Heinrich Peter August Vermehren

Ueber den Vortrag des binomischen Lehrsatzes im Schulunterricht

Güstrow: Gedruckt bei H.H.L. Ebert's Erben, 1834

http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1043472843

Einladung
zu den
Schulfeierlichkeiten
am 21. März 1834.

Vormittags 10 Uhr.

Reden der Abiturienten und Entlassung derselben.

1. Ferdin. Piper, aus Kiewe: De rerum publicarum apud veteres Germanos statu et conditione.
2. H. Krüger, aus Güstrow: Die Größe des Menschen.
3. W. Rötger, aus Bützow: Quae fuerint publicarum rerum conditiones, e quibus solis illae gentium migrationes per saecula IV. et V. post Chr. prodire potuerint.
4. L. Bahlmann, aus Wahren: Wie wirkt die Geschichte auf die Verbesserung unseres sittlichen Zustandes?
5. Gustav Reinnoldt, aus Bützow: De causis quae praecipue imperii Romani ruinam et perniciem adduxerunt.
6. Herm. Piper, aus Güstrow: Ueber das Vorurtheil, daß die Welt immer schlimmer werde.
7. Aug. Burmeister, aus Güstrow: Quibus ex causis solidiori doctrinae summum pretium tribuendum esse censemus.
8. Entlassungsrede des Rectors.

Nachmittags 3 Uhr.

1. Erste griechische Classe. Dr. B.
2. Zweite lateinische Classe. Pror.
3. Dritte französische Classe. 1. Collab.

Mit Vertheilung der Censuren, so wie mit Verlesung der Versetzungen wird sodann bei geschlossenen Thüren der Beschluß gemacht werden.

Besser.

2

Güstrowsche Schulschriften.

Erstes Stück.

Ueber den Vortrag des binomischen Lehrsatzes im Schulunterricht

von

Dr. H. Vermehren,
Domprediger und interimistischem Verwalter des Conrectorats.

Womit
zu der am 29. und 30. September
anzustellenden
Prüfung der Jugend
alle
Gönner und Freunde unserer Schule
mit gebührender Achtung einladet
Dr. Johann Friedrich Besser,
Prof. und Rector der Domschule.

Güstrow, 1834.
Gedruckt bei H. H. L. Ebert's Erben.

[illegible]

Vorwort.

Nachdem seit dem Anfang meines Rectorats im Jahr 1810 in den Nachrichten von der Güstrowschen Domschule, welche, außer zwei besonderen in Quart erschienenen Heften über die Geschichte und den Bestand unserer Bibliothek, neunzehn Stück in Octavformat umfassen, die nöthigen Mittheilungen über unsere Anstalt an das verehrliche Publicum derselben von mir alljährlich gegeben worden, beginnt mit vorliegender Abhandlung eine neue Folge von Schulschriften, zu welchen eine Allerhöchste Verordnung die Veranlassung gegeben hat. Da nämlich von den sämmtlichen Lehrern der Schule der Reihe nach irgend ein gelehrter Aufsatz in dem jedesmaligen Schulprogramme geliefert werden soll, eine Einrichtung, welche in vielfacher Hinsicht nur vortheilhaft seyn kann: so hat für diesmal der Herr Domprediger Dr. Vermehren als interimistischer Verwalter des Conrectorats den Anfang gemacht.

Indessen werden sich diesem, wie allen folgenden Aufsätzen, die von mir selbst entworfenen Schulnachrichten anschließen; und werde ich demnach zunächst da fortfahren, wo ich in meinen Nachrichten vom Jahr 1833 stehen geblieben bin. Was die nach Allerhöchster Verordnung zu liefernde Lectionstabelle für das folgende Semester anbetrifft, so wird diejenige Rubrik in derselben, welche die Schülerzahl einer jeden Classe benennt, hier auszufüllen nicht möglich seyn, weil sich über den Umfang jedes einzelnen Coetus vor dem entschiedenen Abgang aus sämmtlichen Classen am Ende des halben Jahrs, so wie vor dem Zuwachs von Außen her beim Anfang des neuen Semesters, nichts bestimmen läßt: daher wir etwas späterhin nur schriftlich in unserem unterthänigsten halbjährlichen Schulberichte an die Allerhöchste Regierung dieser Forderung werden genügen können.

Besser.

Ueber den Vortrag des binomischen Lehrsatzes im Schulunterricht.

Bei der größeren Ausdehnung, welche in neuerer Zeit der mathematische Unterricht auf den Gymnasien erhalten, ist die Grenze desselben etwas schwankend geworden; auf der einen Anstalt werden Lehren, als recht eigentlich für die Schule gehörend, hineingezogen, die man auf anderen, als über den Kreis der Schule hinausliegend, dem akademischen Studium vorbehält. Die Grundsätze, nach welchen der Umfang dieses Unterrichts, die Aufnahme oder Ausschließung gewisser Lehren, zu bestimmen sey, liegen zwar im Allgemeinen nahe: Wichtigkeit und Fruchtbarkeit eines Satzes, sein Zusammenhang mit andern Sätzen, seine Angemessenheit zu der Fassungskraft des Geistes auf dieser Bildungsstufe, und die Zweckmäßigkeit desselben zur Uebung und Stärkung des Denkvermögens. Aber die Anwendung dieser Grundsätze auf einzelne Fälle giebt nicht immer eine leichte und feste Entscheidung, da in ihnen selbst viel Relatives ist, und auch äußere Umstände, namentlich die dem mathematischen Unterrichte zugetheilte Stundenzahl, Berücksichtigung fordern und Beschränkungen nöthig machen.

