MSGP_p(G)$ bezeichnet.

Insbesondere stimmt Definition 4.12 für die spezielle Wahl der Dirac-Verteilung im Punkt 1 als Mischungsverteilung mit Definition 4.11 überein, da ihre Verteilungsfunktion G_1^N die Eigenschaft (4.4) besitzt und weiter zunächst $SMN_{n,p}(G_1^N) = N_{n,p}$ und folglich $g_{SMN;G_1^N}^{(n,p)} = g_{PE}^{(n,p)}$ gilt. Für $\nu > 0$ gilt darüber hinaus $SMN_{n,p}(G_{\nu/p}^{St}) = St_{n,p}(0_n, I_n, \nu)$

und $SMN_{n,p}(G_\nu^{Sl}) = Sl_{n,p}(0_n, I_n, \nu)$ und die zu diesen Mischungsverteilungen gehörigen skalengemischten p -verallgemeinerten Standard-Gauß-Prozesse $SMSGP_p(G_\nu^{St})$ und $SMSGP_p(G_\nu^{Sl})$ werden p -verallgemeinerter Standard-Student- t -Prozess mit Parameter $\nu > 0$ bzw. p -verallgemeinerter Standard-Slash-Prozess mit Parameter $\nu > 0$ genannt und nachfolgend durch $SStP_p(\nu)$ bzw. $SSlP_p(\nu)$ bezeichnet.

Für den zweiten der beiden Schritte der p -Verallgemeinerung sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse mit der Parametermenge $I \neq \emptyset$ wird die in Satz 4.5 betrachtete Familie $\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I$ stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen mit Dichtegeneratoren aus einer konsistenten Folge $g^{(p)}$ zu einer Familie Rang- k -stetiger achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen mit Dichtegeneratoren aus $g^{(p)}$ erweitert, deren Projektivität über \mathbb{R} in Satz 4.6 gezeigt wird. Dabei sei insbesondere darauf verwiesen, dass $n \in \{1, \dots, |I|\}$ und $k \in \{0, \dots, n\}$ durch ihre maßgebliche Abhängigkeit von der Parametermenge I bzw. der Funktion S im Allgemeinen innerhalb dieser Familie variieren und dass im Fall $k = 0$ in Bemerkung 2.6 einerseits die Übereinstimmung Rang-0-stetiger $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen mit Dirac-Verteilungen gezeigt ist und andererseits die zugehörigen Notationen diskutiert werden.

Satz 4.6. *Für $I \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer seien $m: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $S: I \rightarrow [0, \infty)$ beliebig. Weiter sei die Folge $g^{(p)} = \{g^{(k,p)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Dichtegeneratoren stetiger $l_{k,p}$ -symmetrischer Verteilungen konsistent. Dann ist die zu den Funktionen m und S gehörige Familie*

$$\mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq I} \left\{ EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)}) : \mu = (m(t_1), \dots, m(t_n))^T, \right. \\ \left. \Sigma = \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n)) \text{ vom Rang } k \right\}$$

Rang- k -stetiger achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen mit Dichtegeneratoren aus $g^{(p)}$ projektiv über \mathbb{R} .

Beweis. Für t_1, \dots, t_n, t_{n+1} aus I seien zunächst $\mu^{(n+1)} = (m(t_1), \dots, m(t_n), m(t_{n+1}))^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\Sigma^{(n+1)} = \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n), S(t_{n+1}))$ vom Rang k , wobei $\Sigma^{(n+1)}$ als Diagonalmatrix mit nichtnegativen Diagonaleinträgen insbesondere symmetrisch und nichtnegativ definit ist. Weiter bezeichne $Q_{\{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}}(\cdot) = EC_{n+1,p}(\cdot \mid \mu^{(n+1)}, \Sigma^{(n+1)}, g^{(k,p)}) \in \mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S)$ die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Rang- k -stetig achsenparallel $l_{n+1,p}$ -elliptisch konturiert mit Parametern $\mu^{(n+1)}$ und $\Sigma^{(n+1)}$ und Dichtegenerator $g^{(k,p)} \in g^{(p)}$, falls $k > 0$, bzw. Symbol $g^{(0,p)}$ verteilten Zufallsvektors. Dann folgt aus Korollar 2.10

$$Q_{\{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}}(A \times \mathbb{R}) = EC_{n+1,p}(A \times \mathbb{R} \mid \mu^{(n+1)}, \Sigma^{(n+1)}, g^{(k,p)}) \\ = EC_{n,p}(A \mid \mu^{(n)}, \Sigma^{(n)}, g^{(\kappa,p)}), \quad A \in \mathfrak{B}^n,$$

wobei $\mu^{(n)} = (m(t_1), \dots, m(t_n))^T$ und $\Sigma^{(n)} = \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n))$ mit $\kappa = \text{rg}(\Sigma^{(n)}) \in \{k-1, k\}$. Mithilfe der äquivalenten Formulierung der Konsistenz-Eigenschaft der Folge

$g^{(p)}$ aus Korollar 4.2 im Falle von $\kappa > 0$ bzw. der im Beweis von Korollar 2.9 besprochenen Austauschbarkeit der Symbole $g^{(0,p)}$ und $g^{(0,p)}$ im Falle von $\kappa = 0$ gilt

$$Q_{\{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}}(A \times \mathbb{R}) = EC_{n,p}(A \mid \mu^{(n)}, \Sigma^{(n)}, g^{(\kappa,p)}) = Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A)$$

und die zu $Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ gehörige Verteilung $EC_{n,p}(\mu^{(n)}, \Sigma^{(n)}, g^{(\kappa,p)})$ ist ein Element von $\mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S)$, wodurch die erste Kolmogorovsche Konsistenzbedingung (4.1) nachgewiesen ist. Sei nun π eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ und M die zugehörige Permutationsmatrix. Weiter sei $Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(\cdot) = EC_{n,p}(\cdot \mid \mu, \Sigma, g^{(\kappa,p)}) \in \mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S)$ die vom Zufallsvektor X mit $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(\kappa,p)})$ induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung, wobei $\mu = \mu^{(n)} = (m(t_1), \dots, m(t_n))^T$ und $\Sigma = \Sigma^{(n)} = \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n))$ mit $\kappa = \text{rg}(\Sigma)$. Dann ist $Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}$ die von MX induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung und nach Korollar 2.8 gilt

$$Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}(\cdot) = EC_{n,p}(\cdot \mid M\mu, M\Sigma M^T, g^{(\kappa,p)}).$$

Falls $\kappa = 0$, d.h. $\Sigma = M\Sigma M^T = 0_{n \times n}$, sind $Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ und $Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}$ die Dirac-Verteilungen in den Punkten μ bzw. $M\mu$. Somit gilt für $A \in \mathfrak{B}^n$

$$Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}(A_\pi) = Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}(MA) = \mathbb{1}_{MA}(M\mu) = \mathbb{1}_A(\mu) = Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A),$$

wodurch die Kolmogorovschen Konsistenzbedingung (4.2) im Fall $\kappa = 0$ nachgewiesen ist. Sei nun $\kappa > 0$. Mit den zu Σ gehörigen Matrizen S_1 , V_1 und V_2 wie in Abschnitt 2.2.1 ist $(V_1\sqrt{S_1})(V_1\sqrt{S_1})^T$ eine Rang- κ -Zerlegung von Σ und die Spalten von V_2 bilden eine Basis des Kerns von Σ . Folglich ist einerseits $(MV_1\sqrt{S_1})(MV_1\sqrt{S_1})^T$ eine Rang- κ -Zerlegung von $M\Sigma M^T$, da $(MV_1\sqrt{S_1})(MV_1\sqrt{S_1})^T = M(V_1\sqrt{S_1})(V_1\sqrt{S_1})^T M^T = M\Sigma M^T$ und da die Multiplikation der Permutationsmatrix M von links an $V_1\sqrt{S_1}$ lediglich die Zeilen vertauscht und somit den Rang unverändert lässt. Andererseits bilden die Spalten von MV_2 eine Basis des Kerns von $M\Sigma M^T$. Mit der Identität $M^{-1} = M^T$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} U_{(MV_2)^T}(M\mu) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (MV_2)^T x = (MV_2)^T M\mu\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : V_2^T M^T x = V_2^T \mu\} \\ &= \{My \in \mathbb{R}^n : V_2^T y = V_2^T \mu\} \\ &= M \cdot U_{V_2^T}(\mu). \end{aligned}$$

Für $A \in \mathfrak{B}^n$ liefern die Gleichung (2.18) sowie die Transformation $y = M^T x$ mit $|\det \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}| = |\det(M)| = 1$ schließlich

$$Q_{\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\}}(A_\pi) = EC_{n,p}(MA \mid M\mu, M\Sigma M^T, g^{(\kappa,p)})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\det(\sqrt{S_1})} \int_{MA} g^{(\kappa,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} (MV_1)^\top (x - M\mu) \right|_p \right) \lambda_{U_{(MV_2)^\top(M\mu)}}^{(\kappa)}(dx) \\
&= \frac{1}{\det(\sqrt{S_1})} \int_{MA \cap U_{(MV_2)^\top(M\mu)}} g^{(\kappa,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^\top M^\top (x - M\mu) \right|_p \right) dx \\
&= \frac{1}{\det(\sqrt{S_1})} \int_{M(A \cap U_{V_2^\top(\mu)})} g^{(\kappa,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^\top (M^\top x - \mu) \right|_p \right) dx \\
&= \frac{1}{\det(\sqrt{S_1})} \int_{A \cap U_{V_2^\top(\mu)}} g^{(\kappa,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^\top (y - \mu) \right|_p \right) dy \\
&= \frac{1}{\det(\sqrt{S_1})} \int_A g^{(\kappa,p)} \left(\left| \sqrt{S_1}^{-1} V_1^\top (y - \mu) \right|_p \right) \lambda_{U_{V_2^\top(\mu)}}^{(\kappa)}(dy) \\
&= Q_{\{t_1, \dots, t_n\}}(A),
\end{aligned}$$

d.h. den Nachweis der Kolmogorovschen Konsistenzbedingung (4.2) im Fall $\kappa > 0$. \square

Wie zuvor ermöglicht die Projektivität der Familie $\mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S)$ von Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $I \neq \emptyset$, beliebige Funktionen $m: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $S: I \rightarrow [0, \infty)$ und eine konsistente Folge $g^{(p)}$ von Dichtegeneratoren stetiger $l_{k,p}$ -symmetrischer Verteilungen die nachfolgende Definition 4.13 eines reellen stochastischen Prozesses mit der Parametermenge I , dessen Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen mit $\mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S)$ übereinstimmt. In Analogie zu den zwei im ersten Schritt der p -Verallgemeinerung betrachteten Spezialfällen von Definition 4.10 werden außerdem zwei Spezialisierungen von Definition 4.13 angegeben, siehe Definitionen 4.14 und 4.15.

Definition 4.13. Ein reeller stochastischer Prozess mit der Parametermenge I heißt stochastischer Prozess mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion $m: I \rightarrow \mathbb{R}$, Skalierungsfunktion $S: I \rightarrow [0, \infty)$ und Folge $g^{(p)} = \{g^{(k,p)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Dichtegeneratoren, wenn $\mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, S)$ seine Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen und $g^{(p)}$ konsistent ist.

Definition 4.14. Ein stochastischer Prozess mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m , Skalierungsfunktion S und Folge $g_{PE}^{(p)} = \{g_{PE}^{(k,p)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ heißt p -verallgemeinerter Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m und Skalierungsfunktion S und wird mit $AGP_p(m, S)$ bezeichnet.

Definition 4.15. Ein stochastischer Prozess mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m , Skalierungsfunktion S und Folge $g_{SMN;G}^{(p)} = \{g_{SMN;G}^{(k,p)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Dichtegeneratoren mit einer die Eigenschaft (4.4) besitzenden Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen heißt skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen

Verteilungen zur Lagefunktion m , Skalierungsfunktion S und Mischungsverteilung G und wird mit $SMAGP_p(m, S, G)$ bezeichnet.

Mit den Bezeichnungen 0_I der konstanten Nullfunktion und 1_I der konstanten Einsfunktion auf einer nichtleeren Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ und mithilfe der zu Beginn von Abschnitt 2.2.1 betrachteten Spezialfälle $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen gilt $\mathcal{S}_{g^{(p)}}^I = \mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(0_I, 1_I)$. Somit sind stochastische Prozesse mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen endlich-dimensionalen Verteilungen Spezialfälle von stochastischen Prozessen mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen, die durch die Wahl der Lage- und Skalierungsfunktion als 0_I bzw. 1_I angenommen werden. Weiter sind demnach auch die Definitionen 4.11 und 4.12 Spezialisierungen der Definitionen 4.14 bzw. 4.15 und die Wahl der Dirac-Verteilung im Punkt 1 als Mischungsverteilung verdeutlicht, dass Definition 4.14 in Definition 4.15 enthalten ist. Schließlich ist unter Beachtung der Notation aus Bemerkung 2.6

$$\mathcal{AEC}_{g^{(p)}}^I(m, 0_I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq I} \left\{ EC_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, g^{(0,p)}) : \mu = (m(t_1), \dots, m(t_n))^T \right\}$$

eine Familie von Dirac-Verteilungen, die insbesondere nicht von der Folge $g^{(p)}$ abhängt. Somit sind die in den Definitionen 4.13, 4.14 und 4.15 eingeführten stochastischen Prozesse für eine beliebige, aber feste Lagefunktion $m: I \rightarrow \mathbb{R}$ und die spezifische Skalierungsfunktion $S = 0_I$ äquivalent und, da ihre Familien der endlich-dimensionalen Verteilungen mit der obigen Familie von Dirac-Verteilungen überstimmen, nehmen in einer beliebigen Stelle $t \in I$ P -fast sicher den Wert $m(t)$ an, vergleiche (2.19) am Ende von Abschnitt 2.2.3. Insbesondere hängt ein skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Skalierungsfunktion $S = 0_I$ nicht von der Wahl der Mischungsverteilung G ab, wobei die Notation als $SMAGP_p(m, 0_I, G)$ aus Gründen der Einheitlichkeit bestehen bleibt.

Die Motivation und Rechtfertigung der Bezeichnung der in den Definitionen 4.12 und 4.15 eingeführten stochastischen Prozesse als skalengemischte p -verallgemeinerte Standard-Gauß-Prozesse bzw. skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen geht aus einer diese Prozesse charakterisierenden Eigenschaft hervor, siehe Satz 4.7 in Abschnitt 4.4.

In Analogie zu den im Anschluss an Definition 4.12 eingeführten Bezeichnungen $SStP_p(\nu)$ bzw. $SSlP_p(\nu)$ werden $SMAGP_p(m, S, G_{\nu/p}^{St})$ und $SMAGP_p(m, S, G_{\nu}^{Sl})$ für $\nu > 0$ weiter p -verallgemeinerter Student- t - bzw. p -verallgemeinerter Slash-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m , zur Skalierungsfunktion S und zum Parameter ν genannt und mit $AStP_p(m, S, \nu)$ bzw. $ASlP_p(m, S, \nu)$ bezeichnet.

Zusätzlich heißt ein stochastischer Prozess mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zentriert, falls seine Lagefunktion m als Nullfunktion

über der Parametermenge gewählt ist. Weiter heißt $SMAGP_p(0_I, S, G)$ ein zentrierter skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Skalierungsfunktion S und Mischungsverteilung G . Insbesondere führt die Spezialisierung der Mischungsverteilung auf die Dirac-Verteilung im Punkt 1 auf einen zentrierten p -verallgemeinerten Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen und die stochastischen Prozesse aus den Definitionen 4.10, 4.11 und 4.12 sind per Definition zentriert.

Für den Spezialfall $p = 2$ ist in Kano (1994) bewiesen, dass eine Folge $\{g^{(n,2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Dichtegeneratoren elliptisch konturierter Verteilungen genau dann konsistent ist, wenn $g^{(n,2)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (Lebesgue-fast überall) der Dichtegenerator einer Skalenmischung der n -dimensionalen Normalverteilung mit ein und derselben, von der Dimension n der jeweiligen Verteilung unabhängigen Mischungsverteilung ist. Zudem ist diese Aussage implizit auch in Yao (1973), siehe Satz 4.3, unter Verwendung der zur Skalenmischung äquivalenten Terminologie der zufälligen Mischung enthalten. Folglich sind die Definitionen 4.10 und 4.12 für $p = 2$ äquivalent und die darin definierten stochastischen Prozesse sind sphärisch-invarianten stochastischen Prozessen mit stetigen sphärischen endlich-dimensionalen Verteilungen überein. Darüber hinaus sind auch die Definitionen 4.13 und 4.15 jeweils für $p = 2$ äquivalent und zentrierte stochastische Prozesse mit achsenparallel $l_{n,2}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen stimmen insbesondere mit gewöhnlichen sphärisch-invarianten Prozessen mit nichtnegativ definiten Diagonalmatrizen als Matrixparameter in den elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen.

Der Beweis der obigen Äquivalenz der Konsistenz einer Folge von Dichtegeneratoren sphärischer Verteilungen und der Darstellbarkeit der erzeugten Verteilungen als Skalenmischung von Normalverteilungen mit von den jeweiligen Dimensionen unabhängigen Mischungsverteilungen beruht auf charakteristischen Funktionen sphärischer Verteilungen und deren besonderer Gestalt als ein charakteristischer Generator ausgewertet in einer euklidischen Norm, siehe Yao (1973) bzw. Kano (1994). Eine analoge Aussage für den hier betrachteten allgemeinen Fall $p > 0$ ist nicht bekannt und soll in dieser Arbeit nicht weiter untersucht werden. Da in Kalke (2013, Theorem 5.4) gezeigt ist, dass die charakteristische Funktion einer $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung nicht als skalare Funktion ausgewertet in einer positiv homogenen Funktion, wie beispielsweise ein q -Funktional für ein $q > 0$, darstellbar ist, wird grundlegend deutlich, dass der Beweis der Äquivalenz im Fall $p = 2$ nicht ohne zusätzliche Betrachtungen auf den Fall $p > 0$ übertragen werden kann.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden ausschließlich skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zu einer Lagefunktion m , einer Skalierungsfunktion S und einer Mischungsverteilung G mit der Eigenschaft (4.4) sowie deren Spezialfälle betrachtet.

4.4 Eigenschaften und Simulationen von skalengemischten p -verallgemeinerten Gauß-Prozessen mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen

In diesem Abschnitt werden zunächst Eigenschaften skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen studiert. Dabei werden insbesondere ihre Verbindungen zu p -verallgemeinerten Gauß-Prozessen mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen aufgezeigt, ihre Erwartungs- und Kovarianzfunktionen bestimmt sowie ihre Stationarität und ihr Verhalten bei linearer Transformation untersucht. Darüber hinaus werden im zweiten Teil dieses Abschnittes zum einen Methoden zur Simulation dieser stochastischen Prozesse auf der Basis der Algorithmen 3.1, 3.2 und 3.3 zur Simulation von Skalenmischungen der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung mit zwei Parametern erläutert. Zum anderen werden verschiedene Aspekte für den visuellen Vergleich zweier Trajektorien spezifischer Beispiele dieser stochastischen Prozesse diskutiert.

Dazu seien für den gesamten Abschnitt $I \subset \mathbb{R}$ nichtleer, $m: I \rightarrow \mathbb{R}$, $S: I \rightarrow [0, \infty)$ und G die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariablen V mit der Eigenschaft (4.4). Weiter sei nun $X = \{X_t\}_{t \in I}$ ein skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m , Skalierungsfunktion S und Mischungsverteilung G . Aufgrund der Definition über seine Familie $\mathcal{AEC}_{g_{SMN;G}}^{I(p)}(m, S)$ der endlich-dimensionalen Verteilungen, siehe Definition 4.15, ist X bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. Demzufolge wird der reelle stochastische Prozess X nachfolgend als der skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m , Skalierungsfunktion S und Mischungsverteilung G bezeichnet, wobei in diesem Fall die Notation $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(m, S, G)$ und im Spezialfall eines p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses Z mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Lagefunktion m und zur Skalierungsfunktion S die Notation $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \sim AGP_p(m, S)$ verwendet wird.

Der nachfolgende Satz 4.7 gibt eine charakteristische Darstellung skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen mithilfe eines spezifischen zentrierten p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen an, die die Grundlage der Nomenklatur in den Definitionen 4.12 und 4.15 bildet.

Satz 4.7. *Sei $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(m, S, G)$. Dann ist X äquivalent zum stochastischen Prozess $Y = \left\{m(t) + V^{-\frac{1}{p}}Z_t\right\}_{t \in I}$, wobei $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \sim AGP_p(0_I, S)$ stochastisch unabhängig von der Zufallsvariablen $V \sim G$ ist.*

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ eine beliebige n -elementige Teilmenge von I , also $J \in \mathcal{H}(I)$. Dann ist $EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)})$ mit $\mu = (m(t_1), \dots, m(t_n))^T$ und $\Sigma =$

$\text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n))$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ nach Definition 4.15 die zu $X_J = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^\top$ gehörige endlich-dimensionale Verteilung des stochastischen Prozesses X . Zudem sind $N_{n,p}(0_n, \Sigma)$ und $\mathfrak{L}(\mu^{(n)} + V^{-\frac{1}{p}} Z_J)$ die zu $Z_J = (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})^\top$ bzw. $Y_J = (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})^\top$ gehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen von Z bzw. Y . Da nach Definition 3.4 und Korollar 3.27

$$\mathfrak{L}(\mu^{(n)} + V^{-\frac{1}{p}} Z_J) = SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G) = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)})$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Menge $J = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{H}(I)$ mit $|J| = n$ gilt, stimmen die Familien der endlich-dimensionalen Verteilungen von X und Y überein und die beiden reellen stochastischen Prozesse sind äquivalent. \square

Für $p = 2$ und die Wahl von m als Nullfunktion, jedoch beliebige Kovarianzstrukturen in den zugehörigen Familien der endlich-dimensionalen Verteilungen zulassend, ist die Äquivalenz der beiden in Satz 4.7 betrachteten stochastischen Prozesse in Wise und jun. Gallagher (1978) formuliert, siehe Lemma 4.1. Durch die in dieser Arbeit betrachtete Definition einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, siehe Definition 3.1, in der ausschließlich auf $(0, \infty)$ getragene, d.h. zu positiven Zufallsvariablen gehörige, Mischungsverteilungen zulässig sind, ist eine Erweiterung der Aussage von Satz 4.7 in Analogie zu Wise und jun. Gallagher (1978), d.h. in Analogie zum Schritt von Lemma 4.1 zu Satz 4.4, jedoch nicht möglich.

In Satz 4.8 und der anschließenden Bemerkung 4.2 erfolgt nun die Bestimmung der Erwartungsfunktion sowie der Kovarianzfunktion eines skalengemischten p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen, sofern deren Existenzen gewährleistet sind, wobei in Lemma 4.3 zunächst für den Spezialfall eines p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen untersucht wird. Diese Aussagen vorbereitend sei $g_{SMN;G}^{(p)} = \{g_{SMN;G}^{(k,p)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der Dichtegeneratoren der Skalenmischungen multivariater p -verallgemeinerter Normalverteilungen mit der Mischungsverteilung G , die die Eigenschaft (4.4) besitzt und für die zusätzlich $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}}) = \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v)$, $V \sim G$, endlich ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ erfüllt die univariate Varianzkomponente der stetigen $l_{k,p}$ -symmetrischen Verteilung mit dem Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(k,p)}$ aus $g_{SMN;G}^{(p)}$ nach Lemma 3.2 die Darstellung $\sigma_{g_{SMN;G}^{(k,p)}}^2 = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})} \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v)$ und ist unabhängig von der Dimension k der von $g_{SMN;G}^{(k,p)}$ erzeugten Verteilung, da die Mischungsverteilung G gemäß (4.4) diese Eigenschaft besitzt. Somit ist die Folge $\left\{ \sigma_{g_{SMN;G}^{(k,p)}}^2 \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ konstant und in diesem Fall bezeichne $\sigma_{g_{SMN;G}^{(p)}}^2$ nachfolgend die univariate Varianzkomponente der Skalenmischungen multivariater p -verallgemeinerter Normalverteilungen mit der Mischungsverteilung G mit der Eigenschaft (4.4). Für die spezielle Wahl der Mischungsverteilung als Dirac-Verteilung im Punkt 1, d.h. $G = G_1^N$, bezeichne $\sigma_{g_{PE}^{(p)}}^2 = \sigma_{g_{SMN;G_1^N}^{(k,p)}}^2 = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})} \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} d1_{(1,\infty)}(v) = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma(\frac{3}{p})}{\Gamma(\frac{1}{p})}$

die univariate Varianzkomponente multivariater p -verallgemeinerter Normalverteilungen.

Lemma 4.3. *Sei $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \sim AGP_p(m, S)$. Dann ist Z ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung, seine Erwartungsfunktion stimmt mit seiner Lagefunktion m überein und seine Kovarianzfunktion $\Gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $s, t \in I$ mithilfe der Skalierungsfunktion S gegeben durch*

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \sigma_{g_{PE}^{(p)}}^2 \cdot S(t) & , \text{ falls } s = t \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Nach Definition 4.14 und Korollar 3.27 gilt für alle $t \in I$ zunächst

$$\mathfrak{L}(Z_t) = EC_{1,p}(m(t), S(t), g_{PE}^{(k_t, p)}) = N_{n,p}(m(t), S(t)) = SMN_{1,p}(m(t), S(t), G_1^N)$$

mit dem Rang $k_t = \mathbf{1}_{(0, \infty)}(S(t))$ von $S(t)$ und der Dirac-Verteilung im Punkt 1 als Mischungsverteilung. Im Falle von $k_t = 0$ gilt $S(t) = 0$ und mithilfe von Korollar 3.28 folgt $\mathbb{E}(Z_t) = m(t)$ und

$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \text{Var}(Z_t) + (\mathbb{E}(Z_t))^2 = 0 + (m(t))^2 < \infty.$$

Gilt andernfalls $k_t = 1$, dann liefert Korollar 3.20 mit $G = G_1^N$ einerseits die Existenz von $\mathbb{E}(Z_t)$ und die Übereinstimmung mit $m(t)$, da für eine im Punkt 1 Dirac-verteilte Zufallsvariable V , d.h. $V \sim G_1^N$, $\mathbb{E}(V^{-\frac{1}{p}}) = 1 < \infty$ gilt, und andererseits gilt

$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \text{Var}(Z_t) + (\mathbb{E}(Z_t))^2 = \sigma_{g_{PE}^{(1,p)}}^2 S(t) + (m(t))^2 < \infty,$$

da $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}}) = 1 < \infty$. Folglich ist Z ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung mit einer zur Lagefunktion m identischen Erwartungsfunktion. Seien nun $s, t \in I$. Dann gilt nach Definition 4.14 und Korollar 3.27

$$\mathfrak{L}((Z_s, Z_t)^T) = EC_{2,p}(\mu(s, t), \Sigma(s, t), g_{PE}^{(k_{s,t}, p)}) = SMN_{2,p}(\mu(s, t), \Sigma(s, t), G_1^N)$$

mit $\mu(s, t) = (m(s), m(t))^T$ und $\Sigma = \text{diag}(S(s), S(t))$ vom Rang $k_{s,t} = \mathbf{1}_{(0, \infty)}(S(s)) + \mathbf{1}_{(0, \infty)}(S(t))$. Für den Fall $k_{s,t} = 0$ gilt somit nach Korollar 3.28

$$\text{Cov}((Z_s, Z_t)^T) = 0_{2 \times 2} = \Sigma(s, t)$$

und im Fall von $k_{s,t} > 0$ nach Korollar 3.20 mit $G = G_1^N$

$$\text{Cov}((Z_s, Z_t)^T) = \sigma_{g_{PE}^{(k_{s,t}, p)}}^2 \Sigma(s, t) = \sigma_{g_{PE}^{(p)}}^2 \Sigma(s, t),$$

also $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(Z_s, Z_t) = 0$ für $s \neq t$ und $\Gamma(t, t) = \sigma_{g_{PE}^{(p)}}^2 S(t)$. □

Aufbauend auf Lemma 4.3 und Satz 4.7 betrachtet Satz 4.8 nun skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen im Falle einer über der Parametermenge I nichtverschwindenden Skalierungsfunktion S , wobei der Fall $S = 0_I$ in Bemerkung 4.2 thematisiert wird. Bezeichne dazu $0_{I \times I}$ die konstante Nullfunktion auf $I \times I$.

Satz 4.8. *Seien $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim \text{SMAGP}_p(m, S, G)$ und $S \neq 0_I$. Falls $\mathbb{E}(V^{-\frac{1}{p}})$ endlich ist, dann existiert die Erwartungsfunktion von X und stimmt mit seiner Lagefunktion m überein. Falls weiter $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}})$ endlich ist, dann ist X ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung und seine Kovarianzfunktion $\Gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $s, t \in I$ mithilfe der Skalierungsfunktion S gegeben durch*

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot S(t) & , \text{ falls } s = t \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Sei $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \sim \text{AGP}_p(0_I, S)$ stochastisch unabhängig von V . Dann ist X nach Satz 4.7 äquivalent zum stochastischen Prozess $Y = \{m(t) + V^{-\frac{1}{p}}Z_t\}_{t \in I}$ und weiter sind sowohl $V^{-\frac{1}{p}}$ und Z_t als auch $V^{-\frac{2}{p}}$ und $Z_s Z_t$ stochastisch unabhängig für alle $s, t \in I$. Da für alle $t \in I$ einerseits aufgrund der Unabhängigkeit von $V^{-\frac{1}{p}}$ und Z_t

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(m(t) + V^{-\frac{1}{p}}Z_t) = m(t) + \mathbb{E}(V^{-\frac{1}{p}})\mathbb{E}(Z_t)$$

und andererseits $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ nach Lemma 4.3 gilt, existiert der Erwartungswert von X_t , falls $\mathbb{E}(V^{-\frac{1}{p}}) < \infty$, und in diesem Fall gilt $\mathbb{E}(X_t) = m(t)$, d.h. die Erwartungsfunktion von X ist identisch mit der Lagefunktion m . Die Unabhängigkeit von $V^{-\frac{2}{p}}$ und $Z_t Z_t = Z_t^2$ liefert weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}\left(\left(m(t) + V^{-\frac{1}{p}}Z_t\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(m(t)\right)^2 + 2m(t)V^{-\frac{1}{p}}Z_t + V^{-\frac{2}{p}}Z_t^2\right) \\ &= \left(m(t)\right)^2 + 2m(t)\mathbb{E}\left(V^{-\frac{1}{p}}\right)\mathbb{E}(Z_t) + \mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right)\mathbb{E}(Z_t^2). \end{aligned}$$

Da Z nach Lemma 4.3 ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung ist, d.h. $\mathbb{E}(Z_t^2) < \infty$ für alle $t \in I$, ist auch X ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung, sofern $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}})$ endlich ist. In diesem Fall gilt für $s, t \in I$ mithilfe der stochastischen Unabhängigkeit von $V^{-\frac{2}{p}}$ und $Z_s Z_t$ und der in Lemma 4.3 bereitgestellten Kovarianzfunktion des zentrierten p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses Z mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zur Skalierungsfunktion S weiter

$$\begin{aligned} \Gamma(s, t) &= \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}\left(\left(X_s - \mathbb{E}(X_s)\right)\left(X_t - \mathbb{E}(X_t)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(m(s) + V^{-\frac{1}{p}}Z_s - m(s)\right)\left(m(t) + V^{-\frac{1}{p}}Z_t - m(t)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}Z_s Z_t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right) \mathbb{E}(Z_s Z_t) \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right) \sigma_{g_{PE}^{(p)}}^2 \cdot S(t) & , \text{ falls } s = t \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases},
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right) \sigma_{g_{PE}^{(p)}}^2 = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty v^{-\frac{2}{p}} dG(v) = \sigma_{g_{SMN;G}^{(p)}}^2$$

die behauptete Gestalt von Γ liefert. \square

Bemerkung 4.2. Der skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozess mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen mit der Parametermenge $I \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer, der Lagefunktion $m: I \rightarrow \mathbb{R}$ und der Skalierungsfunktion 0_I ist ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung und besitzt die Erwartungsfunktion m und die Kovarianzfunktion $0_{I \times I}$.

Beweis. Seien $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \sim AGP_p(m, 0_I)$ und $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(m, 0_I, G)$, wobei G , wie im vorangegangenen Abschnitt 4.3 erläutert, keinen Einfluss auf die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen von X hat und somit als Symbol zum Erhalt der Notation zu verstehen ist. Dann sind Z und X äquivalent und die Behauptung folgt aus Lemma 4.3 mit $S = 0_I$. \square

Über Lemma 4.3 hinaus werden nachfolgend zwei weitere Spezialfälle von Satz 4.8 betrachtet. Sei dazu zunächst $V \sim G_{\nu/p}^{St}$ für $\nu > 0$. Nach dem Beweis von Korollar 3.3 ist $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{m}{p}}\right)$ für $V \sim G_{\nu/p}^{St}$ und $m \in \{1, 2\}$ genau dann endlich, wenn $I_{n+m}\left(g_{SMN;G_{\nu/p}^{St}}^{(n,p)}\right)$ endlich ist, d.h. wenn das m -te Moment der stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit dem Dichtegenerator $g_{SMN;G_{\nu/p}^{St}}^{(n,p)}$ existiert. Aufgrund der in Abschnitt 3.3.2 gezeigten Identität $g_{SMN;G_{\nu/p}^{St}}^{(n,p)} = g_{St;\nu}^{(n,p)}$ folgt aus den in Abschnitt 2.1 bereitgestellten Eigenschaften der $l_{n,p}$ -symmetrischen Student- t -Verteilung mit Parameter $\nu > 0$ zunächst $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{1}{p}}\right) < \infty$, falls $\nu > 1$, und weiter $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right) < \infty$, falls $\nu > 2$. Somit existiert einerseits die Erwartungsfunktion des p -verallgemeinerten Student- t -Prozesses $AStP_p(m, S, \nu) = SMAGP_p(m, S, G_{\nu/p}^{St})$ für alle Parameter $\nu > 1$ und stimmt mit m überein und andererseits dessen Kovarianzfunktion Γ für alle $\nu > 2$ und in diesem Fall gilt

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \sigma_{g_{St;\nu}^{(p)}}^2 \cdot S(t) & , \text{ falls } s = t \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \sigma_{g_{St;\nu}^{(p)}}^2 = \nu^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)},$$

siehe ebenfalls Abschnitt 2.1. Sei nun $V \sim G_{\nu}^{Sl}$ für $\nu > 0$. Dann liefert der Beweis von Korollar 3.14 für $m \in \{1, 2\}$ zunächst $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{m}{p}}\right) < \infty$, falls $\nu > \frac{m}{p}$. Folglich existiert zum einen die Erwartungsfunktion des p -verallgemeinerten Slash-Prozesses $ASlP_p(m, S, \nu) = SMAGP_p(m, S, G_{\nu}^{Sl})$ für alle Parameter $\nu > \frac{1}{p}$ und stimmt mit m überein und zum

anderen seine Kovarianzfunktion Γ für alle $\nu > \frac{2}{p}$ und in diesem Fall gilt

$$\Gamma(s, t) = \begin{cases} \sigma_{g_{St;\nu}}^2 \cdot S(t) & , \text{ falls } s = t \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \sigma_{g_{St;\nu}}^2 = p^{\frac{2}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{p\nu}{p\nu - 2}.$$

Nachfolgend werden die am Ende von Abschnitt 4.1 eingeführten Begriffe der starken bzw. schwachen Stationarität und des weißen Rauschens in Bezug auf skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen untersucht, wobei Satz 4.9 zunächst den Fall der starken Stationarität dieser Prozesse betrachtet.

