Rostocker Dokumentenserver
Dieses Werk wurde Ihnen durch die Universitätsbibliothek Rostock zum Download bereitgestellt.
Für Fragen und Hinweise wenden Sie sich bitte an: digibib.ub@uni-rostock.de

Wenceslaus Johann Gustav Karsten Dietrich Ludwig Gustav Karsten

Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der Mathematischen Wissenschaften

Der I. Band

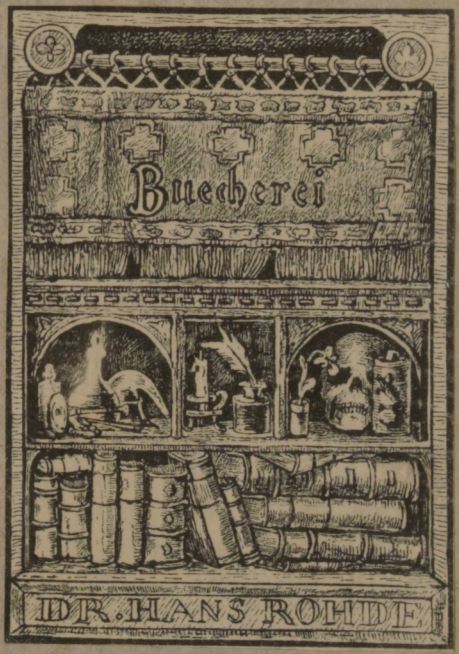
Die dritte Auflage, Greifswald: verlegt von Anton Ferdinand Röse, 1790

https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720

Band (Druck) Freier Zugang PUBLIC DOMAIN

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0001
DFG

4 10 Taf.



La-3077a (1)

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0002
DFG

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0003
DFG

Auszug
aus den
Anfangsgründen
und dem Lehrbegriffe
der
Mathematischen
Wissenschaften.

Aufgesetzt von
Wencesl. Johann Gustav Karsten,
der Phil. Doctor, Hofrath u. Professor der Mathematik u. Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churf. Academie der Wissensch. in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissensch. in Harlem, und der Königl. Danischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der öconom. Gesellsch. in Leipzig u. der naturforschenden Gesellschaft in Halle Mitgliede.



Die dritte Auflage.

Mit Churfürstl. Sächsischem gnädigsten Privilegio.

Der I. Band mit den X ersten Kupfertafeln.

Greifswald, verlegt von Anton Ferdinand Röse, 1790.

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0005
DFG

1926 IX. 75/6.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Es scheint mir nothwendig, dem Publiko einige Rechenschaft, von dieser neuen Auflage des Auszugs ꝛc., vorher zu geben, ehe ich sie demselben in die Hände liefere.

Ich habe es nemlich gewagt, in der ebenen Geometrie, die Lehre von den Parallellinien, einigermaassen umzuarbeiten; weil ich nichts mehr wünschte, als wo möglich, die von meinem verstorbenen Vater hierüber abgefaßte Theorie, noch mehr von Einwendungen zu befreien, welche man ihm gemacht hatte.

Bei der ersten Bekanntmachung derselben, tadelte man nemlich hauptsächlich dieses, daß er in dem Beweise des Sazzes; „daß der äus-

„sere Winkel an einem Dreiecke, dessen eine „Seite verlängert ist, gleich der Summe der „beiden innern wird, von denen keiner sein „Nebenwinkel ist," im Grunde die Möglichkeit der Aufgabe annehme, daß man an einer jeden graden Linie einen Winkel setzen kann, der einem gegebenen gleich ist, und diese Aufgabe erst in der Folge, mit ihrer Auflösung und dem Beweise ihrer Wahrheit vorkäme.

In der Folge erweiterte mein Vater seine Theorie von den Parallellinien noch ansehnlich, und machte diese Erweiterung, welche vorzüglich die Lehre von der Lage der graden Linien betraf, in seinen mathematischen Abhandlungen (Halle 1786. in 8.) bekannt.

Allein auch dawider kamen einige Einwendungen zum Vorschein, davon manche einer nähern Aufmerksamkeit werth waren, und insbesondere diejenige, welche sich in der Recension der Allg. Litter. Zeitung (im Jahrg. 1786. S. 436.) vorfanden.

Da mir nun der Hr. Verleger vor etwa fünfviertel Jahren anzeigte, daß dem Auszuge eine neue Auflage baldigst bevorstände; so gieng meine Absicht vorzüglich dahin, einen Versuch zu machen, ob sich nicht gleich der erste und Haupt-Anstoß der Theorie, welcher auch bei der zweiten Erweiterung derselben nicht ganz aus dem Wege geräumt war, durch

eine

eine nochmahlige Veränderung, jedoch stets mit Beibehaltung der Grundlage, ganz fortschaffen liesse. Aus dem vorigen erhellet daher, daß mein Hauptaugenmerk dahin gerichtet seyn muste, die Aufgabe im 94 §. (der zweiten Edit.) vor dem 54sten §. hergehen lassen zu können. Dieß gelang mir auch dadurch wirklich, daß ich alle Sätze vom 51sten bis 94sten §. (der zweiten Edit.) in andere Verbindung brachte, und die ausserdem hiedurch entstandenen Lücken, durch 3 neue Sätze, im 56sten, 66sten und 76sten §. (der dritten Edit.) ausfüllte, davon der 56ste §., Euklids 7ter Satz, und der 66ste §., Euklids 16ter Satz, des ersten Buches seiner Elemente ist.

Nun schien mir zwar die Sache soweit abgemacht, allein ich mußte doch immer befürchten, daß an einem oder dem andern Orte, vielleicht ein Zirkel im Beweise entstanden, oder eine Lücke offen geblieben seyn könnte, welches ich vielleicht nur aus Vorliebe für meine Arbeit nicht bemerkt: ehe ich daher Gebrauch davon machte, schickte ich diese so veränderten Sätze, in der Verbindung, worin sie nach meiner letzten Umarbeitung gekommen waren, noch in Manuscript an einen sehr kompetenten Richter, den Deutschland wenigstens, schon seit vielen Decennien als allgemeinen Lehrer in der Mathematik verehrt, mit der Bitte, mir, da ich wohl wisse, daß Er über-

haupt nicht für die Beweise des berühmten 11ten Grundsatzes des Euklides sey, nur gütigst zu melden, ob er auch vielleicht, bei dem Durchlesen der von mir nun etwas veränderten Theorie der Parallelen meines verstorbenen Vaters, auf Lücken in den Beweisen gestossen sey: und ich hatte das Vergnügen diese Anfrage verneinend beantwortet zu erhalten.

Dieß war hinlänglich für mich, und in dieser Rücksicht glaube ich, nicht zu voreilig dadurch zu Werke gegangen zu seyn, daß ich Gebrauch davon bei dieser neuen Ausgabe machte; im Gegentheil hielt ich es nach meiner Ueberzeugung nun für Pflicht.

Eine Beschwerlichkeit war hiebey freilich unvermeidlich; es musten nemlich nunmehr das ganze Buch hindurch bey der neuen Aufl. die Zitata verändert werden, welche die §§. 51—94. der 2ten Auflage angiengen; indessen hoffe ich doch, daß der Erfolg beweisen wird, wie wenig ich mir diese Mühe habe verdrießen lassen, sondern wie genau es vielmehr geschehen ist. — Weil vielleicht der Fall eintreten könnte, daß ein Lehrer Vorlesungen darüber, nach Anleitung der neuesten Auflage hielte, und einige seiner Zuhörer nur im Besitz der vorigen wären; so habe ich dieser 3ten Aufl. eine Tafel beigefügt, welche von beiden Auflagen, die in der neuesten veränderten Paragraphen der Geometrie anzeigt; so daß man

augen-

augenblicklich finden kann, der wievielste in der 3ten Aufl. mit einem gewissen der 2ten übereinkommt. —

Ausserdem sind zum Theil einige kleine Zusätze beigefügt, welche theils von dem Marginalien meines seel. Vaters, theils von mir herstammen. Um sie desto schneller übersehen zu können, sollten selbige erst durchaus in Clammern eingeschlossen werden; allein es ist nachmals bei dem Abdruck vergessen. Im Grunde wird dieß auch von keiner erheblichen Bedeutung seyn. Zu ihrer Beurtheilung muß ich bemerken, daß selbige nun schon fünfviertel Jahre alt sind, weil der Hr. Verleger mich damahls um die Veranstaltung dieser neuen Ausgabe bat, damit er sie immer bei Gelegenheit und wie es in seinen Pressen am besten angieng, abdrucken lassen konnte.

Auch die Druckfehler der vorigen Ausgabe, sind bey dieser, soviel möglich verbessert worden.

Endlich bemerke ich noch, daß ich die Formuln zur Berechnung der Kugeldreyecke, welche man dem Werke ganz besonders beigelegt findet, auf Verlangen eines meiner gelehrten Freunde, welcher schon seit vielen Jahren über diesen Auszug Vorlesungen gehalten hat, hinzugefügt habe. Sie sind von mir nach der Art abgefaßt, wie man selbige in des Hrn. Prof. Lempe zu Freyberg neu herausgegebe-

ner Beyerschen Markscheidekunst antrift. Mit der nöthigen Ergänzung lassen sie sich sämmtlich aus den hier in der sphärischen Trigonometrie vorgetragnen Sätzen herleiten, und für Ungeübtere können sie, wie ich hoffe, ein nüzliches Hülfsmittel abgeben.

Berlin, im Januar 1790.

D. L. G. Karsten,
der Weltw. Doctor u. wirklicher Assessor bei der Königl. Preuß. Bergwerks- und Hütten-Administration.

Vorrede
zur ersten Auflage.

Schwerlich hätte ich mich entschlossen, aus meinen Anfangsgründen und meinem Lehrbegriffe der Mathematischen Wissenschaften noch einen Auszug zu machen, wenn mich nicht die Erfahrung überzeugt hätte, daß auch auf den zahlreichsten deutschen Universitäten die Anzahl derer immer noch sehr klein bliebe, die sich in der Mathematik über die ersten und leichtesten Anfangsgründe erheben wollen. Bey dem Wunsch, zur mehrern Ausbreitung der gemeinnützlichsten Kenntnisse nach meinen besten Einsichten soviel als möglich beyzutragen, habe ich es versucht, ein dem Wolfischen Auszuge ähnliches Handbuch aufzusetzen, und

dabey doch die allgemein anerkannten Mängel desselben zu vermeiden.

Soll die Geometrie eine Uebung des Verstandes seyn, so muß der Lehrer dieser Wissenschaft in Ansehung der Gründlichkeit und Schärfe der Beweise sich den Mustern der alten Griechischen Geometer möglichst zu nähern suchen, wenn er gleich die Absicht damit verbindet, dem Anfänger alles recht leicht und faßlich zu machen. Wie weit ich darin glücklich gewesen bin, beyde Absichten mit einander zu verbinden, überlasse ich Kennern zur Prüfung. Man wird finden, daß ich mir wenigstens alle Mühe gegeben habe, bey der Kürze, worin ich hier alles einzuschränken gezwungen war, doch die möglichste Vollständigkeit zu erreichen: die Lehren von den Verhältnissen und Proportionen (Geom. §. 154. 161.) vom Kreise (187-193 §. 213-221 §. 227-231 §.) von der Lage der Ebenen (242 u. f. §§.) von der Kugel und ihrer Oberfläche, (334. 347. u. f. §§.) können als Proben davon dienen. Hr. von Wolff hat in seinem Auszuge unter dem Namen

men der Algebra eine kurze Anleitung zur Buchstabenrechenkunst und Auflösung der Gleichungen gegeben: er macht aber damit den Beschluß des ganzen Buches. Ich habe so viel davon, als die hier unumgänglich nothwendige Kürze zuließ, nach der Trigonometrie unter dem Namen der allgemeinen Rechenkunst vorgetragen: denn hier war die natürlichste Stelle, weil die Wissenschaft doch zur theoretischen Mathematik gehört. Ein Lehrer, der es wagen darf, seine Zuhörer nach dieser zwar kurzen, aber doch nach ihrer Absicht vollständigen, Anleitung in der Buchstabenrechnung und Anwendung derselben bey Auflösung der Gleichungen zu üben, hat überdem den Vortheil davon, daß er auch in allen Theilen der angewandten Mathematik davon Gebrauch machen kann.

Man wird finden, daß ich beym Vortrage der angewandten Mathematik eben so sehr dahin gesehen habe, die Gründe so vieler hieher gehöriger Wissenschaften richtig festzusetzen und bey den Beweisen der vornehmsten Lehrsätze

sätze die mathematische Schärfe zu erreichen, als auch hiernächst davon gemeinnützliche Anwendungen zu machen. Zuweilen habe ich es gewagt, weiter zu gehen, als man es vielleicht hier erwartet hätte. Ich habe im 34 u. f. §. der Aerometrie versucht, die Auflösung des Problems von den Höhenmessungen vermittelst des Barometers aus Elementarsätzen herzuleiten, welche sonst gewöhnlich vermittelst der Rechnung des Unendlichen gefunden wird. Vielleicht glückt es mir, durch diese und ähnliche Proben, wenigstens einige angehende Gelehrte nicht nur von dem grossen Nutzen der höhern Mathematik, sondern auch davon zu überzeugen, daß sie so schwer nicht sey, als viele noch glauben.

Schon in der Vorrede zum zweyten Bande der Anfangsgründe habe ich bemerkt, wie sehr nothwendig es sey, die Gründe der mechanischen Wissenschaften, und besonders auch einer gemeinnützlichen Maschinenlehre mit möglichsten Fleisse ins Licht zu setzen. Als eine Probe davon, daß noch immer auch in neuen

Schrif-

Schriften bald wirkliche Irrthümer, bald fehlsame Anwendungen sonst richtiger Sätze angetroffen werden, bezog ich mich auf Herrn Polhems falsche von den Herrn Büsch und Schmidt aber für richtig angenommene Theorie der Schwungräder aus dem IV. Bande der Abhandlungen der Königlich-Schwedischen Academie der Wissenschaften. Kaum hätte ich geglaubt, daß Polhems Ansehen auch in der höhern Mathematik geübte Schriftsteller verleiten würde: und doch hat wirklich Herr Mönnich in seiner Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen, Augsb. 1779. Polhems fehlsame Theorie vorgetragen. Indessen war es kaum anders zu erwarten, als daß Herr Mönnich, wie er es in der Vorrede anzeigt, bey weiterer Prüfung selbst finden würde, wie sehr verworren und fehlerhaft Herr Polhem und mit ihm die Herren Büsch und Schmidt Huyghens Lehrsätze von der Schwungkraft anwenden. Ein kurzer Aufsatz davon stehet im 42 und 43 Stück der Wöchent-

chentlichen Hallischen Anzeigen vom Jahr 1778, der auch in die Gelehrten Beiträge zu den Meklenb. Schwerinschen Intelligenzblättern nicht lange vorher eingerückt war. Ueber die Auflösung des Problems vom vortheilhaften Gebrauch der Schwungräder, wie sie mit Hülfe der höhern Mathematik gefunden werden kann, werde ich an einem andern Orte Untersuchungen anstellen.

Am schwersten ist es mir geworden, den Vortrag der optischen und astronomischen Wissenschaften hier so einzuschränken, daß die Gränzen nicht überschritten würden, die ich mir einmahl nun hatte setzen müssen; bey dem allen aber doch auch wenigstens einige Vollständigkeit zu erreichen. Freylich hätte ich mir alles viel bequemer machen können, wenn es nur darum wäre zu thun gewesen, die bestimmte Bogenzahl zu liefern. Ein Bauersmann in Kossebude, unweit Dresden, Namens Johann Ludewig, hat aus Hrn. von Wolffens Anfangsgründen die Rechenkunst und Geometrie gelernt; die Optik aber, Astro-

Astronomie, und andere Theile der Mathematik, wozu Instrumente gehören, die er nie zu sehen bekommen, hat er nicht recht begreifen können. (M. s. Hrn. Gottscheds Historische Lobschrift des Freyherrn v. Wolff 32 S.) Die Ursache ist wohl nicht bloß der Mangel der Instrumente gewesen, sondern vorzüglich die daher rührende Unvollständigkeit des Vortrages, weil Hr. von Wolff weder im Auszuge noch in den Anfangsgründen die Lehren von der Lage der Ebenen gegen einander erklärt hat. Mir ist es von mehrern andern Personen bekannt, die nach dem Wolffischen Auszuge und den Anfangsgründen in der Mathematik unterrichtet waren, daß sie nach der Zeit diesen Mangel, wie leicht zu erachten ist, vorzüglich in der Astronomie, sehr gefühlt haben.

Ich weiß nicht, warum man die Beschreibung der Gestirne unter dem Namen der Astrognosie von der Wissenschaft getrennt hat, die eigentlich den Namen Astronomie führen soll. Eine richtige Beschreibung nicht

allein

allein der einzelnen Gestirne, sondern vornemlich ihrer scheinbaren Lage gegen einander, und der Stellen, wo man ein jedes dieser Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel zu suchen hat, ist nach meiner Ueberzeugung ein Hauptgeschäfte für die sphärische Astronomie, weil eben dieser Theil der Wissenschaft lehren soll, wie das Weltgebäude sich unsern Sinnen darstellet. Eine solche Beschreibung des gestirnten Himmels, wie sie der Natur selbst gemäß, und eben deswegen am leichtesten im Gedächtnisse zu behalten ist, vermisse ich auch bey solchen Schriftstellern, die unter dem Namen der Astrognosie zur Kenntniß der Gestirne Anleitung geben. Man beschreibt die Gestirne einzeln, ohne weitere Ordnung, und richtige Vertheilung nach den Gegenden an der scheinbaren Himmelskugel, wie sie am leichtesten zu finden sind. Selbst Herrn Bodens Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels, hilft diesem Mangel nicht völlig ab. Weil in diesem sonst mit Recht beliebten Buche der gestirnte Himmel für jeden Monath besonders beschrie-

beschrieben wird; so muß der Liebhaber der Wissenschaft aus zwölf verschiedenen Beschreibungen das kennen lernen, was er aus einer einzigen Beschreibung viel leichter und besser kennen lernen kann. Die allerwenigsten von den angehenden Gelehrten, die sich auf Universitäten mit der Mathematik beschäftigen, kommen soweit, daß sie Rechnungen über den Lauf des Mondes und der Planeten durchführen könnten; der gewöhnliche Vortrag der Astronomie hat um deßwillen auch zu wenig Annehmlichkeit für sie, weil die Keplerische Theorie vom Lauf der Planeten, mit der Newtonschen Theorie von der allgemeinen Schwere verbunden, nur von solchen in ihrer ganzen Schönheit recht verstanden werden kann, die sich bey Erlernung der theoretischen Mathematik über die allererstен Anfangsgründe erhoben haben: dieserwegen bin ich hier nur bemühet gewesen, dasjenige von der Astronomie leicht und faßlich vorzutragen, was allen angehenden Gelehrten angenehm und nützlich seyn würde, die doch in dieser Art Kenntnisse

nicht ganz unwissend bleiben wollen. In der Chronologie habe ich zugleich eine kurze Nachricht von der Jobelperiode gegeben, worauf Hr. Frank sein System der Chronologie gebauet hat. Weil es einmal gewöhnlich ist, daß auch zu den architectonischen Wissenschaften eine kurze Anleitung gegeben wird; so habe ich sie nicht ganz weglassen wollen: ob es gleich nicht möglich ist, wenn alles so sehr, als es hier nothwendig ist, ins Kurze gezogen werden soll, eine Vollständigkeit zu erreichen.

Halle im März des Jahrs 1781.

Vorrede
zur zweyten Ausgabe.

Aufgemuntert durch den Beyfall einsichtsvoller Männer, welche nach diesem Handbuche in den ersten Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften Unterricht ertheilet und dasselbe im Ganzen so vollständig gefunden haben, als es seiner Absicht nach seyn konnte, bin ich bey der Besorgung dieser zweyten Ausgabe darauf bedacht gewesen, einige mir mitgetheilte Bemerkungen über einzelne Stellen zu nutzen. Der Beweis des Lehrsatzes im 54 §. der Geometrie

ist auf noch einfachere im 53 §. vorgetragene Gründe zurückgeführet, und die Lehre von der Kreismessung ist im 231 §. durch eine vollständigere Berechnung mehr erläutert worden. Eben diese Rechnung diente zugleich der nähern Anleitung zur Berechnung der trigonometrischen Linien im 11 - 15 §. der Trigonometrie zur Vorbereitung.

Weil der Herr Verleger sich aus guten Gründen entschlossen hat, zur mehrern Bequemlichkeit der Käufer das Buch in zwey kleinere Bände zu vertheilen, so habe ich diesen Umstand genutzt, der Trigonometrie etwas mehr Vollständigkeit zu geben: die Furcht, daß das Buch zu stark ausfallen mögte, schränkte mich bey der ersten Ausgabe zu sehr ein. Ich habe im 29 und 30 §. ein Verfahren gewählt, zu zeigen, wie es ohne Hülfe der höhern Mathematik möglich sey, die

Briggi-

Briggischen Logarithmen für Primzahlen zu finden, welches um ein ansehnliches kürzer und leichter als das gewöhnliche ist, wenn man sich der vorgelegten Zahl durch mittlere geometrische Proportionalzahlen zwischen der nächstgrössern und nächstkleinern zu nähern sucht. Nach der allgemeinen Rechenkunst habe ich einen kurzen Entwurf der körperlichen oder sphärischen Trigonometrie beygefügt: es erfoderte solches nicht allein ihr häufiger Gebrauch in der Astronomie und mathematischen Geographie, sondern auch selbst bey vielen andern Untersuchungen und practischen Anwendungen der Mathematik, wovon ich hier nur noch die Markscheidekunst nennen will. Andere Aenderungen betreffen nur wenige einzelne Stellen. Der 3 Lehrsatz aus dem 43 §. der Aerometrie ist nun besser und richtiger, der 9 Lehrsatz im 34 §. der Hydro-

statik geworden, weil eben daselbst der Beweis des 10 Lehrsatzes im 35 §. schon darauf beruhet. Die allgemeinen Anmerkungen 57=66 §. der Maschinenlehre findet man nun abgekürzt im 29 und 30 §. Die optischen, astronomischen und architectonischen Wissenschaften sind in den zweyten Band gebracht, und in der vorangesetzten kurzen Vorrede habe ich von den wenigen nöthig befundenen Veränderungen ebenfalls Nachricht gegeben.

Der Verfasser.

Vergleichungstafel

der Paragraphen in der Geometrie.

Von der dritten Auflage		mit denen	in der zweiten.
§. 1—50.	—	—	§. 1—50.
„ 51.	—	—	„ 60.
„ 52.	—	—	„ 61.
„ 53.	—	—	„ 63.
„ 55a und 55b.		—	„ 72.
„ 56.	—	—	deficit.
„ 57.	—	—	„ 77.
„ 58.	—	—	„ 78.
„ 59.	—	—	„ 79.
„ 60—64.	—	—	„ 80—84.
„ 65.	—	—	deficit.
„ 66.	—	—	deficit.
„ 67.	—	—	„ 71.
„ 68.	—	—	„ 73.
„ 69.	—	—	„ 76.
„ 70.	—	—	„ 91.
„ 71.	—	—	„ 94.
„ 72.	—	—	„ 51.
„ 73.	—	—	„ 52.
„ 74.	—	—	deficit.
„ 75.	—	—	„ 53.
„ 76.	—	—	deficit.
„ 77. 78.	—	—	„ 54. 55.
„ 79—81.	—	—	„ 56—58.
„ 82.	—	—	„ 62.
„ 83.	—	—	„ 64.
„ 84.	—	—	„ 92.
„ 85—90.	—	—	„ 65—70.
„ 91.	—	—	„ 59.
„ 92. 93.	—	—	„ 74. 75.
„ 94.	—	—	„ 85.
„ 95—99.	—	—	„ 86—90.
„ 100.	—	—	„ 93.
„ 101.	—	—	„ 95.
„ 102—368 nach der Reihe.		—	„ 96—362. nach der Reihe.

Inhalt

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0027
DFG

Inhalt
des ersten Bandes.

Die Rechenkunst.
Die Geometrie.
Die ebene Trigonometrie.
Die allgemeine Rechenkunst.
Die sphärische Trigonometrie.
Die Statik.
Die Hydrostatik.
Die Aerometrie.
Die Mechanik und Hydraulik.
Die Maschinenlehre.
Die Artillerie.

Die

Die

Theoretisch-Mathematischen Wissenschaften.

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0029
DFG

Vorbereitungslehren
von der
Mathematik und ihrer Lehrart.

1. §.

Unsre Begriffe davon, was eine Zahl, und überhaupt eine Grösse sey, gehören zu den ersten Grundbegriffen der Mathematik; weil diese Wissenschaft lehren soll, wie man Grössen mit einander vergleichen, und aus bekannten Grössen andre unbekannte finden kann. Dabey muß man voraussetzen, daß jedermann für sich schon einen Begriff davon habe, was insbesondre bey körperlichen Dingen ihre Grösse ausmache; auch weiß jedermann, was die Wörter: Vielheit, Menge, Zahl, Anzahl sagen wollen.

2. §. Jede Vorstellung, die wir uns von einer Sache im Verstande machen, heißt ein Begriff, und unser Begriff von einer Sache ist in soweit ein klarer Begriff, in wie weit derselbe hinreichend ist, die Sache von andern zu unterscheiden. Wer es weiß, daß der Planet Saturn ein Stern sey, der wird ihn schon vom Monde, auch eben so von einer grossen Menge andrer Dinge, die keine Sterne sind,

unterscheiden: vielleicht aber ist der Begriff doch noch nicht hinreichend, den Saturn von den Fixsternen und andern Planeten zu unterscheiden. Demnach kann ein klarer Begriff noch in gewisser Absicht dunkel seyn.

3. §. Wenn die Sache, wovon wir uns eine Vorstellung machen, mehrere verschiedene Merkmahle an sich hat, und wenn alsdenn unser Verstand die Verschiedenheit dieser Merkmahle einsiehet; so ist unser Begriff davon **deutlich**. Manche Begriffe unsers Verstandes sind aber sehr **einfach**, und keiner eigentlichen Deutlichkeit fähig. Beyspiele davon geben die Begriffe von einer **Zahl**, und einer **Grösse** überhaupt. (1 §.) Daher würde man auch schwerlich es jemanden durch eine Erklärung begreiflich machen, was eine **Zahl** oder eine **Grösse** sey, wenn er es nicht ohnehin schon wüste. Dergleichen Erklärungen fallen auch meistens unrichtig aus.

4. §. Eine **Erklärung** bestehet in der Aufzählung der Merkmahle, woran man eine Sache erkennen und von andern unterscheiden kann. Sie ist also ein **deutlicher Begriff** von einer Sache, den man durch Worte ausdrückt. Wenn alsdenn die angezeigten Merkmahle hinreichend sind, die Sache von allen andern zu aller Zeit zu unterscheiden; so ist es ein **vollständig deutlicher Begriff**, und das wird eigentlich erfodert, wenn die Erklärung von einer Sache recht brauchbar seyn soll.

5. §. Wir nennen es ein **Urtheil** des Verstandes, wenn wir uns vorstellen, daß eine Sache diese oder jene Eigenschaft an sich habe, und in der Vernunftlehre nennet man es einen **logischen Satz**, wenn ein solches Urtheil mit Worten ausgedrückt wird.

6. §.

6. §. Grundsätze nennt man solche Sätze, deren Wahrheit einem jeden von selbst einleuchtet, sobald er nur die Worte versteht: Lehrsätze aber sind diejenigen, von deren Wahrheit man sich aus andern Gründen überzeugen muß. Die Darstellung der Gründe, aus welchen die Wahrheit des Lehrsatzes erhellet, macht den Beweis davon aus. Erfahrungen werden den Grundsätzen gleich geachtet.

7. §. Man unterscheidet auch practische von blos theoretischen Sätzen. Ein practischer Satz verlanget, daß etwas zu Stande gebracht werden soll, wenn der theoretische nur ausdrückt, daß etwas so und nicht anders beschaffen sey. Wenn es für sich klar ist, wie man das Verlangte zu Stande bringen könne, so heißt der practische Satz insbesondre ein Foderungssatz, und im entgegengesetzten Fall eine Aufgabe. Der Inbegriff der Regeln, nach welchen das Verlangte zu Stande gebracht wird, heißt die Auflösung der Aufgabe, und der Beweis davon bestehet in der Anführung der Gründe, aus welchen die Richtigkeit der Auflösung begreiflich ist.

8. §. Wenn ein Satz kurz und leicht aus demjenigen folgt, was kurz vorher vorgetragen ist; so erhält er den Nahmen eines Zusatzes. Was übrigens sonst noch zu wissen nützlich ist, ohne daß es eben in den Zusammenhang der Lehren selbst gehört, welche eigentlich die Wissenschaft ausmachen, das trägt man in Anmerkungen vor.

9. §. Die Ordnung, welche beym Vortrage der Lehren einer Wissenschaft beobachtet wird, heißt die Lehrart. Die mathematische Lehrart ist an sich von einer richtigen philosophischen Lehrart, so wie sie den Regeln der Vernunftlehre gemäß beschaffen

seyn muß, nicht verschieden. Man fängt, wo es nöthig ist, von Erklärungen an, und setzet hiernächst ungezweifelt richtige Grundsätze fest. Aus den Erklärungen und Grundsätzen werden hiernächst alle übrige zur Wissenschaft gehörige Lehren durch richtige Vernunftschlüsse hergeleitet. Hieraus folgt aber nicht, daß die Erlernung der künstlichen Logik dem Studium der Mathematik vorhergehen müsse.

10. §. Weil eine Sache so lange **rein** heißt, als nichts Fremdes von den Bestandtheilen der Sache verschiedenes damit vermischt ist; so hat man den Nahmen der **reinen Mathematik** in einem ähnlichen Sinne eingeführt. Es soll die Mathematik eine Wissenschaft von der Grösse seyn: demnach ist die Mathematik so lange rein, als man ausser der Eigenschaft der Grösse keine andre Eigenschaften der Dinge, welchen eine gewisse Grösse zugeschrieben wird, in Betrachtung ziehet. Dieser Theil der Wissenschaften heißt auch die theoretische Mathematik, und man unterscheidet davon die practische oder angewandte Mathematik, welche sich mit Vergleichung und Ausmessung der Grösse solcher Dinge beschäftiget, die in der Natur wirklich vorhanden sind. Die Frage: wie groß ist eine Kugel im körperlichen Maaß, wenn ihr Durchmesser 6 Zoll im Längenmaasse beträgt? gehört für die reine Mathematik; die Frage aber; wie groß ist eine eiserne sechs Pfund schwere Kugel? gehört für die angewandte Mathematik.

11. §. Man kann zählen, auch Zahlen mit einander vergleichen, und aus bekannten Zahlen andre unbekannte finden, ohne daß es nöthig wäre, die besondre Beschaffenheit der zusammengezählten Dinge

mit

mit in Betrachtung zu ziehen: dieserwegen ist die Arithmetik oder die Rechenkunst, welche davon Unterricht giebt, als ein Theil der reinen Mathematik zu betrachten.

12. §. Im eigentlichsten Sinne schreibt man den Körpern in der Natur eine gewisse Grösse zu, in wie weit ein solcher Körper durch einen gewissen Raum nach allen Seiten ausgedehnt ist. Dieser Raum, den ein Körper einnimmt, hat allemal seine Gränze, welche man sich als die Oberfläche des Körpers vorstellet, welche auch den Körper das giebt, was man seine Figur nennt. Die Begriffe von der Lage mehrerer Dinge gegen einander und der Entfernung des einen vom andern, setzen ebenfalls voraus, daß man sich zwischen denselben einen gewissen Raum vorstelle, und daß die Grösse desselben sich angeben lasse. Von dieser ausgedehnten Grösse des Raums, den die Körper einnehmen, den man sich auch vorstellt, wenn von der Lage mehrerer Körper gegen einander, oder von ihren Entfernungen die Rede ist, giebt die Geometrie Unterricht.

13. §. Rechenkunst und Geometrie sind die beyden Hauptwissenschaften der reinen Mathematik: einige Anwendungen der Rechenkunst auf besondre geometrische Theorien haben eigene Nahmen als besondre Wissenschaften erhalten. Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft davon, wie unbekannte Seiten und Winkel eines Dreyecks gefunden werden können, und sie wird wegen Verschiedenheit der Dreyecke wiederum in die ebene und sphärische oder körperliche Trigonometrie eingetheilet.

14. §. Es giebt gewisse allgemeine Kunstgriffe, um aus dem bekannten das unbekannte zu finden,

indem man das unbekannte so ansiehet, als wenn es schon gefunden wäre, und nun rückwärts auf dasjenige durch Schlüsse geleitet wird, was eigentlich, um das unbekannte zu finden, vorgenommen werden muß. Die Kunstgriffe machen eigentlich die allgemeine mathematische Erfindungskunst aus, welche auch die mathematische Analysis heißt. Man trägt sie bey dem jetzigen Zustande der Wissenschaft am besten in Verbindung mit der Buchstabenrechenkunst und Algebra vor, welches Erweiterungen der Rechenkunst sind. Vermittelst einer geschickten Verbindung ganz kurzer Zeichen von sehr allgemeiner Bedeutung ist man im Stande, die Auflösung nicht nur arithmetischer sondern auch geometrischer und selbst solcher Aufgaben zu finden, die zur angewandten Mathematik gehören. Mehrere dahin gehörige besondre Wissenschaften, wovon der eigentliche Inhalt sich hier noch nicht einmahl verständlich würde erklären lassen, haben den gemeinschaftlichen Nahmen der höhern theoretischen Mathematik erhalten.

15. §. Eigentlich ist alles, dessen Grösse sich ausmessen und berechnen lässet, ein Vorwurf der angewandten Mathematik: also vornemlich die Körperwelt, sowohl im ganzen und im grossen, als auch im kleinen, und in ihren einzelnen Theilen. Sehr viele Erfolge in der Körperwelt hängen von den Bewegungen ab, und von den bewegenden Kräften: daher sind unter dem Nahmen der mechanischen Wissenschaften besondre Anwendungen der Mathematik entstanden. Andre Erfolge in der Körperwelt, vornemlich in wie weit wir sie vermittelst des Gesichts wahrnehmen, rühren von den eigenen oder anderswoher entlehnten Licht her, welches die Körper nach

allen

allen Seiten umherstrahlen, und das hat die Bearbeitung der optischen Wissenschaften veranlasset.

16. §. Die bürgerliche und Kriegsbaukunst, auch die Schiffsbaukunst, sind Anwendungen der Geometrie und Rechenkunst mit besondern Theorien aus den mechanischen Wissenschaften verbunden: bey der wirklichen Ausübung hievon hat man jedoch noch viele andre Kenntnisse nöthig, die nicht eigentlich mathematisch sind. Man kann alles, was hieher gehört, unter dem allgemeinen Nahmen der architectonischen Wissenschaften begreifen.

17. §. Die astronomischen Wissenschaften lehren die Ausmessung der Körperwelt im grossen, sie stellen Untersuchungen über die wirklich vorhandene Zusammenordnung und Verbindung der Weltkörper unter einander an, und suchen es aufzuklären, wie alles das daher erfolgen könne, was am gestirnten Himmel vorzugehen scheint. Besondre Theile davon haben wiederum die Nahmen besondrer Wissenschaften erhalten. Die Geographie lehrt die Ausmessung der Erde, und die Eintheilung der darauf befindlichen Länder und Meere im grossen. Die Chronologie giebt Unterricht von der Berechnung der Jahre, Monathe und Tage, auch der Abwechselungen der Jahrszeiten, nicht allein soweit sie nothwendig ist, um die Geschäfte im bürgerlichen Leben darnach zu ordnen, sondern auch soweit sie dem Geschichtforscher dient, um die Jahrrechnungen alter und neuer Völker zu vergleichen. Die Gnomonik lehrt Sonnenuhren, auch allenfalls Mond- und Sternenuhren zu verzeichnen. Sehr vieles von demjenigen, was der Schiffer wissen muß, um auf der See den Lauf seines Schiffes nach jeden verlangten Ort

zu richten, hängt von astronomischen Kenntnissen ab, und wird unter dem Nahmen der Steuermannskunst vorgetragen. Auf ähnliche Art verhält es sich mit der Markscheidekunst, worin die Lehren verschiedener Theile der theoretischen und angewandten Mathematik, zum Behuf der Gränzbestimmungen, die bey dem Bergbau vorkommen, angewandt werden.

18. §. Diese sehr kurze Vorstellung von dem Umfange der mathematischen Wissenschaften wird schon dazu dienen, von dem sehr grossen und ungemein weit ausgebreiteten Nutzen der dahin gehörigen Kenntnisse einige Ueberzeugung zu geben. Man hat in keiner Wissenschaft von den Regeln einer richtigen philosophischen Lehrart (9. §.) einen getreuern Gebrauch gemacht, als eben in der Mathematik, und eben daher hat diese Lehrart auch im vorzüglichen Sinne den Nahmen der mathematischen erhalten. Diesemnach ist sie die vortreflichste ausübende Vernunftlehre: und eben um deßwillen leisten die Uebungen auch nur in den ersten Anfangsgründen der reinen Mathematik einem angehenden Gelehrten vorzügliche Dienste.

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Die 1. Erklärung.

1. Eine Menge von Dingen von einerley Art, die alle für sich als Ganze betrachtet werden, heißt eine ganze Zahl: eine Menge solcher Dinge aber

aber, die man als Theile eines andern Ganzen betrachtet, nennt man einen **Bruch**, oder eine **gebrochene Zahl**.

Die 2. Erklärung.

2. Jedes von den zusammengezählten gleichartigen Dingen, die zusammengenommen eine ganze Zahl ausmachen, oder auch das Ganze, dessen Theile zusammengenommen eine gebrochene Zahl ausmachen, heißt die **Einheit**. Die Ursache ist, weil man beym Zusammenzählen mit **Eins** anfängt, und jedes von den zusammengezählten Dingen nur **Eins** ist, welches noch keine Zahl ausmacht.

Die 3. Erklärung.

3. **Gleiche Grössen** sind in Ansehung der Menge ihrer Theile, also **gleiche Zahlen** in Ansehung der Menge ihrer Einheiten einerley. Wenn Grössen überhaupt, also auch Zahlen **ungleich** sind, so ist die **kleinere** schon so groß, als ein Theil von der **grössern**. Das Zeichen (=) drückt die Gleichheit, und das Zeichen (>) die Ungleichheit aus, jedoch das letztere auf die Art, daß die Oefnung auf das grössere, die Spitze auf das kleinere weisen muß.

Der 1. Grundsatz.

4. Jede Grösse ist sich selbst gleich, und das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich: also auch grösser, als jeder von seinen Theilen allein genommen.

Der 2. Grundsatz.

5. Wenn zwey Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. Was aber grösser ist, als eine von zwey gleichen Grössen, und um so mehr, was noch grösser ist, als die grössere von zwey ungleichen Grössen, das ist auch grösser als die andre.

Die

Die 4. Erklärung.

6. Ziffern heissen die Zeichen, womit man die Zahlen bezeichnet. Für die ersten neun ganzen Zahlen hat man die folgenden bekannten Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und ausserdem ist die Null, 0, das Zeichen einer leeren Stelle, die vermöge des gleich folgenden Gesetzes, nach welchem man die Ziffern für grössere Zahlen aus den einfachen zusammen setzet, keine von den übrigen einfachen Ziffern einnehmen kann.

Willkührliche Sätze.

7. Man zählet fort von Eins bis Zehn, und fängt alsdenn mit dem Zählen wieder von vorne an, nur daß man jedesmahl hinzu setzt, wie vielmahl schon bis zehn ist gezählt worden. Dabey dienen alsdenn die kurzen Zahlwörter: zwanzig, dreyßig, vierzig, bis neunzig, nach ihren bekannten Bedeutungen: zweymahl zehn, dreymahl zehn, u. s. w. fort.

Man spricht ferner aus	durch das Wort
zehnmahl hundert . .	tausend
tausendmahl tausend . .	Million
tausendmahl tausend Millionen	Billion
tausendmahl tausend Billionen	Trillion
tausendmahl tausend Trillionen	Quadrillion, u. s. w.

Die Ziffern schreibt man von der Rechten gegen die linke Hand, und läßt jede Ziffer in der folgenden Stelle zehnmahl mehr bedeuten, als in der nächstvorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müssen, setzt man die Null.

Anmerkung.

Obige Ziffern haben wir von den Arabern erhalten. Ob sie aber die Erfinder derselben sind, ist zweifelhaft. Die Sinesen haben sie auch, und die Indostaner sollen sie von ihnen erhalten haben. Allein weder diese noch

noch die Araber sollen die heutige Dekadik gekannt haben. M. s. Theophr. Sigfr. Bayeri Historia Regii Graec. Bactr. pag. 130.

Die 1. Aufgabe.

8. Eine mit Ziffern geschriebene Zahl richtig auszusprechen.

Aufl. Man theile die ganze zusammengesetzte Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, und gebe jeder Classe sechs Ziffern, da dann für die höchste Classe vielleicht weniger als sechs Ziffern bleiben. Wenn man alsdenn oberwärts an der siebenten Ziffer einen Strich (′), an der dreyzehnten zwey Striche (″) setzt, und so fortfährt; so weiß man, wo die Millionen, Billionen, u. s. f. anfangen, und die übrige Aussprache giebt sich alsdenn leicht nach den Regeln des 7 §.

Jede Classe von sechs Ziffern kann man noch durch ein Comma theilen, welches man neben der vierten Ziffer setzt, von der Rechten gegen die Linke gezählt: so erhält man Classen von drey Ziffern, nur daß die höchste Classe vielleicht nur eine oder zwo Ziffern erhält. Alsdenn kommt es nur darauf an, daß man jede Classe von dreyen Ziffern für sich aussprechen könne. Das Comma wird durch tausend ausgesprochen, oben ein Strichlein durch Million, zwey Strichlein durch Billion, u. s. f.

Man lieset also die Zahl

75‴840,937‴528,296″364,709′007,283

Fünf und siebenzig Quadrillionen, achthundert und vierzig tausend, neun hundert und sieben und dreyßig Trillionen, fünfhundert und acht und zwanzig tausend, zweihundert und sechs und neunzig Billionen, dreyhundert und vier und sechzig tausend sieben

ben hundert und neun Millionen, sieben tausend zwey hundert und drey und achtzig.

Zusatz.

9. Es bestehen demnach alle zusammengesetzte Ziffern aus einfachen Ziffern verschiedener Ordnungen. Die Ziffern in der ersten Stelle bedeuten Einer oder einfache Einheiten. Die Ziffern in der zweyten Stelle, oder in der ersten nach den Einern, bedeuten zehnfache Einheiten, und gehören zur ersten Decimalordnung. Eben so gehören die Ziffern in der dritten Stelle, oder der zweyten nach den Einern zur zweyten Decimalordnung, u. s. w. allemahl von der Rechten gegen die Linke gezählt.

Anmerkung.

Dieß hat zu einer besondern Bezeichnung der Ordnungen Anlaß gegeben, die zu einer guten Verkürzung, besonders alsdann dient, wenn eine Zahl aus wenig Ziffern, mit vielen rechter Hand daran befindlichen Nullen, besteht. Dieß geschieht nemlich durch kleinere Ziffern, die man über die Ziffern der Zahl nach der Regel schreibt, daß der ersten Decimalordnung die 1, der zweyten die 2, u. s. f. zukommt. Z. B.

$$7^{4}\,9^{3}\,6^{2}\,4^{1}\,8$$

wo die 4 in der 1sten, die 6 in der 2ten, die 9 in der 3ten, und die 7 in der 4ten Decimalordnung steht. Oder 16^{12} welches gleich 16 in der 12ten Decimalordnung ist, oder 16 Billionen bedeutet.