Dabei steht aber der Grundsatz fest, daß, weil der Hauptzweck dieses Unterrichts — auf Gymnasien wenigstens — Entwicklung und Uebung eines gründlichen und strengwissenschaftlichen Denkens ist, der Umfang nicht auf Kosten der Gründlichkeit ausgedehnt werden darf, und jeder aufzunehmende Satz den Forderungen der Wissenschaft gemäß vorgetragen und bewiesen werden muß.

Nach den angegebenen Rücksichten wird auch die Frage zu beantworten seyn, ob und wie der binomische Lehrsatz im Schulunterrichte vorzutragen sey. Soll die Wichtigkeit des Satzes allein die Entscheidung geben, so gebührt ihm vor allen Aufnahme in den Schulvortrag: denn kein Satz der gesammten Mathematik ist wichtiger und fruchtbarer, als er, der mit allen Zweigen der höheren Analysis unzertrennlich zusammenhängt, ja zu dieser überhaupt erst den Zugang öffnet. Hat doch Newton, der diesen, für ganze und positive Exponenten längst gefundenen, Satz zuerst auf gebrochene und negative ausdehnen lehrte, — in welcher Ausdehnung derselbe daher den Namen des Newtonschen Theorems führt — dieses für die wichtigste seiner Entdeckungen erklärt, weshalb dieser Satz auf seinem Grabmale in der Westminsterabtey eingegraben ist. — Es hängt aber auch dieser Satz mit den ihm voraufgehenden und noch zur Elementar-Mathematik gehörenden Lehren so wesentlich und unzertrennlich zusammen, daß ein gänzliches Verschweigen und Uebergehen desselben fast unmöglich ist. In der Potenzlehre nämlich muß das Verfahren angegeben werden, wie die verschiedenen Arten der Größen zu beliebigen Dignitäten erhoben werden; wollte der Lehrer hiebei die Erhebung der durch Addition oder Subtraction entstandenen Größen unerwähnt lassen, so würde der aufmerksame Schüler diese Lücke selbst bemerken, und auf seine Anfrage deswegen mit der Vertröstung auf den akademischen Vortrag wenig befriedigt werden. Die Formel für die 2te und 3te Potenz eines Binomii kann überdies gar nicht übergangen werden, weil sie zur Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln nothwendig ist; — aber für die folgenden Potenzen wird der Schüler die Formeln auch zu kennen wünschen, und wenn er sie durch fortgesetzte Multiplication sich selbst sucht, so wird ihm eine anscheinende Regellosigkeit in der Reihefolge der Coefficienten auffallen; auch wird er fragen, ob es nicht möglich sey, eine beliebige höhere Potenz des Binomii darzustellen, ohne die ganze Reihe aller voraufgehenden zuvor einzeln ausgerechnet zu haben.

Kann denn also der binomische Satz nicht übergangen werden, so ist die Frage, wie man ihn vortragen solle. Hier pflegt sich nun der Lehrer in einiger Verlegenheit zu befinden. Den Satz — wie wohl sonst beim Schulunterricht geschah — bloß hinzustellen ohne Beweis, und an einigen der ersten Potenzen, etwa bis zur 6ten, zu zeigen, daß er an diesen seine Richtigkeit bewähre, mit der Versicherung, man werde auch bei jeder folgenden Potenz ihn bestätigt finden, ist eine höchst mangelhafte Induction und aller wissenschaftlichen Methode zuwider. Der Satz soll — wenigstens für ganze und positive Exponenten — strenge bewiesen werden. Welchen der vorhandenen Beweise nun der Lehrer wählen möge, immer stellen sich einige Schwierigkeiten dar. Zuerst in Hinsicht der Zeit. Keiner von den verschiedenen Beweisen läßt sich in einer oder zwei Stunden ausführen; selbst bei der Beschränkung auf ganze und positive Exponenten wird eine längere Zeit erfordert, wenn zumal der Lehrer dahin streben und sich davon überzeugen will, daß die Beweisführung von Allen gefaßt und Allen einleuchtend geworden. — Allein eben dieses scheint, auch wenn man hier mit der Zeit nicht kargen will, schwer zu erreichen, und manche Lehrer schließen eben deshalb den Satz von ihrem Vortrage aus, weil sie befürchten, der Beweis werde doch der Mehrzahl der Schüler unverständlich bleiben.

So würde denn hier diejenige Beweisart die zweckmäßigste seyn, welche ohne eine Menge vorbereitender Lehren die Wahrheit des Satzes in möglichster Kürze, Einfachheit und Deutlichkeit, aus Elementarsätzen, und doch in völliger, keinen Zweifel übrig lassender Strenge vor Augen legte. Einen Versuch hiezu giebt das Folgende.