Satz 4.9. *Sei $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim \text{SMAGP}_p(m, S, G)$. Dann ist X genau dann stark stationär, wenn die Funktionen m und S über I konstant sind.*

Beweis. Jeweils über I betrachtet seien zunächst die Lagefunktion m konstant gleich μ , $\mu \in \mathbb{R}$ und die Skalierungsfunktion S konstant gleich ς , $\varsigma \geq 0$. Weiter seien einerseits $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in I$ und andererseits $h \in \mathbb{R}$ derart, dass $t_1 + h, \dots, t_n + h \in I$. Dann gilt mithilfe von Definition 4.15 und der Notation $1_n = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left((X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T\right) &= \text{SMN}_{n,p}\left((m(t_1), \dots, m(t_n))^T, \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n)), G\right) \\ &= \text{SMN}_{n,p}(\mu 1_n, \varsigma I_n, G) \\ &= \text{SMN}_{n,p}\left((m(t_1 + h), \dots, m(t_n + h))^T, \right. \\ &\quad \left. \text{diag}(S(t_1 + h), \dots, S(t_n + h)), G\right) \\ &= \mathfrak{L}\left((X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})^T\right), \end{aligned}$$

d.h. X ist stark stationär, falls m und S konstante Funktionen sind. Sei nun umgekehrt X stark stationär. Dann liefern die für die Eigenschaft der starken Stationarität in Definition 4.6 formulierte Bedingung speziell für $n = 1$ und Definition 4.15 für $t_1 \in I$ beliebig, aber fest, dass die Verteilungen $\text{SMN}_{1,p}(m(t_1), S(t_1), G)$ von X_{t_1} und $\text{SMN}_{1,p}(m(t_1 + h), S(t_1 + h), G)$ von X_{t_1+h} für alle $h \in H_{t_1}$ übereinstimmen, wobei $H_{t_1} = \{h \in \mathbb{R} : t_1 + h \in I\}$. Falls $S(t_1) = 0$, ist die Verteilung von X_{t_1} die univariate Dirac-Verteilung im Punkt $m(t_1)$, d.h. eine Rang-0-stetige Skalenmischung der univariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Lageparameter $m(t_1)$ und Skalierungsparameter 0. Für alle $h \in H_{t_1}$ ist somit auch $\mathfrak{L}(X_{t_1+h})$ die univariate Dirac-Verteilung im Punkt $m(t_1)$ und es gilt $S(t_1 + h) = 0 = S(t_1)$ für alle $h \in H_{t_1}$, d.h. $S = 0_I$. Da $\mathfrak{L}(X_{t_1+h}) = \text{SMN}_{1,p}(m(t_1+h), 0, G)$ genauer die Dirac-Verteilung im Punkt $m(t_1+h)$ ist, gilt folglich auch $m(t_1 + h) = m(t_1)$ für alle $h \in H_{t_1}$, d.h. neben S ist auch m konstant über I . Sei nun $S(t_1) > 0$. Dann ist $\mathfrak{L}(X_{t_1})$ nach Korollar 3.18 eine reguläre Verteilung

mit der Lebesgue-Dichte

$$f_{X_{t_1}}(x) = \frac{C_p}{\sqrt{S(t_1)}} g_{SMN;G}^{(1,p)} \left(\left| \frac{x - m(t_1)}{\sqrt{S(t_1)}} \right| \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für alle $h \in H_{t_1}$ ist somit auch $\mathfrak{L}(X_{t_1+h})$ regulär, d.h. $S(t_1 + h) > 0$, und besitzt die Lebesgue-Dichte

$$f_{X_{t_1+h}}(x) = \frac{C_p}{\sqrt{S(t_1 + h)}} g_{SMN;G}^{(1,p)} \left(\left| \frac{x - m(t_1 + h)}{\sqrt{S(t_1 + h)}} \right| \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

und da $\mathfrak{L}(X_{t_1})$ und $\mathfrak{L}(X_{t_1+h})$ identisch sind, stimmen auch die zugehörigen Lebesgue-Dichten $f_{X_{t_1}}$ und $f_{X_{t_1+h}}$ überein. Da $f_{X_{t_1}}$ und $f_{X_{t_1+h}}$, $h \in H_{t_1}$, symmetrisch zu den zur Ordinatenachse parallelen Geraden $x = m(t_1)$ bzw. $x = m(t_1 + h)$ sind, gilt somit $m(t_1) = m(t_1 + h)$ für alle $h \in H_{t_1}$, d.h. m ist konstant über I . Da weiter $f_{X_{t_1}}(m(t_1)) = \frac{C_p}{\sqrt{S(t_1)}}$ und $f_{X_{t_1+h}}(m(t_1 + h)) = \frac{C_p}{\sqrt{S(t_1+h)}}$ für alle $h \in H_{t_1}$, folgt aus der Übereinstimmung der Dichten zunächst $S(t_1) = S(t_1 + h)$ für alle $h \in H_{t_1}$ und somit die Konstanz der Funktion S über der Parametermenge I . \square

Weiter betrachtet Satz 4.10 neben der starken Stationarität für reelle stochastische Prozesse zweiter Ordnung auch die schwache Stationarität und den Begriff des weißen Rauschens und zeigt insbesondere deren Äquivalenz für skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen im Falle einer nichtverschwindenden Skalierungsfunktion S , wobei der Fall $S = 0_I$ in Bemerkung 4.3 gesondert untersucht wird.

Satz 4.10. *Seien $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(m, S, G)$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\varsigma > 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- 1) *Es gilt $m(t) = \mu$ und $S(t) = \varsigma$ für alle $t \in I$ und $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}})$ ist endlich.*
- 2) *X ist stark stationär, $\mathbb{E}(V^{-\frac{2}{p}})$ ist endlich, die Erwartungsfunktion von X ist konstant gleich μ und die Kovarianzfunktion X ist Γ gegeben durch $\Gamma(t, t) = \sigma_{SMN;G}^2 \varsigma$ für alle $t \in I$ und $\Gamma(s, t) = 0$ für alle $s, t \in I$ mit $s \neq t$.*
- 3) *X ist schwach stationär mit der konstant den Wert μ annehmenden Erwartungsfunktion und mit einer Kovarianzfunktion Γ mit $\Gamma(s, t) = K(s - t)$ und K gegeben durch $K(0) = \sigma_{SMN;G}^2 \varsigma$ und $K(h) = 0$ für alle $h \in \{s - t : s, t \in I\} \setminus \{0\}$.*
- 4) *X ist weißes Rauschen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma_{SMN;G}^2 \varsigma$.*

Beweis. Gelte zunächst 1). Dann folgt aufgrund der Konstanz von m und S mithilfe von Satz 4.9 die starke Stationarität von X . Weiter folgt aus der Existenz des Er-

wartungswertes von $V^{-\frac{2}{p}}$ mithilfe von Satz 4.8, dass X ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung mit der Erwartungsfunktion m und der Kovarianzfunktion Γ mit $\Gamma(t, t) = \sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot S(t)$ für alle $t \in I$ und $\Gamma(s, t) = 0$ für alle $s, t \in I$ mit $s \neq t$ ist. Da zudem $m(t) = \mu$ und $S(t) = \varsigma$ für alle $t \in I$, ist die Erwartungsfunktion von X konstant gleich μ und die Kovarianzfunktion erfüllt $\Gamma(t, t) = \sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot \varsigma$ für alle $t \in I$ und $\Gamma(s, t) = 0$ für alle $s, t \in I$ mit $s \neq t$, d.h. 1) impliziert 2).

Weiter ist jeder stark stationäre stochastische Prozess zweiter Ordnung schwach stationär und die in 2) angegebene Kovarianzfunktion Γ von X ist an der Stelle $(s, t) \in I \times I$ als Funktion in Abhängigkeit von der Differenz $s - t$ darstellbar, da mithilfe der in 3) angegebenen Funktion K einerseits $\Gamma(t, t) = \sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot \varsigma = K(0) = K(t - t)$ für alle $t \in I$ und andererseits $\Gamma(s, t) = 0 = K(s - t)$ für alle $s, t \in I$ mit $s \neq t$ gilt, wodurch die Implikation von 2) nach 3) gezeigt ist.

Darüber hinaus folgt aus 3) einerseits $\text{Cov}(X_s, X_t) = \Gamma(s, t) = 0$ für alle $s, t \in I$ mit $s \neq t$, d.h. die Zufallsvariablen $X_t, t \in I$, sind unkorreliert, und andererseits $\mathbb{E}(X_t) = m(t) = \mu$ und $\text{Var}(X_t) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \Gamma(t, t) = \sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot \varsigma$ für alle $t \in I$ und somit 4).

Schließlich gilt die Implikation von 4) nach 1), da X mithilfe von Satz 4.8 ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung ist, falls $\mathbb{E}\left(V^{-\frac{2}{p}}\right)$ endlich ist, und da mithilfe der Definition des weißen Rauschens sowohl $m(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mu$ als auch $\sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot S(t) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t) = \sigma_{g_{SMN;G}}^2 \cdot \varsigma$, d.h. $S(t) = \varsigma$, für alle $t \in I$ direkt aus 4) folgt. \square

Bemerkung 4.3. Nach Satz 4.9 ist $X, X = \{X_t\}_{t \in I} \sim \text{SMAGP}_p(m, 0_I, G)$, genau dann stark stationär, wenn m über I konstant gleich $\mu, \mu \in \mathbb{R}$, ist, wobei in diesem Fall alle Zufallsvariablen $X_t, t \in I$, P -fast sicher den Wert μ annehmen. Weiter ist X in diesem Fall nach Bemerkung 4.2 ein reeller stochastischer Prozess zweiter Ordnung mit der konstant den Wert μ annehmenden Erwartungsfunktion und der Kovarianzfunktion $0_{I \times I}$, wodurch die Zufallsvariablen $X_t, t \in I$, jeweils die Varianz 0 besitzen und nicht nur unkorreliert, sondern sogar unabhängig sind. Folglich ist X im Falle von $m(t) = \mu$ für alle $t \in I$ weißes Rauschen mit Erwartungswert μ und Varianz 0 und somit nach dem letzten Absatz in Abschnitt 4.1 auch schwach stationär mit der obigen Erwartungsfunktion und der Wahl der Funktion K als konstante Nullfunktion. Diese spezifische schwache Stationarität impliziert wiederum das Vorliegen eines reellen stochastischen Prozesses zweiter Ordnung mit der konstant den Wert μ annehmenden Erwartungsfunktion und der Kovarianzfunktion $0_{I \times I}$. Somit sind insbesondere die Termini starke und schwache Stationarität sowie weißes Rauschen im Falle eines $\text{SMAGP}_p(m, 0_I, G)$ äquivalent.

Mithilfe der zuvor betrachteten Spezialfälle von Satz 4.8 sind insbesondere $\text{AGP}_p(m, S)$, $\text{AStP}_p(m, S, \nu)$ für $\nu > 2$ sowie $\text{ASIP}_p(m, S, \nu)$ für $\nu > \frac{2}{p}$ jeweils mit der Lagefunktion m und der Skalierungsfunktionen S , die konstant die Werte $\mu, \mu \in \mathbb{R}$, bzw. $\varsigma, \varsigma > 0$, annehmen, weißes Rauschen mit Erwartungswert μ und mit den Varianzen $\sigma_{g_{PE}}^2 \cdot \varsigma, \sigma_{g_{St;\nu}}^2 \cdot \varsigma$ bzw. $\sigma_{g_{St;\nu}}^2 \cdot \varsigma$.

Zum Abschluss des ersten Teils dieses Abschnittes zeigt Satz 4.11 die Abgeschlossenheit der Klasse aller skalengemischten p -verallgemeinerten Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen unter linearen Transformationen.

Satz 4.11. *Seien $\{X_t\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(m, S, G)$, $b: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\{\gamma(t)X_t + b(t)\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(\gamma m + b, \gamma^2 S, G),$$

wobei die Funktionen $[\gamma m + b]: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $[\gamma^2 S]: I \rightarrow [0, \infty)$ für $t \in I$ durch $[\gamma m + b](t) = \gamma(t)m(t) + b(t)$ bzw. $[\gamma^2 S](t) = (\gamma(t))^2 S(t)$ gegeben sind.

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $J = \{t_1, \dots, t_n\}$ eine beliebige Teilmenge von I . Weiter seien $Y_t = \gamma(t)X_t + b(t)$, $t \in I$ und $Y = \{Y_t\}_{t \in I} = \{\gamma(t)X_t + b(t)\}_{t \in I}$. Dann gilt für $Y_J = (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})^\top$ und $X_J = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^\top$

$$Y_J = \begin{pmatrix} Y_{t_1} \\ \vdots \\ Y_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t_1)X_{t_1} + b(t_1) \\ \vdots \\ \gamma(t_n)X_{t_n} + b(t_n) \end{pmatrix} = \Gamma X_J + b,$$

wobei $b = (b(t_1), \dots, b(t_n))^\top$ und $\Gamma = \text{diag}(\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n))$. Da nach Definition 4.15

$$\mathfrak{L}(X_J) = EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)})$$

mit $\mu = (m(t_1), \dots, m(t_n))^\top$ und $\Sigma = \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n))$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$, folgt mithilfe von Korollar 2.9 und der Eigenschaft (4.4) der Mischungsverteilung G

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(Y_J) &= \mathfrak{L}(\Gamma X_J + b) = EC_{n,p}(\Gamma \mu + b, \Gamma \Sigma \Gamma, (g_{SMN;G}^{(k,p)})_{(k)}^{(k_\Gamma, p)}) \\ &= EC_{n,p}(\Gamma \mu + b, \Gamma \Sigma \Gamma, g_{SMN;G}^{(k_\Gamma, p)}), \end{aligned}$$

wobei $\Gamma \Sigma \Gamma = \text{diag}(\gamma(t_1)^2 S(t_1), \dots, \gamma(t_n)^2 S(t_n))$ und $k_\Gamma = \text{rg}(\Gamma \Sigma \Gamma) \geq 0$. Damit ist $EC_{n,p}(\Gamma \mu + b, \Gamma \Sigma \Gamma, g_{SMN;G}^{(k_\Gamma, p)})$ die zu Y_J gehörige endlich-dimensionale Verteilung des stochastischen Prozesses Y und aufgrund von $\Gamma \mu + b = ([\gamma m + b](t_1), \dots, [\gamma m + b](t_n))^\top$ und $\Gamma \Sigma \Gamma = \text{diag}([\gamma^2 S](t_1), \dots, [\gamma^2 S](t_n))$ gilt schließlich

$$Y \sim SMAGP_p(\gamma m + b, \gamma^2 S, G)$$

□

Der zweite Teil dieses Abschnittes betrachtet nun die Simulation skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen. Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Methode zur Simulation einer zufälligen Funktion $X = \{X_t\}_{t \in I}$ besteht grundlegend darin, die Parametermenge I für

ein $n \in \mathbb{N}$ zu einer Menge $J = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{H}(I)$ zu diskretisieren und anschließend den stochastischen Prozess X über der speziellen diskreten Parametermenge J zu betrachten. Infolge dieser Diskretisierung wird der mit der zufälligen Funktion $\{X_t\}_{t \in J}$ übereinstimmende endlich-dimensionale Zufallsvektor $X_J = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^\top$, vergleiche Abschnitt 4.1, simuliert und die auf diesem Wege erhaltenen Realisierungen des stochastischen Prozesses X an den Stellen t_1, \dots, t_n werden schließlich linear interpoliert. Bemerkte sei, dass stochastische Prozesse alternativ mithilfe von nach endlich vielen Gliedern abgebrochenen Reihenentwicklungen bzw. -darstellungen simuliert werden können, siehe beispielsweise die Simulation des Standard-Wiener-Prozesses unter Verwendung der Karhunen-Loève-Entwicklung in Lindgren (2013, Beispiel 5.1) bzw. seiner Lévy-Ciesielski-Darstellung in Schilling und Partzsch (2014, Algorithmus 22.17).

Sei nun $X = \{X_t\}_{t \in I} \sim SMAGP_p(m, S, G)$. Aufbauend auf den obigen allgemeinen Bemerkungen entspricht die Simulation von X der Simulation des Zufallsvektors X_J , der gemäß Definition 4.15 der Rang- k -stetigen achsenparallel konturierten Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern $\mu = (m(t_1), \dots, m(t_n))^\top$ und $\Sigma = \text{diag}(S(t_1), \dots, S(t_n))$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ und Mischungsverteilung G folgt, d.h.

$$X_J \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN,G}^{(k,p)}) = SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G).$$

Somit können zur Simulation des stochastischen Prozesses X die in Abschnitt 3.5 erläuterten Algorithmen 3.1, 3.2 und 3.3 zur Simulation des endlich-dimensionalen Zufallsvektors X_J für eine Diskretisierung J von I herangezogen werden.

Im Folgenden seien $I = [0, 1]$ eine spezifische Parametermenge und J deren äquidistante Diskretisierung mit der Schrittweite $\frac{1}{200}$, d.h. $J = \{t_i = \frac{i-1}{200} : i = 1, \dots, 201\}$. Basierend auf diesen Festlegungen zeigt Abbildung C.13 je eine mithilfe der obigen Methode simulierten Trajektorie von SGP_p , $SStP_p(3)$ bzw. $SSIP_p(5)$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, wobei im Fall von $SGP_{\frac{1}{2}}$, $SSIP_{\frac{1}{2}}(5)$, $SStP_1(3)$ und $SSIP_3(5)$ in Abbildung C.14 je drei weitere Simulationen dargestellt und die unterschiedlichen Skalierungen der Ordinatenachsen zu beachten sind. Darüber hinaus sind Simulationen von $SStP_p(2)$, $SSIP_p(1)$ sowie $SSIP_p(3)$ erneut für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ in Abbildung C.15 visualisiert. Bei der spaltenweisen Betrachtung der Abbildungen C.13 und C.15, d.h. im Falle eines festen p -verallgemeinerten stochastischen Prozesses und eines variierenden Parameters p , wird deutlich, dass sich die Skalierungen der Ordinatenachsen insbesondere für kleiner werdende p unterscheiden, wobei die zeilenweise Betrachtung von Abbildung C.14 beispielhaft ebenfalls verschiedene Skalierungen für festes p zeigt. Somit kann im Falle des Vorliegens mehrerer Realisierungen eines p -verallgemeinerten Prozesses bekannten Typs, wie beispielsweise SGP_p oder $SSIP_p(3)$, für festes, aber unbekanntes $p > 0$ aus der Größe der Skalierung der Ordinatenachse eine Tendenz für die Größe von p geschlussfolgert werden. Zudem visualisiert Abbildung C.15 die Effekte der Variation des Parameters $\nu > 0$ von $SStP_p(\nu)$

bzw. $SSIP_p(\nu)$ und in Analogie zu den vorherigen Betrachtungen kann im Falle des Vorliegens mehrerer Realisierungen von $SStP_p(\nu)$ oder $SSIP_p(\nu)$ für festes $p > 0$ und einen festen, aber unbekanntem Parameter $\nu > 0$ anhand der Skalierung der Ordinatenachse eine Tendenz für die Größe von ν geäußert werden. Des Weiteren sei an dieser Stelle mit dem Verweis auf den ersten Teil dieses Abschnittes explizit erwähnt, dass die in den Abbildungen C.13 und C.14 dargestellten stochastischen Prozesse reelle stochastische Prozesse von zweiter Ordnung sind, deren Erwartungs- und Kovarianzfunktionen im Anschluss an Satz 4.8 thematisiert sind, wohingegen dies in Abbildung C.15 im Allgemeinen nicht mehr gewährleistet ist. Beispielsweise besitzt $SStP_p(2)$ die Erwartungsfunktion $0_{[0,1]}$, aber seine Kovarianzfunktion existiert nicht, und $SSIP_p(1)$ besitzt für $p \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ weder Erwartungs- noch Kovarianzfunktion, für $p = 2$ die Erwartungsfunktion $0_{[0,1]}$, jedoch keine Kovarianzfunktion und für $p = 3$ sowohl die Erwartungsfunktion $0_{[0,1]}$ als auch die Kovarianzfunktion Γ mit $\Gamma(t, t) = \sigma_{g_{St;1}}^2 = 3^{5/3} \left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{-1}$ für $t \in [0, 1]$ und $\Gamma(s, t) = 0$ für $s, t \in [0, 1]$ mit $s \neq t$. In Abbildung C.16 ist am Beispiel des SGP_1 weiter das Verhalten der betrachteten stochastischen Prozesse bei Vergrößerung bzw. Verfeinerung der äquidistanten Diskretisierung von $[0, 1]$ durch die Betrachtung der Schrittweiten $\frac{1}{40}$ bzw. $\frac{1}{1000}$ anstelle von $\frac{1}{200}$ gezeigt. Dies impliziert, dass die Simulationen ebenfalls sowohl für Verkleinerung als auch für Vergrößerungen der spezifischen Parametermenge $I =]0, 1[$ durchgeführt werden können. Schließlich sind in Abbildung C.18 Simulationen von $AGP_3(m_i, 1_{[0,1]})$ bzw. $AGP_3(0_{[0,1]}, S_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, für die in Abbildung C.17 dargestellten Lage- bzw. Skalierungsfunktionen m_1, m_2 und m_3 bzw. S_1, S_2 und S_3 illustriert, die für $t \in [0, 1]$ durch

$$m_1(t) = -4t + 3, \quad m_2(t) = \ln\left(10t + \frac{1}{2}\right) - 1 \quad \text{und} \quad m_3(t) = e^{2t}$$

sowie

$$S_1(t) = \frac{1}{2}, \quad S_2(t) = e^{-3t} \quad \text{und} \quad S_3(t) = \left(3 \bmod\left(t, \frac{7}{20}\right)\right)^4$$

gegeben sind, wobei $\bmod\left(t, \frac{7}{20}\right) = t \bmod \frac{7}{20}$ den Rest von t modulo $\frac{7}{20}$ bezeichnet.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Stochastische Prozesse bilden in der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik ein immanent wichtiges Hilfsmittel, um zeitstetige zufällige Vorgänge in zahlreichen Anwendungsfeldern zu modellieren. In diesem Zusammenhang bildet u.a. der Existenzsatz von Kolmogorov eine Kernaussage in der Theorie stochastischer Prozesse, die den Nachweis der Existenz bzw. die Konstruktion eines stochastischen Prozesses liefert, dessen Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen mit einer vorgegebenen, über einem polnischen Raum projektiven Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen übereinstimmt. Dabei kann die Eigenschaft der Projektivität einer Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mithilfe der Kolmogorovschen Konsistenzbedingungen gezeigt werden, die neben einer technischen Bedingung, siehe (4.2), insbesondere fordern, dass alle Randverteilungen eines Elementes der Familie wieder in der Familie enthalten sind, siehe (4.1). In der Praxis ist die Konstruktion eines stochastischen Prozesses mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov aufgrund der damit verbundenen Notwendigkeit des Studiums multivariater Verteilungen jedoch in vielen Fällen nicht umsetzbar. Eine bedeutende Klasse stochastischer Prozesse, die derart konstruierbar sind, ist die Klasse sphärisch-invarianter bzw. elliptischer stochastischer Prozesse, deren Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eine projektive Familie elliptisch konturierter Verteilungen ist. Darüber hinaus ist in der Literatur gezeigt, dass jedes Element der Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines solchen stochastischen Prozesses als Skalenmischung von Normalverteilungen darstellbar ist, wobei alle zugehörigen Mischungsverteilungen übereinstimmen, und dass diese Klasse stochastischer Prozesse somit insbesondere die Klasse der Gauß-Prozesse beinhaltet. Diese und zahlreiche andere Details zum Existenzsatz von Kolmogorov sowie zur Literaturhistorie sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse werden ausführlich in den Abschnitten 4.1 und 4.2 thematisiert.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Untersuchung der Existenzen von p -Verallgemeinerungen sphärisch-invarianter stochastischer Prozesse mit dem Ergebnis, dass die Existenzen reeller stochastischer Prozesse zunächst mit stetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen und allgemeiner mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen in den Sätzen 4.5 und 4.6 mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov nachgewiesen sind und dass die zuvor genannten stochastischen Prozesse in den Definitionen 4.10 und 4.13 eingeführt werden.

Dieses und einige darauf aufbauende Resultate vorbereitend werden in Kapitel 2 zunächst stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen und anschließend $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen als Lage-Skalierungsverallgemeinerungen stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen betrachtet und ihre Eigenschaften wie stochastische Darstellungen, die Existenz von Momenten oder die Regularität bzw. die Singularität dieser Verteilungen mit Verweis auf geeignete Literatur angegeben und zum Teil durch neue Aussagen ergänzt. Insbesondere wird dabei gezeigt, dass die Randverteilungen einer achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch

konturierten Verteilung selbst achsenparallel $l_{m,p}$ -elliptisch konturierte Verteilungen für $m \leq n$ sind, wobei dies für den Nachweis der Projektivität einer Familie achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen von zentraler Bedeutung ist. Unter der Voraussetzung des Vorliegens einer konsistenten Folge von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen, d.h., dass die Randdichtegeneratoren eines Elementes der Folge ebenfalls Elemente der Folge sind, ist die Projektivität der zu dieser Folge von Dichtegeneratoren gehörigen Familie stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen und allgemeiner achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen über den reellen Zahlen und damit infolge des Existenzsatzes von Kolmogorov die Existenz der obigen reellen stochastischen Prozesse in den Sätzen 4.5 und 4.6 gezeigt.

Eine Spezialisierung der obigen stochastischen Prozesse vorbereitend werden in Kapitel 3 Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung zunächst ohne und anschließend mit einem Lageparameter und einem Skalierungsparameter studiert. Da diese Verteilungen Spezialfälle stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer bzw. $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen sind, können viele ihrer Eigenschaften wie stochastische Darstellungen, Existenzen von Momenten oder Randverteilungen grundlegend aus Kapitel 2 geschlussfolgert werden, wobei einzelne Zusatzüberlegungen zum Teil zu Vereinfachungen der zugehörigen Voraussetzungen oder Resultate führen. Zudem wird in Analogie zum euklidischen Fall $p = 2$, dessen Literaturhistorie ausführlich in Abschnitt 3.1 dargestellt ist, mithilfe des Begriffes der vollständigen Monotonie eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, unter der eine $l_{n,p}$ -symmetrische bzw. eine $l_{n,p}$ -elliptisch konturierte Verteilung als Skalenmischung der p -verallgemeinerten Normalverteilung darstellbar ist, siehe Sätze 3.1 und 3.2, wobei aus den Beweisen dieser Sätze ebenfalls Gleichungen zur Bestimmung der zugehörigen Mischungsverteilungen abgeleitet werden können. Basierend auf diesen Resultaten werden Beispiele von Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung wie die n -dimensionale p -verallgemeinerte Normalverteilung selbst, $l_{n,p}$ -symmetrische Pearson-Typ VII-Verteilung oder die $l_{n,p}$ -symmetrische Slash-Verteilung sowie deren Mischungsverteilungen und Gegenbeispiele wie die $l_{n,p}$ -symmetrische Pearson-Typ II-Verteilung bestimmt. Schließlich werden in Abschnitt 3.5 einige Simulationen spezifischer Beispiele von Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung anhand dreier Algorithmen dargestellt.

Weiter ist zu Beginn von Abschnitt 4.3 gezeigt, dass die Folgen von Dichtegeneratoren von Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit ein und derselben, von n nicht abhängenden Mischungsverteilung und damit insbesondere die Folge der Dichtegeneratoren multivariater p -verallgemeinerter Normalverteilungen selbst konsistent sind. Basierend auf diesen Folgen von Dichtegeneratoren werden anschließend sowohl p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse als auch skalengemischte p -verallgemeinerte Gauß-Prozesse jeweils mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen als Spezialfälle reeller stochastischer Prozesse mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen eingeführt und ihre Eigen-

schaften wie die Existenzen ihrer Erwartungs- und Kovarianzfunktionen, ihre Stationarität sowie ihr Verhalten bei linearer Transformation studiert, siehe Sätze 4.8, 4.10 und 4.11. Insbesondere wird in diesem Zusammenhang auch gezeigt, dass die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines skalengemischten p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen Skalenmischungen der Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines spezifischen p -verallgemeinerten Gauß-Prozesses mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen sind, siehe Satz 4.7. Dieses Studium abschließend werden Trajektorien einiger spezifischer Beispiele dieser stochastischen Prozesse unter Verwendung der Algorithmen zur Simulation von Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung simuliert und visuell verglichen.

Schließlich können die Betrachtungen der vorliegenden Arbeit in zahlreiche Richtungen weitergeführt bzw. ergänzt werden. Zum einen kann dazu die Konsistenz von Folgen von Dichtegeneratoren stetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen weiter untersucht werden, um insbesondere andere als die in Abschnitt 4.3 angegebenen Beispiele und somit weitere Spezialfälle reeller stochastischer Prozesse mit achsenparallel $l_{n,p}$ -elliptisch konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen zu finden. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass für den euklidischen Fall $p = 2$ bereits implizit in Yao (1973) und explizit in Kano (1994) gezeigt ist, dass eine Folge von Dichtegeneratoren stetiger sphärischer Verteilungen genau dann konsistent ist, wenn sie eine Folge von Dichtegeneratoren von Skalenmischungen von Normalverteilungen mit ein und derselben Mischungsverteilung ist, wodurch für den allgemeinen Fall $p > 0$ anstelle der Suche weiterer Beispiele auch die p -Verallgemeinerung dieser Äquivalenz untersucht werden kann.

Zum anderen kann das Studium der Randverteilungen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen über den in dieser Arbeit betrachteten achsenparallel konturierten Fall hinaus mit dem Ziel erweitert werden, die Existenzen von p -Verallgemeinerungen aller sphärisch-invarianten stochastischen Prozesse mithilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov nachzuweisen. Dabei folgt aus einer Erweiterung der Aussage von Lemma 2.10 auf eine im Vergleich zur in Satz 4.6 betrachteten allgemeineren Familie $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen zunächst die Projektivität dieser Familie über \mathbb{R} , da die Kolmogorovschen Konsistenzbedingungen auf der Basis eines erweiterten Lemmas 2.10 in Analogie zum Beweis von Satz 4.6 gezeigt werden können, und demzufolge die Existenz eines reellen stochastischen Prozesses mit einer mit dieser Familie übereinstimmenden Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen.

Als abschließender Aspekt dieses Ausblicks sei das weiterführende Studium der Eigenschaften skalengemischter p -verallgemeinerter Gauß-Prozesse mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen Verteilungen wie beispielsweise die Untersuchung von Ergodizität erwähnt.

Literatur

- Ala-Luhtala, J. & Piché, R. (2016). Gaussian scale mixture models for robust linear multivariate regression with missing data. *Commun. Stat., Simulation Comput.*, 45 (3), 791–813. doi: 10.1080/03610918.2013.875565
- Anderssen, R. S., Husain, S. A. & Loy, R. J. (2004). The Kohlrausch function: properties and applications. *ANZIAM J.*, 45C, c800–c816.
- Andrews, D. F. & Mallows, C. L. (1974). Scale mixtures of normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36 (1), 99–102.
- Arellano-Valle, R. B. & Azzalini, A. (2006). On the unification of families of skew-normal distributions. *Scand. J. Stat.*, 33 (3), 561–574. doi: 10.1111/j.1467-9469.2006.00503.x
- Arellano-Valle, R. B. & del Pino, G. (2004). From symmetric to asymmetric distributions: a unified approach. In M. G. Genton (Hrsg.), *Skew-elliptical distributions and their applications: a journey beyond normality* (S. 113–128). Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Arellano-Valle, R. B. & Richter, W.-D. (2012). On skewed continuous $l_{n,p}$ -symmetric distributions. *Chil. J. Stat.*, 3 (2), 193–212.
- Arslan, O. (2005). A new class of multivariate distributions: scale mixture of Kotz-type distributions. *Stat. Probab. Lett.*, 75 (1), 18–28. doi: 10.1016/j.spl.2005.05.009
- Arslan, O. (2009). Variance-mean mixture of Kotz-type distributions. *Commun. Stat., Theory Methods*, 38 (2), 272–284. doi: 10.1080/03610920802192497
- Arslan, O. (2015). Variance-mean mixture of the multivariate skew normal distribution. *Stat. Pap.*, 56 (2), 353–378. doi: 10.1007/s00362-014-0585-7
- Batún-Cutz, J., González-Farías, G. & Richter, W.-D. (2013). Maximum distributions for $l_{2,p}$ -symmetric vectors are skewed $l_{1,p}$ -symmetric distributions. *Stat. Probab. Lett.*, 83 (10), 2260–2268. doi: 10.1016/j.spl.2013.06.022
- Bauer, H. (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie* (5. Aufl.). Berlin: Walter de Gruyter. doi: 10.1515/9783110234527
- Bernstein, S. (1914). Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d’une variable réelle. *Mathematische Annalen*, 75 (4), 449–468. doi: 10.1007/BF01563654
- Bernstein, S. (1929). Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Math.*, 52, 1–66. doi: 10.1007/BF02592679
- Bhattacharya, R. N. & Waymire, E. C. (2007). *A basic course in probability theory*. New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-71939-9
- Biglieri, E., Yao, K. & Yang, C.-A. (2015). Fading models from spherically invariant processes. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 14 (10), 5526–5538. doi: 10.1109/TWC.2015.2439283
- Blake, I. F. & Thomas, J. B. (1968). On a class of processes arising in linear estimation theory. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 14, 12–16. doi: 10.1109/TIT.1968.1054100

- Borovkov, A. A. (2013). *Probability theory. Edited by K. A. Borovkov. Transl. from the Russian by O. Borovkova and P. S. Ruzankin.* London: Springer. doi: 10.1007/978-1-4471-5201-9
- Brehm, H. & Stammer, W. (1987). Description and generation of spherically invariant speech-model signals. *Signal Processing*, 12 (2), 119–141. doi: 10.1016/0165-1684(87)90001-6
- Cambanis, S., Huang, S. & Simons, G. (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *J. Multivariate Anal.*, 11, 368–385. doi: 10.1016/0047-259X(81)90082-8
- Capasso, V. & Bakstein, D. (2012). *An introduction to continuous-time stochastic processes. Theory, models, and applications to finance, biology, and medicine. 2nd revised and enhanced ed (2. Aufl.).* New York, NY: Birkhäuser. doi: 10.1007/978-0-8176-8346-7
- Choy, B. S. & Chan, C. M. (2003). Scale mixtures distributions in insurance applications. *Astin Bull.*, 33 (1), 93–104. doi: 10.2143/AST.33.1.1041
- Chu, K.-C. (1973). Estimation and decision for linear systems with elliptical random processes. *IEEE Trans. Autom. Control*, 18, 499–505. doi: 10.1109/TAC.1973.1100374
- Conte, E. & Longo, M. (1987). Characterisation of radar clutter as a spherically invariant random process. *IEE Proc.*, 134 (2), 191–197. doi: 10.1049/ip-f-1:19870035
- Conte, E., Longo, M. & Lops, M. (1991). Modelling and simulation of non-Rayleigh radar clutter. *IEE Proc.*, 138 (2), 121–130. doi: 10.1049/ip-f-2:1991.0018
- Dang, U. J., Browne, R. P. & McNicholas, P. D. (2015). Mixtures of multivariate power exponential distributions. *Biometrics*, 71 (4), 1081–1089. doi: 10.1111/biom.12351
- Dietrich, T., Kalke, S. & Richter, W.-D. (2013). Stochastic representations and a geometric parametrization of the two-dimensional Gaussian law. *Chil. J. Stat.*, 4 (2), 27–59.
- Du, J. & Ma, C. (2011). Spherically invariant vector random fields in space and time. *IEEE Trans. Signal Process.*, 59 (12), 5921–5929. doi: 10.1109/TSP.2011.2166391
- Eltoft, T., Kim, T. & Lee, T.-W. (2006). Multivariate scale mixture of Gaussians modeling. In J. Rosca, D. Erdogmus, J. C. Príncipe & S. Haykin (Hrsg.), *Independent component analysis and blind signal separation. 6th international conference, ICA 2006, Charleston, SC, USA, March 5–8, 2006. Proceedings* (S. 799–806). Berlin: Springer. doi: 10.1007/11679363
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F. G. (Hrsg.). (1954a). *Tables of integral transforms* (Bd. 1). New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. (Bateman Manuscript Project. California Institute of Technology.)
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F. G. (Hrsg.). (1954b). *Tables of integral transforms* (Bd. 2). New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book

- Company, Inc. (Bateman Manuscript Project. California Institute of Technology.)
- Fang, K.-T., Kotz, S. & Ng, K.-W. (1990). *Symmetric multivariate and related distributions*. London, etc: Chapman and Hall.
- Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications. Volume II* (2. Aufl.). New York etc.: John Wiley and Sons.
- Gneiting, T. (1997). Normal scale mixtures and dual probability densities. *J. Stat. Comput. Simulation*, 59 (4), 375–384. doi: 10.1080/00949659708811867
- Goldman, J. (1976). Detection in the presence of spherically symmetric random vectors. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 22, 52–59. doi: 10.1109/TIT.1976.1055514
- Gómez, E., Gómez-Villegas, M. A. & Marín, J. M. (2003). A survey on continuous elliptical vector distributions. *Rev. Mat. Complut.*, 16 (1), 345–361.
- Gómez-Sánchez-Manzano, E., Gómez-Villegas, M. A. & Marín, J. M. (2006). Sequences of elliptical distributions and mixtures of normal distributions. *J. Multivariate Anal.*, 97 (2), 295–310. doi: 10.1016/j.jmva.2005.03.008
- Gómez-Sánchez-Manzano, E., Gómez-Villegas, M. A. & Marín, J. M. (2008). Multivariate exponential power distributions as mixtures of normal distributions with Bayesian applications. *Commun. Stat., Theory Methods*, 37 (6), 972–985. doi: 10.1080/03610920701762754
- Gualtierotti, A. F. (1974). Some remarks on spherically invariant distributions. *J. Multivariate Anal.*, 4, 347–349. doi: 10.1016/0047-259X(74)90038-4
- Günzel, T., Richter, W.-D., Scheutzwow, S., Schicker, K. & Venz, J. (2012). Geometric approach to the skewed normal distribution. *J. Stat. Plann. Inference*, 142 (12), 3209–3224. doi: 10.1016/j.jspi.2012.06.009
- Gupta, A. K. & Song, D. (1997). l_p -norm spherical distributions. *J. Stat. Plann. Inference*, 60 (2), 241–260. doi: 10.1016/S0378-3758(96)00129-2
- Gupta, A. K. & Varga, T. (1993). *Elliptically contoured models in statistics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gupta, A. K. & Varga, T. (1995). Normal mixture representations of matrix variate elliptically contoured distributions. *Sankhyā, Ser. A*, 57 (1), 68–78.
- Hashorva, E. (2012). Exact tail asymptotics in bivariate scale mixture models. *Extremes*, 15 (1), 109–128. doi: 10.1007/s10687-011-0129-7
- Hausdorff, F. (1921). Summationsmethoden und Momentfolgen. I. *Math. Z.*, 9, 74–109. doi: 10.1007/BF01378337
- Huang, S. T. & Cambanis, S. (1979). Spherically invariant processes: Their nonlinear structure, discrimination, and estimation. *J. Multivariate Anal.*, 9, 59–83. doi: 10.1016/0047-259X(79)90067-8
- Janson, S. (2011). Stable distributions. *arXiv:1112.0220v2*, 24 pages. (Zugriff am 26.04.2016)
- Kalke, S. (2013). *Geometrische Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen* (Dissertation). Universität Rostock.