Die 5. Erklärung.

10. Eine Grösse, die zweyen oder mehrern andern zusammengenommen gleich ist, heißt ihre Summe. Alle diese Grössen, wenn sie zusammen eine gewisse Summe ausmachen sollen, müssen von einerley Art seyn, und mehrere Grössen von einerley Art addiren heisset ihre Summe finden. Das Zeichen

(+)

(+) bezeichnet die Addition, und man spricht es durch das Wort plus aus. Wenn man schreibt 5+3=8, so heißt das, die Summe von 5 und 3 ist gleich 8.

Die 6. Erklärung.

11. Die Differenz zwoer ungleichen Grössen ist der Ueberschuß, um welchen die grössere die kleinere übertrift. Man nennt ihn auch wohl die Ergänzung, oder das Complement des kleinern zum grössern. Das kleinere vom grössern subtrahiren heißt die Differenz des einen vom andern finden, welche alsdenn auch der Rest heißt. Diese Subtraction bezeichnet man mit dem Zeichen (—) und spricht es durch minus aus. Der Ausdruck 5—3=2 will sagen, die Differenz der Zahlen 5 und 3 ist gleich 2.

Der 3. Grundsatz.

12. Wenn gleiches zu gleichen addirt wird, so sind die Summen gleich, und gleiches von gleichem subtrahirt giebt gleiche Reste. Wenn man dagegen zu ungleichen Grössen gleiches addirt, oder von ungleichen Grössen gleiches subtrahirt; so giebt das grössere eine grössere Summe, auch einen grössern Rest. Also ist auch noch um so mehr die Summe des grössern zum grössern addirt grösser, als die Summe des kleinern zum kleinern addirt.

Der 4. Grundsatz.

13. Wenn von gleichen Grössen ungleiches subtrahirt wird, so giebt das grössere den kleinern Rest, das kleinere aber giebt den grössern Rest.

Der 1. Forderungssatz.

14. Die Summe zwoer oder auch noch mehrerer Zahlen, wenn keine davon grösser als 9 ist, kann man leicht durchs Zusammenzählen in Gedanken finden.

den. Auch wenn eine kleinere Zahl, die nicht grösser als 9 ist, von einer andern, die nicht grösser als 2 mahl 9 oder 18 ist, subtrahirt werden soll; so kann der Rest gleichfalls leicht in Gedanken durchs Zurückzählen gefunden werden.

Die 2. Aufgabe.

15. Zwo oder noch mehr ganze Zahlen zu addiren.

Aufl. 1. Man schreibe die Zahlen von der Rechten gegen die Linke so unter einander, daß die Ziffern in einer Columne unter einander kommen, die zu einerley Decimalordnung gehören.

2. Man addire zuerst alle Einer, und eben so jede folgende Columne für sich, (14 §.) schreibe aber jedesmahl unter derselben Columne nur die niedrigste Ziffer der Summe nieder. Was in der nächstfolgende Columne weiter gegen die Linke kommen müste, behalte man in Gedanken, und zähle es zur nächstfolgenden Columne. Unter der höchsten Columne schreibe man die zuletzt gefundene Summe vollständig nieder. Die nachstehende Rechnung setzet alles ins Licht.

75436	
328	Statt dessen erhält man gleich
9836	kürzer die Summe auf folgen-
90629	de Art.
29	75436
10	328
21	9836
14	90629
16	176229
176229	

Die

Die 3. Aufgabe.

16. **Eine kleinere ganze Zahl von der grössern zu subtrahiren.**

Aufl. 1. Man schreibe die kleinere Zahl unter der grössern, wie bey der Addition, und subtrahire nach der Ordnung, von der Rechten gegen die Linke gerechnet, in jeder Columne die unten stehende Ziffer von der oben stehenden. (14 §.)

2) In dem Fall, wenn die obere Ziffer kleiner, als die untere ist, nehme man von der nächsthöhern Eins weg, oder man borge Eins, und rechne dafür zehn zu der Ziffer, wovon man subtrahiren sollte, wie in dem hiebey stehenden Exempel. Oben über der Ziffer, wovon man geborgt hat, mache man einen Punct, der daran erinnert, daß sie schon um Eins vermindert sey.

$$\begin{array}{r} \dot{5}\,\dot{4}\,7\,3\,2\,8 \\ 4\,6\,5\,2\,9\,6 \\ \hline \text{Rest } 8\,2\,0\,3\,2 \end{array}$$

3. Wenn etwa in der nächsthöhern Stelle die 0 stünde, wie in dem beygefügten Exempel; so geht man soweit gegen die Linke fort, bis man auf eine Ziffer kommt, wovon man Eins borgen kann. Alsdenn erhält man in allen leeren Stellen, über die man wegborgen muste, 9. Wäre die Ziffer, wovon man subtrahiren soll, selbst 0; so würde man beyn Borgen in dieser Stelle 10 erhalten.

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \dot{1}0 & 10 & \cdot & \dot{1}0 & \\ 7 & 8 & 3 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 7 & 8 & 5 & 4 & 9 & 9 \\ \hline 2 & 8 & 5 & 1 & 5 & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

Zusatz.

17. Die Addition und Subtraction dienen einander in einem gewissen Sinn zur Probe, ob man recht gerechnet hat. Wenn man entweder eine, oder die Summe mehrerer von den zusammen addirten Zah-

len von der Totalsumme subtrahirt; so muß die Summe der übrigen zum Rest bleiben. Wenn man ferner den Rest und die subtrahirte Zahl zusammen addirt; so muß die Summe der grössern Zahl gleich werden.

Die 7. Erklärung.

18. Eine Grösse mit einer ganzen Zahl **multipliciren**, heißt eine neue Grösse finden, welche die erste so vielmahl enthält, als Eins in der gegebenen Zahl enthalten ist. Diese Zahl heißt der **Multiplicator**, und was damit multiplicirt werden soll, das **Multiplicandum**, die gesuchte Grösse das **Product**. Multiplicandum und Multiplicator haben auch den gemeinschaftlichen Nahmen **Factoren**. Um die Multiplication anzuzeigen, setzt man das liegende Kreuz (×) oder statt dessen nur einen Punct (.) zwischen beyden Factoren. Oft ist es deutlich genug, wenn man den Multiplicator ohne alles weitere Zeichen dem Multiplicando voran setzt, wie 3 Thaler, 7 Ellen.

Die 8. Erklärung.

19. Eine Grösse mit einer ganzen Zahl **dividiren**, heißt eine dritte Grösse finden, die in der ersten so vielmahl enthalten ist, als Eins in der gegebenen ganzen Zahl. Diese Zahl heißt der **Divisor**, was damit dividirt werden soll, das **Dividendum**, und die gesuchte Grösse der **Quotient**. Das Zeichen der Division sind zwey Puncte (:) wie ein Colon.

Der 5. Grundsatz.

20. Gleiches mit gleichen multiplicirt oder dividirt giebt im ersten Fall gleiche Producte, im letzten Fall gleiche Quotienten. Wenn die Multiplicanda und Dividenda ungleich, die Multiplicatoren und Divisoren aber gleich sind; so giebt das grössere Multipli-

tiplicandum das grössere Product, das grössere Dividendum den grössern Quotienten. Um so mehr also giebt das grössere mit dem grössern multiplicirt mehr, als wenn man das kleinere mit dem kleinern multiplicirt.

Der 6. Grundsatz.

21. Wenn das Dividendum einerley bleibt; so wird der Quotient 2mahl 3mahl grösser, wenn man den Divisorem so vielmahl kleiner nimmt, und umgekehrt. Der doppelte oder 3mahl grössere Divisor giebt nur einen halb so grossen, oder 3mahl kleinern Quotienten, u. s. f. fort.

Der 2. Foderungssatz.

22. Das Product zweyer Zahlen, wenn keine von beyden grösser als 9 ist, findet man leicht vermittelst der Addition. Man addire nur das Multiplicandum so vielmahl zu sich selbst, als Eins im Multiplicator enthalten ist.

Zusatz.

23. Man kann alle mögliche Producte zweyer Zahlen, wovon keine 9 übertrift, leicht unter dem Nahmen des **Ein mahl Eins** in die nachstehende kleine Tabelle bringen, und benöthigten Falles daraus nehmen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Der 7. Grundsatz.

24. Eine Zahl, die aus mehrern Theilen bestehet, multiplicirt man mit einer gegebenen ganzen Zahl, wenn man nacheinander alle ihre Theile multiplicirt, und zuletzt alle partielle Producte in eine Summe bringt. Auch wird eben so eine Zahl, die aus mehrern Theilen bestehet, mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man jeden Theil für sich dividirt, und zuletzt alle einzelne Quotienten zusammen addirt.

Zusatz.

25. Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000, u. s. f. multiplicirt, wenn man zur Rechten eine, zwo, drey oder mehr Nullen beyfügt. Wenn aber eine Zahl zur Rechten Nullen hat, so dividirt man sie mit 10, 100, 1000, u. s. f. wenn man eine, zwo, drey, oder mehr Nullen weglöscht.

Der 8. Grundsatz.

26. Wenn beyde Factoren ganze Zahlen sind, so geben sie mit veränderter Ordnung einerley Product. Es ist 7 mahl 8 = 8 mahl 7, und 5 mahl 9 = 9 mahl 5. Wenn also auch mehr als zwey ganze Zahlen in einander multiplicirt werden sollen, so kann man die Ordnung der Factoren, wie man will, ändern.

Die 4. Aufgabe.

27. Eine ganze Zahl mit einer andern ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. 1. Fall. Wenn beyde Factoren sonst einfache Ziffern sind, nur aber einer allein, oder alle beyde rechter Hand Nullen haben; so multiplicirt man die Ziffern nach dem 23 §, und giebt dem Product so viele Nullen, als beyde Factoren zusammen haben.

haben. Denn es ist $700 \times 5000 = 7 \times 100 \times 5 \times 1000$ (25 §.) $= 7 \times 5 \times 100 \times 1000$ (26 §.) $= 3500000$. (25 §.)

2. Fall. Wenn das Multiplicandum aus mehrern, der Multiplicator aber nur aus einer Ziffer besteht; so multiplicirt man nach der Ordnung die Einer, Zehner Hunderte u. s. w. mit dem Multiplicator, und schreibt wie beym addiren jedesmahl die niedrigste Ziffer des Products in derselben Columne unter: was aber in die nächsthöhere Columne kommen müste, behält man in mente, und addirt es zum Product, was man in der nächsten Columne findet.

5836
7
Prod. 40852

3. Fall. Wenn auch der Multiplicator aus mehrern Ziffern bestehet; so wird das ganze Multiplicandum nach der Ordnung mit allen Theilen des Multiplicators multiplicirt, und alle einzelne Producte werden hiernächst zusammen addirt. (24 §.) Wenn man dabey mit der niedrigsten Ziffer anfängt, und die nächsthöhern folgen lässet; so beobachte man nur daß die niedrigste Ziffer eines jeden folgenden Products um eine Classe weiter gegen die linke untergeschrieben werden müsse, damit die einzelnen Producte so untereinander kommen, wie es den Additionsregeln gemäß ist.

26394
9362
52788
158364
79182
237546
247100628

Der 1. Lehrsatz.

28. Eine ganze Zahl 48 wird mit einer kleinern ganzen Zahl 8 dividirt, wenn man eine dritte Zahl 6 sucht, welche angiebt, wie vielmahl

mahl der Divisor 8 im Dividendo 48 enthalten sey.

Beweis. Wenn man weiß, daß 8 in 48 6mahl enthalten sey; so folgt, es sey 6mahl 8 = 48 also auch 8mahl 6 = 48. (26 §.) Demnach ist 6 der 8te Theil von 48, oder es ist die Zahl 6 der gesuchte Quotient. (19 §.)

Zusatz.

29. Wenn also der Quotient richtig gefunden ist, und man das Dividendum mit dem Quotienten dividirt, so muß der vorige Divisor der Quotient werden.

Die 9. Erklärung.

30. Um einen Bruch auszudrücken, sind zwo ganze Zahlen nöthig, wovon eine angiebt, in wieviele gleiche Theile das Ganze eingetheilt sey, die andre aber, wieviele solche Theile den Bruch ausmachen. Jene heißt der Nenner, diese der Zähler des Bruchs. Beyde Zahlen unterscheidet man durch einen Strich von einander, den Zähler setzt man über, den Nenner unter dem Strich.

Die 10. Erklärung.

31. Ein Bruch heißt ein ächter Bruch, wenn sein Zähler kleiner als sein Nenner ist, im entgegengesetzten Fall aber ein unächter Bruch.

Zusatz.

32. Der ächte Bruch ist kleiner als das Ganze, der unächte Bruch entweder eben so groß, oder gröſſer, als das Ganze.

Der 2. Lehrsatz.

33. Wenn der Divisor gröſſer, als das Dividendum ist, so wird der Quotient ein ächter Bruch: das Dividendum wird sein Zähler, und der Divisor sein Nenner.

Beweis.

Beweis. Wenn man 1 mit 5 dividiren soll, so ist für sich klar, daß der Quotient $\frac{1}{5}$ sey, also ist $3 = 1 + 1 + 1$ mit 5 dividirt, soviel als $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Eben so giebt 7 mit 9 dividirt den Bruch $\frac{7}{9}$, u. s. f.

Der 1. Zusatz.

34. Aus dem Beweise folgt ganz allgemein, daß jeder Quotient als ein Bruch angesehen werden könne, wenn das Dividendum der Zähler, der Divisor der Nenner ist. Demnach ist $15 : 8 = \frac{15}{8}$, $37 : 9 = \frac{37}{9}$, u. s. f. und man kann jeden Quotienten auf diese Art als einen Bruch schreiben. Auch ist umgekehrt jeder Bruch ein Quotient, wenn der Zähler das Dividendum, der Nenner aber der Divisor wird.

Der 2. Zusatz.

35. Jeder unächte Bruch ist entweder selbst eine ganze Zahl, oder er enthält eine ganze Zahl mit einem ächten Bruch, welche beyde zusammen eine vermischte Zahl ausmachen.

Die 5. Aufgabe.

36. Das Dividendum bestehet höchstens aus zwoen, der Divisor nur aus einer Ziffer; man soll den Quotienten finden.

Aufl. 1. Fall. Wenn der Divisor grösser, als die höchste Ziffer im Dividendo ist; so kann der Quotient nicht grösser als 9 seyn. Sollte man 79 mit 8 dividiren, so kann 10 nicht der Quotient seyn, weil 10 mahl 8 schon 80 macht. Demnach findet man leicht mit Hülfe des Ein mahl Eins, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey. Die Zahl, welche dies angiebt, ist der Quotient, wofern sie mit dem Divisor multiplicirt ein Product giebt, das dem

Dividendo gleich ist. In einem solchen Fall sagt man, der Divisor gehe im Dividendo auf. Fände man ein Product, das grösser wäre als das Dividendum, so müste man die als Quotienten angenommene Zahl so lange um Eins vermindern, bis das Product eben so groß oder kleiner, als das Dividendum ausfiele. Im letzten Fall zieht man es vom Dividendo ab, und addirt zum Quotienten noch einen Bruch, dessen Zähler den Rest, der Nenner aber dem Divisor gleich ist, wie im nachstehenden Exempeln.

79			50		
8		$9\frac{7}{8}$	7		$7\frac{1}{7}$
72			49		
7			1		

2. Fall. Wenn der Divisor kleiner, oder eben so groß, als die höchste Ziffer im Dividendo, und die niedrigste Ziffer des letzten o ist; so suche man auf ähnliche Art, wie vorhin, wie vielmahl der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividendi enthalten ist, und setze zum Quotienten eine o. Ob das alsdenn schon der ganze Quotient sey, oder noch ein Theil hinzu komme, das prüft man eben so, wie vorhin.

3) 60			2) 70		
60		20	60		30
0			10		5
			2) 10		35
			10		
			0		

Im

Im letzten Exempel muste man auch den Rest 10 noch mit 2 dividiren, und was herauskam, zum vorigen Quotienten addiren. Bliebe zuletzt ein Rest, der kleiner als der Divisor wäre, so müste man noch einen Bruch zusetzen, wie in dem nebenstehenden Exempel.

3) 80 | 20
60 | $6\frac{2}{3}$
20 | $26\frac{2}{3}$
3) 18
2

3. Fall. Wenn auch bey eben den Bedingungen des vorigen Falles die letzte Ziffer nicht 0 wäre, so würde man doch den Quotienten auf ähnliche Art finden, wie folgende Exempel zeigen.

3) 65 | 20
60 | $1\frac{2}{3}$
3) 5 | $21\frac{2}{3}$
3
2

4) 75 | 10
40 | $8\frac{3}{4}$
4) 35 | $18\frac{3}{4}$
32
3

Zusatz.

37. In den beyden letzten Fällen erhält der Quotient zwo Ziffern, die man etwas kürzer findet, wenn man in jeder Columne für sich allein rechnet, und die zweyte Ziffer des Quotienten gleich zur Rechten neben der ersten setzt. Wenn übrigens auch das Dividendum noch mehr Ziffern hätte, so würde man die Theile des Quotienten nacheinander leicht eben so finden, wie im beygefügten Exempel.

3) 79368 | 26456
6....
19...
3) 18...
13..
3) 12..
16.
3) 15.
18
3) 18
0

Der 3. Lehrsatz.

38. Wenn man vor der Division das Dividendum und den Divisor mit einer und eben derselben Zahl multiplicirt oder dividirt; so findet man doch allemahl einerley Quotienten.

Beweis. Wenn 12 mit 4 dividirt 3 giebt, so muß 24 mit 4 dividirt nochmahl so viel, aber 24 mit 8 dividirt wieder nur halb so viel, also eben so viel, als anfangs geben. (20. 21 §.) Das heißt 12 × 2 mit 4 × 2 dividirt giebt eben so viel, als 12 mit 3 dividirt: mithin auch 24 : 8 eben so viel, als die Hälfte von 24 mit der Hälfte von 8 dividirt.

Der 1. Zusatz.

39. Wenn das Dividendum und der Divisor rechter Hand Nullen haben, so streiche man vor der Division gegen jede 0 im Divisor auch eine im Dividendo aus: das ändert den Quotienten nicht.

Der 2. Zusatz.

40. Den Zähler und Nenner eines Bruchs kann man mit einerley dritten Zahl multipliciren oder dividiren, ohne daß es den Werth des Bruchs ändert. (34 §.)

Die 6. Aufgabe.

41. Jede vorgelegte ganze Zahl mit einer kleinern ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. 1. Fall. Wenn beyde Zahlen gleich viele Ziffern haben, so suche man den Quotienten eben so, als wenn alle Ziffern, die ersten ausgenommen, Nullen wären: mache aber die Probe, wie oben 36 und 37 §; so zeigt sich gleich ob ein Rest bleibe oder nicht. Es versteht sich, daß dieser Rest kleiner als der Divisor

$$\begin{array}{r|l} 534 & \overset{2}{\smile} \\ 216 & 2\tfrac{102}{216}\,\big|\,\tfrac{51}{108} \\ 432 & \\ \hline 102 & \end{array}$$

visor seyn müsse, sonst hätte man den Quotienten zu klein genommen.

2. Fall. Wenn das Dividendum eine Ziffer mehr, als der Divisor hat, und der Divisor grösser ist, als eine Zahl, die aus den höchsten Ziffern im Dividendo allein bestünde, die niedrigste weggelassen; so suche man wiederum den Quotienten so, als wenn im Dividendo alle Ziffern bis auf die 2 höchsten, im Divisor aber bis auf die höchste allein Nullen wären: mache auch hiernächst die schon bekannte Probe, wie im beygefügten Exempel.

3847 | 9 40/423
423
3807
40

Wäre der Divisor eben so groß, oder kleiner als eine Zahl, die aus eben so vielen von den höchsten Ziffern im Dividendo allein genommen bestünde; so lasse man die letzte Ziffer im Dividendo anfangs weg, und rechne nach der ersten Regel. Zum Rest nehme man die letzte Ziffer des Dividendi, und wiederhohle dasselbe Verfahren, so findet man die zweyte Ziffer des Quotienten.

897342 | 34 2836/26309
26309.
78927.
108072
26309
105236
2836

7713 | 9 765/772
772
6948
765

3. Fall. Wenn gleich die Zahl der Ziffern im Dividendo die Zahl der Ziffern im Divisor um so viele, als man will, übertrift; so findet man doch leicht den Quotienten, wenn man die bisherigen Regeln, wie im nachstehenden Exempel anwendet.

78934

78934 | 2
278.. | 283 260/278 | 130/139
556.. |
2333. Allemahl muß der Rest
278. kleiner als der Divisor
2224. seyn.
1094
278
834
260

Der 1. Zusatz.

42. Wenn der Divisor 1 mit einer Reihe dran hängender Nullen ist, so schneide man im Dividendo rechter Hand vermittelst eines Strichs so viele Ziffern ab, als im Nenner Nullen sind: diese machen den Rest aus, und was linker Hand des Strichs bleibt, ist der Quotient, so weit er in ganzen Zahlen gefunden wird.

758|36947 | 758 36947/100000
100000)

Der 2. Zusatz.

43. Die Multiplication und Division dienen einander zur Probe, weil das Product mit dem einen Factor dividirt, den andern Factor zum Quotienten, und der Quotient mit dem Divisor multiplicirt das Dividendum weniger den zuletzt gebliebenen Rest geben muß.

Die 11. Erklärung.

44. Wenn einerley Zahl 7 in mehrern andern 14, 21, 28, u. s. f. zugleich aufgeht; so heißt sie ihr gemeines Maaß. Zahlen, die kein gemeines Maaß haben, heissen unter sich Primzahlen, und

und eine Zahl, die mit keiner andern, als mit sich selbst, und mit Eins aufgeht, heißt eine absolute Primzahl. Alle übrige nennt man zusammengesetzte Zahlen, weil man sie durch die Multiplication mehrerer Primzahlen in einander zusammensetzen kann.

Die 7. Aufgabe.

45. Es sind zwo Zahlen gegeben, man soll ihr gröstes gemeines Maaß finden.

Aufl. Man dividire die grössere Zahl mit der kleinern, so findet man, ob vielleicht die kleinere selbst das gesuchte Maaß sey. Wenn das nicht ist, so ist das Maaß des Restes und des Divisors zugleich ein Maaß des Dividendi. Demnach dividire man den Divisor mit dem Rest, ob derselbe vielleicht im Divisor aufgehet. Das Verfahren wiederhohle man, bis endlich ein Rest kommt, der im letzten Divisor aufgeht: eben derselbe ist das gesuchte gröste gemeine Maaß. Wenn 28 und 12 die Zahlen sind, so findet man das gröste Maaß 4. Bliebe endlich 1 zum Rest, so wären die Zahlen unter sich Primzahlen.

Der 1. Zusatz.

46. Wenn drey, vier und mehr Zahlen gegeben sind, so ordne man sie nach ihrer Grösse, und suche zuerst für die zwey kleinsten das gemeine Maaß; mit diesem Maaß nehme man die dritte zusammen, und suche für beyde ein gemeines Maaß, das wird auch in den beyden ersten Zahlen aufgehen. Für dies Maaß der ersten 3 Zahlen, und für die vierte suche man wieder ein Maaß, so geht dasselbe in allen vier Zahlen auf. Das Verfahren erstreckt sich eben so auch auf noch mehr Zahlen.

Der 2. Zusatz.

47. Wenn man beydes, Zähler und Nenner eines Bruchs mit ihrem grösten gemeinen Maaß dividirt; so erhält man einen eben so grossen Bruch, der durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Die 8. Aufgabe.

48. Zwo oder noch mehr Brüche, die ungleiche Nenner haben, in andre eben so grosse Brüche mit gleichen Nennern zu verwandeln.

Aufl. 1) Man suche zuförderst eine Zahl, welche die Eigenschaft hat, daß jeder von den gegebenen Nennern darin aufgeht. Ohne Zweifel hat das Product aller Nenner diese Eigenschaft: allein man findet auf folgende Art auch eine Zahl, die noch kleiner als jenes Product, ja unter mehrern möglichen die kleinste ist.

Man setze, daß $\frac{1}{8}\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}\frac{3}{3}$, $\frac{9}{4}\frac{0}{2}$ die gegebenen Brüche sind, und dividire, wie hier zur Seite alle Nenner mit ihrem gemeinen Maasse 21. Weil noch zwey unter den Quotienten das gemeine Maaß 2 haben, so setze man die Quotienten darunter, lasse aber 3 unverändert. Die gebrauchten Maasse, und die zuletzt herausgebrachten Zahlen multiplicire man in einander; so hat das Product 252 die verlangte Eigenschaft.

21)	84	63	42
2)	4	3	2
	2	3	1

$21 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 = 252.$

2) Nun schreibe man die Brüche, wie hier zur Seite unter einander, den Generalnenner oben, dividire ihn mit den Specialnennern, und setze die Quotienten 3, 4, 6, zur Seite daneben. Mit diesen

252		
$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$	3	33
$\frac{1}{6}\frac{3}{3}$	4	52
$\frac{9}{4}\frac{0}{2}$	6	54

diesen Quotienten multiplicire man die Zähler, so geben die Producte die Zähler der gesuchten Brüche.

Die 9. Aufgabe.

49. Zwey oder mehr Brüche zu addiren.

Aufl. Wofern sie nicht alle gleiche Nenner haben, so bringe man sie nach den vorigen §. auf gleiche Benennung: hiernächst addire man alle Zähler, und setze den gemeinen Nenner als Nenner unter der gefundenen Summe. Vielleicht wird das ein unächter Bruch: alsdenn kann man ihn durch die Division in eine gemischte Zahl verwandeln.

252

11/84	3	33
13/21	4	52
9/42	6	54
		139/42

Zusatz.

50. Eine vermischte Zahl wie $7\frac{3}{4}$ richtet man ein, wenn man die ganze Zahl mit dem Bruch in einen unächten Bruch zusammen ziehet. Es ist $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$.

Die 12. Erklärung.

51. Decimalbrüche heissen solche Brüche, die keine andre Nenner haben, als die Zahl 10, oder ein Product der Zahl 10, mit sich selbst, welches allemahl die 1 mit einer Reihe daran hängender Nullen ist.

Der 1. Zusatz.

52. Einen Decimalbruch wie $\frac{763}{1000}$ kann man mit Weglassung des Nenners so schreiben, daß man im Zähler von der Rechten gegen die Linke durch ein Comma so viele Ziffern abschneidet, als im Nenner Nullen sind. Alsdenn ist $\frac{763}{1000} = 7{,}63$. Hätte der Zähler nur eben so viele Ziffern, als im Nenner Nullen sind, so müste man noch eine Null mit dem Comma auf diese Art voransetzen, $\frac{63}{100} = 0{,}63$. Wenn im Nenner mehr Nullen wären, als im Zähler Ziffern

Ziffern sind, so müste man so viele Nullen voran setzen, bis man so viele Nullen und Ziffern zusammen hätte, als im Nenner Nullen sind, voran aber noch eine Null mit dem Comma auf diese Art $\frac{74}{100000} = 0{,}00074$.

Der 2. Zusatz.

53. Was nun vor dem Comma steht, ist eine ganze Zahl, was nach dem Comma folgt, ein ächter Decimalbruch, und die Ziffern nach dem Comma gehören zu verschiedenen abnehmenden Decimalordnungen. Es ist $25{,}8364 = \frac{258364}{10000} = 25\frac{8364}{10000}$ (42 §.) $= 25 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{4}{10000}$ (49 §.)

Der 3. Zusatz.

54. Zahlen mit Decimalbrüchen addirt man eben so, als wenn es ganze Zahlen wären: nur muß man alles recht unter einander schreiben, daß die Einer, bey welchen das Comma steht, in einer Columne unter einander kommen, so giebt sich alles übrige von selbst, wenn in der Summe das Comma in der Columne der Einer gesetzt wird.

87,3472
9,78649
382,503
479,63669

Die 10. Aufgabe.

55. **Einen kleinern Bruch vom grössern zu subtrahiren.**

Aufl. 1) Nachdem man beyde auf einerley Benennung gebracht hat, wenn sie nicht schon einerley Nenner hatten; subtrahirt man den kleinern Zähler vom grössern, und behält den gemeinen Nenner.

24

$\frac{5}{8}$	3	15
$\frac{7}{12}$	2	14

Rest $\frac{1}{24}$

2)

2) Wenn es eine Zahl mit Decimalbrüchen ist, so setzt man die kleinere unter der grössern, wie beym addiren, und subtrahirt, als wenn alles ganze Zahlen wären. Denn wirklich subtrahirt man so den kleinern Zähler vom grössern, und behält den gemeinen Nenner, wenn nur das Comma wieder in die Columne der Einer gesetzt wird.

34,37
8,5634
Rest 25,8066

Die 11. Aufgabe

56. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. 1) Man multiplicire den Zähler, und behalte den Nenner bey.

2) Wenn der Multiplicator im Nenner des Bruchs aufgeht, so dividire man ihn damit, und behalte den Zähler. Denn man macht den Bruch eben so vielmahl grösser, so vielmahl der Nenner kleiner wird. (34. 21 §.)

$\frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8}$

$\frac{7}{18} \times 2 = \frac{7}{9}$

3) Wenn das Multiplicandum ein Decimalbruch ist, so multiplicire man ohne Rücksicht auf das Comma, als wenn es eine ganze Zahl wäre, gebe aber dem Product so viele Decimalstellen, als das Multiplicandum hatte. Denn es ist $7{,}532 \times 8 = \frac{7532}{1000} \times 8 = \frac{7532 \times 8}{1000} = 60{,}256.$

Die 12. Aufgabe.

57. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. 1) Man dividire den Zähler mit dem Divisor, und behalte den Nenner.

2) Wenn die Division nicht aufgehen würde, so multiplicire man den Nenner mit dem Divisor, und behalte den Zähler. Denn

3) $\frac{15}{16} \mid 5 = \frac{15}{16}$

3) $\frac{17}{18} \mid 17 = \frac{17}{54}$

der Bruch wird eben so vielmahl kleiner gemacht, als man seinen Nenner grösser macht. (34. 21 §.)

3. Eine Zahl mit Decimalstellen dividirt man ohne Rücksicht auf das Comma, und giebt dem Quotienten so viele Decimalstellen, als das Dividendum hat. Denn es ist $58{,}608 : 8 = \frac{58608}{1000} : 8 = \frac{7326}{1000} = 7{,}326$.

Zusatz.

58. Wenn bey dem Verfahren nach der ersten Regel die Division nicht aufgeht, so erhält man einen gebrochenen Bruch, der nach der zweyten Regel vermieden wird, aber bey dem Verfahren nach der dritten Regel nicht allemahl vermieden werden kann, wofern man den Quotienten in Decimaltheilen verlangt.

3) $\frac{17}{18} \mid 5\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{17}{18}$

7) $26{,}374 \mid 3{,}767\frac{5}{7000}$

Die 13. Aufgabe.

59. Statt eines gemeinen Bruches einen eben so grossen Decimalbruch zu finden.

Aufl. Man füge dem Zähler so viele Nullen bey, als man für gut findet, und dividire nun mit dem Nenner. Im Quotienten schneide man zur Rechten so viele Decimaltheile ab, als im Zähler Nullen beygefügt waren. Denn es ist $\frac{3}{4} = \frac{300}{100} : 4 = \frac{75}{100} = 0{,}75$.

Zusatz.

60. Man kann bey der niedrigsten Ziffer im Zähler ein Comma setzen, hiernächst so viele Nullen, als man gut findet, beyfügen, und alsdenn nach der drit-

dritten Regel des 57 §. rechnen. Es ist $\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4}$, $\frac{5}{8} = \frac{5,000}{8}$ u. s. f. Die Nullen kann man auch eine nach der andern dem Rest jedesmahl beyfügen, weil sie beym Rechnen ehe nicht gebraucht werden.

Die 13. Erklärung.

61. Eine Grösse mit einem Bruch multiplici-ren heißt denjenigen Theil von ihr, welchen des Bruchs Nenner anzeigt, mit dem Zähler multipli-ciren. Eine Grösse aber mit einem Bruch dividi-ren heißt einen solchen Quotienten finden, der mit dem gebrochenen Divisor multiplicirt das Dividen-dum herstellt: es muß also derjenige Theil des Quo-tienten, den des Divisors Nenner anzeigt, im Di-videndo so vielmahl enthalten seyn, als Eins in des Divisors Nenner enthalten ist.

Der 1. Zusatz.

62. Mit einem Bruch dividiren heißt also nicht das Dividendum selbst, sondern ein multiplum da-von, welches des Bruchs Nenner anzeigt, mit dem Zähler dividiren. Wenn man die Zahl 6 mit $\frac{2}{3}$ dividiren soll, so wird eine Zahl gesucht, wovon der 3te Theil 2 mahl genommen 6 macht. Wird also 6 mit 2 dividirt, und 3 gefunden; so ist das noch nicht der Quotient, sondern sein 3ter Theil: folglich ist der Quotient 3mahl grösser, oder 3 mahl $3 = 9$. Demnach kann man gleich anfangs das Dividen-dum 3 mahl grösser machen, und das multiplum 18 mit 2 dividiren.

Der 2. Zusatz.

63. Eine ganze Zahl multiplicirt man mit einem Bruch, wenn man sie mit dem Zähler multiplicirt,

und das Product mit dem Nenner dividirt. Dagegen wird eine ganze Zahl mit einem Bruch dividirt, wenn man sie mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Zähler dividirt.

57 mult. $\frac{7}{8}$ — 8) 399 | $49\frac{7}{8}$ Prod.

29 div. $\frac{5}{8}$ — 5) 232 | $46\frac{2}{5}$ Quot.

Der 3. Zusatz.

64. Eine ganze Zahl und ein Bruch geben mit veränderter Ordnung einerley Product. (56. 26 §.) Wenn also das Multiplicandum eine ganze Zahl ist, und der Multiplicator Decimaltheile enthält, so findet die dritte Regel des 56 §. ihre Anwendung.

Der 4. Zusatz.

65. Wäre das Dividendum eine ganze Zahl, wenn der Divisor Decimaltheile hat, so setzt man zum Dividendo so viele Nullen zu, als Decimaltheile im Divisor sind, und dividirt nachher ohne Rücksicht auf das Comma. So ist $7 : 3{,}25 = 7 : \frac{325}{100} = 700 : 325$. (63 §.)

Die 14. Aufgabe.

66. Einen Bruch mit einem andern Bruch zu multipliciren.

Aufl. 1) Man multiplicire beyde Zähler und beyde Nenner in einander: jenes Product ist der Zähler, dieses aber der Nenner des gesuchten Bruchs. Es ist nemlich $\frac{23}{28} \times \frac{5}{9} = \frac{23}{28} : 9 \times 5$ (61 §.) $= \frac{23}{28 \times 9} \times 5$ (57 §.) $\frac{23 \times 5}{28 \times 9}$ (56 §.) $= \frac{115}{252}$.

2) Man

2) Man kann auch kreuzweise des Multiplicandi Zähler mit des Multiplicators Nenner, und des ersten Nenner mit des letztern Zähler dividiren. Denn es ist $\frac{27}{28} \times \frac{2}{3} = \frac{27}{28} : 3 \times 2$ (61 §.) $= \frac{27:3}{28} \times 2$ (57 §.) $= \frac{27:3}{28:2}$ (56 §.) $= \frac{9}{14}$. Wenn die Divisionen aufgehen, so giebt dies Verfahren kleinere Zahlen für den Bruch, als das Verfahren nach der ersten Regel.

3) Wenn eine von beyden Divisionen allein, die andre aber nicht aufgeht, so läßt man die Zahl, welche mit dem Divisor nicht aufgehen würde, unverändert, und multiplicirt was die Division der andern Zahl giebt mit derjenigen, womit man sonst die erste hätte dividiren müssen. Es ist nemlich $\frac{32}{37} \times \frac{7}{8}$ $= \frac{32}{37} : 8 \times 7$ (61 §.) $= \frac{32:8}{37} \times 7$ (57 §.) $= \frac{32:8 \times 7}{37}$ (56 §.) $= \frac{28}{37}$. Umgekehrt hat man $\frac{23}{36} \times \frac{6}{7} = \frac{23 \cdot 6}{36 \cdot 7}$ (nach 1.) $= \frac{6 \cdot 23}{36 \cdot 7}$ (26 §.) $= 6 \cdot \frac{23}{36 \cdot 7}$ (63 §.) $= 6 \cdot \frac{23}{6.6.7} = \frac{23}{6.6.7} \cdot 6$ (64 §.) $= \frac{23}{6.7} \cdot 6 : 6 = \frac{23}{6.7} \times 1 = \frac{23}{42}$.

4) Decimalbrüche multiplicirt man ohne Rücksicht auf das Comma so ineinander, als wenn es ganze Zahlen wären, giebt aber dem Product so viele Decimaltheile, als beyde Factoren zusammen enthalten.

Denn es ist $7,243 \times 3,17 = \frac{7243}{1000} \times \frac{317}{100} = \frac{7243 \times 317}{100000}$
$= 22,96031.$

Zusatz.

67. Zwey Brüche, also auch mehrere, geben mit veränderter Ordnung einerley Product. (26 §.)

Die 15. Aufgabe.

68. **Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.**

Aufl. 1) Man dividire des Dividendi Zähler mit des Divisors Zähler, und des Dividendi Nenner mit des Divisors Nenner. Der erste Quotient ist der Zähler, der andre aber der Nenner des gesuchten Bruchs. Denn man erhält $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = \frac{21}{32} \times 8 : 3$ (62 §.) $= \frac{21}{32 : 8} : 3$ (56 §.) $= \frac{21 : 3}{32 : 8}$ (57 §.) $= \frac{7}{4}$.

2) Wenn eine von beyden Divisionen nicht aufgeht; so lasse man die Zahl, welche mit dem Divisor nicht aufgehen würde, unverändert, und multiplicire, was die Division der andern Zahl giebt, mit derjenigen, womit man die erste hätte dividiren müssen. Man hat nemlich $\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = \frac{12}{17} \times 9 : 4$ (62 §.) $= \frac{12 \times 9}{17} : 4 = \frac{12 : 4 \times 9}{17} = \frac{27}{17}$.

3) Allemahl aber kann man kreuzweise des Dividendi Zähler mit des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner mit des Divisors Zähler multipliciren. Das erste Product ist der Zähler, das zweyte aber der Nenner des gesuchten Bruchs.

Denn

Denn es ist $\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \times 9 : 2$ (62 §.) $= \frac{3 \times 9}{4} : 2$ (56 §.) $= \frac{3 \times 9}{4 \times 2}$ (57. §.) $= \frac{27}{8}$.

4) Eine Zahl mit Decimalstellen dividirt man mit einer andern Zahl, die ebenfalls Decimalstellen enthält, ohne Rücksicht auf das Comma eben so, als wenn es ganze Zahlen wären, giebt aber nach geendigter Rechnung dem Quotienten rechter Hand soviele Decimalstellen, als übrig bleiben, wenn die Anzahl der Decimalstellen im Divisor von der Anzahl der Decimalstellen im Dividendo abgezogen wird.

Wäre noch ein Rest geblieben, so müste man noch wie sonst gewöhnlich einen Bruch zusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist mit so viel beygefügten Nullen, als der bis dahin gefundene Theil des Quotienten Decimalstellen erhält. Es ist nemlich $2{,}334 : 1{,}6 = \frac{2334}{1000} : \frac{16}{10} = \frac{2334 : 16}{1000 : 10}$ (1ste Regel) $= \frac{145\frac{14}{16}}{100} = 1{,}45\frac{14}{1600}$.

Hätte das Dividendum weniger Decimalstellen, als der Divisor, so kann man, sobald die Stelle der Einer festgesetzt ist, im Dividendo rechter Hand so viele Nullen, als man gut findet, beyfügen. Statt $8{,}7 : 2{,}324$ hat man auch $8{,}700 : 2{,}324 = 8700 : 2324$. (38 §.

Zusatz.

69. Wenn man die Division nach der im 60 §. gegebenen Anleitung fortsetzet; so geht zuweilen zuletzt alles auf, und man erhält den Quotienten völlig in Decimalstellen. So findet man im letzten Exempel $2{,}334 : 1{,}6 = 1{,}45875$. In andern Fällen

kann man doch die Rechnung in Decimalstellen so weit treiben, daß der noch fehlende Bruch kleiner wird, als jeder gegebene noch so kleine Bruch.

Anmerkung.

Ausser den gemeinen und Decimalbrüchen, giebt es noch sogenannte sechzigtheilige (Sexagesimal-) Brüche. Sie entstehen — wie schon der Nahme ergiebt — wenn ein Ganzes in 60 gleiche Theile getheilt wird, und ein solcher Theil des Ganzen wieder in eben so viel gleiche Theile u. s. f. Für den ersten Anfänger konnte hier nicht wohl mehr davon beigebracht werden. Sonst findet man diese Materie in der 1. Abtheil. des 2. Th. des Lehrbegriffs der Mathematik, 2. Aufl. S. 192—202. auch in *v Hauſens Element. Math. P. I. pag.* 77. und Hrn. Hofr. Käſtners Anfangsgr. der Arithmet. Geometrie und Trigonometrie, im 3. Kap. der Rechenk. weiter ausgeführt.

Die 14. Erklärung.

70. Ein Product aus zweyen gleich groſſen Factoren heißt die Quadratzahl, und ein Product aus drey gleich groſſen Factoren die Cubiczahl eines jeden von den Factoren. Jeder von den ersten beyden Factoren heißt die Quadratwurzel aus der Zahl, die beyde in einander multiplicirt hervorbringen, und jeder von den drey gleich groſſen Factoren wird die Cubicwurzel aus der Zahl genannt, die das Product dieser drey gleichen Factoren ausmacht. Wenn ein Product aus noch mehrern gleich groſſen Factoren entstanden ist, so heißt es überhaupt eine Potenz des mehrmahl nach einander mit sich selbst multiplicirten Factors.

Es sey a die Wurzel, so ist aa die Quadratzahl, und aaa die Cubiczahl. Statt deſſen schreibt man kürzer a^2, und a^3.

Der

Der 1. Zusatz.

71. Wenn die Wurzel rechter Hand Nullen hat, so ist die Quadratzahl gefunden, wenn man der Quadratzahl der Ziffern doppelt so viele Nullen, als in der Wurzel sind, beyfügt; die Cubiczahl aber, wenn man der Cubiczahl der Ziffern dreymahl so viele Nullen beyfügt, als die Wurzel enthält.

Der 2. Zusatz.

72. Wenn die Wurzel aus zweyen Theilen a und b besteht, so findet man $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ist also $a > b$, so erhält man $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Es sey nehmlich $a - b = d$, also $a = b + d$, so ist $a^2 = b^2 + 2bd + d^2$, mithin $a^2 + b^2 = 2b^2 + 2bd + d^2$, oder $a^2 + b^2 = 2b(b+d) + d^2$ also auch $a^2 + b^2 = 2ab + d^2$. Daraus folgt $a^2 - 2ab + b^2 = d^2 = (a-b)^2$.

Der 3. Zusatz.

73. Die Zahl der Ziffern, woraus die Quadratzahl bestehet, ist nie grösser, als die doppelte Anzahl der Ziffern der Wurzel: auch nicht kleiner, als die doppelte Zahl der Ziffern der Wurzel weniger Eins. Es ist z. E. $324 = 300 + 24$

$$324^2 = 90000 + 2 \cdot 300 \cdot 24 + 24^2.$$

Die kleinste von den Zahlen, welche sieben Ziffern haben, ist 1000000, davon ist 1000 die Quadratwurzel, also gewiß grösser als 324.