Am gewöhnlichsten wird der Beweis auf die Combinationslehre gegründet, und es ist nicht zu leugnen, daß der so geführte Beweis nicht nur vollkommen überzeugend wird, sondern auch vorzüglich befriedigt, weil er aus dem Wesen des Potenzirens selbst, also aus der Genesis der Formel selbst, ihre Richtigkeit darlegt. Aber die dazu dem Satze voraufzuschickende Combinationslehre ist nicht kurz, und wohl auf den meisten Schulen möchte es zu einem gründlichen und vollständigen Vortrage derselben an Zeit gebrechen. Sonst ist sie allerdings auch in vielen anderen Beziehungen interessant und wichtig genug, um da, wo beschränkte Stundenzahl nicht hindert, Aufnahme in den Vortrag zu verdienen. Machen aber die Umstände Einschränkung nöthig, so kann sie, die nicht schwer und in vielen der gewöhnlichen Lehrbücher vorgetragen ist, dem Privatfleiße des vorgeschrittenen Schülers, oder dem künftigen Studium vorbehalten bleiben, um so mehr, da sie — außer jenem Beweise des binomischen Satzes — mit den übrigen Lehren des mathematischen Schulunterrichts in keiner nothwendigen Verbindung steht.

Weit unzweckmäßiger erscheint der mit Hülfe der Differentialrechnung geführte Beweis; denn, wenn er gleich schon aus den ersten Regeln des Differentiirens sich leicht ergiebt, so darf man doch den Schüler nicht in ein ihm noch ganz fremdes Gebiet einige Schritte hineinführen, um von dort die Beweisgründe eines Satzes zu entlehnen, der noch wesentlich zur Elementar-Mathematik gehört. Ueberhaupt ist auch angemessener, die Differentialrechnung auf den binomischen Satz zu gründen, als umgekehrt. — So möchten ferner wohl alle Beweise, welche die Lehren von der Summirung der Reihen höherer Ordnungen, von den Polygonal- und Pyramidalzahlen u. dgl. voraussetzen, weder der Kürze, noch der Einfachheit und Leichtigkeit entsprechen, welche hier zu erstreben und — wie der Verf. im Folgenden gezeigt zu haben glaubt — auch zu erreichen sind.

Der Beweis, welcher hier der Prüfung vorgelegt wird, ist demnach geführt ohne Bezugnahme auf die Combinationslehre, oder auf andre dem Vortrage einzuschiebende Sätze, nur aus den bekanntesten Elementarsätzen, also daß auch unnöthig ist, den Satz, wie in vielen Lehrbüchern geschieht, von seiner rechten Stelle, der Potenzlehre, in einen durch andere Materien davon getrennten eignen Abschnitt, oder in einen Schluß-Anhang zu verweisen. — Absichtlich ist auch die Anwendung neuer, dem Schüler nicht leicht geläufig werdender Bezeichnungen vermieden; denn auch diese tragen dazu bei, den Anfänger zu verwirren und abzuschrecken, zumal wenn sie so bunt und vielfältig werden, wie z. B. in Ohm's Lehrbuch der niedern Analysis, wo lateinische, griechische und deutsche, große, kleine, und ganz kleine, gewöhnliche und Schwabacher Buchstaben — jede Gattung mit eigenthümlicher Bedeutung — neben, über und unter einander stehen, ja oft ein großer Buchstabe rings von einer Menge kleiner umdrängt ist, wie eine Gluckhenne von Küchlein, und es dabei an graden und schrägen, perpendiculären und horizontalen, einfachen und doppelten Strichen, selbst an Ausrufungszeichen nicht fehlt. —

Man scheint ziemlich allgemein darüber einig zu seyn, daß der Beweis des binomischen Satzes im Schulunterrichte nur auf die Fälle, wo der Exponent eine ganze und positive Zahl ist, zu beschränken sey. In dieser Beschränkung ist auch hier der Beweis vorgetragen; doch will der Vf. nicht unbemerkt lassen, daß ihm auch für die Ausdehnung des Satzes auf gebrochene und negative Exponenten ein der Fassungskraft des Schülers angemessener Beweis möglich scheint. Der beschränkte Raum dieser Blätter hindert aber hier die Ausführung eines solchen Versuchs, bei welchem er sonst den Beweis in Bohnenberger's Anfangsgr. der höhern Analysis (Tübing. 1811.) S. 4. fgg. zum Grunde legen würde, der, wie ihn dünkt, sich vereinfachen und populärer machen ließe.

Der binomische Lehrsatz *)

giebt einen allgemeinen Ausdruck der Theile, aus welchen die Potenzen zweitheiliger Größen bestehen.

Dieser Ausdruck ist:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[r-1])}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ r} a^{n-r} b^r + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[n-1])}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ n} a^0 b^n$$

---

*) Ob man den binomischen Satz Lehrsatz oder Aufgabe nennen will, ist gleichgültig. Jeder Lehrsatz ist eine Aufgabe, so ferne das, was er aussagt, als etwas noch zu Findendes betrachtet wird; — und jede Aufgabe, die gelöst worden, giebt in ihrer Auflösung wieder einen Lehrsatz.

Beweis für die Fälle, wo n eine ganze und positive Zahl ist.

§. 1.

Es ist $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, und wenn man $\frac{b}{a} = z$ setzt, so ist $(a + b)^n = a^n (1 + z)^n$

Wenn daher der Ausdruck der Theile von $(1 + z)^n$ gefunden ist: so bedarf es nur einer Multiplication dieses Ausdrucks mit a^n, um auch die Formel für $(a + b)^n$ zu erhalten. — Nun ist

$$(1 + z)^1 = 1 + z$$
$$(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$$
$$(1 + z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$$
$$(1 + z)^4 = 1 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$$
$$(1 + z)^5 = 1 + 5z + 10z^2 + 10z^3 + 5z^4 + z^5$$
$$(1 + z)^6 = 1 + 6z + 15z^2 + 20z^3 + 15z^4 + 6z^5 + z^6$$

welche Ausdrücke man durch successive Multiplication von $(1 + z)$ mit $(1 + z)$ u. s. w. erhält.

