

Ernst Hermann Vierth

Geschichte der Cladni'schen Klangfiguren und Angabe einer Methode, die Klangfiguren von Luftscheiben darzustellen

Stettin: R. Grassmann, 1870

<http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1757566813>

Druck Freier  Zugang  OCR-Volltext

Geschichte

der

Cladni'schen Klangfiguren

und

Angabe einer Methode,
die Klangfiguren von Luftscheiben
darzustellen.

Der Universität zu Rostock als Promotionsschrift vorgelegt.

Von

Dr. E. H. Vierth.

Stettin 1870.

Druck von R. Grassmann.

Herrn Director Kleinsorge

und

Herrn G. Bartels

hochachtungsvoll

zugeeignet

vom

Verfasser.

Hernoulli und Euler angeregten Untersuchungen der Schwingungen fester Körper. Da machte er die Entdeckung, eine Glas- oder Metallscheibe gab, wenn er sie an verschiedene Stellen hielt oder ansetzte, verschiedene Töne. Ein zuerst flüchtiger Gedanke war es, der ihm nicht, zur sichern Hervorbringung des Tones einen Verbindungsweg wunden und zu versuchen, ob sich nicht die verschiedenen Töne durch aufgestellten Sand sichtbar machen lassen. Ähnlich wie gewisse Flüssigkeit durch die Lichtstrahlen zerlegt werden. Es gelang aber zu warten. Mit grosser Umsicht und Gedächtnis verfolgte er die wichtige Entdeckung und legte seine Beobachtungen nieder in der Schrift: "Entdeckungen über die Theorie des Kluges". Leipzig 1787. Ausführlicher und systematischer ist die Sache behandelt in seiner "Akustik". Leipzig 1802. Er hat auch ein "Chladni's Land", dass, wenn er eins mit Sand bestreute und an einer Stelle festgehalten, Schalle mit dem Finger zum Tonen brachte, je nach den verschiedenen Umständen auf derselben verschiedene Sandabdrücke entstanden, die Krümmungen bilden, während die übrigen Theile der Scheibe keinen Sand mehr zeigten. Hier hat Chladni diese Figuren angegeben, er erklärte auch sofort ganz richtig, dass

I.

Die zweite Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts war eine der fruchtbarsten Zeiten für die Entwicklung vieler Wissenschaften. Jener Aufschwung der Geister, welchen die Geschichte als Anfang einer grossen Epoche feiert, erschloss den Wissenschaften neue Bahnen, auf denen sie bis heute von Entdeckung zu Entdeckung eilten. Wenn wir unser Augenmerk nur auf die Naturwissenschaften richten, welcher Reichthum berühmter Namen tritt uns da nicht entgegen? In jene Jahrzehnte fallen die Arbeiten eines Cavendish, Scheele, Priestley und Lavoisier; Franklin, Volta, Galvani drangen in das innerste Wesen einer der gewaltigsten Naturkräfte, der Electricität, ein; die Optik feierte einen Triumph in der Entdeckung des Achromatismus: dies nur einige Beispiele von vielen. Auch die Akustik, ein Gebiet, das bis dahin, man möchte sagen, stiefmütterlich behandelt war, sollte nicht dahinten bleiben. Wenn schon die Arbeiten eines Bernoulli, eines Euler und anderer dieselbe förderten, so waren es vor allen die epochemachenden Entdeckungen Chladni's, welche den Forscher auf einen neuen Weg führten, der, gepflegt und verbessert, noch heute zu den reichsten Schätzen leitet.

II. Chladni's Entdeckungen.

Chladni, am 30. November 1756 zu Wittenberg geboren, studirte anfangs Jura und wurde auch Doctor beider Rechte. Neigung zu den Naturwissenschaften aber und, wie er selbst zugesteht, ein unbezähmbarer Drang, sich berühmt zu machen, liessen ihn 1781 jene Laufbahn meiden und zu den eben erwähnten Wissenschaften übergehen. Damit beschäftigt, ein ganz neues musikalisches Instrument zu erbauen, deren er, beiläufig erwähnt, auch mehrere verfertigte, warf er sich unter andern Versuchen auf die von

Bernoulli und Euler angeregten Untersuchungen der Schwingungen fester Körper. Da machte er die Entdeckung, eine Glas- oder Metallscheibe gab, wenn er sie an verschiedenen Stellen hielt oder anschlug, verschiedene Töne. Ein äusserst glücklicher Gedanke war es, der ihm rieth, zur sichern Hervorbringung des Tons einen Violinbogen anzuwenden und zu versuchen, ob sich nicht die verschiedenartigen Töne durch aufgestreuten Sand sichtbar machen liessen, ähnlich wie ungleiche Electricität durch die Lichtenberg'schen Figuren. Es gelang über Erwarten. Mit grosser Umsicht und Gründlichkeit verfolgte er die wichtige Entdeckung und legte seine Beobachtungen nieder in der Schrift: „Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig 1787“. Ausführlicher und systematischer ist die Sache behandelt in seiner „Akustik, Leipzig 1802“.

Chladni fand, dass, wenn er eine mit Sand bestreute und an einer Stelle festgehaltene Scheibe mit dem Bogen zum Tönen brachte, je nach den verschiedenen äusseren Umständen auf derselben verschiedenartige Sandanhäufungen entstanden, die krumme Linien bildeten, während die übrigen Theile der Scheibe keinen Sand mehr zeigten. Der Entdecker nannte diese Figuren Klangfiguren, er erkannte auch sofort ganz richtig, dass diese Linien die ruhenden Stellen der Platte, Knotenlinien waren. Sand blieb lange Zeit das einzige Mittel, die Schwingungen einer Scheibe sichtbar zu machen, später empfahlen Chladni selbst, sowie Weber und Wheatstone eine Flüssigkeit, Wasser oder Quecksilber. Die Anwendung von Semen Lycopodii führte zu einer interessanten Beobachtung, deren Erklärung Faraday gab. In neuerer Zeit ist von Kundt sogar das Lissajous'sche Princip auf schwingende Scheiben übertragen, indem er die von leuchtenden Punkten tönender Scheiben ausgeführten Bewegungen betrachtete.

Man beschränkte sich bald nicht mehr darauf, an Scheiben diese Figuren zu beobachten, man untersuchte die Schwingungsart von Stäben auf dieselbe Weise, ja Kundt gelang es mittelst seiner Kieselsäure sogar, die Schwingungen der Luft tönender Pfeifen sichtbar zu machen. Später wandte er als noch feineres Mittel Flammen an. Die Entdeckung Chladni's fand aber ihre Vollendung in dem Phonautographen Weber's, des Mannes, der sich durch Begründung der Wellenlehre ein so grosses Verdienst um die gesammte Physik erworben hat. In diesem Apparat zeichnet der schwingende Körper mit einer kleinen federnden Spitze auf einer von Russ geschwärzten Glastafel selbst seine Schwingungen in Form einer Wellenlinie auf. Durch König's Membran-Phonautograph ist dieser Weg auch den Untersuchungen über die Schwingungen der Luft bei verschiedenen Tönen geöffnet.

III. Versuche einer mathematischen Erklärung der Klangfiguren.

Noch in demselben Jahre, in welchem Chladni seine Entdeckungen veröffentlichte, erschien in den Nov. Act. Acad. Petrop. eine Abhandlung von Jacob Bernoulli, welche jene Erscheinungen mathematisch zu erklären suchte. Der Grundgedanke, von dem er ausging, war ein ganz richtiger. Er dachte sich nämlich die Scheibe als ein System

rechtwinklig sich kreuzender Stäbe und berechnete nun nach den äussern Umständen die Knotenlinien, welche jeder Stab geben müsste. Falsch war dagegen der Schluss: die Knotenlinien beider Systeme verbunden geben die Klangfigur; so dass die Resultate, welche Bernoulli's Theorie ergab, mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmten. Chladni selbst bemerkt hierüber in seiner Akustik, dass die Resultate der Erfahrung nicht entsprächen, „wie auch deren Voraussetzungen allem Ansehen nach nicht der Natur gemäss seien“. Dieser Einspruch des Entdeckers, sowie die falschen Folgerungen, welche Bernoulli aus einer, wie wir später sehen werden, ganz richtigen Anschauung gezogen hatten, liessen letztere selbst als unrichtig erscheinen und bewogen diejenigen, welche sich später mit der Sache beschäftigten — fast alle bedeutenderen Mathematiker thaten dies aber — von andern Gesichtspunkten auszugehen, ohne dass jedoch ein befriedigendes Resultat erzielt wäre. Unter der Zahl derer, welche sich mit der Untersuchung der Klangfiguren beschäftigten, sind zu nennen: Dan. Bernoulli, Euler, Riccati, Poisson und Mlle. Sophie Germain, welche beiden letzteren zwar von Napoleon ausgesetzte Preise erhielten, ohne dass sie jedoch nennenswerthe Resultate erzielt hätten.

Erst Dr. Young näherte sich wieder dem von J. Bernoulli eingeschlagenen Wege, indem er von dem Gedanken ausging (in seiner Schrift: *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*), Stab und Scheibe verhielten sich ähnlich wie Saite und Membran, so dass sich die Schwingungen der Theilchen einer Scheibe nach der einen Richtung mit denen nach einer andern Richtung combinirten.