Der 4. Zusatz.

74. Wenn die Quadratzahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwey Ziffern getheilt wird, so besteht die Wurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen gemacht hat. Gesetzt, man hat drey

Classen: so kann die Wurzel nicht zwey Ziffern haben, weil sonst die Quadratzahl höchstens vier Ziffern, also nur 2 Classen hätte. In eben dem Fall kann auch die Wurzel nicht vier Ziffern haben, weil sonst die Quadratzahl wenigstens 7 Ziffern, also vier Classen hätte.

Der 5. Zusatz.

75. Wenn die Cubicwurzel aus zweyen Theilen bestehet, so findet man $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Der 6. Zusatz.

76. Die Zahl der Ziffern, woraus die Cubiczahl besteht, ist nie grösser, als die dreyfache Anzahl der Ziffern der Wurzel: auch nie kleiner, als diese dreyfache Anzahl der Ziffern der Wurzel weniger zwey. Es ist z. E. $324 = 300 + 24$, also $324^3 = 3000000 + 3 \cdot 300^2 \cdot 24 + 3 \cdot 300 \cdot 24^2 + 24^3$. Die kleinste von den Zahlen, welche 10 Ziffern haben, ist 1000000000, und die Cubicwurzel davon 1000 ist grösser, als 324.

Der 7. Zusatz.

77. Wenn die Cubiczahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von drey Ziffern getheilt wird, da dann für die höchste vielleicht nur eine oder zwo übrig bleiben; so besteht die Cubicwurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen gemacht hat. Der Beweis ist dem im 74 §. geführten ganz ähnlich.

Der 8. Zusatz.

78. Wenn die Summe zwoer Zahlen $a + b$ mit ihrer Differenz $a - b$ multiplicirt wird: so ist das Product der Differenz ihrer Quadratzahlen gleich. Es ist nemlich $(a + b)(a - b) = (a + b)a - (a + b)b$, und $(a+b)a = aa + ab$, $(a + b)b = ab + bb$; also $(a+b)(a-b) = aa - bb$.

Die

Die 16. Aufgabe.

79. Aus einer vorgelegten Zahl die Quadratwurzel zu finden.

Aufl. 1) Wenn die Quadratzahl nur zwo Ziffern hat, so ist ihre Wurzel nicht grösser als 9. Man findet sie leicht mit Hülfe des Ein mahl Eins, und wenn es keine vollkommene Quadratzahl ist, so nimmt man die Wurzel aus der nächstkleinern Quadratzahl, und notirt den Rest.

64	8	57	7
64		49	
0		8	

2) Hätte die Quadratzahl 3 oder 4 Ziffern, so kann man zwey Classen machen, (74 §.) und die Wurzel hat 2 Ziffern. Die Quadratzahl der ersten steckt in der höchsten Classe, (71 §.) und in dem Rest das doppelte Product aus dem ersten Theil in den zweyten nebst der Quadratzahl des zweyten Theils. (72 §.) Wie nun der zweyte Theil gefunden wird, zeigt das nachstehende Exempel.

$a^2 + 2ab + b^2 = 44|89$ | $60 = a$
$a^2 = 36|00$ | 7
$2ab + b^2 = 889$ | $67 = a + b$
$120)$
$2ab = 840$
$b^2 = 49$
$2ab + b^2 = 889$

3) Kommt die dritte Classe hinzu, so hat die Wurzel drey Ziffern. Die beyden höchsten Ziffern sucht man aus den beyden höchsten Classen der Quadrat-

dratzahl nach der 2ten Regel, und nimmt alsdenn die beyden höchsten Ziffern der Wurzel zusammen für den ersten Theil der Wurzel an, so läßt sich die 3te Ziffer als der zweyte Theil der Wurzel ansehen, und wie vorhin finden.

$$\begin{array}{rl|l} R^2+2Rr+r^2 = 45|42|76 & & R+r \\ R^2 = 44|89|00 & & 670+4 \\ \hline 2Rr+r^2 = |53|76 & & \\ 2R = 1340 & & \\ 2Rr = 5360 & & \\ r^2 = 16 & & \\ \hline 2Rr+r^2 = 5376 & & \end{array}$$

4) Kommt die vierte oder noch mehr Classen hinzu, so wird aus dem schon bekannten Theil der Wurzel die folgende Ziffer allemahl wieder auf eben die Art gefunden. Kleine Rechnungsvortheile dabey lassen sich am besten beym mündlichen Vortrage zeigen.

Der 1 Zusatz.

80. Wenn ein Rest bleibt, so muß derselbe kleiner seyn, als das duplum von der bis dahin gefundenen Wurzel um Eins vermehrt.

Der 2. Zusatz.

81. Die Quadratzahl eines Bruchs wird gefunden, wenn man die Quadratzahl des Zählers und des Nenners sucht: also wird umgekehrt die Quadratwurzel aus einem Bruch gefunden, wenn man die Quadratwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner sucht.

Der 3. Zusatz.

82. Wenn die Quadratzahl eine grade Zahl von Decimalstellen bey sich hat; (und das kann man allemahl

mahl durch Beyfügung einer Null zuwege bringen, wenn die Anzahl ungrade wäre) so sucht man die Quadratwurzel ohne Rücksicht auf das Comma, als wenn es eine ganze Zahl wäre, giebt aber der Wurzel halb so viele Decimalstellen, als die Quadratzahl hat. Bliebe ein Rest, so kann man demselben mehrere Nullen paarweise beyfügen, und die Wurzel in Decimaltheilen so genau als man will finden. Diesen Regeln gemäß erhält man

$\sqrt{2} = 1{,}41421356$ $\sqrt{6} = 2{,}4494897$
$\sqrt{3} = 1{,}7320507$ $\sqrt{7} = 2{,}64575131$
$\sqrt{5} = 2{,}2360679$ $\sqrt{10} = 3{,}162277660167$

Das Zeichen $\sqrt{\ }$, welches die Quadratwurzel aus der Zahl bezeichnet, der man es voransetzet, ist von dem Buchstaben *r* entstanden, welchen man sonst in eben der Absicht brauchte.

Anmerkung.

Vollständiger findet man diese Lehren in meinen Anfangsgründen der Mathematischen Wissenschaften im XI. Abschnitt der Rechenkunst.

Die 17. Aufgabe.

38. Aus einer vorgelegten Zahl die Cubicwurzel zu finden.

Aufl. 1) Wenn die Zahl nicht über 3 Ziffern hat, so ist die Wurzel nicht grösser als 9. Um sie desto leichter zu finden, kann man sich ein für allemahl die ersten 9 Cubiczahlen, wie folget, suchen.

Wurzeln.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cubiczahlen.

1 8 27 64 125 216 343 512 729

Wenn die vorgelegte Zahl keine vollkommene Cubiczahl ist, so nimmt man die Wurzel aus der nächstkleinern Cubiczahl, und notirt den Rest.

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 343 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 328 & 6 \\ 216 & \\ \hline 112 & \end{array}$$

2) Bestehet die vorgelegte Zahl aus 4, 5 bis 6 Ziffern, so kann man zwey Classen machen, (77 §.) und die Wurzel bestehet aus zwoen Ziffern. Die Cubikzahl der höchsten Ziffer steckt in der höchsten Classe, (71 §.) und in dem Rest die oben im 75 §. angezeigten dreyfachen Producte nebst der Cubiczahl des zweyten Theils. Wie nun aus dem ersten Theil der Wurzel der zweyte gefunden wird, siehet man aus dem nachstehenden Exempel.

$$\begin{array}{rl|l} (a+b)^3 = & 421\,|\,875 & a+b \\ a^3 = & 343\,|\,000 & 70+5 \\ \hline 3a^2b+3ab^2+b^3 = & 78875 & \\ 3a^2 = & 14700) & \\ 3a^2b = & 73500 & \\ 3ab^2 = & 5250 & \\ b^3 = & 125 & \\ 3a^2b+3ab^2+b^3 = & 78875 & \\ \hline \text{Rest} & 0 & \end{array}$$

3) Wenn die dritte Classe in der Cubiczahl dazu kommt, so hat die Wurzel 3 Ziffern. Aus den beyden höchsten Classen findet man die beyden höchsten Ziffern der Wurzel, wie vorhin, und nimmt hiernächst die beyden höchsten Ziffern der Wurzel zusammen für den ersten Theil der Wurzel an; so wird die dritte Ziffer der zweyte Theil, und man findet denselben durch ein ähnliches Verfahren wie vorhin.

(R+

$$
\begin{array}{rcl|l}
(R+r)^3 & = & 432|081|216 & R+r \\
R^3 & = & 421|875|000 & 750+6 \\
\hline
3R^2r+3Rr^2+r^3 & = & 10206216 & \\
3R^2 & = & 1687500) & \\
3R^2r & = & 10125000 & \\
3Rr^2 & = & 81000 & \\
r^3 & = & 216 & \\
\hline
3R^2r+3Rr^2+r^3 & = & 10206216 & \\
\hline
 & & \text{Rest } 0 &
\end{array}
$$

4) Wenn nun gleich die vierte, und noch mehr Classen hinzu kämen, so kann aus dem schon bekannten Theil der Wurzel die folgende Ziffer aufs neue eben so gefunden werden: dabey bleibt die Erörterung kleiner Rechnungsvortheile wiederum dem mündlichen Vortrage vorbehalten.

Der 1. Zusatz.

84. Wenn ein Rest bleibt, so muß derselbe kleiner seyn, als das triplum der Summe der gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl um Eins vermehrt.

Der 2 Zusatz.

85. Die Cubiczahl eines Bruchs wird gefunden, wenn man die Cubiczahl des Zählers und des Nenners macht: also wird umgekehrt die Cubicwurzel aus einem Bruch gefunden, wenn man die Cubicwurzel sowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner sucht.

Der 3. Zusatz.

86. Wenn an der Cubiczahl eine mit 3 theilbare Anzahl Decimalstellen hängt, oder im entgegengesetzten Fall durch Beyfügung einer oder zweyer Nullen eine mit 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen

zuwege

zuwege gebracht wird; so sucht man die Cubicwurzel ohne weitere Rücksicht auf das Comma, als wenn die Cubiczahl eine ganze Zahl wäre, giebt aber am Ende der Rechnung der Wurzel 3 mahl weniger Decimalstellen, als die Cubiczahl hatte. In dem Fall, wenn ein Rest bleibt, kann man demselben mehrmahl nacheinander, so oft man es gut findet, drey Nullen beyfügen, und die Cubicwurzel in Decimaltheilen so genau, als man will, finden. Nach diesen Regeln findet man $\sqrt[3]{2} = 1{,}259921$, da dann auch in andern Fällen das Zeichen $\sqrt[3]{}$ die Cubicwurzel aus der Zahl bezeichnet, der man es voran setzt.

Anmerkung.

Im XII. Abschnitt der Rechenkunst im ersten Bande meiner Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften findet man von diesem allen mehr Unterricht. Auch sind diese Lehren weiter ausgeführt, in dem Lehrbegriffe der gesammt. Mathem. 1. u. 2. Th. Greifswald 1781. u. 85; desgleichen in Hrn. Hofr. Käsners Anfangsgr. der Arithm. und Geom. 1. Th. 1. u. 2. Abtheil. Götting. 1774 und 1786.

Die 15. Erklärung.

87. Die Grösse einer Sache, wieweit sie aus Vergleichung mit der Grösse einer andern erkannt wird, heißt das Verhältniß der ersten Grösse gegen die zweyte. Dabey siehet man entweder nur auf den Unterscheid beyder Grössen, den man vermittelst der Subtraction findet: oder man siehet darauf, wie vielmahl eins in dem andern enthalten sey. Im ersten Fall heißt es ein arithmetisches, im zweyten Fall ein geometrisches Verhältniß. Die Differenz zweyer Grössen heißt auch der Nahme ihres Verhältnisses, der Quotient aber, welcher anzeigt, wie

wie vielmahl eins im andern enthalten sey, der Exponent des Verhältnisses. Gewöhnlich wird das geometrische Verhältniß verstanden, wenn vom Verhältnisse schlechthin die Rede ist.

Die 16. Erklärung.

88. Die Gleichheit zweyer Verhältnisse macht eine Proportion aus, die also entweder eine arithmetische oder eine geometrische Proportion seyn kann, nachdem die Verhältnisse beschaffen sind. Ist von einer Proportion schlechthin die Rede, so wird die geometrische Proportion verstanden. Der Ausdruck $7-4=11-8$ giebt ein Beyspiel von der arithmetischen, und der Ausdruck $28:7=48:12$ ein Beyspiel von der geometrischen Proportion.

Der 1. Zusatz.

89. Wenn A das zweyte Glied, D den Nahmen des Verhältnisses, B das vierte Glied bezeichnet; so ist $(A+D)-A=(B+D)-B$ der allgemeine Ausdruck für jede arithmetische Proportion. Wenn eben so m den Exponenten des Verhältnisses bezeichnet; so ist $mA:A=mB:B$ ein allgemeiner Ausdruck für jede geometrische Proportion.

Der 2. Zusatz.

90. Wenn man zwo Zahlen mit einer und eben derselben dritten Zahl multiplicirt oder dividirt; so verhalten sich im ersten Fall die Producte wie die Multiplicanda, im zweyten Fall die Quotienten wie die Dividenda. (38 §.)

Der 3. Zusatz.

91. Demnach kann man in der geometrischen Proportion $mA:A=mB:B$, wenn die Buchstaben A, B, m, Zahlen bedeuten, die mittlern Glieder

verwechseln, und es ist auch $mA : mB = A : B$ eine richtige Proportion. (90 §.) Daß der Satz auch für die arithmetische Proportion gelte, erhellet leicht aus dem allgemeinen Ausdruck $(A + D) - A = (B + D) - B$. (89 §.)

Die 17. Erklärung.

92. Eine stetige Proportion ist diejenige, worin die beyden mittlern Glieder gleich groß sind, und wenn auch noch mehr als drey Zahlen in einerley Verhältniß fortlaufen, so nennt man es eine Progreßion, die wiederum nach Verschiedenheit der Verhältnisse entweder arithmetisch oder geometrisch ist.

Der 4. Lehrsatz.

93. In der arithmetischen Proportion sind die Summen der äussern und mittlern Glieder, in der geometrischen aber die Producte der äussern und mittlern Glieder gleich groß.

Beweis. Wenn in dem allgemeinen Ausdruck $(A + D) - A = (B + D) - B$ das erste und vierte, imgleichen das zweyte und dritte summirt werden; so erhält man in beyden Fällen $A + D + B$. Wenn dagegen in dem Ausdruck $mA : A = mB : B$ das erste Glied mit dem vierten, und das zweyte mit dem dritten multiplicirt wird, so findet man $m \cdot A \cdot B$ ebenfalls in beyden Fällen.

Zusatz.

94. In der stetigen arithmetischen Proportion ist das doppelte mittelste Glied so groß, als die Summe des ersten und dritten, in der stetigen geometrischen Proportion aber die Quadratzahl des mittlern Gliedes so groß, als das Product des ersten mit dem dritten multiplicirt.

Der

Der 5. Lehrsatz.

95. Wenn zwo Summen, oder zwey Producte zwoer Zahlen gleich groß sind; so sind im ersten Fall die beyden Theile der einen Summe zwischen den beyden Theilen der andern mittlere arithmetische; im zweyten Fall aber die beyden Factoren des einen Products zwischen den beyden Factoren des andern mittlere geometrische Proportionalzahlen.

Beweis. Es sey $A+D=B+C$, so ist auch $A+D-B=C$, also ferner $A-B=C-D$. (12 §.) Es sey ferner $A.D=B.C$, so erhält man $\frac{A.D}{B}=C$, mithin ferner $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (20 §.) oder $A:B=C:D$.

Die 18. Aufgabe.

96. Zwischen zwoen gegebenen Zahlen die arithmetische oder geometrische mittlere Proportionalzahl zu finden.

Aufl. Die halbe Summe der beyden Zahlen ist die mittlere geometrische Proportionalzahl, und die mittlere arithmetische Proportionalzahl wird gefunden, wenn man aus dem Product beyder Zahlen ineinander die Quadratwurzel ausziehet. (93 §.)

Zusatz.

97. Wenn A, B, C, drey stetige arithmetische Proportionalzahlen sind, und D die Differenz der Glieder ist, so wird erfodert, daß $B=A+D$, $C=A+2D$ sey. Demnach ist $2D=C-A$, und $D=\frac{1}{2}(C-A)$, mithin auch $B=A+\frac{1}{2}(C-A)$, welches der gegebenen Auflösung gemäß $B=\frac{1}{2}(A+C)$ giebt.

Die 19. Aufgabe.

98. Es sind drey Zahlen gegeben: man soll zu ihnen die vierte arithmetische, oder auch die vierte geometrische Proportionalzahl finden.

Aufl. 1) Im ersten Fall addirt man die zweyte zur dritten, und subtrahirt von der Summe die erste Zahl. Denn aus der Proportion $A - B = C - D$ folgt $A + D = B + C$ (87 §.) also $D = B + C - A$.

2) Im zweyten Fall multiplicirt man die zweyte Zahl mit der dritten, und dividirt das Product mit der ersten Zahl. Denn aus der Proportion $A : B = C : D$ folgt $A \cdot D = B \cdot C$ (87 §.) mithin ferner $D = \frac{B \cdot C}{A}$.

Zusatz.

99. Wenn nur zwo Zahlen gegeben wären, und man sollte die dritte stetige Proportionalzahl finden; so würde man für die arithmetische Proportion von der doppelten zweyten Zahl die erste subtrahiren; für die geometrische Proportion aber die Quadratzahl der zweyten Zahl mit der ersten dividiren müssen.

Der 6. Lehrsatz.

100. Wenn man die halbe Differenz zwoer Grössen zu ihrer halben Summe addirt; so wird die grössere von beyden gefunden. Wenn man aber die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt, so findet man die kleinere.

Beweis. Wenn A und C diese Grössen sind, und $C > A$ ist, so ist $\frac{1}{2}(C + A)$ zwischen beyden die mittlere arithmetische Proportionalzahl, (96 §.) und die drey Zahlen A, $\frac{1}{2}(C + A)$, C, sind in stetiger arithmetischen Proportion. Ferner ist der Nahme

des

des Verhältnisses $= \frac{1}{2}(C - A)$, (97 §.) folglich $A = \frac{1}{2}(C + A) - \frac{1}{2}(C - A$, und $C = \frac{1}{2}(C+A) + \frac{1}{2}(C - A)$.

Allgemeine Anmerkungen, die practische Rechenkunst betreffend.

101. Eine genannte Zahl wird auf einen andern Nahmen gebracht, wenn man eine Zahl mit einem andern Nahmen sucht, die jedoch mit der vorigen noch einerley Werth hat, so wie 2 Thlr. mit 48 Groschen einerley Werth haben. Dabey muß man nur wissen, wie viele Stücke der kleinern Art Eins von der grössern Art ausmachen. Die Zahl, welche das angiebt, kann die Reductionszahl heissen. Soll alsdenn eine Zahl auf einen grössern Nahmen gebracht werden, so muß man mit der Reductionszahl dividiren, wie wenn man Groschen in Thaler verwandeln sollte: im Gegentheil muß man mit der Reductionszahl multipliciren, um eine genannte Zahl auf den kleinern Nahmen zu bringen.

102. Um genannte Zahlen zu addiren, schreibt man alles, was einerley Nahmen hat, in einerley Columne unter einander, man addirt hiernächst jede Columne für sich mit Beobachtung dessen, daß man in jeder Columne, wo es noch angehet, die Summe auf den nächstgrössern Nahmen bringt. Was unter diesem grössern Nahmen herauskommt, rechnet man zur folgenden Columne mit dem grössern Nahmen, und behält in jeder Columne nur den Rest mit dem kleinern Nahmen.

48 thlr.	21 gr.	9 Pf.
29 —	14 —	5 —
7 —	19 —	7 —
	$24)\overset{55}{48}$ 2 thlr.	$12)\overset{21}{}$ 1 gr.
86 thlr.	7 gr.	9 Pf.

103. Wenn man eine genannte unter mehrern Nahmen vorkommende Zahl mit einer ganzen Zahl multipliciren soll: so verhält man sich eben so, weil die Multiplication im Grunde nichts anders als eine verkürzte Addition ist.

7 Pfund	6 Unzen	5 Drachma
		× 9 ——
	16)$\frac{59}{48}$|3 Pf.	8)$\frac{45}{40}$|5 Unzen.
66 Pfund	11 Unzen	5 Dr.

104. Beym subtrahiren einer genannten Zahl von einer andern unter mehrern Nahmen kommt alles darauf an, daß man die Regel des Borgens richtig anwende. Wenn Eins aus der nächsthöhern Columne geborgt wird, so zeigt die Reductionszahl, wie vielmahl man statt dessen zur nächstniedrigern zurechnen müsse.

	15 Stund.	37 Minut.	8 Secund.
subtr.	11 —	59 —	14 —
Rest	3 Stund.	37 Minut.	54 Sec.

105. Eine unter mehrern Nahmen ausgedrückte genannte Zahl dividirt man mit einer ganzen Zahl am besten auf folgende Art. Man fängt mit der höchsten Columne an, was in jeder Columne übrig bleibt, bringt man auf den nächstkleinern Nahmen, und rechnet es alsdenn mit zur nächstkleinern Columne.

div. 5)	29 thlr.	17 gr.	11 Pf.	
	25	96	36	
	4 thlr.	113	47	
	24	5) 10	5) 45	5 thl. 22 gr. $9\frac{2}{5}$ Pf.
	96 gr.	3 gr.	2	
		12		
		36 Pf.		

106. Die Regel, nach welcher man die Aufgabe im 98 §. auflösen muß, wenn zu dreyen Zahlen eine vierte geometrische Proportionalzahl gesucht wird, heißt in der ausübenden Rechenkunst die Regel Detri. Man macht davon Anwendungen bey der Kauf- und Waarenrechnung, der Zinsenrechnung, der Gesellschafts-, Vermischungs- und Alligationsrechnung, und in sehr vielen andern Fällen mehr. Um in allen solchen Fällen vortheilhaft zu rechnen, muß man sich nur daran erinnern, daß man das

erste

erste und zweyte, oder auch das erste und dritte Glied, wenn beyde ein gemeines Maaß haben, vor Anwendung der Hauptregel damit dividiren könne, um kleinere Zahlen zu erhalten. Auch ist es ein Vortheil, wenn Brüche vorkommen, daß man sie vor Anwendung der Regel des 98 §. wegschaffe. Wenn nemlich im ersten Gliede ein Bruch ist, so multiplicirt man das erste und zweyte, oder auch das erste und dritte Glied mit dem Nenner dieses Bruchs. Enthält das zweyte Glied einen Bruch, so multiplicirt man dieses und das erste Glied mit dem Nenner desselben. Auch aus dem dritten Gliede schaft man einen etwa daselbst befindlichen Bruch weg, wenn man dieses und das erste Glied mit dem Nenner desselben multiplicirt.

107. Gewöhnlich ist bey den hieher gehörigen Aufgaben eine Zahl mit einer Frage verbunden, und sie heißt um deßwillen die Fragzahl. Ausserdem muß noch eine Zahl da seyn, die mit der Fragzahl von einerley Art ist, und eine dritte, die mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, wie in dem Exempel: 5 Pfund kosten 13 Thaler, wieviel also 14 Pfund? Nach gemeiner Art setzt man die Zahlen in eben dieser Ordnung so an:

5 Pfund — 13 Thaler — 14 Pfund?

nach der Theorie müßte der Ansatz eigentlich so stehen:

5 Pf. : 14 Pf. = 13 Thalr : ges. Zahl.

Weil aber während der Rechnung die Zahlen als ungenannte Zahlen behandelt werden, und bey Anwendung der Regel des 98 §. auf den einen oder den andern Ansatz allemahl einerley gefunden wird; so kann man auch bey der gemeinen Art des Ansatzes bleiben.

108. Alle Reductionen der mancherley Maasse und Gewichte auf andres Maaß und Gewicht gehören hieher, und sie sind dem Mathematiker vorzüglich interessant. Man hat dabey Vergleichungstafeln nöthig, weil man sonst die Reductionszahl nicht wissen kann, und ich habe in den Anfangsgründen der Mathematischen Wissenschaften im I. Bande im XV. Abschnitt der Rechenk. von dem allen vollständige Nachrichten mitgetheilt. Die Reductionszahl muß angeben, wie viel Stücke unter dem einen Nahmen Eins unter dem andern Nahmen ausmachen. Wenn diese ein Bruch ist, so leitet man leicht einen

Ausdruck daraus her, der es angiebt, wie viele Stücke man unter jedem Nahmen nehmen muß, um am Werth gleich viel zu erhalten. Weiß man, es sey 1 Hamb. Elle $= \frac{5}{6}$ Brab. Ellen, so weiß man auch, es sey 6 Hamb. Ellen $=$ 5 Brab. Ellen, und letzteres ist der Reductionssatz. Frägt man nun 37 Brab. Ellen wie viel sinds Hamb. Ellen? so ist der Ansatz:

5 Brab. — 6 Hamb. Ell. — 37 Br. Ell.?

Der Pariser Fuß wird wie der Rheinländische in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien getheilt, die Linie aber nicht in 12 Scrupel, wie die Rheinländische, sondern in 10 Points, die im deutschen auch wohl am besten Pariser Scrupel nicht eben Puncte heissen mögten. Die Länge des Rheinl. Fusses beträgt nur 1391,3 Pariser so genannte Puncte, der gemeine Londner Fuß 1350 oder nach einer genauern Bestimmung 1351,67.

109. Aus der Natur der Rechnungsfrage selbst muß es überdem beurtheilet werden, ob die gesuchte Zahl grösser herauskommen müsse, wenn die Fragzahl grösser angenommen wird, oder ob im Gegentheil die gesuchte Zahl kleiner herauskommen müsse, wenn die Fragzahl grösser angenommen wird. Mehr Waare kostet mehr Geld, und weniger Waare weniger Geld. Wenn aber einerley Arbeit in kürzerer Zeit zu Stande kommen soll, so muß man mehr Leute haben; und wenn man längere Zeit darauf wenden kann, so braucht man weniger Leute. In Fällen dieser Art muß man die drey gegebenen Zahlen in umgekehrter Ordnung ansetzen, die Fragzahl voran, und was mit ihr von einerley Art ist, in die dritte Stelle, wenn man die Regel des 98 §., so wie sie da lautet, anwenden will. Gesetzt, zu einem Zimmer werden 160 Ellen Tapete à $\frac{5}{4}$ Ellen Breite erfodert: wie viel Ellen hätte man nöthig von $\frac{3}{4}$ Ellen Breite? Der Ansatz wäre

$\frac{3}{4}$ Ell. Br.? 160 Ell. Länge — $\frac{5}{4}$ Ell. Br.

110. Bey Handlungsgesellschaften gewinnet oder verlieret derjenige doppelt so viel, der doppelt so viel Capital eingelegt hat, also wird der Gewinst oder Verlust leicht nach der Regel Detri berechnet, wie das nachstehende Exempel bezeiget.

Zu-

Zuschuß		12	Der Gewinst ist 5000 thlr.
des 1sten	960ø thlr.	8	Also legt zu 20 Thaler
des 2ten	600ø	5	der erste 8, der zweyte
des 3ten	480ø	4	5, der dritte 4, der
des 4ten	360ø	3	vierte 3 Thaler.
	Summe	20	

und man findet nach der Regel Detri den

Gewinst des 1sten	2000 thlr.
des 2ten	1250 —
des 3ten	1000 —
des 4ten	750 —
Summe	5000

111. Bey Vermischung solcher Sachen, die verschiedene Werthe haben, läßt sich eine Sache von mittlern Werth zuwege bringen, wie wenn man Weine von verschiedener Güte, Silber von verschiedener Feine mit einander vermischt. Wenn der Mittelpreiß bestimmt ist, so kann man finden, wie viel dem Maaß oder Gewicht nach von jeder Art in die Mischung kommen müsse. Gesetzt, man soll 10 löthiges mit 15 löthigem Silber zusammen schmelzen, um 13 löthiges zu erhalten: so würde man auf jede Mark 10 löthig Silber, die man in den Tiegel setzte, 3 Loth fein Silber zu wenig haben: auf jede Mark 15 löthiges aber hätte man 2 Loth fein Silber zuviel. Was dem 10 löthigen fehlt, muß das 15 löthige ersetzen, so daß auf jede Mark 13 Loth fein kommen: was also durch Zusetzung des 15 löthigen zuviel genommen wird, muß grade soviel betragen, als was durch Zusetzung des 10 löthigen zu wenig genommen wird.

Man setze, es wären m Mk. 15 löthig und n Mk. 10 löthiges Silber genommen worden; so wird erfodert, daß m mahl 2 Loth $=$ n mahl 3 Loth sey, also $m : n = 3 : 2$ (95 §.) Also läßt sich das Exempel so ansetzen:

	vorräthig	auf
man verlangt 13 löthig)	15 löthig	3 Mk. 15 löthig kommen
	10 löthig	2 Mk. 10 löthig.

Probe

3 Mk.	15 löthig	thun	45 Lt. fein
2 Mk.	10 löthig	—	20 Lt. fein
5 Mk.	des mixti	—	65 Lt. fein
also 1 Mk.	des mixti	—	$\frac{65}{5}$ = 13 Lt. fein.

Diese Rechnungsregel heißt eigentlich die Alligations-regel.

112. Exempel, die mehr als eine Fragzahl enthalten, gehören zur zusammengesetzten Regel Detri. Anstatt daß man eigentlich die Regel Detri mehr als einmahl, so vielmahl nemlich als Fragzahlen da sind, anbringen müßte, ziehet man sie in einen verkürzten Ansatz zusammen. Sind zwo Fragzahlen in der Aufgabe vorhanden, so müssen zwey andre Zahlen, die damit von einerley Art sind, in der Aufgabe vorkommen, und überdem eine fünfte Zahl, die mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist. Daher ist der Nahme Regel quinque entstanden, wohin die folgende Aufgabe gehört:

100 thlr. geben wieviel 51 thlr?
in 12 Monath 6 thlr Zinse in 7 Monath?

Die Producte der beyden Zahlen in der ersten und dritten Columne machen mit der Zahl in der mittlern Stelle drey Zahlen aus, womit man nach der Regel des 98 §. umgehen kann, um das Facit zu finden.

113. Es giebt noch eine Art hieher gehöriger Rechnungsfragen, die zwar nur eine Fragzahl enthalten, aber mehrere Verhältnisse, die gleichsam kettenweise unter einander verbunden sind. Es liegen ebenfalls mehrere Proportionen in einer solchen Aufgabe zum Grunde, welche sich unter dem Nahmen der Regel multipler oder Kettenregel in einen einzigen Ansatz vortheilhaft zusammen ziehen lassen. Eine Probe davon giebt folgende Rechnungsfrage, die hier sogleich im Ansatz hergesetzt ist:

Wieviel thlr.?		kosten	17 Brab. Ellen
wenn 5 Brab. Ellen		gleich sind	6 Danz Ellen
und 7 Danz. Ellen		kosten	8 fl.
und 3 fl.		gleich sind	2 thlr.

Auffer

Ausser einigen dabey in acht zu nehmenden Rechnungsvortheilen, die darauf ankommen, daß man Zahlen, die in der ersten und zweyten Columne ein gemeines Maaß haben, gegen einander verkleinert, auch wohl nach der aus dem 106 §. schon bekannte Regel die etwa vorkommenden Brüche wegschaft, kommt das übrige darauf an. Man multiplicire in jeder Columne alle darin befindliche Zahlen ineinander, und dividire hiernächst das Product aller Zahlen in der Columne zur Rechten mit dem Product aller Zahlen in der zur Linken geschriebene Columne, so hat man das gesuchte Facit. Vollständigere Ausführungen von diesem allen findet man im 1sten Bande meiner Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften im XVI. Abschnitt der Rechenkunst, und im 2ten Theile meines Lehrbegriffs der gesammten Mathematik, im XII. Abschnitt der Rechenkunst, woselbst auch in den folgenden Abschnitten noch mehr Anwendungen davon gemacht werden. Sonst noch in F. C. L. Karstens Rechenkunst, 2te Aufl. Bützow und Wismar 1786. und in J. Fr. Lempe's bergmännischem Rechenbuche, Freyberg 1787. Beide Bücher sind sehr reichhaltig an brauchbaren Anwendungen, und in dieser Absicht nuzt auch das zulezt genannte Jedem der auch nicht grade Bergmann ist.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Ein Raum, der nach allen Seiten ausgedehnt, doch aber in gewissen Gränzen eingeschlossen ist, heißt ein geometrischer Körper; was ihn aber

aber von allen Seiten, als die äusserste Gränze umgiebt, nennt man seine Oberfläche.

Die 2. Erklärung.

2. Eine Ausdehnung in die Länge heißt eine Linie, und was an jeder Seite die Linie als das äusserste Ende begränzt, heißt hier ein Punct.

Anmerkung.

Ein Strich mit Dinte oder sonst etwas dergleichen auf dem Papier gemacht, bildet eine Linie ab, ein Tüpfelchen bildet einen Punct ab: weil man nur die Länge des Strichs in Betrachtung zieht, auch das Tüpfelchen so betrachtet, als wenn es gar nicht ausgedehnt wäre. Der Punct ist nur die Stelle, wo eine Linie anfängt oder aufhört.

Die 3. Erklärung.

3. Eine grade Linie ist, deren Theile sich alle nach einerley Richtung erstrecken: eine krumme Linie aber ist eine solche, die gar keine gradlinichte Theile hat.

Der 1. Foderungssatz.

4. Man kann von jedem Punct bis zu einem andern gegebenen Punct in Gedanken eine grade Linie ziehen, und selbige nach jeder Seite, soweit es jedesmal nöthig ist, über ihren Endpunct hinaus, oder auch rückwärts über ihren Anfangspunct hinaus verlängern.

Die 4. Erklärung.

5. Eine Fläche ist eben, wenn jede grade Linie, die man zwischen zweenen in dieser Fläche liegenden Puncten ziehen kann, ganz in dieser Fläche liegt: eine krumme Fläche ist, die gar keine ebene Theile hat.

Zusatz.

6. Auf dieser Eigenschaft einer Ebene beruhet die Art, wie man auf einem ebenen Tische oder Reißbrette

brette vermittelst des Lineals grade Striche als Bilder grader Linien ziehen kann.

Der 1. Grundsatz.

7. Wenn durch zwey Puncte C und D eine grade Linie AB gezogen ist; so kann man durch dieselben Puncte nicht noch eine andre grade Linie ziehen, die von der vorigen der Lage nach verschieden wäre. 1 Fig.

Zusatz.

8. Dieserwegen können zwo grade Linien AB und CD einander nur in einem Punct E, nicht in mehrern schneiden. 2 Fig.

Die 5. Erklärung.

9. Zwo grade Linien AB, AC, die von einerley Anfangspunct A nach verschiedenen Richtungen laufen, schliessen einen gradlinichten Winkel ein. Die graden Linien selbst nennt man die Seiten, oder die Schenkel des Winkels, ihren gemeinschaftlichen Anfangspunct aber des Winkels Spitze, oder Scheitel. Wenn in der Figur an des Winkels Spitze ein Buchstab, und an jedem Schenkel ebenfalls ein Buchstab, zur Bezeichnung gesetzt ist; so nennt man, wenn von dem Winkel die Rede ist, die drey Buchstaben in der Ordnung, daß der, welcher die Spitze bezeichnet, in der Mitte stehe, oder auch bloß den an der Spitze, wenn sonst kein Mißverstand daraus zu befürchten ist. 3 Fig.

Die 6. Erklärung.

10. Wenn ein Schenkel AB des Winkels BAC über die Spitze A hinaus nach D verlängert wird, so heißt CAD des Winkels BAC Nebenwinkel. Ein Winkel, der eben so groß ist, als sein Nebenwinkel, heißt ein rechter Winkel, und eine grade Linie AC steht auf der andern BD senkrecht, wenn sie mit 4 Fig.

mit ihr gleich grosse Nebenwinkel macht. Winkel, die keine rechte Winkel sind, heissen schiefe Winkel, und eine grade Linie wie AE steht schief auf der andern BD, wenn sie mit ihr ungleiche Nebenwinkel macht.

Die 7. Erklärung.

11. Ausgedehnte Grössen passen auf- oder ineinander, wenn man sie so aneinander legen, oder ineinander hineinschieben kann, (wie etwa ein Buch ins Futteral), daß die Gränzen der einen mit den Gränzen der andern zusammen fallen.

Der 2. Grundsatz.

12. Ausgedehnte Grössen, die auf- und ineinander passen, sind gleich groß.

Der 3. Grundsatz.

13. Wenn grade Linien und gradlinichte Winkel nicht aufeinander passen, so sind sie ungleich groß: gleich grosse grade Linien, und gleich grosse Winkel passen also aufeinander.

Der 1. Lehrsatz.

14. Alle rechte Winkel sind gleich groß.

5 Fig. Beweis. Wenn BAC ein rechter Winkel ist, so hat man BAC = CAD. (10 §.) Durch A sey noch eine grade Linie AE gezogen, und BAE ebenfalls ein rechter Winkel; so muß AE mit AC zusammen fallen, und BAE = BAC seyn. Denn widrigenfalls wäre BAE = EAD, (10 §.) und überdem ist BAE > BAC; mithin wäre auch EAD > BAC. Ferner ist BAC = CAD, also wäre FAD > CAD gegen den 4 §. der Rechenkunst.

Der 1. Zusatz.

15. Durch einerley Punct A kann man nicht zwey verschiedene grade Linien AC, AE, auf einerley dritte BD senkrecht setzen.

Der

Der 2 Zusatz.

16. Man kann den rechten Winkel als das Maaß brauchen, um alle andre Winkel damit zu vergleichen, und man hat einen bestimmten Begriff davon, wie groß ein Winkel sey, wenn man weiß, er macht $\frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{4}$ vom rechten Winkel aus, u. s. f. Um das desto kürzer auszudrücken, kann der Buchstab R ein für allemahl den rechten Winkel bezeichnen.

Der 2 Lehrsatz.

17. Die Summe zweyer Nebenwinkel $BAE + EAD$ auf einer graden Linie BD macht zwey rechte Winkel aus.

Beweis. Durch A kann auch AC auf BD senkrecht gezogen werden: alsdenn ist $BAC + CAD = 2R$, also auch $BAE + EAC + CAD$, oder $BAE + EAD = 2R$. 4Fig.

Zusatz.

18. Wenn zwey Winkel BAE und EAD, die eine gemeinschaftliche Spitze A und einen gemeinschaftlichen Schenkel AE haben, zwey rechte Winkel ausmachen, so liegen die äussern Schenkel AB und AD in grader Linie. Widrigenfalls müste man BA so nach F verlängern können, daß AF nicht mit AD zusammen fiele. Alsdenn wäre $BAE + EAF = 2R$, (17 §.) und $BAE + EAD = 2R$: mithin $BAE + EAF = BAE + EAD$, (5 §. R.) also auch $EAF = EAD$, (12 §. R.) gegen den 4 §. der Rechenk.

Die 8. Erklärung.

19. Jeder schiefe Winkel ist entweder kleiner oder grösser, als ein rechter Winkel: im ersten Fall heißt er ein spitzer, und im zweyten Fall ein stumpfer Winkel. Ein Winkel wie EAC, der mit einem spitzen Winkel BAE zusammen genommen einen rechten 4Fig.

ten Winkel ausmache, heißt des spitzen Winkels **Ergänzung zum rechten Winkel**: auch ist von zweenen Nebenwinkeln BAE und EAD allemahl der eine des andern **Ergänzung zu zweenen rechten Winkeln**.

Der 3. Lehrsatz.

2 Fig. 20. **Wenn zwey grade Linien** *AB* **und** *CD* **einander in dem Punct** *E* **schneiden; so sind die entgegengesetzten Scheitelwinkel** *AEC* **und** *BED* **gleich groß.**

Auch umgekehrt: wenn *AB* **eine grade Linie ist, und** *AEC* = *BED* **gemacht wird; so liegen** *EC* **und** *ED* **in grader Linie.**

Beweis. 1. Weil AEC + CEB = 2R, und eben so CEB + BED = 2R, (17 §.) so ist AEC + CEB = CEB + BED, (5 §. R.) also auch AEC = BED. (12 §. R.)

2. Weil AED + DEB = 2R ist, (17 §.) und DEB = AEC; so wird auch AED + AEC = 2R: folglich liegt EC mit ED in grader Linie. (18 §.)

Die 9. Erklärung.

21. **Eine ebene von allen Seiten durch Linien begränzte Fläche heißt eine ebene Figur, oder auch hier schlechthin eine Figur.**

Die 10. Erklärung.

22. a. **Die Seitenlinien der Figur können grade oder krumme Linien, oder beides untereinander seyn: daher entspringt der generische Unterschied, der gradlinichten, krummlinichten und vermischtlinichten Figuren.** Dann aber

b. **erhalten die Figuren spezielle Nahmen von der Anzahl ihrer Seitenlinien, oder auch ihrer Winkel, weil jede Figur, wofern sie nicht etwa von einer ein-**

zigen

zigen krummen Linie umschlossen ist, so viele Winkel als Seitenlinien hat. Gradlinichte Dreyecke und Vierecke nennt man hier Kürze halber schlechthin Dreyecke, oder Vierecke: die übrigen Figuren heissen überhaupt Vielecke, oder Polygone. Ein Dreyeck insbesondre heißt gleichschenklicht, wenn es zwey gleich grosse Seiten hat, und gleichseitig, wenn alle drey Seiten gleich groß sind.

Der 1. Zusatz.

23a. Wenn man zwischen den Endpuncten B, C, der beyden Schenkel AB, AC, eines Winkels BAC die grade Linie BC ziehet; (12 Fig.) so erhält man ein Dreyeck; und wenn beyde Schenkel AB, AC, gleich lang sind, so wird es ein gleichschenklichtes Dreyeck.

Der 2. Zusatz.

23b. Eine grade Linie, die durch einen Punct innerhalb der Fläche einer Figur läuft, schneidet, wenn sie gehörig verlängert wird, den Umfang der Figur wenigstens in zweenen Puncten. Wenn also eine solche grade Linie innerhalb der Fläche eines Dreyecks durch die Spitze eines Winkels läuft, so schneidet sie verlängert auch die gegenüberstehende Seite. (8 §.) Auch wenn die Peripherie einer Figur zum Theil innerhalb der Gränzen einer andern Figur fällt, so schneiden beyde Peripherien einander wenigstens in zweenen Puncten.

Der 4. Grundsatz.

24. Die grade Linie zwischen zweenen Puncten ist kürzer als jede andre, die man zwischen eben den Puncten ziehen kann. Sind zwischen eben den Endpuncten mehr andre krumme oder gebrochene Linien gezogen, die insgesamt gegen

die grade Linie zu hohl sind, und einander nicht schneiden; so sind sie desto grösser, je weiter sie sich von der graden Linie ablenken.

Zusatz.

15 Fig. 25. Demnach sind jede zwo Seitenlinien AC + BC im gradlinichten Dreyeck ABC zusammen genommen grösser, als die dritte Seitenlinie AB. Wenn ferner die Spitze F eines Dreyecks AFB innerhalb der Fläche eines andern ACB liegt, das über derselben Grundlinie AB steht, so ist AC + BC > AF + BF.

Die 11. Erklärung.

26. Die Entfernung eines Orts vom andern ist der kürzeste Weg, den man nehmen kann, um von dem einen Ort bis zum andern zu kommen.