§. 2.

In diesen Ausdrücken der 1sten, 2ten bis 6ten Potenz von $1 + z$ zeigt sich, daß

1) die Anzahl der Glieder der 1sten Potenz 2, der 2ten 3, u. s. w., der 6ten 7 ist. Ist also n eine ganze Zahl nicht über 6, so ist von $(1 + z)^n$ die Anzahl der Glieder $n + 1$.

2) daß der Exponent von z im 2ten Gliede 1 ist, und in den folgenden Gliedern dieser Exponent immer um 1 wächst, und daher im letzten oder $(n + 1)$ ten Gliede n ist;

3) daß die Glieder, welche z enthalten, Coefficienten bei sich haben, deren Regel sich zwar nicht sogleich darstellt, von denen jedoch folgendes schon offenbar ist:

a) der Coefficient von z ist dem Exponenten der Potenz, zu welcher $1 + z$ erhoben worden, gleich, also n.

b) zwei Glieder, deren eins vom ersten soweit entfernt ist, als das andere vom letzten, haben einerlei Coefficienten.

§. 3.

Nun läßt sich aber darthun, daß die Sätze in §. 2., wenn sie für irgend eine, die nte, — z. B. die 6te — Potenz von $1 + z$ gelten, auch für die nächstfolgende, die $(n + 1)$te — die 7te — gelten müssen.

Bezeichnet man nämlich die, jetzt noch unbestimmten, Coefficienten von z^2, z^3, z^4 u. s. w. mit B, C, D u. s. w., so ergiebt sich — wenn n eine ganze Zahl nicht über 6 ist —

$$(1+z)^n = 1 + nz + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + nz^{n-1} + z^n$$

Wird an beiden Seiten mit $1 + z$ multiplicirt, so bekommt man $(1 + z)^{n+1}$

$$\begin{aligned} = 1 + nz + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + nz^{n-1} + z^n \\ + z + nz^2 + Bz^3 + \ldots \quad \ldots + nz^n + z^{n+1} \end{aligned}$$

Das ist

$$(1+z)^{n+1} = 1 + (n+1)z + (n+B)z^2 + (B+C)z^3 + \ldots + (n+1)z^n + z^{n+1}$$

Hier zeigt sich, daß die §. 2. bemerkten Eigenschaften der Formel für $(1 + z)^n$ auch in der für $(1 + z)^{n+1}$ sich finden. Gelten sie also z. B. für die 6te Potenz, so gelten sie auch für die 7te; — und wenn für die 7te, dann auch für die 8te u. s. f., — demnach für alle folgenden Potenzen mit ganzen Exponenten, und die Beschränkung der Formel für $(1 + z)^n$ auf die Fälle, wo n eine Zahl nicht über 6 sey, hört nun auf; und es ist vielmehr allgemein, wenn nur n eine ganze positive Zahl ist,

$$(1+z)^n = 1 + nz + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + nz^{n-1} + z^n$$

§. 4.

In dieser Formel sind jetzt noch die Coefficienten B, C, D u. s. w. zu bestimmen. Auch hierzu führt die Vergleichung der Formeln für $(1+z)^n$ und $(1+z)^{n+1}$ in §. 3. Sie zeigt nämlich, daß für jede Potenz der Coefficient von z^2 die Summe der Coefficienten von z^2 und z^1 in der nächst voraufgehenden Potenz ist;

daß ebenso der Coeff. von z^3 aus der Summe der Coefficienten von z^3 und z^2 in der nächstvoraufgehenden entsteht,

und überhaupt für jede Potenz der Coeff. von z^r gleich ist der Summe der Coefficienten von z^r und z^{r-1} in der nächstvoraufgehenden Potenz.

Demnach ist zuvörderst für alle Potenzen von $(1+z)$ der Coeff. B leicht zu bestimmen; er ist nämlich für die $(n+1)$te Potenz gleich der Summe von B aus der vorigen, der nten Potenz, + dem Exponenten n eben dieser Potenz.

Für $n = 2$ ist nun $B = 1$; daher
für $n = 3$, $B = 1 + 2$
für $n = 4$, $B = 1 + 2 + 3$

. .
. .
. .

für n überhaupt, $B = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$
B ist also immer die Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 1, Differenz 1, Gliederzahl $n-1$ ist. Die Anwendung der Regel für die Summation der arithmetischen Progressionen giebt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = (1 + n - 1)\frac{n-1}{2}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Für letzteres kann auch gesetzt werden $\frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}$

Also $B = \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}$

§. 5.

Nach §. 3. ist C in der $(n+1)$ten Potenz immer dem $(C+B)$ aus der $n$ten gleich. Nun ist (nach §. 4 und 2)

für $n=2$, $B=1$, $C=0$; also

für $n=3$, $B=\frac{3.2}{1.2}$, $C=0+1=1$, wofür gesetzt werden kann $=\frac{3.2.1}{1.2.3}$

für $n=4$, $B=\frac{4.3}{1.2}$, $C=\frac{3.2}{1.2}+\frac{3.2.1}{1.2.3}=\frac{3.2.3+3.2.1}{1.2.3}$

$$=\frac{3.2(3+1)}{1.2.3}=\frac{4.3.2}{1.2.3}$$

für $n=5$, $B=\frac{5.4}{1.2}$, $C=\frac{4.3}{1.2}+\frac{4.3.2}{1.2.3}$

$$=\frac{4.3.3+4.3.2}{1.2.3}=\frac{4.3(3+2)}{1.2.3}$$

$$=\frac{5.4.3}{1.2.3}$$

$\vdots$ $\quad\vdots$ $\quad\vdots$

überhaupt

für $n-1$, $B=\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$, $C=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$

und für n,

$$B=\frac{n(n-1)}{1.2}, C=\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)3+(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3+3)}{1.\,2.\,3}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\,2.\,3}$$

Hieraus ergiebt sich, daß man für jede beliebige Potenz, C auch aus dem B derselben Potenz finden könne; es ist nämlich $C = B.\,\frac{n-2}{3}$

§. 6.