Später gelang es, durch die Untersuchungen von Strehlke, Savart, Wheatstone und König, eine Theorie aufzustellen, welche die Erscheinungen zum grössten Theil erklärt, wenn es auch noch immer nicht gelungen ist, mit vollständiger Klarheit alle Fälle vorher zu bestimmen. Chladni's Verdienste bestehen nun neben der „Entdeckung“ der Klangfiguren besonders darin, dass er genaue und bis ins Kleinste gehende Untersuchungen aller möglichen Fälle anstellte. Noch 1802 sagte er: „Es möchte wohl sehr schwer, und bei dem gegenwärtigen Zustande der höhern Mechanik und Analyse noch fast unmöglich sein, hierin auf dem Wege der Theorie weiter zu kommen“. Daher begnügte er sich, ein höchst schätzbares Material für die späteren Untersuchungen zu sammeln, indem er aufs Genaueste die äussern Umstände beobachtete, welche nöthig waren, die eine oder die andere Klangfigur hervorzubringen.

IV. Strehlke's Versuche.

Unter allen Experimentatoren, welche sich nach Chladni mit diesem Gegenstande beschäftigten, ist besonders der Professor Strehlke hervorzuheben wegen der äussersten Genauigkeit seiner Beobachtungen (*Poggendorff's Annalen* Band IV.). Auf höchst sorgfältig zugerichteten Scheiben von möglichst homogener Construction suchte er die Klangfiguren derartig herzustellen, dass sie nur ganz feine Linien bildeten, welche aus einzelnen Sandkörnern bestanden, so dass die Mitte dieser einfachen Reihe von Körperchen

als ideale Linie angesehen werden konnte. Strehlke's mikrometrische Ausmessungen dieser Gebilde führten ihn zu den Sätzen:

I. Die Klangfiguren oder die bei schwingenden Scheiben in Ruhe bleibenden Stellen der Oberfläche sind nicht gerade, sondern stets krumme Linien, aber Linien im Sinne der Geometrie, keine Flächen.

II. Diese Linien durchschneiden sich nicht.
Von den einfachsten Figuren, dem transversalen und diagonalen Kreuz, ausgehend, zeigt er, dass viele zusammengesetzte Figuren sich durch Theilung der Scheibe in kleinere Quadrate in jene beiden auflösen lassen, von denen er durch die sorgfältigsten Messungen nachweist, dass sie nicht zwei sich schneidende gerade Linien sind, Fig. 1—3.

Als Chladni (Pogg. Ann. V.) entschiedenen Widerspruch besonders dagegen erhob, die Linien seien niemals gerade, erneute Strehlke seine Messungen und bestimmte die Figuren als Kegelschnitte, welche die Gleichung $y^2 = px + qx^2$ erfüllten, den unterstützten Punkt als Anfangspunct der Coordinaten angenommen (Pogg. Ann. XVIII.). Dabei stellte sich die schon früher beobachtete Erscheinung heraus, dass unter denselben Umständen entweder Figur 4 a oder 4 b entstand. Savart hatte Aehnliches schon bei den Longitudinalschwingungen der Stäbe beobachtet und dies freiwillige Schwingungsart genannt.

Weitere Untersuchungen Strehlke's (Pogg. Ann. XXVII., Dove's Repert. III.) führten zu dem wichtigen Resultat, dass sich die Schwingungen einer und derselben Scheibe in gewisse Gruppen ordnen liessen, deren jede einer bestimmten Schwingungsart angehörte, und zwar so, dass jede Gruppe gewisse, durch Rechnung im Voraus bestimmbare, feste Punkte gemein hatte. Es zeigte sich also, dass bei den Scheiben dieselbe Erscheinung eintrat, wie sie schon früher von Euler, Chladni, Bernoulli und Riccati an Stäben beobachtet war. Strehlke führte ähnliche Berechnungen, wie jene, selbstständig für Stäbe durch und bewies, dass wenn die Knotenlinien bei der Längsschwingung eines Stabes aus m abgesonderten Bogen bestehen, die Zahl der festen Schwingungsknoten $= 2(m - 1)$ ist; z. B., Fig. 5, bei 3 Kurven 4 Knoten. Als angenäherte Formeln fand er in Uebereinstimmung mit den aus der Euler'schen Gleichung (Comm. Petrop. 1779) sich ergebenden Resultaten

$$s_1 = \frac{2}{3(2n - 1)}.$$

$$s_2 = \frac{5}{2(2n - 1)}.$$

$$s_3 = \frac{9}{2(2n - 1)}.$$

$$s_4 = \frac{13}{2(2n - 1)}.$$

$$s_5 = \frac{17}{2(n-1)},$$

wo s_1 den Abstand des ersten Knotens vom Ende des Stabes, s_2 den des zweiten von demselben Ende u. s. w., und n die Zahl der Schwingungsknoten bezeichnet, während die Länge des Stabes der Einheit gleich gesetzt ist.

Ganz ähnliche Knoten, von Strehlke Pole genannt, treten bei den Schwingungen einer Scheibe auf. Streicht man z. B., Fig. 6, eine Quadratscheibe so, dass sie einmal 2 Hyperbeln und das andere Mal eine geschlossene Curve hervorbringt, so werden durch dieselben 4 Punkte, in denen sich diese beiden Figuren schneiden, alle andern Curven gehen, welche zu derselben Schwingungsart gehören. Eine andere Gruppe hat 5, andere 7, 9, 13 etc. Pole.

Dies sind im Wesentlichen die Resultate der Untersuchungen von Strehlke, die, wenn sie auch nicht positiv die Entstehung der Klangfiguren erklären, so doch manches schätzbare Material für spätere Untersuchungen enthalten und wegen ihrer scharfen und genauen Beobachtung besonders hervorgehoben zu werden verdienen.

V. Savarts Beobachtungen.

Einen wesentlichen Schritt that man in der Erkenntniss der Klangfiguren vorwärts, als Savart die Entdeckungen veröffentlichte (Pogg. Ann. XVI.), welche er machte, als er die Elasticität der Körper, besonders der Krystalle, untersuchte und zu dem Zwecke die Klangfiguren anwandte.

Lange schon hatte Savart die Sandanhäufungen studirt, welche bei Stäben und Platten durch Schwingungen entstanden, die auf die verschiedenartigste Weise hervor gebracht wurden durch die Verbindung ersterer mit Saiten, Holzruthen u. s. w., die in Schwingung versetzt waren. So befestigte er z. B. (Ann. de phys. et chimie T. XXV.) an einem Holzstabe, Fig. 7, eine Saite, versetzte sie in Schwingung und erhielt nun verschiedenartige Figuren, je nachdem er die Saite verschieden erregte. Figur 7 zeigt die ganze Anordnung und Figur 8 die einzelnen Resultate; dabei bedeutet A den Querschnitt des Stabes; FF' den Durchschnitt der Ebene, in welcher die Schwingungen der Saite geschehen; o die Sandanhäufungen auf der obern Seite des Stabes, u die auf der untern bei denselben äussern Verhältnissen.

Wir brauchen hierauf nicht näher einzugehen, da es unser Thema nicht direct berührt, und wenden uns wieder zu den oben angedeuteten Untersuchungen.

Bei zwei Reihen von Versuchen, welche Savart einmal an Holz-, dann an Bergkrystallscheiben anstellte, ergab sich, dass die Elasticität, welche ein Körper nach den verschiedenen Richtungen hin besitzt, einen grossen Einfluss auf die Natur der Klangfiguren ausübt. Er nahm einen Klotz von Buchenholz, von einem Stamme, der sehr gleichmässig gewachsen war, Fig. 9, und untersuchte dessen Elasticität nach verschiedenen Richtungen, indem er ausgeschnittene dünne Stäbchen tönen liess. Dabei fand er, dass

die Elasticität in den drei auf einander senkrechten Richtungen AZ, AY und AX sich verhielt wie resp. $1 : 2_{25} : 16$, oder wie $1^2 : 1_{25}^2 : 4^2$. Aus diesem Klotz schnitt er runde Scheiben, die theils senkrecht zu einer dieser Axen waren, theils eine Neigung zu ihr hatten. Wären die einzelnen Jahresringe regelmässige concentrische Kreise gewesen, so würde die Elasticität in allen zu AX senkrechten Richtungen gleich gewesen sein; so aber waren die Ringe Ellipsen, und Savart musste eine gegen AX geneigte Scheibe ausschneiden, um in derselben nach allen Richtungen hin gleiche Elasticität zu haben.

Als Savart nun die Klangfiguren dieser Platte untersuchte, ergab sich, dass sie dieselben Erscheinungen darbot, wie jede homogene Glas- oder Metallscheibe. Wurde dieselbe nämlich in der Mitte eingespannt, so erhielt man zwei sich orthogonal schneidende Durchmesser, die sich regelmässig fortbewegten, wenn der Erschütterungspunkt am Rande weiterrückte, Fig. 10. Anders verhielten sich dagegen die übrigen Scheiben. Lag nämlich eine der Axen, eine der drei Richtungen AX, AY, AZ in der Scheibe, so traten wieder die beiden Durchmesser auf, wenn der Erschütterungspunkt um 45° vom Endpunkt der Axe entfernt lag und die Scheibe in der Mitte befestigt war, Fig. 11. Wurde die Scheibe anderswo erschüttert, oder war der Unterstützungspunkt ein anderer, so traten zwei Hyperbelzweige auf, deren eine Asymptote in der Richtung der Elasticitätsaxe lag, Fig. 12. Dabei gingen sämtliche Hyperbelzweige durch zwei feste Punkte a und b, welche Savart Nodalcentra (die Schwingungsknoten oder Pole von Strehlke) nannte, und welche auf der zur Elasticitätsaxe senkrechten Linie lagen. Lag keine der Elasticitätsaxen in der Scheibe, so erhielt man nur hyperbolische Curven, die je nach der Erschütterungsstelle mehr oder weniger gekrümmt waren. Savart untersuchte noch die Tonhöhe in den einzelnen Fällen, als zweites Mittel zur Bestimmung der Elasticitätsaxen, die wir aber, als für unsere Zwecke unwesentlich, übergehen können.