Zusatz.

27. Die Entfernung eines Puncts vom andern ist also die gerade Linie zwischen beyden Puncten. (24 §.)

Die 12. Erklärung.

6 Fig. 28. Die Kreislinie ADBE ist eine krumme um einen gewissen Punct C in einer Ebene so beschriebene Linie, daß alle in ihr befindliche Puncte von jenem Punct C, der ihr Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt sind. Die von der Kreislinie umschlossene Figur heißt die Kreisfläche, auch wohl schlechthin der Kreis, und die Kreislinie nennt man alsdenn die Peripherie des Kreises. Jedes Stück dieser Peripherie, wie AFD, nennt man einen Kreisbogen, und die grade Linie AD zwischen den Endpuncten des Bogens die dazu gehörige Sehne.

Die 13. Erklärung.

6 u. 7 Fig. 29. Halbmesser des Kreises heissen die graden Linien CA, CB, welche vom Mittelpunct C bis an den

den Umfang laufen, und jede Sehne des Kreises, wie AB in der 6 Figur, die durch den Mittelpunct läuft, heißt des Kreises Durchmesser.

Der 1. Zusatz.

30. Der Durchmesser kann die Peripherie des Kreises nur in zweenen Puncten und zwar so schneiden, daß der Mittelpunct zwischen jenen beyden Puncten liegt.

Der 2. Zusatz.

31. Alle Halbmesser des Kreises sind gleich groß, (28 §.) mithin auch alle Durchmesser: denn jeder Durchmesser ist doppelt so groß, als des Kreises Halbmesser.

Die 14. Erklärung.

32. Das Stück ACBD der Kreisfläche zwischen dem Bogen ADB und den Halbmessern, CA, CB, welche in die Endpuncte des Bogen laufen, nennt man einen Ausschnitt, das Stück EFG aber zwischen der Sehne EF und ihrem Bogen EGF, einen Abschnitt des Kreises. 7Fig.

Zusatz.

33. Der Durchmesser AB theilt den Kreis in zwey gleich grosse Abschnitte, und die Peripherie in gleiche Bogen ADB, AEB, welche Halbkreise heissen. 6Fig.

Der 2. Forderungssatz.

34. Wenn auf einer Ebene ein Punct, und die Grösse des Halbmessers gegeben ist; so kann man die Kreislinie in der Ebene verzeichnen.

Zusatz.

35. Wenn also in einer graden Linie AB ein Punct C gegeben ist, so kann man auf derselben vermittelst des Kreises ein Stück CB oder CA abschneiden, das so groß ist; als eine andre gegebene grade Linie. Dar- 6Fig.

aus erhellet zugleich, wie es möglich sey, ein gleichschenklichtes Dreyeck zu zeichnen. (22 §.)

Anmerkung.

36. Bey Zeichnungen auf dem Papier dient das unter dem Nahmen des Cirkels bekannte Instrument zur Verzeichnung der Kreislinie.

Der 5. Grundsatz.

37. Kreislinien und Kreisflächen sind gleich groß, wenn ihre Halbmesser gleich groß sind: denn sie passen auf einander, wenn die Mittelpuncte auf einander liegen. (12 §.)

Der 1. Zusatz.

6 u. 7 Fig. 38. Nicht allein Kreisausschnitte ACEG, ACBD, die zu Kreisen von gleichen Halbmessern gehören, und gleiche Winkel am Mittelpunct haben, sondern auch ihre Bogen AGE, ADB, sind gleich groß.

Der 2. Zusatz.

39. Wenn die Winkel am Mittelpunct in Ausschnitten gleicher Kreise ungleich sind, so sind auch die Ausschnitte und ihre Bogen ungleich groß.

Der 3. Zusatz.

40. Zu gleich grossen Bogen solcher Kreise, die gleiche Halbmesser haben, und zu gleich grossen Sectoren eben solcher Kreise, gehören demnach gleiche Winkel am Mittelpunct.

Der 4. Zusatz.

8 Fig. 41. Zwey Durchmesser AB, DE, die auf einander senkrecht stehen, theilen die Kreisfläche in vier gleiche Sectoren, und die Peripherie in vier gleiche Bogen, welche Quadranten heissen.

Der 5. Zusatz.

9 Fig. 42. Aus der Spitze C eines jeden Winkels ACB kann man mit jedem willkührlich gewählten Halbmesser zwischen seinen Schenkeln einen Bogen DFE beschrei-

beschreiben. Das wird ein Quadrant, wenn der Winkel ein rechter Winkel ist: eben der Bogen ist grösser oder kleiner als ein Quadrant, wenn der Winkel grösser oder kleiner ist, als ein rechter Winkel.

Der 6. Zusatz.

43. Kann man den Winkel ACB vermittelst der Theilungslinien CF, CG, in gleich grosse Theile eintheilen, so theilen sie zugleich den Bogen bey F, G, in eben so viele gleiche Theile. Umgekehrt, wenn der Bogen DE bey F, G, in gleiche Theile getheilt wäre, so würden die graden Linien CF, CG, den Winkel ACB in eben so viele gleiche Theile eintheilen. 9 Fig.

Die 15. Erklärung.

44. Der 90ste Theil des Quadranten, mithin der 360ste Theil der Peripherie eines Kreises, heißt ein **Grad von der Peripherie**, und der 90ste Theil vom rechten Winkel wird ebenfalls ein **Grad des rechten Winkels** genannt.

Zusatz.

45. Ein rechter Winkel fasset also 90 Grade, und jeder andre Winkel fasset eben so viele Grade des rechten Winkels, als der Bogen zwischen seinen Schenkeln Grade des Quadranten, oder der Peripherie, enthält.

Die 16. Erklärung.

46. Die Grösse einer Sache ausmessen, heißt untersuchen, wie vielmahl eine andre bekannte Grösse von eben der Art, welche man das **Maaß** nennt, in der auszumessenden Grösse enthalten sey. Oft läßt sich das nicht durch eine ganze Zahl angeben: alsdenn theilt man das Maaß selbst in gleiche Theile, und sucht wie vielmahl ein solcher Theil in der zu mes-

senden Grösse enthalten sey. Ihre Grösse läßt sich alsdenn wenigstens durch einen Bruch ausdrücken.

Der 1. Zusatz.

47. Wenn man weiß, daß ein Winkel eine gewisse Anzahl von Graden fasse, so kennt man seine Grösse, und der rechte Winkel ist eigentlich das Maaß, womit man die Grösse eines jeden andern Winkels vergleicht. Weiß man, ein Winkel fasse 53 Grade, so heißt das, der Winkel betrage $\frac{53}{90}$ vom rechten Winkel. Um einen Winkel in diesem Sinne zu messen, dient ein Halbcirkel, der ein für allemahl schon in 180 Grade getheilt ist, unter dem Nahmen des Transporteurs.

Der 2. Zusatz.

48. Bey recht genauen Messungen wird ein Grad sowohl des Quadranten, als auch des rechten Winkels von neuen in 60 gleiche Theile getheilt, die Minuten heissen, eine Minute wieder in 60 Secunden, die Secunde in 60 Tertien, u. s. f. fort. Die Zeichen °, ′, ″, ‴, bedeuten Grade, Minuten, Secunden, Tertien, wenn man sie auf diese Art schreibt 53° 28′ 16″ 43‴.

Der 3. Zusatz.

49. Für grade Linien bedient man sich im Grossen des Ruthen- Fuß- und Zollmaasses. Ein Fuß wird in 12 Zoll, ein Zoll in 12 Linien, eine Linie in 12 Scrupel getheilt, und 12 Fuß machen eine Ruthe. Weil es sehr bequem ist, mit Decimalbrüchen zu rechnen, so hat man auch wohl den Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel getheilt. Ein so eingetheiltes Maaß nennt man alsdenn Decimalmaaß, um es von jenem Duodecimalmaasse zu unterscheiden.

Der

Der 4. Zusatz.

50. Weil jedes Maaß an sich willkührlich ist, wenn es nur mit der auszumessenden Grösse von einerley Art ist; so kann man bey kleinen Figuren auf dem Papier auch eine kleine grade Linie für das Maaß der auszumessenden Linien wählen. Dabey ist es gleichviel, was das Maaß für einen Nahmen haben soll. Der Bequemlichkeit halber giebt man einer kleinen so gewählten Linie den Nahmen eines im grossen üblichen Maasses, und theilt sie eben so ein, wie es im grossen gewöhnlich ist. Einer jeden solchen Zeichnung muß alsdenn der so verkleinerte oder verjüngte Maaßstab beygefüget seyn.

Anmerkung.

Bey Ausmessung der graden Linien, der Winkel, und andrer geometrischer Grössen, wenn man sie durch Zahlen ausdrückt, wendet man schon die Rechenkunst auf die Geometrie an. Euclides und andre griechische Geometer haben die Lehren der Geometrie aus Gründen hergeleitet, die der Wissenschaft eigenthümlich sind, und wenn die Geometrie wirklich eine Uebung des Verstandes seyn soll; so muß man auch selbst beym Vortrage der ersten Anfangsgründe sich jenen Mustern möglichst zu nähern suchen. Indessen dient es doch auch dem angehenden Geometer zu einiger Erleichterung, wenn er bald einsehen lernt, wie bey Anwendung der Rechenkunst auf die Geometrie alles der Ausübung schon etwas näher gebracht werden kann.

Der 4. Lehrsatz.

51. Wenn Dreyecke *ABC*, *DEF* bey *B* und *E* einen gleichen Winkel haben, und überdem die anliegenden Seiten gleich sind, *BA* = *ED*, *BC* = *EF*, so sind die Dreyecke selbst, und die übrigen Winkel die den gleichen Seiten gegenüber stehen, nebst der dritten Seite gleich. 11 Fig.

Beweis. Die Dreyecke so auf einander gelegt, daß E auf B liegt, und EF an BC anschließt, passen auf einander. (13. 17 §.)

Der 1. Zusatz.

13 Fig. 52. Eine grade Linie AD, welche die Winkel BAC an der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks halbirt, theilt zugleich die Grundlinie mit dem ganzen Dreyeck in 2 gleiche Theile, und steht auf der Grundlinie senkrecht. (10. 51 §.)

Der 2. Zusatz.

53. Demnach sind beyde Winkel B und C an der Grundlinie, den gleichen Schenkeln AB und AC gegenüber, gleich groß.

Der 3. Zusatz.

8 Fig. 54. Wenn ein halber oder ganzer Durchmesser HF des Kreises den Winkel ACG oder den Bogen AFG eines Kreisausschnittes ACGF halbirt, so halbirt derselbe zugleich die Sehne AG und steht auf ihr senkrecht. (40. 52 §.)

Der 5. Lehrsatz.

13 Fig. 55ª. Wenn in einem Dreyecke *ABC*, zwey Winkel *ABC* und *ACB* einander gleich sind, so sind auch die, diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten *AC*, *AB* einander gleich.

Beweis. Wenn AC nicht AB gleich wäre, so müßte eine davon grösser seyn, etwa AB. Man nehme daher BF = CA (35 §.) und ziehe FC. Es wäre also in den Dreyecken ABC und FBC die Seite BC beiden gemein, AC = FB und der Winkel ACB = dem FBC, folglich das Dreyeck ABC = dem FBC, welches unmöglich ist. (4 §. d. Rechenk.)

Zusatz.

55ᵇ. Ein Dreyeck also das drey gleich große Winkel hat, ist gleichseitig. (22 §.)

Der

Der 6. Lehrsatz.

56. Wenn auf einer graden Linie *AB* in ihren Endpuncten *A* und *B* zwey grade Linien *AC*, *BC* so aufgestellet sind, daß sie in einem Puncte *C* zusammentreffen, und zwey andere jenen gleiche Linien, in ebendenselben Endpuncten *A* und *B* aufgestellet werden, so können diese in keinem andern Puncte, an derselben Seite von *AB* zusammentreffen. 15 Fig.

Beweis. Gesetzt sie träfen in dem Puncte D zusammen, so daß AD = AC und BD = BC wäre, so ziehe man CD. Der Winkel ADC = den ACD (53 §.) also ADC > DCB, und CDB > DCB (5 §. d. Rechenk.) Nun ist CB = DB, daher CDB = DCB (53 §.) welches jenen CDB > DCB offenbar widerspricht.

Der 7. Lehrsatz.

57. Wenn alle drey Seiten *AB*, *BC*, *AC*, eines Dreyecks *ABC* so groß sind, als die drey Seiten *DE*, *EF*, *DF* eines andern Dreyecks *DEF*, so sind auch in beyden Dreyecken die Winkel gleich groß, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen. 12 Fig.

Beweis. Man bringe das Dreyeck ABC über das Dreyeck DEF, nehmlich B auf E und BC auf EF. Weil nun BC = EF ist, so fällt auch C auf F, und da BA = ED, CE aber = FD, auch A auf D (56 §.); daher BA auf ED und CA auf FD, folglich BAC = EDF (12 §.) also auch ABC = EDF und AGB = DEF (51 §.)

Der 1. Zusatz.

58. Beyde Dreyecke haben demnach eine gleiche Fläche.

Der 2. Zusatz.

16 Fig. 59. Ein Kreis CDF kann den andern CDE nur in zwey Puncten C und D, nicht in mehrern schneiden: auch liegt von diesen Durchschnittspuncten einer an der einen, der andre an der andern Seite der graden Linie AB zwischen den Mittelpuncten.

Die 1. Aufgabe.

16 Fig. 60. Es sind drey grade Linien *AB*, *GH*, *KL* gegeben, wovon jede zwey zusammengenommen grösser, als die dritte sind: man soll daraus ein Dreyeck verzeichnen. (25 §.)

Aufl. Man nehme eine davon, etwa AB, für die Grundlinie, und beschreibe mit dem Halbmesser GH aus dem Mittelpuncte A, mit dem Halbmesser KL aus dem Mittelpuncte B, Kreise. Wenn diese einander in C und D schneiden, so kann man AC und BC, oder auch AD und BD ziehen: so ist in beyden Fällen das verlangte Dreyeck verzeichnet. (31 u. 5 §. der Rechenk.)

Der 1. Zusatz.

61. Ueber einer gegebenen Grundlinie verzeichnet man eben so ein gleichschenklichtes, oder auch ein gleichseitiges Dreyeck.

Der 2. Zusatz.

12 Fig. 62. Aus einem in der graden Linie AB gegebenen Puncte C richtet man darüber eine senkrechte Linie auf, wenn man CD = CE macht, über DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DEF setzt, und aus dessen Spitze F nach C die grade Linie FC zieht. Denn es ist nun auch FCD = FCE (57 §.) also CF senkrecht auf AB. (10 §.)

Der 3. Zusatz.

18 Fig. 63. Ein gradlinichter Winkel ABC wird mit der graden Linie BF halbirt, wenn man BD = BE nimmt, und

und auf DE das gleichschenklichte Dreyeck DEF setzt. Denn es ist nun ABF = CBF. (57 §.)

Der 4. Zusatz.

64. Die grade Linie AB halbirt man mit einer andern CE senkrecht, wenn man über AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ACB setzt, und den Winkel ACB an der Spitze halbirt. (52 §.) 19 Fig.

Der 5. Zusatz.

65. Aus einem ausserhalb der graden Linie EF gegebenen Puncte C fällt man eine senkrechte Linie CH, wenn man an der andern Seite von EF willkührlich einen Punct D annimmt, aus C mit CD einen Kreis AGB beschreibt, AB in H halbirt, und CH zieht. (57. 10 §.) 21 Fig.

Der 8. Lehrsatz.

66. Wenn im Dreyeck *ABC* die eine Seite, etwa *BC* nach *K* verlängert wird, so ist der äussere Winkel *ACK* grösser, als jeder seiner innern Gegenwinkel *CBA*, *BAC*. 20 Fig.

Beweis. Man halbire AC in G, ziehe BG nach G hinaus verlängert bis GH = BG wird, und ziehe HC. Weil nun BG = GH, AG = GC und AGB = CGH (20 §.): so ist auch BAC = GCH (51 §.) Nun ist ACK > GCH, also auch ACK > BAC. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß ACK > CBA ist.

Der 1. Zusatz.

67. Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC ungleich sind, so steht der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber. Denn wenn AC > AB, also AD = AB gemacht und BD gezogen wird, so ist ABC > ADB (53 §. und 5 §. d. N.) Aber ADB > ACB (66 §.): also auch ABC > ACB.

Der

Der 2. Zusatz.

68. Im Dreyeck, das zwei ungleich grosse Winkel hat, ist dem grössern Winkel die grössere Seite, dem kleinern die kleinere Seite entgegengesetzt. (53. 67 §.)

Der 9. Lehrsatz.

15 69. Wenn über der Grundlinie *AB* des Fig. Dreyecks *ABC*, ein anderes Dreyeck gezeichnet wird, das bei *A* einen kleinern Winkel hat als das vorige, ohne daß man die Länge der an diesem Winkel anliegenden Seiten ändert; so wird die dritte dem Winkel *A* entgegenstehende Seite kleiner als sie vorher war.

Beweis. Wenn man aus A mit der kleinern Seite AC, als Halbmesser einen Cirkelbogen CEG verzeichnet, so kann die Spitze des neuen Dreyecks nur in diesem Bogen ihre Stelle haben: also 1) entweder im Durchschnittspuncte E dieses Bogens mit der Seite BC, wenn vielleicht beide einander schneiden, 2) oder ausserhalb des Dreyecks ABC irgendwo in D, 3) oder innerhalb desselben in F.

Im ersten Fall ist für sich klar, daß BC > BE sey. Im zweyten Fall ziehe man CD, so ist vermöge der Voraussetzung AC = AD, also ACD = ADC. Aber BDC > ADC, also BDC > ACD (5 §. der R.) Ueberdem auch ACD > BCD also BDC > BCD: mithin im Dreyeck BCD die Seite BC > BD (68 §.) Im dritten Fall ziehe man CF, so ist AC + BC > AF + BF (25 §.), und AC = AE wie vorausgesetzt wird: also BC > BF (12 §. d. R.)

Der 10. Lehrsatz.

8 Fig. 70. In einerley Kreise, oder auch verschiedenen Kreisen, die gleiche Halbmesser haben, gehö-

gehören zu gleich grossen Bogen, auch gleich grosse Sehnen, und umgekehrt, wenn die Sehnen gleich sind, so sind die dazu gehörigen Bogen gleich.

Beweis. Wenn AFG, BLM, ein paar Kreisbogen und CA, CG, CB, CM die an ihre Endpuncte laufende Halbmesser sind; so sind diese insgesammt gleich groß. Sind alsdann die Bogen gleich, so sind die Winkel ACG, BCM gleich. (40 §.) Weiß man umgekehrt, daß die Sehne AG = BM sey, so folgt es sey ACG = BCM (57 §.), mithin auch der Bogen AFG = Bog. BLM. (38 §.)

Die 2. Aufgabe.

71. An der graden Linie *EF* einen Winkel zu zeichnen, der einen andern gegebenen Winkel *ABC* gleich ist. 23 Fig.

Aufl. Aus der Spitze B des gegebenen Winkels beschreibe man mit einem willkührlich gewählten Halbmesser einen Bogen GH zwischen seinen Schenkeln, und aus dem Mittelpunct E mit demselben Halbmesser ebenfalls einen Bogen, der EF in L schneidet. Die Sehne des Bogens HG trage man aus L in K, und ziehe EK, so ist der Winkel an E = ABC. (70. und 40 §.)

Die 17. Erklärung.

72. Was eine grade Linie AC in einer Ebene für eine Lage habe, läßt sich gar nicht angeben, wenn man nicht voraussetzen kann, daß die Lage einer andern graden Linie AB in derselben Ebene bekannt sey. In diesem Fall wird die Lage der Linie AC gegen AB durch die Grösse des Winkels BAC bestimmt, und BAC ist der Abweichungswinkel der graden Linie AC von der Lage AB. 8 Fig.

Die

Die 18. Erklärung.

3 Fig. 73. Zwey grade Linien AC und GF haben gegen eine dritte *AB* einerley Lage, oder laufen von den Puncten A und G aus nach einerley Richtung, wenn sie diese dritte unter gleichen übereinstimmig liegenden Abweichungswinkeln BAC, BGF, schneiden.

Der 1. Zusatz.

74. Zwei grade Linien also die eine dritte nicht unter einerley Abweichungswinkeln schneiden, haben auch nicht einerley Lage gegen diese dritte, und wenn sie nicht einerley Lage haben, so schneiden sie selbige unter ungleichen Abweichungswinkeln.

Der 2. Zusatz.

26 Fig. 75. Der Natur der graden Linie zufolge (3 §.) hat jeder Theil AE mit sich selbst, mit den andern EG oder dritten GB ꝛc. also auch mit der ganzen AB die aus diesen Theilen besteht, einerley Richtung und Lage. Wenn daher zwey grade Linien AB und CD gegen eine dritte sie scheidende EF einerley Lage haben, so haben sie auch gegen jede dritte grade Linie GH und NO einerley Lage. Denn nun sind z. B. bei GH, AE und EG, eben so aber CF und FH als zusammengehörige Theile der ganzen Linien AG und CH anzusehen. Weil also AC und CF einerley Lage haben sollen, so folgt nach den obigen, daß auch AG und CH an sich einerley Lage haben, eben deswegen aber auch gegen GH (§. 72.) Auf ähnliche Art läßt es sich wegen NO erläutern. ꝛc.

Die 3. Aufgabe.

3 Fig. 76. Der Winkel *CAB* unter welchem *AC* die grade Linie *AB* schneidet, ist gegeben, man soll an den Punct G der Letztern, eine

dritte

dritte grade Linie *GF* ziehen, die mit *AC* einerley Lage hat.

Aufl. Man mache den Winkel FGB = CAB (71 §.) so hat GF mit AC einerley Lage. (73 §.)

Der 11. Lehrsatz.

77. Wenn ein Dreyeck *ABC* eine Seite *BC* nach *D* verlängert wird, so ist der äussere Winkel *ACD* so groß, als die Summe der beiden Winkel *ABC* und *BAC*, die ihm im Dreyeck gegenüber stehen. 11 Fig.

Beweis Man verlängere auch BA nach E und CA nach F, ferner ziehe man BG so an EB, daß sie mit AF einerley Lage hat (76 §.); also wird EBG = EAF. Eben deswegen hat aber auch BG mit CF gegen BD einerley Lage (75 §.), also ist auch DCF = DBG: denn wären diese Winkel ungleich, so hätte BG nicht einerley Lage mit CF (74 §.) Demnach ist DCF = CBA + ABG = CBA + EAF = CBA + BAC. (20 §.)

Der 12. Lehrsatz.

78. In jedem gradlinichten Dreyeck *ABC* ist die Summe aller dreyer Winkel, der Summe zweier rechten Winkel gleich. 11 Fig.

Beweis. Man verlängere die Seite BC nach D, so ist ACD + ACB = 2R (17 §.) und ACD = ABC + BAC (77 §.): also ABC + BAC + ACB = 2R.

Der 1. Zusatz.

79. Wenn die Grösse eines Winkels in Graden und Theilen von Graden gegeben ist, so findet man die Summe der beyden übrigen Winkel in Graden ausgedrückt, wenn man die Zahl der Grade jenes Winkels von 180° subtrahirt. Ist die Grösse zweyer Winkel in Graden gegeben, so hat man die Grösse

des

des dritten Winkels, wenn man die Zahl der Grade jener beyden Winkel in Graden zusammen addirt, und die Summe von 180° subtrahirt.

Der 2. Zusatz.

80. Im Dreyeck kann nur ein Winkel ein stumpfer Winkel seyn: die beyden andern sind alsdenn spitze Winkel.

Der 3. Zusatz.

81. Aus einerley Punct kann man nicht zwey verschiedene grade Linien, auf einerley dritte senkrecht herablassen.

Der 4. Zusatz.

82. Im gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich groß (53 §.): folglich beträgt jeder $\frac{2}{3}$ R oder 60°.

Der 5. Zusatz.

13 Fig. 83. Wird einer von den gleichen Schenkeln AB des gleichschenklichten Dreyecks ABC, durch die Spitze A nach E verlängert; so ist der äussere Winkel EAC an der Spitze doppelt so groß, als jeder von den gleichen Winkeln an der Grundlinie. (77 §.) Wenn der Winkel BAC an der Spitze zwischen den gleichen Schenkeln $\frac{2}{3}$ R oder 60° beträgt; so ist jeder von den Winkeln an der Grundlinie eben so groß. (53. 79 §.)

Der 6. Zusatz.

8 Fig. 84. Wenn der Winkel an der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks $= \frac{2}{3}$ R ist, so ist es gleichseitig. (55b. 83 §.) Die Sehne AG eines Bogens AFG ist also dem Halbmesser AC gleich, wenn der Bogen $\frac{1}{6}$ der Peripherie oder 60 Grad beträgt. Und umgekehrt: wenn die Sehne AG dem Halbmesser AC gleich ist, so ist der Bogen AFG $\frac{1}{6}$ von der Peripherie, weil nun ACG ein gleichseitiges Dreyeck ist. (82. 70 §.)

Der

Der 7. Zusatz.

85. Eine grade Linie AD welche von der Spitze A des gleichschenklichten Dreyecks auf die Grundlinie BC senkrecht fällt, halbirt den Winkel an der Spitze, die Grundlinie und das ganze Dreyeck. Denn sonst könnte man mit einer andern graden Linie den Winkel an der Spitze halbiren (63 §.) und diese würde auch auf der Grundlinie senkrecht seyn, (52 §.) gegen den 81 §. 13 Fig.

Der 8. Zusatz.

86 Ein Durchmesser HF, der eine Sehne AG des Kreises senkrecht schneidet, halbirt die Sehne, den dazu gehörigen Bogen AFG und den Winkel am Mittelpuncte ACG. 8 Fig.

Der 9. Zusatz.

87. Eine grade Linie AD, welche die Grundlinie BC des gleichschenklichten Dreyecks halbirt, und durch die Spitze A geht, steht zugleich auf der Grundlinie senkrecht, und hat die übrigen schon erwehnten Eigenschaften. Denn eine grade Linie aus A auf BC senkrecht herabgelassen, geht durch D (85 §.) und zwischen A und D kann der Lage nach nur einerley grade Linie seyn. (8 §.) 13 Fig.

Der 10. Zusatz.

88. Ein Durchmesser HF, welcher die Sehne AG halbirt, ist darauf zugleich senkrecht, und halbirt den Winkel am Mittelpunct ACG, nebst dem Bogen AG. 8 Fig.

Der 11. Zusatz.

89. Eine grade Linie aus der Mitte D der Grundlinie BC des gleichschenklichten Dreyecks senkrecht aufgerichtet, läuft durch die Spitze A. Denn im Gegentheil kann man auch AD ziehen, und auch AD wäre auf BC senkrecht (87 §.) gegen den 15 §. 13 Fig.

Der 12. Zusatz.

8 Fig. 90. Eine grade Linie HF, welche die Sehne AG eines Kreises bey G senkrecht halbirt, ist zugleich ein Durchmesser des Kreises, und hat die übrigen schon mehrmals erwehnten Eigenschaften.

Die 19. Erklärung.

91. Ein Dreyeck heißt rechtwinklicht; stumpfwinklicht oder spitzwinklicht, nachdem es einen rechten, oder einen stumpfen Winkel hat, oder auch alle drey Winkel spitz sind. Die Seiten, welche im rechtwinklichten Dreyeck den rechten Winkel einschliessen, heissen die Perpendiculärseiten, oder Catheti: die den rechten Winkel entgegengesetzte Seite wird die Hypothenuse genannt.

Der 1. Zusatz.

92. Im rechtwinklichten Dreyeck ist die Hypothenuse, und im stumpfwinklichten, die dem stumpfen Winkel entgegenstehende Seite grösser, als jede von den beyden übrigen. (68b. §.)

Der 2. Zusatz.

93. Unter allen graden Linien, die man von einem Punct nach einer andern graden Linie hinziehen kann, ist die Perpendicularlinie die kürzeste. Sie ist also zugleich die Entfernung des Puncts von der graden Linie (26 §.) Auch umgekehrt: die kürzeste unter den graden Linien, die von einem Punct nach einer graden Linie laufen, ist auf derselben senkrecht.

Der 13. Lehrsatz.

20 Fig. 94. Jede grade Linie *AE* aus der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks *ABC* innerhalb der Fläche desselben nach einem Puncte *E* in der Grundlinie gezogen, ist kleiner als jeder von den gleichen Schenkeln *AB* oder *AC*:

wenn

wenn aber aus der Spitze *A* nach einem Puncte *F* in der verlängerten Grundlinie die grade Linie *AF* gezogen wird, so ist sie grösser als *AB* oder *AC*.

Beweis. Wenn AD auf BC senkrecht fällt, so ist AD unter allen von A nach BC laufenden graden Linien die kürzeste (91 §.) Ferner sind die Winkel AEC, ACF stumpfe Winkel (77 §.) also AE ◁ AC, und AF ▷ AC (92 §.)

Der 1. Zusatz.

95. Jede Sehne AB des Kreises liegt also ganz innerhalb der Kreisfläche, weil die Entfernung eines jeden Punctes der Sehne vom Mittelpuncte, die Endpuncte ausgenommen, kleiner als der Halbmesser ist. 21 Fig.

Der 2. Zusatz.

96. Aus einerley Punct C, kann man nach einer andern graden Linie EF nicht mehr als zwey gleich grosse grade Linien CA, CB ziehen: mithin kann auch eine grade Linie den den Kreis nur in zweyen nicht in mehrern Puncten schneiden. 21 Fig.

Der 14. Lehrsatz.

97. Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF*, auser einem gleichen Winkel bey *B* und *E* eine gleiche anliegende Seite *AB* = *DE* und eine gleiche gegenüberstehende Seite *AC* = *DF* haben; und wenn überdem, die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite grösser ist, als die an demselben anliegende Seite, *AC* ▷ *AB*, also auch *DF* ▷ *DE*: so sind die übrigen Seiten gleich, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen, sind ebenfalls gleich groß. 12 Fig.

Beweis. Es muß EF = BC seyn, weil man sonst EG = BC nehmen, und DG ziehen könnte. Dann wenn DG = AC (51 §.), also DG = DF und das Dreyeck DGF gleichschenklicht, mithin DE > DF (94 §.) welches der Voraussetzung zuwider ist. Demnach ist EF = BC, und das übrige folgt aus dem 51 §.

Zusatz.

98. Wenn im rechtwinklichten oder im stumpfwinklichten Dreyecken die Seiten, welche den rechten oder stumpfen Winkel nicht einschliessen, auch überdem im letzten Fall die stumpfen Winkel selbst gleich groß sind, so passen die Dreyecke auf einander. (13 §.)

Der 15. Lehrsatz.

12 Fig. 99. Dreyecke *ABC* und *DEF* passen auf einander, wenn sie eine gleiche Seite haben, *BC* = *EF*, und zwei gleiche anliegende Winkel *B* = *E*, *C* = *F*, oder statt dessen einen gleichen anliegenden Winkel *B* = *E*, und einen gleichen gegenüberstehenden Winkel *A* = *D*.

Beweis. Aus der Voraussetzung B = E und A = D folgt auch, daß C = F sey. (78 §.) Dann aber passen die graden Linien EF und BC auf einander, und die Winkel in C und B, auch an F und C (13 §.) mithin die ganzen Dreyecke.

Die 20. Erklärung.

100. Parallellinien heissen grade Linien, die in einerley Ebene eine solche Lage haben, daß sie nicht zusammenlaufen können, wenn man sie nach beyden Seiten, soweit man will, verlängert.

Die 4. Aufgabe.

10 Fig. 101. Durch den gegebenen Punct *G* eine grade Linie zu ziehen, die mit *CD* parallel läuft.

Aufl.

Aufl. In CD nehme man einen Punct H willkührlich an, und ziehe EF durch G und H: an GE aber zeichne man den äussern Winkel EGB dem innern EHD gleich, so ist AB mit CD parallel.

Beweis. Wenn AB und CD nach B und D verlängert, so wie es die 22ste Figur vorstellet, irgendwo in O zusammen liefen, so würde sich ein Dreyeck GHO ergeben, worin EGB der äussere Winkel, also grösser als EHD wäre, (77 §.) da doch in der 10 Figur EGB = EHD gemacht ist. Weil überdem EGB = AGF, und EHD = CHF ist (21 §.); so hat man auch AGF = CHF, und die graden Linien AB, CD, können nach A und C verlängert ebenfalls nicht zusammen laufen.

Der 1. Zusatz.

102. Wenn die Wechselswinkel AGF und EHD gleich sind, so ist auch AGF = EGB, mithin EGB = EHD, und AB ist mit CD parallel. 10 Fig.

Der 2. Zusatz.

103. Wenn die beyden innern Winkel EHD + BGF zwey rechte Winkel ausmachen, so ist auch EGB + BGF = 2R, also EHD + BGF = EGB + BGF, mithin wiederum EHD = EGB und AB mit CD parallel. Zwey grade Linien, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind demnach parallel.

Der 16. Lehrsatz.

104. Wenn eine Seitenlinie *GH* und ein anliegender Winkel *GHD* gegeben sind; so kann man aus beyden ein solches Dreyeck verzeichnen, worin der Winkel, welcher der gegebenen Seite *GH* gegenüber stehet, kleiner ist, als jeder gegebene Winkel. 10 Fig.

Beweis. In demjenigen Schenkel HD, dessen Länge nicht bestimmt ist, nehme man einen Punct M wo man will an, und ziehe GM. Man nehme hiernächst MN = MG, und ziehe GN, so ist GNH = ½GMH. (83 §.) Man nehme aufs neue NO = NG, und ziehe GO, so ist GON = ½GNH, (83 §.) also GON = ¼GMH. Fährt man so fort, so wird jedesmahl der Winkel an der Spitze im folgenden Dreyeck halb so groß, als er im vorigen war: mithin endlich kleiner, als jeder gegebene Winkel.

Der 17. Lehrsatz.

10 105. Wenn zwo grade Linien *KL* und *CD* Fig. von einer dritten *EF* in *G* und *H* so geschnitten werden, daß die beyden innern Winkel *EHD* + *LGF* an der einen Seite weniger als zwey rechte Winkel ausmachen: so laufen *KL* und *CD* nach eben der Seite hin verlängert zusammen.

Beweis. Man mache den Winkel EGB = EHD, so hat man EGB + BGF = 2R, (17 §.) also auch EHD + BGF = 2R. Vermöge der Voraussetzung ist EHD + LGF < 2R, mithin EHD + LGF < EHD + BGF, und LGF < BGF. Demnach liegt GL zwischen GB und GF, und BGL ist ein gegebener Winkel. Man nehme GH, und den anliegenden Winkel GHD als gegebene Stücke an, und zeichne dem 104 §. gemäß über GH ein Dreyeck, worin der Winkel GOH der Seitenlinie GH gegenüber kleiner als BGL ist: alsdenn hat man EHD = GHD, und BGF = HGO + BGO, folglich EHD + BGF = GHD + HGO + BGO. Vorhin war EHD + BGF = 2R, mithin ist GHD + HGO + BGO = 2R. Aber auch im Dreyeck GHO ist GHD + HGO

HGO + GOH = 2R, (78 §.) demnach erhält man GHD + HGO + BGO = GHD + HGO + GOH, (5 §. Rech.) also ferner BGO = GOH. Vermöge der Verzeichnung ist aber GOH < BGL, also ist auch BGO < BGL. Diesemnach liegt nun GL zwischen den Schenkeln GH und GO des Winkels HGO, und muß verlängert mit HO zusammen laufen. (23 §.)

Der 18. Lehrsatz.

106. Wenn zwo parallele Linien *AB*, *CD*, von einer dritten *EF* in *G* und *H* geschnitten werden; so ist die Summe der beyden innern Winkel *EHD* + *BGF* zweenen rechten Winkeln gleich. 10 Fig.

Beweis. Wäre EHD + BGF < 2R, so müsten AB und CD nach B und D verlängert zusammen laufen, (105 §.) also wären sie nicht parallel. Wäre dagegen EHD + BGF > 2R; so hat man auch AGF + BGF = 2R und EHD + EHC = 2R, mithin AGF + BGF + EHD + EHC = 4R, (12 §. Rech.) und AGF + EHC < 2R: (13 §. Rech.) also würden AB und CD nach A und C verlängert zusammen stossen, mithin wiederum nicht parallel seyn. Diesemnach ist EHD + BGF = 2R.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn also AB mit CD parallel ist, so ist auch EGB = EHD, und AGF = EHD. Denn es ist EHD + BGF = 2R (106 §.) = EGB + BGF (18 §.) also EHD = EGB. Ueberdem ist EGB = AGF, also auch EHD = AGF. Parallele Linien haben also in einerley Ebene völlig einerley Lage, weil sie jede grade Linie in derselben Ebene unter gleichen Winkeln schneiden. (73 §.) 10 Fig.

Der 2. Zusatz.

10 Fig. 108. Eine grade Linie KL, die eine von zwoen Parallellinien AB schneidet, muß verlängert auch die andre CD schneiden. Denn es ist LGF < BGF, EHD = EHD, daher EHD + LGF < EHD + BGF. Ferner ist EHD + BGF = 2R, (106 §.) also EHD + LGF < 2R, mithin wird CD von KL geschnitten. (105 §.)

Der 3. Zusatz.

3 Fig. 109. Zweene übereinstimmig liegende Winkel BAC, DEF, in einer Ebene sind gleich groß, wenn ihre Schenkel AC, EF, und AB, ED parallel sind. Denn EF und AB verlängert schneiden einander, (108 §.) und es ist alsdann BGF = DEF, so wie auch BGF = BAC: (107 §.) folglich BAC = DEF.

Auch umgekehrt: wenn BAC, DEF gleich grosse Winkel, und die Schenkel AB, ED parallel sind, so sind auch AC, EF, parallel. Denn EF verlängert schneidet AB in G, und es wird FGB = DEF. Weil nun vermöge der Voraussetzung auch BAC = DEF ist; so hat man BAC = BGF, und es ist AC mit EF parallel. (101. §.)

Der 4. Zusatz.

24 Fig. 110. Zwo grade Linien AB und CD, die mit einer dritten EF parallel laufen, sind auch untereinander selbst parallel. Denn wenn AB mit CD nicht parallel wäre, so müste CD mithin auch EF (109 §.) von AB geschnitten werden: also wäre AB nicht mit EF parallel.

Die 21. Erklärung.

111. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, worin jede Seite mit der gegenüberstehenden parallel ist. Wenn dagegen nur zwo entgegengesetzte Seiten

im

im Viereck parallel sind, so heißt die Figur ein Trapezium, und wenn keine Seite mit einer andern parallel ist, ein Trapezoides oder schlechthin ein Viereck.

Zusatz.

112. Man kann jedes Viereck mit ABCD vermittelst der Diagonallinie BD in zwo Dreyecke theilen, und alle sechs Winkel beyder Dreyecke zusammen sind den vier Winkeln des Vierecks zusammen genommen gleich: also macht die Summe aller Winkel im Viereck vier rechte Winkel aus. 25 Fig.

Der 19. Lehrsatz.

113. Wenn *AD* und *BC* ein Paar gleich grosse Parallellinien sind, und man alsdenn ihre Endpuncte auf jeder Seite mit den graden Linien *AB*, *CD*, zusammen ziehet; so wird die Figur *ABCD* ein Parallelogramm. 25 Fig.

Beweis. Man ziehe BD, so haben die Dreyecke ABD, BDC, einen gleichen Winkel ADB = DBC, (107 §.) und zwo gleiche anliegende Seiten AD = BC, BD = BD. Diesemnach ist auch ABD = BDC, (51 §.) und AB mit CD parallel. (102 §.)

Der 1. Zusatz.

114. Wenn zwo Entfernungen EF, GH, einer graden Linie AB von der andern CD gleich groß sind; so sind die Linien AB, CD, parallel. Denn EF und GH sind parallel, (103 §.) also auch AB und CD. (113 §.) 26 Fig.

Der 2. Zusatz.

115. Wenn zwo Entfernungen EF, HK, einer graden Linie LM von der andern CD ungleich sind; so laufen beyde nach der Seite hin zusammen, wo die Entfernung die kleinere ist. Wenn nemlich HG = 26 Fig.

EF gemacht und durch die Puncte E, G, die grade Linie AB gezogen wird, so ist AB mit CD parallel; (114 §.) also wird CD von LM geschnitten, (109 §.) und zwar nach M und D verlängert. Denn es ist FEM < FEB; DFE = DFE, daher FEM + DFE < FEB + DFE; ferner DFE + FEB = 2R, (106 §.) also DFE + FEM < 2R, woraus das übrige folgt. (105 §.)

Der 3. Zusatz.

116. Parallele Linien sind durchgängig gleich weit von einander entfernt. Denn wären auch nur zwo Entfernungen der einen von der andern ungleich, so wären die Linien nicht parallel. (115 §.)

Der 4. Zusatz.

26 Fig. 117. Alle Puncte E, G, N, die von einer graden Linie CD gleichweit entfernt sind, liegen in grader Linie. Wenn nemlich EF, GH, NO, gleiche Entfernungen, also auch parallele Linien (103 §.) sind; so muß eine durch E und G gezogene grade Linie auch ON schneiden. (109 §.) Aber EG ist mit CD parallel, (114 §.) also sind alle ihre Entfernungen von CD gleich groß, (116 §.) und sie muß ON in einem solchen Punct schneiden, der eben so weit als E und G von CD entfernt ist: das heißt, EG muß auch durch N gehen.

Der 20. Lehrsatz.

25 Fig. 118. Jedes Parallelogramm *ABCD* wird von der Diagonallinie *BD* in zwey gleich grosse Dreyecke getheilt, die auch gleiche Seiten und Winkel haben.

Beweis. Es ist ADB = DBC, und ABD = BDC. (107 §.) Ueberdem ist BD = BD, also passen

passen die Dreyecke ABD und BDC auf einander. (99 §.)

Der 1. Zusatz.

119. Im Parallelogramm ist jede Seite der gegenüberstehenden gleich, und jeder Winkel dem gegenüberstehenden Winkel.

Der 2. Zusatz.

120. Wenn zwo Seiten, die einerley Winkel einschliessen, gleich sind, so sind alle vier Seiten gleich: und wenn ein Winkel ein rechter Winkel ist; so ist jeder von den übrigen auch ein rechter Winkel.

Die 22. Erklärung.

121. Ein Quadrat ist ein gleichseitiges und rechtwinklichtes, ein Rhombus aber ein gleichseitiges und schiefwinklichtes Parallelogramm. Ein ungleichseitiges rechtwinklichtes Parallelogramm heißt schlechthin ein Rechteck, und wenn es ungleichseitig und schiefwinklicht ist, ein Rhomboides.

Die 5. Aufgabe.

122. Aus einem gegebenen Winkel *A* und zwoen Seiten, die ihn einschliessen sollen, das Parallelogramm zu verzeichnen. Fig. 25

Aufl. Man gebe den Seiten AB und AD die vorgeschriebene Länge. Mit dem Halbmesser AB schlage man hiernächst aus D, und mit dem Halbmesser AD aus dem Mittelpunct B einen Bogen, der den vorigen in C schneidet. Wenn alsdenn DC und BC gezogen werden, so ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Wenn man BD ziehet, so haben die Dreyecke ABD, CBD, gleiche Seiten. Demnach sind die Winkel ABD und BDC, imgleichen ADB und DBC gleich groß, (57 §.) also AB und CD, imgleichen AD und BC parallel. (102 §.)

Der

Der 1. Zusatz.