- Kalke, S. (2015). *pgnorm: The p-generalized normal distribution*. Zugriff auf <https://cran.r-project.org/web/packages/pgnorm/index.html> (Zugriff am 14.05.2017)
- Kalke, S. & Richter, W.-D. (2013). Simulation of the p-generalized Gaussian distribution. *J. Statist. Comput. Simulation*, 83 (4), 639–665. doi: 10.1080/00949655.2011.631187
- Kalke, S., Richter, W.-D. & Thauer, F. (2013). Linear combinations, products and ratios of simplicial or spherical variates. *Commun. Stat., Theory Methods*, 42 (3), 505–527. doi: 10.1080/03610926.2011.579702
- Kano, Y. (1994). Consistency property of elliptical probability density functions. *J. Multivariate Anal.*, 51 (1), 139–147. doi: 10.1006/jmva.1994.1054
- Karim, M. R. (2016). A class of scale mixtured normal distribution. *J. Biom. Biostat.*, 7 (2), 2. doi: 10.4172/2155-6180.1000285
- Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhyā, Ser. A*, 32, 419–430.
- Khatri, C. (1968). Some results for the singular normal multivariate regression models. *Sankhyā, Ser. A*, 30, 267–280.
- Kingman, J. F. C. (1972). On random sequences with spherical symmetry. *Biometrika*, 59, 492–494. doi: 10.1093/biomet/59.2.492
- Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Bd. 2). Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-49888-6
- Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the theory of probability*. New York: Chelsea Publishing Company 1956, VIII.
- Lange, K. & Sinsheimer, J. S. (1993). Normal/independent distributions and their applications in robust regression. *J. Comput. Graph. Stat.*, 2 (2), 175–198.
- Lindgren, G. (2013). *Stationary stochastic processes. Theory and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Liu, C. (1996). Bayesian robust multivariate linear regression with incomplete data. *J. Am. Stat. Assoc.*, 91 (435), 1219–1227. doi: 10.2307/2291740
- Mencía, J. & Sentana, E. (2009). Multivariate location-scale mixtures of normals and mean-variance-skewness portfolio allocation. *J. Econom.*, 153 (2), 105–121. doi: 10.1016/j.jeconom.2009.05.001
- Moszyńska, M. & Richter, W.-D. (2012). Reverse triangle inequality. Antinorms and semi-antinorms. *Stud. Sci. Math. Hung.*, 49 (1), 120–138. doi: 10.1556/SScMath.49.2012.1.1192
- Müller, K. (2012). *Exakte Verteilungen von Ordnungsstatistiken* (Bachelor-Arbeit). Universität Rostock, Institut für Mathematik.
- Müller, K. (2014). *Ordnungsstatistiken und geschiefte Verteilungen* (Master-Arbeit). Universität Rostock, Institut für Mathematik.
- Müller, K. & Richter, W.-D. (2015). Exact extreme value, product, and ratio distribu-

- tions under non-standard assumptions. *AStA Adv. stat. Anal.*, 99 (1), 1–30. doi: 10.1007/s10182-014-0228-2
- Müller, K. & Richter, W.-D. (2016a). Exact distributions of order statistics of dependent random variables from $l_{n,p}$ -symmetric sample distributions, $n \in \{3, 4\}$. *Depend. Model.*, 4, 1–29. doi: 10.1515/demo-2016-0001
- Müller, K. & Richter, W.-D. (2016b). Extreme value distributions for dependent jointly $l_{n,p}$ -symmetrically distributed random variables. *Depend. Model.*, 4, 30–62. doi: 10.1515/demo-2016-0002
- Müller, K. & Richter, W.-D. (2017a). Exact distributions of order statistics from $l_{n,p}$ -symmetric sample distributions. *Depend. Model.*, 5, 221–245. doi: 10.1515/demo-2017-0013
- Müller, K. & Richter, W.-D. (2017b). Modeling extremal data. *J. Stat. Comput. Simulation*, 87 (5), 933–955. doi: 10.1080/00949655.2016.1238089
- Niu, X., Li, P. & Zhang, P. (2016). Testing homogeneity in a scale mixture of normal distributions. *Stat. Pap.*, 57 (2), 499–516. doi: 10.1007/s00362-015-0665-3
- Osiewalski, J. & Steel, M. F. (1993). Robust Bayesian inference in l_q -spherical models. *Biometrika*, 80 (2), 456–460. doi: 10.2307/2337215
- Picinbono, B. (1970). Spherically invariant and compound Gaussian stochastic processes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 16, 77–79. doi: 10.1109/TIT.1970.1054398
- Pollard, H. (1946). The representation of e^{-x^λ} as a Laplace integral. *Bull. Am. Math. Soc.*, 52, 908–910. doi: 10.1090/S0002-9904-1946-08672-3
- Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A. & Marichev, O. I. (1992). *Integrals and series. Vol. 5: Inverse Laplace transforms*. Philadelphia, PA: Gordon and Breach Science Publishers.
- Rangaswamy, M., Weiner, D. & Öztürk, A. (1995). Computer generation of correlated non-Gaussian radar clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 31 (1), 106–116.
- Rao, C. R. (1973). *Linear statistical inference and its applications* (2. Aufl.). New York etc.: Wiley.
- Richardson, L. F. (2008). *Advanced calculus. An introduction to linear analysis*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Richter, W.-D. (2007). Generalized spherical and simplicial coordinates. *J. Math. Anal. Appl.*, 336, 1187–1202. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.03.047
- Richter, W.-D. (2009). Continuous $l_{n,p}$ -symmetric distributions. *Lith. Math. J.*, 49 (1), 93–108. doi: 10.1007/s10986-009-9030-3
- Richter, W.-D. (2011). Ellipses numbers and geometric measure representations. *J. Appl. Anal.*, 17 (2), 165–179. doi: 10.1515/jaa.2011.011
- Richter, W.-D. (2012). Exact distributions under non-standard model assumptions. In T. E. Simos, G. Psihoyios, C. Tsitouras & Z. Anastassi (Hrsg.), *Aip conference proceedings* (Bd. 1479, S. 442–445). doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4756160>

- Richter, W.-D. (2013). Geometric and stochastic representations for elliptically contoured distributions. *Comm. Stat., Theory Methods*, 42, 579–602. doi: 10.1080/03610926.2011.611320
- Richter, W.-D. (2014). Geometric disintegration and star-shaped distributions. *J. Stat. Distrib. Appl.* 1: 20, 1–24. doi: 10.1186/s40488-014-0020-6
- Richter, W.-D. (2015a). Convex and radially concave contoured distributions. *J. Probab. Stat.*, 2015, 1–12. (Article ID 165468) doi: 10.1155/2015/165468
- Richter, W.-D. (2015b). Norm contoured distributions in R^2 . In *Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Vol. XII* (Bd. 12, S. 179–199). University of Basilicata, Italy: Potenza: Seminario Interdisciplinare di Matematica (S.I.M.).
- Richter, W.-D. (2017). Statistical reasoning in dependent p -generalized elliptically contoured distributions and beyond. *Eingericht*.
- Richter, W.-D. & Venz, J. (2014). Geometric representations of multivariate skewed elliptically contoured distributions. *Chil. J. Stat.*, 5 (2), 71–90.
- Rogers, W. H. & Tukey, J. W. (1972). Understanding some long-tailed symmetrical distributions. *Stat. Neerl.*, 26 (3), 211–226. doi: 10.1111/j.1467-9574.1972.tb00191.x
- Samorodnitsky, G. & Taqqu, M. S. (1994). *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*. New York, NY: Chapman & Hall.
- Sarr, A. & Gupta, A. K. (2011). Exponential scale mixture of matrix variate Cauchy distribution. *Proc. Am. Math. Soc.*, 139 (4), 1483–1494. doi: 10.1090/S0002-9939-2010-10568-3
- Sasvári, Z. (2013). *Multivariate characteristic and correlation functions*. Berlin: de Gruyter. doi: 10.1515/9783110223996
- Schiff, J. L. (1999). *The Laplace transform: Theory and applications*. New York, NY: Springer.
- Schilling, R. L. & Partzsch, L. (2014). *Brownian motion. An introduction to stochastic processes. With contributions by Björn Böttcher. 2nd revised and extended ed* (2. Aufl.). Berlin: de Gruyter. doi: 10.1515/9783110307306
- Schilling, R. L., Song, R. & Vondraček, Z. (2012). *Bernstein functions. Theory and applications. 2nd revised and extended ed* (2. Aufl.). Berlin: de Gruyter. doi: 10.1515/9783110269338
- Schur, I. (1920). Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *J. Reine Angew. Math.*, 151, 79–111.
- Seo, B., Noh, J., Lee, T. & Yoon, Y. J. (2017). Adaptive robust regression with continuous Gaussian scale mixture errors. *J. Korean Stat. Soc.*, 46 (1), 113–125. doi: 10.1016/j.jkss.2016.08.002
- Shiryayev, A. N. (1996). *Probability. Transl. from the Russian by R. P. Boas* (2. Aufl.). New York, NY: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-1-4757-2539-1
- Subbotin, M. (1923). On the law of frequency of error. *Rec. Math. Moscou*, 31, 296–301.

- Uchaikin, V. V. & Zolotarev, V. M. (1999). *Chance and stability. Stable distributions and their applications*. Utrecht: VSP. doi: 10.1515/9783110935974
- van Dijk, G. (2013). *Distribution theory. Convolution, Fourier transform, and Laplace transform*. Berlin: de Gruyter. doi: 10.1515/9783110298512
- Vershik, A. M. (1964). Some characteristic properties of Gaussian stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, 9 (2), 353–356. doi: 10.1137/1109053
- Wainwright, M. J. & Simoncelli, E. P. (2000). Scale mixtures of Gaussians and the statistics of natural images. In S. Solla, T. Leen & K. Müller (Hrsg.), *Advances in Neural Information Processing Systems 12* (S. 855–861). MIT Press.
- West, M. (1987). On scale mixtures of normal distributions. *Biometrika*, 74 (3), 646–648. doi: 10.1093/biomet/74.3.646
- Widder, D. V. (1931). Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral. *Trans. Am. Math. Soc.*, 33, 851–892. doi: 10.2307/1989513
- Widder, D. V. (1946). *The Laplace transform*. Princeton: Princeton University Press.
- Wise, G. L. & jun. Gallagher, N. C. (1978). On spherically invariant random processes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 24, 118–120. doi: 10.1109/TIT.1978.1055841
- Yao, K. (1973). A representation theorem and its applications to spherically-invariant random processes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 19, 600–608. doi: 10.1109/TIT.1973.1055076
- Yao, K. (2003). Spherically invariant random processes: Theory and Application. In V. K. Bhargava, H. V. Poor, V. Tarokh & S. Yoon (Hrsg.), *Communications, Information and Network Security* (S. 315–331). New York: Springer Science + Business Media.
- Zhang, X., El Korso, M. N. & Pesavento, M. (2017). MIMO radar target localization and performance evaluation under SIRP clutter. *Signal Processing*, 130, 217–232. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.06.031
- Zolotarev, V. M. (1986). *Translations of Mathematical Monographs: One-dimensional stable distributions* (Bd. 65). Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS). (Übersetzt aus dem Russischen durch H. H. McFaden, Übersetzung editiert durch Ben Silver.)

A Analytische Grundbegriffe und Hilfsmittel

In den Anhängen A.2 und A.3 werden nun einige grundlegende analytische Begriffe und Sätze zu Stieltjes-Integralen, der Laplace- und der Laplace-Stieltjes-Transformation bereitgestellt. Weiterführend werden der Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder in Anhang A.4 und die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation in Anhang A.1 erläutert.

A.1 Die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation

In der euklidischen Geometrie ermöglicht die (gewöhnliche) Kugelkoordinatentransformation in \mathbb{R}^n die Darstellung eines in kartesischen Koordinaten gegebenen Punktes in \mathbb{R}^n mithilfe eines Radius und $n - 1$ Winkeln und umgekehrt, wobei einerseits der Radius die Sphäre bestimmt, auf der der Punkt liegt, und andererseits die Winkel die Lage des Punktes auf der zuvor bestimmten Sphäre beschreiben. In diesem ersten Abschnitt von Anhang A werden die in Richter (2007) eingeführte $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation, die einen Punkt des \mathbb{R}^n durch einen p -verallgemeinerten Radius einer $l_{n,p}$ -Sphäre, siehe unten, und $n - 1$ Winkel zur Beschreibung der Lage des Punktes auf dieser $l_{n,p}$ -Sphäre charakterisiert, sowie einige ihrer Eigenschaften bereitgestellt und erläutert.

Die weiteren Ausführungen dieses Abschnittes vorbereitend werden in Definition A.1 die ebenfalls in Richter (2007) etablierten p -Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen angegeben. Diese sind maßgeblich für die Einführung der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation gemäß Richter (2007), siehe Definition A.2, deren Struktur mit der der gewöhnlichen euklidischen Kugelkoordinatentransformation in \mathbb{R}^n übereinstimmt, wobei sowohl der euklidische Radius als auch die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen durch ihre p -Verallgemeinerungen, siehe oben bzw. Definition A.1, zu ersetzen sind.

Definition A.1. Die p -verallgemeinerte Sinusfunktion \sin_p und die p -verallgemeinerte Kosinusfunktion \cos_p sind für $\psi \in [0, 2\pi)$ definiert durch

$$\sin_p(\psi) = \frac{\sin(\psi)}{N_p(\psi)} \quad \text{und} \quad \cos_p(\psi) = \frac{\cos(\psi)}{N_p(\psi)},$$

wobei $N_p(\psi) = (|\sin(\psi)|^p + |\cos(\psi)|^p)^{1/p}$.

Definition A.2. Für $n \geq 2$ seien $M_n^* = [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi)$ und $M_n = [0, \infty) \times M_n^*$. Dann ist die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation $SHP_p^{(n)}: M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $SHP_p^{(n)}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = (x_1, \dots, x_n)^T$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos_p(\psi_1) \\ x_2 &= r \sin_p(\psi_1) \cos_p(\psi_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{n-1} &= r \sin_p(\psi_1) \dots \sin_p(\psi_{n-2}) \cos_p(\psi_{n-1}) \\x_n &= r \sin_p(\psi_1) \dots \sin_p(\psi_{n-2}) \sin_p(\psi_{n-1}).\end{aligned}$$

Mithilfe der trigonometrischen Version des Satzes des Pythagoras gilt zunächst $N_2(\psi) = 1$ für alle $\psi \in [0, 2\pi)$ und somit sowohl $\sin_2(\psi) = \sin(\psi)$ als auch $\cos_2(\psi) = \cos(\psi)$. Insbesondere stimmt die $l_{n,2}$ -sphärische Koordinatentransformation mit der gewöhnlichen Kugelkoordinatentransformation in \mathbb{R}^n überein. Der nachfolgende in Richter (2007) angegebene und bewiesene Satz A.1 liefert eine fast überall eindeutig definierte inverse Abbildung der $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation.

Satz A.1. *Die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation $SHP_p^{(n)}$ ist fast überall bijektiv und ihre (fast überall eindeutig bestimmte) Umkehrabbildung $SHP_p^{(n)-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow M_n$ ist für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $x_{n-1} \neq 0$ gegeben durch $SHP_p^{(n)-1}(x) = (r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^T$ mit*

$$r = |x|_p$$

und

$$\psi_i = \begin{cases} \arccos_p \left(\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}} \right) & , i \in \{1, \dots, n-2\} \\ \arctan \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} \right) & , i = n-1 \end{cases},$$

wobei \arccos_p die Umkehrabbildung von \cos_p bezeichnet.

Mit der Bezeichnung 0_n des n -dimensionalen Nullvektors erlaubt damit jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ unter Verwendung der Umkehrabbildung der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation die eindeutige Darstellung als Element einer $l_{n,p}$ -Sphäre $S_{n,p}(r)$, wobei der p -verallgemeinerte Radius r der gesuchten $l_{n,p}$ -Sphäre durch das p -Funktional $|x|_p$ bestimmt wird und die Winkel $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ durch die Lage des Punktes auf der $l_{n,p}$ -Sphäre $S_{n,p}(r)$ eindeutig charakterisiert werden. Insbesondere gilt $|SHP_p^{(n)}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})|_p = r$ für $(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^T \in M_n$. Die in Satz A.1 zur Bestimmung der Winkel verwendete Umkehrfunktion \arccos_p der p -verallgemeinerten Kosinusfunktion \cos_p erfüllt nach Müller (2012) die im nachfolgenden Lemma A.1 angegebene Integraldarstellung.

Lemma A.1. *Die p -verallgemeinerte Kosinusfunktion $\cos_p: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion \arccos_p erfüllt*

$$\arccos_p(x) = \int_x^1 \left[y^2 \left(1 + \left[\frac{1}{|y|^p} - 1 \right]^{2/p} \right) (1 - |y|^p)^{1-\frac{1}{p}} \right]^{-1} dy, \quad x \in [-1, 1].$$

Weiter sei bemerkt, dass die p -verallgemeinerte Sinusfunktion $\sin_p: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv ist und dass ihre Umkehrfunktion \arcsin_p nach Richter (2007) für $x \in [-1, 1]$ die

Integraldarstellung

$$\arcsin_p(x) = \int_0^x \left[y^2 \left(1 + \left[\frac{1}{|y|^p} - 1 \right]^{2/p} \right) (1 - |y|^p)^{1-\frac{1}{p}} \right]^{-1} dy, \quad x \in [-1, 1],$$

erfüllt, wobei insbesondere die Integranden der obigen Darstellungen von \arccos_p und \arcsin_p übereinstimmen. Die Anwendung der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation zur Umformung von n -dimensionalen Integralen benötigt zudem die Kenntnis der Jacobi- bzw. Funktionaldeterminante $J(SHP_p^{(n)})$ von $SHP_p^{(n)}$. Diese ist in Richter (2007) bestimmt und wird nachfolgend angegeben.

Satz A.2. Die Funktionaldeterminante $J(SHP_p^{(n)})$ der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation $SHP_p^{(n)}$ erfüllt für alle $r \in [0, \infty)$ und alle $\psi \in M_n^*$ mit $\psi_i \neq k\frac{\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n-1$, die Darstellung

$$J(SHP_p^{(n)})(r, \psi) = r^{n-1} J^*(SHP_p^{(n)})(\psi)$$

mit

$$J^*(SHP_p^{(n)})(\psi) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}},$$

wobei $J^*(SHP_p^{(n)})(\varphi) = J(SHP_p^{(n)})(1, \varphi)$.

A.2 Das Stieltjes-Integral

Auf der Basis von Richardson (2008, Abschnitt 7.2), Sasvári (2013, Anhang B.5) und Widder (1946, Kapitel 1) werden zunächst Stieltjes-Integrale, genauer Riemann-Stieltjes-Integrale, eingeführt und anschließend zwei Existenzaussagen und einige ihrer Eigenschaften aufgezeigt.

Seien α und f zwei reellwertige Funktionen von einer reellen Variablen, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert sind, $n \in \mathbb{N}$ und Δ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ durch die Punkte x_0, x_1, \dots, x_n mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Weiter sei

$$\delta = \delta(\Delta) = \max_{k=0,1,\dots,n-1} x_{k+1} - x_k.$$

Definition A.3. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$$

mit $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, unabhängig von der Zerlegung Δ und unabhängig von der Wahl der ξ_k existiert, so wird dieser Grenzwert das Stieltjes-Integral von f

bezüglich α von a bis b genannt und wird bezeichnet mit

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Für $\alpha(x) = x$ stimmt das Stieltjes-Integral aus Definition A.3 mit dem gewöhnlichen Riemann-Integral von f über $[a, b]$ überein und wird daher genauer auch als Riemann-Stieltjes-Integral bezeichnet. Diese Ähnlichkeiten zu gewöhnlichen Riemann-Integralen zeigt auch der nachfolgende Satz A.3, der eine erste Aussage über Existenz von Stieltjes-Integralen mithilfe von Ober- bzw. Untersummen bereitstellt.

Satz A.3. *Falls f und α reelle und beschränkte Funktionen auf $a \leq x \leq b$ sind und α zusätzlich nichtfallend ist, dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Stieltjes-Integral von f bezüglich α von a bis b existiert, dass*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S_\Delta - s_\Delta = 0$$

unabhängig von der Zerlegung Δ , wobei

$$S_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x) \cdot [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)]$$

$$s_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \min_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x) \cdot [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)].$$

Zur Formulierung einer zweiten Existenzaussage von Stieltjes-Integralen wird der Begriff der beschränkten Variation benötigt. Dazu sei zunächst die totale Variation einer reellwertigen (oder allgemeiner sogar komplexwertigen) Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|,$$

wobei das Supremum über allen $n \in \mathbb{N}$ und allen Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ von $[a, b]$ betrachtet wird. Eine Funktion f heißt weiter von beschränkter Variation in $[a, b]$, falls $V_a^b(f) < \infty$, wobei diese Eigenschaft für eine reellwertige Funktion durch den nachfolgenden Satz A.4 näher charakterisiert wird.

Satz A.4. *a) Ist α eine reellwertige Funktion von beschränkter Variation in $[a, b]$, dann existieren nichtnegative, nichtfallende und beschränkte Funktionen α_1 und α_2 , die bei $x = a$ verschwinden und die die gleichen Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen wie α haben, derart, dass*

$$\alpha(x) - \alpha(a) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x) \quad \text{und} \quad V_a^x(\alpha) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x).$$

b) Falls α_1 und α_2 monoton und beschränkt in $[a, b]$ und falls $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$,

dann

$$V_a^x(\alpha) \leq |\alpha_1(x) - \alpha_1(a)| + |\alpha_2(x) - \alpha_2(a)|.$$

Mit diesen Eigenschaften der beschränkten Variation kann nun ein weiterer Satz über die Existenz von Stieltjes-Integralen formuliert werden.

Satz A.5. *Seien f stetig und α von beschränkter Variation in $[a, b]$. Dann existiert das Stieltjes-Integral von f bezüglich α von a bis b .*

Den Abschluss dieses Abschnittes bilden zum einen einige grundlegende Eigenschaften und zwei Spezialfälle von Stieltjes-Integralen und zum anderen Resultate zur partiellen Integration sowie zur Integraltransformation für Stieltjes-Integrale.

Satz A.6. a) *Es ist $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$.*

b) *Es ist $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = 0$, falls α konstant ist.*

c) *Falls f_1 und f_2 stetig und α_1 und α_2 von beschränkter Variation in $[a, b]$ sind, dann gilt für alle Konstanten $k_1, k_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $c \in [a, b]$*

$$i) \int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) d(m_1 \alpha_1(x) + m_2 \alpha_2(x)) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_i m_j \int_a^b f_i(x) d\alpha_j(x)$$

$$ii) \int_a^b f_1(x) d\alpha_1(x) = \int_a^c f_1(x) d\alpha_1(x) + \int_c^b f_1(x) d\alpha_1(x).$$

d) *Seien f_m , $m \in \mathbb{N}_0$, stetig, α von beschränkter Variation in $[a, b]$ und konvergiere die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ über $[a, b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b f_m(x) d\alpha(x).$$

e) *Seien f und φ stetig und α von beschränkter Variation in $[a, b]$. Dann ist*

$$\beta(x) = \int_c^x \varphi(t) d\alpha(t), \quad a \leq x \leq b, a \leq c \leq b,$$

ebenfalls von beschränkter Variation in $[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x) d\beta(x) = \int_a^b f(x) \varphi(x) d\alpha(x).$$

Nach diesen grundlegenden Eigenschaften von bzw. nützlichen Hilfsmitteln im Umgang mit Stieltjes-Integralen werden nun zwei Spezialfälle betrachtet. Seien zunächst f stetig

und α stetig differenzierbar in (a, b) . Dann gilt speziell

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

Für eine Zerlegung $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$ von $[a, b]$ sei nun α die stückweise konstante Funktion gegeben durch

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , a \leq x \leq x_0 \\ a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} & , x_{k-1} < x < x_k, k = 1, \dots, n, \\ a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n & , x_n \leq x \leq b \end{cases}$$

die insbesondere an den Stellen x_1, \dots, x_{n-1} nicht definiert ist. Dann gilt für jede stetige Funktion f

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k).$$

Außerdem existiert das uneigentliche Stieltjes-Integral

$$\int_a^\infty f(x) d\alpha(x)$$

von f bezüglich α über dem unendlichen Intervall $[a, \infty)$ und stimmt mit dem Wert A überein, falls für die reellwertigen und auf $[a, \infty)$ definierten Funktionen f und α die Stieltjes-Integrale von f bezüglich α von a bis R für alle $R \geq a$ existieren und falls $A = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) d\alpha(x)$ endlich ist. In Analogie dazu sind die uneigentlichen Stieltjes-Integrale $\int_{-\infty}^b f(x) d\alpha(x)$ und $\int_{-\infty}^\infty f(x) d\alpha(x)$ von f bezüglich α über den unendlichen Intervallen $(-\infty, b]$ bzw. $(-\infty, \infty)$ definiert.

Satz A.7 (Partielle Integration). *Falls das Stieltjes-Integral von f bezüglich α von a bis b existiert, dann existiert auch das Stieltjes-Integral von α bezüglich f von a bis b und es gilt*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x) df(x).$$

Satz A.8 (Integraltransformation). *Sei β stetig und streng monoton wachsend in $[a, b]$ mit $a = \beta(c)$ und $b = \beta(d)$. Falls das Stieltjes-Integral von f bezüglich α von a bis b existiert, dann existiert ebenfalls das Stieltjes-Integral von $f \circ \beta$ bezüglich $\alpha \circ \beta$ von c bis d und es gilt*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_c^d f(\beta(x)) d\alpha(\beta(x)).$$

A.3 Die Laplace- und die Laplace-Stieltjes-Transformation

Die Laplace- und die Laplace-Stieltjes-Transformation sind Integraltransformationen, die klassischerweise in der Monographie Widder (1946), aber auch in moderneren Quellen wie Schiff (1999) und van Dijk (2013) umfassend erläutert werden. Mit dem Verweis auf diese Referenzen ist dieser Abschnitt auf die Angabe ihrer Definitionen und einiger Bemerkungen beschränkt.

Definition A.4. Sei α von beschränkter Variation in $[0, R]$ für jedes $R > 0$. Dann heißt die Abbildung

$$s \mapsto \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t), \quad s > 0,$$

die Laplace-Stieltjes-Transformierte von α , sofern das Stieltjes-Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichung existiert.

Falls speziell α in Definition A.4 stetig differenzierbar in $(0, \infty)$, so ist aus den Eigenschaften des Stieltjes-Integrals ersichtlich, dass die Laplace-Transformation, siehe Definition A.5, ein Spezialfall der obig definierten Laplace-Stieltjes-Transformation ist.

Definition A.5. Falls

$$f(s) = \mathcal{L}(\varphi)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t) dt, \quad s > 0,$$

existiert, so heißt f die Laplace-Transformierte von φ .

Dabei heißt die Funktion f in beiden Definitionen A.4 und A.5 die erzeugende Funktion und α bzw. φ heißen die bestimmenden Funktionen. Weiter heißt \mathcal{L} der Laplace-Operator. Umfassende Tabellen zur Laplace-Transformation und anderer Integraltransformationen verschiedener Funktionen sind in Erdélyi et al. (1954a); Erdélyi, Magnus, Oberhettinger und Tricomi (1954b) sowie Prudnikov et al. (1992) zu finden.

A.4 Der Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder

Auf der Grundlage von Widder (1946), Feller (1971), Schilling, Song und Vondraček (2012) und Sasvári (2013) wird in diesem Abschnitt der Begriff der vollständigen Monotonie von Funktionen und deren Charakterisierung durch den Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder vorgestellt.

Wie in Schilling et al. (2012, Seite 9) ausführlich erläutert wird, geht der Begriff der vollständigen Monotonie auf den Begriff der absoluten Monotonie in Bernstein (1914) zurück, wobei nichtnegative Funktionen mit nichtnegativen Ableitungen aller Ordnungen die Eigenschaft der absoluten Monotonie besitzen. In Hausdorff (1921) wird in Kapitel 3 der Begriff der total monotonen Folge basierend auf einer nicht genauer spezifizierten

Arbeit von Schur – die Autoren von Schilling et al. (2012) vermuten Schur (1920) – und in Kapitel 9 der Begriff der total monotonen Funktion eingeführt. Heute werden total monotone Funktionen meist als vollständig monotone Funktionen bezeichnet, wobei diese Namensgebung auf Widder (1931) zurückgeht und die zugehörige Eigenschaft wie folgt definiert ist.

Definition A.6. Eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt vollständig monoton (im Intervall (a, b)), falls für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in (a, b)$

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^m f(x) = (-1)^m \frac{d^m f}{dx^m}(x) \geq 0. \quad (\text{A.1})$$

Dabei sind für a auch $-\infty$ und für b auch ∞ zulässig. Im weiteren Verlauf der hier vorliegenden Arbeit wird insbesondere die vollständige Monotonie in den Intervallen $(0, \infty)$ bzw. $[0, \infty)$ untersucht. Nach Sasvári (2013, Definition 3.9.5) heißt eine Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vollständig monoton in $[0, \infty)$, falls die Einschränkung $f|_{(0, \infty)}$ vollständig monoton in $(0, \infty)$ ist. Die nachfolgenden beiden Korollare aus Definition A.6, die den Kriterien 1 und 2 aus Feller (1971, Kapitel XIII.4) entsprechen, geben allgemeine Eigenschaften vollständig monotoner Funktionen an. Insbesondere zeigt die erste Eigenschaft von Korollar A.1, dass die Menge der vollständig monotonen Funktionen über demselben Definitionsbereich einen konvexen Kegel bildet.

Korollar A.1. *Seien φ und ψ vollständig monoton. Dann sind ebenfalls sowohl ihre Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten*

$$t \mapsto a\varphi(t) + b\psi(t) \quad \text{für alle } a, b \geq 0$$

als auch ihr Produkt

$$t \mapsto \varphi(t)\psi(t)$$

vollständig monoton im topologischen Durchschnitt der Definitionsbereiche von φ und ψ .

Korollar A.2. *Seien φ vollständig monoton und ψ eine positive Funktion mit vollständig monotoner Ableitung und sei der Bildbereich von ψ eine Teilmenge des Definitionsbereichs von φ . Dann ist die Komposition*

$$t \mapsto \varphi(\psi(t))$$

vollständig monoton auf dem Definitionsbereich von ψ . Insbesondere ist $e^{-\psi}$ vollständig monoton.

In Bernstein (1929) ist weiter die Aussage formuliert und bewiesen, dass eine absolut monotone Funktion auf der negativen reellen Halbachse als Laplace-Stieltjes-Integral mit einer nichtfallenden erzeugenden Funktion beschrieben werden kann. Gemäß Widder

(1946, Kapitel IV.1) beweist Hausdorff (1921, Kapitel 3) eine ähnliche Aussage für total (vollständig) monotone Folgen, die das zuvor erläuterte Resultat enthält, wobei die Aussage aus Bernstein (1929) laut Widder (1946) unabhängig von der aus Hausdorff formuliert wurde und eine andere Beweisstruktur aufweist. Später ist in Widder (1931) ein dritter, von den beiden bisherigen Arbeiten unabhängiger Beweis dieser Aussage für vollständig monotone Funktionen angegeben. Aufgrund dieser Historie ist das Resultat heute als Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder bekannt und wird nachfolgend in der Formulierung aus Widder (1946) und zusätzlich in Anhang B.3 in einer weiteren Formulierung aus Feller (1971) angegeben.

Satz A.9 (Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder, Widder (1946)). *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Funktion φ vollständig monoton in $(0, \infty)$ ist, ist ihre Darstellbarkeit als*

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d\alpha(x), \quad \lambda > 0,$$

wobei α nichtfallend ist und das Integral für $0 < \lambda < \infty$ konvergiert.

Beweis. Siehe Widder (1946, Theorem 12b in Kapitel IV.12). □

Somit liefert der Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder die Äquivalenz der Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Stieltjes-Transformierte einer nichtfallenden Funktion auf der positiven reellen Halbachse zur Eigenschaft der vollständigen Monotonie in $(0, \infty)$. Folglich können die Aussagen der Korollare A.1 und A.2 auf die Darstellbarkeit der angegebenen Funktionen als Laplace-Stieltjes-Transformierte nichtfallender Funktionen übertragen werden.

B Beweise und Ergänzungen

B.1 Beweise zu Abschnitt 2.1

Zu Beginn dieses Abschnittes wird zunächst Bemerkung B.1 formuliert und bewiesen, die im Folgenden in den Beweisen der Lemmata 2.3, 2.6 und 2.7 Anwendung findet.

Bemerkung B.1. Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \geq 2$ und jedes $\kappa \in \{1, \dots, \nu - 1\}$ gilt

$$\frac{\omega_{\kappa,p} \omega_{\nu-\kappa,p}}{\omega_{\nu,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{\nu-\kappa-1} (\sin(\psi))^{\kappa-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{\nu}{p}}} d\psi = 1.$$

Nach Richter (2009) ist bekannt, dass die linke Seite der obigen Gleichung der Grenzwert der Verteilungsfunktion der p -verallgemeinerten Fisher-Statistik $T_{\nu-\kappa,\kappa}(p)$ an der Stelle t für $t \rightarrow \infty$ ist. Damit folgt Bemerkung B.1 aus der elementaren Eigenschaft, dass die Verteilungsfunktion einer univariaten Zufallsvariablen an der Stelle t für $t \rightarrow \infty$ gegen eins strebt. Nachfolgend ist ein vollständig ausformulierter Beweis unter Verwendung von Integraltransformationen und der Eulerschen Betafunktion angegeben.