Diese Beobachtungen legte Savart bei der Untersuchung von Scheiben, die aus Bergkrystall geschnitten waren, zu Grunde und fand die ersten Resultate auch hier bestätigt. Darauf dehnte er seine Versuche auch auf andere Körper, z. B. Metalle aus; er fand hier ebenfalls ähnliche Erscheinungen, wenn auch nicht in so ausgeprägter Form, die bei genauerer Untersuchung auf krystallinisches Gefüge hindeuteten. Nur Körper, welche aus pulverförmigen Bestandtheilen zusammengesetzt waren, z. B. Kreide, Schellack (wegen des Zinnober) zeigten sich vollkommen homogen. Für gewöhnlich ergaben kreisrunde Metallscheiben dasselbe Resultat wie die Holzscheibe, in der zwei Elasticitätsaxen lagen; nur sehr grosse gewalzte Scheiben konnten sich nahezu homogen zeigen, weil die Elasticität in einer Richtung bedeutend vermindert war.

VI. Erklärung der bei den Figuren auftretenden Luftströme (Faraday.)

So grosse Einsicht Savart auch durch diese Untersuchungen bewährt hatte, so irrte er sich doch in der Erklärung einer Erscheinung, welche die Klangfiguren häufig begleitete. Schon Chladni hatte gefunden, dass die vom Bogen abspringenden, harzigen

Theile dort zitternd liegen blieben, wo keine Klanglinien waren. Noch auffallender wurde die Erscheinung, als man ein Pulver, etwa Samen *Lycopodii* unter den Sand mischte; letzterer ordnete sich wie gewöhnlich zu den Knotenlinien, ersteres dagegen häufte sich nahe am Rande der Platte zu Wölkchen an, die in beständig wirbelnder Bewegung waren, Fig. 13. Savart nun hielt diese Wölkchen für ganz ähnliche Figuren, wie die Chladni'schen, und suchte sie durch eine secundäre Theilungsart der Platte zu erklären. Diese Ansicht war jedoch nicht die richtige, und Faraday's Verdienst ist es, den Grund der Erscheinung richtig erkannt zu haben. (Philosoph. Transact. for 1831.)

Wird eine Platte in Vibration versetzt, so entstehen, da die Luft über der Platte abwechselnd verdünnt und verdichtet wird, über der Oberfläche Ströme, welche von den ruhenden Knotenlinien nach den Stellen der stärksten Vibration gehen. Diese Luftströme führen leichte Körperchen, Staub, Samen *Lyconodii*, mit sich und ballen sie dort, wo sie sich treffen, zusammen. Indem nun hier Wirbel entstehen, gelingt es ihnen sogar, die Körper direkt in die Höhe zu wirbeln und sie in einem gewissen Abstand von der Platte schwebend zu erhalten. Dass dies wirklich der Grund sei, hat Faraday durch vielfache Versuche erwiesen. Er steckte Winkel aus Kartenblättern auf, in denen sich der Strom, also auch der Staub fangen musste, und die Wolke wurde wirklich in den Winkel getrieben. Am schlagendsten war aber der Umstand, dass die Wolken ausblieben, wenn die Platte unter einem luftleeren Recipienten, oder doch im luftverdünnten Raume erregt wurde. In einem dichteren Mittel dagegen, als der Luft, z. B. im Wasser, konnten wiederum dieselben wirbelnden Gruppen aus schweren Körpern, wie Sand, Eisenfeilicht, sogar aus Platinkörnern hergestellt werden.

Schliesslich gelang es Faraday, diese Strömung des die Platte umgebenden Mittels objectiv darzustellen, indem er Platten unter Flüssigkeiten in Schwingung versetzte; alsdann bildete an den Stellen der stärksten Erregung, den Vibrationscentris, die Flüssigkeit förmliche Häufchen, die bedeutend über das Niveau des Mittels hervorragten und so eine Strömung desselben nach diesen Puncten evident bewiesen (Pogg. Ann. XXVI).

Bei allen diesen Versuchen werden die Erscheinungen durch die gleichzeitig auftretenden Klangfiguren modificirt, es ist mir aber gelungen selbst die Bewegungen der Luft objectiv darzustellen, ohne dass zu gleicher Zeit die eigentlichen Klangfiguren aufträten. Am Ende dieser Arbeit werde ich mich näher damit beschäftigen, für jetzt wollen wir den Faden unsers Themas wieder aufnehmen.

VII. Weber's Theorie.

So werthvoll vorliegende Arbeiten auch im Einzelnen waren, keine vermochte eine allgemeine Erklärung der Klangfiguren zu geben. Der Ruhm, dies zuerst erreicht zu haben, gebührt zwei Männern, welche sich durch Begründung der Wellenlehre einen grossen Namen in der Wissenschaft erworben haben: den Gebrüdern Weber. In ihrem schätzbaren Werke: „Wellenlehre, Leipzig 1825“ findet sich nämlich eine, wenn auch

nur kurze, Ableitung der Klangfiguren. Wird eine Scheibe bewegt, so vollzieht sie eine wellenförmige Bewegung, deren regelmässige Wiederkehr stehende Schwingungen erzeugt. Der Vorgang, welcher hier in festen Körpern stattfindet, lässt sich durch Flüssigkeiten, die in entsprechende drei-, viereckige, oder runde Gefässe eingeschlossen sind, objectiv darstellen, wenn auf passende Weise Wellen erregt werden; denn da letztere in Flüssigkeiten ungemein langsamer fortschreiten, als in festen Substanzen, so lässt sich die Gestalt der Oberfläche bequem beobachten. Ja man kann sogar die Bildung der stehenden Wellen beobachten. Die Wellen breiten sich bis zum Rande des Gefässes aus, werden von dort zurückgeworfen und durch das regelmässige Zusammentreffen dieser letzten Art Wellen mit den ersteren entstehen jene stehenden Schwingungen. Unmöglich ist es nur, alle Klangfiguren auf diese Art objectiv darzustellen, da in einer Flüssigkeit sich die Wellen nach allen Richtungen hin gleichmässig fortpflanzen, wogegen, wie wir schon oben sahen, die Elasticität in festen Körpern eine bedeutende Aenderung nach verschiedenen Richtungen hin hervorbringt. Ausserdem wird die Fortpflanzung auch durch die Art der Einspannung der Scheibe oder des tönenden Körpers bedeutend modificirt.

Die Untersuchungen der Gebrüder Weber führten sie auf den interessanten Umstand, dass nicht alle Figuren, welche der Sand auf tönenden Scheiben bildet, eigentliche Chladnische Figuren zu sein brauchen, die immer nur bei selbsttönenden Körpern entstehen, sondern dass es auch Klangfiguren der Resonanz, d. h. solche giebt, die auf bloss mittönenden sich zeigen. Als wesentlicher Unterschied beider Arten Klangfiguren stellte sich heraus:

- 1) dass die Zwischenräume bei den Chladni'schen Figuren immer aliquote Theile des Körpers sind, bei denen der Resonanz aber nicht;
- 2) dass die Zahl ersterer mit der Höhe des Tones wächst, während auf die Zahl der Linien letzterer selbige keinen Einfluss ausübt;
- 3) dass erstere immer symmetrisch liegen, die der Resonanz nur in seltenen Fällen.

Savart führt in den Ann. de phys. et de chim. Tome XXV einige Figuren der Resonanz als Chladnische auf. Eine Scheibe LL' ist bei L gegen einen festen Körper gestützt, Fig. 14–17, während sie bei L' eine Saite berührt. Wird diese in Bewegung gesetzt, so tönt die Scheibe mit und aufgestreuter Sand ordnet sich in Linien, die aber Resonanzfiguren sind. LL' ist ein Schnitt durch die Scheibe, FF' der gleichzeitige durch die Ebene, in welcher die Schwingungen der Saite vor sich gehen. Schwingt sie in der Richtung F_1F_1' , so können 2 Figuren entstehen. Dass diese Figuren keine Chladni'schen sind, geht daraus hervor, dass sie nur von der Schwingungsebene der Saite abhängen, keineswegs vom Ton, da dieser bei allen vieren derselbe ist.

VIII. Wheatstone's Arbeit.

Zur selben Zeit, wie die Gebrüder Weber, hatte auch ein englischer Physiker, Wheatstone, die Klangfiguren zum Gegenstande seiner Betrachtungen gemacht und mit demselben Erfolg, wie jene. (Phil. Trans. for 1833).