Nach §. 3 ist ferner D für die (n + 1)te Potenz gleich dem (D + C) aus der nten. Nun ist aber

für $n = 3,\ C = 1,\qquad D = o$, also

für $n = 4,\ C = \frac{4.3.2}{1.2.3},\ D = o + 1 = \frac{4.\,3.\,2.\,1}{1.2.3.\,4}$

für $n = 5,\ C = \frac{5.\,4.\,3}{1.2.\,3},\ D = \frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$

$$= \frac{4.\,3.\,2.\,4 + 4.\,3.\,2.\,1}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$= \frac{4.\,3.\,2\,(4+1)}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$= \frac{5.\,4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3.\,4}$$

für $n = 6,\ C = \frac{6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3},\ D = \frac{5.\,4.\,3}{1.\,2.\,3} + \frac{5.\,4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3.\,4}$

$$= \frac{5.\,4.\,3\,(4+2)}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$= \frac{6.\,5.\,4.\,3}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

überhaupt

für n—1, $C = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}$, $D = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

für n, $D = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\,4 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

Hier zeigt sich gleichfalls, daß man für jede beliebige Potenz, D aus dem C derselben Potenz finden könne. Es ist nämlich $D = C.\frac{n-3}{4}$

§. 7.

Die in §. 5 und 6 zur Auffindung von C und D befolgte Methode läßt sich auch zur Auffindung von E, F und aller folgenden Coefficienten fortsetzen. Zugleich erhellt aus ihrem, bei jedem Exponenten und Coefficienten unverändert bleibenden, Wesen, daß in jeder Potenz aus dem Coefficienten eines jeden Gliedes der des nächstfolgenden sich ergeben müsse, wenn man jenem im Zähler noch die dem letzten Factor abnehmend, im Nenner aber die dem letzten Factor zunehmend zunächst folgende ganze Zahl als Factor zusetze.

Also wird $E = D.\frac{n-4}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

$$F = E.\frac{n-5}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$$

und allgemein R (d. i. der Coefficient von z^r)

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-[r-1])}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ r}$$

§. 8.

Setzt man nun §. 3 in die Formel für $(1+z)_n$ statt der Coefficienten B, C, u. s. w. die für sie gefundenen Werthe, so erhält man

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1.\,2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[r-1])}{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ r}z^r + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[n-2])}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (n-1)}z^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[n-1])}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ n}z^n$$

Das vorletzte Glied wird $= \frac{n}{1}z^{n-1}$; denn man darf nur im Nenner des Coefficienten die Factoren in umgekehrte Folge stellen, so erhält man

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[n-2])}{(n-1)(n-2)\ldots(n-[n-2])(n-[n-1])}$$

wo im Zähler und Nenner alle Factoren übereinstimmend sind, bis auf n im Zähler und $(n-[n-1])$, d. i. $= 1$, im Nenner.

Das letzte Glied aber wird $= z^n$, da alle Factoren im Zähler mit denen im Nenner übereinstimmen.

§. 9.

Wird nun für z wieder (s. §. 1) gesetzt $\frac{b}{a}$, so wird

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\cdot\frac{b^2}{a^2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\ \text{etc.}$$

Multiplicirt man an beiden Seiten mit a^n, so ist

$$a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{a^n b}{a} + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\cdot\frac{a^n b^2}{a^2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\cdot\frac{a^n b^3}{a^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[r-1])}{1.\,2.\,3\,.\,.\,.\,r}\cdot\frac{a^n b^r}{a^r} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}\cdot\frac{a^n b^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{a^n b^n}{a^n}$$

Und da $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^n = (a+b)^n$, so ist

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.\,2}a^{n-2}b^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-[r-1])}{1.\,2.\,3\,.\,.\,.\,r}a^{n-r}b^r + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n$$

was zu beweisen war.

§. 10

Wird b negativ genommen, also statt $(a+b)^n$ gesetzt $(a-b)^n$: so müssen in der letzten Formel, — weil bei negativen Größen die Potenzen mit graden Exponenten positiv, mit ungraden negativ werden, — alle Glieder, worin b mit einem ungraden Exponenten vorkommt, das Vorzeichen — erhalten; die übrigen aber, wo es einen graden Exponenten hat, das Vorzeichen + behalten, daß also hier die Vorzeichen wechseln:

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 - \text{etc.}$$

Zusatz.