Beweis von Bemerkung B.1. Nach (2.2) gilt zunächst

$$\frac{\omega_{\kappa,p} \omega_{\nu-\kappa,p}}{\omega_{\nu,p}} = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^\kappa \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^{\nu-\kappa} p^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)}{p^{\kappa-1} \Gamma\left(\frac{\kappa}{p}\right) p^{\nu-\kappa-1} \Gamma\left(\frac{\nu-\kappa}{p}\right) \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^\nu} = p \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\kappa}{p}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\kappa}{p}\right)} = \frac{p}{B\left(\frac{\kappa}{p}, \frac{\nu-\kappa}{p}\right)},$$

wobei B die Eulersche Betafunktion bezeichnet. Unter Verwendung der beiden nachfolgenden Integraltransformationen $\psi = \arccos(x)$ mit $\frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $z = (x^{-2} - 1)^{\frac{p}{2}}$ mit $\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{p} \left(z^{\frac{2}{p}} + 1\right)^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{2}{p}-1}$ und der Identität $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{\nu-\kappa-1} (\sin(\psi))^{\kappa-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{\nu}{p}}} d\psi &= - \int_1^0 \frac{x^{\nu-\kappa-1} (1-x^2)^{\frac{\kappa-1}{2}}}{\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}} + x^p\right)^{\frac{\nu}{p}}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{\nu-\kappa-1} (1-x^2)^{\frac{\kappa}{2}-1}}{\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}} + x^p\right)^{\frac{\nu}{p}}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{\nu-\kappa-1} x^{\kappa-2} \left((x^{-2}-1)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)}}{x^\nu \left((x^{-2}-1)^{\frac{p}{2}} + 1\right)^{\frac{\nu}{p}}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\left((x^{-2}-1)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)}}{x^3 \left((x^{-2}-1)^{\frac{p}{2}} + 1\right)^{\frac{\nu}{p}}} dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{\kappa}{p}-1}}{(z+1)^{\frac{\nu}{p}}} dz = \frac{1}{p} B\left(\frac{\kappa}{p}, \frac{\nu-\kappa}{p}\right). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun durch Zusammensetzen der beiden Teilaussagen. \square

Beweis von Lemma 2.3. Der Zufallsvektor X , $X \sim \Phi_{g^{(n,p)}}$, besitzt nach (2.4) zunächst die Lebesgue-Dichte $\varphi_{g^{(n,p)}}(x) = g^{(n,p)}(|x|_p)$, $x \in \mathbb{R}^n$, und mithilfe des Transformationsatzes für Dichten erfüllt die Lebesgue-Dichte $f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}$ von $(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})^\top = SHP_p^{(n)-1}(X)$ für $(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^\top \in M_n$

$$f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = g^{(n,p)}\left(\left|SHP_p^{(n)}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})\right|_p\right) \cdot \left|J\left(SHP_p^{(n)}\right)(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})\right|$$

und $f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = 0$ für $(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^\top \notin M_n$. Weiter gilt unter Verwendung der Darstellung der Funktionaldeterminante der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation, siehe Satz A.2, für $(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^\top \in M_n$

$$\begin{aligned} f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) &= r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \\ &= r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \cdot \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \end{aligned}$$

und schließlich für $(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^\top \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) &= r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(r) \cdot \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} \mathbb{1}_{[0, 2\pi)}(\psi_{n-1}) \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \mathbb{1}_{[0, \pi)}(\psi_i). \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Randdichten der einzelnen Zufallsvariablen $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ vorbereitend gilt für $i = 1, \dots, n-2$ mithilfe der Symmetrien von $|\cos(\cdot)|$ und $\sin(\cdot)$ in $[0, \pi]$ und mithilfe von Bemerkung B.1 mit $\nu = n - i + 1$ und $\kappa = \nu - 1 = n - i$ einerseits

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} d\psi_i &= \int_0^\pi \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(|\sin(\psi_i)|^p + |\cos(\psi_i)|^p)^{\frac{n-i+1}{p}}} d\psi_i \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{((\sin(\psi_i))^p + (\cos(\psi_i))^p)^{\frac{n-i+1}{p}}} d\psi_i = 2 \frac{\omega_{n-i+1,p}}{\omega_{n-i,p} \omega_{1,p}} = \frac{\omega_{n-i+1,p}}{\omega_{n-i,p}} \end{aligned}$$

und mithilfe der Symmetrien von $|\cos(\cdot)|$ und $\sin(\cdot)$ in $[0, 2\pi]$ und mithilfe von Bemerkung B.1 mit $\nu = 2$ und $\kappa = 1$ andererseits

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} d\psi_{n-1} = \int_0^\pi (|\sin(\psi_{n-1})|^p + |\cos(\psi_{n-1})|^p)^{-\frac{2}{p}} d\psi_{n-1}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|\sin(\psi_{n-1})|^p + |\cos(\psi_{n-1})|^p)^{-\frac{2}{p}} d\psi_{n-1} = 4 \frac{\omega_{2,p}}{(\omega_{1,p})^2} = \omega_{2,p},$$

da $\omega_{1,p} = 2$. Aufgrund der Produktgestalt der gemeinsamen Dichte $f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}$ von $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$, der dadurch hervorgerufenen Anwendbarkeit des Satzes von Fubini und der beiden obigen Vorbereitungen gilt zunächst für die Lebesgue-Dichte f_R der Randverteilung von R für $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) d(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \\ &= r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(r) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} d\psi_{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^{\pi} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} d\psi_i \\ &= r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(r) \cdot \omega_{2,p} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \frac{\omega_{n-i+1,p}}{\omega_{n-i,p}} \\ &= \omega_{n,p} r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(r). \end{aligned}$$

Mit analogen Umformungen und der Identität $I_n(g^{(n,p)}) = \frac{1}{\omega_{n,p}}$ gilt weiter für die Lebesgue-Dichte f_{Ψ_i} der Randverteilung von Ψ_i , $i = 1, \dots, n-2$, für $\psi_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{\Psi_i}(\psi_i) &= \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \mathbb{1}_{[0, \pi)}(\psi_i) \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} r^{n-1} g^{(n,p)}(r) dr \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} d\psi_{n-1} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} \int_0^{\pi} \frac{(\sin(\psi_j))^{n-j-1}}{(N_p(\psi_j))^{n-j+1}} d\psi_j \\ &= \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \mathbb{1}_{[0, \pi)}(\psi_i) \cdot \frac{1}{\omega_{n,p}} \cdot \omega_{2,p} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} \frac{\omega_{n-j+1,p}}{\omega_{n-j,p}} \\ &= \frac{\omega_{n-i+1,p}}{\omega_{n-i,p}} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} \mathbb{1}_{[0, \pi)}(\psi_i) \end{aligned}$$

und für die Lebesgue-Dichte $f_{\Psi_{n-1}}$ der Randverteilung von Ψ_{n-1} für $\psi_{n-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{\Psi_{n-1}}(\psi_{n-1}) &= \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} \mathbb{1}_{[0, 2\pi)}(\psi_{n-1}) \cdot \int_0^{\infty} r^{n-1} g^{(n,p)}(r) dr \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^{\pi} \frac{(\sin(\psi_i))^{n-i-1}}{(N_p(\psi_i))^{n-i+1}} d\psi_i \\ &= \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} \mathbb{1}_{[0, 2\pi)}(\psi_{n-1}) \cdot \frac{1}{\omega_{n,p}} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \frac{\omega_{n-i+1,p}}{\omega_{n-i,p}} \\ &= \omega_{2,p} \frac{1}{(N_p(\psi_{n-1}))^2} \mathbb{1}_{[0, 2\pi)}(\psi_{n-1}). \end{aligned}$$

Da weiter $\frac{\omega_{2,p}}{\omega_{n,p}} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{\omega_{n-i+1,p}}{\omega_{n-i,p}} = 1$ gilt, ist die gemeinsame Dichte $f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}$ insbesondere

als Produkt der Dichten der Randverteilungen von $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ darstellbar, d.h.

$$f_{(R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})}(r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = f_r(r) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f_{\Psi_i}(\psi_i), \quad (r, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist äquivalent zur vollständigen stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $R, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$. \square

Beweis von Lemma 2.6. Mit der im Absatz vor Lemma 2.6 eingeführten Notation ist für den Fall $m = n - k$ bzw. $k + m = n$ nichts zu zeigen. Sei also $m \in \{1, \dots, n - k\} \setminus \{n - k\}$ beliebig, aber fest. Dann gilt nach (2.8) für $r \geq 0$ zunächst

$$\begin{aligned} \left(g_{(n)}^{(k+m,p)}\right)_{(k+m)}^{(k,p)}(r) &= \frac{\omega_{k+m-k,p}}{p} \int_{r^p}^{\infty} (y - r^p)^{\frac{k+m-k}{p}-1} g_{(n)}^{(k+m,p)}(\sqrt[p]{y}) dy \\ &= \frac{\omega_{m,p}}{p} \frac{\omega_{n-(k+m),p}}{p} \int_{r^p}^{\infty} (y - r^p)^{\frac{m}{p}-1} \int_y^{\infty} (x - y)^{\frac{n-(k+m)}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{x}) dx dy. \end{aligned}$$

Mit den Integraltransformationen $\tilde{y} = y - r^p$ mit $\frac{d\tilde{y}}{dy} = 1$ und $\tilde{x} = x - \tilde{y}$ mit $\frac{d\tilde{x}}{dx} = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \left(g_{(n)}^{(k+m,p)}\right)_{(k+m)}^{(k,p)}(r) &= \frac{\omega_{m,p}}{p} \frac{\omega_{n-k-m,p}}{p} \int_0^{\infty} \tilde{y}^{\frac{m}{p}-1} \int_{\tilde{y}+r^p}^{\infty} (x - (\tilde{y} + r^p))^{\frac{n-k-m}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{x}) dx d\tilde{y} \\ &= \frac{\omega_{m,p}}{p} \frac{\omega_{n-k-m,p}}{p} \int_0^{\infty} \tilde{y}^{\frac{m}{p}-1} \int_{r^p}^{\infty} (\tilde{x} - r^p)^{\frac{n-k-m}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\tilde{x} + \tilde{y}}) d\tilde{x} d\tilde{y} \end{aligned}$$

und mit $\xi = \tilde{x} - r^p$ mit $\frac{d\tilde{x}}{d\xi} = p\xi^{p-1}$ und $\tilde{y} = \zeta^p$ mit $\frac{d\tilde{y}}{d\zeta} = p\zeta^{p-1}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \left(g_{(n)}^{(k+m,p)}\right)_{(k+m)}^{(k,p)}(r) &= \frac{\omega_{m,p}}{p} \frac{\omega_{n-k-m,p}}{p} \int_0^{\infty} \tilde{y}^{\frac{m}{p}-1} \int_0^{\infty} \xi^{n-k-m-p+p-1} g^{(n,p)}\left(\sqrt[p]{\xi^p + \tilde{y} + r^p}\right) d\xi d\tilde{y} \\ &= \omega_{m,p} \omega_{n-k-m,p} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \zeta^{m-1} \xi^{n-k-m-1} g^{(n,p)}\left(\sqrt[p]{\xi^p + \zeta^p + r^p}\right) d\xi d\zeta. \end{aligned}$$

Der Übergang zu $l_{2,p}$ -sphärischen Koordinaten

$$\xi = \rho \cdot \frac{\cos(\psi)}{N_p(\psi)} \quad \text{und} \quad \zeta = \rho \cdot \frac{\sin(\psi)}{N_p(\psi)}$$

mit $\frac{d(\xi,\zeta)}{d(\rho,\psi)} = J(SHP_p^{(2)})(\rho, \psi) = \frac{\rho}{N_p^2(\psi)}$, siehe Anhang A.1, liefert mit $\sin(\psi) > 0$ und $\cos(\psi) > 0$ für $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\rho^p = \xi^p + \zeta^p$

$$\left(g_{(n)}^{(k+m,p)}\right)_{(k+m)}^{(k,p)}(r) = \omega_{m,p} \omega_{n-k-m,p} \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\rho^p + r^p}) \frac{\rho^{m-1} (\sin(\psi))^{m-1}}{N_p^{m-1}(\psi)}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\rho^{n-k-m-1} (\cos(\psi))^{n-k-m-1}}{N_p^{n-k-m-1}(\psi)} \frac{\rho}{N_p^2(\psi)} \Big) d\psi d\rho \\
& = \omega_{m,p} \omega_{n-k-m,p} \int_0^\infty \left(\rho^{n-k-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\rho^p + r^p}) \right. \\
& \quad \cdot \left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{n-k-m-1} (\sin(\psi))^{m-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{n-k}{p}}} d\psi \right) d\rho.
\end{aligned}$$

Mithilfe der Transformation $\tilde{\rho} = \rho^p + r^p$ bzw. $\rho = (\tilde{\rho} - r^p)^{\frac{1}{p}}$ mit $\frac{d\rho}{d\tilde{\rho}} = \frac{1}{p} (\tilde{\rho} - r^p)^{\frac{1-p}{p}}$ und des Satzes von Fubini gilt schließlich

$$\begin{aligned}
\left(g_{(n)}^{(k+m,p)} \right)_{(k+m)}^{(k,p)}(r) & = \frac{\omega_{m,p} \omega_{n-k-m,p}}{p} \int_{r^p}^\infty \left((\tilde{\rho} - r^p)^{\frac{n-k-1}{p} + \frac{1-p}{p}} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\tilde{\rho}}) \right. \\
& \quad \cdot \left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{n-k-m-1} (\sin(\psi))^{m-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{n-k}{p}}} d\psi \right) d\rho \\
& = \left(\frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_{r^p}^\infty (\tilde{\rho} - r^p)^{\frac{n-k}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\tilde{\rho}}) d\rho \right) \\
& \quad \cdot \left(\frac{\omega_{m,p} \omega_{n-k-m,p}}{\omega_{n-k,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{n-k-m-1} (\sin(\psi))^{m-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{n-k}{p}}} d\psi \right) \\
& = \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_{r^p}^\infty (\tilde{\rho} - r^p)^{\frac{n-k}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{\tilde{\rho}}) d\rho \\
& = g_{(n)}^{(k,p)}(r),
\end{aligned}$$

wobei in den letzten beiden Umformungen zunächst Bemerkung B.1 mit $\nu = n - k$ und $\kappa = m$ und anschließend Gleichung (2.8) Anwendung finden. \square

Beweis von Lemma 2.7. Sei $k \in \{1, \dots, n-1\}$ beliebig, aber fest. Unter Verwendung von (2.8) und mithilfe der Transformation $y = z^p + r^p$ mit $\frac{dy}{dz} = pz^{p-1}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_{g_{(n)}^{(k,p)}}^2 & = \tau_{k,p} \omega_{k,p} \int_0^\infty r^{k+1} g_{(n)}^{(k,p)}(r) dr \\
& = \tau_{k,p} \omega_{k,p} \int_0^\infty r^{k+1} \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_{r^p}^\infty (y - r^p)^{\frac{n-k}{p}-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) dy dr \\
& = \tau_{k,p} \omega_{k,p} \omega_{n-k,p} \int_0^\infty r^{k+1} \int_0^\infty z^{n-k-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{z^p + r^p}) dz dr \\
& = \tau_{k,p} \omega_{k,p} \omega_{n-k,p} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{k+1} y^{n-k-1} g^{(n,p)}(\sqrt[p]{x^p + y^p}) dy dx,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung die Variablen r und z in x bzw. y umbenannt werden.

Unter Verwendung der $l_{2,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation $x = r \frac{\cos(\psi)}{N_p(\psi)}$ und $y = r \frac{\sin(\psi)}{N_p(\psi)}$ mit $\frac{d(x,y)}{d(r,\psi)} = \frac{r}{N_p^2(\psi)}$, siehe Anhang A.1, und mithilfe von Bemerkung B.1 mit $\nu = n + 2$ und $\kappa = n - k$ folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_{g^{(k,p)}}^2 &= \tau_{k,p} \omega_{k,p} \omega_{n-k,p} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{n+1} g^{(n,p)}(r) \frac{(\cos(\psi))^{k+1} (\sin(\psi))^{n-k-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{n+2}{p}}} d\psi dr \\
&= \sigma_{g^{(n,p)}}^2 \cdot \frac{\tau_{k,p} \omega_{k,p} \omega_{n-k,p}}{\tau_{n,p} \omega_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{k+1} (\sin(\psi))^{n-k-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{n+2}{p}}} d\psi \\
&= \sigma_{g^{(n,p)}}^2 \cdot \frac{\omega_{n-k,p} \omega_{n+2-(n-k),p}}{\omega_{n+2,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(\psi))^{n+2-(n-k)-1} (\sin(\psi))^{(n-k)-1}}{((\sin(\psi))^p + (\cos(\psi))^p)^{\frac{n+2}{p}}} d\psi \\
&= \sigma_{g^{(n,p)}}^2.
\end{aligned}$$

□

B.2 Beweise zu Abschnitt 2.2

Beweis von Lemma 2.8. Nach Definition 2.2 gilt

$$MX + b \stackrel{d}{=} (M\mu + b) + MAY, \quad Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}},$$

wobei AA^T eine Rang- k -Zerlegung von Σ ist. Da A durch k linear unabhängige Spalten den (Spalten-) Rang k besitzt und MA aus A durch Zeilenvertauschung entsteht, besitzt auch $MA \in \mathbb{R}^{n \times k}$ den Rang k , da dessen k Spalten ebenfalls linear unabhängig sind. Damit gilt für $Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$

$$\begin{aligned}
MX + b &\stackrel{d}{=} (M\mu + b) + MAY \sim EC_{n,p} \left(M\mu + b, (MA)(MA)^T, g^{(k,p)} \right) \\
&= EC_{n,p} \left(M\mu + b, M\Sigma M^T, g^{(k,p)} \right).
\end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma 2.9. Seien zunächst

$$\begin{aligned}
\sigma_{i_j}^2 &> 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k \\
\sigma_{i_j}^2 &= 0 \quad \text{für } j = k+1, \dots, n \quad \text{und} \quad i_{k+1} < i_{k+2} < \dots < i_n
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\gamma_{m_\epsilon} &\neq 0 \quad \text{für } \epsilon = 1, \dots, l \quad \text{und} \quad m_1 < m_2 < \dots < m_l \\
\gamma_{m_\epsilon} &= 0 \quad \text{für } \epsilon = l+1, \dots, n \quad \text{und} \quad m_{l+1} < m_{l+2} < \dots < m_n.
\end{aligned}$$

Dann gilt mit den Notationen aus dem Abschnitt 2.2.1 über Rangzerlegungen

$$V_1 = \begin{pmatrix} e_{i_1}^{(n)} & \cdots & e_{i_k}^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

und

$$V_1 \sqrt{S_1} = \begin{pmatrix} \sigma_{i_1} e_{i_1}^{(n)} & \cdots & \sigma_{i_k} e_{i_k}^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Weiter ist dann

$$\Gamma V_1 \sqrt{S_1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 e_1^{(n)\top} \\ \vdots \\ \gamma_n e_n^{(n)\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{i_1} e_{i_1}^{(n)} & \cdots & \sigma_{i_k} e_{i_k}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 f(1) \\ \vdots \\ \gamma_n f(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

mit

$$f(\eta) = \begin{cases} \sigma_{i_j} e_j^{(k)\top} & , \text{ falls } \eta = i_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, k\} \\ 0_k^\top & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad \eta = 1, \dots, n.$$

Da $\gamma_\eta = 0$ für $\eta \in \{m_{l+1}, \dots, m_n\}$, folgt

$$\Gamma V_1 \sqrt{S_1} = \begin{pmatrix} h(1) \\ \vdots \\ h(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

mit

$$h(\eta) = \begin{cases} \gamma_\eta \sigma_\eta e_j^{(k)\top} & , \text{ falls } \eta \in K \text{ und } \eta = i_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, k\} \\ 0_k^\top & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad \eta = 1, \dots, n,$$

wobei

$$K = \{\eta: \eta = i_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, k\} \text{ und } \eta = m_\epsilon \text{ für ein } \epsilon \in \{1, \dots, l\}\} \quad (\text{B.1})$$

mit $|K| \geq 1$, da $\Gamma \Sigma \Gamma$ aufgrund seines positivem Ranges mindestens ein positives Diagonalelement enthält. Dann besitzt die Matrix $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ genau $|K|$ Nicht-Nullzeilen, die jeweils das Produkt aus einer positiven Konstante, einer Konstante aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und einem Einheitsvektor des \mathbb{R}^k sind. Dabei sind diese Einheitsvektoren alle voneinander verschieden und unter Verwendung des Kronecker-Deltas δ_{im} ist

$$|K| = \sum_{j=1}^k \sum_{\epsilon=1}^l \delta_{i_j m_\epsilon}$$

die Mächtigkeit der Menge K . Damit besitzt $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ auch $|K|$ Nicht-Nullspalten und

demzufolge $k - |K|$ Nullspalten. Für $Y = (Y_1, \dots, Y_k)^\top \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$ gilt nun

$$\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y = \begin{pmatrix} \theta(1) \\ \vdots \\ \theta(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit

$$\theta(\eta) = \begin{cases} \gamma_\eta \sigma_\eta Y_j & , \text{ falls } \eta \in K \text{ und } \eta = i_j \text{ für ein } j \in \{1, \dots, k\} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad \eta = 1, \dots, n,$$

wobei im Vektor $\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y$ damit genau $|K|$ verschiedene Komponenten von Y vorkommen. Somit gilt für $B \in \mathfrak{B}^n$

$$P\left(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \in B\right) = P\left(\begin{pmatrix} \theta(1) \\ \vdots \\ \theta(n) \end{pmatrix} \in B, Y_j \in \mathbb{R} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, k\} \setminus J\right),$$

wobei $J = \{j \in \{1, \dots, k\} : i_j \in K\}$. Sei nun

$$J = \{j_1, \dots, j_{|K|}\} \quad \text{mit } j_1 < j_2 < \dots < j_{|K|}$$

eine Nummerierung der Elemente aus J . Dann ist $|J| = |K|$ und mit

$$M = \begin{pmatrix} \psi(1) \\ \vdots \\ \psi(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times |K|}$$

mit

$$\psi(\eta) = \begin{cases} \gamma_\eta \sigma_\eta e_{i_\kappa}^{(|K|)\top} & , \text{ falls } \eta \in K \text{ und } \eta = i_{j_\kappa} \text{ für ein } \kappa \in \{1, \dots, |K|\} \\ 0_{|K|}^\top & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für $\eta = 1, \dots, n$ gilt weiter

$$P\left(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \in B\right) = P(MZ \in B), \quad Z \sim \Phi_{g_{(k)}^{(|K|,p)}}$$

also $\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \stackrel{d}{=} MZ$. Somit

$$\begin{aligned} \Gamma X + b &\stackrel{d}{=} (\Gamma \mu + b) + \Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y, \quad Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}} \\ &\stackrel{d}{=} (\Gamma \mu + b) + MZ, \quad Z \sim \Phi_{g_{(k)}^{(|K|,p)}} \end{aligned}$$

$$= EC_{n,p}(\Gamma\mu + b, MM^T, g_{(k)}^{(|K|,p)}) ,$$

da M den Rang $|K|$ besitzt. Schließlich kann die Matrix M durch Hinzufügen von $k - |K|$ Nullspalten zu $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ vergrößert werden. Da das Hinzufügen von Nullspalten zu M das Produkt MM^T nicht ändert, gilt

$$MM^T = \left(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} \right) \left(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} \right)^T = \Gamma V_1 S_1 V_1^T \Gamma = \Gamma \Sigma \Gamma.$$

Weiter besitzen M und damit auch MM^T den Rang $|K|$ derart, dass $|K| = \text{rg}(M) = \text{rg}(MM^T) = \text{rg}(\Gamma \Sigma \Gamma)$. Zusammen gilt also

$$\mathfrak{L}(\Gamma X + b) = EC_{n,p}(\Gamma\mu + b, \Gamma \Sigma \Gamma, g_{(k)}^{(k_\Gamma, p)}) .$$

□

Beweis von Lemma 2.10. Zunächst gilt $X_J = \Gamma X$ mit

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e_{j_1}^{(n)T} \\ \vdots \\ e_{j_m}^{(n)T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Wie im Beweis von Lemma 2.9 seien weiter

$$\begin{aligned} \sigma_{i_l}^2 &> 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, k & \quad \text{und} & \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k \\ \sigma_{i_l}^2 &= 0 \quad \text{für } l = k + 1, \dots, n & \quad \text{und} & \quad i_{k+1} < i_{k+2} < \dots < i_n \end{aligned}$$

und

$$V_1 \sqrt{S_1} = \left(\sigma_{i_1} e_{i_1}^{(n)} \quad \dots \quad \sigma_{i_k} e_{i_k}^{(n)} \right) \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Demnach ist

$$\Gamma V_1 \sqrt{S_1} = \begin{pmatrix} e_{j_1}^{(n)T} \\ \vdots \\ e_{j_m}^{(n)T} \end{pmatrix} \left(\sigma_{i_1} e_{i_1}^{(n)} \quad \dots \quad \sigma_{i_k} e_{i_k}^{(n)} \right) = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times k}$$

mit

$$f(\eta) = \begin{cases} \sigma_{i_l} e_{i_l}^{(k)T} & , \text{ falls } j_\eta = i_l \text{ für ein } l \in \{1, \dots, k\} \\ 0_k^T & , \text{ sonst} \end{cases} , \quad \eta = 1, \dots, m.$$

Folglich gilt für $Y = (Y_1, \dots, Y_k) \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$

$$\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y = \begin{pmatrix} h(1) \\ \vdots \\ h(m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$h(\eta) = \sum_{l=1}^k \sigma_{i_l} Y_l \delta_{i_l j_\eta} = \begin{cases} \sigma_{i_l} Y_l & , \text{ falls } j_\eta = i_l \text{ für ein } l \in \{1, \dots, k\} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad \eta = 1, \dots, m.$$

Sei nun

$$K = \{l \in \{1, \dots, k\} : i_l = j_\eta \text{ für ein } \eta \in \{1, \dots, m\}\}. \quad (\text{B.2})$$

Für die Mächtigkeit von K gilt dann $|K| = |\{\eta \in \{1, \dots, m\} : \sigma_{j_\eta}^2 > 0\}| \geq 1$ und die Matrix $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ besitzt genau $k - |K|$ Nullspalten. Da die Nicht-Nullspalten jeweils das Produkt einer positiven Konstante und eines Einheitsvektors des \mathbb{R}^m sind, besteht der Vektor $\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y$ aus genau $|K|$ verschiedenen Komponenten von Y multipliziert mit positiven Konstanten und genau $m - |K|$ Nullen. Seien nun

$$K = \{l_1, \dots, l_{|K|}\} \quad \text{mit } l_1 < l_2 < \dots < l_{|K|}$$

eine Nummerierung der Elemente von K und außerdem

$$M = \begin{pmatrix} \psi(1) \\ \vdots \\ \psi(m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times |K|}$$

mit

$$\psi(\eta) = \begin{cases} \sigma_{i_{l_\kappa}} e_\kappa^{(|K|)^T} & , \text{ falls } j_\eta = i_{l_\kappa} \text{ für ein } \kappa \in \{1, \dots, |K|\} \\ 0_{|K|}^T & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad \eta = 1, \dots, m.$$

Mit diesen Notationen gilt für $B \in \mathfrak{B}^m$

$$\begin{aligned} P\left(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \in B\right) &= P\left(\begin{pmatrix} h(1) \\ \vdots \\ h(m) \end{pmatrix} \in B, Y_l \in \mathbb{R} \text{ für alle } l \in \{1, \dots, k\} \setminus K\right) \\ &= P(MZ \in B), \end{aligned}$$

wobei $Z \sim \Phi_{g_{(k)}^{(|K|,p)}}$. Somit

$$\begin{aligned} X_J = \Gamma X &\stackrel{d}{=} \Gamma \left(\mu + V_1 \sqrt{S_1} Y \right), \quad Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}} \\ &= \mu_J + \Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \\ &\stackrel{d}{=} \mu_J + MZ, \quad Z \sim \Phi_{g_{(k)}^{(|K|,p)}} \\ &\sim EC_{m,p} \left(\mu_J, MM^T, g_{(k)}^{(|K|,p)} \right), \end{aligned}$$

da M den Rang $|K|$ besitzt. Da weiter M durch Hinzufügen von Nullspalten zu $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ vergrößert werden kann und dadurch der Rang $|K|$ und das Produkt MM^T unverändert bleiben, gilt $MM^T = (\Gamma V_1 \sqrt{S_1})(\Gamma V_1 \sqrt{S_1})^T = \Gamma V_1 S_1 V_1^T \Gamma = \Gamma \Sigma \Gamma = \Sigma_J$ und $|K| = \text{rg}(M) = \text{rg}(MM^T) = \text{rg}(\Gamma \Sigma \Gamma) = k_J$. Zusammen ist folglich

$$\mathfrak{L}(X_J) = EC_{m,p} \left(\mu_J, \Sigma_J, g_{(k)}^{(k_J,p)} \right).$$

□

Beweis von Lemma 2.11. Mit der Rang- k -Zerlegung $(V_1 \sqrt{S_1})(V_1 \sqrt{S_1})^T$ von Σ und der stochastischen Darstellung (2.11) gilt

$$Z = V_1^T X \stackrel{d}{=} V_1^T \left(\mu + R \cdot \left(V_1 \sqrt{S_1} \right) U_p^{(k)} \right) = V_1^T \mu + R \cdot \sqrt{S_1} U_p^{(k)},$$

wobei die Interpretation von R in der obigen Gleichung variiert. Da $\sqrt{S_1}$ vollen Rang k hat und damit $\sqrt{S_1} \sqrt{S_1}^T$ eine Rang- k -Zerlegung von S_1 ist, folgt Z einer Rang- k -stetigen $l_{k,p}$ -elliptisch konturierten Verteilung mit den Parametern $V_1^T \mu$ und S_1 und dem Dichtegenerator $g^{(k,p)}$ und ist insbesondere regulär verteilt. Die angegebene Lebesgue-Dichte von Z folgt damit aus Bemerkung 2.4. □

Beweis von Lemma 2.12. Da die Spalten von V_1 und V_2 zusammen eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden, gilt $w^T v = 0$ für beliebige Spalten v aus V_1 und w aus V_2 . Damit ist zunächst $V_2^T V_1 = 0 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ und mit (2.11) folglich

$$V_2^T X \stackrel{d}{=} V_2^T \mu + R \cdot V_2^T V_1 \sqrt{S_1} U_p^{(k)} = V_2^T \mu \quad P\text{-fast sicher.}$$

□

Beweis von Korollar 2.7. Da $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ der Dirac-Verteilung im Punkt $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ folgt, gilt zunächst $X = \mu$ P -fast sicher und weiter $X_m = \mu_m$ P -fast sicher für alle $m \in \{1, \dots, n\}$, d.h. die Mengen $N_m = \{\omega \in \Omega: X_m(\omega) \neq \mu_m\}$, $m \in \{1, \dots, n\}$,

sind P -Nullmengen. Dann gilt nach der Definition des Erwartungswertes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_m) &= \int_{\Omega} X_m(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega \setminus N_m} X_m(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega \setminus N_m} \mu_m P(d\omega) \\ &= \mu_m P(\Omega \setminus N_m) = \mu_m,\end{aligned}$$

wodurch sowohl die Existenz von $\mathbb{E}(X)$ als auch die Übereinstimmung mit μ gezeigt ist. Für $m_1, m_2 \in \{1, \dots, n\}$ ist $N_{m_1, m_2} = \{\omega \in \Omega: X_{m_1}(\omega) \neq \mu_{m_1}, X_{m_2}(\omega) \neq \mu_{m_2}\} = N_{m_1} \cap N_{m_2}$ als topologischer Durchschnitt von P -Nullmengen ebenfalls eine P -Nullmenge und in Analogie zur obigen Umformung gilt mithilfe der Definition der Kovarianz

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_{m_1}, X_{m_2}) &= \mathbb{E}((X_{m_1} - \mathbb{E}(X_{m_1}))(X_{m_2} - \mathbb{E}(X_{m_2}))) \\ &= \int_{\Omega \setminus N_{m_1, m_2}} (X_{m_1} - \mu_{m_1})(X_{m_2} - \mu_{m_2}) P(d\omega) = 0.\end{aligned}$$

Folglich existiert $\text{Cov}((\cdot)X)$ und ist identisch mit der $(n \times n)$ -Nullmatrix $0_{n \times n}$. \square

Beweis von Korollar 2.8. Da das Resultat von Korollar 2.8 für $k \geq 1$ mit der Aussage von Lemma 2.8 übereinstimmt, genügt die Betrachtung von $k = 0$. In diesem Fall ist $X \sim EC_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, g^{(0,p)})$, d.h. X ist Dirac-verteilt im Punkt μ , und mithilfe von (2.19) gilt zunächst

$$MX + b \stackrel{d}{=} M\mu + b \quad P - \text{fast sicher}$$

und folglich $\mathfrak{L}(MX + b) = EC_{n,p}(M\mu + b, M0_{n \times n}M^T, g^{(0,p)})$, da $0_{n \times n} = M0_{n \times n}M^T$. \square

Beweis von Korollar 2.9. Grundlegend ist dieser Beweis in die Betrachtung von drei Fällen gegliedert. Im ersten Fall seien $k = 0$, also $X \sim EC_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, g^{(0,p)})$, und $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Unter Verwendung von (2.19) folgt, dass $\Gamma X + b$ Dirac-verteilt im Punkt $\Gamma\mu + b$ ist, d.h.

$$\mathfrak{L}(\Gamma X + b) = EC_{n,p}(\Gamma\mu + b, 0_{n \times n}, g^{(0,p)}) = EC_{n,p}(\Gamma\mu + b, \Gamma 0_{n \times n} \Gamma, g_{(0)}^{(0,p)}),$$

wobei die letzte Umformung zum einen auf der Identität $\Gamma 0_{n \times n} \Gamma = 0_{n \times n}$ und zum anderen auf der Tatsache basiert, dass sowohl $g^{(0,p)}$ als auch $g_{(0)}^{(0,p)}$ dem Erhalt der Notation dienen und somit gegeneinander ausgetauscht werden können. Im zweiten Fall seien zunächst $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit mit positivem Rang k und weiter $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass $k_{\Gamma} = \text{rg}(\Gamma\Sigma\Gamma) \geq 1$, und die Behauptung stimmt mit der Resultat von Lemma 2.9 überein. Schließlich seien im verbleibenden dritten Fall $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit mit positivem Rang k und $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass $k_{\Gamma} = \text{rg}(\Gamma\Sigma\Gamma) = 0$ bzw. $\Gamma\Sigma\Gamma = 0_{n \times n}$. In Analogie zum Beweis von Lemma 2.9 und insbesondere unter Verwendung derselben Bezeichnungen ist die in (B.1) angegebene Menge K im jetzigen Fall die

leere Menge. Da somit $|K| = 0$ gilt und demzufolge $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ ausschließlich Nullspalten besitzt, gilt für $Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$ und jedes $B \in \mathfrak{B}^n$

$$P\left(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \in B\right) = P(0_n \in B) = \mathbf{1}_B(0_n)$$

und speziell für $B = \{0_n\}$ folgt $P(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y = 0_n) = P(\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y \in \{0_n\}) = 1$, d.h.

$$\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y = 0_n \quad P - \text{fast sicher.}$$

Die auf (2.10) und der Rang- k -Zerlegung $(V_1 \sqrt{S_1})(V_1 \sqrt{S_1})^\top$ von Σ basierende stochastische Darstellung $\Gamma X + b \stackrel{d}{=} (\Gamma \mu + b) + \Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y$ für $Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$ liefert letztlich

$$\Gamma X + b = \Gamma \mu + b + 0_n \quad P - \text{fast sicher,}$$

wodurch die Behauptung gezeigt ist, dass die Verteilung von $\Gamma X + b$ im dritten Fall mit der Dirac-Verteilung $EC_{n,p}(\Gamma \mu + b, 0_{n \times n}, g_{(k)}^{(0,p)})$ im Punkt $\Gamma \mu + b$ übereinstimmt. \square

Beweis von Korollar 2.10. Seien zunächst $k = 0$, d.h. $X \sim EC_{n,p}(\mu, 0_{n \times n}, g^{(0,p)})$, und $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $j_1 < \dots < j_m$ beliebig. Mithilfe von (2.19) gilt dann

$$X_J = \mu_J \quad P - \text{fast sicher}$$

und unter Verwendung der im ersten Fall vom Beweis von Korollar 2.9 thematisierten Ersetzbarkeit von $g^{(0,p)}$ durch $g_{(k)}^{(0,p)}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 0$ folgt die Behauptung

$$X_J \sim EC_{m,p}(\mu_J, 0_{m \times m}, g_{(0)}^{(0,p)}).$$

Im zweiten Fall seien nun $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit mit positivem Rang k und außerdem $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ derart, dass $j_1 < \dots < j_m$ und $\left|\left\{\eta \in \{1, \dots, m\} : \sigma_{j_\eta}^2 > 0\right\}\right| \geq 1$, und Lemma 2.10 liefert die Behauptung. Im dritten Fall sei nun ebenfalls $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g^{(k,p)})$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ nichtnegativ definit mit positivem Rang k , jedoch sei $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ derart, dass $j_1 < \dots < j_m$ und $\left|\left\{\eta \in \{1, \dots, m\} : \sigma_{j_\eta}^2 > 0\right\}\right| = 0$. Mithilfe der Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 2.10 besitzt die in (B.2) eingeführte Menge K die Mächtigkeit $|K| = \left|\left\{\eta \in \{1, \dots, m\} : \sigma_{j_\eta}^2 > 0\right\}\right| = 0$. Folglich stimmt die Matrix $\Gamma V_1 \sqrt{S_1}$ mit der $(m \times k)$ -Nullmatrix überein und die Verteilung von $\Gamma V_1 \sqrt{S_1} Y$ für $Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$ ist im Punkt 0_m konzentriert. Da $\Sigma_J = \text{diag}(\sigma_{j_1}^2, \dots, \sigma_{j_m}^2) = 0_{m \times m}$ und somit $k_J = \text{rg}(\Sigma_J) = 0$, gilt für $X_J = \Gamma X$ mithilfe von $X \stackrel{d}{=} \mu + V_1 \sqrt{S_1} Y$ für $Y \sim \Phi_{g^{(k,p)}}$ schließlich

$$X_J = \mu_J \quad P - \text{fast sicher}$$

und damit $X_J \sim EC_{m,p}(\mu_J, 0_{m \times m}, g_{(k)}^{(0,p)})$. □

B.3 Beweise zu Abschnitt 3.2

Beweis von Lemma 3.1. Sei $X \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} \cdot Z$ mit $V \sim G$ und $Z \sim N_{n,p}$ unabhängig voneinander. Weiter sei R_p p -verallgemeinert χ -verteilt mit n Freiheitsgraden, siehe Richter (2007). Dann erfüllt der n -dimensionale p -verallgemeinert normalverteilte Zufallsvektor Z die stochastische Darstellung $Z \stackrel{d}{=} R_p \cdot U_p^{(n)}$, siehe Richter (2009), und es gilt

$$X \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} \cdot Z \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} R_p \cdot U_p^{(n)} \stackrel{d}{=} R \cdot U_p^{(n)}$$

mit $R \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} R_p$. Zur Bestimmung der Lebesgue-Dichte der Zufallsvariablen R wird zunächst deren Verteilungsfunktion $P(R < r)$ für $r \in \mathbb{R}$ betrachtet. Nach der Darstellung der Verteilungsfunktion als Erwartungswert der zufälligen Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{\{R < r\}}$ liefert die Eigenschaft $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_1|Y_2))$ der bedingten Erwartung einer Zufallsvariablen Y_1 unter einer weiteren Zufallsvariablen Y_2 die Übereinstimmung von $P(R < r)$ für $r \in \mathbb{R}$ mit dem Erwartungswert der bedingten Erwartung von $\mathbb{1}_{\{R < r\}}$ gegeben V , d.h.

$$P(R < r) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{R < r\}}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{R < r\}} \mid V\right)\right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{R < r\}} \mid V\right)$ ist dabei selbst eine Zufallsgröße und ihr Erwartungswert bezüglich der Verteilung der positiven Zufallsvariablen V mit der Verteilungsfunktion G erfüllt die Integraldarstellung

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{R < r\}} \mid V\right)\right) = \int_0^\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{R < r\}} \mid V = v\right) dG(v), \quad r \in \mathbb{R},$$

wobei der Integrand $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{R < r\}} \mid V = v\right)$ für $v \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{R}$ mithilfe des zu Beginn dieser Umformung verwendeten elementaren Resultates aus der Wahrscheinlichkeitstheorie mit der Verteilungsfunktion der bedingten Verteilung von R unter der Bedingung $V = v$ ausgewertet an der Stelle r übereinstimmt. Mit $R \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} R_p$ gilt folglich

$$\begin{aligned} P(R < r) &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{R < r\}} \mid V = v\right) dG(v) = \int_0^\infty P(R < r \mid V = v) dG(v) \\ &= \int_0^\infty P\left(V^{-\frac{1}{p}} R_p < r \mid V = v\right) dG(v), \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da einerseits V unabhängig von Z ist, sind V und damit auch $V^{-\frac{1}{p}}$ unabhängig von R_p und $U_p^{(n)}$. Andererseits ist nach der stochastischen Darstellung von Z zusätzlich R_p unabhängig von $U_p^{(n)}$. Daher ist ebenfalls das Produkt $R \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} R_p$ unabhängig von $U_p^{(n)}$. Auf-

grund der Unabhängigkeit von V und R_p gilt $P(V^{-\frac{1}{p}}R_p < r \mid V = v) = P(R_p < rv^{\frac{1}{p}})$ für $v \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{R}$ und somit

$$P(R < r) = \int_0^{\infty} P(R_p < rv^{\frac{1}{p}}) dG(v), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Weiter besitzt die p -verallgemeinert χ -verteilte Zufallsvariable R_p nach Richter (2007) die Dichte

$$f_{R_p}(r) = \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma(\frac{n}{p})} r^{n-1} e^{-\frac{r^p}{p}} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Die Leibniz-Integral-Regel für Parameterintegrale liefert demzufolge

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \frac{d}{dr} P(R < r) = \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} P(R_p < rv^{\frac{1}{p}}) dG(v), \quad r \in \mathbb{R}. \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{rv^{\frac{1}{p}}} f_{R_p}(\rho) d\rho dG(v) \\ &= \int_0^{\infty} v^{\frac{1}{p}} f_{R_p}(rv^{\frac{1}{p}}) dG(v) \\ &= \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma(\frac{n}{p})} r^{n-1} \int_0^{\infty} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(rv^{\frac{1}{p}}) dG(v) \\ &= \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma(\frac{n}{p})} r^{n-1} \int_0^{\infty} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) \cdot \mathbf{1}_{[0, \infty)}(r), \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Beweis von Korollar 3.1. Grundlegend zeigt die stochastische Darstellung (3.2), dass jede Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung eine stetige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen ist. Weiter besitzt die Radiusvariable R einer $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mit Dichtegenerator $g^{(n,p)}$, d.h. das p -Funktional eines derart verteilten Zufallsvektors, nach (2.6) die Lebesgue-Dichte $\omega_{n,p} r^{n-1} g^{(n,p)}(r) \mathbf{1}_{[0, \infty)}$, $r \in \mathbb{R}$. Aus der spezifischen Gestalt der Lebesgue-Dichte f_R der Radiusvariablen einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung, siehe (3.3) in Lemma 3.1, und $\frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma(\frac{n}{p})} = \frac{(2\Gamma(\frac{1}{p}))^n}{p^{n-1}\Gamma(\frac{n}{p})} \frac{p^{n-\frac{n}{p}}}{(2\Gamma(\frac{1}{p}))^n} = \omega_{n,p} \cdot C_p^n$ folgt schließlich

$$g_{SMN;G}^{(n,p)}(r) = \omega_{n,p}^{-1} r^{1-n} f_R(r) = C_p^n \int_0^{\infty} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v), \quad r \geq 0.$$

□

Den zweiten Beweis von Satz 3.1 vorbereitend wird nachfolgend eine zweite Formulierung

des Satzes von Hausdorff-Bernstein-Widder aus Feller (1971) basierend auf dem Begriff des Lebesgue-Integrals angegeben, wohingegen die erste Formulierung aus Widder (1946), siehe Satz A.9, (Riemann-) Stieltjes-Integrale verwendet.