Wheatstone nahm die inzwischen längst vergessene Theorie von Bernoulli wieder auf, indem er die Knotenlinien als entstanden ansah aus einer Combination von zunächst zwei Schwingungsarten. Er beschränkte sich anfangs auf quadratische Platten und stellte im Wesentlichen folgende Betrachtungen an. Unter der Voraussetzung vollkommener Homogenität der Scheibe denke man sich dieselbe in solche Schwingung versetzt, dass zwei Knotenlinien ab und $a'b'$ entstehen, Fig. 18. Die Theilchen von $AabD$ und $a'BCb'$ werden gleiche Bewegungsrichtung und zwar die entgegengesetzte von $aa'b'b$ haben. Dieselbe Scheibe denke man sich ferner so erregt, dass die beiden Knotenlinien cd und $c'd'$ entstehen, Fig. 19, dann sind die Theilchen von $ABdc$ und $c'd'CD$ in gleichen Schwingungsphasen.

Nehmen wir nun an, die Platte werde so erregt, dass beide Schwingungen gleichzeitig eintreten, so erhalten wir Aufschluss über die Bildung der resultirenden Knotenlinien, wenn wir uns die beiden Zeichnungen auf einander gelegt denken. Zur bessern Veranschaulichung wollen wir die Theile der Scheibe, welche wir uns in dem betrachteten Augenblicke als nach unten bewegt denken, durch Schraffirung bezeichnen. Dabei können zwei Fälle eintreten, je nachdem der mittlere Theil der Scheibe in gleichen oder aber in entgegengesetzten Schwingungsphasen sich befindet.

I. Der mittlere Theil befinde sich in „derselben“ Schwingungsphase.

Dann giebt eine Combination der beiden primären Schwingungsarten das Bild Fig. 20. Legen wir nämlich beide Figuren, Fig. 18 und Fig. 19, auf einander, so ist sofort klar, dass die Durchschnittspuncte der früheren Knotenlinien auch den neuen angehören müssen, d. h. die Puncte \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} sind Puncte der resultirenden Klangfigur. Im hellen mittleren Theil ferner, so wie in den vier ganz dunklen Eckquadraten sind die Theile durch gleiche Bewegung erregt, diese wird daher nur verstärkt, es können daselbst also keine Knotenlinien entstehen. In den vier Rechtecken dagegen werden die Puncte nach verschiedenen Richtungen erregt und es ist klar, dass es eine Linie geben muss, in der die Erregung genau gleich und entgegengesetzt ist, die also in Ruhe bleibt. Wie leicht einzusehen, muss es die Linie $LMNO$ sein. Vorausgesetzt wird hiebei, dass die Stärke der Erregung in beiden Fällen dieselbe war.

II. Der mittlere Theil befinde sich in „entgegengesetzter“ Schwingungsphase.

Wir finden wieder, Fig. 21, die Knotenpuncte \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , die Knotenlinien können nunmehr aber nur in den vier Eckquadraten und dem mittelsten vorkommen, wir erhalten also das System der Diagonalen.

Zugleich haben wir hier die Erklärung und Berechtigung der Strehlke'schen Knotenpuncte gefunden.

Es ist klar, dass, wenn die Knotenlinien in den primären Schwingungen in ungerader Anzahl auftreten, nur eine Schwingungsart möglich ist.

Wheatstone untersuchte nun, welche Resultate Zusammensetzungen von Knotenlinien gäben, die nicht den Seiten der Scheibe parallel seien und fand, dass

- 1) die resultirenden Knotenlinien stets parallel den Seiten der Klangscheibe sind;
- 2) dass sie in gleicher Anzahl vorhanden seien, wie die componirenden Knotenlinien in je einer Lage;
- 3) dass ihre Vertheilung nach der einen oder andern Richtung von den Winkeln abhängt, unter welchen sich die componirenden Knotenlinien treffen.

Da nach letzterem Satze eine unbegrenzte Anzahl von Knotenlinien entstehen müsste, die Erfahrung aber lehrt, dass die Anzahl der Klangfiguren eine endliche ist, so nahm Wheatstone, analog der bei Schwingungen von Stäben beobachteten Erscheinung, an, dass auch bei den Platten an jedem Ende ein Schwingungsmaximum liegen müsse, d. h., Fig. 22, in dem von der ersten Knotenlinie abgeschnittenen Dreieck *abb'* muss a die grösste Amplitude haben, ebenso *c*, *c'* und auch *a'*. Dadurch wird die Anzahl der Winkel, unter welchen sich die ursprünglichen Knotenlinien treffen können, also auch die Anzahl der resultirenden Knotenlinien, eine begrenzte.

Nur darin machte Wheatstone einen Fehler, dass er zur Berechnung der Neigungswinkel der Knotenlinien annimmt, bei einem Stabe sei der Abstand vom freien Ende bis zur ersten Knotenlinie gleich der Hälfte des Abstandes zweier mittlerer Linien, während die Strehlke'schen genauen Formeln ergeben, dass bei 2 Knotenlinien z. B. dieselben um 0,224 L von den Enden entfernt sind, statt, wie Wheatstone annimmt, um 0,25 L. Die durch diesen Fehler verursachten Abweichungen sind jedoch nicht so gross, dass merklich anders gestaltete Figuren in Wirklichkeit entstehen, als die Theorie sie giebt.

Weiter fand Wheatstone, dass viele Klangfiguren sich durch eine vierfache Zusammensetzung primärer Schwingungen ableiten lassen.

Denken wir uns, Fig. 23 und 24, eine Platte einmal mit zwei, das andere Mal mit drei Knotenlinien schwingen, so erhält man durch Zusammensetzung beider Schwingungsarten, Fig. 25 und 26, zwei secundäre Figuren, die zwar, da die eine Art eine ungerade Anzahl von Knotenlinien hat, beide gleich sind, aber doch, bei entgegengesetzter Phase des einen mittleren Theils, verschiedene Lage zur Scheibe haben. Setzt man nun diese Figuren zusammen, Fig. 27, so erhält man eine vierfache Aufeinanderlagerung primärer Knotenlinien, und wendet man dieselben Betrachtungen, wie vorher an, so erhält man die Knotenlinien, welche die Chladni'sche Figur 71, c geben. In unserer Zeichnung sind diejenigen Theile schraffirt, welche Molecüle enthalten, die nach unten bewegt werden.

Wheatstone's umfassende Untersuchungen hierüber führen ihn zu folgenden Resultaten:

- 1) Sind eine ungerade Anzahl von componirenden Knotenlinien in der secundären

Figur vorhanden, so resultirt nur „eine“ Endfigur, sonst zwei, wenn die centralen Theile nämlich in gleicher oder ungleicher Richtung bewegt werden.

- 2) Sind in der ersten Resultante nach je einer Richtung eine gerade Anzahl von componirenden Ruhelinien vorhanden, so schneiden sich im Centrum der vierfach zusammengesetzten Figur zwei Diagonalen, wenn die centralen Theile ungleichnamig sind, sonst geht keine Linie durch den Mittelpunkt.
- 3) Bei ungerader Anzahl nach je einer Richtung der ersten Resultante schneiden sich im Mittelpunkte der zweiten zwei Transversalen unter rechten Winkeln, wenn die centralen Theile gleichnamig sind. Sind sie ungleichnamig, so kommen noch zwei Diagonalen hinzu.
- 4) Ist ad 1) die Summe der Knotenlinien der ersten resultirenden Figur eine ungerade Zahl, so erhält man in der zweiten nur eine resultirende Endfigur mit einer einzelnen Diagonale.

Wheatstone hat auf diese Weise alle von Chladni beschriebenen Figuren quadratischer Scheiben erklärt; einzelne kleine Abweichungen lassen sich auf Rechnung der schwachen Bewegung in der Nähe der Knotenlinien setzen. Ausserdem ist z. B. die Ungleichheit der Figur der Theorie, (wie Fig. 20 und 21) mit der entsprechenden Chladnischen (Fig. 6) auch aus den Savart'schen Untersuchungen erklärt. Denn die theoretische Figur setzt vollkommen gleiche Stärke der Bewegung bei beiden Componenten voraus, während die nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Elasticität dies in der Wirklichkeit verhindert. Daher resultiren die vielfachen Krümmungen von Linien, welche nach der Theorie gerade sein sollten; daher z. B. die Verwandlung zweier Diagonalen oder Transversalen in zwei hyperbolische Curven. Wir sehen hieraus aber auch, dass Strehlke, der bei Platten nicht theoretisch verfuhr, experimentell durchaus Recht hatte. Bei idealen vollkommen homogenen Platten müssten aber doch, wie die Theorie zeigt, vielfache gerade und sich schneidende Linien vorkommen.

Sind die Platten nicht genau quadratisch, oder verrückt man den Unterstützungspunct ein wenig, so ist auch noch eine Aufeinanderlagerung möglich, aber nur unvollkommen. Es entstehen dann verzerrte Figuren, die in der Mitte liegen zwischen den resultirenden und componirenden Figuren, von Wheatstone als „unvollkommene Resultanten“ bezeichnet.

Er stellte auch ähnliche Versuche mit Holzplatten an, wie Savart, und fand wie dieser, dass, wenn z. B. die Axe der grössten oder kleinsten Elasticität in der Scheibe liegt, die Platte verschiedene Töne giebt, je nachdem sie nach der einen oder andern Richtung hin in Bewegung versetzt wird. Da also bei einer Erschütterung nie beide Töne gleichzeitig auftreten können, so resultirt nie eine Klangfigur mit Diagonalen, falls die Platte quadratisch ist. Ist sie dies aber nicht, sondern ändert man sie in ein Rechteck um, dessen Seiten sich umgekehrt verhalten wie die Grössen ihrer Elasticitätsachsen, so sind Klangfiguren mit Diagonalen, oder diesen parallelen Linien immer möglich. Um z. B.

zwei Diagonalen zu erhalten, müssen sich die Seiten einer Scheibe von Tannenholz verhalten wie 28 : 59. H. Schubring in Halle hat die Theorie Wheatstone's (in der „Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften,“ 1867 III und IV) auf elementarem Wege nach den Ergebnissen der Wellenlehre mathematisch begründet, doch wollen wir hierauf nicht weiter eingehen.