27 Fig. 123. Wenn A ein rechter Winkel ist, und die anliegenden Seiten gleich groß sind, so wird die Figur ein Quadrat: ein Rhombus, wenn der Winkel A schief ist, und die anliegenden Seiten gleich sind. Ist A ein rechter Winkel, und sind die anliegenden Seiten ungleich, so erhält man ein Rechteck. (121 §.)

28 Fig.

Der 2. Zusatz.

124. Quadrate, die gleiche Seitenlinien haben, sind gleich groß, denn sie passen aufeinander. Quadrate aber auf ungleichen Seiten sind ungleich groß: über der grössern Seite steht das grössere, über der kleinern das kleinere Quadrat.

Der 3. Zusatz.

125. Gleich große Quadrate haben gleich grosse Seitenlinien: das grössere Quadrat aber hat eine grössere Seite als das kleinere.

Die 23. Erklärung.

25 Fig. 126. Wenn eine Seite AB des Dreyecks ABD für die Grundlinie angenommen wird, so ist die dazu gehörige Höhe des Dreyecks die grade Linie DE, welche aus der Spitze des entgegengesetzten Winkels auf die Grundlinie senkrecht fällt. Wäre einer von den Winkeln an der Grundlinie stumpf, so müste man die Grundlinie verlängern, um die erwehnte senkrechte Linie herabzulassen. Wird AB für die Grundlinie des Parallelogramms ABCD angenommen, so ist die Höhe desselben DE einerley mit der Entfernung der Grundlinie von der entgegengesetzten Seitenlinie.

Der

Der 21. Lehrsatz.

127. Parallelogramme *ABCD*, *ABEF*, auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe sind gleich groß. 29 Fig.

Beweis. Wenn beyde auf der gemeinschaftlichen Grundlinie AB stehen, so liegen die entgegengesetzten Seiten CD, EF, in einerley graden Linie. (117 §.) Ferner ist CD = AB = EF, (119 §.) also CD + CF = EF + CF, oder DF = CE, und überdem AD = BC, AF = BE. (119 §.) Demnach ist die Fläche des Dreyecks ADF = der Fläche BCE. (57 §.) Wird von beyden das Dreyeck CGF abgezogen, so bleibt das Viereck ADCG = BGFE; und wenn zu jedem von diesen Vierecken das Dreyeck ABG addirt wird, so erhält man ABCD = ABEF.

Der 1. Zusatz.

128. Dreyecke ABD und ABF auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe sind ebenfalls gleich groß. Denn aus dem Winkel BAD, und den Seiten AB, AD, kann man das Parallelogramm ABCD verzeichnen, auch eben so aus dem Winkel BAF und den Seiten AB, AF, das Parallelogramm ABEF. (122 §.) Diese Parallelogramme sind gleich, (127 §.) und die Dreyecke sind ihre Hälften. (118 §.) 29 Fig.

Der 2. Zusatz.

129. Jedes Parallelogramm ist doppelt so groß, als ein Dreyeck auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe.

Der 3. Zusatz.

130. Zwey oder mehr gleich hohe Dreyecke machen zusammengenommen eine Summe aus, die so groß ist, als ein eben so hohes Dreyeck, wenn die Grund-

Grundlinie desselben der Summe der Grundlinien jener Dreyecke gleich ist.

Der 22. Lehrsatz.

30 Fig. 131. Wenn auf den dreyen Seitenlinien eines rechtwinklichten Dreyecks *ABC* Quadrate verzeichnet sind; so ist das Quadrat *BCDE* auf der Hypothenuse *BC* so groß, als die Summe beyder Quadrate *ABFG*, *ACHI* auf den Perpendiculärseiten zusammen genommen.

Beweis. Aus der Spitze A des rechten Winkels ziehe man AK auf der Hypothenuse BC senkrecht, so wird AK verlängert auch DE in L senkrecht schneiden, (109. 106 §.) und das Quadrat BCDE wird dadurch in zwey Rechtecke BKLE, CKLD, getheilt. Man ziehe ferner AE und CF; so hat man ABF = R = CBE, also ABF + ABC = CBE + ABC, oder FBC = ABE. (12 §. R.) Ueberdem ist AB = BF, BE = BC, also das Dreyeck ABE = FBC, (57 §.) folglich auch 2 . ABE = 2 . FBC. Weil nun BKLE = 2 . ABE, und ABFG = 2 . FBC, (129 §.) so erhält man BKLE = ABFG.

Völlig eben so erhellet, es sey das Dreyeck ACD = Dreyeck HCB, also CKLD = ACHI: mithin ferner BKLE + CKLD, oder BCDE = ABFG + ACHI.

Der 1. Zusatz.

30 Fig. 132. Die über den Seitenlinien AB, BC, AC, stehenden Quadrate kann man der Kürze halber so bezeichnen AB^q, BC^q, AC^q; alsdenn hat man $BC^q = AB^q + AC^q$, mithin auch $AB^q = BC^q - AC^q$.

Der

Der 2. Zusatz.

133. Wenn man aus andern Gründen weiß, daß das Quadrat BC^q der grösten Seite eines Dreyecks ABC der Summe der Quadrate $AB^q + AC^q$ der übrigen beyden Seiten gleich sey: so ist der Winkel A, welcher dieser grösten Seite entgegen stehet, ein rechter Winkel. Man zeichne den rechten Winkel EDF, und nehme $DF = AC$, $DE = AB$; so ist $EF^q = DE^q + DF^q$, mithin auch $EF^q = AB^q + AC^q$. Weiß man nun, daß $BC^q = AB^q + AC^q$ sey, so ist $BC^q = EF^q$, also auch $BC = EF$, (125 §.) mithin der Winkel $BAC = EDF$ (57 §.) $= R$. 31 Fig.

Die 6. Aufgabe.

134. Durch drey gegebene Puncte *A*, *B*, *D*, die nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben. 32 Fig.

Aufl. Die graden Linien AB und BD müssen Sehnen des Kreises werden. Man halbire also die erste mit der graden Linie EF, die andere mit GH senkrecht; so müssen beyde durch den Mittelpunct laufen: (90 §.) und wenn C ihr Durchschnittspunct ist, so ist C der gesuchte Mittelpunct.

Beweis. Die senkrechten Linien EF und GH laufen gewiß irgendwo in C zusammen. Wenn nemlich ABD ein rechter Winkel ist, so sind BD und EF parallel, (103 §.) also wird EF von GH geschnitten. (109 §.) Wenn ABD stumpf ist; so ist GBD spitz, also läuft AB mit GH in G zusammen. Denn ist die Summe der Winkel bey G und $K < 2R$, also laufen EF und GH zusammen. Wäre ABD spitz, so würden

den GH und BA nach H und A verlängert zusammen laufen, und das übrige, wie vorhin folgen.

Man ziehe noch CA, CB, CD, so erhellet aus dem 51 §., daß CA = CB, und CD = CB sey: ein Kreis also aus C mit dem Halbmesser CA beschrieben, geht auch durch B und D.

Der 23. Lehrsatz.

135 **Wenn ein Winkel *ACB* am Mittelpunct im Kreise, und ein Winkel *ADB* an der Peripherie in demselben oder einem eben so grossen Kreise auf gleich grossen Bogen stehen; so ist der Winkel am Mittelpunct doppelt so groß, als der Winkel in der Peripherie.**

33 Fig. **Beweis.** Wenn der eine von den Schenkeln des Winkels an der Peripherie, wie AD, zugleich ein Durchmesser ist; so erhellet schon aus dem 83 §., daß ACB = 2ADB sey. In andern Fällen ziehe man durch die Spitze D des Winkels an der Peripherie, und durch den Mittelpunct C einen Durchmesser DE; so ist ACE = 2ADE, und BCE = 2BDE. Daraus folgt ferner ACE + BCE = 34 u. 35 F. 2(ADE + BDE), oder ACB = 2ADB, welches der Fall ist, den die 34ste Figur vorstellet. Aber auch ACE — BCE = 2(ADE — BDE), oder wie es die 35ste Figur vorstellet, ACB = 2ADB.

Der 1. Zusatz.

136. **Alle Winkel an der Peripherie, die in einerley Kreise auf gleichen Bogen stehen, oder alle Winkel in einerley Kreisabschnitte sind gleich groß.**

Der 2. Zusatz.

137. **Jeder Winkel an der Peripherie ist so groß, als ein Winkel am Mittelpunct, wozu ein Bogen gehört,**

gehört, der halb so groß ist, als der Bogen zwischen den Schenkeln des Winkels an der Peripherie. Ein Winkel im Halbkreise ist also ein rechter Winkel.

Die 24. Erklärung.

138. Eine gradlinichte reguläre Figur ist eine solche, worin alle Winkel und alle Seiten gleich groß sind. Das gleichseitige Dreyeck und das Quadrat geben davon schon Beyspiele. Alle übrige heissen zwar überhaupt reguläre Polygone: sie erhalten aber auch ihre Nahmen von der Anzahl ihrer Seiten oder Winkel.

Der 1. Zusatz.

139. Wenn die Peripherie des Kreises bey A, B, D, E, F, G, in gleiche Bogen getheilt ist, und man alsdenn die Sehnen dieser Bogen ziehet; so schliessen diese ein reguläres Polygon ein. Denn die Seiten sind gleich groß, (70 §.) und die Winkel ebenfalls. (136 §.) Um also im Kreise ein reguläres Sechseck zu beschreiben, wird nur erfordert, daß man mit dem Halbmesser AC aus A einen Bogen beschreibe, der den Kreis in B schneidet; so ist die Sehne AB die Seite des regulären Sechsecks, die man eben so aus dem andern Endpunct E des Durchmessers AE nach D tragen kann: die verlängerten Halbmesser BC, DC, geben alsdenn die übrigen Theilungspuncte F und G. (82 §.) 36 Fig.

Der 2. Zusatz.

140. Jedes auf diese Art im Kreise beschriebene reguläre Polygon ist kleiner als der Kreis, und die Peripherie des Polygons kleiner, als des Kreises Peripherie.

Die 25. Erklärung.

141. Eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises heißt eine solche grade Linie, die zwar mit der Peripherie des Kreises zusammen läuft, aber doch nach beyden Seiten verlängert ganz ausserhalb des Kreises fällt. Wenn alle Seitenlinien einer gradlinichten Figur den Kreis berühren, so heißt sie eine um den Kreis beschriebene Figur.

Der 1. Zusatz.

38 Fig. 142. Eine grade Linie DE, die einen Halbmesser CA des Kreises im Endpunct A senkrecht schneidet, ist eine Tangente desselben. Denn die Entfernung eines jeden Puncts E dieser Linie vom Mittelpunct C, nur A ausgenommen, ist grösser, als der Halbmesser. Auch umgekehrt, wenn DE den Kreis in A berührt, so ist der Halbmesser CA auf DE senkrecht, weil er die kürzeste Linie ist, die von C nach DE gezogen werden kann.

Der 2. Zusatz.

143. Durch einen in der Peripherie gegebenen Punct A ziehet man eine Tangente des Kreises, wenn man DE auf den Halbmesser CA im Endpunct senkrecht setzt. Wenn aber ein Punct D ausserhalb des Kreises gegeben ist, so ziehe man zwischen demselben und dem Mittelpunct die grade Linie CD, halbire sie in H, und beschreibe aus H mit dem Halbmesser HD = HC einen Kreis, der den gegebenen Kreis in A und B schneidet: alsdenn ist sowohl DA als auch DB eine Tangente des Kreises. (142. 137 §.)

Der 24. Lehrsatz.

38 Fig. 144. Wenn zwo Tangenten *AE* und *BF* des Kreises einander in *D* schneiden, so sind *AD* und *BD* gleich groß, auch werden die Win-

Winkel *ADB* und *ACB*, nebst dem Bogen *AGB*, von *CD* halbirt.

Beweis. Die bey A und B rechtwinklichten Dreyecke (143 §.) haben die gleichen Seiten AC = BC, und CD = CD; also ist AD = BD, ACD = BCD, ADC = BDC, (98 §.) mithin auch der Bog. AG = Bog. BG. (39 §.)

Der 25. Lehrsatz.

145. Wenn die Peripherie des Kreises bey *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, in gleiche Bogen getheilt ist, und man alsdenn durch alle Theilungspuncte Tangenten des Kreises ziehet; so schliessen diese ein um den Kreis beschriebenes reguläres Polygon ein. 37 Fig.

Beweis. Alle Winkel A, B, D, u. s. f. sind gleich groß, weil in den Vierecken AVCP, BPCQ, QCRD, u. s. f. die Winkel an V, P, Q, R, u. s. f. rechte Winkel und die Winkel an C ebenfalls gleich sind. (112 §.) Ferner ist der Winkel ACP = ½PCV, BCP = ½PCQ (144 §.) und PCV = PCQ, also ACP = BCP. Ueberdem sind die Winkel bey P rechte Winkel, (143 §.) und CP = CP; mithin ist AP = BP, (99 §.) und AB = 2BP Eben so erhellet, daß BD = 2BQ sey, und es ist BP = BQ, (144 §.) also auch AB = BD: mithin aus eben dem Grunde BD = DE = EF, u. s. f.

Zusatz.

146. Jedes um den Kreis beschriebene reguläre Polygon ist grösser, als der Kreis, und die Peripherie des Polygons grösser, als die Peripherie des Kreises.

Der 26. Lehrsatz.

147. Es giebt in der Fläche eines jeden regulären Polygons *ABDEFG* einen Punct *C*, 37 Fig.

der nicht allein von allen Winkelpuncten, sondern auch von allen Seitenlinien des Polygons gleich weit entfernt ist.

Beweis. Man halbire zwey an einer Seite AB anliegende Winkel bey A und B, so erhält man ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC, worin CB = CA ist. (55ª §.) Man ziehe ferner CD, so ist CAB = CBD, CA = CB, und AB = BD, mithin auch CD = CB. Eben so erhellet, daß CE = CD, CF = CE sey, u. s. f. Man ziehe überdem CP auf AB, CQ auf BD senkrecht; so ist CAP = CBQ, CA = CB, AP = BQ, (85 §.) also CP = CQ. (51 §.) Eben so findet man CR = CQ, CS = CR, u. s. f., wenn diese Linien auf DE, EF, u. s. f. senkrecht sind.

Der 1. Zusatz.

148. Ein Kreis aus C mit dem Halbmesser CA beschrieben, läuft durch alle Winkelpunkte des Polygons, und ein Kreis mit dem Halbmesser CP beschrieben, läuft auch durch Q, R, S, u. s. f., und berührt alle Seitenlinien.

Der 2. Zusatz.

149. Jede andre grade Linie, die man von C bis an den Umfang des regulären Polygons ziehen kann, ist grösser als CP und kleiner als CA.

Die 26. Erklärung.

150. Der von allen Winkelpuncten und allen Seitenlinien des regulären Polygons gleich weit entfernte Punct C kann der Mittelpunct des Polygons heissen, und CA der gröste, CP der kleinste Halbmesser des regulären Polygons. Der Winkel ACB zwischen zweenen gröſten Halbmessern, die zu einerley Seitenlinie AB gehören, heißt der Centriwinkel,

winkel, und jeder von den gleichen Winkeln GAB der Figur wird der Polygonwinkel genannt.

Der 1. Zusatz.

151. Wenn man 360° als die Zahl der Grade der ganzen Peripherie des Kreises mit der Zahl der Seitenlinien eines regulären Polygons dividirt, so hat man den Centriwinkel ACB. Beyde Hälften CAB, CBA, des Polygonwinkels zusammen, also der ganze Polygonwinkel, und der Centriwinkel ACB betragen zusammen 180°. (55 §.) Man subtrahirt also den Centriwinkel von 180°, um den Polygonwinkel zu finden. Der Centriwinkel im regulären Sechseck fasset 60° und der halbe Polygonwinkel ebenfalls: also ist die Seite des regulären Sechseckes allemahl dem grösten Halbmesser gleich. (55ª §.)

Der 2. Zusatz.

152. Um den Kreis in gleiche Bogen zu theilen, dient der Transporteur, wenn man am Mittelpunct des Cirkels einen Winkel von so vielen Graden zeichnet, als gefunden werden: wenn man 360° mit der Zahl dividirt, die es angiebt, in wie viele gleiche Bogen der Kreis getheilt werden soll. Dies Verfahren dient also, auch den Centriwinkel zu zeichnen, wenn man im Kreise (139 §.) oder um den Kreis (145 §.) ein reguläres Polygon mit einer vorgeschriebenen Zahl von Seiten zeichnen soll.

Der 27. Lehrsatz.

153. Jedes reguläre Polygon *ABCDE* ist einem Dreyeck *AFG* gleich, dessen Grundlinie *AG* der Peripherie des Polygons, und dessen Höhe *FH* dem kleinsten Halbmesser des Polygons gleich ist. 39 Fig.

Beweis. Das reguläre Polygon ist eine Summe so vieler gleich hoher Dreyecke, als es Seiten hat, die Höhe dieser Dreyecke ist dem kleinsten Halbmesser gleich, und die Summe ihrer Grundlinien ist so groß, als die Peripherie des Polygons. (147 §.) Die Summe aller dieser Dreyecke ist dem Dreyeck AFG gleich, (130 §.) also ist auch das Polygon selbst so groß, als das Dreyeck AFG.

Die 27. Erklärung.

154. Gradlinichte Figuren, die gleich viele Seitenlinien haben, sind ähnliche Figuren, wenn ihre Winkel, wie sie nach der Ordnung folgen, gleich groß sind, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, sich in der einen Figur eben so, wie in der andern, gegen einander verhalten. Um es kurz auszudrücken, daß eine Figur der andern ähnlich sey, wird das Zeichen (∼) gebraucht.

Der 1. Zusatz.

155. Figuren, die auf einander passen, sind ähnliche Figuren. Auch Figuren, die einer dritten ähnlich sind, sind einander selbst ähnlich.

Der 2. Zusatz.

156. Alle reguläre Polygone, die gleichviele Seiten haben, sind ähnliche Figuren. Denn sie haben gleiche Centriwinkel und gleiche Polygonwinkel. (151 §.) Auch in jedem Polygon für sich sind die Seiten gleich groß: also verhalten sie sich in dem einen gegen einander eben so, wie in dem andern.

Der 28. Lehrsatz.

40 157. Wenn eine Seite *AB* des Dreyecks
Fig. *ABC* bey *D*, *F*, *H*, in gleiche Theile getheilt ist, und durch alle Theilungspuncte die graden Linien *DE*, *FG*, *HI*, mit der anliegenden Seite *BC*

BC parallel gezogen werden; so wird dadurch die dritte Seite *AC* in eben so viele gleiche Theile getheilt.

Beweis. Man ziehe DK, FL, HM, mit AC parallel, so sind in den Dreyecken ADE und DFK die Seiten AD, FD, gleich groß, und die anliegenden Winkel: (107 §.) mithin ist AE = DK. Weil überdem DK = EG, (139 §.) so ist AE = EG. Ferner ist FL = GI, und FL = DK, weil die Dreyecke DKF und HFL auf einander passen, (99 §.) also GI = EG. Eben die Schlüsse finden bey den übrigen Theilen ihre Anwendung.

Zusatz.

158. Eine gegebene grade Linie AC theilt man auf folgende Art in eine vorgeschriebene Zahl gleicher Theile. Man ziehe durch A eine andre grade Linie AB, die mit AC einen Winkel von willkührlicher Grösse einschliessen kann. Auf diese trägt man so viele gleiche Theile, als AC erhalten soll, von A nach B auf, und ziehet BC. Durch alle Theilungspuncte in AB werden hiernächst grade Linien mit BC parallel gezogen, so theilen sie AC in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

Die 28. Erklärung.

159. Wenn eine Grösse, wie die grade Linie CD, in gleich grosse Theile eingetheilt ist, so heißt jeder Theil von ihr, wie CE ein aliquoter Theil des Ganzen. Es läßt sich alsdenn allemahl durch eine ganze Zahl ausdrücken, wie vielmahl der aliquote Theil im Ganzen enthalten sey, und diese Zahl ist der Exponent des Verhältnisses des Ganzen zu dem aliquoten Theile. 41 Fig.

Die 7. Aufgabe.

41 Fig. 160. Den Exponenten des Verhältnisses einer Grösse *AB* gegen eine andre *CD* zu finden.

Aufl. Der gesuchte Exponent kann allemahl als ein Quotient angesehen werden, den man findet, wenn das vorhergehende Glied des Verhältnisses mit dem nachfolgenden dividirt wird. Wäre also das nachfolgende Glied ein aliquoter Theil des vorhergehenden, so würde man nur suchen müssen, wie vielmahl jenes in diesem enthalten ist, und der gesuchte Exponent wäre alsdenn eine ganze Zahl.

Wenn dagegen das nachfolgende Glied kein aliquoter Theil vom vorhergehenden ist; so theile man das nachfolgende Glied selbst in gleiche Theile, und versuche, ob vielleicht ein aliquoter Theil CE des nachfolgenden Gliedes CD zugleich ein aliquoter Theil des vorhergehenden AB sey. Alsdenn ist der Exponent des Verhältnisses ein Bruch, wie $\frac{4}{3}$ in dem Fall, welchen die 41 Fig. vorstellet. Der Nenner ist die Zahl der gleichen Theile, worin man das nachfolgende Glied CD getheilt hat, der Zähler drückt aus, wie vielmahl einer von diesen aliquoten Theilen des nachfolgenden Gliedes im vorhergehenden AB enthalten sey.

42 Fig. Wäre ein solcher aliquoter Theil CE des nachfolgenden Gliedes nicht zugleich ein aliquoter Theil des vorhergehenden AB; so wird es sich wenigstens durch eine ganze Zahl ausdrücken lassen, wie vielmahl CE aus AB weggenommen werden kann, wenn gleich ein Stück, wie FB als Rest übrig bleibt, welches schon kleiner als CE ist. Alsdenn ist AB =

AF

$AF + FB$, also $\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CD} + \frac{FB}{CD}$, und der Theil $\frac{AF}{CD}$ ist eine Zahl, wie in diesem Fall $\frac{AF}{CD} = \frac{5}{4}$, $\frac{FB}{CD}$ aber muß als ein noch unbekannter Theil des gesuchten Exponenten angesehen werden. Dieser ist jedoch allemahl kleiner als ein Bruch, dessen Zähler $= 1$, der Nenner aber mit dem Nenner des schon gefundenen bekannten Theils einerley ist. Weil nemlich $FB < CE$, also $FB < \frac{1}{4} CD$ ist, so ist $\frac{FB}{CD} < \frac{1}{4}$.

Die 29. Erklärung.

161. Zwey Grössen heissen commensurable Grössen, wenn sich ein aliquoter Theil von der einen angeben lässet, der zugleich ein aliquoter Theil von der andern ist, mithin für beyde ein gemeinschaftliches Maaß abgiebt. Incommensurable Grössen können diejenigen heissen, die kein gemeines Maaß haben.

Zusatz.

162. Wenn die Glieder eines Verhältnisses commensurable Grössen sind; so läßt sich der Exponent desselben entweder als eine ganze Zahl, oder als ein Bruch in bestimmten Zahlen genau angeben. Der Exponent des Verhältnisses gegen eine andre damit incommensurable Grösse läßt sich zwar nicht vollkommen genau, aber doch soweit durch eine Zahl ausdrücken, daß der noch fehlende unbekannte Theil kleiner werden kann, als jeder gegebene noch so kleine Bruch. Wäre AB mit CD incommensurabel, und man verlangte den Exponenten $\frac{AB}{CD}$ so genau, daß

der Fehler nicht völlig $\frac{1}{1000000}$ ausmachte; so würde man vermittelst des im 160 §. beschriebenen Verfahrens finden können, wie vielmahl $\frac{1}{1000000}$ CD in AB enthalten sey. Gesetzt man fände 1252317 mahl, und einen kleinen Reste: so wäre $r < \frac{1}{1000000}$ CD, und man hätte $\frac{AB}{CD} = \frac{1252317}{1000000} + \frac{r}{CD}$, aber $\frac{r}{CD} < \frac{1}{1000000}$.

Die 30. Erklärung.

163. Eine Zahl, die sich bestimmt angeben läßt, nennt man eine rationale Zahl, in wie weit sie die Grösse des vorhergehenden Gliedes in einem Verhältniß gegen das nachfolgende damit commensurable Glied bestimmt und völlig genau auszudrücken dienen kann. Der Exponent des Verhältnisses einer Grösse gegen eine andre mit ihr incommensurable Grösse heißt eine Irrationalzahl. Man kann sich denselben zwar auch als einen Quotienten vorstellen, nur läßt er sich nie völlig genau durch einen solchen Bruch ausdrücken, wovon Zähler und Nenner bestimmte Zahlen sind. Das Verhältniß selbst nennt man ebenfalls rational oder irrational, nachdem die Glieder desselben commensurable oder incommensurable Grössen sind.

Der 1. Zusatz.

164. Die Wurzeln aus unvollkommenen Quadrat- und Cubiczahlen sind Irrationalzahlen.

Der 2. Zusatz.

165. Wenn A und B überhaupt ein Paar incommensurable Grössen von einerley Art bezeichnen, m aber eine ganze Zahl vorstellet; so ist $\frac{1}{m}$ B ein aliquoter

quoter Theil von B. Man setze bey angestellter Prüfung nach dem 160 §., fände sich, daß dieser Theil $\frac{1}{m}$ B in der Grösse A n mahl enthalten sey, und noch ein Rest R, der kleiner als $\frac{1}{m}$ B ist, übrig bliebe; so hat man $A = \frac{n}{m} B + R$, also $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{R}{B} \prec \frac{1}{m}$. Alsdenn bezeichnet $\frac{n}{m}$ den bekannten rationalen Theil der Zahl oder des Exponenten $\frac{A}{B}$, und $\frac{R}{B}$ ist der unbekannte irrationale Theil.

Der 3. Zusatz.

166. Man nehme noch an, daß N jede andre gegebene Zahl bezeichne, jedoch so, daß $N \prec \frac{A}{B}$ sey: so kann die Zahl m so groß angenommen werden, daß die rationale Zahl $\frac{n}{m} \succ N$ wird. Weil nemlich vermöge dieser Voraussetzung $N \prec \frac{A}{B}$ ist, so sey $N + D = \frac{A}{B}$: alsdenn ist D eine Zahl von bestimmter Grösse. Man nehme die Zahl m so groß an, daß $\frac{1}{m} \prec D$ wird, (162 §.) und n sey wie vorhin die Zahl, welche angiebt, wie vielmahl $\frac{1}{m}$ B

in

in A enthalten ist, bis auf einen Rest R, der kleiner ist, als $\frac{1}{m}$ B: alsdenn ist zugleich $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$, mithin auch $\frac{R}{B} < D$. Ferner ist nun auch $\frac{n}{m} + \frac{R}{B} = \frac{A}{B}$, wie im vor. §.; also $\frac{n}{m} + \frac{R}{B} = N + D$, mithin bey eben dieser Voraussetzung $\frac{n}{m} > N$.

Der 29. Lehrsatz.

167. Wenn die Verhältnisse $A : B$ und $C : D$ irrational, auch überdem die ähnlichen aliquoten Theile $\frac{1}{m} B$ und $\frac{1}{m} D$ der beyden nachfolgenden Glieder in den dazu gehörigen vorhergehenden A und C gleich vielmahl enthalten, mithin die rationalen Theile der Exponenten dieser Verhältnisse gleich groß sind, wie groß auch die Zahl m angenommen wird; so ist $A : B = C : D$.

Beweis Wenn $\frac{C}{D} < \frac{A}{B}$ wäre, so könnte die Zahl m so groß angenommen werden, daß $\frac{n}{m} > \frac{C}{D}$ würde. (166 §.) Es ist aber allemahl $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$, also $\frac{n}{m} = \frac{C - r}{D}$: mithin wäre $\frac{C - r}{D} > \frac{C}{D}$ welches unmöglich ist.

Wäre

Wäre dagegen $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$; so könnte man die Zahl m wiederum so groß annehmen, daß $\frac{n}{m} > \frac{A}{B}$ würde. (166 §.) Vermöge der Voraussetzung aber ist allemahl $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, also $\frac{n}{m} = \frac{A-R}{B}$, und es wäre $\frac{A-R}{B} > \frac{A}{B}$, welches ebenfalls unmöglich ist.

Der 1. Zusatz.

168. Fände man die rationalen Theile der Quotienten $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}$ ungleich groß, so wären gewiß diese Quotienten selbst ungleich. Wäre $\frac{A}{B} = \frac{n+1}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$, so wäre schon $\frac{n+1}{m} > \frac{C}{D}$, weil $\frac{1}{m} > \frac{r}{D}$ ist, also auch $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$.

Der 2. Zusatz.

169. Weiß man aus andern Gründen, daß $A : B = C : D$ sey; so sind ähnliche aliquote Theile $\frac{1}{m} B$ und $\frac{1}{m} D$ der beyden nachfolgenden Glieder allemahl in den dazu gehörigen vorhergehenden Gliedern gleich vielmahl enthalten, wie groß auch die Zahl m angenommen wird: denn im entgegengesetzten Fall wären die Verhältnisse $A : B$ und $C : D$ ungleich. (168 §.)

Der

Der 3. Zusatz.

170. Wendet man diese Sätze auf die vier graden Linien AB, CD, EF, GH, (43 Fig.) an; so findet man $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{3} + \frac{KB}{CD}$, und $\frac{EF}{GH} = \frac{7}{3} + \frac{LF}{GH}$. Demnach sind die rationalen Theile dieser Exponenten gleich. Wofern man sich aus andern Gründen davon versichern kann, daß diese nothwendig allemahl gleich groß gefunden werden, wenn auch CD und GH in vielmehr als 5 gleiche Theile getheilt werden; so ist man auch versichert, daß AB : CD = EF : GH sey.

Der 4. Zusatz.

171. Eine jede Proportion, auch alsdenn, wenn beyde Verhältnisse irrational sind, läßt sich ganz allgemein auf folgende Art ausdrücken: $mA : A = mB : B$, wie es oben für den besondern Fall schon geschehen ist, wenn alle vier Glieder Zahlen sind. (89 §. Rech.) Hier muß man nur bemerken, daß m in dem Fall eine Irrationalzahl bezeichne, wenn die Glieder der beyden Verhältnisse incommensurabel sind. Weil man nun in jedem Fall eine Rationalzahl angeben kann, deren Differenz von der Irrationalzahl m kleiner als jeder vorgelegte noch so kleine Bruch ist; (162 §.) so müssen alle Sätze, die aus dem allgemeinen Ausdruck $mA : A = mB : B$ folgen, wenn man sich m als eine Rationalzahl vorstellet, auch richtig seyn, wenn gleich m eine Irrationalzahl wäre. Eine solche Proportion kann also, auch in umgekehrter Ordnung so geschrieben werden $A : mA = B : mB$, da dann die Zahl $\frac{1}{m}$ der Exponent ist.

Der

Der 5. Zusatz.

172. In jeder Proportion $mA : A = mB : B$, wenn alle vier Glieder von einerley Art sind, kann man, wie im 91 §. der Rechenkunst, die mittlern Glieder verwechseln, überdem folgt auch daraus, (terminos antecedentes et consequentes summando) es sey $mA + mB : A + B = mA : A$, oder $= mB : B$, weil m ebenfalls des Verhältnisses $mA + mB : A + B$ Exponent ist. (87. 88 §. Rech.) Aus eben dem Grunde ist $mA - mB : A - B = mA : A$ oder $= mB : B$. Wenn also in mehrern Proportionen, wie

$$A : B = M : N$$
$$C : D = M : N$$
$$E : F = M : N$$

die Glieder in der dritten und vierten Stelle einerley sind, so hat man auch $A + C + E = B + D + F = M : N$.

Der 6. Zusatz.

173. Aus eben der Proportion $mA : A = mB : B$ folgt auch $mA + A : A = mB + B : B$, oder $mA - A : A = mB - B : B$. Im ersten Fall ist $m + 1$, im andern Fall $m - 1$ der Exponent beyder Verhältnisse.

Der 7. Zusatz.

174. Aus zwoen Proportionen dieser Art $mA : A = mB : B$, und $A : C = B : D$, folgt auch (ordinatim et ex aequo) $mA : C = mB : D$. Wenn nemlich $A = nC$, so ist $B = nD$. (169 §.) Ferner ist $mnC : C = mnD : D$, (171 §.) also auch $mA : C = mB : D$. Wenn die beyden mittlern Glieder der ersten Proportion mit den beyden äussern der zweyten einerley sind, wie

$$mA : A = mB : B,$$

und $A : C = D : mB$, so hat man (perturbate et ex aequo)

aequo) $mA : C = D : B$. Wenn nemlich $A = nC$ ist, so muß $D = n \cdot mB$ seyn, (169 §.) auch hat man $C = \frac{1}{n} A$. Ferner ist $n \cdot mA : A = n \cdot mB : B$, also auch $mA : \frac{1}{n} A = n \cdot uB : B$, oder $mA : C = D : B$.

Der 8. Zusatz.

175. Wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist; so hat man vermöge des 173 §. zwey andre $A + B : B = C + D : D$, und $B : A - B = D : C - D$: Daraus folgt die dritte $A + B : A - B = C + D : C - D$. (174 §.)

Wenn ferner $B > A$, mithin auch $D > C$ ist; so hat man $B : A = D : C$ (171 §.) also $B \pm A : A = D \pm C : C$. (173 §.) Wird hiemit die Proportion $A : B = C : D$ verbunden; so folgt daher auch $B \pm A : B = D \pm C : D$. (174 §.)

Der 30. Lehrsatz.

44 Fig. 176. Wenn eine grade Linie *DE*, zwo Seiten *AB* und *AC* eines Dreyecks schneidet, und mit der dritten *BC* parallel ist; so haben die abgeschnittenen Stücke *AD* und *AE* gegen die Seiten *AB* und *AC* einerley Verhältniß.

Beweis. Man theile die Seite AB in eine gefällige Anzahl gleicher Theile, durch die Theilungspuncte aber ziehe man grade Linien mit BC parallel: diese theilen AC in eben so viele gleiche Theile, so daß AF und AG ähnliche aliquote Theile von AB und AC werden. (157 §.) Alsdenn ist AF in AD so vielmahl, als AG in AE enthalten, und das allemahl, in wie viele gleiche Theile man AB und AC theilen will. Demnach ist $AD : AB = AE : AC$ (167 §.)

Der

Der 1. Zusatz.

177. Aus dieser Proportion folgt auch AB — AD : AB = AC — AE : AC, (175 §) also BD : AB = CE : AC. Aus beyden Proportionen aber AD : AB = AE : AC, und AB : BD = AC : CE folgt weiter AD : BD = AE : CE. (174 §.)

Der 2. Zusatz.

178. Wenn zwo Seiten AB, AC eines Dreyecks bey D und E so getheilt sind, daß die Proportion AD : AB = AE : AC richtig ist; so ist auch DE mit BC parallel. Denn wenn man durch D eine andre grade Linie DH mit BC parallel ziehen könnte; so wäre auch AD : AB = AH : AC, mithin AE : AC = AH : AC, und AE = AH, welches nur möglich ist, wenn H mit E, also auch DH mit DE zusammen fällt. 44 Fig.

Auch alsdenn, wenn die Dreyecke ABC, AKL, einander an der Spitze entgegengesetzt sind, ist KL mit BC parallel, wenn sich AL : AB = AK : AC verhält. Wird nemlich AF = AL, AG = AK gemacht; so ist auch AF : AB = AG : AC, also FG mit BC parallel. Weiter ist AGF = AKL, (51 §.) also KL mit FG, und eben darum auch mit BC parallel.

Der 3. Zusatz.

179. Zwo grade Linien, AB, CD, wenn sie zwischen zwoen Parallellinien AC, BD, stehen, werden von der dritten EF, die mit den letzten beyden parallel ist, so geschnitten, daß AE : AB = CF : CD ist. Wenn nemlich AD gezogen wird, so hat man AE : AB = AG : AD, und CF : CD = AG : AD, (176. 177 §.) also auch AE : AB = CF : CD. 45 Fig.

Der 4. Zusatz.

180. Auch umgekehrt: wenn AC und BD parallel, AB und CD aber bey E und F so getheilt sind, daß AE : AB = CF : CD ist; so ist auch EF mit AC und BD parallel. Denn eine grade Linie EH, die mit AC und BD parallel läuft, schneidet CD in H so, daß AE : AB = CH : CD ist. Wenn also auch AE : AB = CF : CD ist; so hat man CH : CD = CF : CD, folglich CH = CF: mithin müssen die Puncte H und F, also auch die Linien EH und EF einerley seyn.

Der 31. Lehrsatz.

46 Fig. 181. In gleichwinklichten Dreyecken *ABC* *DEF*, sind die gleichnahmigen Seiten proportional, und die Dreyecke sind einander ähnlich.

Auch umgekehrt: wenn die Seiten eines Dreyecks *ABC* den Seiten eines andern *DEF* in eben der Ordnung proportional sind; so sind die Winkel zwischen den proportionalen Seiten gleich groß, und die Dreyecke sind ähnliche Dreyecke.

Beweis des 1. S. Wenn B = E, A = D, folglich C = F und EF die Seite ist, die mit BC zwischen gleichen Winkeln liegt; so nehme man BG = EF, und ziehe GH mit AC, GI mit AB parallel. Alsdenn haben die Dreyecke DEF und BHG gleiche Seiten und Winkel; (107 §.) auch ist AI = HG = DF. Ueberdem ist BH : AB = BG : BC (176 §.) und AI : AC = BG : BC; (177 §.) also auch DE : AB = EF : BC, und DF : AC = EF : BC: mithin ferner DE : AB = DF : AC.

Be-

Beweis des 2 S. Wenn die Verhältnisse DE : AB, DF : AC, EF : BC gleich, also EF und BC ein paar gleichnahmige Seiten sind; so nehme man BG = EF und ziehe GH mit AC parallel. Alsdenn werden die Winkel BHG = BAC, BGH = ACB, und die Dreyecke ABC, BHG einander ähnlich: (1 S.) also BH : BG = AB : BC, und BH : HG = AB : AC. Vermöge der Voraussetzung ist AB : BC = DE : EF, und AB : AC = DE : DF; also auch BH : BG = DE : EF, und BH : HG = DE : DF. Demnach ist BH = DE, weil BG = EF ist; also ferner HG = DF, und die Dreyecke BHG, DEF haben gleiche Seiten. Daraus folgt, daß ihre Winkel, mithin auch die Winkel der Dreyecke, ABC, DEF, gleich sind.

Der 32. Lehrsatz.

182. Dreyecke *ABC*, *DEF*, die einen gleichen Winkel haben, $B = E$, sind ähnliche Dreyecke, wenn auch die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, einander proportional sind. 46 Fig.

Auch sind solche Dreyecke *ABC*, *DEF*, die einen gleichen Winkel haben, $B = E$ und zwo proportionale Seiten, *AB*, *AC*, *DE*, *DF*, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, einander ähnlich: wenn die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite grösser ist, als die an demselben anliegende Seite.

Beweis des 1. S. Auf BA nehme man das Stück BH so groß, als die gleichnahmige Seite ED, auch eben so auf BC das Stück BG = EF, und ziehe GH: so ist auch HG = DF, BHG = EDF, HGB = DFE. (51 §.) Ueberdem ist BA : BC = BH :

BG, also HG mit AC parallel, (178 §.) und EDF = BHG = A, EFD = HGB = C. (107 §.) Folglich das Dreyeck DFE ∼ ABC. (181 §.)

Beweis des 2. S. In den Dreyecken ABC, DEF, sey B=E, und BA : AC = ED : DF, auch überdem AC > AB, also DF > ED. Man nehme BH = ED, und mache den Winkel BHG = A; so ist das Dreyeck BHG ∼ ABC, (181 §.) und BA : AC = BH : HG. Vermöge der Voraussetzung ist auch BA : AC = ED : DF, also BH : HG = ED : DF. Ferner war BH = ED, also ist HG = DF, mithin der Winkel D = BHG (97 §.) = A, und das Dreyeck DEF ∼ ABC. (181 §.)

Der 33. Lehrsatz.

47 Fig. 183. Eine grade Linie *AE*, die von der Spitze des rechten Winkels *A* im rechtwinklichten Dreyeck *ABD* auf die Hypothenuse *BD* senkrecht herabgelassen wird, theilt das Dreyeck in zwo andre, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind.

Beweis. Die Dreyecke ABD und ABE haben gleiche Winkel, weil BAD = R = AEB, und B beyden Dreyecken gemein ist. Auch sind die Dreyecke ABD und ADE gleichwinklicht, weil D zu beyden Dreyecken gehört, und BAD, AED rechte Winkel sind. Demnach sind ABD und ABE, so wie ABD und ADE, mithin auch ABE, und ADE einander ähnlich.

Der 1. Zusatz.

184. Die grade Linie AE, welche von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse senkrecht fällt, ist zwischen den beyden Stücken BE und DE, worin

worin sie die Hypothenuse theilt, die mittlere Proportionallinie.

Der 2. Zusatz.

185. Wenn im Kreise über einem Durchmesser BD die grade Linie EA senkrecht aufgerichtet wird: so ist sie zwischen den beyden Stücken, BE, DE, des Durchmessers die mittlere Proportionallinie. Auch ist jede von den beyden Sehnen AD oder AB zwischen dem Durchmesser BD und dem an der Sehne anliegenden Theil desselben DE oder BE die mittlere Proportionallinie. 47 Fig.

Die 8. Aufgabe.

186. Zu dreyen gegebenen graden Linien a, b, c, die vierte Proportionallinie zu finden. 48 Fig.

Aufl. Man zeichne den Winkel A von willkührlicher Grösse, nehme auf dem einen Schenkel AB $= a$, und AC $= b$, auf dem andern Schenkel aber AD $= c$, und ziehe BD. Ferner ziehe man CE durch C mit BD parallel; so ist AE die gesuchte vierte Proportionallinie. (176 §.)

Zusatz.

187. Wenn b und c gleich groß sind, so findet man eben so zu a und b die dritte Proportionallinie.

Die 9. Aufgabe.

188. Zwischen zwoen gegebenen graden Linien a, b, eine mittlere Proportionallinie zu finden. 47 Fig.

Aufl. Man trage auf einer willkührlich gezogenen graden Linie zuerst BE $= a$ auf, und setze hiernächst ED $= b$ hinzu. Die Summe BD halbire man in C, und verzeichne aus C mit dem Halbmesser CB $=$ CD einen Kreis. Aus E richte man EA senkrecht auf: so ist das die gesuchte mittlere Proportionallinie.

Der 34. Lehrsatz.

49 Fig. 189. Aehnliche Figuren *ABCDEF*, *abcdef*, werden durch gleichnahmige Diagonallinien *AC* und *ac*, *AD* und *ad*, u. s. f. in ähnliche Dreyecke getheilt.

Beweis. Daß ABC ∼ *abc* sey, folgt aus dem 182 §., weil B = *b* ist, und AB : BC = *ab* : *bc*. (154 §.) Man rechne diese Dreyecke von beyden Figuren ab, so bleiben ACDEF, *acdef*, auch noch ähnliche Figuren. Denn es ist BCD = *bcd*, und BCA = *bca*, also BCD − BCA = *bcd* − *bca*, mithin ACD = *acd*. Ueberdem ist auch AC : *ac* = BC : *bc* = CD : *cd*. Daraus folgt ferner, wie vorhin, daß auch das Dreyeck ADC dem Dreyeck *acd* ähnlich sey, und man kann eben so für jedes folgende von den Dreyecken schliessen, worin sich die Figuren durch die Diagonallinien theilen lassen.

Der 1. Zusatz.