Satz B.1 (Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder, Feller (1971)). *Eine Funktion φ auf $(0, \infty)$ ist genau dann vollständig monoton, wenn sie von der Form*

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} F(dx), \quad \lambda > 0,$$

ist, wobei F ein nicht notwendigerweise endliches Maß auf $(0, \infty)$ ist.

Beweis. Siehe Feller (1971, Theorem 1a in Kapitel XIII.4). □

Beweis 2 von Satz 3.1. Der erste Teil ist analog zum ersten Teil von Beweis 1 von Satz 3.1. Für die Rückrichtung seien nun $X \sim \Phi_{g^{(n,p)}}$ und h mit $h(y) = g^{(n,p)}\left(y^{\frac{1}{p}}\right)$ vollständig monoton in $[0, \infty)$. Für die Funktion h_1 mit $h_1(y) = h(py) = g^{(n,p)}\left((py)^{\frac{1}{p}}\right)$ gilt für $y > 0$ zunächst $h_1'(y) = p h'(py)$ und induktiv für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m

$$(-1)^m \frac{d^m h_1}{dy^m}(y) = p^m (-1)^m \left(\frac{d^m h}{dz^m}(z) \right)_{|z=py}, \quad y > 0.$$

Da $p > 0$, ist somit h_1 genau dann vollständig monoton in $[0, \infty)$, wenn h diese Eigenschaft besitzt. Nach dem Satz von Hausdorff-Bernstein-Widder in der Formulierung aus Feller (1971), siehe Satz B.1, ist h_1 damit auf $(0, \infty)$ als Laplace-Stieltjes-Transformierte eines auf $(0, \infty)$ definierten Maßes α darstellbar, d.h.

$$h_1(y) = \int_0^{\infty} e^{-yv} \alpha(dv) = \int_0^{\infty} e^{-yv} d\alpha(v), \quad y > 0.$$

Sei nun

$$\beta = \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \alpha,$$

d.h. β ist ein Maß auf der σ -Algebra $\mathfrak{B}((0, \infty))$ der Borel-Teilmengen von $(0, \infty)$, auf der auch α definiert ist, mit $\beta(A) = \int_{a \in A} \frac{d\beta}{d\alpha}(a) d\alpha(a)$, $A \in \mathfrak{B}((0, \infty))$, wobei die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\beta}{d\alpha}$ von β bezüglich α durch

$$\frac{d\beta}{d\alpha}(a) = C_p^{-n} a^{-\frac{n}{p}} \quad \text{für } \alpha\text{-fast alle } a > 0$$

gegeben ist. Dann gilt $h_1(y) = \int_0^{\infty} C_p^n v^{\frac{n}{p}} e^{-yv} \beta(dv)$, $y > 0$, und somit

$$g^{(n,p)}(r) = h_1\left(\frac{1}{p} r^p\right) = C_p^n \int_0^{\infty} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p} v} d\beta(v), \quad r > 0.$$

Das Maß β ist weiter ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Masse in einer Teilmenge von $(0, \infty)$ konzentriert ist, da unter Verwendung der Integraltransformation $r^p = vs^p$ mit $\frac{dr}{ds} = \sqrt[p]{v}$ und des Satzes von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \beta(dv) &= \omega_{n,p} \int_0^\infty I_n(g_{PE}^{(n,p)}) d\beta(v) \\
&= \omega_{n,p} C_p^n \int_0^\infty \int_0^\infty r^{n-1} e^{-\frac{r^p}{p}} dr d\beta(v) \\
&= \omega_{n,p} C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n-1}{p}} v^{\frac{1}{p}} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\frac{s^p}{p}v} ds d\beta(v) \\
&= \omega_{n,p} \int_0^\infty s^{n-1} C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{s^p}{p}v} d\beta(v) ds \\
&= \omega_{n,p} \int_0^\infty s^{n-1} g^{(n,p)}(s) ds \\
&= \omega_{n,p} I_n(g^{(n,p)}) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

da sowohl $g_{PE}^{(n,p)}$ als auch $g^{(n,p)}$ Dichtegeneratoren sind. Sei nun G die zum Maß β gehörige Verteilungsfunktion. Dann ist

$$g^{(n,p)}(r) = C_p^n \int_0^\infty v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v), \quad r > 0.$$

Damit ist $g^{(n,p)}$ Lebesgue-fast überall der Dichtegenerator der Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit Mischungsverteilung G , d.h. $g^{(n,p)} = g_{SMN;G}^{(n,p)}$ Lebesgue-fast überall in $[0, \infty)$. \square

B.4 Ergänzungen zu Abschnitt 3.4

In diesem Abschnitt wird nun die in Abschnitt 3.4 vorgestellte Theorie zu Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit beliebigem Erwartungswert und beliebiger Kovarianzmatrix durch einige, für die Arbeit mit diesen Verteilungen hilfreiche Resultate ergänzt.

Das nachfolgende Korollar stellt eine zentrale Eigenschaft der Randdichtegeneratoren von $SMN_{n,p}(G)$ mit einer von n unabhängigen Verteilungsfunktion G einer positiven Zufallsvariablen bereit, die auf zwei Wegen bewiesen wird. Der erste Beweis benutzt Lemma 4.2 und ein induktives Argument auf der Basis von Lemma 2.6. Der zweite Beweis zeigt das Resultat direkt mithilfe von Integraltransformationen und Darstellung (2.8) des Randdichtegenerators.

Korollar B.1. Sei G unabhängig von n und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann erfüllt der Randdichtegenerator $\left(g_{SMN;G}^{(n,p)}\right)_{(n)}^{(k,p)}$ einer k -dimensionalen Randverteilung von $SMN_{n,p}(G)$ die Identität

$$\left(g_{SMN;G}^{(n,p)}\right)_{(n)}^{(k,p)} = g_{SMN;G}^{(k,p)}.$$

Beweis 1 von Korollar B.1. Nach dem ersten Teil des Beweises von Lemma 4.2 gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_{SMN;G}^{(m-1,p)}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{SMN;G}^{(m,p)}\left(\sqrt[p]{r^p + |y|^p}\right) dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} g_{SMN;G}^{(m,p)}\left(\sqrt[p]{r^p + y^p}\right) dy \\ &= \frac{2}{p} \int_{r^p}^{\infty} (z - r^p)^{\frac{1}{p}-1} g_{SMN;G}^{(m,p)}\left(\sqrt[p]{z}\right) dz = \left(g_{SMN;G}^{(m,p)}\right)_{(m)}^{(m-1,p)}(r), \quad r \geq 0, \end{aligned}$$

wobei die Transformation $z = y^p + r^p$ mit $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{p}(z - r^p)^{\frac{1}{p}-1}$ verwendet wird. Die Behauptung folgt nun zunächst durch induktives Anwenden von Lemma 2.6 und dann durch schrittweises Anwenden der obigen Identität von innen

$$\begin{aligned} \left(g_{SMN;G}^{(n,p)}\right)_{(n)}^{(k,p)} &= \left(\left(\left(\left(\left(g_{SMN;G}^{(n,p)}\right)_{(n)}^{(n-1,p)}\right)_{(n-1)}^{(n-2,p)}\right)_{(n-1)} \cdots\right)_{(k+2)}^{(k+1,p)}\right)_{(k+1)}^{(k,p)} \\ &= \left(\left(\left(\left(g_{SMN;G}^{(n-1,p)}\right)_{(n-1)}^{(n-2,p)}\right)_{(k+2)} \cdots\right)_{(k+1)}^{(k+1,p)}\right)_{(k+1)}^{(k,p)} \\ &= \dots = \left(\left(g_{SMN;G}^{(k+2,p)}\right)_{(k+2)}^{(k+1,p)}\right)_{(k+1)}^{(k,p)} = \left(g_{SMN;G}^{(k+1,p)}\right)_{(k+1)}^{(k,p)} = g_{SMN;G}^{(k,p)}. \end{aligned}$$

□

Beweis 2 von Korollar B.1. Mithilfe von Darstellung (2.8) des Randdichtegenerators, des Satzes von Fubini und diversen Integraltransformationen gilt für $r \geq 0$

$$\begin{aligned} \left(g_{SMN;G}^{(n,p)}\right)_{(n)}^{(k,p)}(r) &= \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_{r^p}^{\infty} (y - r^p)^{\frac{n-k}{p}-1} g_{SMN;G}^{(n,p)}(\sqrt[p]{y}) dy \\ &= C_p^n \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_{r^p}^{\infty} \int_0^{\infty} (y - r^p)^{\frac{n-k}{p}-1} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{1}{p}yv} dG(v) dy \\ &= C_p^m \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z^{\frac{n-k}{p}-1} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{z+r^p}{p}v} dG(v) dz \\ &= C_p^m \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_0^{\infty} v^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} \int_0^{\infty} z^{\frac{n-k}{p}-1} e^{-\frac{1}{p}zv} dz dG(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_p^n \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_0^\infty e^{-\frac{r^p}{p}v} v^{\frac{n}{p}} v^{-\frac{n-k}{p}+1} v^{-1} \int_0^\infty x^{\frac{n-k}{p}-1} e^{-\frac{1}{p}x} dx dG(v) \\
&= \left(C_p^k \int_0^\infty v^{\frac{k}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) \right) \left(C_p^{n-k} \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_0^\infty x^{\frac{n-k}{p}-1} e^{-\frac{1}{p}x} dx \right).
\end{aligned}$$

Da weiter mit $x = z^p$ und $\frac{dx}{dz} = pz^{p-1}$

$$\begin{aligned}
C_p^{n-k} \frac{\omega_{n-k,p}}{p} \int_0^\infty x^{\frac{n-k}{p}-1} e^{-\frac{1}{p}x} dx &= C_p^{n-k} \omega_{n-k,p} \int_0^\infty z^{n-k-1} e^{-\frac{z^p}{p}} dz \\
&= \omega_{n-k,p} \int_0^\infty z^{n-k-1} g_{PE}^{(n-k,p)}(z) dz \\
&= \omega_{n-k,p} I_{n-k} \left(g_{PE}^{(n-k,p)} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

gilt, liefert die Unabhängigkeit der Verteilungsfunktion G von n schließlich

$$\left(g_{SMN;G}^{(n,p)} \right)_{(n)}^{(k,p)}(r) = C_p^k \int_0^\infty v^{\frac{k}{p}} e^{-\frac{r^p}{p}v} dG(v) = g_{SMN;G}^{(k,p)}(r), \quad r \geq 0.$$

□

Nach diesem Korollar über die grundlegenden Eigenschaften des Dichtegenerators einer Skalenmischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung erfolgt nun die Betrachtung von Verteilungen spezieller linearer Transformationen und insbesondere von Randverteilungen Rang- k -stetiger $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilungen. Zunächst folgt Korollar B.2 direkt aus Korollar 2.8 durch Spezialisierung des Dichtegenerators.

Korollar B.2. *Sei $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$. Dann gilt für jede $(n \times n)$ -Permutationsmatrix M und jedes $b \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathfrak{L}(MX + b) = SMN_{n,p}(M\mu + b, M\Sigma M^T, G).$$

In den nachfolgenden Korollaren B.3 und B.4 werden nun speziell Rang- k -stetige Skalenmischungen der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit diagonalen Matrixparametern betrachtet, um Resultate über die Verteilung von speziellen linearen Transformationen und Randverteilungen gemäß der Korollare 2.9 und 2.10 formulieren zu können. Zudem wird in beiden Korollaren B.3 und B.4 die Unabhängigkeit der Mischungverteilung G vom Rang des Matrixparameters gefordert, um die spezifischen Eigenschaften der Randdichtegeneratoren einer Rang- k -stetigen $l_{n,p}$ -elliptisch konturierter Verteilung mit dem Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(k,p)}$, siehe Korollar B.1, verwenden zu können. Hierbei ist die Einschränkung des Matrixparameters für die Beweise der Aussagen ob-

ligatorisch, wohingegen die Einschränkung der Mischungsverteilung fakultativ ist, ohne die die entsprechenden Aussagen mit denen der Korollare 2.9 und 2.10 für den speziellen Dichtegenerator $g_{SMN;G}^{(k,p)}$ übereinstimmen würden.

Korollar B.3. *Seien $X \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiter sei G unabhängig vom Rang der Matrix Σ . Dann ist*

$$\mathfrak{L}(\Gamma X + b) = SMN_{n,p}(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, G),$$

Beweis. Nach Korollar 3.27 gilt zunächst $X \sim EC_{n,p}(\mu, \Sigma, g_{SMN;G}^{(k,p)})$ mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ und somit nach Korollar 2.9 weiter

$$\mathfrak{L}(\Gamma X + b) = EC_{n,p}\left(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, \left(g_{SMN;G}^{(k,p)}\right)_{(k)}^{(k_\Gamma, p)}\right)$$

mit $k_\Gamma = \text{rg}(\Gamma\Sigma\Gamma)$. Da G unabhängig von k ist, erfüllt der obige Randdichtegenerator nach Korollar B.1 die Identität

$$\left(g_{SMN;G}^{(k,p)}\right)_{(k)}^{(k_\Gamma, p)} = g_{SMN;G}^{(k_\Gamma, p)}.$$

Die Anwendung dieser Identität und die erneute Anwendung von Korollar 3.27 liefert

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\Gamma X + b) &= EC_{n,p}\left(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, \left(g_{SMN;G}^{(k,p)}\right)_{(k)}^{(k_\Gamma, p)}\right) \\ &= EC_{n,p}\left(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, g_{SMN;G}^{(k_\Gamma, p)}\right) \\ &= SMN_{n,p}(\Gamma\mu + b, \Gamma\Sigma\Gamma, G). \end{aligned}$$

□

Mit den Notationen wie im obigen Korollar B.3 und dessen Beweis ist die Verteilung von $\Gamma X + b$ folglich die Rang- k_Γ -stetige Skalermischung der n -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern $\Gamma\mu + b$ und $\Gamma\Sigma\Gamma$ und der ursprünglichen Mischungsverteilung G von X .

Korollar B.4. *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$ mit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ und G unabhängig von $\text{rg}(\Sigma)$. Außerdem seien $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ eine Indexmenge mit $j_1 < \dots < j_m$ und $X_J = (X_{j_1}, \dots, X_{j_m})^\top$ der zugehörige m -dimensionale Teilvektor von X . Dann ist*

$$X_J \sim SMN_{m,p}(\mu_J, \Sigma_J, G),$$

wobei $\mu_J = (\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_m})^\top$ und $\Sigma_J = \text{diag}(\sigma_{j_1}^2, \dots, \sigma_{j_m}^2)$.

Beweis. In Analogie zum Beweis von Korollar B.3 liefern die Korollare 3.27 und 2.10 zunächst

$$\mathfrak{L}(X_J) = EC_{m,p}\left(\mu_J, \Sigma_J, \left(g_{SMN;G}^{(k,p)}\right)_{(k)}^{(k_J, p)}\right)$$

mit $k = \text{rg}(\Sigma)$ und $k_J = \text{rg}(\Sigma_J)$. Durch die Unabhängigkeit der Verteilungsfunktion G von k und die damit aus Korollar B.1 resultierende Identität $\left(g_{SMN;G}^{(k,p)}\right)_{(k)}^{(k_J,p)} = g_{SMN;G}^{(k_J,p)}$ folgt unter erneuter Verwendung von Korollar 3.27

$$\mathfrak{L}(X_J) = EC_{m,p}(\mu_J, \Sigma_J, g_{SMN;G}^{(k_J,p)}) = SMN_{m,p}(\mu_J, \Sigma_J, G).$$

□

Mit den obigen Bezeichnungen ist die m -dimensionale Randverteilung von X_J also die Rang- k_J -stetige Skalenmischung der m -dimensionalen p -verallgemeinerten Normalverteilung mit den Parametern μ_J und Σ_J und der Mischungsverteilung G des initiierenden Zufallsvektors X . Insbesondere liefert Korollar B.4 speziell für $\mu = 0_n$ und $\Sigma = I_n$, dass jede m -dimensionale Randverteilung von $SMN_{n,p}(G)$ mit $SMN_{m,p}(G)$ übereinstimmt, falls die Mischungsverteilung G unabhängig von der Dimension n der Verteilung ist.

C Abbildungen

C.1 Abbildungen von Dichtegeneratoren $g^{(5,p)}$ von $\Phi_{g^{(5,p)}}$

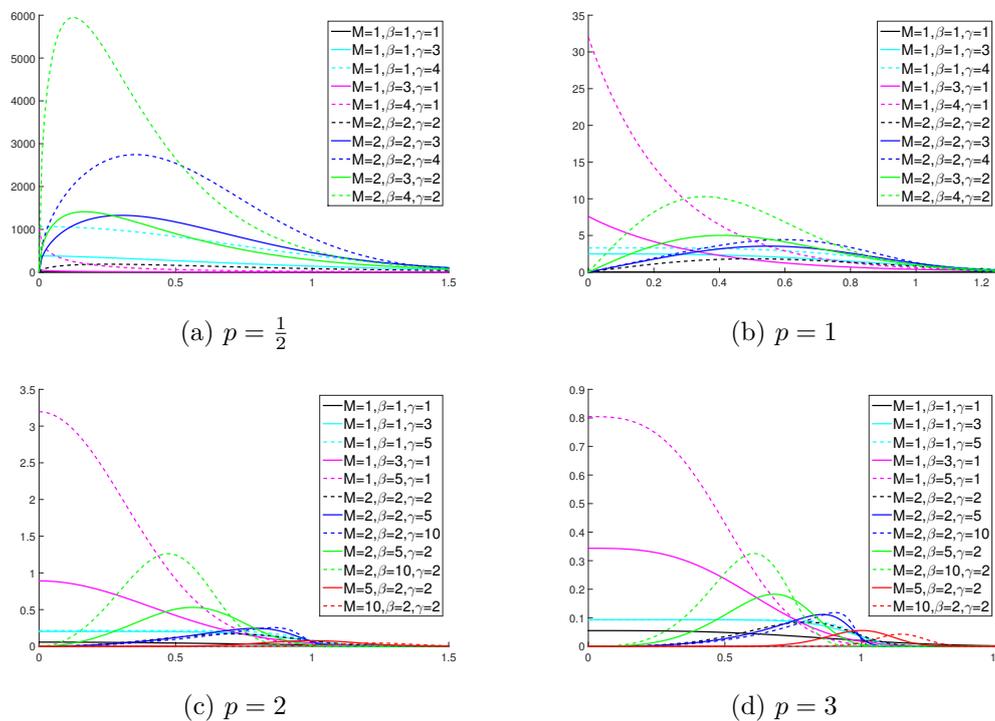


Abbildung C.1: Dichtegeneratoren $g_{Kt;M,\beta,\gamma}^{(5,p)}$ für variierende Parameter $M > 1 - \frac{5}{p}$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

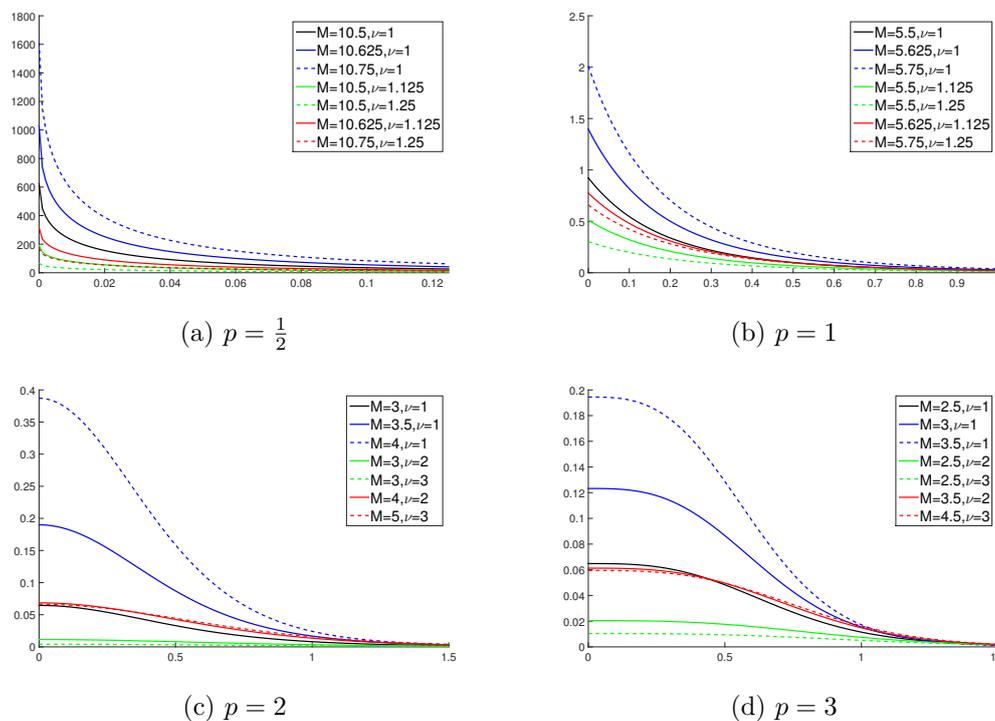


Abbildung C.2: Dichtegeneratoren $g_{PT7;M,\nu}^{(5,p)}$ für verschiedene Parameter $M > \frac{5}{p}$ und $\nu > 0$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

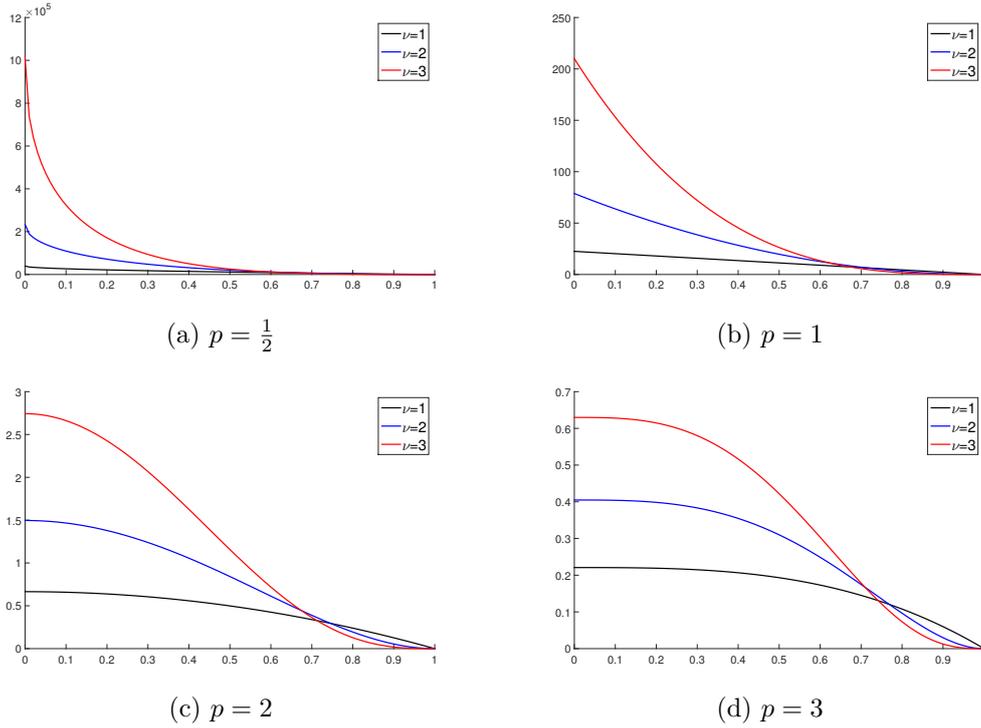


Abbildung C.3: Dichtegeneratoren $g_{PT^2; \nu}^{(5,p)}$ mit variierendem Parameter $\nu > 0$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

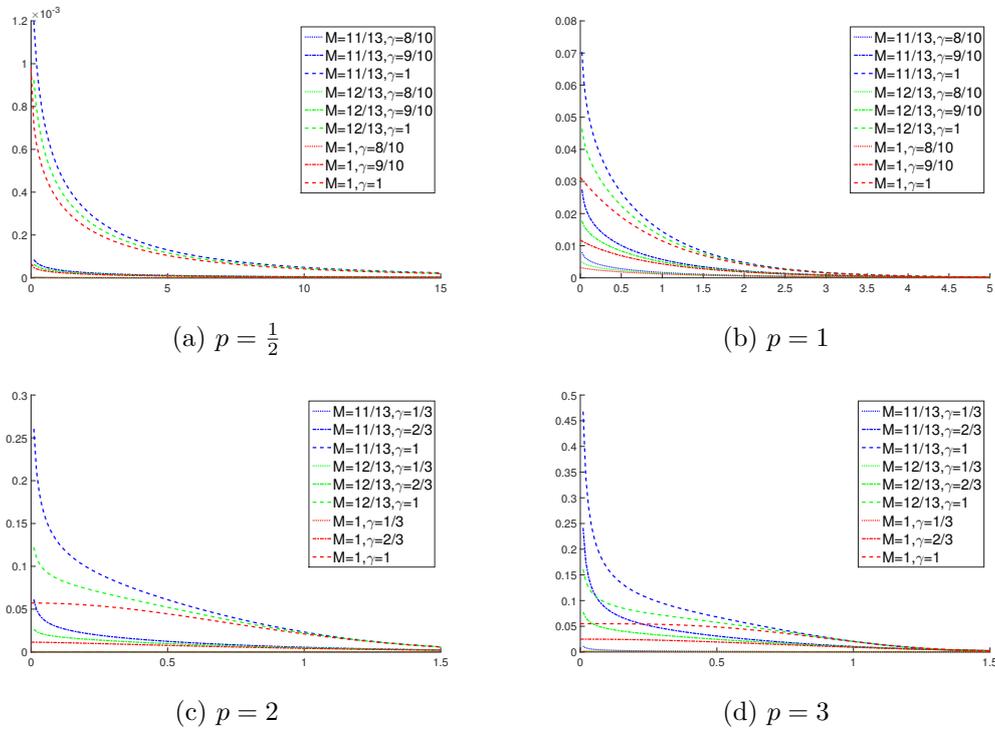
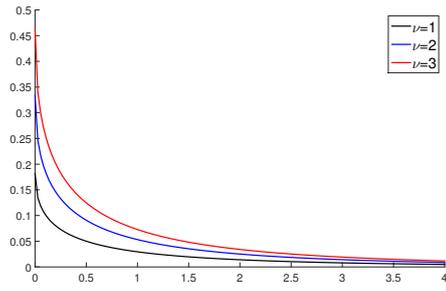
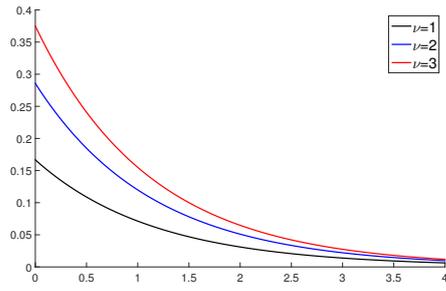


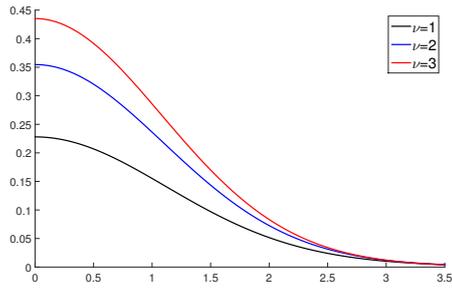
Abbildung C.4: Dichtegeneratoren $g_{Kt; M, 1, \gamma}^{(5,p)}$ für verschiedene Parameter $1 - \frac{5}{p} < M \leq 1$ und $0 < \gamma \leq 1$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.



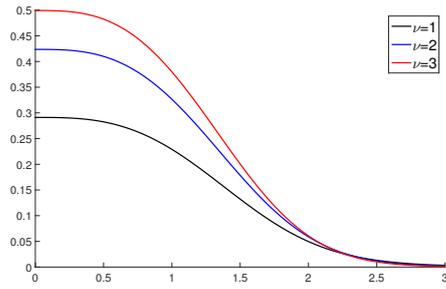
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$



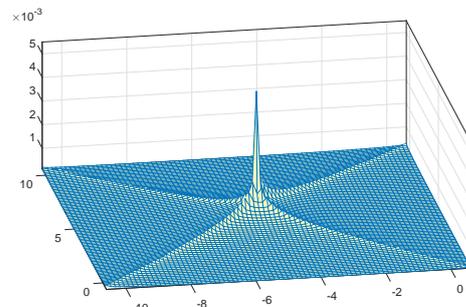
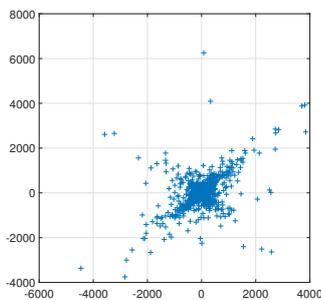
(c) $p = 2$



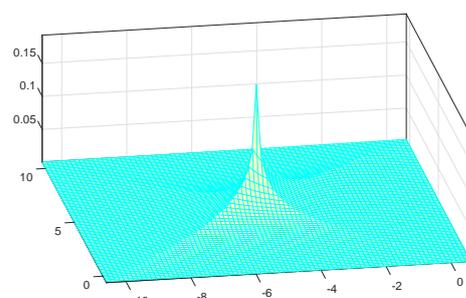
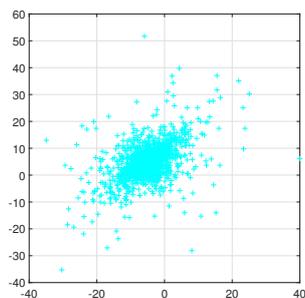
(d) $p = 3$

Abbildung C.5: Dichtegeneratoren $g_{SI;\nu}^{(5,p)}$ mit Parameter $\nu \in \{1, 2, 3\}$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

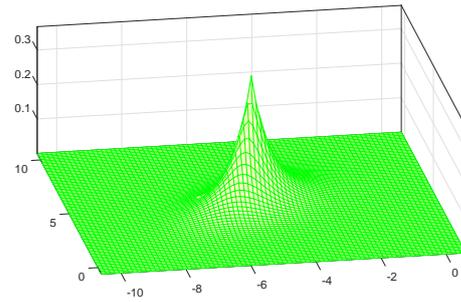
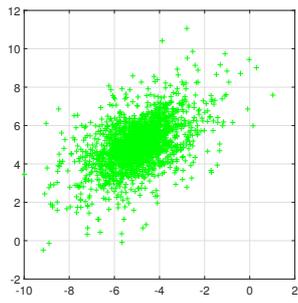
C.2 Abbildungen von Simulationen von $SMN_{2,p}(\mu, \Sigma, G)$



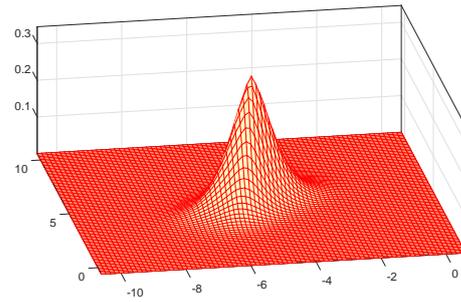
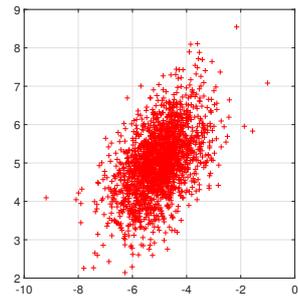
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$

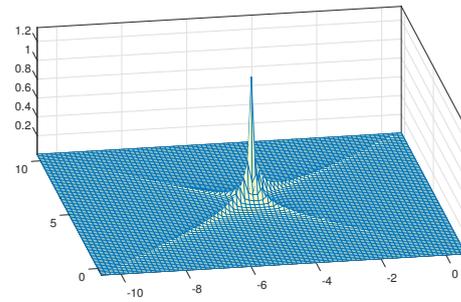
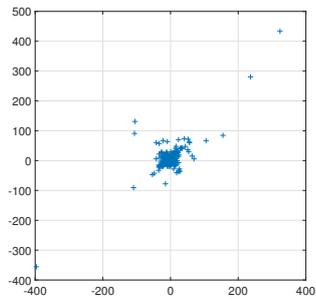


(c) $p = 2$

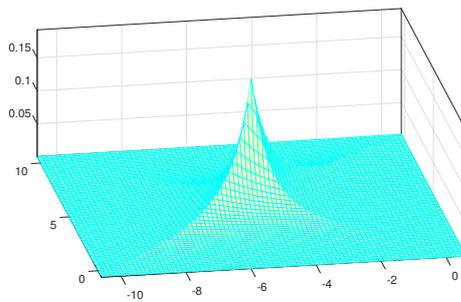
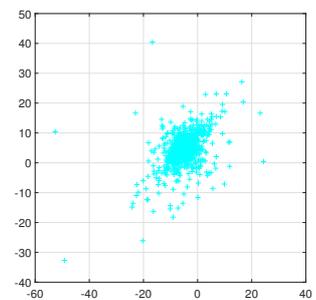


(d) $p = 3$

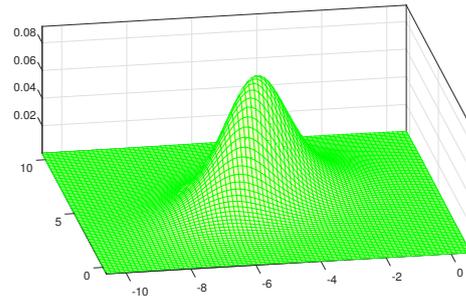
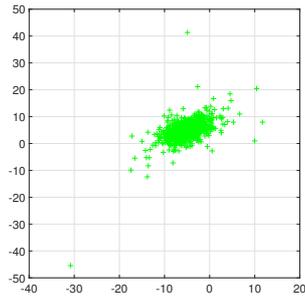
Abbildung C.6: 2000 Simulationen von $EC_{2,p}(\mu_1, \Sigma_1, g_{Kt;1,2,\frac{1}{2}}^{(2,p)})$ (links) sowie die zugehörige Lebesgue-Dichte (rechts) für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.



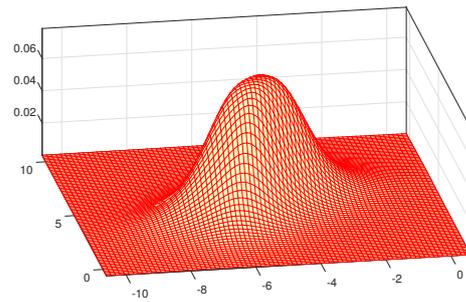
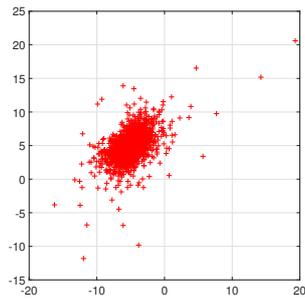
(e) $p = \frac{1}{2}$



(f) $p = 1$

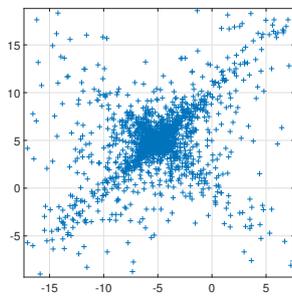


(g) $p = 2$

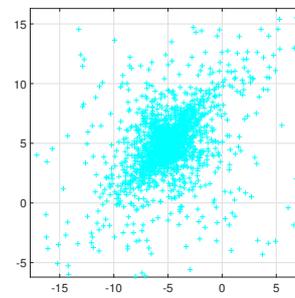


(h) $p = 3$

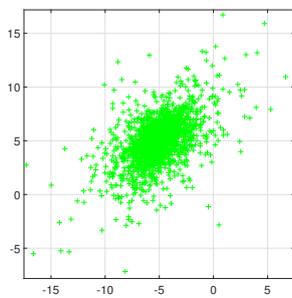
Abbildung C.7: 2000 Simulationen von $SMN_{2,p}(\mu_1, \Sigma_1, G_{3/p}^{St})$ (links) sowie die zugehörige Lebesgue-Dichte (rechts) für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.