IX. Experimentelle Begründung von Wheatstone's Theorie.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so scheint folgendes Gesetz zu bestehen. Eine quadratische Glas- oder Metallscheibe kann zwei oder vier gleich hohe Töne erklingen lassen, denen verschiedene Schwingungsarten, also verschiedene Klangfiguren zu Grunde liegen. Einzeln kann keine Schwingungsart auftreten, also auch keiner dieser Töne erklingen, sondern es tönen gleichzeitig noch ein oder drei gleich hohe Töne mit. Die Klangfiguren sind danach das Resultat der Coexistenz zweier oder vier gleich hoher Töne. Für diese Ansicht spricht erstens der von Wheatstone gemachte Versuch, dass auf einer Holzscheibe, welche die Axen der grössten und kleinsten Elasticität enthielt, erst dann Klangfiguren mit Diagonalen hervorgebracht werden konnten, wenn das Quadrat zu einem Rechteck gemacht war, dessen Seiten sich umgekehrt wie die Grössen der Elasticitätsaxen verhielten, so dass die Platte nach diesen beiden Richtungen „gleiche“ Töne gab. Zweitens spricht dafür das ganz ähnliche für Stäbe geltende Gesetz des Terquem: Wenn ein Stab nahezu denselben Ton durch longitudinale und transversale Erregung zu geben vermag, so treten der Längen- und Querschwingungston gleichzeitig auf, man mag den Stab longitudinal oder transversal in Vibration versetzen. Drittens ist das Gesetz auch experimentell vom Mechaniker König zu Paris nachgewiesen worden. (Pogg. Ann. CXXII, und Pisko: Apparate der Akustik).

König verfertigte mehrere Platten, die denselben Ton gaben, wenn Knotenlinien parallel der einen Seite, wie wenn deren parallel der andern Seite auftraten. Wurde die Platte nun so erregt, dass beide Töne gleichzeitig erklangen, so traten Figuren auf, die genau denjenigen entsprachen, welche durch Aufeinanderlegung der primären Figuren nach der Theorie von Wheatstone entstanden. Ich habe drei dieser Figuren angeführt: Figur 28 und 29 sind die beiden primären Figuren, Figur 30 die nach der Wheatstone'schen Methode entstehende, und Figur 31 diejenige, welche das Experiment gab.

Zugleich zeigte König, dass die Klangfiguren sehr undeutlich wurden, wenn die beiden Töne, welche die Platte nach verschiedener Richtung gab, genau im Einklang standen; dass dagegen ein schöner Klang und eine deutliche Klangfigur resultiren, wenn beide Töne nahezu um einen ganzen Ton unterschieden waren. Daraus folgt, dass Wheatstone's Meinung, die Knotenlinien wichen sich deshalb aus und schnitten sich nicht, weil die beiden Töne nie vollkommen gleich seien, nicht richtig ist. Es scheint vielmehr hervorzugehen, dass die von Strehlke beobachteten Krümmungen der Knotenlinien zum Theil in der ungleichen Fortpflanzung der Bewegung, durch die verschiedene Elasticität

in den einzelnen Richtungen bewirkt, ihren Grund hat. Auf einen andern wahrscheinlichen Grund werden wir gegen den Schluss kommen.

X. Kundt's Versuche.

Noch sei mir vergönnt, hier eines andern Experimentators zu erwähnen, der sehr viel Mühe auf Klangfiguren mancherlei Art verwandt hat, Kundt's. Dieser untersuchte die Schwingungen einer Scheibe, indem er das Princip von Lissajous anwandte. Die tönende Platte, welche in der Mitte befestigt ist und gut spiegelt, steht einem Schirm gegenüber, der eine grosse Anzahl regelmässig vertheilter Löcher enthält. Durch diesen Schirm fällt Licht senkrecht auf die Scheibe, die in ruhendem Zustande so mit einer Menge von Lichtpünctchen bedeckt erscheint. (Pogg. Ann. CXXVIII). Versetzt man sie aber in Schwingung, so erscheinen statt der Punkte Linien, welche die Richtung der Bewegung der einzelnen Theilchen angeben. Die Linien erscheinen nicht gerade sondern krumm, weil derselbe Lichtpunct nach einander von verschiedenen Flächenstücken reflectirt wird und der Lichtstrahl daher in jedem Moment eine andere Richtung erhält. Vergleicht man diese Lichtfiguren, Fig. 32, mit den entsprechenden Chladni'schen, so scheint es auf den ersten Anblick, als hätten sie wenig Gemeinschaftliches, da die Knotenlinien, welche der Sand anzeigt, sich bei ersteren dem Auge entziehen; man ersieht aus ihnen aber, dass auch an den Knotenlinien Bewegung der Theilchen vorhanden ist, wenn auch nur ein Minimum. Dieselbe Erscheinung hat auch Professor Melde (Pogg. Ann. CIX) beobachtet, als er eine Klangscheibe, bevor sie mit Sand bestreut wurde, mit einem dünnen Ueberzug von Kalkbrei versah: die Sandkörner verzeichneten in demselben ihren Weg und dieser stimmte mit den beobachteten Lichtlinien überein.

Kundt hat sich ferner ein grosses Verdienst durch seine Untersuchungen über die Schwingungen der Luft in tönenden Röhren, die er durch Kieselsäurestaub sichtbar machte, erworben. Doch würde es zu weit führen, auch hierauf, so wie auf ähnliche Untersuchungen einzugehen, bei denen Flammen zur Bildung von Klangfiguren verwandt wurden. Seines neuesten Versuchs werden wir gegen das Ende gedenken.

XI. Kirchhoff's Abhandlung.

Schliesslich wollen wir noch die theoretisch-mathematischen Untersuchungen etwas näher beleuchten und besonders auf die Arbeit Kirchhoff's mehr eingehen.

Letzterer hatte die Arbeiten der Sophie Germain, Poisson's, Cauchy's und Wertheim's einer Prüfung unterworfen. Mlle. Germain hatte 1812, 1813 und 1815 Abhandlungen der Akademie eingereicht und den Hauptinhalt in zwei Schriften veröffentlicht: *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques* 1821; *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et l'équation générale de ces surfaces* 1826. Die von ihr gefundene Differentialgleichung wurde später noch von Lagrange umgearbeitet, aber trotzdem stimmten die Resultate, welche sie ergab, nicht mit der Wirklichkeit überein.

Näher kam schon Poisson in seiner Abhandlung: *Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (Mém. de l'Ac. d. sc. à P. 1829); aber die Grenzbedingungen, welche er für seine partielle Differentialgleichung findet, sind nicht genau. Es sind nämlich deren drei, die sich im Allgemeinen aber, wie Kirchhoff nachweist, nicht zugleich erfüllen lassen, wonach also allgemein die elastische Scheibe keine Gleichgewichtslage haben könnte. Trotzdem stimmten ihre Resultate mit der Erfahrung in dem Fall, welchen Poisson dann betrachtete, überein, aber nur deshalb, weil er sie auf kreisförmige Scheiben anwandte, bei denen eine der Bedingungen stets erfüllt ist.

Die Poisson'sche Gleichung ist mehrfach integrirt worden, so von Werthheim (Ann. de phys. et de ch. XXIII), Cauchy und Radau (Monit. Scient. 1864), aber es ist keinem gelungen, der Wirklichkeit so nahe zu kommen als Kirchhoff (Crelle, XL).

Kirchhoff geht von folgender Betrachtung aus: Der Zustand, in welchen ein unendlich kleiner Theil der elastischen Scheibe durch Formveränderung übergeht, lässt sich so hervorgebracht denken, dass der Theil zuerst ohne Veränderung der relativen Lage seiner Moleküle eine andere Lage im Raum erhalten hat und dann in drei auf einander senkrechten Richtungen dilatirt worden ist. Eine unendlich kleine Kugel wird alsdann ein unendlich kleines Ellipsoid, dessen Axen die Richtungen der Hauptdilatationen sind. Die Elasticität bewirkt, dass der betrachtete Theil sich in den Richtungen, in welchen er ausgedehnt ist, zusammenzuziehen strebt, und umgekehrt. Diese Kräfte seien, wenn dv das Theilchen ist, nach den drei Axen:

$$L_1 dv, L_2 dv, L_3 dv.$$

Bezeichnet man die drei Dilatationen durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so wird das Gesamtmoment der drei Kräfte sein

$$- dv (L_1 \delta \lambda_1 + L_2 \delta \lambda_2 + L_3 \delta \lambda_3).$$

Hierin sind die L symmetrische Functionen von den λ , die mit ihnen zugleich verschwinden. Daher kann man die L am einfachsten als lineare Functionen der λ darstellen, die zwei von der Natur des Körpers abhängige Constanten enthalten, von der Form

$$L_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3$$

$$L_2 = b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3$$

$$L_3 = b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3.$$

Führt man für a und b zwei andere Constanten ein, durch die Gleichungen

$$a = 2K(1 + \Theta) \text{ und } b = 2K\Theta,$$

so können wir den obigen Ausdruck umwandeln in

$$- dv \cdot \delta K (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Theta [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]^2).$$

Die Summen dieses Moments und des Moments der äussern Kräfte, das wir durch δP darstellen wollen, muss für den Gleichgewichtszustand verschwinden, also

$$1) \quad 0 = \delta P - \delta K \int dv (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Theta [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3]^2).$$

Es möge hier bemerkt werden, dass die beiden Constanten K und Θ so gewählt sind, dass der Elasticitätsmodulus

$$q = 2K \frac{1 + 3\sigma}{1 + 2\sigma}.$$

Dies gilt für jeden elastischen Körper.