49 Fig. 190. In ähnlichen Figuren verhält sich jedes Paar ähnlich liegender Diagonallinien, wie zwo gleichnahmige Seiten: auch verhalten sich die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren, wie jedes Paar gleichnahmiger Seiten, oder Diagonallinien. Es ist nemlich

AB : *ab* = AB : *ab* = AC : *ac*
BC : *bc* = AB : *ab* = AC : *ac*
CD : *cd* = AB : *ab* = AC : *ac* u. s. f.

also AB + BC + CD : *ab* + *bc* + *cd* = AB : *ab* (172 §.) = AC : *ac*. Man kann hier jedesmahl noch die beyden folgenden Seiten DE, *de*, zu den vorigen Summen addiren, bis man sie alle hat, also bleiben auch die ganzen Peripherien in demselben Verhältniß.

Der

Der 2. Zusatz.

191. Wenn die Figuren ABEFGH, *abefgh*, 50
ähnliche reguläre Polygone, CA, CB, *ca*, *cb*, ihre Fig.
gröſten Halbmesser, CD, *cd*, ihre kleinſten Halbmesser sind; so sind die Dreyecke ACB, *acb*, auch ACD, *acd*, einander ähnlich. (181 §.) Demnach ist AB : *ab* = AC : *ac* = CD : *cd*, und daraus folgt, daß die Peripherien der ähnlichen regulären Polygone sich wie ihre gröſten oder kleinſten Halbmesser verhalten.

Der 3. Zusatz.

192. Wenn man in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone verzeichnet hat, wie es die 51ſte Figur vorstellet; so wird der Exponent des Verhältnisses der Peripherie des äussern zur Peripherie des innern Polygons gefunden, wenn man den gröſten Halbmesser des äussern Polygons mit dem Halbmesser des Kreises, oder überhaupt den gröſten Halbmesser eines dieſer Polygone mit seinem kleinſten Halbmesser dividirt.

Die 10. Aufgabe.

193. Es ist eine Zahl gegeben, die auch nur um etwas sehr weniges gröſſer als 1 ist: man soll in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß der Exponent des Verhältnisses der Peripherie des äussern gegen die Peripherie des innern Polygons noch kleiner als jene Zahl wird.

Beweis. Um den Mittelpunct C sey mit dem 51
Halbmesser CF ein Kreis beschrieben, und überdem Fig.
bezeichne m eine sehr groſſe Zahl, so ist die Zahl $1 + \frac{1}{m}$

sehr wenig grösser als 1. Man theile den Halbmesser CF in m gleiche Theile, verlängere ihn nach G, und nehme $FG = \frac{1}{m} CF$; so ist $CG = CF + \frac{1}{m} CF$, mithin $\frac{CG}{CF} = 1 + \frac{1}{m}$. Man ziehe ferner durch G eine grade Linie, die den Kreis in H berührt: (143 §.) so ist HF ein Kreisbogen von bestimmter Grösse. Nun kann man versuchen, wie vielmahl die Sehne dieses Bogens sich in der halben Peripherie des Kreises herumtragen lasse, und auf die Art finden, wie vielmahl der Bogen HF selbst in der halben Peripherie enthalten ist. (70 §.) Wenn nun auch HF vielleicht kein aliquoter Theil der halben Peripherie wäre; wenn dieser Bogen in der halben Peripherie μmahl aber nicht völlig $(\mu + 1)$ mahl enthalten wäre: so kann man doch nun einen aliquoten Theil der halben Peripherie finden, der noch kleiner als HF ist. Es sey die ganze Peripherie $= \Pi$, und die Zahl n entweder $=$ oder noch grösser als $\mu + 1$; so ist $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} \Pi < HF$. Man nehme $HA = HB = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \Pi$, so ist $AB = \frac{1}{n} \Pi$, und die Sehne AB ist die Seite des innern regulären Polygons. Wenn hiernächst die Halbmesser CA und CB bis an die durch H gezogene Tangente in D und E verlängert werden; so ist DE die Seite des ähnlichen äussern Polygons.

Beweis. Es sey P die Peripherie des äussern, p die Peripherie des innern Polygons, so ist $\frac{P}{p} = \frac{CD}{CA}$. (192 §.)

(192 §.) Ueberdem ist CD $\prec$ CG, (94 §.) und CA = CF, also $\frac{CD}{CA} \prec \frac{CG}{CF}$. Weiter ist $\frac{CG}{CF} = 1 + \frac{1}{m}$: also $\frac{CD}{CA} \prec 1 + \frac{1}{m}$, mithin auch $\frac{P}{p} \prec 1 + \frac{1}{m}$.

Der 1. Zusatz.

194 Die Peripherie eines um den Kreis beschriebenen Quadrats ist 8mahl grösser als der Halbmesser, also ist die Peripherie des Kreises $\Pi \prec 8CF$, mithin $\frac{1}{8}\Pi \prec CF$. Wenn nun der Halbmesser CF bey Auflösung der Aufgabe des vorig. §. in 8mahl mehr, also in $8m$ gleiche Theile getheilet, und $FG = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{m} CF$ genommen wird, so erhält man $\frac{P}{p} \prec 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{m}$. Ferner sey $P = p + d$, so ist $\frac{P}{p} = \frac{p+d}{p} = 1 + \frac{p}{d}$, und es wird $\frac{d}{p} \prec \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{m}$, mithin $d \prec \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{8} p$. Weil nun allemahl $p \prec \Pi$ also auch $\frac{1}{8} p \prec \frac{1}{8}\Pi$ bleibt, so ist auch $\frac{1}{8} p \prec CF$, folglich $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{8} p \prec \frac{1}{m} CF$, und es ist nun $d \prec \frac{1}{m} CF$. Vermöge der Voraussetzung ist m eine sehr grosse Zahl, also $\frac{1}{m} CF$ ein sehr kleiner Theil des Halbmessers. Man mag aber die Zahl m so groß annehmen als man will; so kann man doch

in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß die Differenz ihrer Peripherien noch kleiner, als $\frac{1}{m}$ CF wird.

Der 2. Zusatz.

195. Wend δ die Differenz bezeichnet, um welche die Peripherie des Kreises von der Peripherie des innern oder äussern Polygons verschieden ist: so ist $\delta < d$, also auch $\delta < \frac{1}{m}$ CF, wenn $d < \frac{1}{m}$ CF ist. Demnach kann man in oder um den Kreis ein reguläres Polygon von so vielen Seiten verzeichnen, daß die Differenz zwischen der Peripherie des Kreises und des Polygons kleiner wird, als jeder gegebene noch so kleine Theil des Halbmessers.

Der 3. Zusatz.

196. Wenn eine Linie L kleiner als die Peripherie des Kreises ist, so giebt es im Kreise ein reguläres Polygon, dessen Peripherie p grösser als diese Linie ist. Denn es sey Π die Peripherie des Cirkels, und $\Pi = L + d$. Aber auch $\Pi = p + \delta$, und das Polygon kann so viele Seiten erhalten, daß $\delta < d$ wird. Weil nun $p + \delta = L + d$ bleibt, so ist alsdenn $p > L$.

Der 4. Zusatz.

197 Wenn dagegen eine Linie L die Peripherie des Kreises übertrift, so giebt es um den Kreis ein äusseres reguläres Polygon, dessen Peripherie kleiner als L ist. Wenn nemlich nun $L = \Pi + d$ ist, und $P = \Pi + \delta$, so kann das Polygon so viele Seiten erhalten, daß $\delta < d$ ist, und alsdenn ist zugleich $P < L$.

Der

Der 5. Zusatz.

198. Eine Linie l, die grösser, als die Peripherie eines jeden innern, und kleiner, als die Peripherie eines jeden äussern Polygons ist, muß der Peripherie Π des Kreises gleich seyn. Denn wenn sie grösser wäre, so gäbe es noch ein äusseres Polygon, dessen Peripherie kleiner wäre. (197 §.) Wenn dagegen $l < \Pi$ wäre, so gäbe es noch ein inneres Polygon, dessen Peripherie grösser als l wäre: (196 §.) also ist $l = \Pi$.

Der 35. Lehrsatz.

199. Das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ist in allen Kreisen einerley.

Beweis. Wenn P und R die Peripherie und den Halbmesser des einen Kreises, p und r die Peripherie und den Halbmesser eines andern Kreises bezeichnen; so ist $\frac{r \cdot P}{R}$ die vierte Proportionallinie zu R, r und P. Man setze $\frac{r \cdot P}{R} = l$: so ist l grösser als die Peripherie eines jeden innern, und kleiner als die Peripherie eines jeden äussern von den regulären Polygonen, die zum Kreise p gehören, wovon r der Halbmesser ist.

Man verzeichne nemlich im Kreise p ein reguläres Polygon von so vielen Seiten, als man will, und im Kreise P ein ähnliches Polygon. Des ersten Peripherie sey $= \pi$, des letzten $= \Pi$, so ist $R : r = \Pi : \pi$. (191 §.) Aber auch $R : r = P : l$; also $\Pi : \pi = P : l$. Weil überdem $P > \Pi$ ist, so muß $l > \pi$ seyn.

Man verzeichne weiter um den Kreis p ein reguläres Polygon von so vielen Seiten als man will, und

um

um den Kreis P ein dem vorigen ähnliches Polygon. Des ersten Peripherie sey q, des letzten Q; so ist $R : r = Q : q$, (191 §.) und zugleich $R : r = P : l$. Daraus folgt $Q : q = P : l$, und es ist allemahl $P < Q$, also auch $l < q$.

Diesemnach muß $l = p$ seyn, (198 §.) und man erhält $R : r = P : p$, oder $P : p = R : r$, mithin auch $P : p = 2R : 2r$, oder $P : 2R = p : 2r$, da dann 2R und $2r$ die Durchmesser sind.

Der 36. Lehrsatz.

52 Fig. 200. Die Flächen gleich hoher Dreyecke *ABC*, *ABD*, oder auch gleich hoher Parallelogramme, verhalten sich wie ihre Grundlinien *BC* zu *BD*.

Beweis. Man theile BD in so viele gleiche Theile, als man will bey E, F, u. s. f. und ziehe auch die Theilungslinien BE, BF, u. s. f. Alsdenn sind BE und ABE ähnliche aliquote Theile von BD und ABD, und diese sind in BC und ABC gleich vielmahl enthalten: mithin ist ABC : ABD = BC : BD. Weil übrigens jedes Parallelogramm doppelt so groß als ein Dreyeck von gleicher Grundlinie und Höhe ist; so gilt der Satz auch für Parallelogramme.

Der 37. Lehrsatz.

53 Fig. 201. Dreyecke *ABC*, *DBC*, oder auch Parallelogramme, auf gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen *BE* : *CF*.

Beweis. Wenn AE und DF mit BC parallel, BE und CF aber auf BC senkrecht sind; so sind dies zugleich die Höhen der Dreyecke. Man ziehe noch CE und BF, so haben die rechtwinklichten Dreyecke EBC, FBC, eine gleiche Höhe BC, wenn man BE, CF, für die Grundlinien annimmt, und es ist EBC

: FBC

: FBC = BE : CF, (200 §.) also auch ABC : DBC = BE : CF. (128 §.) Auf Parallelogramme wird die Anwendung, wie im vorig. §. gemacht.

Die 31. Erklärung.

202. In zweyen oder mehrern Proportionen dieser Art.

$$\begin{aligned} A : B &= M : N \\ B : C &= O : P \\ C : D &= Q : R \end{aligned}$$

ist das Verhältniß A : C zusammengesetzt aus den Verhältnissen A : B und B : C, oder den eben so grossen Verhältnissen M : N und O : P; das Verhältniß A : D ist zusammengesetzt aus den dreyen Verhältnissen A : B, B : C, C : D, oder den eben so grossen Verhältnissen M : N, O : P, Q : R, und diese letztern Verhältnisse siehet man als einfache an. Im Schreiben wird es so ausgedruckt:

$$A : D = \left\{ \begin{matrix} M : N \\ O : P \\ Q : R \end{matrix} \right\}$$

In dem Fall, wenn diese einfachen Verhältnisse alle gleich groß sind, heißt das daraus zusammengesetzte auch ein vervielfachtes Verhältniß, (ratio multiplicata) und zwar insbesondre ein verdoppeltes, oder verdreyfachtes Verhältniß (ratio duplicata, triplicata) nachdem das einfache zweymahl oder dreymahl in dem zusammengesetzten enthalten ist.

Der 38. Lehrsatz.

203. Wenn man alle vorhergehende und alle nachfolgende Glieder mehrerer Verhältnisse in einander multiplicirt; so ist das Verhältniß der Producte zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Factoren.

Be-

Beweis. Es sey $M:N = A:B$
$O:P = B:C;$

so hat man $B = \frac{N}{M} . A$ (98 §. R.) und $C = \frac{P}{O} . B$,

also auch $C = \frac{P}{O} . \frac{N}{M} . A$, und man erhält $\frac{C}{A} = \frac{P . N}{O . M}$, oder $A:C = O . M : P . N$.

Wäre ferner $Q:R = C:D$, so wäre das Verhältniß $A:D$ aus den Verhältnissen $O . M : P . N$ und $Q:R$ zusammengesetzt: also vermöge des schon bewiesenen $A:D = M . O . Q : N . P . R$. So gilt der Schluß für jede Anzahl einfacher Verhältnisse auf die nächstfolgende um Eins grössere Anzahl.

Zusatz.

204. Verhältnisse, die man aus einer gleichen Anzahl gleicher Verhältnisse zusammensetzt, sind ebenfalls gleiche Verhältnisse.

Der 39. Lehrsatz.

54 Fig 205. Das Verhältniß zweyer Dreyecke *ABC*, *DEF*, oder auch zweyer Parallelogramme, ist aus dem Verhältnissen ihrer Grundlinien *BC* : *EF*, und Höhen *AG* : *DH*, zusammengesetzt.

Beweis. Man setze CK auf BC senkrecht, mache $CK = DH$, und ziehe BK, so ist

Dr. ABC : Dr. BKC = AG : CK (201 §.)
Dr. BKC : Dr. DEF = BC : EE, (200 §.)

folglich Dr. ABC : Dr. DEF $= \left\{\begin{matrix} AG : CK \\ BC : EF \end{matrix}\right\}$, (202 §.)

oder ABC : DEF $= \left\{\begin{matrix} AG : DH \\ BC : EF \end{matrix}\right\}$. Parallelogramme verhal-

verhalten sich, wie Dreyecke, die mit ihnen gleiche Grundlinie und Höhe haben.

Der 1. Zusatz.

206. Das Verhältniß zweyer Quadrate ist demnach doppelt so groß, als das Verhältniß ihrer Seiten: (202 §.) auch verhält sich ein Dreyeck zum andern, oder ein Parallelogramm zum andern, wie die Producte ihrer Grundlinien mit dem Höhen multiplicirt. (203 §.)

Der 2. Zusatz.

207. Zwey Dreyecke oder zwey Parallelogramme sind gleich groß, wenn sich ihre Grundlinien umgekehrt wie die Höhen verhalten.

Der 3. Zusatz.

208. Ein Quadrat ist so groß als ein Rechteck, wenn die Seite des Quadrats zwischen den Seiten des Rechtecks die mittlere Proportionallinie ist.

Der 40. Lehrsatz.

209. Wenn in ähnlichen Dreyecken *ABC*, *DEF*, zwo gleichnahmige Seiten *BC*, *EF*, für die Grundlinien genommen werden; so verhalten sich die Höhen *AM*, *DN*, wie die Grundlinien. 46 Fig.

Beweis. Die Dreyecke ABM und DEN sind einander ähnlich, (181 §.) also ist AM : DN = AB : DE, und AB : DE = BC : EF, (154 §.) folglich auch AM : DN = BC : EF.

Der 1. Zusatz.

210. Es ist Dr. ABC : Dr. DEF $= \left\{\begin{matrix} BC : EF \\ AM : DN \end{matrix}\right\}$ (204 §.) also auch ABC : DEF $= \left\{\begin{matrix} BC : EF \\ BC : EF \end{matrix}\right\}$, oder das Verhältniß ähnlicher Dreyecke gegen einander ist einer-

einerley mit dem verdoppelten Verhältnisse ihrer gleichnahmigen Seitenlinien.

Der 2. Zusatz.

211. Also verhalten sich ähnliche Dreyecke auch wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten. (206 §.) Weil ferner ähnliche Figuren in eine gleiche Anzahl ähnlicher Dreyecke getheilt werden können, (189 §.) so verhalten sich ähnliche gradlinichte Figuren überhaupt, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten. (172 §.)

Der 3. Zusatz.

50 Fig. 212. Aehnliche reguläre Polygone AEFGHB, *aefghb*, verhalten sich wie die Quadrate ihrer grösten oder kleinsten Halbmesser. Denn es ist AB : *ab* = AC : *ac* = CD : *cd*.

Die 32. Erklärung.

213. Ein Quadrat, worin die Seite so lang ist, als eins der bekannten Längenmaasse, (49 §.) erhält davon den Nahmen. Es heißt eine **Quadratruthe**, ein **Quadratfuß**, ein **Quadratzoll**, eine **Quadratlinie**, ein **Quadratscrupel**, nachdem die Seitenlinie die Länge einer Ruthe hat, oder eines Fusses, eines Zolles, einer Linie, eines Scrupels im Längenmaaß.

Die 11. Aufgabe.

214. **Die Grösse des Fläche eines Parallelogramms im Quadratmaaß zu finden, wenn man Grundlinie und Höhe im Längenmaasse messen kann.**

Aufl. Man muß Grundlinie und Höhe mit einerley Längenmaaß messen, damit die Zahlen, welche ihre Länge angeben, einerley Nahmen erhalten. Hiernächst multiplicirt man diese beyden Zahlen in einan-

einander, so giebt das Product die Grösse der Fläche im Quadratmaaß an, das mit demjenigen Längenmaaß einerley Nahmen hat, womit Grundlinie und Höhe sind gemessen worden.

Beweis. Es sey Q das Quadratmaaß, und L die Seite desselben; des Parallelogramms P = ABCD Grundlinie AB, die Höhe CE: so ist P : Q = AB . CE : L . L. (206 §.) Hier ist aber L = 1, also P : Q = AB . CE : 1, und es ist Q in der Fläche P so vielmahl enthalten, als die Zahl AB . CE Eins enthält. 55 Fig.

Exempel. Es sey AB = 39,36 Ruth. CE = 54,78 Ruthen, so ist P = 2156,1408 Qu. Ruth.

Der 1. Zusatz.

215. Die Grösse der Fläche eines Quadrats wird im Quadratmaaß gefunden, wenn man die Zahl, welche die Grösse der Seitenlinie im Längenmaaß ausdrückt, mit sich selbst multiplicirt.

Der 2. Zusatz.

216. Wenn man Duodecimalmaaß braucht, (49 §.) so enthält ein Quadratfuß 144 Quadratzoll, und so jedes grössere Quadratmaaß 144 Quadratmaasse des nächstkleinern Nahmens. Wird aber Decimalmaaß gebraucht, so fasset jedes grössere Quadratmaaß 100 Quadratmaasse des nächstkleinern Nahmens.

Der 3. Zusatz.

217. Das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe giebt den Flächeninhalt eines Dreyecks im Quadratmaaß. (129 §.) Weil ferner jede gradlinichte Figur durch Diagonallinien in Dreyecke getheilt werden kann, so wird ihr Flächeninhalt gefunden, wenn der Inhalt eines jeden dieser Dreyecke

für sich gesucht, und hiernächst alles zusammen addirt wird.

Der 4. Zusatz.

218. Den Flächeninhalt eines regulären Polygons giebt das halbe Product aus der Peripherie des Polygons in den kleinsten Halbmesser. (153 §.)

Die 12. Aufgabe.

219. Es ist, wie im 193 §., eine Zahl $1 + \frac{1}{m}$ gegeben, welche um etwas sehr weniges grösser als Eins seyn wird, wenn m eine sehr grosse Zahl ist; man soll in und um den Kreis ein paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß der Exponent des Verhältnisses der Fläche des äussern gegen die Fläche des innern Polygons kleiner wird, als jene gegebene Zahl.

51 Fig. Aufl. Man nehme auf dem verlängerten Halbmesser CF das Stück $FL = \frac{1}{m} CF$, also $CL = \left(1 + \frac{1}{m}\right) CF$, so kann man den 188 §. gemäß zwischen CF und CL eine mittlere geometrische Proportionallinie suchen. Diese sey $= CG$, so ist $CG^q = CF \cdot CL = \left(1 + \frac{1}{m}\right) CF^q$, oder $\frac{CG^q}{CF^q} = 1 + \frac{1}{m}$ und man kann die regulären Polygone so wie im 193 §. verzeichnen. Wenn alsdenn Q und q die Flächen des äussern und innern Polygons bezeichnen;

zeichnen; so ist $\frac{Q}{q} = \frac{CD^q}{CA^q}$. (212 §.) Aber CD $\prec$ CG, also $\frac{CD^q}{CA^q} \prec \frac{CG^q}{CF^q}$, oder $\frac{CD^q}{CA^q} \prec 1 + \frac{1}{m}$; folglich auch $\frac{Q}{q} \prec 1 + \frac{1}{m}$.

Der 1. Zusatz.

220. Die Fläche eines um den Kreis beschriebenen Quadrats ist 4mahl grösser, als das Quadrat seines Halbmessers: wenn also C die Kreisfläche bezeichnet, so ist $C \prec 4CF^q$, mithin $\frac{1}{4}C \prec CF^q$. Wenn nun bey Auflösung der Aufgabe im vor. §. $FL = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m} CF$, also $CL = \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m}\right) CF$ genommen wird, so erhält man $CG^q = \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m}\right) CF^q$, und $\frac{Q}{q} \prec 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m}$. Ferner sey $Q = q + d$, also $\frac{Q}{q} = \frac{q+d}{q} = 1 + \frac{d}{q}$, so erhält man $\frac{d}{q} \prec \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m}$, folglich $d \prec \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4} q$. Es bleibt aber allemahl $q \prec C$, also $\frac{1}{4} q \prec \frac{1}{4} C$, mithin auch $\frac{1}{4} q \prec CF^q$, und $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4} q \prec \frac{1}{m} CF^q$: demnach ist nun $d \prec \frac{1}{m}$

CF^q. Man mag also die Zahl m so groß man will, mithin für $\frac{1}{m} CF^q$ einen so kleinen Theil vom Quadrat des Halbmessers als man will, annehmen; so kann man doch in und um den Kreis ein paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Seiten verzeichnen, daß die Differenz ihrer Flächen kleiner als $\frac{1}{m} CF^q$ ausfallen muß.

Der 2. Zusatz.

221. Es bezeichne δ die Differenz, um welche die Kreisfläche von der Fläche des innern oder äussern Polygons verschieden ist: so ist $\delta < d$, also auch $\delta < \frac{1}{m} CF^q$, wenn $d < \frac{1}{m} CF^q$ ist. Demnach kann die Differenz zwischen der Kreisfläche und der Fläche des innern oder äussern Polygons kleiner werden, als jeder gegebene noch so kleine Theil vom Quadrat des Halbmessers.

Der 3. Zusatz.

222. Wenn die Fläche einer Figur kleiner als die Kreisfläche ist, so giebt es im Kreise ein reguläres Polygon, dessen Fläche grösser als die erwehnte Figur ist. Die Fläche der Figur sey $= A$, die Kreisfläche $= C$, und $C = A + d$. Man verzeichne im Kreise ein reguläres Polygon von so vielen Seiten, daß die Differenz desselben vom Kreise kleiner als d wird. Ist alsdenn des Polygons Fläche $= q$, die Differenz vom Kreise $= \delta$, so hat man auch $C = q + \delta$, mithin $q + \delta = A + d$. Weil aber nun $\delta < d$ ist, so erhält man $q > A$.

Der

Der 4. Zusatz.

223. Wenn dagegen die Fläche einer Figur grösser als die Kreisfläche ist; so giebt es ein äusseres um den Kreis beschriebenes Polygon, das kleiner als diese Figur ist. Setzt man wiederum die Fläche der Figur $= A$, ihre Differenz vom Kreise $= d$, so ist nun $A = C + d$. Man gebe dem äussern Polygon so viele Seiten, daß die Differenz δ desselben vom Kreise kleiner als d werde. Ist alsdenn die Fläche des Polygons $= Q$, so hat man auch $Q = C + \delta$, folglich $Q < A$, weil $\delta < d$ ist.

Der 5. Zusatz.

224. Eine Figur, die grösser als jedes innere, und kleiner als jedes äussere Polygon ist, muß dem Kreise gleich seyn. Denn wenn sie grösser als der Kreis wäre, so gäbe es noch ein kleineres äusseres Polygon: (223 §.) wenn sie kleiner als der Kreis wäre, so gäbe es noch ein inneres grösseres Polygon. (222 §.) Beydes ist der Voraussetzung entgegen.

Der 41. Lehrsatz.

225. Die Kreisfläche ist einem Dreyeck gleich, wovon die Grundlinie der Peripherie des Kreises, und die Höhe dem Halbmesser gleich ist.

Beweis. Wenn die Peripherie des Kreises $= p$ der Halbmesser $= r$ gesetzt wird, so ist das erwehnte Dreyeck $= \frac{1}{2}pr$, und dasselbe ist grösser als jedes innere, aber kleiner als jedes äussere zu dem Kreise gehörige reguläre Polygon. Die Peripherie des innern Polygons sey $= \pi$, der kleinste Halbmesser $= \varrho$, so ist das Polygon $= \frac{1}{2}\pi\varrho$. (218 §.) Aber $p > \pi$, und $r > \varrho$, also $\frac{1}{2}pr > \frac{1}{2}\pi\varrho$, wie viele Seiten man auch dem Polygon geben will. Die Peripherie des

äussern Polygons sey = P, so ist der kleinste Halbmesser = r, und des äussern Polygons Fläche = $\frac{1}{2}P \cdot r$. (218 §.) Weil nun allemahl $p < P$ ist, so hat man $\frac{1}{2}p \cdot r < \frac{1}{2}P \cdot r$, das Polygon mag so viele Seiten haben, als man will. Demnach ist das Dreyeck, dessen Inhalt = $\frac{1}{2}pr$ ist, der Kreisfläche gleich. (224 §.)

Der 42. Lehrsatz.

56 Fig. 226. Jeder Kreisausschnitt *ACGB* verhält sich zur ganzen Kreisfläche, wie der Bogen *AGB* des Sectors zur ganzen Peripherie.

Beweis. Wenn man die Peripherie des Kreises in gleiche Bogen theilet, und die Theilungshalbmesser CE, CF, CG, u. s. f. ziehet; so sind der Sector ACE und der Bogen AE ähnliche aliquote Theile der Kreisfläche, und der Peripherie. Der Sector ACE ist im Ausschnitt ACBG so vielmahl enthalten, als der Bogen AE im Bogen AGB; folglich verhält sich der Ausschnitt ACBG : Kreisfläche = Bogen AGB : Peripherie. (167 §.)

Zusatz.

227. Wenn die Länge des Bogens AGB = a, die Peripherie des Kreises = p, die Kreisfläche = C, der Sector ACBG = S gesetzt wird; so ist $p : a = C : S$, und $C = \frac{1}{2}pr$, (225 §.) also $p : a = \frac{1}{2}pr : S$. Daraus folgt $S = \frac{1}{2}a \cdot r$, (98 §. Rech.) mithin ist der Ausschnitt einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie dem Bogen des Sectors, die Höhe aber dem Halbmesser gleich ist.

Die 33. Erklärung.

228. Eine Figur quadriren heißt ein Quadrat verzeichnen, daß der gegebenen Figur gleich ist.

Der

Der 1. Zusatz.

229. Wenn ein Rechteck gegeben ist, so sucht man nach dem 188 §. zwischen den Seiten desselben eine mittlere Proportionallinie: diese ist die Seite des dem Rechteck gleichen Quadrats. (208 §.)

Der 2. Zusatz.

230. Wenn die gegebene Figur ein schiefwinklichtes Parallelogramm, oder ein Dreyeck ist, so zeichnet man leicht ein eben so grosses Rechteck, im ersten Fall mit dem Parallelogramm auf gleicher Grundlinie in gleicher Höhe, im letzten Fall auf einer halb so grossen Grundlinie, als das Dreyeck hat, in eben der Höhe. Dies Rechteck quadrirt man, wie vorhin gewiesen ist, so ist auch das schiefwinklichte Parallelogramm, oder das Dreyeck, quadrirt.

Der 3. Zusatz.

231. Statt eines gegebenen regulären Polygons quadrirt man das eben so grosse Dreyeck. (153 §.) Wenn ein Kreis gegeben wäre, oder ein Kreisausschnitt; so könnte man das demselben gleiche Dreyeck (225. 227 §.) eben so, mithin auch den Kreis quadriren: nur müste man eine grade Linie finden können, die der ganzen Peripherie des Kreises, oder im Fall es ein Ausschnitt ist, dem Bogen des Ausschnitts gleich wäre.

Die 13. Aufgabe.

232. Die Länge zwoer Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ist im bekannten Maaß gegeben: man soll die Länge der dritten Seite durch Rechnung finden.

Aufl. Wenn a die eine, b die andre Perpendicularseite, und h die Hypothenuse bezeichnet; so ist $h^2 = a^2 + b^2$, und $a^2 = h^2 - b^2$. (131 §.)

Daraus findet man $h = \sqrt{(a^q + b^q)}$ und $a = \sqrt{(h^q - b^q)}$, oder auch $b = \sqrt{(h^q - a^q)}$.

Die 14. Aufgabe.

51 Fig. 233. Die Länge der Seite AB eines regulären Polygons und der gröste Halbmesser CA sind gegeben: man soll den kleinsten Halbmesser CK finden.

Aufl. Weil CK auf AB senkrecht ist, so ist $AK = \frac{1}{2}AB$, und man findet im rechtwinklichten Dreyeck ACK die Seite $CK = \sqrt{(CA^q - \frac{1}{4}AB^q)}$ (232 §.)

Der 1. Zusatz.

234. Wenn man den Halbmesser des Kreises $CF = CA = 1$ annimmt, (etwa 1 Fuß, oder 1 Ruthe lang) und die Seite des innern regulären Polygons $= l$, den kleinsten Halbmesser desselben $= r$ setzt; so ist der gröste Halbmesser $= 1$, und man erhält $r = \sqrt{(1 - \frac{1}{4}l^2)}$. Man setze ferner die Seite des ähnlichen äussern regulären Polygons $= L$, den grösten Halbmesser desselben $= \varrho$; so ist vermöge des 192 §. $\frac{L}{l} = \frac{CA}{CK} = \frac{1}{r}$, weil hier $CA = 1$ ist, mithin $L = \frac{l}{r}$. Ferner ist $\frac{CD}{CA} = \frac{CH}{CK}$, also $\varrho = \frac{1}{r}$.

Der 2. Zusatz.

235. Die Sehne AH ist die Seite eines in eben dem Kreise beschriebenen regulären Polygons von doppelt so vielen Seiten. Hat man CK schon gefunden, so wird auch $HK = CH - CK$ leicht gefunden, und

und daraus ferner $AH = \sqrt{(AK^q + HK^q)}$. Setzt man, wie im vor. §., $AB = l$, $CA = 1$, $CK = r$, und $AH = \lambda$, so ist allemahl $\lambda = \sqrt{((1-r)^2 + \frac{1}{4}l^2)}$.

Die 15. Aufgabe.

236. Die Länge der Peripherie des Kreises für den Halbmesser = 1 so genau zu finden, daß der Fehler kleiner sey, als ein gegebener Bruch so klein man will.

Aufl. Die Peripherie des im Kreise beschriebenen regulären Sechsecks ist = 6, wenn der Halbmesser = 1 ist, und der kleinste Halbmesser $r = \sqrt{(1-\frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86602535$. (233 §.) Ferner findet man die Seite des äussern regulären Sechseckes $L = \frac{l}{r}$ (234 §.) $= \frac{1}{0{,}86602535} =$ 1,15470063, und der gröste Halbmesser $\varrho = \frac{1}{r}$ = 1,1547006 wird für das Sechseck = L, dem 151 §. gemäß.

Aus diesen Zahlen findet man dem 235 §. gemäß die Seite, mithin auch den kleinsten Halbmesser (233 §.) des innern regulären Zwölfecks. Hiernächst kann ferner die Seite und der kleinste Halbmesser des im Kreise beschriebenen regulären Vierundzwanzigecks gefunden, und diese Rechnung so lange fortgesetzt werden, bis man auf ein reguläres Polygon kommt, dessen Peripherie von der Peripherie des Kreises nicht mehr um den gegebenen Bruch verschieden ist. (195 §.)

Wenn man die schon gefundene Seite des äussern regulären Sechseckes = 1,1547006 mit der

Zahl 6 multiplicirt, so findet man die Peripherie $= 6{,}9282036$: demnach ist die Peripherie des Kreises zwar mehr als 6mahl, aber nicht völlig 7 mahl grösser als der Halbmesser. Will man nun ihre Länge so genau haben, daß der Fehler nicht soviel, als der Bruch $\frac{1}{m}$ ausmacht; so muß man die Länge P und p der Peripherien zweyer um den Kreis und im Kreise beschriebenen ähnlichen regulären Polygone suchen, deren Differenz d kleiner als $\frac{1}{m}$ ist. Dieser Bedingung ist ein Genüge geschehen, wenn $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{m}$ ist, (194 §.) weil $\frac{1}{8}\,\Pi$ schon kleiner als der Halbmesser ist, wenn Π die Peripherie des Kreises bezeichnet. Die vorstehende Rechnung aber hat ergeben, daß auch schon $\frac{1}{7}\,\Pi$ kleiner als der Halbmesser sey, also erfodert jene Bedingung, daß auch nur $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{m}$ sey.

Der gröste Halbmesser des äussern Polygons, worauf man zuletzt gekommen ist, sey $= \varrho$, so ist hier $\frac{P}{p} = \varrho$ (192 §.), weil des Kreises Halbmesser $= 1$ angenommen ist. Demnach muß man die Rechnung so lange fortsetzen, bis $\varrho < 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{m}$ gefunden wird.

Der 1. Zusatz.

237. Wenn der Fehler weniger als $\frac{1}{10000}$ betragen soll, so muß ϱ kleiner seyn, als $1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10000}$, oder

oder kleiner als 1,0000142857, und die Rechnung giebt die nachstehende Resultate.

Zahl der Seiten	l innere Seite	$r=\sqrt{(1-\frac{1}{4}l^2)}$ kleinster Halbmesser	$L=l:r$ äussere Seite	$\varrho=1:r$ gröster Halbmesser
6	1,0000000	0,86602535	1,15470063	1,1547006
12	0,5176380	0,9659258	0,5358984	1,0352762
24	0,2610524	0,9914449	0,2633050	1,0086290
48	0,1308062	0,9978585	0,1310870	1,0021456
96	0,0654382	0,9994646	0,0654732	1,0005357
192	0,0327235	0,9998661	0,0327279	1,0001339
384	0,0163624	0,9999665	0,0163628	1,0000335
768	0,0081812	0,9999916	0,0081813	1,0000084
1536	0,0040906	0,9999979	0,0040906	1,0000021

Demnach ist die Seite des innern regulären Polygons von 768 Seiten = 0,0081812, und der gröste Halbmesser des ähnlichen äussern Polygons = 1,0000084. Weil diese Zahl kleiner ist, als die vorhin gefundene $1+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10000}=1,0000142$, so ist man versichert, daß die Peripherie des innern regulären Polygons, wenn es 768 Seiten hat, nicht um $\frac{1}{10000}$ von der Peripherie des Kreises verschieden sey. Es war aber die Polygonseite =

0,0081812

diese multiplicirt mit 768

654496
490872
572684

giebt die Peripherie 6,2831616

Man multiplicire diese Zahl mit 0,0000084, so findet man 0,00000527 . . . als den Ueberschuß der Peripherie des äussern Polygons über der Peripherie des innern. Weil nun dieser noch nicht 0,0001 ausmacht; so muß noch um so mehr die Differenz der Peripherie des Kreises von der Peripherie

pherie des innern Polygons kleiner seyn, als 0,0001. Demnach ist für den Halbmesser = 1

die Peripherie = 6,28316

die halbe Peripherie = 3,14158

Rechnet man auf diesem Wege weiter fort, so findet man für den Halbmesser = 1 die halbe Peripherie, oder, welches einerley ist, für den Durchmesser = 1 die ganze Peripherie =

3,141592 653589 793238 462643 383879 50.

(M. s. *Ludolphi a Ceulen* de circulo et adscriptis liber e vernaculo lat. vers. a Willebrordo Snellio Lugd. Bat. 1619. Lib. III. p. 92. Zetem 2.) Statt dieses sehr mühsamen Weges, die Rechnung zu führen, lehrt die höhere Mathematik weit kürzere Methoden, wodurch eben die Zahl gefunden wird. Eben diese Zahl ist zugleich der Exponent des Verhältnisses der Peripherie zum Durchmesser des Kreises.

Der 2. Zusatz.

238. Man setze ein für allemahl diese eben erwehnte Zahl = π, und behalte sich vor, nachdem mehr oder weniger Schärfe bey der Rechnung nöthig ist, auch mehr oder weniger Decimaltheile davon mit in Rechnung zu bringen; so kann man ungemein leicht alle bei der Kreismessung vorkommende Fälle übersehen. Es bezeichne p die Peripherie, r den halben, d den ganzen Durchmesser; so ist nun $\frac{p}{d} = \pi$, oder auch $\frac{\frac{1}{2}p}{r} = \frac{p}{2r} = \pi$: mithin $p = \pi d$, oder $p = 2\pi r$. Archimedes hat schon für das Verhältniß $p : d = \pi : 1$ die Gränzen $22 : 7$ und $21\frac{7}{71} : 7$, oder $3\frac{1}{7} : 1$ und $3\frac{10}{71} : 1$ angegeben. (Dimensio circuli Pr. III. Theor. III.) Metii Zahlen $355 : 113$ kommen dem Verhältniß $\pi : 1$ soweit nahe,

nahe, daß der Quotient $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ bis auf die sechste Decimalstelle mit der Zahl π zusammen trift. In den meisten Fällen, welche in der Ausübung vorkommen, genügt es, wenn man $\pi = 3{,}1416$ annimmt, weil der Fehler alsdenn noch nicht 0,00001 ausmacht.

Der 3. Zusatz.

239. Wenn die Länge der Peripherie gegeben wäre, und der ganze oder halbe Durchmesser gesucht werden sollte; so hätte man $d = \frac{1}{\pi} p$, und $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} p$, da dann

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\ 886183\ 790671\ 537767\ 926$$

gefunden wird. Man nimmt davon so viele Decimaltheile, als die jedesmahl nöthige Schärfe der Rechnung erfodert: in den meisten Fällen, welche die Anwendung dieser Rechnung erfodern, genügt es, wenn $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$ gesetzt wird.

Der 4. Zusatz.

240. Die Länge eines Bogens a, die Zahl n seiner Grade, und der Halbmesser r, sind drey Grössen, die so von einander abhängen, daß die dritte leicht gefunden werden kann, wenn zwey davon gegeben sind. Denn die Länge der Peripherie ist $2\pi r$, also $360° : n° = 2\pi r : a$, und man erhält $a = \frac{n}{180} \pi r$; mithin umgekehrt $r = \frac{180}{n} \cdot \frac{1}{\pi} a$. Setzt man

$a =$

$a = r$, so findet man $n = 180 . \frac{1}{\pi} = 57{,}2957795$ Grade, oder 57° 17′ 44″ 48‴. Soviele Grade und Theile von Graden fasset jeder Kreisbogen, der so lang als sein Halbmesser ist. Setzt man diese Zahl $= \varrho$, so ist $a = \frac{n}{\varrho} . r$, und $r = \frac{\varrho}{n} . a$.

Der 5. Zusatz.

241. Wenn zwischen den Schenkeln eines Winkels, der n Grade fasset, mit dem Halbmesser $= 1$ der Bogen α und mit einem andern Halbmesser r der Bogen a beschrieben ist; so hat man $\alpha = \frac{n}{180} \pi$, (240. §.) also $a = \alpha . r$. Für einerley Halbmesser verhalten sich die Winkel wie die Bogen, also wie α für den Halbmesser $= 1$, folglich wie $\frac{a}{r}$.

Die 16. Aufgabe.

242. Die Grösse der Fläche eines Kreises im Quadratmaaß zu finden, wenn der ganze oder halbe Durchmesser gegeben ist.

Aufl. 1) Man kann zuerst die Länge der Peripherie, und hiernächst dem 225. §. gemäß das halbe Product aus der Peripherie in den Halbmesser, oder den vierten Theil des Products aus der Peripherie in den Durchmesser suchen: so hat man die Fläche des Kreises im Quadratmaaß, das mit dem Längenmaaß einerley Nahmen hat, womit der halbe oder ganze Durchmesser ist gemessen worden.

2) Setzt man die Kreisfläche $= C$, so ist $C = \frac{1}{2} pr$, oder $\frac{1}{4} pd$, weil $r = \frac{1}{2} d$ ist. Ueberdem hat man

man $p = \pi d = 2\pi r$, (238. §.) also auch $C = \frac{1}{4}\pi dd$, oder $C = \pi rr$: mithin verhält sich die Kreisfläche C : Quadrat des Durchmessers $dd = \frac{1}{4}\pi : 1$, und eben die Kreisfläche C : Quadrat des Halbmessers $rr = \pi : 1$.

Der 1. Zusatz.

243. Die Flächen ungleicher Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer ganzen oder halben Durchmesser. Wenn nemlich K die Fläche eines andern Kreises, R seinen halben, D seinen ganzen Durchmesser bezeichnet; so hat man auch $K : DD = \frac{1}{4}\pi : 1$, und $K : RR = \pi : 1$. Daraus folgt $C : dd = K : DD$, und $C : rr = K : RR$; also auch $C : K = dd : DD = rr : RR$.

Der 2. Zusatz.

244. Den Inhalt des Kreisausschnitts ACBK hat man im Quadratmaaß, wenn man dem 227 §. gemäß das halbe Product aus der Länge des Bogens AKB in den Halbmesser sucht, da dann die Länge des Bogens, wenn sie nicht schon bekannt ist, dem 240 §. gemäß gesucht werden kann. Wäre die Grösse der Kreisfläche schon bekannt, und die Zahl der Grade des Bogens; so würde man ansetzen können 360° : Zahl der Grade des Bogens = Kreisfläche : Inhalt des Ausschnittes. (226 §.) 50. Fig

Der 3. Zusatz.

245. Wenn die Länge AB der Sehne des Segments AKB mit dem Halbmesser bekannt ist, so kann auch ihre Entfernung CD vom Mittelpunct dem 233 §. gemäß gefunden werden. Das ist zugleich die Höhe des gradlinichten Dreyecks ACB für die Grundlinie AB, 50 Fig.

AB, und man kann den Quadratinhalt dieses Dreyecks finden. Wird hiernächst der Inhalt des Dreyecks ABC vom Inhalt des Ausschnitts ACBK abgezogen, so findet man den Inhalt des Abschnitts AKBD. Wäre die Höhe DK des Abschnittes mit der Sehne AB gegeben; so müste man zuförderst den halben oder ganzen Durchmesser suchen. Man würde ansetzen DK : DA = DA : DL, und so würde man den Durchmesser KL = KD + DL finden.

Der 4. Zusatz.

246. Weil allemahl $\pi rr = C$ seyn muß, so ist umgekehrt $rr = \frac{1}{\pi} C$, folglich $r = \sqrt{\frac{1}{\pi}} C$, und $d = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} C$. Wenn also die Grösse C der Kreisfläche im Quadratmaaße gegeben ist; so kann daraus die Grösse des halben oder ganzen Durchmessers im Längenmaasse gefunden werden.