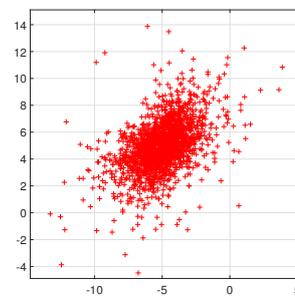
(i) Abbildung C.7e



(j) Abbildung C.7f

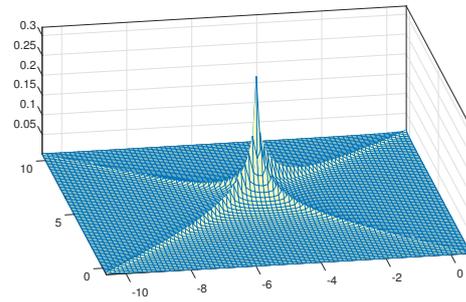
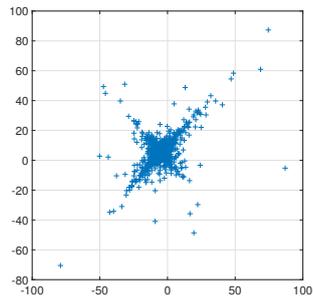


(k) Abbildung C.7g

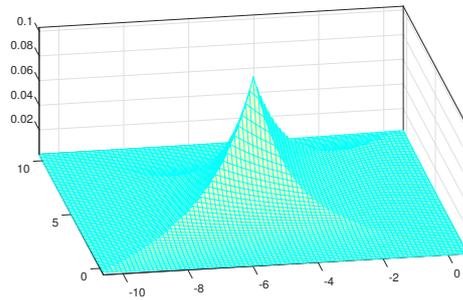
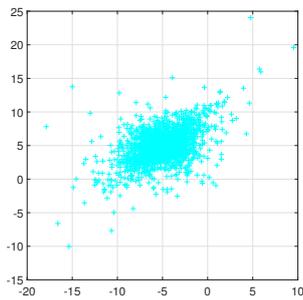


(l) Abbildung C.7h

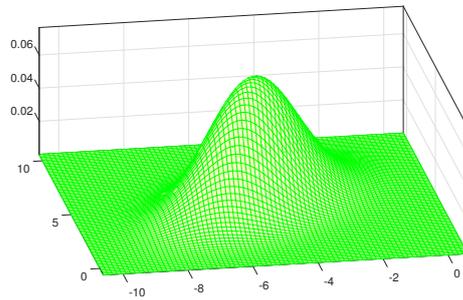
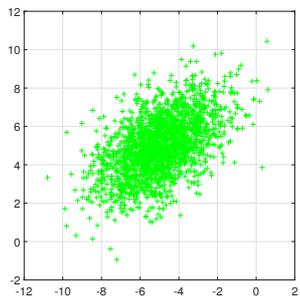
Abbildung C.8: Ausschnitte der linken Seiten von Abbildung C.7.



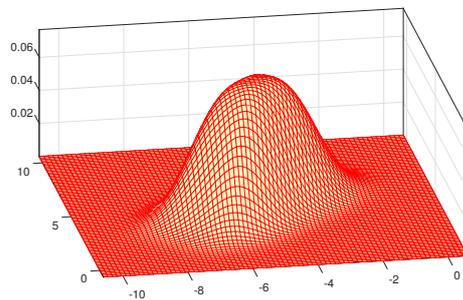
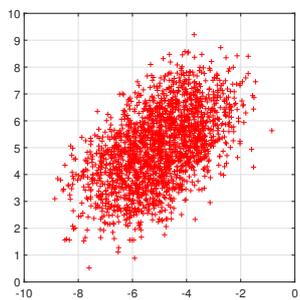
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$

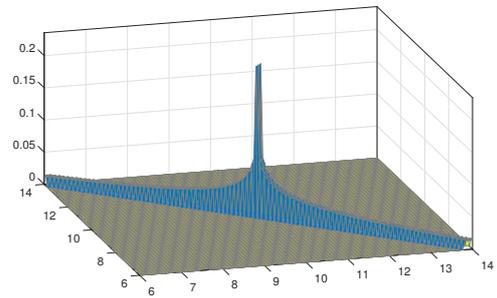
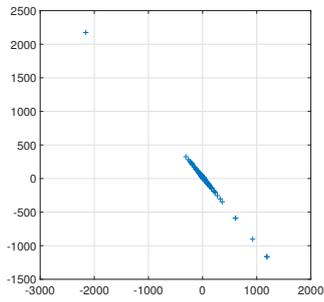


(c) $p = 2$

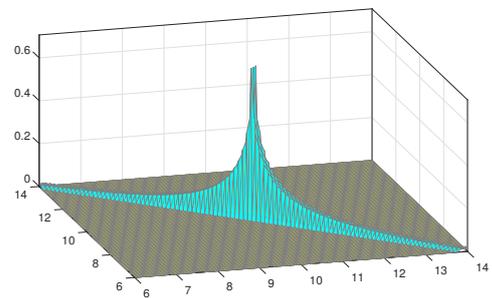
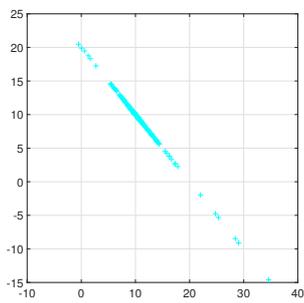


(d) $p = 3$

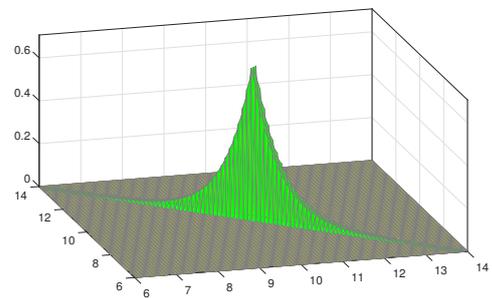
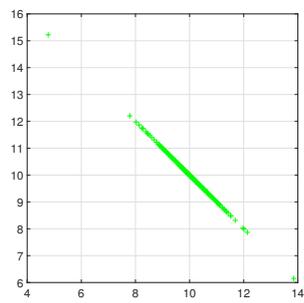
Abbildung C.9: 2000 Simulationen von $SMN_{2,p}(\mu_1, \Sigma_1, G_5^{SI})$ (links) sowie die zugehörige Lebesgue-Dichte (rechts) für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.



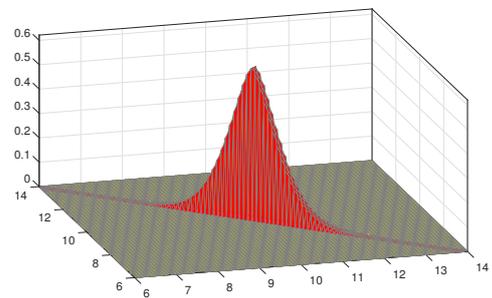
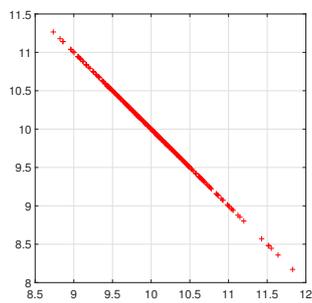
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$

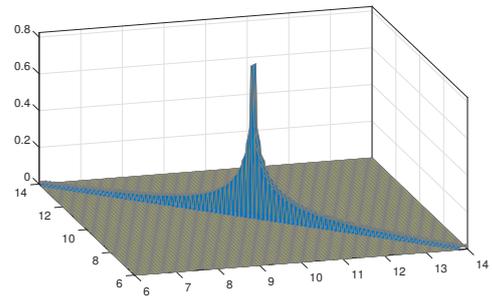
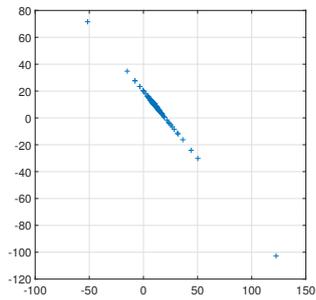


(c) $p = 2$

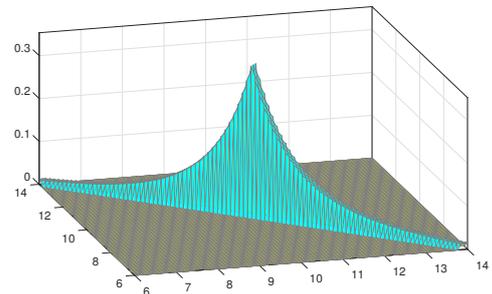
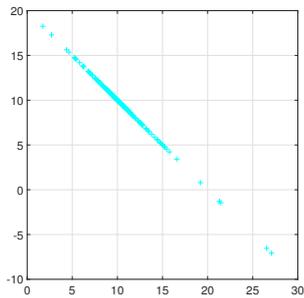


(d) $p = 3$

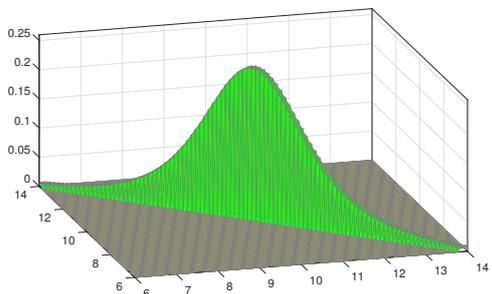
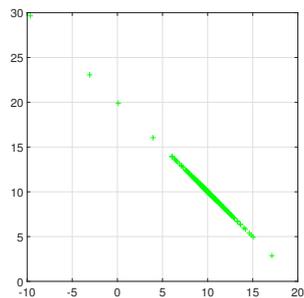
Abbildung C.10: 350 Simulationen (links) und die dichte-ähnliche Darstellung (rechts) von $EC_{2,p}(\mu_2, \Sigma_2, g_{Kt;1,2,\frac{1}{2}}^{(1,p)})$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.



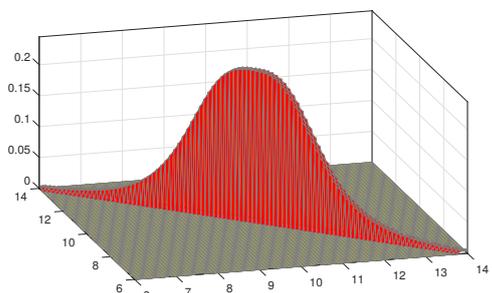
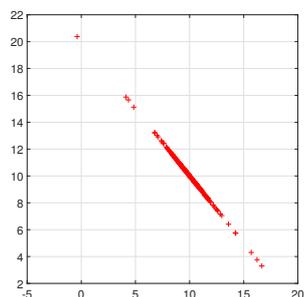
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$

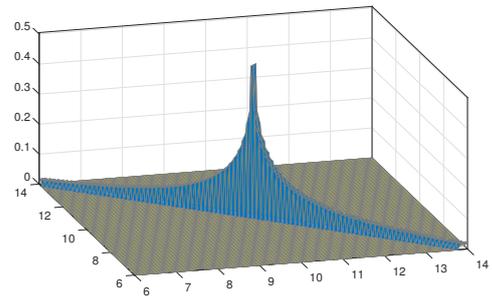
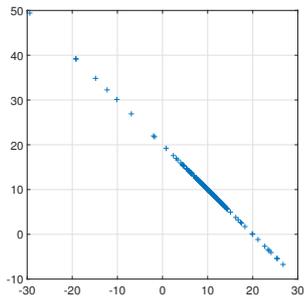


(c) $p = 2$

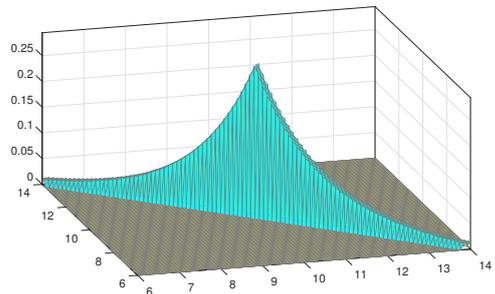
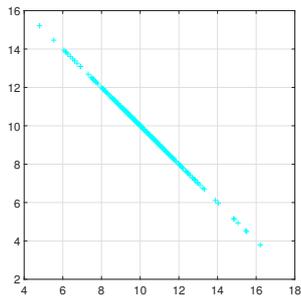


(d) $p = 3$

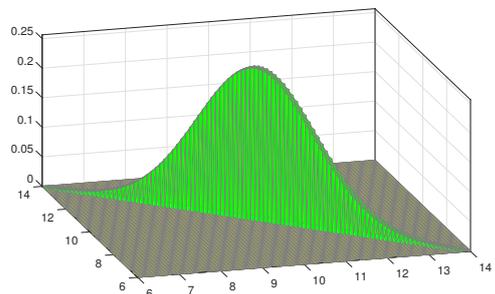
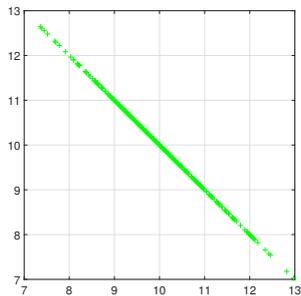
Abbildung C.11: 350 Simulationen (links) und die dichte-ähnliche Darstellung (rechts) von $SMN_{2,p}(\mu_2, \Sigma_2, G_{3/p}^{St})$ für $p \in \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2, 3 \right\}$.



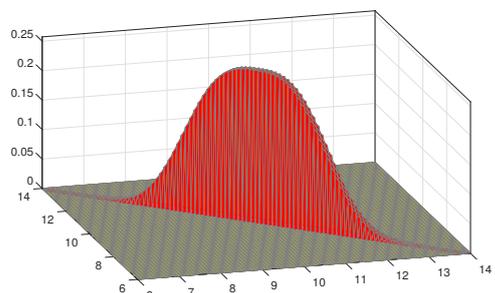
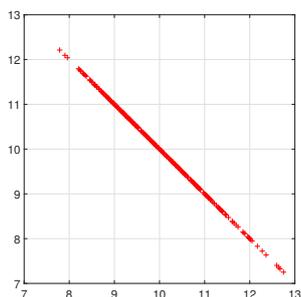
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$



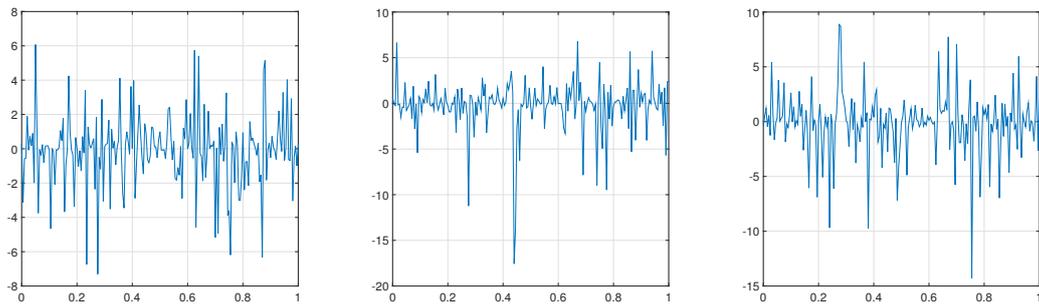
(c) $p = 2$



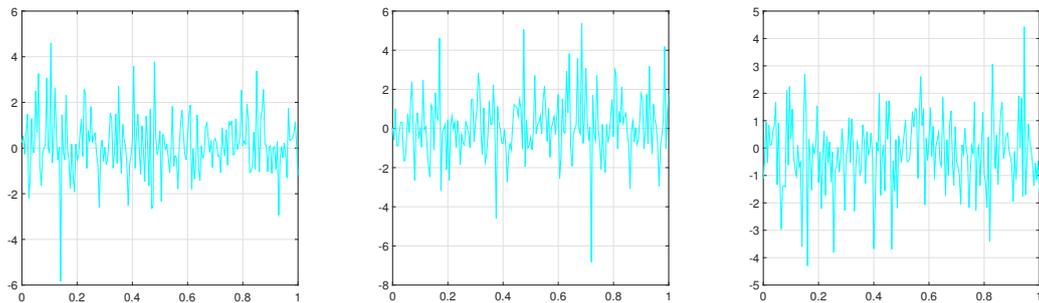
(d) $p = 3$

Abbildung C.12: 350 Simulationen (links) und die dichte-ähnliche Darstellung (rechts) von $SMN_{2,p}(\mu_2, \Sigma_2, G_5^{SI})$ für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

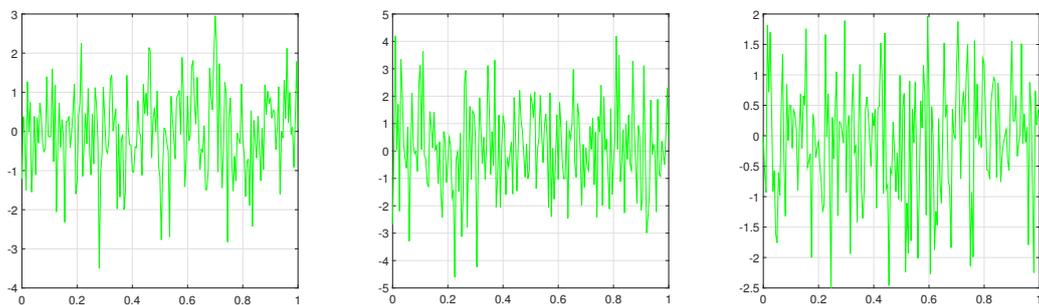
C.3 Abbildungen von Simulationen von $SMAGP_p(m, S, G)$



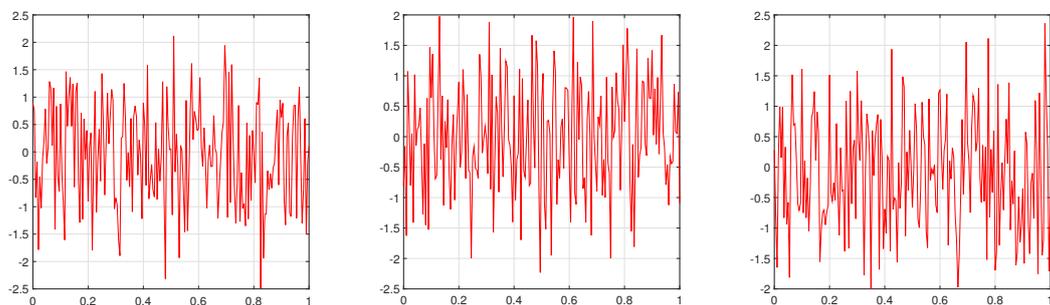
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$

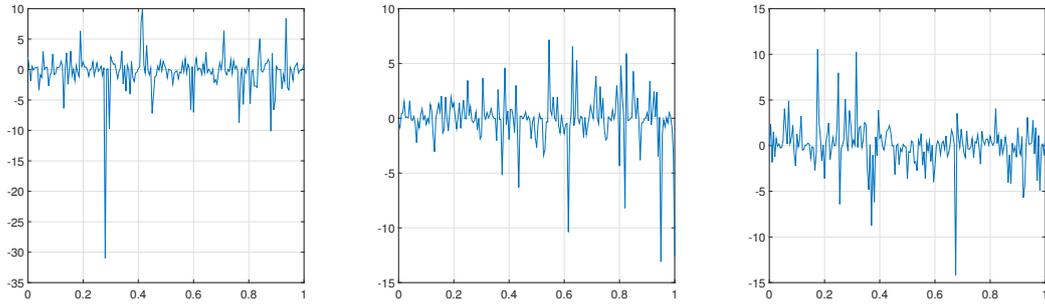


(c) $p = 2$

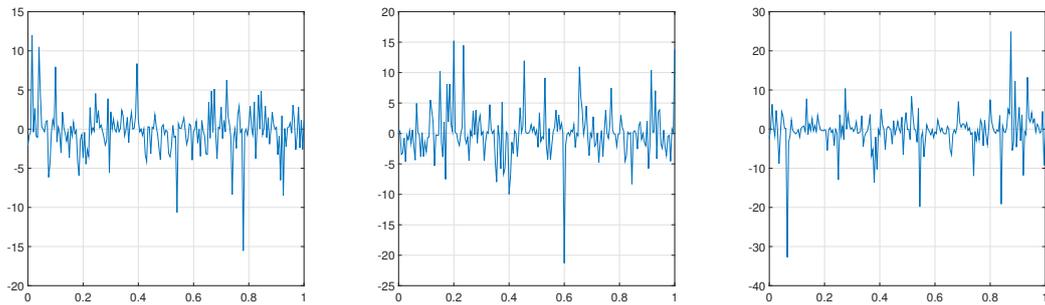


(d) $p = 3$

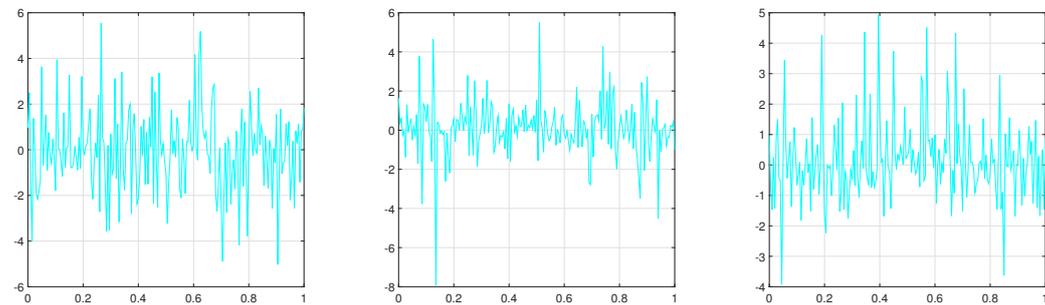
Abbildung C.13: Simulationen von SGP_p (links), $SStP_p(3)$ (Mitte) sowie $SSIP_p(5)$ (rechts) für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ und die Schrittweite $\frac{1}{200}$.



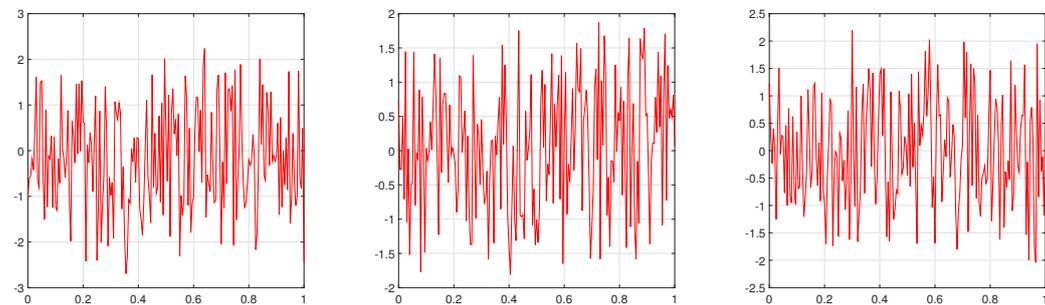
(a) p -verallgemeinerter Standard-Gauß-Prozess für $p = \frac{1}{2}$



(b) p -verallgemeinerter Standard-Slash-Prozess mit Parameter $\nu = 5$ für $p = \frac{1}{2}$

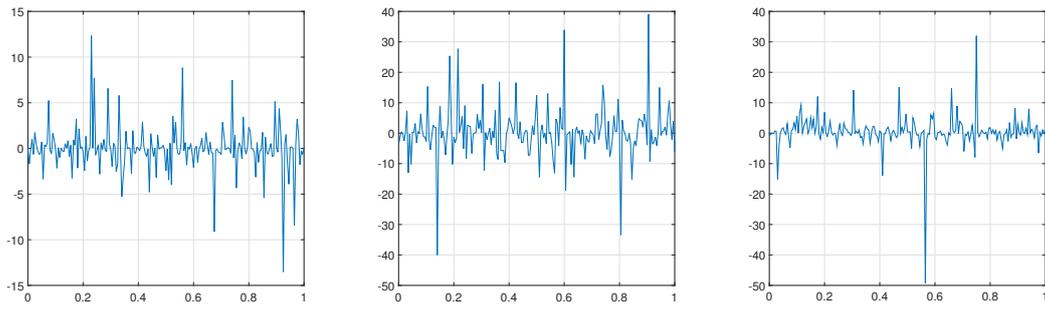


(c) p -verallgemeinerter Standard-Student- t -Prozess mit Parameter $\nu = 3$ für $p = 1$

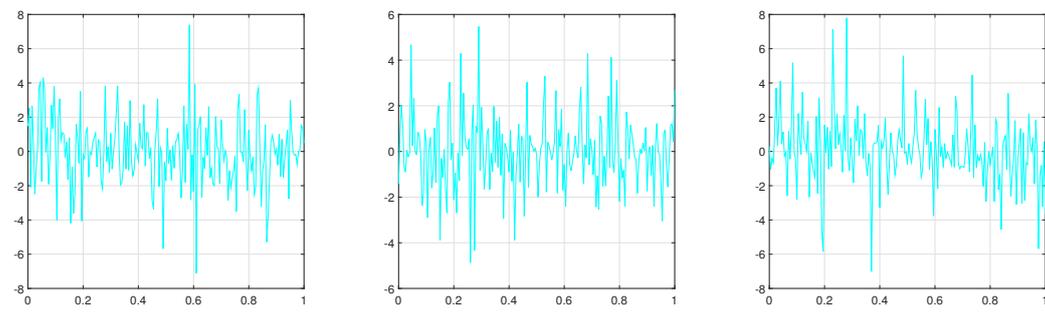


(d) p -verallgemeinerter Standard-Slash-Prozess mit Parameter $\nu = 5$ für $p = 3$

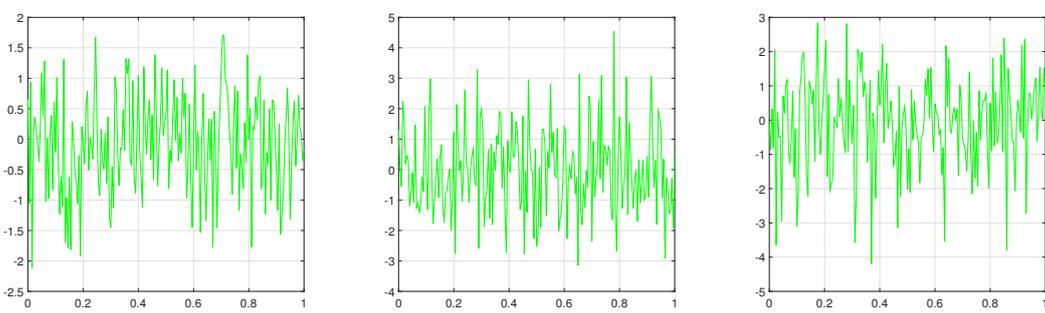
Abbildung C.14: Je drei Simulationen von $SGP_{\frac{1}{2}}$, $SSIP_{\frac{1}{2}}(5)$, $SStP_1(3)$ sowie $SSIP_3(5)$ für die Schrittweite $\frac{1}{200}$.



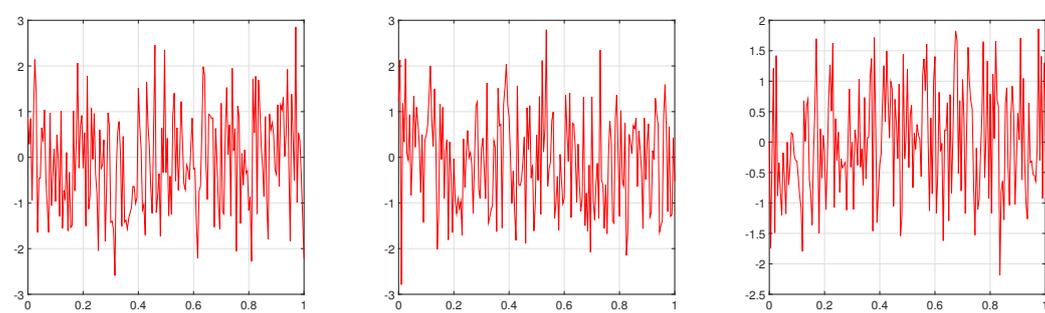
(a) $p = \frac{1}{2}$



(b) $p = 1$



(c) $p = 2$



(d) $p = 3$

Abbildung C.15: Simulationen von $SSIP_p(2)$ (links), $SSIP_p(1)$ (Mitte) sowie $SSIP_p(3)$ (rechts) für $p \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ und die Schrittweite $\frac{1}{200}$.

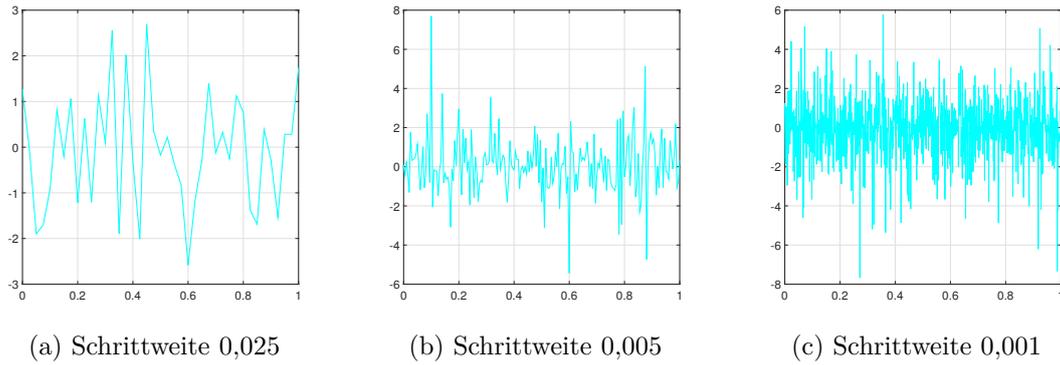


Abbildung C.16: Simulation der SGP_1 für die Schrittweiten $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{200}$ und $\frac{1}{1000}$.

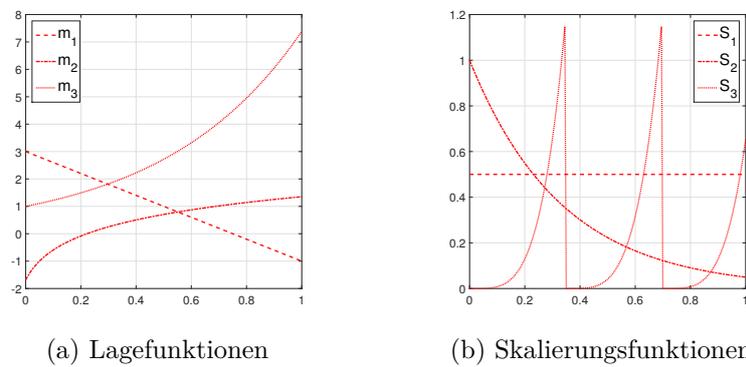


Abbildung C.17: Graphen der Lage- und Skalierungsfunktionen m_i bzw. S_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.

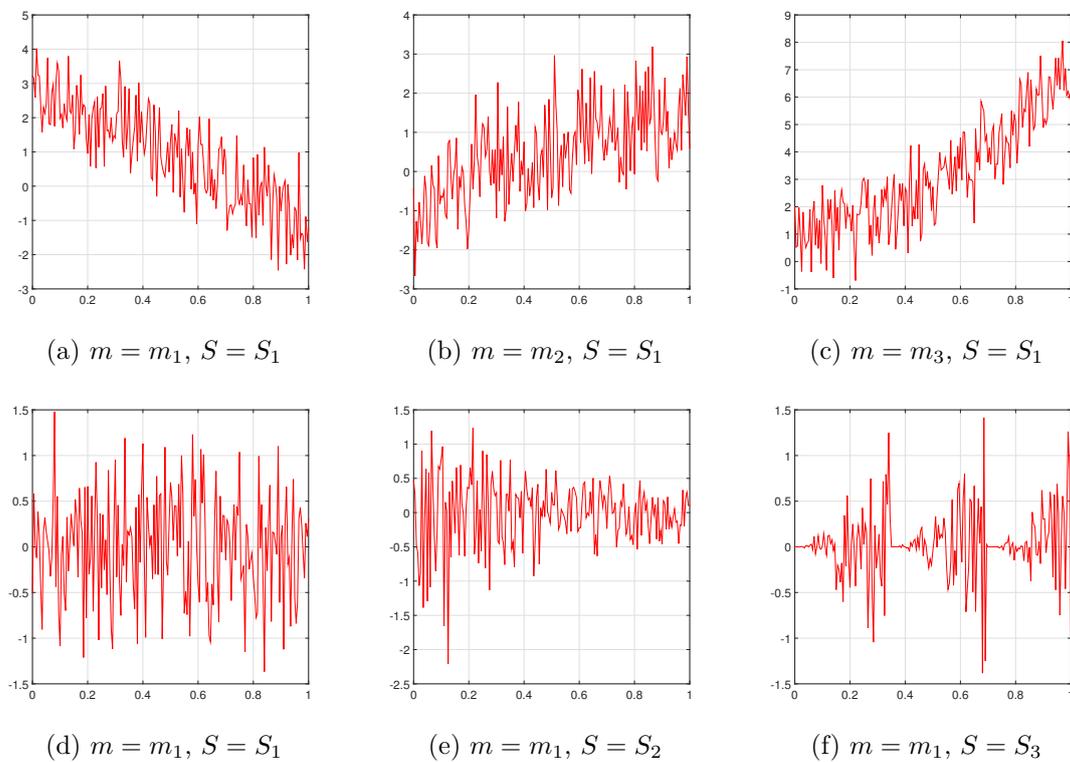


Abbildung C.18: Simulation des $AGP_3(m, S)$ für die Schrittweite $\frac{1}{200}$ und verschiedene Lage- und Skalierungsfunktionen m bzw. S .