Gehen wir nun speciell zur Betrachtung einer Platte über, so wollen wir voraussetzen, dass ihre Grundflächen im natürlichen Zustande durch zwei parallele, unendlich nahe Ebenen gebildet werden. Die Platte habe eine Formveränderung erlitten durch Kräfte, die auf ihr Inneres wirken, und durch Druckkräfte, welche auf ihren Rand ausgeübt werden, während die Grundflächen frei sind. Die Dilatationen seien schliesslich nur unendlich klein, während die Krümmung der Platte allerdings endlich ist. Um unsere Gleichung 1) nun anwenden zu können, müssen wir, indem wir die Platte als zwei Systeme von Stäben ansehen, zwei Bedingungen als erfüllt voraussetzen, welche das Experiment bei einem Stabe nachweist und die schon J. Bernoulli macht:

1. Jede gerade Linie der Platte, welche senkrecht zu den Grundflächen war, bleibt gerade und senkrecht zu denselben.
2. Alle Elemente der Mittelfläche (mitten zwischen beiden Grundflächen) erleiden bei der Formveränderung keine Dilatation.

Mit Hülfe dieser Annahmen lassen sich die Werthe der Hauptdilatationen λ_1 , λ_2 und λ_3 durch die Krümmungsradien der Mittelfläche ausdrücken. Betrachten wir nämlich in dem Körper, Fig. 33, eine unendlich kleine Kugel mit dem Durchmesser a und einer zu diesem senkrechten Diametralebene A . Bei der Formveränderung geht die Kugel in ein Ellipsoid über, a und A werden zum Durchmesser a_1 und der conjugirten Diametralebene A_1 . In dem speciellen Falle, dass der Durchmesser a senkrecht zu den Grundflächen ist, bleibt er es auch nach der Aenderung, wird also eine Hauptaxe des Ellipsoids. Danach ist für irgend einen Punct im Innern der Platte die Dilatation in der Richtung der durch ihn gezogenen Normale der Mittelfläche eine Hauptdilatation.

Ist nun z die ursprüngliche Entfernung des betreffenden Punctes von der Mittelfläche, z_1 die nach der Formveränderung und ist $z_1 - z = q$, so wird $\frac{dq}{dz}$ der Werth einer Hauptdilatation sein. Ferner bezeichne z_1 zugleich die Normale der Mittelfläche nach der Formveränderung. Nach Annahme 2) sieht man, dass alsdann in den auf z_1 senkrechten Richtungen die Dilatation $\frac{z_1}{\rho}$ ist, wo ρ der Krümmungsradius der Curve ist, in welcher die durch z_1 und durch die bezüglichliche Richtung gelegte Ebene die Mittelfläche schneidet, und zwar gilt dies für den Fusspunct von z_1 . Sind ρ_1 und ρ_2 die Krümmungsradien der Hauptschnitte der Mittelfläche, so sind $\frac{z_1}{\rho_1}$ und $\frac{z_1}{\rho_2}$ die beiden andern Hauptdilatationen.

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung 1), indem man noch für

$$dv = df \cdot dz$$

substituirt, wo df ein Element der Mittelfläche, so erhält man

$$2) \quad 0 = \delta P - K \delta f f d f \cdot dz \left\{ \left(\frac{dq}{dz} \right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho_1} \right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho_2} \right)^2 + \Theta \left(\frac{dq}{dz} + \frac{z}{\varrho_1} + \frac{z}{\varrho_2} \right)^2 \right\}.$$

Kirchhoff weist nun nach, dass sich $\frac{dq}{dz}$ als Function der beiden andern Dilatationen darstellen lässt, nämlich durch die Gleichung

$$\frac{dq}{dz} = - \frac{\Theta}{1 + \Theta} \left(\frac{z}{\varrho_1} + \frac{z}{\varrho_2} \right).$$

Setzt man dies in 2) ein, so erhält man

$$0 = \delta P - K \delta f f d f dz z^2 \left\{ \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{\Theta}{1 + \Theta} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 \right\}.$$

Führt man die Integration nach z durch, so ist

$$3) \quad 0 = \delta P - \frac{2}{3} \varepsilon^3 K \delta f d f \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{\Theta}{1 + \Theta} \left[\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right]^2 \right)$$

als allgemeine Gleichgewichtsbedingung für eine Platte von der Dicke 2ε , wo z also von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ zu nehmen ist.

Nennt man (X), (Y) die beiden Druckkräfte in der Richtung der x - und y -Axe; w die Verrückung, welche der betrachtete Punct in der Richtung der z -Axe, die zu den Grundflächen senkrecht steht, erlitten hat; φ aber denjenigen Winkel, welchen die nach dem Innern der begrenzten Fläche gerichtete Normale mit der positiven x -Axe macht und den diese Axe beschreibt, wenn sie in derjenigen Richtung gedreht wird (bis sie jener Normale parallel ist), in der sie gedreht werden muss, damit sie nach einer Drehung von 90° die Lage der positiven y -Axe einnimmt: so erhält man durch passende Umformung der Gleichung 3) die partielle Differentialgleichung

$$4) \quad \cos \varphi \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (X) z dz + \sin \varphi \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Y) z dz = \frac{4}{3} \varepsilon^3 K \left\{ \frac{\Theta}{1 + \Theta} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{d^2 w}{dx^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2 w}{dx dy} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2 w}{dy^2} \sin^2 \varphi \right\},$$

die sich von der Poisson'schen nur dadurch unterscheidet, dass dieser für Θ den speciellen Werth $\frac{1}{2}$ gesetzt hat.

Es ist nun Kirchhoff gelungen, die Gleichung 4) für den Fall einer freien kreisförmigen Scheibe zu integrieren. Er gelangt, indem ich die ziemlich schwierige Rechnung übergehe, schliesslich zu folgendem Resultat. Führt man Polarcoordinaten ein, so dass der Mittelpunkt der Scheibe Anfangspunct der Coordinaten, ist $\varphi = \psi + 180^\circ$, l der Radius der Scheibe, $x = r\lambda$, n eine ganze Zahl, die sich bei der partiellen Integration ergiebt, $\lambda_{n\mu}$ ein bestimmter Werth von λ , und $U_{n\mu}$ eine Function von der Form

$$U_{n\mu} = cr\mu^n + c_1 r\mu^{n+2} + c_2 r\mu^{n+4} + \dots,$$

so lässt sich die Dilatation in der Richtung der z -Axe, gegen welche die Dilatationen in der xy -Ebene unendlich klein sein sollen, darstellen in der Form

$$5) \quad w = U_{\mu n} \left(\cos [4 \lambda_{\mu} n^2 a t] [A \cos n\psi + B \sin n\psi] + \right. \\ \left. + \sin [4 \lambda_{\mu} n^2 a t] [C \cos n\psi + D \sin n\psi] \right).$$

Hierbei sind A, B, C und D Constanten, welche aus den Bedingungen, denen die Scheibe unterworfen ist, um einen gewissen Ton zu geben, hergeleitet werden, und a eine Constante, die der Gleichung genügt, dass die Schwingungszahl, d. h. die Anzahl der Schwingungen, die in der Einheit der Zeit vollführt werden,

$$= \frac{4 \lambda_{\mu} n^2 a}{\pi}.$$

Die Knotenlinien sind nun diejenigen Linien, für welche, bei allen Werthen von t, $w = 0$ ist. Sie werden daher die Punkte enthalten, für welche entweder die Gleichung

$$6) \quad U_{\mu n} = 0$$

erfüllt wird, oder die beiden Gleichungen bestehen

$$7) \quad \begin{cases} A \cos n\psi + B \sin n\psi = 0 \\ C \cos n\psi + D \sin n\psi = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung 6) liefert gewisse Werthe von r als Wurzeln. So viele reelle Wurzeln sie hat, die kleiner als 1 sind, so viele, mit der Peripherie der Scheibe concentrische Kreise werden in der Klangfigur vorkommen; die Anzahl und Grösse derselben wird allein vom Ton abhängen und unabhängig sein von den Werthen der Coefficienten A, B, C und D. Die Gleichung 7) wird für keinen Punkt erfüllt, für den nicht

$$A : B = C : D.$$

Dann sind jene Kreise die einzigen Knotenlinien. Besteht diese Proportion aber, so geben die Gleichungen 7) n Werthe für ψ , von denen je zwei folgende um $\frac{\pi}{n}$ unterschieden sind; dann kommen also zu jenen Kreisen noch n Durchmesser hinzu, welche die Peripherie der Scheibe in n gleiche Theile theilen.