Die 17. Aufgabe.

247. Die Seitenlinie eines Quadrats, das einer gegebenen ebenen Figur gleich ist, durch Rechnung zu finden.

Aufl. Man suche den Inhalt der Figur im Quadratmaaß, und ziehe aus der gefundenen Zahl die Quadratwurzel, so giebt sie die Seitenlinie des gesuchten Quadrats im Längenmaaß an, das mit dem Quadratmaaß, welches die Grösse der Figur ausdrückt, einerley Nahmen hat.

Anfangs-

Anfangsgründe der körperlichen Geometrie.

Der 3. Forderungssatz.

248. Man kann durch zwey Puncte A und B, auch durch drey Puncte A, B, C, die nicht in grader Linie liegen, eine Ebene DE legen. 57 Fig.

Der 6. Grundsatz.

249. Die Lage einer Ebene DE ist völlig bestimmt, wenn sie durch drey Puncte A, B, C, gelegt ist, die nicht in einerley graden Linie befindlich sind. Zwey Puncte A und B allein würden ihre Lage noch nicht bestimmen: man könnte sie um die grade Linie AB noch in jede andre Lage drehen.

Zusatz.

250. Zwo Ebenen AB, CD, können einander in einer graden Linie EF schneiden, alsdenn aber haben sie ausser dieser graden Linie sonst nichts gemein. 58 Fig.

Der 7. Grundsatz.

251. Eine Ebene AB und eine grade Linie CD können einander in einem Punct E schneiden: alsdenn aber haben sie ausser dem Punct E sonst nichts mit einander gemein. Denn eine grade Linie, die durch E und noch einen andern Punct F in derselben Ebene AB liefe, müste ganz in dieser Ebene liegen. (5. §.) 59 Fig.

Die 34. Erklärung.

59 Fig. 252. Eine grade Linie CD steht auf der Ebene AB in dem Punct E (grade, lothrecht) senkrecht, wenn sie mit allen graden Linien, die in der Ebene AB durch den Punct E laufen, rechte Winkel macht.

Die 35. Erklärung.

60 Fig. 253. Eine grade Linie AB ist mit einer Ebene CD parallel, wenn sie eine solche Lage hat, daß sie mit der Ebene nicht zusammen laufen kann, man mag beyde erweitern so weit man will.

Zusatz.

254. Wenn AB mit einer in der Ebene CD liegenden graden Linie EF parallel ist, so ist auch AB mit der Ebene CD parallel. Denn AB und EF verlängert bleiben in einerley Ebene, (84. §.) die CD in EF durchschneidet. Wenn also AB mit CD zusammen stiesse, so müste es in einem Punct geschehen, der in beyden Ebenen zugleich liegt, also in EF, welches der Voraussetzung zuwider ist. Auch umgekehrt: wenn AB mit der Ebene CD parallel ist, und alsdenn CD von einer durch AB gelegten Ebene in EF geschnitten wird; so ist EF mit AB parallel.

Die 36. Erklärung.

58 Fig. 255. Den Neigungswinkel einer Ebene CD gegen eine andere AB, die von der ersten in der graden Linie EF geschnitten wird, findet man, wenn durch einen in der Durchschnittslinie willkührlich gewählten Punct G eine grade Linie GH in der einen Ebene CD, und eine andere GI in der andern Ebene AB auf der Durchschnittslinie EF senkrecht gezogen wird. Der Winkel HGI ist alsdenn der Neigungswinkel, und wenn derselbe ein rechter Winkel ist, so steht eine Ebene auf der andern senkrecht.

Der

Der 43. Lehrsatz.

256. Eine grade Linie *AB*, die nur auf zwoen in der Ebene *LM* gezogenen graden Linien *CD*, *EF*, im Durchschnittspunct *B* senkrecht ist, stehet auf der Ebene *LM* selbst senkrecht. 61 Fig.

Auch umgekehrt: wenn die grade Linie *AB* von dreyen oder mehr andern *CD*, *EF*, *GH* in einerley Punct *B* senkrecht geschnitten wird; so liegen diese letztern alle in einerley Ebene.

Beweis. Man ziehe in der Ebene LM durch B die dritte grade Linie GH, nehme BC = BD, auch BE = BF, und ziehe CE, DF: so ist CE mit DF parallel, (178. §.) also wird BG = BH. (179. §.) Ueberdem ist CE = DF, und EG = FH. (51. §.) Noch ziehe man AC, AE, AG, und AD, AF, AH, so wird AC = AD, AE = AF. (51. §.) Weil überdem EC = DF war, so wird der Winkel AEG = AFH, (57. §.) folglich AG = AH. (51 §.) Demnach ist der Winkel ABG = ABH (57. §.) und AB auf GH senkrecht. (10. §.)

Weil dieser Beweis von allen graden Linien gilt, die durch B in der Ebene LM gezogen werden können; so ist AB auf LM senkrecht. (252. §.)

2. Die Ebene des Winkels CBG wird von der Ebene ABE in einer graden Linie geschnitten, diese liegt in beyden Ebenen zugleich, und ist in der Ebene ABE auf AB senkrecht: also muß BE selbst diese Durchschnittslinie seyn, (15. §.) folglich mit BC und BG in einerley Ebene liegen.

Der 1. Zusatz.

61 Fig. 257. Die senkrechte Linie AB ist unter allen, die von A nach der Ebene LM gezogen werden können, die kürzeste: also ist sie die Entfernung des Puncts A von der Ebene LM. Auch umgekehrt: die kürzeste unter den graden Linien, welche von einem Punct nach einer Ebene laufen, muß auf der Ebene senkrecht seyn; weil man sonst eine andre grade Linie von diesem Punct nach der Ebene senkrecht ziehen könnte, und so wäre jene noch nicht unter allen die kürzeste Linie.

Der 2. Zusatz.

258. Durch einen Punct B in der Ebene LM läßt sich nur eine grade Linie AB auf LM senkrecht setzen. Denn wäre auch BK auf LM senkrecht; so würden die Ebene des Winkels ABK und die Ebene LM einander in BD schneiden. Alsdenn wären ABD und KBD rechte Winkel, welches nicht seyn kann. (14 §.)

Der 3. Zusatz.

259. Auch von einem Punct A ausserhalb der Ebene LM kann nur eine grade Linie AB nach LM senkrecht herabgelassen werden. Wenn auch AD auf LM senkrecht wäre; so würde LM von der Ebene BAD in BD geschnitten, und das Dreyeck ABD hätte bey B sowohl als auch bey D einen rechten Winkel gegen den 80 §.

Der 4. Zusatz.

58 Fig. 260. Die Durchschnittslinie EF zwoer Ebenen AB, CD, stehet auf der Ebene HGI ihres Neigungswinkels senkrecht.

Der

Der 5. Zusatz.

261. Eine grade Linie HM kann nicht auf zwoen Ebenen AB, CD, die einander in EF schneiden, zugleich senkrecht seyn. Wenn von H und M nach einen Punct G in EF die graden Linien HG, MG, gezogen werden, so kann nicht beydes zugleich GMH und GHM ein rechter Winkel seyn. 58 Fig.

Der 44. Lehrsatz.

262. Wenn *AB* auf der Ebene *LM* senkrecht, und *CD* mit *AB* parallel ist; so ist auch *CD* auf *LM* senkrecht. 62 Fig.

Beweis. Die Parallellinien AB, CD, liegen in einer Ebene, (98 §.) welche LM in BD schneidet, und in derselben Ebene liegt DA. In der Ebene LM setze man DE auf DB senkrecht, mache DE = AB, und ziehe BE: so ist ABD = R = BDE, und BD = BD, also auch AD = BE. (51 §.) Man ziehe ferner AE, so passen die Dreyecke AEB und AED auf einander, (57 §.) also ist ADE = ABE = R. Weil nun auch BDE = R war, so ist ED auf der Ebene ABDC senkrecht und CDE = R. (256 §.) Weiter ist CDB = 2R − ABD = R: also steht CD auf LM senkrecht. (256 §.)

Der 1. Zusatz.

263. Zwo grade Linien AB, CD, die auf einerley Ebene LM senkrecht stehen, sind parallel. Denn man kann durch D eine grade Linie mit AB parallel ziehen, diese steht auf LM senkrecht, und muß mit DC zusammen fallen. (258 §.)

Der 2. Zusatz.

264. Zwo grade Linien AB, CD, die mit einer dritten EF parallel laufen, sind einander selbst parallel, auch wenn sie nicht in einerley Ebene liegen.

Denn in der Ebene CDEF kann man ED, und in der Ebene ABEF eben so EB auf EF senkrecht setzen, durch BED aber eine Ebene LM legen: so ist EF auf LM senkrecht. (256 §.) Demnach sind auch AB und CD auf LM senkrecht, (262 §.) und eben darum einander parallel. (263 §.)

Der 45. Lehrsatz.

63 Fig. 265. Zweene Winkel *ACB*, *DEF*, die nicht in einerley Ebene liegen, sind gleich groß, wenn die Schenkel *CA*, *ED*, imgleichen *CB*, *EF*, parallel sind.

Beweis. Man nehme CA = ED, CB = EF, so sind AD und BF so groß, als CE, und mit CE parallel; (113 §.) also sind auch AD und BF gleich groß und parallel; (264 §.) mithin ferner AB = DF (113 §.) und ACB = DEF. (57 §.)

Zusatz.

58 Fig. 266. Der Neigungswinkel HGI der Ebene CD gegen AB (58 Fig.) wird von gleicher Grösse gefunden, man mag den Punct G in der Durchschnittslinie EF, wo man will, nehmen.

Der 46. Lehrsatz.

64 Fig. 267. Wenn eine grade Linie *BC* auf der Ebene *LM* senkrecht ist, so steht jede durch *BC* gelegte Ebene *AG* auf *LM* auch senkrecht.

Beweis. Die Ebene AG schneide LM in der graden Linie AD, diese wird durch B laufen, und man kann BF in der Ebene LM auf AD senkrecht setzen. Weil alsdenn auch BG auf AD senkrecht ist, (252 §.) so ist CBF der Ebene AG Neigungswinkel gegen LM, und das ist ein rechter Winkel: (252 §.) also ist AG auf LM senkrecht.

Der

Der 1. Zusatz.

268. Zwo Ebenen AB, CD, die einander in EF schneiden, sind auf der Ebene HGI ihres Neigungswinkels senkrecht. 58 Fig.

Der 2. Zusatz.

269. Eine grade Linie BC, die in einer von zween auf einander senkrechten Ebenen AG, LM, auf beyder Durchschnitt AD senkrecht ist, steht auch auf der andern Ebene LM senkrecht. Wenn nemlich auch BF auf AD in der Ebene LM senkrecht ist, so ist CBF der Neigungswinkel, (255 §.) also CBF = R = CBA, und BC auf LM senkrecht. (256 §.) 64 Fig.

Der 47. Lehrsatz.

270. Wenn zwo Ebenen *CG*, *HF*, einander schneiden, und auf einer dritten *LM* senkrecht sind; so ist auch ihr Durchschnitt *AB* auf *LM* senkrecht. 65 Fig.

Beweis. In der Ebene LM kann man BI auf EF, und BK auf CD senkrecht ziehen: so ist BI auf HF, BK auf CG senkrecht. (269 §.) Demnach sind ABI, ABK, rechte Winkel, und AB ist auf LM senkrecht. (256 §.)

Der 37. Lehrsatz.

271. Wenn eine grade Linie AC auf der Ebene LM nicht senkrecht, sondern schief steht, und alsdenn AB auf LM senkrecht, hiernächst aber CB gezogen wird; so ist ACB der Linie AC Neigungswinkel gegen die Ebene LM, und AB das Neigungsloth. 66 Fig.

Der 1. Zusatz.

272. Die Ebene des Neigungswinkels ACB ist auf der Ebene LM senkrecht. (267 §.)

Der 2. Zusatz.

273. Parallellinien AC, DE, sind gegen einerley Ebene LM unter gleichen Winkeln geneigt. 66 Fig.

Wenn nemlich DF auf LM senkrecht ist; so sind AB und DF parallel, (263 §.) und CAB = EDF, (265 §.) also auch BCA = FED.

Die 38. Erklärung.

174. Parallele Ebenen sind solche, die nicht zusammen laufen können, sie mögen nach allen Seiten, so weit man will, erweitert werden.

Der 1. Zusatz.

67 Fig. 275. Wenn die grade Linie AB auf zwoen Ebenen KL, MN, zugleich senkrecht ist; so sind die Ebenen parallel. (261 §.)

Der 2. Zusatz.

58 Fig. 276. Wenn zwo parallele Ebenen AB, NO, von einer dritten DQ geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien EF, PR, parallel, und ihre Neigungswinkel gegen die schneidende Ebene gleich groß. Denn EF, PR, liegen in einerley schneidenden Ebene, und können nicht zusammen stossen, weil sonst AB mit NO zusammen stiessen. Wenn ferner HGI der Ebene DQ Neigungswinkel gegen AB ist, so wird GH verlängert auch PR in C senkrecht schneiden; (108. 107 §.) die erweiterte Ebene HGI aber wird NO in CS schneiden. Alsdenn ist CS mit GI parallel, und HCS = HGI. (107 §.) Ferner ist EF auf HGI, also auch PR auf HGI oder HCS senkrecht, (260. 262 §.) mithin ist HCS der Ebene NO Neigungswinkel gegen DQ.

Der 3. Zusatz.

67 Fig. 277. Wenn aus einem Punct A der Ebene KL eine grade Linie AB auf die andre damit parallele Ebene MN senkrecht fällt; so ist AB auch auf KL senkrecht. Sonst müste es in KL wenigstens eine durch A laufende Linie AF geben, die mit AB schiefe Win-

Winkel machte. Wenn alsdenn die Ebene BAF und MN einander in BD schnitten, so würden AF und BD zusammen laufen, (105 §.) also auch KL und MN, gegen die Voraussetzung.

Der 4. Zusatz.

278. Wenn die Schenkel AE, PO, und AF, PQ, der Winkel EAF, OPQ, parallel sind; so sind auch die Ebenen KL, MN, dieser Winkel parallel. Von A falle AB auf MN lothrecht, und durch B sey BC mit PO, BD mit PQ parallel gezogen: so ist auch BC mit AE, und BD mit AF parallel. (264 §.) Demnach ist BAF = 2R – ABD = R, und BAE = 2R – ABC = R; also AB auf KL senkrecht, und KL mit MN parallel. (275 §.) 67 Fig.

Der 48. Lehrsatz.

279. Parallele Ebenen *KL*, *MN*, sind durchgängig gleich weit von einander entfernt. 67 Fig.

Beweis. Wenn AB und EC auf MN senkrecht also die Entfernungen der Puncte A und E von MN sind; so sind AB, EC, parallel, (263 §.) und AE, BC, sind auch parallel, (276 §.) also AB = EC. (119 §.) Eben so erhellet, daß jedes andern in KL befindlichen Puncts F Entfernung FD = AB sey.

Der 1. Zusatz.

280. Wenn drey nicht in grader Linie liegende Puncte A, E, F, von der Ebene MN gleich weit entfernt sind; so ist eine durch diese drey Puncte gelegte Ebene KL mit MN parallel. Denn die gleichen Entfernungen AB, EC, FD, sind parallel, (263 §.) und ABCE, ABDF, rechtwinklichte Parallelogramme: (276 §.) mithin BAF = R = BAE, und KL mit MN parallel. (275 §.) 67 Fig.

Der 2. Zusatz.

67 Fig. 281. Alle Puncte A, E, F, G, die von einerley Ebene MN gleich weit entfernt sind, liegen in einerley Ebene. Denn eine Ebene KL durch A, E, F, gelegt, ist mit MN parallel, und schneidet die lothrechte Linie GH in einem Punct, der soweit als A, E, F, von MN entfernt ist, (279 §.) also in G.

Der 49. Lehrsatz.

68 Fig. 282. Zwo grade Linien *AB*, *CD*, werden von dreyen parallelen Ebenen *HI*, *KL*, *MN*, in proportionale Theile geschnitten.

Beweis. Wenn A, E, B, und C, F, D, die Durchschnittspuncte sind; so ziehe man BC, welche KL in G schneidet. Ferner sey EG der Ebene ABC Durchschnitt, GF der Ebene BCD Durchschnitt mit KL; so sind EG und AC, so wie GF und BD parallel. (276 §.) Demnach ist AE : EB = CG : GB, und CG : GB = CF : FD, (177 §.) also auch AE : EB = CF : FD.

Zusatz.

283. Daraus folgt auch AB : EB = CD : FD, und AB : AE = CD : CF. (173 §.)

Die 39. Erklärung.

69 Fig. 284. Drey und mehr ebene Flächen, AK, BF, CG, DH, EI, können einander so schneiden, daß ihre Durchschnittslinien AF, BG, CH, DI, EK, mit einander parallel laufen, die Ebenen selbst aber einen körperlichen Raum ringsherum einschliessen, der nur an beyden Seiten, wohin die parallelen Durchschnittslinien laufen, noch unbegränzt bleibt. Um diesen Raum völlig zu schliessen, werden noch zwo Ebenen LM, NO, eine an jeder Seite erfodert; und wenn diese unter einander parallel sind, so heißt der

so

so begränzte Körper ein Prisma, ein Pfeiler, oder eine Eckſäule. Dieſe parallelen Seitenflächen betrachtet man als die Grundflächen des Prisma; die übrigen aber, welche einander in parallelen Durchſchnittslinien ſchneiden, heiſſen hier im beſondern Sinn die Seitenflächen des Prisma, und von der Anzahl dieſer Seitenflächen erhält der Körper den Nahmen eines dreyſeitigen, vier- fünf- ſechsſeitigen Prisma, u. ſ. f.

Zuſatz.

285. Die Seitenflächen des Prisma ſind Parallelogramme, und die Grundflächen ſind gleiche und ähnliche Figuren. Auch wenn das Prisma mit einer Ebene den Grundflächen parallel geſchnitten wird; ſo iſt die Durchſchnittsfigur den Grundflächen gleich und ähnlich.

Die 40. Erklärung.

286. Wenn die parallelen Seitenlinien des Prisma, alſo auch die Seitenflächen auf den Grundflächen ſenkrecht ſtehen; (267 §.) ſo heißt der Körper ein gradcs, widrigenfalls ein ſchiefes Prisma.

Zuſatz.

287. Die Seitenflächen des graden Prisma ſind Rechtecke. (252 §.)

Die 41. Erklärung.

288. Ein Parallelepipedum iſt ein Prisma, deſſen Grundflächen ABCD, EFGH Parallelogramme ſind. 70 Fig.

Zuſatz.

289. Jede zwo entgegengeſetzte Seitenflächen des Parallelepipedi, wie AH, BG, ſind einander parallel, weil AD mit BC, AE mit BF parallel iſt. (278 §.) Man kann alſo jede zwo entgegengeſetzte Seitenflächen für die Grundflächen annehmen.

Die

Die 42. Erklärung.

290. Ein grades Parallelepipedum heißt alsdenn rechtwinklicht, wenn auch die Grundflächen Rechtecke sind. Wenn die Grundflächen und Seitenflächen des rechtwinklichten Parallelepipedi Quadrate sind; so heißt es ein Würfel. Diese Quadrate sind alsdenn alle gleich groß, und die Seitenlinie von jeder Seitenfläche heißt zugleich die Seitenlinie des Würfels.

Die 43. Erklärung.

71 Fig. 291. Wenn ein Punct A ausserhalb der Ebene einer gradlinichten Figur BCDEF befindlich ist, und von demselben bis an alle Winkelpuncte der Figur die graden Linien AB, AC, AD, u. s. f. gezogen werden; so schliessen die Ebenen der Dreyecke ABC, ACD, ADE, u. s. f., als Seitenflächen mit der Figur BCDEF, als der Grundfläche, eine Pyramide oder Spitzsäule ein. Sie erhält, wie das Prisma, den Nahmen von der Anzahl ihrer Seitenflächen.

Der 50. Lehrsatz.

71 Fig. 292. Wenn eine Ebene die Pyramide mit der Grundfläche parallel schneidet; so ist die Durchschnittsfigur *GHIKL* der Grundfläche ähnlich, und das Verhältniß der gleichnahmigen Seiten dieser Figuren ist gleich dem Verhältniß ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

Beweis. Die Durchschnittsfigur hat soviele Seitenlinien, als die Grundfläche, und jeder Winkel wie G in der Durchschnittsfigur ist so groß, als der damit zusammengehörige Winkel B der Grundfläche, weil die Seiten parallel sind. (276. 278. §) Ferner sind die Seiten, welche diese gleichen Winkel ein-

einschliessen, proportional. Es ist nemlich BF : GL = AB : AG, und BC : GH = AB : AG, (181 §.) also BF : GL = BC : GH. Wenn nun AN auf der Grundfläche, und eben darum auch in M auf der Ebene GK senkrecht ist, und beyde parallele Ebenen BE, CK, von der dritten BAN in BN, GM, geschnitten werden; so sind BN, GM parallel: (276 §.) also AN : AM = AB : AG, und überdem BF : GL = AB : AG, mithin auch BF : GL = AN : AM.

Zusatz.

293. Die Ebenen der Grundfläche BE und der Durchschnittsfigur GK verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide. Denn es ist $AN^2 : AM^2 = BF^2 : GL^2$ (204 §.) = BE : GK. (211 §.)

Die 44. Erklärung.

294. Durch den Mittelpunct C eines Kreises AB laufe die grade Linie CD so, daß sie nicht in der Ebene des Kreises liegt; durch den Umfang des Kreises aber eine krumme Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß jede durch einen Punct E im Umfange des Kreises mit CD parallel gezogene grade Linie EF ganz in dieser Fläche liege: alsdenn heißt die Fläche eine Cylinderfläche. Schneidet man diese mit noch einer Ebene GI der Fläche des Kreises AB parallel; so begränzen die beyden ebenen Figuren AB, GI, als Grundflächen mit der krummen Fläche zusammen einen Cylinder, eine Walze oder Rundsäule, dessen Axe CD ist. Dieser Cylinder ist grade oder schief, nachdem die Axe auf den Grundflächen senkrecht stehet. 72 Fig.

Der

Der 1. Zusatz.

295. Beyde Grundflächen des Cylinders sind gleich grosse Kreise, und die Axe CD geht durch beyder Mittelpunct: auch ist jeder mit den Grundflächen parallele Schnitt ein eben so grosser Kreis, der seinen Mittelpunct in der Axe hat.

Der 2. Zusatz.

296. Ein Schnitt durch die Axe des Cylinders giebt ein Parallelogramm zur Durchschnittsfigur, welches ein Rechteck wird, wenn der Cylinder grade ist.

Die 45. Erklärung.

73 Fig. 297. Durch einen Punct A der graden Linie AC, die zwar durch des Kreises BD Mittelpunct geht, aber nicht in seiner Ebene liegt, und durch den Umfang des Kreises kann sich eine krumme Fläche von der Beschaffenheit erstrecken, das jede grade Linie AE, die von A durch einen Punct E im Umfange des Kreises läuft, ganz in der krummen Fläche liegt. Alsdenn heißt sie eine Kegelfläche, und der Körper selbst ein Kegel, den die krumme Fläche mit der Ebene des Kreises zusammen begränzt. Die grade Linie AC ist seine Axe, der Kreis BD seine Grundfläche, und der Punct A seine Spitze, AE aber seine Seitenlinie. Dieser Kegel ist übrigens ein grader oder schiefer Kegel, nachdem die Axe auf der Grundfläche grade oder schief stehet.

Zusatz.

298. Ein Schnitt durch die Axe des Kegels giebt ein gradlinichtes Dreyeck, welches in dem Fall, wenn der Kegel grade ist, ein gleichschenklichtes Dreyeck wird: im letzten Fall sind überhaupt alle Seitenlinien des Kegels gleich groß.

Der

Der 51. Lehrsatz.

299. Wird der Kegel *ABD* mit einer Ebe- 73
ne der Grundfläche parallel durchschnitten, Fig.
so wird die Durchschnittsfigur wie die Grundfläche ein Kreis, dessen Mittelpunct in der Axe liegt: die Halbmesser dieser Kreise verhalten sich wie die Entfernungen, und die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

Beweis. Man schneide den Kegel auch durch die Axe, so sind die Durchschnitte BC, FG, einander parallel, und wenn der Halbmesser BC = r gesetzt wird, so ist AC : AG = r : FG. Folglich ist FG = $\frac{AG \cdot r}{AC}$ allemahl von gleicher Grösse, wo auch F im Umfange der Durchschnittsfigur angenommen wird. Demnach ist FI ein Kreis, und G sein Mittelpunct. Wenn ferner AL auf der Grundfläche, mithin auch auf der Durchschnittsfigur in K senkrecht ist; so hat man AC : AG = AL : AK, weil auch CK mit CL parallel ist. (276 §.) Ueberdem ist AC : AG = CB : GF, also CB : GF = AL : AK. Das giebt ferner $CB^q : GF^q = AL^q : AK^q$, (204 §.) also auch der Kreis BD : Kreise FI = $AL^q : AK^q$. (243 §.)

Die 46. Erklärung.

300. Die Höhe eines geometrischen Körpers, der eine ebene Grundfläche hat, ist die Entfernung derjenigen Ebene von der Grundfläche, welche den Körper an seiner äussersten Gränze berührt und mit der Grundfläche parallel ist.

Zusatz.

301. Die Höhe eines Prismen oder Cylinders, ist die Entfernung der einen Grundfläche von der andern:

dern: die Höhe einer Pyramide, oder eines Kegels ist die Entfernung der Spitze von der Grundfläche.

Der 8. Grundsatz.

302. Gleich hohe geometrische Körper, wenn sie gleiche Grundflächen, und überdem die Eigenschaft haben, daß ihre mit den Grundflächen parallelen Schnitte in gleichen Höhen über den Grundflächen gleich groß sind, haben einen gleich grossen körperlichen Inhalt.

Anmerkung.

303. Hiebey mögte wohl mit Grunde erinnert werden können, daß die Wahrheit dieses Satzes ohne weitern Beweis nicht so ganz vollkommen einleuchtend sey, wie sonst die Wahrheit eines Grundsatzes von selbst klar seyn muß. Allein wegen der hier unumgänglichen nothwendigen Kürze läßt sich die höchste Evidenz bey dem nun folgenden Vortrage nicht erreichen. Im ersten Theil meiner Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften findet man alles nach Art der Alten vorgetragen, und aus dem Grundsatz der Congruenz (12. 13. §.) hergeleitet.

Der 52. Lehrsatz.

304. **Prismen und Cylinder, auch Pyramiden und Kegel auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe sind gleich groß.**

Beweis. Beym Prisma (69 F.) oder Cylinder (72 F.) ist jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt der Grundfläche gleich. (285. 295. §.)
69 u. 72 F. Wenn also die Grundflächen AB, FH, gleich sind, so haben die Körper in gleichen Höhen über den Grundflächen auch gleiche mit den Grundflächen parallele Schnitte: also sind die Körper alsdenn gleich groß, wenn auch überdem ihre Höhen gleich sind. (302 §.) In der Pyramide (71 F.) ist die Figur

GK

$GK = \frac{AM^q}{AN^q} \cdot BE$, (293 §.) und im Kegel

(73 F.) ist der Kreis $FI = \frac{AK^q}{AI^q} \cdot BD$. (299 §.)

Wenn also nicht allein die Grundfläche BE (71 F.) dem Kreise BD, (73 F.) sondern auch die Höhe AN = AL ist; so hat man für jede Höhe MN = KL auch AM = AK, folglich GK = FI: mithin sind die Körper von gleicher Grösse. (302 §.)

Der 53. Lehrsatz.

305. **Ein Prisma oder Cylinder ist dreymahl grösser als eine Pyramide, oder ein Kegel auf eben so grosser Grundfläche in gleicher Höhe.**

Beweis. Wenn zuerst ABCDEF ein grades dreyseitiges Prisma ist; so kann man in den Seitenflächen ACFD, BCFE, die Diagonallinien CD, CE, ziehen: alsdenn schneidet die Ebene des Dreyecks CDE eine Pyramide CDEF ab mit dem Prisma auf gleicher Grundfläche DEF, in gleicher Höhe FC. Man ziehe ferner in der Seitenfläche ADEB die Diagonallinie BD, so schneidet das Dreyeck BCD noch eine Pyramide ABCD ab auf eben so grosser Grundfläche ABC in gleicher Höhe AD. Demnach sind die Pyramiden ABCD, DEFC, gleich groß. (304 §.) Der noch übrige Körper BEDC ist auch eine Pyramide auf der Grundfläche BDE, und die Spitze ist C. Wenn man aber die Seitenfläche ABD der Pyramide ABDC für die Grundfläche nimmt; so ist C auch die zu dieser Pyramide gehörige Spitze, und die Pyrami- 75 Fig.

ramiden ABDC, BDEC, haben gleiche Grundflächen ABD, BDE, die hier in einer Ebene liegen, und gleiche Höhen, weil ihre Spitzen in C zusammen fallen. Demnach sind alle drey Pyramiden gleich groß, und es ist das Prisma ABCDEF = 3 . Pyr. ABCD. Mit dem Prisma aber hat jedes andre Prisma und jeder Cylinder auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe, auch mit der Pyramide ABCD jede andre, und jeder Kegel auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe einerley Grösse: also ist der Satz allgemein.

Der 54. Lehrsatz.

74 306. Wenn man ein Parallelepipedum *AB* Fig. mit einer Ebene *CD* den Seitenflächen *AE*, *FB* parallel schneidet; so verhält sich das abgeschnittene Parallelepipedum *AC* zum ganzen *AB*, wie die Grundfläche *AK* des ersten zur Grundfläche *AL* des zweyten.

Beweis. Man theile die Seitenlinie AF in so viele gleiche Theile, als man will, und AG sey einer von den Theilen. Durch alle Theilungspuncte lege man Ebenen mit CD parallel, so theilt man das Ganze in eben so viele gleiche Parallelepipeda, wie AH, als man Theile in AF erhalten hat. Alsdenn sind AG und AH ähnliche aliquote Theile von AF und AB, auch sind diese in allen Fällen in AD und AC gleichvielmahl enthalten. Demnach ist AC : AB = AD : AF. Ueberdem ist AD : AF = AK : AL, (200 §.) also auch AC : AB = AK : AL.

Der 55. Lehrsatz.

307. Prismen und Cylinder, auch Pyramiden und Kegel, die gleich hoch sind, verhalten sich wie ihre Grundflächen.

76 Beweis. Wenn AC, DF, rechtwinklichte Paral- Fig. lelepipeda, und ihre Höhen BC, EF gleich groß sind;

so

so kann man die Seitenlinien AG, PB, nach H und I verlängern, und an BG ein Rechteck BGHI = DE setzen. (207 §.) Man lege ferner durch HI eine Ebene mit GC parallel, und verlängere OM, NC, bis an diese Ebene in K und L, so erhält man ein Ppp. GK = DF, und es ist Ppp. AC : Ppp. GK = AB : GI, (306 §.) also auch Ppp. AC : Ppp. DF = AB : DE. (304 §.)

Vermöge des im 304 §. bewiesenen Satzes gilt diese Regel für alle Prismen und Cylinder, die einerley Grundfläche und Höhe haben. Weil ferner Pyramiden und Kegel den dritten Theil von eben so hohen Prismen oder Cylindern auf eben so grossen Grundflächen ausmachen; so gilt die Regel auch für gleich hohe Pyramiden und Kegel.

Der 56. Lehrsatz.

308. Prismen und Cylinder, auch eben so Pyramiden und Kegel, verhalten sich wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind. 77 Fig.

Beweis. Man nehme an, daß AC, DF, rechtwinklichte Parallelepipeda sind, die auf gleichen und ähnlichen Grundflächen AB, DE stehen, so sind auch die Seitenlinien AG = DH, GB = HE. Wenn nun gleich BC, EF, die Höhen sind, die mit den Grundflächen AB, DE zusammen gehören; so kann man doch auch die Seitenflächen GC, HF, für die Grundflächen annehmen, und dazu gehören die gleichen Höhen AG, DH. Alsdenn ist Ppp. AC : Ppp. DF = GC : HF, (307 §.) und GC : HF = BC : EF, (201 §.) also auch Ppp. AC : Ppp. DF = BC : EF. Daß eben die Regel allgemein für gleich hohe Prismen und Cylinder, und eben so für Pyramiden und Kegel gelte, erhellet, wie im vor. §.

Der 57. Lehrsatz.

309. Das Verhältniß zweyer Prismen, oder Cylinder, auch das Verhältniß zweyer Pyramiden und Kegel ist aus den Verhältnissen der Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt.

Beweis. Des einen Prisma P Grundfläche sey B, und Höhe A, des andern Prisma p Grundfläche b, und die Höhe a; so kann man mit beyden ein drittes Prisma Π vergleichen, dessen Grundfläche b, und Höhe A ist. Alsdenn hat man

$$P : \Pi = B : b \quad (307\,\S.)$$
$$\Pi : p = A : a \quad (308\,\S.)$$

also $P : p = \left\{\begin{matrix} B : b \\ A : a \end{matrix}\right\}$, (202 §.) da dann P, p, auch Cylinder, oder Pyramiden, oder Kegel, bezeichnen können.

Der 1. Zusatz.

310. Die erwehnten Körper verhalten sich also auch wie die Producte aus ihren Grundflächen in die Höhen. (203 §.)

Der 2. Zusatz.

311. Das Verhältniß zweyer Würfel ist dreymahl grösser, als das Verhältniß ihrer Seitenlinien.

Die 47. Erklärung.

312. Ein Würfel, wovon eine Seite so lang ist, als eins der bekannten Längenmaasse, (49 §.) erhält davon den Nahmen. Er heißt eine Cubicruthe, ein Cubicfuß, ein Cubiczoll, eine Cubiclinie, oder ein Cubicscrupel, nachdem die Seitenlinie so lang ist, als eine Ruthe, oder ein Fuß, ein Zoll, eine Linie, ein Scrupel im Längenmaaß.

Die 18. Aufgabe.

313. Den körperlichen Inhalt eines Prismen oder Cylinders, einer Pyramide, oder eines

eines Kegels im Cubicmaaß zu finden, wenn der Inhalt der Grundfläche im Quadratmaaß, und die Höhe im Längenmaaß, das mit jenem Quadratmaaß einerley Nahmen hat, gegeben sind.

Aufl. Man multiplicire den Quadratinhalt der Grundfläche des Prismen oder Cylinders mit der Zahl, welche die Höhe im gleichnahmigen Längenmaasse ausdrückt: so giebt das Product die Grösse des Körpers im Cubicmaaß eben des Nahmens. Wäre der Körper eine Pyramide, oder ein Kegel, so müste man den dritten Theil des Products aus dem Quadratinhalt der Grundfläche in die Höhe nehmen.

Beweis. Wenn P das Prisma oder einen Cylinder auf der Grundfläche B in der Höhe A, und C einen Würfel bezeichnet, dessen Seite = L ist; so ist des Würfels Grundfläche = L^2, seine Höhe = L, und man hat dem 310 §. gemäß $P : C = B \times A : L^2 . L$. Hier aber ist L = 1, also $P : C = B \times A : 1$, und der Würfel ist im Prisma oder Cylinder so vielmahl enthalten, als Eins im Product $B \times A$. Für die Pyramide und den Kegel erhellet die Richtigkeit der Auflösung aus dem 305 §.

Es sey die Grundfläche B = 582,374 Qu. Ruth., die Höhe A = 6,253 Ruth., so findet man $P_{\prime\prime}$ = 3641,584622 Cubicruthen.

Der 1. Zusatz.

314. Die körperliche Grösse eines Würfels wird im Cubicmaaß gefunden, wenn man von der Zahl, welche die Länge der Seitenlinien angiebt, die Cubiczahl sucht.

Der 2. Zusatz.

315. Wenn man Duodecimalmaaß braucht, so enthält ein Cubicfuß 1728 Cubiczoll, und eben so jedes grössere Cubicmaaß 1728 Cubicmaasse des nächstkleinern Nahmens. Wird aber Decimalmaaß gebraucht: so fasset jedes grössere Cubicmaaß 1000 Cubicmaasse des nächstkleinern Nahmens.

Die 48 Erklärung.

78 Fig. 316. Die Kugel ist ein Körper, welchen eine krumme Oberfläche ADEB so umgiebt, daß alle ihre Puncte von einem Punct C innerhalb des Körpers, welcher der Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt sind. Die graden Linien, welche sich vom Mittelpunct bis an die Oberfläche erstrecken, heissen Halbmesser der Kugel.

Der 1. Zusatz.

317. Alle Halbmesser der Kugel sind gleich groß.

Der 2. Zusatz.

318. Jede grade Linie DE, die durch einen Punct G innerhalb der Kugel gehet, trift ihre Oberfläche in zweenen Puncten D und E, und nicht in mehrern, weil in der Ebene CDE nicht mehr als zwey gleich grosse grade Linien von C nach DE laufen können. (96 §.) Wenn die grade Linie wie AB selbst durch den Mittelpunct C läuft, so erhellet es wie beym Kreise, (30 §.) daß sie ebenfalls die Kugelfläche nur in zweenen Puncten treffe.

Die 49. Erklärung.

319. Eine grade Linie AB durch der Kugel Mittelpunct C zu beyden Seiten bis an die Oberfläche der Kugel gezogen heißt ein Durchmesser der Kugel.

Zusatz.

320. Alle Durchmesser der Kugel sind gleich groß, denn jeder Durchmesser der Kugel ist doppelt so groß, als ihr Halbmesser.

Der

Der 9. Grundsatz.

321. Wenn eine Ebene AB die Kugel durch den Mittelpunct schneidet, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, dessen Mittelpunct und Halbmesser mit dem Mittelpunct und Halbmesser der Kugel einerley ist. 79 Fig.

Zusatz.

322. Alle Schnitte der Kugel durch ihren Mittelpunct geben gleich grosse Kreise, und jede Ebene durch den Mittelpunct theilt die Kugel in zwey gleich grosse Halbkugeln.

Der 58. Lehrsatz.

323. Wenn eine Ebene *AB* die Kugel nicht durch den Mittelpunct schneidet, vom Mittelpunct *C* aber auf diese Ebene die grade Linie *CD* lothrecht gezogen wird; so trift diese die Ebene in einem Punct *D* innerhalb der Kugel. 80 Fig.

Beweis. Weil die Ebene AB die Kugel schneiden soll; so muß ein Stück von ihr innerhalb der Kugel liegen, und jede grade Linie vom Mittelpunct bis an einen auf dieser Ebene innerhalb der Kugel liegenden Punct gezogen, muß kleiner seyn, als der Halbmesser. Unter allen graden Linien aber, die von C bis an die Ebene AB gezogen werden können, ist die lothrechte CD die kürzeste: also muß sie unter denjenigen befindlich seyn, welche die Ebene AB innerhalb der Kugel treffen.

Der 59. Lehrsatz.

324. Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis, und sein Mittelpunct liegt da, wo eine grade Linie aus dem Mittelpunct der Kugel auf die Ebene des Schnitts senkrecht gezogen diese Ebene trift.

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunct sind diese Kreise gleich groß: bey ungleichen Entfernungen aber ist derjenige gröser, der dem Mittelpunct näher liegt, als der Entferntere.

80 Fig. Beweis. 1) Es sey CD auf der Ebene AB lothrecht: so liegt D innerhalb der Durchschnittsfigur. (323 §.) Von D sey nach einem Punct A im Umfange DA und überdem CA gezogen: so ist $DA = \sqrt{(AC^q - CD^q)}$. (132 §.) Es bleiben aber AC und CD allemahl gleich groß, wo auch der Punct A im Umfange der Durchschnittsfigur genommen wird: also bleibt auch DA immer gleich groß. Die Figur ist demnach ein Kreis und D der Mittelpunct.

2) Wenn CE die Entfernung eines andern Schnitts vom Mittelpunct ist, in dessen Umfang F liegt; so ist auch dieser Schnitt ein Kreis, und sein Halbmesser $EF = \sqrt{(CF^q - CE^q)}$. Ferner ist AC = CF. Wenn also überdem CD = CE ist, so ist DA = EF. Wäre aber CD > CE, so hätte man DA < EF, und daraus folgt der zweyte Satz.

Der 1. Zusatz.

79 Fig. 325. Unter allen Kreisen auf der Oberfläche der Kugel sind diejenigen die gröstен, deren Ebenen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, wie AEBD. Diese heissen auch deswegen **gröste Kreise**, und die übrigen **kleinere Kreise** der Kugel.

Der 2. Zusatz.

326. Wenn ein Kugelabschnitt ein gröster Kreis ist; so geht seine Ebene durch der Kugel Mittelpunct, weil es sonst auf eben der Kugel noch grössere Kreise geben müste.

Der

Der 3. Zusatz.

327. Sind zweene kleinere Kreise der Kugel AB, FG, gleich groß, so sind sie vom Mittelpunct der Kugel gleichweit entfernt. Denn ihre Entfernungen sind $CD = \sqrt{(AC^q - AD^q)}$ und $CE = \sqrt{(CF^q - EF^q)}$ also CD = CE, wenn AD = EF ist. 79 Fig.

Der 4. Zusatz.

328. Der grössere Kugelschnitt liegt dem Mittelpunct der Kugel näher, als der kleinere: denn wird EF > AD angenommen, so ist CE < CD.

Der 5. Zusatz.

329. Ein Durchmesser der Kugel, der durch eines kleinern Kreises Mittelpunct gehet, steht auf der Ebene dieses Kreises senkrecht. Denn sonst könnte man von der Kugel Mittelpunct eine grade Linie auf die Ebene dieses Kreises senkrecht ziehen, die nicht durch seinen Mittelpunct gienge, dem 324 §. entgegen.

Der 6. Zusatz.

330. Eine grade Linie auf des kleinern Kreises FG Ebene im Mittelpunct E lothrecht gesetzt, geht auch durch der Kugel Mittelpunct: denn sonst könnte man aus einerley Punct E über der Ebene FG zwo verschiedene grade Linien senkrecht ziehen, dem 258 §. entgegen. 80 Fig.

Die 50. Erklärung.

331. Ein Durchmesser FG der Kugel AFBG, der auf der Ebene eines Kugelschnitts HLMN oder ADBE senkrecht stehet, mithin durch des Kugelschnitts Mittelpunct gehet, heißt eine zu diesem Kugelschnitt gehörige Axe der Kugel. 79 Fig.

Zusatz.

332. Diese Axe ist zugleich auf allen übrigen Kreisen der Kugel senkrecht, deren Ebenen mit der

Ebene des Kreises ADBE, oder HLMN parallel sind. (277 §.) und sie geht durch die Mittelpuncte aller dieser Parallelkreise. (324 §.)

Die 51. Erklärung.

80 Fig. 333. Die Endpuncte F, G, der Axe FG heissen die Pole eines jeden der Parallelkreise, die zur Axe FG gehören.

Zusatz.

334. Die ganze Kugel kann sich um die Axe FG drehen, und jeder Punct auf ihrer Oberfläche beschreibt alsdenn einen zur Axe gehörigen Parallelkreis.

Die 52. Erklärung.

335. Der Winkel OBM, welchen zweene Bogen BO, BM, gröster Kreise auf der Oberfläche der Kugel einschliessen, heißt ein sphärischer Winkel. Er ist einerley mit dem Winkel, unter welchem die Ebenen dieser Kreise an ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie CB gegen einander geneigt sind. Durch O und M kann ein dritter Bogen OM geführt werden, der zu einem grösten Kreise in der Ebene OCM gehört, und alle drey Bogen schliessen alsdenn ein sphärisches Dreyeck OMB ein.