D Quellcodes

D.1 Quellcodes zur Darstellung von Dichtegeneratoren und Dichten

```
1 function Dichtegenerator_pKotzTyp
2   Dichtegenerator_l2pNormal_versehdene_p( 2.5 , 175 )           % Abb 2.1a
3   Dichtegenerator_l2pKotzTyp_versehdene_p( 5.5 , 300 )         % Abb 2.1b
4   Dichtegenerator_lnpKotzTyp_verschParam( 5 , 1/2 , 1.5 , 150 ) % Abb D.1a
5   Dichtegenerator_lnpKotzTyp_verschParam( 5 , 1 , 1.25 , 125 ) % Abb D.1b
6   Dichtegenerator_lnpKotzTyp_verschParam( 5 , 2 , 1.5 , 150 ) % Abb D.1c
7   Dichtegenerator_lnpKotzTyp_verschParam( 5 , 3 , 1.5 , 150 ) % Abb D.1d
8   Dichtegenerator_lnpKotzTyp_SMpNormal_verschParam( 5 , 1/2 , 15 , 150 ) % Abb D.4a
9   Dichtegenerator_lnpKotzTyp_SMpNormal_verschParam( 5 , 1 , 5 , 250 ) % Abb D.4b
10  Dichtegenerator_lnpKotzTyp_SMpNormal_verschParam( 5 , 2 , 1.5 , 150 ) % Abb D.4c
11  Dichtegenerator_lnpKotzTyp_SMpNormal_verschParam( 5 , 3 , 1.5 , 150 ) % Abb D.4d
12 end
13
14 function Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp(n,p,M,beta,gam,min,max,ZwSt,Color,Stil)
15 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{Kt;M,bet,gam\}}^{\{(n,p)\}}$  der  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischen Kotz-
16 % Typ-Verteilung mit Parametern M, bet und gam mit  $M > 1-n/p$ ,  $bet > 0$  und  $gam > 0$  über dem
17 % Intervall [min,max] mit ZwSt Zwischenstellen in der Farbe Color und dem Linienstil Stil
18   if M <= 1-n/p
19     error('\tDer Parameter M=%g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (%g,inf).',M,1-n/p) ;
20   elseif beta <= 0
21     error('\tDer Parameter beta=%0.4g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',beta) ;
22   elseif gam <= 0
23     error('\tDer Parameter gamma=%0.4g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',gam) ;
24   else
25     r = linspace( min , max , ZwSt ) ;
26     Konst_DG = ( p/(2*gamma(1/p)) )^n * gam * beta^( (n+p*(M-1))/(p*gam) ) ...
27               * gamma(n/p) / gamma( (n+p*(M-1))/(p*gam) ) ;
28     g_pKt = Konst_DG * r.^(p*(M-1)) .* exp(-beta.*r.^(p*gam)) ;
29     plot( r , g_pKt ,'Color',Color,'LineStyle',Stil,'Linewidth',2) ;
30   end
31 end
32
33 function Dichtegenerator_l2pNormal_versehdene_p(max,ZwSt)
34 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{PE\}}^{\{(2,p)\}}$  für p aus { 1/2, 1, 2, 3 } in einer Figure
35 fig1 = figure('Name','Dichtegeneratoren bivariater p-verallgemeinerter Normalverteilungen') ;
36 set( fig1 , 'Position' ,[300 160 1142 688]) ;
37 axes1 = axes('Parent',fig1,'FontSize',18) ;
38 hold(axes1,'on') ;
39 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 1/2 , 1 , 2 , 1 , 0 , max , ZwSt , '[0,0.45,0.74]' , '-' )
40 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 1 , 1 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'c' , '-' )
41 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 2 , 1 , 1/2 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-' )
42 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 3 , 1 , 1/3 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-' )
43 leg1 = legend( 'p=1/2' , 'p=1' , 'p=2' , 'p=3' ) ;
44 set( leg1 , 'Location' , 'NorthEast' , 'FontSize' , 24 ) ;
```

```

45     xlim([0 max]) ;
46     hold(axes1,'off') ;
47 end
48
49 function Dichtegenerator_l2pKotzTyp_verschiedene_p(max,ZwSt)
50 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{Kt;3,1,2\}^{(2,p)}}$  für  $p$  aus  $\{1/2, 1, 2, 3\}$  in einer Figure
51 fig1 = figure('Name','Dichtegeneratoren  $l_{\{2,p\}}$ -symmetrischer Kotz-Typ-Verteilungen') ;
52     set(fig1, 'Position',[300 160 1142 688]) ;
53     axes1 = axes('Parent',fig1, 'FontSize',18) ;
54     hold(axes1,'on') ;
55     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 1/2 , 3 , 1 , 2 , 0 , max , ZwSt , ' [0,0.45,0.74] ' , '-')
56     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 1 , 3 , 1 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'c' , '-')
57     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 2 , 3 , 1 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-')
58     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( 2 , 3 , 3 , 1 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-')
59     leg1 = legend( 'p=1/2' , 'p=1' , 'p=2' , 'p=3' ) ;
60     set(leg1, 'Location','NorthEast','FontSize',24) ;
61     xlim([0 max]) ;
62     hold(axes1,'off') ;
63 end
64
65 function Dichtegenerator_lnpKotzTyp_verschParam(n,p,max,ZwSt)
66 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{Kt;M,beta,gamma\}^{(n,p)}}$  für verschiedene Parameter M,
67 % beta und gamma mit  $M > 1-n/p$ ,  $beta > 0$  und  $gamma > 0$  in einer Figure
68     Str1 = 'Dichtegeneratoren  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischer Kotz-Typ-Verteilungen für' ;
69     Str2 = sprintf('%s n=%d, p=%g und verschiedene Parameter M, beta und gamma',Str1,n,p) ;
70     fig1 = figure('Name',Str2) ;
71     set(fig1, 'Position',[300 160 1142 688]) ;
72     axes1 = axes('Parent',fig1, 'FontSize',18) ;
73     hold(axes1,'on') ;
74     if p > 1
75         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'k' , '-')
76         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 3 , 0 , max , ZwSt , 'c' , '-')
77         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 5 , 0 , max , ZwSt , 'c' , '--')
78         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 3 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'm' , '-')
79         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 5 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'm' , '--')
80         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 2 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'k' , '--')
81         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 2 , 5 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-')
82         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 2 , 10 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '--')
83         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 5 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-')
84         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 10 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '--')
85         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 5 , 2 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-')
86         Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 10 , 2 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '--')
87         leg1 = legend( 'M=1,\beta=1,\gamma=1' , 'M=1,\beta=1,\gamma=3' , ...
88             'M=1,\beta=1,\gamma=5' , 'M=1,\beta=3,\gamma=1' , ...
89             'M=1,\beta=5,\gamma=1' , 'M=2,\beta=2,\gamma=2' , ...
90             'M=2,\beta=2,\gamma=5' , 'M=2,\beta=2,\gamma=10' , ...
91             'M=2,\beta=5,\gamma=2' , 'M=2,\beta=10,\gamma=2' , ...
92             'M=5,\beta=2,\gamma=2' , 'M=10,\beta=2,\gamma=2' ) ;

```

```

93 else
94     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'k' , '-' )
95     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 3 , 0 , max , ZwSt , 'c' , '-' )
96     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 4 , 0 , max , ZwSt , 'c' , '--' )
97     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 3 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'm' , '-' )
98     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 4 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'm' , '--' )
99     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 2 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'k' , '--' )
100    Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 2 , 3 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-' )
101    Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 2 , 4 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '--' )
102    Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 3 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-' )
103    Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 2 , 4 , 2 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '--' )
104        leg1 = legend( 'M=1,\beta=1,\gamma=1' , 'M=1,\beta=1,\gamma=3' , ...
105                    'M=1,\beta=1,\gamma=4' , 'M=1,\beta=3,\gamma=1' , ...
106                    'M=1,\beta=4,\gamma=1' , 'M=2,\beta=2,\gamma=2' , ...
107                    'M=2,\beta=2,\gamma=3' , 'M=2,\beta=2,\gamma=4' , ...
108                    'M=2,\beta=3,\gamma=2' , 'M=2,\beta=4,\gamma=2' ) ;
109 end
110     set(leg1, 'Location', 'NorthEast', 'FontSize', 24) ;
111     xlim([0 max]) ;
112     hold(axes1, 'off' ) ;
113 end
114
115 function Dichtegenerator_lnpKotzTyp_SMPNormal_verschParam(n,p,max,ZwSt)
116 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{Kt;M,1,\gamma\}}^{\{(n,p)\}}$  für verschiedene Parameter M und
117 % gamma mit  $1-n/p < M \leq 1$  und  $0 < \gamma \leq 1$  in einer Figure
118     Str1 = 'Dichtegeneratoren  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischer Kotz-Typ-Verteilungen für' ;
119     Str2 = sprintf('%s n=%d, p=%g und verschiedene Parameter M, beta und gamma',Str1,n,p) ;
120     Str3 = sprintf('%s (Skalenmischungen der p-verallgemeinerten Normalverteilung)',Str2) ;
121     fig1 = figure('Name',Str3) ;
122     set(fig1, 'Position', [300 160 1142 688]) ;
123     axes1 = axes('Parent', fig1 , 'FontSize', 18) ;
124     hold(axes1, 'on' ) ;
125 if p > 1
126     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 11/13 , 1 , 1/3 , 0 , max , ZwSt , 'b' , ':' )
127     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 11/13 , 1 , 2/3 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-.' )
128     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 11/13 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '--' )
129     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 12/13 , 1 , 1/3 , 0 , max , ZwSt , 'g' , ':' )
130     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 12/13 , 1 , 2/3 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-.' )
131     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 12/13 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '--' )
132     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 1/3 , 0 , max , ZwSt , 'r' , ':' )
133     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 2/3 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-.' )
134     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '--' )
135     leg1 = legend( 'M=11/13,\gamma=1/3' , 'M=11/13,\gamma=2/3' , ...
136                 'M=11/13,\gamma=1' , 'M=12/13,\gamma=1/3' , ...
137                 'M=12/13,\gamma=2/3' , 'M=12/13,\gamma=1' , ...
138                 'M=1,\gamma=1/3' , 'M=1,\gamma=2/3' , 'M=1,\gamma=1' ) ;
139 else
140     Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 11/13 , 1 , 8/10 , 0 , max , ZwSt , 'b' , ':' )

```

```

141 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 11/13 , 1 , 9/10 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-.' )
142 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 11/13 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '--' )
143 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 12/13 , 1 , 8/10 , 0 , max , ZwSt , 'g' , ':' )
144 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 12/13 , 1 , 9/10 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-.' )
145 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 12/13 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '--' )
146 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 8/10 , 0 , max , ZwSt , 'r' , ':' )
147 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 9/10 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-.' )
148 Plot_Dichtegenerator_lnpKotzTyp( n , p , 1 , 1 , 1 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '--' )
149     leg1 = legend( 'M=11/13,\gamma=8/10' , 'M=11/13,\gamma=9/10' , ...
150                 'M=11/13,\gamma=1' , 'M=12/13,\gamma=8/10' , ...
151                 'M=12/13,\gamma=9/10' , 'M=12/13,\gamma=1' , ...
152                 'M=1,\gamma=8/10' , 'M=1,\gamma=9/10' , 'M=1,\gamma=1' ) ;
153 end
154     set(leg1 , 'Location' , 'NorthEast' , 'FontSize' , 24) ;
155     xlim([0 max]) ;
156     hold(axes1 , 'off' ) ;
157 end

```

```

1 function Dichte_2dim_pNormal
2     Plot_Dichte_2dim_pNormal( 1/2 , -2.501 , 2.501 , 0.061 , [0,0.45,0.74] )           % Abb 2.2a
3     Plot_Dichte_2dim_pNormal( 1 , -2.55 , 2.55 , 0.085 , 'cyan' )                 % Abb 2.2b
4     Plot_Dichte_2dim_pNormal( 2 , -2.55 , 2.55 , 0.085 , 'green' )               % Abb 2.2c
5     Plot_Dichte_2dim_pNormal( 3 , -2.55 , 2.55 , 0.085 , 'red' )                 % Abb 2.2d
6 end
7
8 function Plot_Dichte_2dim_pNormal(p,min,max,ZwSt,EdgeColor)
9 % Darstellung der Dichte  $g_{\{PE\}^{\{2,p\}}(|\cdot|_p)}$  der zweidimensionalen p-verallgemeinerten
10 % Normalverteilung über dem Intervall [min,max] mit ZwSt Zwischenstellen in der Flächenfarbe
11 % gelb und der Kantenfarbe EdgeColor
12     Str1 = 'Dichte der bivariaten p-verallgemeinerten Normalverteilung' ;
13     Str2 = sprintf(' %s für p=%g' , Str1 , p) ;
14     fig1 = figure('Name' , Str2) ;
15     set( fig1 , 'Position' , [300 160 1142 688] ) ;
16     axes1 = axes('Parent' , fig1) ;
17     [X,Y] = meshgrid( min:ZwSt:max ) ;
18     Z = (p^(1-1/p)/(2*gamma(1/p)))^2 * exp(-( abs(X).^p + abs(Y).^p )./p) ;
19     surf(X,Y,Z,'FaceColor' , [1,1,0.52] , 'FaceAlpha' , 0.5 , 'EdgeColor' , EdgeColor , 'EdgeAlpha' , 1) ;
20     axes1.FontSize = 18 ;
21     axis([min,max,min,max,0,inf])
22     view(-65,45)
23     box on
24     grid on
25 end

```

```

1 function Dichte_2dim_pKotzTyp
2     Plot_Dichte_2dim_pKotzTyp( 1/2 , 3 , 1 , 2 , -3 , 3 , 0.072 , [0,0.45,0.74] ) % Abb 2.3a
3     Plot_Dichte_2dim_pKotzTyp( 1 , 3 , 1 , 2 , -2.55 , 2.55 , 0.085 , 'cyan' ) % Abb 2.3b

```

```

4   Plot_Dichte_2dim_pKotzTyp( 2 , 3 , 1 , 2 , -1.86 , 1.86 , 0.062 , 'green' )      % Abb 2.3c
5   Plot_Dichte_2dim_pKotzTyp( 3 , 3 , 1 , 2 , -1.65 , 1.65 , 0.055 , 'red' )      % Abb 2.3d
6 end
7
8 function Plot_Dichte_2dim_pKotzTyp(p,M,beta,gam,min,max,ZwSt,EdgeColor)
9 % Darstellung der Dichte  $g_{\{Kt;M,beta,gam\}^{\{2,p\}}(|\cdot|_p)}$  der  $l_{\{2,p\}}$ -symmetrischen Kotz-Typ
10 % Verteilung mit Parametern M, beta und gam mit  $M > 1-2/p$ ,  $beta > 0$  und  $gam > 0$  im Intervall
11 % [min,max] mit ZwSt Zwischenstellen in gelblich gefärbten Flächen und der Kantenfarbe EdgeColor
12   if M <= 1-2/p
13       error('\tDer Parameter M=%g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (%g,inf).',M,1-2/p) ;
14   elseif beta <= 0
15       error('\tDer Parameter beta=%0.4g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',beta) ;
16   elseif gam <= 0
17       error('\tDer Parameter gamma=%0.4g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',gam) ;
18   else
19       Str1 = 'Dichte der  $l_{\{2,p\}}$ -symmetrischen Kotz-Typ-Verteilung mit Parametern' ;
20       Str2 = sprintf('%s M=%g, beta=%g und gamma=%g für p=%g',Str1,M,beta,gam,p) ;
21       fig1 = figure('Name',Str2) ;
22       set(fig1, 'Position',[300 160 1142 688]) ;
23       axes1 = axes('Parent',fig1) ;
24       [X,Y] = meshgrid( min:ZwSt:max ) ;
25       Konst = (p/(2*gamma(1/p)))^2 * gam * beta^((2+p*(M-1))/(p*gam)) ...
26               * gamma(2/p) / gamma((2+p*(M-1))/(p*gam)) ;
27       R_hoch_p = @(x,y) abs(y).^p + abs(x).^p ;
28       Z = Konst * ( R_hoch_p(X,Y) ).^(M-1) .* exp(-beta*( R_hoch_p(X,Y) ).^gam ) ;
29       surf(X,Y,Z,'FaceColor',[1,1,0.52], 'FaceAlpha',0.5,'EdgeColor',EdgeColor,'EdgeAlpha',1) ;
30       axes1.FontSize = 18 ;
31       axis([ min,max,min,max,0,inf])
32       view(-65,45)
33       box on
34       grid on
35   end
36 end

```

```

1 function Dichtegenerator_pPearsonTyp7
2   Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7_verschiedeneParameter( 5 , 1/2 , 0.125 , 125 )      % Abb D.2a
3   Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7_verschiedeneParameter( 5 , 1 , 1 , 100 )          % Abb D.2b
4   Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7_verschiedeneParameter( 5 , 2 , 1.5 , 150 )        % Abb D.2c
5   Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7_verschiedeneParameter( 5 , 3 , 1.5 , 150 )        % Abb D.2d
6 end
7
8 function Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7(n,p,M,nu,min,max,ZwSt,Color,Stil)
9 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{PT7;M,nu\}^{\{n,p\}}}$  der  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischen Pearson-
10 % Typ VII-Verteilung mit Parametern M und nu mit  $M > n/p$  und  $nu > 0$  über dem Intervall
11 % [min,max] mit ZwSt Zwischenstellen in der Farbe Color und dem Linienstil Stil
12   if M <= n/p
13       error('\tDer Parameter M=%g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (%g,inf).',M,n/p) ;

```

```

14 elseif nu <= 0
15     error('Der Parameter nu=%g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',nu) ;
16 else
17     r = linspace( min , max , ZwSt ) ;
18     Konst_DG = ( p/(2*gamma(1/p)) )^n * gamma(M) / nu^(n/p) / gamma( M-n/p ) ;
19     g_PT7 = Konst_DG * ( 1 + r.^p/nu ).^(-M) ;
20     plot( r , g_PT7 , 'Color',Color,'LineStyle',Stil , 'Linewidth',2) ;
21 end
22 end
23
24 function Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7_verschiedeneParameter(n,p,max,ZwSt)
25 % Darstellung des Dichtegenerators g_{PT7;M,nu}^{(n,p)} für einige Parameter M und nu mit
26 % M > n/p und nu > 0 in einer Figure
27     Str1 = 'Dichtegeneratoren l_{n,p}-symmetrischer Pearson-Typ VII-Verteilungen' ;
28     Str2 = sprintf(' %s für n=%d, p=%g und verschiedene Parameter M und nu',Str1,n,p) ;
29     fig1 = figure('Name',Str2) ;
30     set(fig1 , 'Position' ,[300 160 1142 688]) ;
31     axes1 = axes('Parent', fig1 , 'FontSize',18) ;
32     hold(axes1,'on') ;
33 M = ceil(2*n/p)/2 + 1/2 ;
34 nu = 1 ;
35 if p > 1
36     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M , nu , 0 , max , ZwSt , 'k' , '-' )
37     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1/2 , nu , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-' )
38     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1 , nu , 0 , max , ZwSt , 'b' , '--' )
39     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M , nu+1 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-' )
40     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M , nu+2 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '--' )
41     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1 , nu+1 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-' )
42     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+2 , nu+2 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '--' )
43     leg1 = legend( sprintf('M=%g, \nu=%g',M,nu) , ...
44                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1/2,nu) , ...
45                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1,nu) , ...
46                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M,nu+1) , ...
47                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M,nu+2) , ...
48                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1,nu+1) , ...
49                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M+2,nu+2) ) ;
50 else
51     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M , nu , 0 , max , ZwSt , 'k' , '-' )
52     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1/8 , nu , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-' )
53     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1/4 , nu , 0 , max , ZwSt , 'b' , '--' )
54     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M , nu+1/8 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '-' )
55     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M , nu+1/4 , 0 , max , ZwSt , 'g' , '--' )
56     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1/8 , nu+1/8 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-' )
57     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp7( n , p , M+1/4 , nu+1/4 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '--' )
58     leg1 = legend( sprintf('M=%g, \nu=%g',M,nu) , ...
59                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1/8,nu) , ...
60                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1/4,nu) , ...
61                   sprintf('M=%g, \nu=%g',M,nu+1/8) , ...

```

```

62         sprintf('M=%g, \nu=%g',M,nu+1/4) , ...
63         sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1/8,nu+1/8) , ...
64         sprintf('M=%g, \nu=%g',M+1/4,nu+1/4) ) ;
65     end
66     set(leg1, 'Location', 'NorthEast', 'FontSize',24) ;
67     xlim([0 max]) ;
68     hold(axes1, 'off') ;
69 end

```

```

1 function Dichtegenerator_pPearsonTyp2
2     Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2_verschiedeneParameter( 5 , 1/2 , 1 , 100 )      % Abb D.3a
3     Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2_verschiedeneParameter( 5 , 1 , 1 , 100 )      % Abb D.3b
4     Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2_verschiedeneParameter( 5 , 2 , 1 , 100 )      % Abb D.3c
5     Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2_verschiedeneParameter( 5 , 3 , 1 , 100 )      % Abb D.3d
6 end
7
8 function Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2(n,p,nu,min,max,ZwSt,Color,Stil)
9 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{PT2;nu\}^{\{n,p\}}}$  der  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischen Pearson-
10 % Typ II-Verteilung mit Parameter  $nu > 0$  über dem Intervall  $[min,max]$  mit ZwSt Zwischenstellen
11 % in der Farbe Color und dem Linienstil Stil
12     if nu <= 0
13         error('Der Parameter nu=%g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',nu) ;
14     else
15         r = linspace( min , max , ZwSt ) ;
16         Konst_DG = ( p/(2*gamma(1/p)) )^n * gamma(n/p+nu+1) / gamma(nu+1) ;
17         g_PT2 = Konst_DG * ( 1 - r.^p ).^(nu) .* (0<=r).*(r<=1) ;
18         plot( r , g_PT2 , 'Color',Color,'LineStyle', Stil , 'Linewidth',2) ;
19     end
20 end
21
22 function Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2_verschiedeneParameter(n,p,max,ZwSt)
23 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{PT2;nu\}^{\{n,p\}}}$  für nu aus {1, 2, 3} in einer Figure
24     Str1 = 'Dichtegeneratoren  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischer Pearson-Typ II-Verteilungen' ;
25     Str2 = sprintf('%s für n=%d, p=%g und verschiedene Parameter nu',Str1,n,p) ;
26     fig1 = figure('Name',Str2) ;
27     set(fig1, 'Position',[300 160 1142 688]) ;
28     axes1 = axes('Parent',fig1, 'FontSize',18) ;
29     hold(axes1, 'on') ;
30     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2( n , p , 1 , 0 , max , ZwSt , 'k' , '-' )
31     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2( n , p , 2 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-' )
32     Plot_Dichtegenerator_lnpPearsonTyp2( n , p , 3 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-' )
33     leg1 = legend( '\nu=1' , '\nu=2' , '\nu=3' ) ;
34     set(leg1, 'Location', 'NorthEast', 'FontSize',24) ;
35     xlim([0 max]) ;
36     hold(axes1, 'off') ;
37 end

```

```

1 function Dichtegenerator_pSlash
2   Dichtegenerator_lnpSlash_verschiedeneParameter( 5 , 1/2 , 4 , 150 )           % Abb D.5a
3   Dichtegenerator_lnpSlash_verschiedeneParameter( 5 , 1 , 4 , 150 )           % Abb D.5b
4   Dichtegenerator_lnpSlash_verschiedeneParameter( 5 , 2 , 3.5 , 150 )         % Abb D.5c
5   Dichtegenerator_lnpSlash_verschiedeneParameter( 5 , 3 , 3 , 150 )           % Abb D.5d
6 end
7
8 function Plot_Dichtegenerator_lnpSlash(n,p,nu,min,max,ZwSt,Color,Stil)
9 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{Sl;nu\}^{\{(n,p)\}}$  der  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischen Slash-Vertei-
10 % lung mit Parameter  $nu > 0$  über dem Intervall  $[min,max]$  mit ZwSt Zwischenstellen in der Farbe
11 % Color und dem Linienstil Stil
12   if nu <= 0
13     error('Der Parameter nu=%g liegt außerhalb des zulässigen Bereichs (0,inf).',nu) ;
14   else
15     r = linspace( min , max , ZwSt ) ;
16     Konst_DG = nu * (p^(1-1/p)/gamma(1/p)) ;
17     Integrand_DG = @(v,r) Konst_DG * v.^(n/p+nu-1) .* exp(-r.^(p/p.*v)) ;
18     g_Sl = integral( @(v) Integrand_DG(v,r) , 0 , 1 , 'ArrayValued' , true ) ;
19     plot( r , g_Sl , 'Color',Color,'LineStyle',Stil,'Linewidth',2) ;
20   end
21 end
22
23 function Dichtegenerator_lnpSlash_verschiedeneParameter(n,p,max,ZwSt)
24 % Darstellung des Dichtegenerators  $g_{\{Sl;nu\}^{\{(n,p)\}}$  für nu aus {1, 2, 3} in einer Figure
25   Str1 = 'Dichtegeneratoren  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischer Slash-Verteilungen' ;
26   Str2 = sprintf('%s für n=%d, p=%g und verschiedene Parameter nu',Str1,n,p) ;
27   fig1 = figure('Name',Str2) ;
28   set(fig1,'Position',[300 160 1142 688]) ;
29   axes1 = axes('Parent',fig1,'FontSize',18) ;
30   hold(axes1,'on') ;
31   Plot_Dichtegenerator_lnpSlash( n , p , 1 , 0 , max , ZwSt , 'k' , '-' )
32   Plot_Dichtegenerator_lnpSlash( n , p , 2 , 0 , max , ZwSt , 'b' , '-' )
33   Plot_Dichtegenerator_lnpSlash( n , p , 3 , 0 , max , ZwSt , 'r' , '-' )
34   leg1 = legend( '\nu=1' , '\nu=2' , '\nu=3' ) ;
35   set(leg1,'Location','NorthEast','FontSize',24) ;
36   xlim([0 max]) ;
37   hold(axes1,'off') ;
38 end

```

D.2 Quellcodes zur Simulation von $SMN_{n,p}(\mu, \Sigma, G)$

```

1 function Beispiele_Simulation_SMpNormal
2   Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pKotzTyp',[1,2,1/2],'Alg3','Bsp1','PktWolke') % Abb D.6a (links)
3   Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pKotzTyp',[1,2,1/2],'','Bsp1','RaNiAbl')     % Abb D.6a (rechts)
4   Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pKotzTyp',[1,2,1/2],'Alg3','Bsp1','PktWolke') % Abb D.6b (links)
5   Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pKotzTyp',[1,2,1/2],'','Bsp1','RaNiAbl')     % Abb D.6b (rechts)

```

```

6 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Alg3', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.6c (links)
7 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.6c (rechts)
8 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Alg3', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.6d (links)
9 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.6d (rechts)
10
11 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pPearsonTyp7', [10,3], 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.7a (links)
12 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pPearsonTyp7', [10,3], 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.7a (rechts)
13 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pPearsonTyp7', [5,3], 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.7b (links)
14 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pPearsonTyp7', [5,3], 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.7b (rechts)
15 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pPearsonTyp7', [5/2,3], 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.7c (links)
16 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pPearsonTyp7', [5/2,3], 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.7c (rechts)
17 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pPearsonTyp7', [5/3,3], 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.7d (links)
18 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pPearsonTyp7', [5/3,3], 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.7d (rechts)
19
20 % Die Abbildungen D.8a,b,c,d entstehen durch manuelle Vergrößerung der entsprechenden Aus-
21 % schnitte der linken Seiten der Abbildungen D.7a,b,c,d.
22
23 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pSlash', 5, 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.9a (links)
24 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pSlash', 5, 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.9a (rechts)
25 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pSlash', 5, 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.9b (links)
26 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pSlash', 5, 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.9b (rechts)
27 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pSlash', 5, 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.9c (links)
28 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pSlash', 5, 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.9c (rechts)
29 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pSlash', 5, 'Alg1', 'Bsp1', 'PktWolke') % Abb D.9d (links)
30 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pSlash', 5, 'Bsp1', 'RaNiAbl') % Abb D.9d (rechts)
31
32 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Alg2', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.10a (links)
33 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.10a (rechts)
34 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Alg2', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.10b (links)
35 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.10b (rechts)
36 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Alg2', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.10c (links)
37 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.10c (rechts)
38 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Alg2', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.10d (links)
39 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pKotzTyp', [1,2,1/2], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.10d (rechts)
40
41 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pPearsonTyp7', [8,3], 'Alg1', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.11a (links)
42 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pPearsonTyp7', [8,3], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.11a (rechts)
43 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pPearsonTyp7', [4,3], 'Alg1', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.11b (links)
44 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pPearsonTyp7', [4,3], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.11b (rechts)
45 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pPearsonTyp7', [2,3], 'Alg1', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.11c (links)
46 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pPearsonTyp7', [2,3], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.11c (rechts)
47 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pPearsonTyp7', [4/3,3], 'Alg1', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.11d (links)
48 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pPearsonTyp7', [4/3,3], 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.11d (rechts)
49
50 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pSlash', 5, 'Alg1', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.12a (links)
51 Plot_Sim_SMpNormal( 1/2 , 'pSlash', 5, 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.12a (rechts)
52 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pSlash', 5, 'Alg1', 'Bsp2', 'PktWolke') % Abb D.12b (links)
53 Plot_Sim_SMpNormal( 1 , 'pSlash', 5, 'Bsp2', 'RaNiAbl') % Abb D.12b (rechts)

```

```

54 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pSlash',5,'Alg1','Bsp2','PktWolke') % Abb D.12c (links)
55 Plot_Sim_SMpNormal( 2 , 'pSlash',5,'','Bsp2','RaNiAbl') % Abb D.12c (rechts)
56 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pSlash',5,'Alg1','Bsp2','PktWolke') % Abb D.12d (links)
57 Plot_Sim_SMpNormal( 3 , 'pSlash',5,'','Bsp2','RaNiAbl') % Abb D.12d (rechts)
58 end
59
60 function Plot_Sim_SMpNormal(p,VertTyp,Par,Alg,Bsp,PlotTyp)
61 % Graphische Darstellung entweder einer simulierten Punktwolke oder der Dichte bzw. der
62 % dichte-ähnlichen Darstellung für mehrere vordefinierte Verteilungsbeispiele
63
64 % Auswahl eines vordefinierten Beispiels und der zugehörigen Parameter und Spezifikationen
65 % für die graphische Darstellung:
66 if strcmp(Bsp,'Bsp1') % 2-dim Punktwolke (rotiert) einer regulären Verteilung
67     Anz = 2000 ;
68     n = 2 ;
69     mu = [ -5 ; 5 ] ;
70     Sigma = [ 2,1 ; 1,2 ] ;
71     AxView = [-10.6,0.6,-0.6,10.6,-inf,inf] ;
72     ZwSt = -0.14 ;
73     ViewSpec = [-10,44] ;
74 elseif strcmp(Bsp,'Bsp2') % 2-dim Punktwolke (rotiert) einer singulären Verteilung
75     Anz = 350 ;
76     n = 2 ;
77     mu = [ 10 ; 10 ] ;
78     Sigma = [ 1,-1 ; -1,1 ] ;
79     AxView = [6,14,6,14,-inf,inf] ;
80     ZwSt = -0.08 ;
81     ViewSpec = [-16,32] ;
82 elseif strcmp(Bsp,'Bsp3') % 3-dim Punktwolke (achsenparallel) einer regulären Verteilung
83     Anz = 5000 ;
84     n = 3 ;
85     mu = [ 12 ; 5 ; 19 ] ;
86     Sigma = [ 1,0,0 ; 0,3,0 ; 0,0,5 ] ;
87     ViewSpec = [-40,18] ;
88 elseif strcmp(Bsp,'Bsp4') % 3-dim Punktwolke (achsenparallel) einer singulären Verteilung
89     Anz = 3000 ;
90     n = 3 ;
91     mu = [ 12 ; 5 ; 19 ] ;
92     Sigma = [ 1,0,0 ; 0,3,0 ; 0,0,0 ] ;
93     ViewSpec = [-40,36] ;
94 elseif strcmp(Bsp,'Bsp5') % 3-dim Punktwolke (rotiert) einer singulären Verteilung
95     Anz = 3000 ;
96     n = 3 ;
97     mu = [ 0 ; 0 ; 0 ] ;
98     Sigma = [ 1,0,0 ; 0,1,1 ; 0,1,1 ] ;
99     ViewSpec = [-40,18] ;
100 else
101     fprintf('\nEingabe eines nichtzulässigen Beispiels!') ;

```

```

102     fprintf ('\nZulässige Eingaben sind: Bsp1, Bsp2, Bsp3, Bsp4, Bsp5\n\n') ;
103     return
104 end
105 k = rank(Sigma) ;
106
107 % Laden der zum Verteilungstyp gehörigen Funktionen und Überprüfung der Parameter:
108 if strcmp(VertTyp,'pKotzTyp')
109     %  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrische Kotz-Typ-Verteilung mit  $[M,beta,gamma] = Par$ 
110     M = Par(1) ;
111     beta = Par(2) ;
112     gam = Par(3) ;
113     if ( M <= 1-k/p ) || ( beta <= 0 ) || ( gam <= 0 )
114         fprintf ('\nNichtzulässige Parametereingabe!\n\n') ;
115         return
116     else
117         Konst_DGkpKotzTyp = (p/(2*gamma(1/p)))^k * gam * beta^((k+p*(M-1))/(p*gam)) ...
118             * gamma(k/p) / gamma((k+p*(M-1))/(p*gam)) ;
119         DGkpKotzTyp = @(r) Konst_DGkpKotzTyp * r.^(p*(M-1)) .* exp(-beta*r.^(p*gam)) ;
120     end
121 elseif strcmp(VertTyp,'pPearsonTyp7')
122     %  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrische Pearson-Typ VII-Verteilung mit  $M = Par(1)$  und  $nu = Par(2)$ 
123     M = Par(1) ;
124     nu = Par(2) ;
125     if ( M <= k/p ) || ( nu <= 0 )
126         fprintf ('\nNichtzulässige Parametereingabe!\n\n') ;
127         return
128     else
129         f_G = @(s) (nu/p)^(M-k/p)/gamma(M-k/p) * s.^(M-k/p-1) .* exp(-nu/p*s) ;
130         G = @(v) integral( @(s) f_G(s) , 10^(-10) , v ) ;
131         Supp = [10^(-10) , Inf] ;
132     end
133 elseif strcmp(VertTyp,'pSlash')
134     %  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrische Slash-Verteilung mit  $nu = Par$ 
135     nu = Par ;
136     if nu <= 0
137         fprintf ('\nNichtzulässige Parametereingabe!\n\n') ;
138         return
139     else
140         f_G = @(s) nu * s.^(nu-1) .* (0<s) .* (s<1) ;
141         G = @(v) integral( @(s) f_G(s) , 10^(-10) , v ) ;
142         Supp = [10^(-10) , 1] ;
143     end
144 end
145
146 % Laden einer spezifischen Farbe für die graphische Darstellung:
147 if p == 1/2
148     Color = [0,0.45,0.74] ;    % mittleres blau
149 elseif p == 1

```

```

150     Color = [0,1,1] ;           % cyan
151 elseif p == 2
152     Color = [0,1,0] ;           % grün
153 elseif p == 3
154     Color = [1,0,0] ;           % rot
155 else
156     Color = [1,0,1] ;           % magenta
157 end
158
159 % Plot der mithilfe der ausgewählten Algorithmus simulierten Punktwolke:
160 if strcmp(PlotTyp,'PktWolke')
161     Str1 = sprintf('Simulation von %s für %s mit p=%g', Bsp , VertTyp , p ) ;
162     fig1 = figure('Name',Str1) ;
163     set(fig1 , 'Position' ,[300 160 1142 688]) ;
164     axes1 = axes('Parent', fig1) ;
165     if strcmp(VertTyp,'pKotzTyp')
166         if strcmp(Alg,'Alg1')
167             error('Verwendung der Algorithmen 2 bzw. 3 für den Verteilungstyp %s!', VertTyp ) ;
168         elseif strcmp(Alg,'Alg2')
169             h = Punktwolke_Simulation_Algorithmus2(Anz,n,p,mu,Sigma,DGkpKotzTyp) ;
170         elseif strcmp(Alg,'Alg3')
171             h = Punktwolke_Simulation_Algorithmus3(Anz,n,p,mu,Sigma,DGkpKotzTyp) ;
172         end
173     elseif strcmp(VertTyp,'pPearsonTyp7') || strcmp(VertTyp,'pSlash')
174         if strcmp(Alg,'Alg2') || strcmp(Alg,'Alg3')
175             error('Verwendung von Algorithmus 1 für den Verteilungstyp %s!', VertTyp ) ;
176         elseif strcmp(Alg,'Alg1')
177             h = Punktwolke_Simulation_Algorithmus1(Anz,n,p,mu,Sigma,G,Supp) ;
178         end
179     end
180     set(h, 'MarkerEdgeColor',Color,'Marker','+')
181     axes1.FontSize = 18 ;
182     if n==3
183         view( ViewSpec )
184     end
185     box on
186     grid on
187 end
188
189 % Plot der dichte-ähnliche Darstellung der der Simulation zugrunde liegenden zweidimensio-
190 % nalen Verteilung:
191 if n==2 && strcmp(PlotTyp,'RaNiAbl')
192     Str1 = 'Radon-Nikodym-Dichte (dichte-ähnliche Darstellung)';
193     Str2 = sprintf('%s von %s für %s mit p=%g', Str1 , Bsp , VertTyp , p ) ;
194     fig2 = figure('Name',Str2) ;
195     set(fig2 , 'Position' ,[300 160 1142 688]) ;
196     axes2 = axes('Parent', fig2) ;
197     [X,Y] = meshgrid( AxView(2):ZwSt:AxView(1) , AxView(4):ZwSt:AxView(3) ) ;

```

```

198 Mu1 = @(x) mu(1)*ones(size(x)) ;
199 Mu2 = @(y) mu(2)*ones(size(y)) ;
200 [sqrtS1,V1,V2] = RangZerlegung(n,Sigma) ;
201 if k==2
202 R = @(x,y) ( abs( 1/sqrtS1(1,1)*( V1(1,1)*(x-Mu1(x)) + V1(2,1)*(y-Mu2(y)) ) ).^p ...
203 + abs( 1/sqrtS1(2,2)*( V1(1,2)*(x-Mu1(x)) + V1(2,2)*(y-Mu2(y)) ) ).^p ).^(1/p) ;
204 if strcmp(VertTyp,'pKotzTyp')
205 Z = 1/det(sqrtS1) * DGkpKotzTyp( R(X,Y) ) ;
206 elseif strcmp(VertTyp,'pPearsonTyp7')
207 Konst_DGkpPearonTyp7 = (p/(2*gamma(1/p)))^k ...
208 * gamma(M) / nu^(k/p) / gamma(M-k/p) ;
209 DGkpPearonTyp7 = @(r) Konst_DGkpPearonTyp7 * ( 1 + 1/nu*r.^p ).^(-M) ;
210 Z = 1/det(sqrtS1) * DGkpPearonTyp7( R(X,Y) ) ;
211 elseif strcmp(VertTyp,'pSlash')
212 Konst_DGkpSlash = nu * ( p^(1-1/p)/(2*gamma(1/p)) )^k ;
213 DGkpSlash = @(r) Konst_DGkpSlash * integral( @(v) v.^(k/p+nu-1) ...
214 .* exp( -1/p*r.^p .* v ) , 10^(-10) , 1 , 'ArrayValued' , true ) ;
215 Z = 1/det(sqrtS1) * DGkpSlash( R(X,Y) ) ;
216 end
217 % Farbeinstellungen für den surf-Plot:
218 FaceColor = ones(length(X),length(Y),3) ;
219 FaceColor(1:end,1:end,3) = 0.52 ;
220 surf(X,Y,Z,FaceColor,'FaceAlpha',0.5,'EdgeColor',Color,'EdgeAlpha',1)
221 elseif k==1
222 R = @(x,y) abs( 1/sqrtS1(1,1)*( V1(1,1)*(x-Mu1(x)) + V1(2,1)*(y-Mu2(y)) ) ) ;
223 AffinerUnterraum = @(x,y) ( abs( V2(1,1)*(x-Mu1(x)) ...
224 + V2(2,1)*(y-Mu2(y)) ) < 1.5*10^(-1) ) ;
225 if strcmp(VertTyp,'pKotzTyp')
226 Z = 1/det(sqrtS1) * DGkpKotzTyp( R(X,Y) ) .* AffinerUnterraum(X,Y) ;
227 elseif strcmp(VertTyp,'pPearsonTyp7')
228 Konst_DGkpPearonTyp7 = (p/(2*gamma(1/p)))^k ...
229 * gamma(M) / nu^(k/p) / gamma(M-k/p) ;
230 DGkpPearonTyp7 = @(r) Konst_DGkpPearonTyp7 * ( 1 + 1/nu*r.^p ).^(-M) ;
231 Z = 1/det(sqrtS1) * DGkpPearonTyp7( R(X,Y) ) .* AffinerUnterraum(X,Y) ;
232 elseif strcmp(VertTyp,'pSlash')
233 Konst_DGkpSlash = nu * ( p^(1-1/p)/(2*gamma(1/p)) )^k ;
234 DGkpSlash = @(r) Konst_DGkpSlash * integral( @(v) v.^(k/p+nu-1) ...
235 .* exp( -1/p*r.^p .* v ) , 10^(-10) , 1 , 'ArrayValued' , true ) ;
236 Z = 1/det(sqrtS1) * DGkpSlash( R(X,Y) ) .* AffinerUnterraum(X,Y) ;
237 end
238 % Farbeinstellungen für den surf-Plot:
239 FaceColor = ones(length(X),length(Y),3) ;
240 for i = 1:length(X)
241 for j = 1:length(Y)
242 if not(Z(i,j) == 0)
243 FaceColor(i,j,:) = Color ;
244 else
245 FaceColor(i,j,:) = [1,1,0] ;

```

```

246         end
247     end
248 end
249 surf(X,Y,Z,FaceColor,'FaceAlpha',1,'EdgeColor','default','EdgeAlpha',0.5)
250 end
251 axes2.FontSize = 18 ;
252 axis( AxView )
253 view( ViewSpec )
254 box on
255 grid on
256 end
257 end

```

```

1 function h = Punktwolke_Simulation_Algorithmus1(Anz,n,p,mu,Sigma,G,Supp)
2 % Erzeugung und graphische Darstellung von Anz Realisierungen von  $SMN_{\{n,p\}}(\mu,\Sigma,G)$ 
3 % mithilfe von Algorithmus 5.1 mit der zusätzlichen Eingabe der zweispaltigen Matrix Supp, die
4 % zeilenweise die Intervalle des streng monotonen Wachstums bzw. die degenerierten Intervalle
5 % der Sprungstellen der Mischungsverteilung G enthält
6     X = zeros(n,Anz) ;
7 % Anz-facher Aufruf von "Simulation_Algorithmus1(n,p,mu,Sigma,G,Supp)" und Bestimmung
8 % und Ausgabe der voraussichtlichen Rechenzeit der Simulation basierend auf der Rechenzeit
9 % der ersten beiden Realisierungen:
10    tic ;
11    X(:,1) = Simulation_Algorithmus1(n,p,mu,Sigma,G,Supp) ;
12    SimZeit1 = toc ;
13    if Anz > 1
14        tic ;
15        X(:,2) = Simulation_Algorithmus1(n,p,mu,Sigma,G,Supp) ;
16        SimZeit2 = toc ;
17        if Anz > 2
18            AusgabeSimulationszeit( (Anz-2)*(SimZeit1+SimZeit2)/2 , 1 );
19            for i=2:Anz
20                X(:,i) = Simulation_Algorithmus1(n,p,mu,Sigma,G,Supp) ;
21            end
22        end
23    end
24 % Graphische Darstellung der simulierten Punktwolke:
25    if n==2
26        h = scatter( X(1,:) , X(2,:) , 'b+' ) ;
27        axis square
28    elseif n==3
29        h = scatter3( X(1,:) , X(2,:) , X(3,:) , 'b+' ) ;
30        axis square
31    end
32 end