Diese Resultate werden von der Erfahrung unterstützt, wie auch das von Chladni gefundene Gesetz sich leicht aus dieser Theorie ableiten lässt, dass die Schwingungszahlen der Töne, welche in ihren Klangfiguren dieselbe Anzahl von Durchmessern haben, sich nahe wie die Quadrate auf einanderfolgender gerader oder ungerader Zahlen verhalten, je nachdem die Zahl der Durchmesser gerade oder ungerade ist. Kirchhoff erhielt an 2 Platten durch Rechnung fast genau dieselben Resultate, welche Strehlke durch höchst sorgfältige Messung an ihnen fand.

XII. Eigene Experimente. Einfluss der Nebentöne.

Alle im Vorhergehenden erwähnten Erscheinungen habe ich selber experimentell untersucht, sowohl an quadratischen, wie an dreieckigen und runden Tafeln, an Glas oder Metallscheiben. Hierbei nahm ich wahr, dass bei der gewöhnlichen Befestigungsweise der Platte durch eine Schraube, die Figuren doch etwas von der Breite der Unterstützungs-

fläche modificirt wurden, besonders wenn man einen andern Punct als die Mitte unterstützte. Dem abzuhelfen, liess ich mir folgenden Apparat construiren.

Zwei Messingstücke, von der Form in Figur 34, erhielten bei a Spalten, in denen sich ein kegelförmig zulaufender Stift, Fig. 35, bewegte, der über der Scheibe einen Nonius trug und unterhalb derselben durch eine Schraube festgezogen werden konnte. Am Rande jeder Spalte war eine genaue Millimeteereintheilung angebracht, so dass der Stift mit Hilfe des Nonius bis auf 0,1mm genau eingestellt werden konnte. Ausserdem trug die eine Scheibe bei b zwei Stäbchen, denen in der andern ein paar Löcher entsprachen, so dass die beiden Platten unverrückbar auf einander gelegt werden konnten. Wollte ich eine Figur untersuchen, so berechnete ich drei Knotenpunkte nach Strehlke's Formeln, stellte die drei Stifte jeder Halteplatte demgemäss ein, so dass, bei der Aufeinanderlagerung, die Stifte beider Platten sich berührten, und legte die Klangscheibe an den berechneten Knotenpunkten dazwischen; alsdann wurde dieselbe nur in drei Puncten und nicht in einer Fläche unterstützt. Das Ganze brauchte nicht einmal zusammengeklemmt zu werden, sondern es liess sich auch bequem in der Hand halten. Auf diese Weise erhält man leicht alle Figuren, welche dieselben drei Knotenpunkte haben.

In Uebereinstimmung mit Schubring habe ich gefunden, dass Ausweichungen von Knotenlinien, sowie das Erscheinen von Knotenflächen statt der Knotenpunkte zum Theil auf dem Mittönen der Nebentöne, zum grössten Theil aber auf der Elasticität der Scheibe beruhen. In wie weit ersteres der Fall ist, würde man meiner Ansicht nach nur dann vollständig untersuchen können, wenn man mit Resonatoren die mitklingenden Töne untersuchte und deren Figuren zusammenstellte.

Eines noch habe ich als Wirkung der Nebenschwingungen beobachtet, theilweise Verdickung der Knotenlinien. Die Amplituden der Schwingungen nur mitklingender Töne sind zu denen des Haupttones äusserst gering; nur wenn ein Schwingungscentrum ersterer mit einer Ruhelinie des letzteren zusammentrifft, kann es geschehen, dass die Bewegung ersterer und die des letzteren sich in der Nähe der Knotenlinien aufheben und so eine kleine Fläche anstatt einer Linie zur Ruhe bringen.

Die Fig. 36 liess sich z. B. zwischen den Halteplatten als Linie hervorbringen, zwischen der Schraube jedoch zeigte sie stets die Form Fig. 37. Es klang aber auch alsdann deutlich hörbar bei dem Tone d, welchem diese Figur entsprach, die Terz f mit, welcher die Figur 38 zugehörte. Eine Aufeinanderlagerung beider, Fig. 39, beweist, dass die Abweichungen der Figur 37 wohl von Figur 38 herrühren können. Bei passender Wahl des Erschütterungspunctes konnte man beide Töne gleich stark hörbar machen, alsdann zeigte die Platte nur diejenigen Linien und Puncte, welche beide Figuren gemein hatten.

XIII. Beschreibung neuer Klangfiguren.

Ich komme jetzt zu den Versuchen, welche ich bei der Abhandlung über Savart erwähnte.

Wir sahen dort, dass die Bewegung der Platte in der Luft über derselben Ströme erzeugte, welche leichte Körperchen zu den Schwingungscentren hinführten. Diese wirbelnden Staubwolken geben aber kein klares Bild der Luftbewegung, denn sie resultiren aus der Bewegung der Platte, der der nächsten Luftschicht und der von weiterher hinzuströmenden Luft. Um die erste und letzte Störung zu beseitigen verfuhr ich folgendermassen.

Unmittelbar auf den Balken AB der s-förmigen Halteschraube, Fig. 40, wurde eine starke Platte a gelegt, auf deren Mitte ein Korkstückchen b, etwa 1,5mm, dick und darauf die Klangplatte c, so dass sie an einer Seite etwas über die untere hervorragte, damit sie allein erregt werden konnte. Durch die Schraube C wurden beide Platten bis auf 1mm Abstand genähert. Die untere Platte, welche fest lag und nicht in Schwingung gerathen konnte, war mit feinem, staubfreiem, geschlemmtem, weissem Sande, die obere mit Streusand bedeckt. Als nun die letztere so erregt wurde, dass sie die Chladni'sche Figur 41 erzeugte, gab die untere Platte die Ansicht Figur 42. Der Sand hatte sich zu Kreisen zusammengeballt, die etwa das Bild einer Wasseroberfläche gaben, in die, Fig. 43, an den mit Punkten bezeichneten Stellen, Steine geworfen waren, und welche in dem Moment erstarrte, als sich die Wellenkreise berührten. Da, wo die Bogen verschiedener Wellensysteme an einander grenzen, sind die Linien dicker, so dass die Platte die Chladni'sche Figur liefert, aber nicht aus einfachen Linien bestehend, sondern gleichsam als Schattirung. Durch die Bewegung der obern Platte wird also die unmittelbar darunter (und darüber) liegende Luftschicht in ganz entsprechende stehende Schwingungen versetzt, deren einzelne Wellenlagen sich durch die Sandlinien markiren. An den Schwingungscentren ist die Bewegung zu heftig, als dass sich der Sand zu Linien ordnen könnte. Es sind diese Figuren also anzusehen als Chladni'sche Figuren, hervorgebracht durch Schwingungen einer dünnen Luftschicht. Nimmt man zur obern Platte eine Glasplatte, so kann man unmittelbar die durch die Luftwellen erzeugte Figur sehen, doch habe ich gefunden, dass die bei einer Glasplatte sehr leicht miltönenden, schrillen Obertöne die Schönheit der Figur sehr beeinträchtigen. Leicht erschien bei meiner Platte die Figur 36, welche die schönen Linien in Figur 44 gab. Damit die Rippungen hervortreten sind nur 1 oder 2 Striche mit dem Bogen erforderlich. Dabei müssen die Platten aber möglichst plan sein, horizontal gestellt, und leicht ansprechen.

Schwierig ist es hiebei, beide Platten so einzuspannen, dass sie überall den gleichen Abstand haben; doch erreicht man dies vollends, wenn sie nur erst einigermaßen parallel sind, am Besten durch entsprechende kleine Korkstückchen, welche man an den Stellen des Randes, an welchen Knotenlinien enden, zwischenklemmt, oder gar an die untere Platte anklebt. Auch kann man an den Knotenpunkten, welche dem Rande zunächst liegen, Korkstückchen zwischenlegen, und die Platten (besonders wenn die untere etwas stark ist) an diesen Stellen noch extra zusammenklemmen. Ist die untere Platte alsdann nicht zu stark bestreut, der Ton der oberen leicht und klar hervorgebracht,

so bieten die Linien ersterer ein sehr schönes Bild. Am Rande treten gewöhnlich Störungen durch die äussere Luft ein, man beseitigt sie einigermaßen dadurch, dass man die untere Platte mit einem, die obere berührenden, Rande von feinem Papier umgiebt (die Stelle des Anstreichens natürlich freigelassen), was die Schwingungen der Klangplatte nicht beeinträchtigt. Man braucht das Korkscheibchen nicht in die Mitte zu legen, sondern kann es beliebig anbringen, wie es die Befestigung der Klangscheibe gerade erfordert, nur muss man Sorge tragen, dass die Scheiben überall den richtigen Abstand haben.

Am deutlichsten werden die untern Figuren bei solchen Chladni'schen, welche die Platte in nicht zu kleine Theile zerlegen. Ist Letzteres der Fall, so sind die Scheiben noch mehr zu nähern, um die Wellenlinien hervorzubringen. Hat man beide Platten zu nahe gestellt, so giebt sich dies durch Klirren kund.

Entfernt man die Scheiben von einander, so ändert sich das Aussehen der untern Figur. Einmal treten weniger Linien auf, dann aber wirkt auch der Umstand ein, dass nicht alle Theile der Platte gleich stark schwingen. Bei der Figur 46 z. B. haben die Theile l und m viel grössere Amplituden als n und o, wenn man bei p streicht. Während also bei 1mm Entfernung der Chladni'schen Figur 36 die Figur 44 entspricht, erhält man bei 2mm Abstand, die Figur 45, wenn oberhalb q gestrichen ist.