In keinem mir bekannten Lehrbuche wird bemerkt, daß die angegebene Form des binomischen Satzes keinesweges die einzig mögliche sey, und daß der Beweis der Richtigkeit dieser Form durchaus nicht eine ausschließende Nothwendigkeit derselben mit beweise. Allerdings läßt sich denken, daß die Stücke, aus welchen $(a+b)^n$ besteht, noch auf andere Weise richtig und vollständig dargestellt werden könnten. Wirklich giebt es für die Coefficienten andere, eben so richtige — wenn auch vielleicht minder bequeme — Formen. So läßt sich z. B. in §. 5 C auch folgendermaaßen finden:

für $n=2$, ist $B=1$, $C=0$; also

für $n=3$, $B=1+2$, $C=1$

für $n=4$, $B=1+2+3$, $C=1$
$+1+2$
$=2.1+1.2$

für $n=5$, $B=1+2+3+4$, $C=1$
$+1+2$
$+1+2+3$
$=3.1+2.2+1.3$

für $n=6$, $B=1+2+3+4+5$, $C=3.1+2.2+1.3$
$+1+2+3+4$
$=4.1+3.2+2.3+1.4$

und für n überhaupt

$$C = 1(n-2) + 2(n-3) + 3(n-4) + \ldots + (n-2)1$$

Durch gleiches Verfahren findet man in §. 6. D also:

für $n=3$, $C=1$, $D=0$

für $n=4$, $C=1.2+2.1$ $D=1$

für $n=5$, $C=1.3+2.2+3.1$, $D=1$

$$+1.2+2.1$$
$$=1(1+2)+2.1$$

für $n=6$, $C=1.4+2.3+3.2+3.1$, $D=1(1+2)+2.1$

$$+1.3+2.2+3.1$$
$$=1(1+2+3)+2(1+2)+3.1$$

für $n=7$, $D=1(1+2+3+4)+2(1+2+3)+3(1+2)+4.1$

und für n überhaupt

$$D=1(1+2+3+..+[n-3])+2(1+2+3+..+[n-4]) +3(1+2+3+..+[n-5])+...+(n-3)1$$

So weiter in §. 7 für n überhaupt

$$E=1(1+[1+2]+[1+2+3]+..+[1+2+3+..+(n-4)]) +2(1+[1+2]+..+[1+2+3+..(n-5)])+.. ..+(n-4)1.$$

Diese Art, die Binomial-Coefficienten darzustellen, hat der Vf. nirgends gefunden; sie scheint ihm aber schon als Beweis, daß der binomische Satz mehr als Eine Darstellung zulasse, bemerkenswerth. Ob sie auch sonst fruchtbar seyn möchte, wagt er nicht zu entscheiden.

Schulnachrichten.

1. Lehrercollegium.

Durch anhaltende Kränklichkeit bewogen und mit Allerhöchster Bewilligung unternahm der vierte Lehrer unserer Schule Herr Francke seit Ostern 1833 zur Wiederherstellung seiner Gesundheit eine Reise ins Ausland, indem er Herrn Candidat Graff aus Grabow mit Genehmigung der resp. Behörden zu seinem Stellvertreter machte. Da indessen Herr Graff, der bei uns ein vorzügliches Lehrtalent bewährte, um andere Aussichten zu verfolgen, schon nach Verlauf eines halben Jahres Güstrow verließ, so wurde dessen Stelle durch Herrn Candidat Müller ersetzt, welcher bisher mit ungemeiner Treue und mit gutem Erfolg in seiner Stellung um unsere Anstalt sich wohl verdient gemacht hat.

2. Frequenz der Schule.

Im Anfang des Wintersemesters 1833 saßen: in Prima 21 Schüler, unter welchen 14 Auswärtige waren; in Secunda 19, A. 12; in Tertia 28, A. 6; in der technologischen Classe 37, A. 12; in Quarta 35, A. 7; in Quinta 30, A. 3; in Sexta 33, A. 3. Summa 211, worunter 57 Auswärtige.

Im Beginn des Sommersemesters 1834 waren: in Prima 21, A. 16; in Secunda 24, A. 9; in Tertia 24, A. 5; in der Technologie 37, A. 7; in Quarta 35, A. 5; in Quinta 31, A. 5; in Sexta 36, A. 2. Summa 208, darunter 49 Auswärtige.

3. Abiturienten.

Mit dem Zeugniß der Reife nach überstandener vorschriftsmäßiger Prüfung giengen zur Universität ab:

Ostern d. J. 1834:

1. Gust. Reinnoldt a. Bützow.

2. Aug. Burmeister a. G.
3. Ferd. Piper a. Kiewe.
4. Wilh. Rötger a. Bützow.
5. H. Krüger a. G.
6. Herm. Piper a. G.
7. L. Bahlmann a. Wahren.

Michaelis d. J.:

8. Alexand. v. Levetzow a. Ahrenshagen.
9. Bernh. Beer a. Gnoyen.

Von diesen Jünglingen werden Nr. 3 und 5 Theologie, Nr. 1. 4. 6. 7. 8 Jura, Nr. 2 und 9 Medicin studiren.

4. Die Bibliothek

hat mit unserem verbindlichsten Dank als Geschenke empfangen:

Von Hn. Quartus Francke: Allg. Kirchenzeitg. J. 1829—31.

— Hn. Cand. Graff: Gedike lat. Chrestom. f. d. mittl. Cl. — Steffens Gesch. d. alt. Bewohn. Deutschl. — Heinrichs Gesch. v. Frankr. B. 1. — Breitenbauch Beitr. z. Gesch. v. Asien u. Afr. 2 Thle. — Beckmanns Anl. z. Technol. — Velleius Pat. ed. Ger. Vossius. — Justinus ed. Pareus. — Th. Gaza Gramm. Gr. — Attila v. Fessler. — d'Argens Mém. de la républ. des lettres. T. 2—6. — Eusebia v. Kosegarten. B. 1.