```

```

1 function h = Punktwolke_Simulation_Algorithmus2(Anz,n,p,mu,Sigma,DGkp)

```

```

2 % Erzeugung und graphische Darstellung von Anz Realisierungen von SMN_{n,p}(mu,Sigma,G) für
3 % die mit dem Dichtegenerator DGkp verknüpften Mischungsverteilung G unter Verwendung von
4 % Algorithmus 5.2
5     X = zeros(n,Anz) ;
6     % Anz-fache Ausführung von "Simulation_Algorithmus2(n,p,mu,Sigma,DGkp)" und Bestimmung
7     % und Ausgabe der voraussichtlichen Rechenzeit der Simulation basierend auf der Rechenzeit der
8     % ersten beiden Realisierungen:
9     tic ;
10    X(:,1) = Simulation_Algorithmus2(n,p,mu,Sigma,DGkp) ;
11    SimZeit1 = toc ;
12    if Anz > 1
13        tic ;
14        X(:,2) = Simulation_Algorithmus2(n,p,mu,Sigma,DGkp) ;
15        SimZeit2 = toc ;
16        if Anz > 2
17            AusgabeSimulationszeit( (Anz-2)*(SimZeit1+SimZeit2)/2 , 2 );
18            for i=2:Anz
19                X(:,i) = Simulation_Algorithmus2(n,p,mu,Sigma,DGkp) ;
20            end
21        end
22    end
23    % Graphische Darstellung der simulierten Punktwolke:
24    if n==2
25        h = scatter( X(1,:) , X(2,:) , 'b+' ) ;
26        axis square
27    elseif n==3
28        h = scatter3( X(1,:) , X(2,:) , X(3,:) , 'b+' ) ;
29        axis square
30    end
31 end

```

```

1 function h = Punktwolke_Simulation_Algorithmus3(Anz,n,p,mu,Sigma,DGkp)
2 % Erzeugung und graphische Darstellung von Anz Realisierungen von SMN_{n,p}(mu,Sigma,G) für
3 % die mit dem Dichtegenerator DGkp verknüpften Mischungsverteilung G unter Verwendung von
4 % Algorithmus 5.3
5     X = zeros(n,Anz) ;
6     % Anz-fache Ausführung von "Simulation_Algorithmus3(n,p,mu,Sigma,DGkp)" und Bestimmung
7     % und Ausgabe der voraussichtlichen Rechenzeit der Simulation basierend auf der Rechenzeit der
8     % ersten beiden Realisierungen:
9     tic ;
10    X(:,1) = Simulation_Algorithmus3(n,p,mu,Sigma,DGkp) ;
11    SimZeit1 = toc ;
12    if Anz > 1
13        tic ;
14        X(:,2) = Simulation_Algorithmus3(n,p,mu,Sigma,DGkp) ;
15        SimZeit2 = toc ;
16        if Anz > 2

```

```

17     AusgabeSimulationszeit( (Anz-2)*(SimZeit1+SimZeit2)/2 , 3 );
18     for i=2:Anz
19         X(:,i) = Simulation_Algorithmus3(n,p,mu,Sigma,DGkp) ;
20     end
21 end
22 end
23 % Graphische Darstellung der simulierten Punktwolke:
24 if n==2
25     h = scatter( X(1,:) , X(2,:) , 'b+' ) ;
26     axis square
27 elseif n==3
28     h = scatter3( X(1,:) , X(2,:) , X(3,:) , 'b+' ) ;
29     axis square
30 end
31 end

```

```

1 function AusgabeSimulationszeit(t,AlgNr)
2     % Umrechnung der in Sekunden angegebenen Zeit t in hh:mm:ss
3     h = 0 ;
4     if t >= 3600
5         h = floor(t/3600) ;
6     end
7     m = 0 ;
8     if t >= 60
9         m = floor((t - 3600*h)/60) ;
10    end
11    s = ceil(t - 3600*h - 60*m) ;
12    % Bestimmung der Uhrzeit "jetzt + t Sekunden"
13    Now = datetime('now','Format','HH:mm') ;
14    AlgEnde = Now + hours(h) + minutes(m+1) ;
15    AlgEndeStr = datestr(AlgEnde,'HH:MM') ;
16    % Ausgabe der Simulationszeit:
17    Str1 = sprintf('Die Simulation mit Algorithmus %d benötigt noch circa',AlgNr) ;
18    Str2 = sprintf('und endet circa %s Uhr.\n\n',AlgEndeStr) ;
19    if h > 0
20        fprintf('\n%s %d Stunde(n), %d Minute(n) und %d Sekunde(n) %s.',Str1,h,m,s,Str2) ;
21    elseif (h == 0)&&(m > 0)
22        fprintf('\n%s %d Minute(n) und %d Sekunde(n) %s',Str1,m,s,Str2) ;
23    else
24        fprintf('\n%s %d Sekunde(n) %s',Str1,s,Str2) ;
25    end
26 end

```

```

1 function X = Simulation_Algorithmus1(n,p,mu,Sigma,G,Supp)
2 % Simulation und Rückgabe einer Realisierung von  $SMN_{\{n,p\}}(\mu,\Sigma,G)$  unter Verwendung von
3 % Algorithmus 3.1 mit der zusätzlichen Eingabe der zweispaltigen Matrix Supp, die zeilenweise die
4 % Intervalle des streng monotonen Wachstums bzw. die degenerierten Intervalle der Sprungstellen

```

```

5 % der Mischungverteilung G enthält
6     k = rank(Sigma) ;
7     % Schritt 1: Simulation einer k-dimensionalen p-verallgemeinerten Normalverteilung tildeZ
8     tildeZ = Simulation_ndim_pNormal(k,p) ;
9     % Schritt 2: Simulation der Mischungsvariablen V mit Verteilungsfunkton G
10    V = Simulation_MischungsVerteilung(G,Supp) ;
11    % Schritt 3: Bildung der Realisierung tildeX von SMN_{k,p}(G)
12    tildeX = V^(-1/p) * tildeZ ;
13    % Schritt 4: lineare Transformation von tildeX zur Realisierung von SMN_{n,p}(mu,Sigma,G):
14    [sqrtS1, V1, V2] = RangZerlegung(n,Sigma) ;
15    X = mu + V1*sqrtS1 * tildeX ;
16 end

```

```

1 function X = Simulation_Algorithmus2(n,p,mu,Sigma,DGkp)
2 % Simulation und Rückgabe einer Realisierung von SMN_{n,p}(mu,Sigma,G) für die mit dem
3 % Dichtegenerator DGkp verknüpfte Mischungverteilung G unter Verwendung von Algorithmus 3.2
4     k = rank(Sigma) ;
5     % Schritt 1: Simulation des Radius und der Winkel:
6     R = Simulation_Radius_SMpNormal(k,p,DGkp) ;
7     Psi = Simulation_Winkel_SMpNormal(k,p) ;
8     % Schritt 2: Bildung der Realsierung tildeX von SMN_{k,p}(G) durch Anwendung der l_{k,p}-
9     % sphärischen Koordinatentransformation auf R und Psi:
10    tildeX = lnp_KoordinatenTransformation(k,p,R,Psi) ;
11    % Schritt 4: lineare Transformation von tildeX zur Realisierung von SMN_{n,p}(mu,Sigma,G):
12    [sqrtS1, V1, V2] = RangZerlegung(n,Sigma) ;
13    X = mu + V1*sqrtS1 * tildeX ;
14 end
15
16 function X = lnp_KoordinatenTransformation(n,p,R,Psi)
17 % l_{n,p}-sphärische Koordinatentransformation SPH_p^(n)(R,Psi)
18 X = zeros(n,1) ;
19 X(1) = R * cos_p(Psi(1),p) ;
20 if n > 3
21     for m = 2:n-1
22         X(m) = R * cos_p(Psi(m),p) ;
23         for j = 1:m-1
24             X(m) = X(m) * sin_p(Psi(j),p) ;
25         end
26     end
27 end
28 X(n) = R ;
29 for j = 1:n-1
30     X(n) = X(n) * sin_p(Psi(j),p) ;
31 end
32 end
33
34 function erg = sin_p(psi,p)

```

```

35 % p-verallgemeinerte Sinusfunktion
36   erg = sin(psi)./N_p(psi,p) ;
37 end
38
39 function erg = cos_p(psi,p)
40 % p-verallgemeinerte Kosinusfunktion
41   erg = cos(psi)./N_p(psi,p) ;
42 end
43
44 function erg = N_p(psi,p)
45   erg = ( abs(sin(psi)).^p + abs(cos(psi)).^p ).^(1/p) ;
46 end

```

```

1 function X = Simulation_Algorithmus3(n,p,mu,Sigma,DGkp)
2 % Simulation und Rückgabe einer Realisierung von  $SMN_{\{n,p\}}(\mu, \Sigma, G)$  für die mit dem
3 % Dichtegenerator DGkp verknüpfte Mischungsverteilung G unter Verwendung von Algorithmus 3.3
4   k = rank(Sigma) ;
5   % Schritt 1: Simulation des k-dimensionalen auf  $S_{\{k,p\}}$  p-verallgemeinert gleichverteilten
6   %           Zufallsvektors  $U_p$ :
7   tildeZ = Simulation_ndim_pNormal(k,p) ;
8   R_tildeZ = norm(tildeZ,p) ;
9   U_p = tildeZ/R_tildeZ ;
10  % Schritt 2: Simulation der Radiusvariablen von  $SMN_{\{n,p\}}(\mu, \Sigma, G)$ :
11  R_tildeX = Simulation_Radius_SMpNormal(k,p,DGkp) ;
12  % Schritt 3: Bildung der Realisierung tildeX von  $SMN_{\{k,p\}}(G)$ :
13  tildeX = R_tildeX * U_p ;
14  % Schritt 4: lineare Transformation von tildeX zur Realisierung von  $SMN_{\{n,p\}}(\mu, \Sigma, G)$ :
15  [sqrtS1, V1, V2] = RangZerlegung(n,Sigma) ;
16  X = mu + V1*sqrtS1 * tildeX ;
17 end

```

```

1 function Z = Simulation_ndim_pNormal(n,p)
2 % Simulation und Rückgabe einer Realisierung eines n-dimensional p-verallgemeinert normalver-
3 % teilten Zufallsvektors, dessen Komponenten unabhängig und identisch univariat p-verallgemei-
4 % nert normalverteilt sind und daher separat voneinander unter Verwendung der Inversionsmethode
5 % in Kombination mit Intervallhalbierung erzeugt werden.
6
7   % Vektor bestehend aus n komponentenweise unabhängigen (0,1)-gleichverteilten Zufallszahlen:
8   X = rand(n,1) ;
9   % Dichte und Verteilungsfunktion der univariaten p-verallgemeinerten Normalverteilung:
10  Dichte = @(y) p^(1-1/p)/(2*gamma(1/p)) * exp(-1/p*abs(y).^p) ;
11  Vert = @(x) integral( @(y) Dichte(y) , -Inf , x ) ;
12  % Genauigkeit, mit der die Inversionsmethode durchgeführt wird:
13  Eps = 10^(-10) ;
14  % Erstellung des Ausgabevektors und Überschreiben der Komponenten durch die Inversen der
15  % Verteilungsfunktion Vert:
16  Z = zeros(n,1) ;

```

```

17     for i = 1:n
18         if X(i) > 1/2
19             Z(i) = IntervallHalbierung_pNormal( X(i) , Vert , Eps ) ;
20         elseif X(i) == 1/2
21             Z(i) = 0 ;
22         else
23             % Ausnutzung der Symmetrie der Dichte zur y-Achse:
24             Z(i) = - IntervallHalbierung_pNormal( 1 - X(i) , Vert , Eps ) ;
25         end
26     end
27 end
28
29 function z = IntervallHalbierung_pNormal(F_z,F,Eps)
30 % Bestimmung und Rückgabe von z aus dem Intervall (0,Inf) mit F(z) = F_z mit der Genauigkeit
31 % Eps, wobei (0,Inf) schrittweise in endliche Teilintervalle unterteilt wird, bis F_z im endlichen
32 % Intervall (F(a),F(b)) bzw. z in (a,b) enthalten ist .
33 % Verwendung von "IntervallHalbierung_Hilf(a,(a+b)/2,b,F_z,F,Eps)" zur Bestimmung von z im
34 % endlichen Intervall (a,b)
35     Ziel = 0 ;
36     j = 1 ;
37     b = 0 ;
38     F_2 = 1/2 ;
39     while Ziel == 0
40         a = b ;
41         F_1 = F_2 ;
42         b = a + 1/2*10^(floor(j/50)) ;
43         F_2 = F(b) ;
44         if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
45             if F_z == F_2
46                 z = b ;
47             else
48                 z = IntervallHalbierung_Hilf( a , (a+b)/2 , b , F_z , F , Eps ) ;
49             end
50             Ziel = 1 ;
51         end
52         j = j + 1 ;
53     end
54 end

```

```

1 function V = Simulation_Mischungsverteilung(G,Supp)
2 % Simulation unter Verwendung der Inversionsmethode durch Intervallhalbierung und Rückgabe
3 % einer Realisierung der Mischungsvariablen V mit der Verteilungsfunktion G mit der zusätzlichen
4 % Eingabe der zweispaltigen Matrix Supp, die zeilenweise die Intervalle des strengen monotonen
5 % Wachstums bzw. die degenerierten Intervalle der Sprungstellen der Mischungverteilung G enthält.
6
7 % (0,1)- gleichverteilte Zufallszahl :
8     X = rand ;

```

```

9   % Genauigkeit, mit der die Inversionsmethode durchgeführt wird:
10  Eps = 10−10 ;
11  % Invertieren der Mischungverteilung G mittels Intervallhalbierung:
12  [Zeilen,Spalten] = size(Supp) ;
13  if Supp(Zeilen,Spalten) < Inf
14      V = IntervallHalbierung_MischVert_beschraenkt( X , G , Supp , Eps ) ;
15  else
16      V = IntervallHalbierung_MischVert_unbeschraenkt( X , G , Supp , Eps ) ;
17  end
18 end
19
20 function z = IntervallHalbierung_MischVert_beschraenkt(F_z,F,Supp,Eps)
21 % Bestimmung und Rückgabe von z aus den zeilenweise in Supp gegebenen beschränkten Intervall-
22 % len mit F(z) = F_z mit der Genauigkeit Eps durch schrittweise Untersuchung des Enthaltenseins
23 % von z in einem durch Supp gegebenen endlichen Intervall (a,b) bzw. von F_z in (F(a),F(b)) und
24 % anschließende Verwendung von "IntervallHalbierung_Hilf(a,(a+b)/2,b,F_z,F,Eps)" zur Bestim-
25 % mung von z.
26  Zeilen = size(Supp,1) ;
27  Ziel = 0 ;
28  i = 1 ;
29  while (Ziel == 0) && (i <= Zeilen)
30      if Supp(i,1) == Supp(i,2)
31          F_1 = F( Supp(i,1) ) ;
32          F_2 = F( Supp(i,1) + 10−5 ) ;
33          if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
34              z = Supp(i,1) ;
35              Ziel = 1 ;
36          end
37      else
38          F_1 = F( Supp(i,1) ) ;
39          F_2 = F( Supp(i,2) ) ;
40          if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
41              if F_z == F_2
42                  % Verallgemeinerte Inverse, da F im Intervall [Supp(i,2),Supp(i+1,1)] konstant ist:
43                  z = Supp(i,2) ;
44              else
45                  z = IntervallHalbierung_Hilf( Supp(i,1) , (Supp(i,1)+Supp(i,2))/2 , ...
46                                          Supp(i,2) , F_z , F , Eps ) ;
47              end
48              Ziel = 1 ;
49          end
50      end
51      i = i + 1 ;
52  end
53 end
54
55 function z = IntervallHalbierung_MischVert_unbeschraenkt(F_z,F,Supp,Eps)
56 % Bestimmung und Rückgabe von z mit F(z) = F_z mit der Genauigkeit Eps durch:

```

```

57 % 1) schrittweise Untersuchung des Enthaltenseins von z in einem zeilenweise durch Supp gegebenen
58 % endlichen Intervall (a,b) bzw. von F_z in (F(a),F(b)) und anschließende Verwendung von
59 % "IntervallHalbierung_Hilf(a,(a+b)/2,b,F_z,F,Eps)" zur Bestimmung von z
60 % 2) Falls z in keinem der endlichen Intervalle liegt, erfolgt zunächst die schrittweise Zerlegung
61 % des durch die letzte Zeile von Supp gegebenen unbeschränkten Intervalls (c,Inf) bis z durch das
62 % endliche Intervall (a,b) bzw. F_z durch (F(a),F(b)) eingefangen ist und anschließend die Ver-
63 % wendung von "IntervallHalbierung_Hilf(a,(a+b)/2,b,F_z,F,Eps)" zur Bestimmung von z.
64 Zeilen = size(Supp,1) ;
65 Ziel = 0 ;
66 i = 1 ;
67 while (Ziel == 0) && (i < Zeilen)
68     if Supp(i,1) == Supp(i,2)
69         F_1 = F( Supp(i,1) ) ;
70         F_2 = F( Supp(i,1) + 10^(-5) ) ;
71         if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
72             z = Supp(1,1) ;
73             Ziel = 1 ;
74         end
75     else
76         F_1 = F( Supp(i,1) ) ;
77         F_2 = F( Supp(i,2) ) ;
78         if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
79             if F_z == F_2
80                 % Verallgemeinerte Inverse, da F im Intervall [Supp(i,2),Supp(i+1,1)] konstant
81                 % ist:
82                 z = Supp(i,2) ;
83             else
84                 z = IntervallHalbierung_Hilf( Supp(i,1) , (Supp(i,1)+Supp(i,2))/2 , ...
85                                         Supp(i,2) , F_z , F , Eps ) ;
86             end
87             Ziel = 1 ;
88         end
89     end
90     i = i + 1 ;
91 end
92
93 j = 1 ;
94 b = Supp(Zeilen,1) ;
95 F_2 = F(b) ;
96 while Ziel == 0
97     a = b ;
98     F_1 = F_2 ;
99     b = a + 1/2*10^(floor(j/50)) ;
100    F_2 = F(b) ;
101    if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
102        if F_z == F_2
103            z = b ;
104        else

```

```

105         z = IntervallHalbierung_Hilf( a , (a+b)/2 , b , F_z , F , Eps ) ;
106     end
107     Ziel = 1 ;
108     end
109     j = j + 1 ;
110 end
111 end

```

```

1 function R = Simulation_Radius_SMpNormal(n,p,DGnp)
2 % Simulation unter Verwendung der Inversionsmethode durch Intervallhalbierung und Rückgabe
3 % einer Realisierung der Radiusvariablen einer Skalenmischung der n-dimensionalen p-verallge-
4 % meinerten Normalverteilung, deren Darstellung als stetige  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrische Verteilung den
5 % Dichtegenerator DG besitzt.
6
7 % (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl :
8     X = rand ;
9 % Verteilungsfunktion der Radiusvariablen einer stetigen  $l_{\{n,p\}}$ -symmetrischen Verteilung mit
10 % Dichtegenerator DGnp:
11     omega_np = (2*gamma(1/p))^n/(p^(n-1)*gamma(n/p)) ;
12     F_R = @(r) integral( @(rho) omega_np * rho.^(n-1) .* DGnp(rho) , 10^(-10) , r ) ;
13 % Genauigkeit, mit der die Inversionsmethode durchgeführt wird:
14     Eps = 10^(-10) ;
15 % Invertierung von F_R über Intervallhalbierung:
16     R = IntervallHalbierung_Radius_SMpNormal( X , F_R , Eps ) ;
17 end
18
19 function z = IntervallHalbierung_Radius_SMpNormal(F_z,F,Eps)
20 % Bestimmung und Rückgabe von z aus dem Intervall (0,Inf) mit  $F(z) = F_z$  mit der Genauigkeit
21 % Eps, wobei (0,Inf) schrittweise in endliche Teilintervalle unterteilt wird, bis  $F_z$  im endlichen
22 % Intervall (F(a),F(b)) bzw. z in (a,b) enthalten ist .
23 % Verwendung von "IntervallHalbierung_Hilf(a,(a+b)/2,b,F_z,F,Eps)" zur Bestimmung von z im
24 % endlichen Intervall (a,b)
25     Ziel = 0 ;
26     j = 1 ;
27     b = 0 ;
28     F_2 = F(b) ;
29     while Ziel == 0
30         a = b ;
31         F_1 = F_2 ;
32         b = a + 10^(floor(j/100)) ;
33         F_2 = F(b) ;
34         if (F_1 < F_z) && (F_z <= F_2)
35             if F_z == F_2
36                 z = b ;
37             else
38                 z = IntervallHalbierung_Hilf( a , (a+b)/2 , b , F_z , F , Eps ) ;
39             end

```

```

40     Ziel = 1 ;
41     end
42     j = j + 1 ;
43     end
44 end

```

```

1 function Psi = Simulation_Winkel_SMpNormal(n,p)
2 % Simulation und Rückgabe einer Realisierung des Vektors der n-1 Winkelvariablen zur eindeutigen
3 % Beschreibung eines Punktes auf der  $l_{\{n,p\}}$ -Einheitssphäre mithilfe der  $l_{\{n,p\}}$ -sphärischen
4 % Koordinatentransformation unter Verwendung der Inversionsmethode durch Intervallhalbierung
5
6 % n-1 unabhängige (0,1)-gleichverteilte Zufallszahlen:
7     X = rand(n-1,1) ;
8 % Genauigkeit, mit der die Inversionsmethode durchgeführt wird:
9     Eps = 10^(-10) ;
10 % Inversionsmethode für Verteilungsfunktionen der Winkels:
11     Psi = zeros(n-1,1) ;
12     if n > 2
13         for i = 1:n-2
14             Psi(i) = IntervallHalbierung_Hilf( 0 , pi*X(i) , pi , X(i) , CDF1(n,i,p), Eps ) ;
15         end
16     end
17     Psi(n-1) = IntervallHalbierung_Hilf( 0 , 2*pi*X(n-1) , 2*pi , X(n-1) , CDF2(p) , Eps ) ;
18 end
19
20 function F_Psi1 = CDF1(n,i,p)
21 % Verteilungsfunktion der i-ten Winkelvariablen Psi_i für ein i aus {1,..., n-2}
22     f_Psi1 = @(theta) omega(n-i,p)/omega(n-i+1,p) ...
23             * (sin(theta)).^(n-i-1)./(N_p(theta,p)).^(n-i+1) .* (0<theta) .* (theta<pi) ;
24     F_Psi1 = @(psi) integral( @(theta) f_Psi1(theta) , 0 , psi ) ;
25 end
26
27 function F_Psi2 = CDF2(p)
28 % Verteilungsfunktion der (n-1)-ten Winkelvariablen Psi_{n-1}
29     f_Psi2 = @(theta) 1/omega(2,p) * (N_p(theta,p)).^(-2) .* (0<theta) .* (theta<2*pi) ;
30     F_Psi2 = @(psi) integral( @(theta) f_Psi2(theta) , 0 , psi ) ;
31 end
32
33 function omega_np = omega(n,p)
34 % Konstante omega_{n,p}
35     omega_np = (2*gamma(1/p))^n/(p^(n-1)*gamma(n/p)) ;
36 end
37
38 function erg = N_p(x,p)
39     erg = ( abs(sin(x)).^p + abs(cos(x)).^p ).^(1/p) ;
40 end

```

```

1 function z = IntervallHalbierung_Hilf(a,xi,b,F_z,F,Eps)
2 % Vorausgesetzt, dass  $F(a) \leq F_z \leq F(b)$ , und ausgehend von Startwert xi aus dem Intervall
3 % (a,b) bestimmt diese Funktion eine Stelle z aus (a,b) mit  $F(z) = F_z$  mit der Genauigkeit
4 % Eps. Dazu wird zunächst die Lage der Werte  $F(a)$ ,  $F_z$ ,  $F(xi)$  und  $F(b)$  zueinander überprüft.
5 % Falls  $F(a) < F_z < F(xi)$ , so wird die Funktion mit dem Startwert  $(a+xi)/2$  und dem Intervall
6 % (a,xi) aufgerufen. Andernfalls wird sie mit  $(xi+b)/2$  in (xi,b) gestartet. Die Rekursion
7 % endet, wenn die Intervallgrenzen weniger als Eps voneinander abweichen.
8     if b-a > Eps
9         F_a = F(a) ;
10        F_xi = F(xi) ;
11        if (F_a < F_xi) && (F_xi < F_z)
12            z = IntervallHalbierung_Hilf( xi , (b+xi)/2 , b , F_z , F , Eps ) ;
13        elseif F_xi == F_z
14            z = xi ;
15        else
16            z = IntervallHalbierung_Hilf( a , (a+xi)/2 , xi , F_z , F , Eps ) ;
17        end
18    else
19        z = xi ;
20    end
21 end

```

```

1 function [sqrtS1,V1,V2] = RangZerlegung(n,Sigma)
2 % Bestimmung von Matrizen sqrtS1, V1 und V2 einer Rangzerlegung  $(V1 \text{ sqrtS1})(V1 \text{ sqrtS1})'$  von
3 % Sigma über dessen Spektralzerlegung, wobei die Spalten von V2 eine Basis des Kerns von Sigma
4 % und gemeinsam mit den Spalten von V1 eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bilden.
5     k = rank(Sigma) ;
6     S1 = zeros(k,k) ;
7     V1 = zeros(n,k) ;
8     V2 = zeros(n,n-k) ;
9     [V,D] = eig(Sigma) ;
10    j1 = 1 ;
11    j2 = 1 ;
12    for i=1:n
13        if D(i,i) > 0
14            S1(j1,j1) = D(i,i) ;
15            V1(:,j1) = V(:,i) ;
16            j1 = j1 + 1 ;
17        elseif D(i,i) == 0
18            V2(:,j2) = V(:,i) ;
19            j2 = j2 + 1 ;
20        end
21    end
22    sqrtS1 = sqrt(S1) ;
23 end

```

D.3 Quellcodes zur Simulation von $SMAGP_p(m, S, G)$

```

1 function Beispiele_Simulation_SMAGP
2
3     m = @(t) 0 ;                S = @(t) 1 ;
4     m1 = @(t) -4*t+3 ;        S1 = @(t) 1/2*t.^0 ;
5     m2 = @(t) log(10*t+1/2)-1 ; S2 = @(t) exp(-3*t) ;
6     m3 = @(t) exp(2*t) ;      S3 = @(t) (3*mod(t,7/20)).^4 ;
7
8     % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.005,1) ;           % Abb D.13a (links)
9     % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.005,1) ;           % Abb D.13b (links)
10    % Plot_Sim_SMAGP( 2 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.005,1) ;           % Abb D.13c (links)
11    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.005,1) ;           % Abb D.13d (links)
12    %
13    % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,3,'pStudent',0,0.005,1) ;         % Abb D.13a (Mitte)
14    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,3,'pStudent',0,0.005,1) ;         % Abb D.13b (Mitte)
15    % Plot_Sim_SMAGP( 2 ,m,S,3,'pStudent',0,0.005,1) ;         % Abb D.13c (Mitte)
16    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,3,'pStudent',0,0.005,1) ;         % Abb D.13d (Mitte)
17    %
18    % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,5,'pSlash',0,0.005,1) ;          % Abb D.13a (rechts)
19    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,5,'pSlash',0,0.005,1) ;          % Abb D.13b (rechts)
20    % Plot_Sim_SMAGP( 2 ,m,S,5,'pSlash',0,0.005,1) ;          % Abb D.13c (rechts)
21    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,5,'pSlash',0,0.005,1) ;          % Abb D.13d (rechts)
22    %
23    % Die Abbildungen D.14a,b,c,d entstehen durch dreimaliges Ausführen von
24    % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.005,1) ;         % Abb D.14c
25    Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,5,'pSlash',0,0.005,1) ;         % Abb D.14a
26    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,3,'pStudent',0,0.005,1) ;         % Abb D.14b
27    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,5,'pSlash',0,0.005,1) ;         % Abb D.14d
28    %
29    % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,2,'pStudent',0,0.005,1) ;       % Abb D.15a (links)
30    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,2,'pStudent',0,0.005,1) ;       % Abb D.15b (links)
31    % Plot_Sim_SMAGP( 2 ,m,S,2,'pStudent',0,0.005,1) ;       % Abb D.15c (links)
32    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,2,'pStudent',0,0.005,1) ;       % Abb D.15d (links)
33    %
34    % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,1,'pSlash',0,0.005,1) ;        % Abb D.15a (Mitte)
35    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,1,'pSlash',0,0.005,1) ;        % Abb D.15b (Mitte)
36    % Plot_Sim_SMAGP( 2 ,m,S,1,'pSlash',0,0.005,1) ;        % Abb D.15c (Mitte)
37    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,1,'pSlash',0,0.005,1) ;        % Abb D.15d (Mitte)
38    %
39    % Plot_Sim_SMAGP( 1/2 ,m,S,3,'pSlash',0,0.005,1) ;       % Abb D.15a (rechts)
40    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,3,'pSlash',0,0.005,1) ;       % Abb D.15b (rechts)
41    % Plot_Sim_SMAGP( 2 ,m,S,3,'pSlash',0,0.005,1) ;       % Abb D.15c (rechts)
42    % Plot_Sim_SMAGP( 3 ,m,S,3,'pSlash',0,0.005,1) ;       % Abb D.15d (rechts)
43    %
44    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.025,1) ;        % Abb D.16a
45    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.005,1) ;        % Abb D.16b
46    % Plot_Sim_SMAGP( 1 ,m,S,NaN,'pGauss',0,0.001,1) ;        % Abb D.16c

```

```

47 %
48 % Plot_LageSkalFunk( 3 , 'LageFunk', m1, m2, m3, 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.17a
49 % Plot_LageSkalFunk( 3 , 'SkalFunk', S1, S2, S3, 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.17b
50 %
51 % Plot_Sim_SMAGP( 3 , m1, S, NaN, 'pGauss', 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.17a
52 % Plot_Sim_SMAGP( 3 , m2, S, NaN, 'pGauss', 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.18b
53 % Plot_Sim_SMAGP( 3 , m3, S, NaN, 'pGauss', 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.18c
54 % Plot_Sim_SMAGP( 3 , m, S1, NaN, 'pGauss', 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.18d
55 % Plot_Sim_SMAGP( 3 , m, S2, NaN, 'pGauss', 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.18e
56 % Plot_Sim_SMAGP( 3 , m, S3, NaN, 'pGauss', 0, 0.005, 1 ) ; % Abb D.18f
57 end
58
59 function Plot_Sim_SMAGP(p, m, S, Par, ProzessTyp, min, Sw, max)
60 % Graphische Darstellung einer über [min, max] mit der Schrittweite Sw unter Verwendung von
61 % Algorithmus 1 erzeugten Trajektorie des SMAGP(m, S, G), wobei die zu den p-verallgemeinerten
62 % Gauß-, Student-t- und Slash-Prozessen mit achsenparallel konturierten endlich-dimensionalen
63 % Verteilungen gehörigen Mischungsverteilungen G gegebenenfalls abhängig vom Parameter Par
64 % vordefiniert sind und durch die Eingabe von ProzessTyp ausgewählt werden. Falls G nicht von
65 % Par abhängt, kann dieser als NaN gesetzt werden.
66
67 % Auswahl eines vordefinierten Mischungverteilung:
68 Str1 = sprintf('Trajektorie des SMpAGP vom Typ %s für p=%g', ProzessTyp, p) ;
69 if strcmp(ProzessTyp, 'pGauss') % p-verallgemeinerter Gauß-Prozess
70 G = @(v) (v > 1) ;
71 Supp = [1, 1] ;
72 Str2 = sprintf('%s m=%s und S=%s', Str1, func2str(m), func2str(S)) ;
73 elseif strcmp(ProzessTyp, 'pStudent') % p-verallgemeinerter Student-t-Prozess für nu = Par
74 nu = Par ;
75 if nu <= 0
76 fprintf('\nNichtzulässige Parametereingabe!\n\n') ;
77 return
78 else
79 f_G = @(s) (nu/p)^(nu/p) / gamma(nu/p) * s^(nu/p-1) .* exp(-nu/p*s) ;
80 G = @(v) integral(@(s) f_G(s), 10^(-10), v) ;
81 Supp = [10^(-10), Inf] ;
82 end
83 Str2 = sprintf('%s m=%s, S=%s und nu=%g', Str1, func2str(m), func2str(S), Par) ;
84 elseif strcmp(ProzessTyp, 'pSlash') % p-verallgemeinerter Slash-Prozess für nu = Par
85 nu = Par ;
86 if nu <= 0
87 fprintf('\nNichtzulässige Parametereingabe!\n\n') ;
88 return
89 else
90 f_G = @(s) nu * s^(nu-1) .* (0 < s) .* (s < 1) ;
91 G = @(v) integral(@(s) f_G(s), 10^(-10), v) ;
92 Supp = [10^(-10), 1] ;
93 end
94 Str2 = sprintf('%s m=%s, S=%s und nu=%g', Str1, func2str(m), func2str(S), Par) ;

```

```

95     else
96         fprintf ('\nEingabe eines nichtzulässigen Prozesstyps!') ;
97         fprintf ('\nZulässige Eingaben sind: pGauss, pStudent, pSlash\n\n') ;
98     return
99 end
100
101 % Diskretisierung des Intervalls [min,max] mit der Schrittweite Sw:
102 x = min:Sw:max ;
103
104 % Dimension sowie Lage- und Skalierungsparameter der zu simulierenden Diskretisierung des
105 % ausgewählten stochastischen Prozesses:
106 n = length(x) ;
107 mu = zeros(n,1) ;
108 Sigma = zeros(n) ;
109 for i=1:n
110     mu(i) = m(x(i)) ;
111     Sigma(i,i) = S(x(i)) ;
112 end
113
114 % Erzeugung einer Trajektorie mithilfe von Algorithmus 1:
115 y = Simulation_Algorithmus1(n,p,mu,Sigma,G,Supp) ;
116
117 % Laden einer spezifischen Farbe für die graphische Darstellung:
118 if p == 1/2
119     Color = [0,0.45,0.74] ;    % mittleres blau
120 elseif p == 1
121     Color = [0,1,1] ;        % cyan
122 elseif p == 2
123     Color = [0,1,0] ;        % grün
124 elseif p == 3
125     Color = [1,0,0] ;        % rot
126 else
127     Color = [1,0,1] ;        % magenta
128 end
129
130 % Plot der erzeugten Trajektorie
131 fig1 = figure('Name',Str2) ;
132 set(fig1,'Position',[580 160 730 688]) ;
133 axes1 = axes('Parent',fig1) ;
134 h = plot(x,y) ;
135 set(h,'Color',Color)
136 axes1.FontSize = 18 ;
137 box on
138 axis square
139 grid on
140 end
141
142 function Plot_LageSkalFunk(p,FunkTyp,f1,f2,f3,min,Sw,max)

```

```

143 % Plot der Lage- oder Skalierungsfunktionen f1, f2 und f3 über [min,max]
144
145 x = min:Sw:max ;
146 y1 = f1(x) ;
147 y2 = f2(x) ;
148 y3 = f3(x) ;
149
150 % Laden einer spezifischen Farbe für die graphische Darstellung:
151 if p == 1/2
152     Color = [0,0.45,0.74] ;    % mittleres blau
153 elseif p == 1
154     Color = [0,1,1] ;        % cyan
155 elseif p == 2
156     Color = [0,1,0] ;        % grün
157 elseif p == 3
158     Color = [1,0,0] ;        % rot
159 else
160     Color = [1,0,1] ;        % magenta
161 end
162
163 % Plot der Funktionen:
164 fig1 = figure('Name',FunkTyp) ;
165 set(fig1, 'Position', [580 160 730 688]) ;
166 axes1 = axes('Parent', fig1) ;
167 hold on
168 h1 = plot(x,y1) ;
169 h2 = plot(x,y2) ;
170 h3 = plot(x,y3) ;
171 hold off
172 set(h1, 'Color', Color, 'LineStyle', '--', 'LineWidth', 2) ;
173 set(h2, 'Color', Color, 'LineStyle', '-.', 'LineWidth', 2) ;
174 set(h3, 'Color', Color, 'LineStyle', ':', 'LineWidth', 2) ;
175 if strcmp(FunkTyp, 'LageFunk')
176     leg1 = legend('m_1', 'm_2', 'm_3') ;
177     set(leg1, 'Location', 'NorthWest', 'FontSize', 24) ;
178 elseif strcmp(FunkTyp, 'SkalFunk')
179     leg1 = legend('S_1', 'S_2', 'S_3') ;
180     set(leg1, 'Location', 'NorthEast', 'FontSize', 24) ;
181 else
182     fprintf('\nEingabe eines nichtzulässigen Funktionstyps!') ;
183     fprintf('\nZulässig Eingabe sind: LageFunk und SkalFunk\n\n') ;
184     return
185 end
186 axes1.FontSize = 18 ;
187 box on
188 axis square
189 grid on
190 end

```

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Dazu habe ich keine außer den von mir angegebenen Hilfsmitteln und Quellen verwendet und die den benutzten Werken inhaltlich und wörtlich entnommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Unterschrift