Ausser mit feinem Sand habe ich die Linien auch mit Pulver von kohlen-saurem Kalk und Samen Lycopodii dargestellt, sie werden aber bei weitem nicht so klar, am wenigsten bei Samen Lycopodii. Der feine Sand wurde mittelst eines Gazebeutels aufgetragen.

XIV. Gesetzmässigkeit derselben.

Je höher der Ton ist, desto kleiner werden die Abstände der Wellenlinien, und ich will hier noch eine Beobachtung anführen, welche das Experiment mit meinen Platten ergeben hat und vielleicht durch die Versuche anderer unterstützt werden dürfte.

Die vier Chladnischen Figuren, Fig. 47, 41, 36 und 48 entsprachen ziemlich genau den Tönen, welche Schubring in der „Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften“ (1867, Jan. Febr. pag. 136, 137) anführt und die schon Chladni giebt:

Fig. 47 Fig. 41 Fig. 36 Fig. 48

c_2 gis_2 d_3 h_3

mit den Schwingungszahlen resp. 32 49 72 119.

Den Abstand der Rippen fand ich aus mehreren Figuren, welche die Linien recht klar gaben, und an den Stellen gemessen wurden, wo zwei Systeme an einander grenzten, also auf der Verbindungslinie zweier Mittelpuncte solcher, (Fig. 49), in runden Zahlen resp. gleich

2mm 1,6mm 1,3mm 1,08mm.

Einzelne Wellen liegen etwas weiter aus einander, dann sind die nächsten aber enger, so dass, wenn man nie unter 8 Wellenlinien misst und nur Stellen nimmt, wo die Linien ganz klar zu Tage treten, immer dieselbe Durchschnittszahl herauskommt.

Diese Zahlen verhalten sich ganz nahe umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Schwingungszahlen. Denn diese Quadratwurzeln sind ebenfalls in runden Zahlen

5,7 7 8,5 10,9.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der eben angeführten Thatsache, wenn man je vier zusammengehörige Zahlen zu einer Proportion zusammenstellt. Das Product je zweier entsprechender Zahlen ist hierbei sogar in allen Fällen nahezu gleich, denn wir erhalten für

	2 5,7	1,6 · 7	1,3 · 8,5	1,08 · 10,9
resp.	11,4	11,2	11,05	11,772

Die kleinen Abweichungen lassen sich leicht auf Rechnung der Messung bringen. Danach scheint das Gesetz zu bestehen:

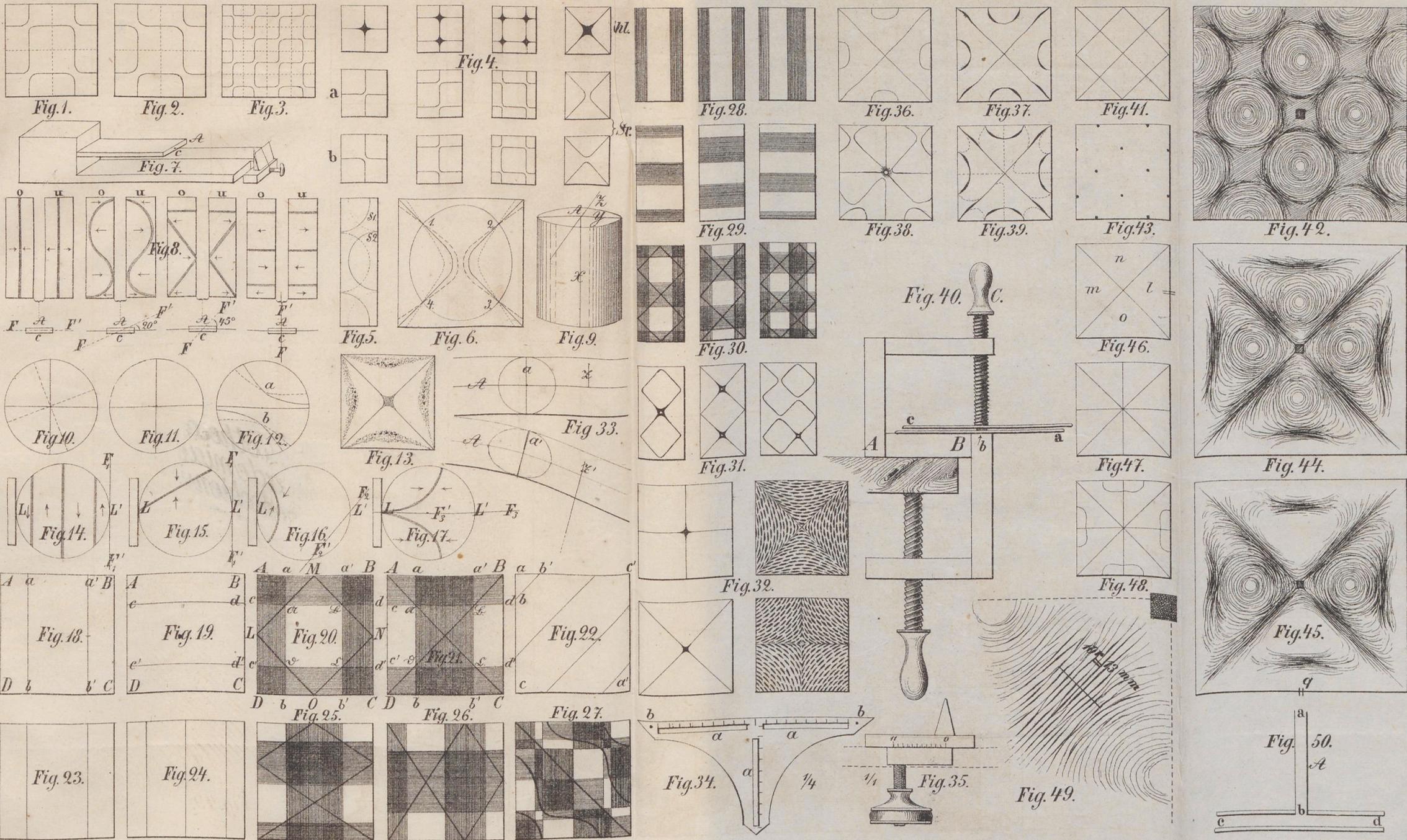
Die Abstände zweier Rippen verschiedener Töne verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der zu jenen gehörigen Schwingungszahlen.

Es bilden diese Figuren ein Analogon zu den von Herrn Professor Kundt in Poggendorff's Annalen Band 137 Stück 4 pag. 456 u. ff. veröffentlichten. Kundt versetzte, Fig. 50, die zwischen zwei Platten eingeschlossene Luftscheibe durch eine Glasröhre in Schwingung: die geriebene Röhre A setzt die Luftsäule ab, diese dann die Scheibe cd in Bewegung. Wenn Kundt aber sagt, dass ein sehr grosser Unterschied zwischen diesen Figuren und den Chladni'schen stattfindet, so geht aus der obigen Erzeugungsweise ein ebenso grosser Zusammenhang beider hervor. Ja es entsteht dieselbe Chladni'sche Figur, nur sind die Zwischenräume zwischen den Knotenlinien nicht leer, sondern mit Rippen angefüllt. Uebrigens ist der Grund der scheinbaren Abweichung der Kundt'schen Figuren, wie leicht einzusehen, darin zu suchen, dass die Luftscheibe von der Mitte her erregt wird und würde eine Chladnische Scheibe unter gleichen Bedingungen jedenfalls ähnliche, entsprechende Figuren geben.

Noch will ich bemerken, dass wenn man „über“ der schwingenden Platte eine zweite anbringt und den leichten Sand auf jene streut, wieder auf den Vibrations-Centren die Anhäufungen Savart's entstehen.

Literatur.

- Chladni: Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig 1787.
- Young: A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts.
- Weber: Wellenlehre. Leipzig 1825.
- Pisko: Neuere Apparate der Akustik.
- Poggendorff's Annalen: Band IV, V, XVI, XVIII, XXVI, XXVII, CIX, CXXII, CXXVIII.
- Dove's Repertorium: Band III.
- Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften 1867.
- Ann. de phys. et de chimie: Tome XXIII, XXV.
- Philos. Transact. for 1831, 1833.
- J. Bernoulli: Nov. Act. Acad. Petrop. 1787.
- Mlle. Germain: Recherches sur la théorie des surfaces élastiques etc. 1821. Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question etc. 1826.
- Poisson: Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. (Mém. de l'Ac. d. sc. à Paris, 1829).
- Moniteur Scient. 1864.
- Crelle's Journal. Band XL.



Literatur.

- Chladni: Entdeckungen über die Theorie des Klanges.
Young: A course of lectures on natural philosophy and experimental mechanics and spherical and fluid acoustics.
Weber: Wellenlehre. Leipzig 1825.
Pisko: Neuere Apparate der Akustik.
Poggendorff's Annalen: Band IV, V, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, CIX, CXXII, CXXXVIII.
Dove's Repertorium: Band III.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.
Ann. de phys. et de chimie: Tome 10.
Philos. Transact. for 1831, 1833.
J. Bernoulli: Nov. Act.
Mlle. Germain: Recherches sur les vibrations des surfaces élastiques etc. 1821. Remarques sur la vibration des surfaces élastiques et l'étendue de la question etc. 1826.
Poisson: Sur le mouvement des corps élastiques. (Mém. de l'Ac. des Sciences).
Moniteur Scient.
Crelle's Journal