— Hn. Senat. Lönnies: Buschicks Grundriß von Güstr. — Witte Schild. der Ver. Staat. von N. Amer. — Pompeji. B. 1.

— Hn. Stadtbuchh. Scheel: Baudii Poëmata.

Von dem Primaner Krasemann: Schedius de Diis Germanis.

— dem Prim. F. Spangenberg: Char. d. P. Ludw. v. Pr. — Reise durch d. südl. Deutschl. u. d. Venet.

— Wezels Versuch üb. d. Kenntn. d. Menschen. B. 1. — Sommerreise durch Magdb., Braunschw., Halberst., Quedlb. und Barby. 2 Thle. — Thümmels Reise in die mittäg. Prov. v. Frkr. B. 1—3 u. B. 6. — Nicolai Gedächtnißschr. auf J. J. Engel. — Soltau Br. üb. Rußl. — Feldzug in Portug. 1811 u. 12.

5. Der Naturalien- und Antiquitätensammlung sind: von dem Herrn Oberinspector von Sprewitz geschenkt worden:

1. eine in dem Torfmoor vor dem hiesigen Schlosse gefundene wendische Streitaxt;
2. eine kleine sehr dicke Schale von grünem Glase in Form einer Urne, eben daselbst gefunden.

Desgleichen von dem Tertianer v. Dadelsen 3 americanische Vögel ausgestopft:

1. Crotophaga Ani, Schneidervogel;
2. Procnias Melanocephalus, schwarzköpfiger Schnapper;
3. Trochilus latipennis, breitschwingichter Colibri.

6. Oeffentliche Prüfung.

Montag. Vormittag 10 Uhr.

1. Erste Relig. Classe. Rector.
2. Rede des Abit. Alexand. v. Levetzow: Qua ratione in historiis scribendis classicorum auctorum numerus semper fere minor fuerit.
3. Erste mathem. Cl. Past. Dr. Vermehren.
4. Rede des Abit. Beer: über den Nachruhm.
5. Erste franz. Cl. Prorector.
6. Erste lat. Cl. Rector.
7. Entlassung der Abiturienten. Rector.

Nachmittag 3 Uhr.

1. Zweite hist. Cl. P. Dr. Vermehren.
2. Zweite franz. Cl. Quintus Krückmann.

3. Erste Rechenclasse. Rechenmeister H. Oelschläger.
4. Dritte hist. Cl. Collab. 2.

Dienstag. Vormittag 10 Uhr.

1. Dritte lat. Cl. Collab. 1.
2. Decl. Aug. Prahl (III): Tells Tod, v. Uhland.
3. Populäre Physik. Quintus.
4. Decl. E. Krüger (III): der Sänger, v. Göthe.
5. Erste Cl. d. deut. Gramm. Collab. 1.
6. Vierte geogr. Cl. Cand. Müller.

Hofrath Pizen

Lectinsplan

für das Wintsemester von $\frac{1834}{1835}$.

Latein.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage.	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	R. Besser	10	9 - 10 ch	Quintilian. Lib. X. Horat.
			8 - 9 al	Röm. Alterthümer.
	Pr. Wendhausen		10 - 11 al	Zumpts Gramm. und Webers Uebungsschule.
2.	Pror. Wendhausen	8	9 - 10 ch	Cic. Epp. Ovid. Metamorph.
	Sext. Prahl		8 - 9 al	Zumpts Gr. u. dess. Aufgab. z. Uebers.
3.	Coll. 1. Dr. Raspe	8	9 - 10 ch	Caesar.
			8 - 9 al	Zumpts Gr. Keims Material.
4.	Sext. Prahl	6	9 - 10 ch	Eutropius.
				Zumpts kl. Gramm. August prakt. Vorübgn.
5.	Coll. 2. Matthäi	6	9 - [illegible] ch	Gedike Leseb.
				Zumpts kl. Gr. August pr. Vorübungen.
6.	Cand. Müller	6	9 - [illegible]	Bröders kl. Gramm. und die Uebungsstücke hinter derselben.

Griechische Sprache.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage.	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	Dr. Vermehren	6	3 - 4	Herodot u. nach dess. Beendig. Sophokles.
				Homeri Ilias.
	R. Besser		8 - 9	Buttmanns Gr. Blume Anl. z. Ueb. a. d. L. i. Gr.
2.	Pror. Wendhausen	6	3 - 4	Xenophont. Anabasis u. Homeri Odyss.
			8 - 9	Buttmanns Gr. Werners Anl. z. Uebers.
3.	Sext. Prahl	4	3 - 4	Jacobs Elementarbuch.
				Buttm. Gr. Blume Uebersetz. a. d. Deut.
4.	Coll. 2. Matthäi	2	3 - 4	Jacobs Elementarb.
				Buttm. Gr.

Hebräische Sprache.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage.	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	Dr. Vermehren	2	11 - 12	Gesenius Leseb.
				Dess. Gramm. Exercit. a. d. N. T.
2.	Sext. Prahl	2	11 - 1[illegible]	Gesen. Gr. u. Lesebuch.

Französische Sprache.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage.	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	Pror. Wendhausen	4	4 - [illegible]	Chrestomathie von Ideler u. Nolte.
				Kirchhof Gr.
2.	Quint. Krückmann	4	4 - [illegible]	Charles XII. p. Voltaire. Numa Pompil. p. Florian.
				Kirchhof Gr.
3.	Coll. 1. Dr. Raspe	4	4 - [illegible]	Hirzel Leseb.
				Kirchhof.
4.	Cand. Müller	4	4 - 5	Hirzel Lese- u. Ueb. Buch.
				Kirchhof.

Deutsche Sprache.

Classe.	Lehrer.	Stund.	Tag.	Schriftsteller und Lehrbücher.
Aesth. Clas. 1.	R. Besser	2	2 3	Eigner Gang in deut. Ausarb. u. Declam.-Uebungen.
2.	Coll. 1. Dr. Raspe	2	2 3	Desgl.
3.	Cand. Müller	2	2 3	Desgl.
4.	Quint. Krückmann	2	2 3	Desgl.
deut. Gram. 1.	Coll. 1. Dr. Raspe	2	[illegible] 4	Heyse kl. deutsche Sprachlehre.
2.	Quint. Krückmann	2	3 4	Dieselbe.
3.	Cand. Müller	2	3 4	Dieselbe.

Religionnterricht.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	R. Besser	2	8	Niemeyers Lehrb. u. die Bib. im Odtext.
2.	Sext. Prahl	2	8	Eigner Gang.
3.	Coll. 1. Dr. Raspe	4	8	Dräseke Glaube, Liebe, Hoffnung.
u. RelGsch.	Sext. Prahl	2		Engel Gesch. der christl. Rel.
4.	Cand. Müller	4	8	Katechismus u. Bibel.
u. bib. Gesch.	Coll. 2. Matthäi	2		

Mathematikund Rechnen.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
Mathem.				
1.	Dr. Vermehren	4	10	Fischer und Kries.
2.	Pror. Wendhausen	4	10	Fischer.
3.	Coll. Matthäi	4	10	Fischer.
Rechencl.				
1.	R. M. Oelschläger	4	10	Eigner Gang.
Kopfrechn.	Quint. Krückmann	2	10	Desgl.
Rechencl.				
2.	Sext. Prahl	2	10	Scholz Aufgaben.
3.	Cand. Müller	2	10	Dieselben.
4.	Quint. Krückmann	4	10	Dieselben.
			2	

Schreilassen.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	R. M. Oelschläger	6	11	Eigner Gang.
			2	
2.	Cand. Müller	6	10	Nach Vorschriften v. Hn. Oelschläger.
	Sext. Prahl		2	
			3	

Historie unGeographie.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
1. NeueGesch.	R. Besser	2	2	Eigner Gang.
2. Alte Gesch.	Dr. Vermehren	2	2	Desgl.
3. Allg. Gesch	Coll. 1. Matthäi	2		Nach Volger
4. Allg. Gesch.	Sext. Prahl.	2	2	Nach Bredow.
Hist. Vorbereit.-Cl.	Coll. Matthäi	4	4	Eigner Gang

NB. Diese C[illegible] nthält alle diejenigen aus d. unt. Classen, die [illegible] Französisch lernen. Der vorbereitende Unter[illegible]n der Gesch. wechselt übrigens halbjährl. ab mit [illegible]ätetik u. mecklb. Geogr. u. Gesch.

Geogphie.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	Sext. Prahl.	2	10	Nach Bergh[illegible]
2.	Quint. Krückmann	2	10	Nach Cannabi[illegible].
3.	Coll. 1. Matthäi	2	10	Eigne[illegible]
4.	Cand. Müller	2	10	Eigner [illegible]

Naturkunde u Techn ogie.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
Techn. Cl.	Quint. Krückmann	6	9	Nach Poppe.
Pop. Phys.	idem	2	8	Nach Kries.
Nat. Gesch. 1.	idem	2	3	Nach Blumenbach.
2.	Coll. 1. Dr. Raspe	2	3	Nach Lenz.

Geang.

Classe.	Lehrer.	Stundz.	Tage	Schriftsteller und Lehrbücher.
1.	Coll. 1. Dr. Raspe.	2	11	Eigner Gang.
2.	idem	2	11	Gleichfalls.

s Versuch üb. d. Kenntn. d. Menschen. Sommerreise durch Magdb., Braunschw., Quedlb. und Barby. 2 Thle. — Thüm- e in die mittäg. Prov. v. Frkr. B. 1—3 — Nicolai Gedächtnißschr. auf J. J. Soltau Br. üb. Rußl. — Feldzug in 811 u. 12.

ralien- und Antiquitätensammlung sind:

Oberinspector von Sprewitz geschenkt worden:
m Torfmoor vor dem hiesigen Schlosse ge- endische Streitaxt;
e sehr dicke Schale von grünem Glase in r Urne, eben daselbst gefunden.
dem Tertianer v. Dadelsen 3 americani- gestopft:
a Ani, Schneidervogel;
Melanocephalus, schwarzköpfiger Schnapper;
latipennis, breitschwingichter Colibri.

Oeffentliche Prüfung.

Montag. Vormittag 10 Uhr.

Classe. Rector.
bit. Alexand. v. Levetzow: Qua ratione in bendis classicorum auctorum numerus sem- ior fuerit.
n. Cl. Past. Dr. Vermehren.
bit. Beer: über den Nachruhm.
Cl. Prorector.
. Rector.
er Abiturienten. Rector.

Nachmittag 3 Uhr.

Cl. P. Dr. Vermehren.
Cl. Quintus Krückmann.