Die 53. Erklärung.

336. Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie zwar mit ihrer Oberfläche zusammenstößt, sonst aber ganz ausserhalb der Kugel liegt.

Zusatz.

80 Fig. 337. Eine Ebene kann die Kugel nur in einem Punct berühren. Wenn A und B zwey verschiedene Puncte in der Oberfläche der Kugel sind, so liegt die grade Linie AB in der Ebene eines grösten Kreises, welche man durch C, A, und B legen kann. Von diesem Kreise ist AB eine Sehne, und liegt ganz

ganz in seiner Fläche, also auch ganz innerhalb der Kugel. Ueberdem liegt auch AB in jeder durch A und B gelegten Ebene, mithin ist es keine Ebene, welche die Kugel berührt.

Der 60. Lehrsatz.

338. Eine Ebene *MN* durch einen Punct *H* in der Oberfläche der Kugel auf den Halbmesser *CH* senkrecht gesetzt, berührt die Kugel. 80 Fig.

Auch umgekehrt: wenn eine Ebene *MN* die Kugel in *H* berührt; so ist der Halbmesser *CH* im Berührungspunct auf der Ebene *MN* senkrecht.

Beweis. 1) Weil CH die kürzeste Linie ist, die man von C nach MN ziehen kann, (257 §.) so ist die Entfernung CK eines jeden andern in der Ebene MN liegenden Puncts K von der Kugel Mittelpunct grösser als ihr Halbmesser: also liegen alle übrige Puncte der Ebene MN ausserhalb der Kugel.

2) Wenn H der Berührungspunct ist; so ist CH die kürzeste von allen graden Linien, die von C nach MN gezogen werden können; also ist CH auf MN senkrecht.

Zusatz.

339. Eine grade Linie, die durch den Berührungspunct H auf MN senkrecht gesetzt wird, geht durch den Mittelpunct der Kugel. Auch muß die aus dem Mittelpunct C auf die Berührungsebene senkrecht gezogene grade Linie den Berührungspunct H treffen.

Der 61. Lehrsatz.

340. Die Halbkugel *AFDGB* ist doppelt so groß, als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. 81 Fig.

Beweis.

Beweis. Ueber dem Kreise IK, der so groß als die Grundfläche AB der Halbkugel AFDGB ist, stehe ein grader Cylinder HIKL, und die Höhe OP sey der Höhe CD oder dem Halbmesser der Halbkugel gleich. Ueber der Grundfläche HL stelle man sich auch einen graden Kegel HOL in eben der Höhe PO vor, nur daß er seine Spitze unten in O hat; so ist der Cyl. HIKL = 3 Kegel HOL. Man stelle sich vor, der Kegel HOL werde aus dem Cylinder heraus geschnitten, so bleibt der Körper HIOKL = 3. HOL — HOL = 2. HOL übrig, und die Halbkugel AFDGB ist diesem Körper gleich.

Man schneide nemlich die Halbkugel sowohl als auch den Körper HIOKL mit Ebenen den Grundflächen parallel in gleichen Höhen CE, OQ, über den Grundflächen; so giebt der Schnitt der Halbkugel den Kreis FG, wozu der Halbmesser EF = EG gehört, und dieses Kreises Fläche ist $= \pi . EF^q$. Ferner ist $EF^q = CF^q - CE^q$, also der Kreis FG $= \pi . (CF^q - CE^q)$. Die Durchschnittsfigur mit dem Körper HIOKL ist ein Ring zwischen den Kreisen MN und RS, wozu die Halbmesser QM und QR gehören, und der Inhalt dieses Ringes MRSN ist $= \pi . (QM^q - QR^q)$. Ueberdem ist QM = CF, und QR = OQ, weil OP = PH ist, also auch QR = CE, und der Ring MRSN $= \pi . (CF^q - CE^q)$, also eben dieser Ring = dem Kreise FG. Daraus aber folgt, es sey die Halbkugel AFDGB = dem Körper HIOKL, (302 §.) folglich auch die Halbkugel AFDGB = 2. Kegel HOL.

Der

Der 1. Zusatz.

341. Weil HOL $= \frac{1}{3}$HIKL, so ist die Halbkugel AFDGB $= \frac{2}{3}$HIKL. Demnach beträgt die Halbkugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat: die ganze Kugel aber beträgt $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, wovon die Grundfläche dem grösten Kreise, und die Höhe dem Durchmesser gleich ist.

Der 2. Zusatz.

342. Wenn der Durchmesser im Längenmaaß gegeben ist, so findet man leicht den Inhalt der Kugel im Cubicmaaß eben des Nahmens. Der Durchmesser sey $= d$ der Halbmesser $= r$; so ist die Fläche des grösten Kreises $= \frac{1}{4}\pi dd$, und ein Cylinder in der Höhe d über dieser Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi d^3$: also der Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6}\pi d^3$, oder eben der Inhalt $= \frac{4}{3}\pi r^3$, wenn man $2r$ anstatt d schreibt. Jeder andern Kugel Inhalt ist also $= \frac{1}{6}\pi D^3$, wenn D ihren Durchmesser bezeichnet: mithin verhält sich die erste Kugel zur zweyten, wie $d^3 : D^3$, oder die Kugeln verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser, und eben darum auch wie die Würfel ihrer halben Durchmesser.

Der 3. Zusatz.

343. Wäre der Inhalt einer Kugel $=$ S im Cubicmaaß gegeben, und man sollte den Durchmesser d finden; so hat man $\frac{1}{6}\pi d^3 = S$, also $d^3 = \frac{1}{\pi}$ 6 S, mithin ferner $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \cdot 6S$.

Die 54. Erklärung.

344. Wenn eine Ebene DE den Kegel ABC mit der Grundfläche BC parallel schneidet; so heißt der zwischen den beyden Kreisen DE und BC enthaltene Theil

82 Fig.

Theil ein abgekürzter Kegel. In dem Fall, wenn der Kegel ein grader Kegel ist, so ist die Axe FG des abgekürzten Kegels zugleich seine Höhe.

Die 19. Aufgabe.

82 Fig. 345. Die Halbmesser *FB*, *GD*, der beyden Grundflächen des abgekürzten graden Kegels, und seine Axe *GF* sind gegeben; man soll den Inhalt im Cubicmaaß finden.

Aufl. Es sey BDEC ein Schnitt durch die Axe, und in dieser Ebene sey DH mit FG parallel, also auf BC senkrecht, wenn der Kegel grade ist: alsdenn hat man BH : HD = BF : AF. Ferner ist BH = BF — FH, und FH = GD, so wie HD = FG: also BH = BF — GD, und man erhält BF — GD : FG = BF : AF. Vermittelst dieser Proportion kann man AF finden, und daraus ferner AG = AF — FG. Hiernächst sucht man den Inhalt des grössern Kegels ABC, und überdem auch des kleinern ADE: da dann der Inhalt des kleinern vom Inhalt des grössern abgezogen den Inhalt des abgekürzten Kegels giebt.

Die 20. Aufgabe.

346. Die Seite eines Würfels, der einem vorgelegten geometrischen Körper gleich ist, durch Rechnung zu finden.

Aufl. Man suche den Inhalt des Körpers im Cubicmaaß, und ziehe aus der Zahl, welche diesen Inhalt angiebt, die Cubicwurzel: so giebt diese die Länge der Seitenlinie des gesuchten Würfels im Längenmaaß an, das mit der Zahl einerley Nahmen hat, welche die Grösse des Inhalt ausdrückt.

Zusatz.

347. Man kann die Redensart, einen Körper cubiren, in einem ähnlichen Sinn brauchen, wie oben

oben von der Quadratur ebener Figuren die Rede gewesen ist: also läßt sich die Cubatur eines jeden geometrischen Körpers durch Rechnung finden, wenn man seinen Inhalt im Cubicmaaß ausrechnen kann.

Der 62. Lehrsatz.

348. Die krumme Oberfläche eines graden Cylinders ist einem Rechteck gleich, wovon die Grundlinie der Peripherie der Grundfläche, die Höhe aber der Höhe des Cylinders gleich ist.

Die krumme Oberfläche des graden Kegels ist so groß, als ein Dreyeck, wovon die Grundlinie der Peripherie der Grundfläche des Kegels, und die Höhe der Seitenlinie des Kegels gleich ist.

Beweis. Wenn die Seitenlinie AB des graden Cylinders ABCD an der eben so grossen Höhe EF des Rechteckes EFGH anliegt; so läßt sich der Cylinder in das Rechteck einwickeln. Wenn alsdenn die Grundlinie EH so lang, als die Peripherie der Grundfläche AD ist, so paßt das so gekrümmte Rechteck auf der krummen Cylinderfläche. 83 Fig.

Ferner sey mit dem Halbmesser DE, welcher der Seitenlinie AB des graden Kegels ABC gleich ist, ein Kreisausschnitt DEF so gezeichnet, daß der Bogen EF der Peripherie der Grundfläche BC gleich ist. Wenn alsdenn die Seitenlinie AB des Kegels an DE gelegt wird; so läßt sich der Kegel in den Ausschnitt so einwickeln, daß der gekrümmte Ausschnitt auf der krummen Kegelfläche passet. Weil nun der Ausschnitt auch einem Dreyeck gleich ist, wovon die Grundlinie so groß als der Bogen, und die Höhe so groß ist, als der Halbmesser; so erhellet daraus die Richtigkeit des zweyten Satzes. 84 Fig.

Anmer-

Anmerkung.

Man findet die Beweise dieser und einiger von den folgenden Sätzen, die hier nothwendig ins Kurze gezogen werden mußten, im ersten Theil meiner Anfangsgründe, auch im zweyten Theil meines Lehrbegriffs völlig nach Art der Alten vorgetragen.

Der 1. Zusatz.

349. Gleich hoher Cylinder Flächen verhalten sich wie die Peripherien, also auch wie die halben oder ganzen Durchmesser ihrer Grundflächen. (199 §.)

Der 2. Zusatz.

350. Die krumme Fläche des graden Kegels verhält sich zur Grundfläche, wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche. (225. 227 §.)

Der 63. Lehrsatz.

351. Die krumme Fläche des graden Cylinders ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser R die mittlere Proportionallinie ist zwischen des Cylinders Höhe A, und dem Durchmesser D der Grundfläche.

Die krumme Fläche des graden Kegels ist so groß, als ein Kreis, dessen Halbmesser R zwischen der Seite L des Kegels, und dem Halbmesser r der Grundfläche die mittlere Proportionallinie ist.

Beweis. 1) Die Peripherie der Grundfläche des Cylinders ist $= \pi D$, (239 §.) wenn D ihr Durchmesser ist, also die krumme Cylinderfläche $= \pi . D . A$. (348 §.). Ferner sey $R = \sqrt{A . D}$ (96 §. Rech.) der Halbmesser eines Kreises, so ist sein Flächeninhalt $= \pi R^2$ (242 §.) $= \pi . A . D$, mithin eben so groß, als die Cylinderfläche.

2) Wenn r der Halbmesser der Grundfläche des Kegels ist, so ist die Peripherie $= 2\pi r$, (239 §.)

also

also die krumme Kegelfläche $= \pi . r . L$. (348 §.) Wird aber der Halbmesser eines Kreises $R = \sqrt{r . L}$ angenommen, so ist seine Fläche $= \pi . r . L$. (242 §.) und diese ist der Kegelfläche gleich.

Der 64. Lehrsatz.

352. Die krumme Fläche des abgekürzten graden Kegels *BDEC* ist einem Kreise gleich, wovon der Halbmesser *R* die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Seite *BD* der Kegelfläche, und der Summe der Halbmesser *FB* + *GD* ihrer Grundflächen. 82 Fig.

Beweis. die Fläche des ganzen Kegels ABC ist $= \pi . FB . AB$, die Fläche des abgeschnittenen $ADE = \pi . GD . AD$: (351 §.) also die Fläche des abgekürzten Kegels $BDEC = \pi (FB . AB - GD . AD)$. Ferner ist $FB - GD : BD = FB : AB$, und überdem $FB - GD : BD = GD : AD$: also $AB = \frac{BD . FB}{FB - GD}$ und $AD = \frac{BD . GD}{FB - GD}$. Das giebt die abgekürzte Kegelfläche $BDEC = \frac{\pi . BD}{FB - GD} (FB^2 - GD^2)$, und es ist $FB^2 - GD^2 = (FB + GD) \times (FB - GD)$; (78 §. Rech.) also erhält man die Kegelfl. $BDEC = \pi . BD . (FB + GD)$. Eben so groß aber ist die Fläche eines Cirkels, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie ist, zwischen BD und (FB + GD).

Die 55. Erklärung.

353. Eine Kugel berührt eine Kegelfläche an ihrer innern hohlen Seite, wenn die Kugelfläche zwar ringsherum an die Kegelfläche jedoch so anschließt, daß kein Punct von der Kegelfläche innerhalb der Kugel fällt.

Der 1. Zusatz.

85 354. Im Kreise um den Mittelpunct C ziehe
Fig. man ein paar Durchmesser AB, DE, auf einander senkrecht, und im verlängerten Durchmesser DE nehme man einen Punct F an; so kann man durch F zwo Berührungslinien des Kreises FH und FK ziehen. (143 §.) Nimmt man FH = FK, und ziehet HK, so wird FHK ein gleichschenklichtes Dreyeck. Weil nun auch FG = FI ist, (144 §.) so wird HK mit GI parallel. (178 §.) Die ganze Figur drehe sich um die Axe DE, so beschreibt der Kreis eine Kugel, und das Dreyeck FHK einen graden Kegel; GI wird der Durchmesser, und NG der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie zugleich in der Kugelfläche, und in der Kegelfläche liegt. Dieser Kreis wird der **Berührungskreis**, und alle übrige Puncte der Kegelfläche liegen ausserhalb der Kugel.

Der 2. Zusatz.

355. Man kann GH = FG, und IK = FI nehmen, so wird auch FN = NO, und die Ebene des Berührungskreises halbirt die Axe OF des Kegels.

Der 3. Zusatz.

86 356. Im Umfange des Kreises, den wie vorhin
Fig. die beyden Durchmesser AB, DE, in vier Quadranten theilen, kann man auch den Punct G, wo es gefällig ist, annehmen, und durch G die Tangente HR ziehen. Wird alsdenn ferner GI mit AB parallel, und durch I eine andre Tangente gezogen, auf derselben aber IS = GR, IK = GH genommen, und RS, HK gezogen; so wird durch Umdrehung des Kreises um die Axe DE eine Kugel, durch Umdrehung des Trapezii HRSK eine abgekürzte Kegelfläche beschrie-

beschrieben. Die Kugelfläche berührt die abgekürzte Kegelfläche von innen in einem Kreise, wozu der Durchmesser GI, und der Halbmesser NG = NI gehört.

Der 3. Zusatz.

357. Macht man GH = GR, und IK = IS; so wird auch NO = NF, und die Ebene des Berührungskreises halbirt die Axe OF des abgekürzten Kegels.

Der 65. Lehrsatz.

358. Wenn eine Kugel *ADBE* die Fläche des graden Kegels *FHK* von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Axe *OF* des Kegels in *N* halbirt; so ist die Kegelfläche einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, die eine dem grösten Kreise der Kugel gleiche Grundfläche hat. 85 Fig.

Beweis. Die Figur sey wie im 355 §. gezeichnet. Ueberdem aber ziehe man noch durch A und B Tangenten des Kreises, (143 §.) welche HK in P und Q schneiden. Ferner ziehe man LM durch F mit AB, also auch mit HK und GI parallel: so beschreibt das Rechteck PLMQ durch Umdrehung um die Axe OF einen Cylinder, der eben so hoch ist, als der Kegel FHK, und der Durchmesser seiner Grundfläche ist dem Durchmesser AB der Kugel, mithin die Grundfläche selbst dem grösten Kreise der Kugel gleich. Man ziehe HV mit dem Durchmesser GT parallel, so wird DE damit in V zusammen stossen, das Dreyeck FHV wird dem Dreyeck FGC ähnlich, und man erhälte FG : FH = GC : HV, folglich HV = 2GC = AB = PQ. Ueberdem sind FHV, FHO, OHV, ähnliche Dreyecke, (183 §.) also ist HV

: HO = HF : FO, (183 §.) oder PQ : HO = HF : PL, und daraus folgt PQ . PL = HO . HF. Es ist aber π . PQ . PL der Cylinderfläche, und π . HO . HF der Kegelfläche gleich: (351 §.) also sind die Kegelfläche und Cylinderfläche von gleicher Grösse.

Der 66. Lehrsatz.

88 Fig. 359. Die grade Linie *EF*, welche die beyden einander nicht parallelen Seiten *AB*, *CD*, eines Trapezii *ABDC* halbirt, ist so groß, als die halbe Summe der beyden parallelen Seiten.

Beweis. Man halbire AC in G, BD in H, und ziehe EG, FH, auch überdem BC, da dann BC und EF einander in K schneiden. Alsdenn sind EF, AC, BD, parallel, (180 §.) auch aus eben dem Grunde BC, EG, und HF. Demnach ist EK = GC = $\frac{1}{2}$AC, und KF = BH = $\frac{1}{2}$BD, (119 §.) mithin EK + KF oder EF = $\frac{1}{2}$ (AC + BD).

Der 67. Lehrsatz.

86 Fig. 360. Wenn eine Kugel *ADBE* die abgekürzte grade Kegelfläche *HRSK* von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Höhe des abgekürzten Kegels halbirt; so ist die abgekürzte Kegelfläche einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, deren Grundfläche so groß ist, als der gröste Kreis der Kugel.

Beweis. Die Figur sey wie im 357 §. gezeichnet: ausserdem aber ziehe man durch A und B ein Paar Tangenten des Kreises, welche HK in P und Q, RS aber in L und M schneiden; so wird durch Umdrehung des Rechtecks PLMQ um die Axe OF ein grader Cylinder beschrieben, der eben so hoch ist, als der abgekürzte Kegel HRSK, und dessen Grund-

fläche

fläche dem gröſten Kreiſe der Kugel gleich iſt. Noch ſey RV auf HK ſenkrecht, ſo wird CGN + NGR = R = CGN + GCN, alſo NGR = RHV = GCN, und das Dreyeck HRV ~ Dreyeck CGN. Daraus folgt HR : RV = CG : GN, alſo auch HR : RV = GT : GI. Es iſt aber RV = PL, GT = PQ, und GI = OH + FR: (359 §.) alſo auch HR : PL = PQ : OH + FR, und man erhält HR (OH + FR) = PL . PQ. Weil nun die abgekürzte Kegelfläche HRSK = π . HR (OH + FR), (352 §.) und die Cylinderfläche PLMQ = π . PL . PQ iſt; (351 §.) ſo erhellet, das beyde Flächen gleich ſind.

Der 68. Lehrſatz.

361. Man kann in und um die Halbkugel ſoviele ähnliche Kegelflächen in gleicher Anzahl beſchreiben, daß der Exponent des Verhältniſſes der Summe aller äuſſern zur Summe aller innern Kegelflächen kleiner wird, als jede Zahl, die auch nur um etwas ſehr weniges gröſſer als Eins iſt.

Beweis. Ueber dem Durchmeſſer AB ſey ein Halbkreis AFDGB beſchrieben, und CD auf AB ſenkrecht. Jeder Quadrant ſey in ſo viele gleiche Bogen, als man will, jedoch beyde Quadranten in gleichviele Bogen, getheilt. Wenn alsdenn die Sehnen, AY, DY, DZ, BZ, gezogen werden; ſo hat man die halbe Peripherie AYDZB eines innern regulären Polygons. Man halbire jeden Bogen aufs neue in E, F, G, H, und ziehe durch die Theilungspuncte Berührungslinien des Kreiſes: ſo hat man die halbe Peripherie LMNOP eines ähnlichen äuſſern regulären Polygons. Noch ſey CK auf AY ſenkrecht, und mit dem Halbmeſſer CK = CQ ein Halb- 87 Fig.

kreis beschrieben, der alle Seiten des innern Polygons berührt.

Aus A und B, auch aus Q und R richte man grade Linien über AB senkrecht auf, durch D und N aber ziehe man grade Linien mit AB parallel, welche die vorigen in S, T, V und W schneiden. Drehet sich nun die Figur um die Axe CN, so beschreibt AEDGB eine Halbkugel, die Peripherie des äussern Polygons beschreibt Kegelflächen, welche die Halbkugelfläche berühren, und die Peripherie des innern Polygons beschreibt innere Kegelflächen. Aus ASTB wird ein Cylinder, dessen Fläche der Summe aller äussern Kegelflächen gleich ist; (358. 360 §.) aus QVWR aber ein Cylinder, dessen Fläche der Summe aller innern Kegelflächen gleich ist, weil auch der innere Halbkreis QIR eine Halbkugel beschreibt. Man setze die Summe der äussern Kegelflächen $= S$, die Summe der innern $= s$, so ist $S = 2\pi CA \cdot CN$, $s = 2\pi CQ \cdot CD$, (348 §.) also $\frac{S}{s} = \frac{CA \cdot CN}{CQ \cdot CD}$. Es ist aber $CA = CD = CF$, und $CQ = CX$; also auch $\frac{S}{s} = \frac{CD}{CX} \cdot \frac{CN}{CF}$. Ferner ist $\frac{CD}{CX} = \frac{CN}{CF}$, also $\frac{S}{s} = \frac{CN^2}{CF^2}$, und diese Zahl ist zugleich der Exponent des Verhältnisses der Fläche des äussern zur Fläche des innern Polygons. (212 §.)

Nun sey n eine gegebene Zahl, welche so wenig als man will Eins übertrift; so kann man den Peripherien der Polygone so viele Seiten geben, daß die Zahl $\frac{CN^2}{CF^2} < n$ wird: (219 §.) alsdenn ist auch $\frac{S}{s} < n$.

Der

Der 1. Zusatz.

362. Wenn eine Fläche Z kleiner ist, als die Halbkugelfläche; so kann die Summe der innern Kegelflächen $s \rhd Z$ werden. Es sey die Halbkugelfläche $= H$, und $\frac{H}{Z} = n$, so ist $n \rhd 1$. Weil nun $\frac{S}{s} \lhd n$ werden kann, so ist alsdenn $\frac{S}{s} \lhd \frac{H}{Z}$, mithin $1 : \frac{S}{s} \rhd 1 : \frac{H}{Z}$ (21 §. Rech.) oder $\frac{s}{S} \rhd \frac{Z}{H}$. Ueberdem ist $H \lhd S$, also $\frac{s}{H} \rhd \frac{s}{S}$, mithin auch $\frac{s}{H} \rhd \frac{Z}{H}$, und $s \rhd Z$.

Der 2. Zusatz.

363. Wenn dagegen eine Fläche Y grösser ist, als die Halbkugelfläche H; so kann die Summe der äussern Kegelflächen $S \lhd Y$ werden. Es sey $\frac{Y}{H} = n$, also $n \rhd 1$. Alsdenn kann $\frac{S}{s} \lhd n$ werden, mithin auch $\frac{S}{s} \lhd \frac{Y}{H}$. Weil aber $H \rhd s$ ist, so hat man $\frac{S}{H} \lhd \frac{S}{s}$, mithin $\frac{S}{H} \lhd \frac{Y}{H}$, und $S \lhd Y$.

Der 3. Zusatz.

364. Eine Fläche, die grösser als jede Summe der innern Kegelflächen, und kleiner als jede Summe der äussern Kegelflächen ist, muß der Halbkugelfläche gleich seyn. Wäre sie kleiner als die Halbkugelfläche, so gäbe es in der letztern eine Summe von Kegelflächen, die grösser als jene Fläche wäre. Wenn eben diese Fläche aber grösser als die Halbku-

gelfläche wäre, so gäbe es eine Summe äusserer Kegelflächen, die kleiner als die erwehnte Fläche wäre: beydes der Voraussetzung zuwider.

Der 69. Lehrsatz.

87 Fig. 365. Die Halbkugelfläche *ABD* ist einer Cylinderfläche *AcdB* gleich, die mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Es ist diese Cylinderfläche $AcdB = 2\pi . CA . CD = 2\pi . CA^2$. Wenn aber S eine Summe äusserer Kegelflächen, und s eine Summe der ähnlichen innern Kegelflächen bezeichnet; so ist $S = 2\pi . CA . CN$, und $s = 2\pi CQ . CD = 2\pi CA . CQ$. Weil nun allemahl $CA > CQ$, und zugleich $CA < CN$ ist, wie viele Kegelflächen man auch in und um die Kugelfläche beschreiben will; so ist die Cylinderfläche A*cd*B grösser, als jede Summe der innern, und kleiner als jede Summe der äussern Kegelflächen: also ist eben die Cylinderfläche A*cd*B der Halbkugelfläche ADB gleich: (364 §.)

Der 1. Zusatz.

366. Die Halbkugelfläche ist doppelt so groß, als der größte Kreis der Kugel, weil der Inhalt dieses Kreises $= \pi . CA^2$ ist. Demnach ist die ganze Kugelfläche viermahl grösser, als die Fläche ihres grösten Kreises.

Der 2. Zusatz.

367. Die Flächen ungleicher Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer ganzen oder halben Durchmesser.

Der 3. Zusatz.

368. Der körperliche Inhalt der Kugel ist $= \frac{4}{3}\pi CA^3$ (342 §.), also auch eben der Inhalt $= \frac{1}{3}4\pi . CA^2 . CA$, und $4\pi . CA^2$ ist der Quadrat-

inhalt

inhalt von der Oberfläche der Kugel. Eine Pyramide oder ein Kegel über einer Grundfläche so groß, als die Kugelfläche, wovon die Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich wäre, hätte eben den Inhalt.

Anfangsgründe der ebenen Trigonometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Die ebene Trigonometrie lehrt, wie man aus dreyen Stücken vom Umfange eines gradlinichten Dreyecks, wenn unter denselben wenigstens eine Seite bekannt ist; die übrigen durch Rechnung finden könne. Man unterscheidet sie von der sphärischen Trigonometrie, welche sich mit Berechnung der Seiten und Winkel der sphärischen Dreyecke beschäftiget.

Die 2. Erklärung.

2. Es sey ACB ein spitzer Winkel, und BCK seine Ergänzung zu 180° oder 2R. Ferner sey CF auf AC senkrecht, und aus dem Mittelpunct C sey mit einem willkührlichen Halbmesser CA ein Halbkreis über AK beschrieben: so sind AF und FK Quadranten, und AB ist das Maas des Winkels ACB. Aus B ziehe man BD, BE, auf die Schenkel des rechten Winkels ACF senkrecht, durch A und F aber Tangenten des Kreises, welche CB in T und V

Fig. 89

schneiden: so erhellet, daß die Linien BD und CE, AD, AT, CT, BE = CD, EF, FV und CV insgesammt von der Grösse des Winkels ACB abhängen. Es heißt aber

BD = CE der Sinus,
AD der Quersinus, (sinus versus)
AT die Tangente,
CT die Secante, sowohl des Winkels ACB als auch des Bogens AB. In eben dem Verstande ist

BE = CD der Sinus, EF der Quersinus,
FV die Tangente, CV die Secante,

sowohl des Winkels FCB, der ACB zu 90° ergänzt, als auch des Bogens FB, der AB zum Quadranten ergänzt. Weil man aber die vier zuletzt genannten Linien auch als solche ansiehet, die mit dem Winkel ACB, oder dem Bogen AB zusammen gehören; so nennt man

BE = CD den Cosinus,
BF den Cosinus versus,
FV die Cotangente,
CV die Cosecante, sowohl des Winkels ACB, als auch des Bogens AB.

Der 1. Zusatz.

3. Wenn der spitze Winkel ACB wächst, so wächst zugleich sein Sinus und Quersinus, seine Tangente und Secante: dagegen nehmen die übrigen vier trigonometrischen Linien ab. Nach diesem Gesetz erfolgen die Aenderungen so lange, bis ACB, oder AB = 90° wird, mithin CB in CF fällt. Nun wird nicht allein der Sinus DB = CF, sondern auch der Quersinus AD = AC, also werden beyde dem Halbmesser des Bogens AB gleich, der nun ein Quadrant ist, wenn B in F fällt.

Der

Der 2. Zusatz.

4. Wenn B über F nach G hinaus rückt, so nimmt der Sinus, der nun GH ist, wieder ab, und der Sinus kann nie grösser, als der Halbmesser werden: deswegen heißt der Sinus des rechten Winkels auch der ganze Sinus. Wird dieser ganze Sinus = 1 angenommen, so lassen sich die übrigen Sinus nicht anders, als durch ächte Brüche ausdrücken. Für den stumpfen Winkel ACG ist AH der Quersinus, mithin übertrift derselbe nun den ganzen Sinus.

Der 3. Zusatz.

5. Die Tangende AT und Secande CT wachsen über alle Gränzen, wenn sich ACB dem rechten Winkel nähert. Tangente und Secante eines rechten Winkels haben eigentlich gar keinen Endpunct mehr, mithin ist sowohl die Tangente, als auch die Secante eines rechten Winkels grösser, als eine jede gegebene Linie. Eine Linie dieser Art nennt man unendlich groß, und braucht das Zeichen ∞, um auszudrücken, daß eine Linie unendlich groß werde.

Der 4. Zusatz.

6. Die Tangende und Secande des stumpfen Winkels ACG sind AS, CS, beyder Durchschnittspunct liegt nun auf der andern Seite des Durchmessers AK, und beyde Linien haben nun eine Lage, die der vorigen entgegengesetzt ist.

Der 5. Zusatz.

7. Der Cosinus, der Cosinus versus, und die Cotangente des rechten Winkels verschwinden, und die Cosecante ist dem Halbmesser gleich. Für den stumpfen Winkel haben der Cosinus EG = CH, und die Cotangente FW eine Lage, die der vorigen entgegengesetzt ist, und die Cosecante CW ist wieder grösser, als der Halbmesser. Eben diese Linien wach-

wachsen mit dem stumpfen Winkel, auch wächst der Quersinus mit dem Cosinus versus, so wie im Gegentheil Sinus, Tangente, Secante abnehmen.

Der 6. Zusatz.

8. Wird der Winkel ACG, oder der Bogen AG = 180°, so verschwindet der Sinus, der Quersinus ist dem Durchmesser des Bogens AG gleich, der nun ein Halbkreis ist; die Tangente verschwindet, die Secante ist dem Halbmesser gleich, die Cotangente und Cosecante werden unendlich groß, der Cosinus und Cosinus versus aber dem Halbmesser gleich.

Der 1. Lehrsatz.

89 Fig. 9. Zu zweenen Winkeln, die einander zu 180° ergänzen, gehören gleich grosse trigonometrische Linien, wenn der einzige Quersinus ausgenommen wird.

Beweis. Wenn ACB = 180° — ACG ist, so hat man auch KCG = 180° — ACG, also ACB = KCG = ACS, und FCB = FCG. Ferner ist CG = CB, bey D und H sind rechte Winkel: also ist in den Dreyecken BDC und GHC die Seite BD = GH, CD = CH, mithin sind Sinus und Cosinus der Winkel ACB, ACG, gleich groß, nur nicht die Quersinus AD, AH, welche um den doppelten Cosinus verschieden sind. In den Dreyecken CAT, CAS, ist AT = AS, CT = CS, also sind Tangente und Secante gleich groß. Eben so hat man in den Dreyecken CFV, CFW, auch FV = FW, CV = CW: also sind die Cotangente und Cosecante für beyde Winkel ACB, ACG, gleich groß, und der Cosinus versus FE ist gleichfalls für beyde einerley, weil der Sinus CE für beyde einerley ist.

Anmer-

Anmerkung.

Daß einige dieser Linien für solche Winkel, die einander zu 180° ergänzen, eine entgegengesetzte Lage haben, ist vorhin schon bemerkt worden.

Der 2. Lehrsatz.

10. Wenn *ACB*, *acb*, gleichgrosse Winkel, die Bogen *AB*, *ab*, aber mit ungleichen Halbmessern beschrieben sind, und wenn alsdenn für diese Winkel oder Bogen die den Halbmessern *CA*, *ca*, zugehörigen trigonometrischen Linien verzeichnet werden; so verhalten sich von diesen Linien diejenigen, die einerley Nahmen haben, wie die dazu gehörigen Halbmesser. 89 F. 90

Beweis. Die Dreyecke BCD, *bcd*, ACΓ, *act*, AFV, *afv*, sind einander ähnlich: (181 §.) deßwegen verhalten sich die Sinus und Cosinus wie die Halbmesser CB : *cb*, die Tangenten und Secanten wie CA : *ca*, die Cotangenten und Cosecanten wie CF : *cf*. Ferner ist AC : *ac* = CD : *cd*, also auch AC − CD : *ac* − *cd* = AC : *ac*, (172 §.) d. i. die Quersinus AD, *ad*, verhalten sich wie die Halbmesser. Für die Cosinus versus EF, *ef*, folgt es eben so. Weil die stumpfen Winkel mit ihren Ergänzungen zu 180° gleich grosse trigonometrische Linien haben, nur daß der Quersinus ausgenommen ist; so gilt der Satz auch für stumpfe Winkel. Uebrigens hat man auch AC : *ac* = CH : *ch*, also AC + CH : *ac* + *ch* = AC : *ac*, oder die Quersinus AH, *ah*, verhalten sich wie die Halbmesser.

Der 1. Zusatz.

11. Es sey der Halbmesser CA = 1, und der Halbmesser eines andern Kreises = *r*, der Sinus BD = *s*, der Cosinus CD = *c*, die Tangente AΓ = *t*; für den Halbmesser *r* und eben den Winkel

ACB

ACB aber bezeichne man den Sinus, Cosinus und die Tangente mit den Buchstaben S, C, T; so hat man $1 : r = s : S$, $1 : r = c : C$, $1 : r = t : T$: also $S = r \cdot s$, $C = r \cdot c$. $T = r \cdot t$. Ist σ für den Halbmesser $= 1$, und Σ für den Halbmesser $= r$ die Secante dieses Winkels, so hat man auch $\Sigma = r \cdot \sigma$. Wenn also für den Halbmesser $= 1$ die mit einem Winkel zusammen gehörigen trigonometrischen Linien bekannt sind; so hat man sie leicht für jeden andern gegebenen Halbmesser.

Der 2. Zusatz.

12. Wenn der Sinus BD für den Halbmesser $= 1$ bekannt ist, so hat man auch den Cosinus $CD = \sqrt{(1 - BD^2)}$ (232 §.) und überdem ist $CD : BD = DA : AT$; (181 §.) also die Tangente $AT = \frac{BD}{CD} = \frac{\sin}{\cos}$. Ueberdem ist $AT : AC = CF : FV$ und $AC = CF = \text{rad.}$; also $\text{tang} \times \text{cot.} = \text{rad.}^2$. Das giebt ferner die Secante $CT = \sqrt{(1 + AT^2)}$ (232 §.) oder auch die Secante $CT = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{\cos.}$, also $\text{tang} = \sin . \sec$, und $\sec = \frac{\text{tang}}{\sin}$. Weiter ist $AD = AC - CD$, also $\text{sinv} = 1 - \cos.$

Der 3. Zusatz.

13. Der Sinus BD ist die halbe Sehne BL des doppelten Bogens AB: wenn man also für BAL nach und nach Bogen von 60°, 30°, 15°, 7° 30′, 3° 45′, 1° 52½′, 0° 56¼′, 0° 28⅛′, 0° 14 1/16′ annimmt; so hat man schon aus dem 237 §. Geom. die Sinus für Bogen oder Winkel von 30°, 15°, 7° 30′, 3° 45′, 1° 52½′, 56¼′, 28′ 7½″, 14′ 3¾″,

7′

$7' 1\frac{7}{8}''$. Zugleich giebt eben die Rechnung die Cosinus, Tangente, und Secante dieser Winkel. Man halbire also die im 237 §. zuletzt gefundenen beyden Sehnen, welche mit Bogen von $28' 7\frac{1}{2}''$, und $14' 3\frac{3}{4}''$ zusammen gehören, auch eben so die dazu gehörigen äussern Polygonseiten, so erhält man

$$\sin 14' 3\frac{3}{4}'' = 0{,}0040906$$
$$\text{tang } 14' 3\frac{3}{4}'' = 0{,}00409065,$$

ferner

$$\sin 7' 1\frac{7}{8}'' = 0{,}0020453$$
$$\text{tang } 7' 1\frac{7}{8}'' = 0{,}00204532;$$

mithin ergiebt sich aus dieser Rechnung, daß eines solchen Winkels, der kleiner, als $14' 3\frac{3}{4}''$ ist, Sinus von seiner Tangente nicht mehr um $\frac{1}{10000000}$ des Halbmessers verschieden sey.

Der 4. Zusatz.

14. Demnach müssen auch die Zahlen, welche die Länge solcher Kreisbogen, die kleiner als $14' 3\frac{3}{4}''$ sind, für den Halbmesser $= 1$ angeben, in dem ersten 7 Decimalstellen mit denjenigen einerley seyn, welche die Grösse ihrer Sinus und Tangenten ausdrücken. Weil nun die Länge der Bogen sich wie die Zahl ihrer Grade verhält; so kann man nach der Regel Detri ansetzen:

$$7' 1\frac{7}{8}'' : 7' = 0{,}0020453 : \sin 7',$$

und man findet

$$\sin 7' = 0{,}0020362,$$
$$\text{also } \sin 1' = 0{,}00029088.$$

Der 5. Zusatz.

15. Wenn in der 91 Fig. der Winkel $ACB = \alpha$, $BCG = \beta$ gesetzt wird, so ist $EF = \sin\alpha$, $CF = \cos\alpha$ Fig. 91
$GL = \sin\beta$, $CL = \cos\beta$, $GH = \sin(\alpha + \beta)$. Wenn ferner LM, LN, auf CA, GH, senkrecht sind,

sind, und BC, GH einander in K schneiden; so sind die Dreyecke FCE, LCM, HCK, LKN, LGN, insgesammt einander ähnlich. Demnach ist CE : EF = CL : LM, oder 1 : $\sin\alpha = \cos\beta$: LM, also LM oder HN = $\sin\alpha \cdot \cos\beta$. Ferner ist CE : CF = GL : GN, oder 1 : $\cos\alpha = \sin\beta$: GN, mithin GN = $\cos\alpha \cdot \sin\beta$. Daraus findet man GH = HN + GN, oder $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$. Wenn also Sinus und Cosinus zweener Winkel schon gefunden sind, so kann man auch den Sinus und Cosinus ihrer Summe finden. Aus diesem allen läßt sich nun vollständig übersehen, wie die Sinus aller Winkel von Minute zu Minute bis zu 90 Graden, und daraus alle übrige trigonometrische Linien für diese Winkel gefunden werden können. Man hat alle diese Zahlen in Tabellen gebracht, wovon unter dem Nahmen der **trigonometrischen Tafeln** bald mehr Nachricht folgen wird.

Der 3. Lehrsatz.

16. **In einer geometrischen Progression ist das Verhältniß eines jeden Gliedes zum ersten Gliede aus dem Verhältnisse des zweyten Gliedes zum ersten sovielmahl genommen zusammen gesetzt, sovielmahl Eins in der Zahl enthalten ist, welche angiebt, das wievielste Glied es nach dem ersten sey.**

Beweis. In der Progreßion

1 2 4 8 16 32 64 128 256

hat man

32 : 16 = 2 : 1
16 : 8 = 2 : 1
8 : 4 = 2 : 1
4 : 2 = 2 : 1
2 : 1 = 2 : 1

also ist das Verhältniß 32 : 1 aus dem Verhältnisse 2 : 1 fünfmahl genommen zusammengesetzt. (202 §.) Man übersiehet leicht, daß es mit jedem Verhältnisse eines der übrigen Glieder zum ersten eben die Bewandniß habe.

Zusatz.

17. Weil das Verhältniß 8 : 1 dreymahl grösser ist, als 2 : 1, so ist 2 : 1 = $\frac{1}{3}$ des Verhältnisses 8 : 1, und man kann die Grösse eines Verhältnisses mit einem andern Verhältnisse auf ähnliche Art vergleichen, wie man sonst einzelne Grössen vergleicht.

Die 3. Erklärung.

18. Wenn man ein gewisses Verhältniß von bekannter Grösse als das Maaß, oder das Grundverhältniß annimmt, womit jedes andre Verhältniß verglichen werden soll; so heißt die Zahl, welche die Grösse eines jeden andern Verhältnisses in Vergleichung mit dem Grundverhältnisse angiebt, der Logarithme jenes Verhältnissen. Der Logarithme des Grundverhältnisses ist alsdenn = 1. Man bezeichnet den Logarithmen eines Verhältnisses kurz auf die Art, daß man demselben ein l voransetzt.

Zusatz.

19. Wenn l (8 : 1) = 1 ist; so ist l (2 : 1) = $\frac{1}{3}$, l (4 : 1) = $\frac{2}{3}$, l (16 : 1) = $\frac{4}{3}$, l (32 : 1) = $\frac{5}{3}$, l (64 : 1) = 2, u. s. f. Die Logarithmen solcher Verhältnisse, die sich aus dem Grundverhältnisse selbst mehrmahl genommen zusammensetzen lassen, sind ganze Zahlen; die Logarithmen solcher Verhältnisse aber Brüche, die nur aus einem aliquoten Theil des Grundverhältnisses zusammen gesetzt werden können.

Die 4. Erklärung.

20. Der Logarithme des Verhältnisses einer Zahl zu 1 heißt auch der Logarithme dieser Zahl.

Eine Reihe von Zahlen mit den dazu gehörigen Logarithmen heißt ein logarithmisches System, und die Zahl, deren Logarithme = 1 gesetzt ist, nennt man die Grundzahl (basin) des Systems.

Der 4. Lehrsatz.

21. Wenn man die zu einerley System gehörigen Logarithmen zweyer Verhältnisse zusammen addirt, so ist die Summe der Logarithme desjenigen Verhältnisses, das aus beyden zusammengesetzt ist.

Beweis. Wenn mit den Zahlen

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512

die Logarithmen

0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1 $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{3}$ 2 $\frac{7}{3}$ $\frac{8}{3}$ 3

zusammen gehören; so giebt der Logarithme eines jeden Verhältnisses an, wie vielmahl derjenige Theil des Grundverhältnisses in demselben enthalten sey, welcher in dem System als das gemeine Maaß aller übrigen angesehen wird. In dem gewählten Exempel kann man das Verh. 2 : 1 = $\frac{1}{3}$ Verh. (8 : 1) als das gemeine Maaß der Verhältnisse eines jeden Gliedes der zum Grunde gelegten geometrischen Progreßion zu ihrem ersten Gliede ansehen. Setzt man aber aus zweyen Verhältnissen ein drittes zusammen, so muß eben der erwehnte Theil des Grundverhältnisses in dem zusammengesetzten Verhältnisse soviel-mahl enthalten seyn, als er in den beyden Verhältnissen zusammen enthalten ist, woraus man jenes zusammen setzt. Demnach ist der Logarithme des zusammen gesetzten Verhältnisses die Summe der Logarithmen der Verhältnisse, woraus man es zusammen setzt.

Der

Der 1. Zusatz.

22. In dem beygefügten Exempel wäre

$$l(4:1) = \frac{2}{3}$$
$$l(32:1) = \frac{5}{3}$$
$$\text{also } l(128:1) = \frac{7}{3}$$

Der 2. Zusatz.

23. Der Logarithme des Products zweyer Zahlen ist die Summe der zu eben dem System gehörigen Logarithmen der Factoren. Demnach ist der Logarithme einer Quadratzahl doppelt so groß, und der Logarithme der Cubiczahl dreymahl grösser, als der Logarithme der Wurzel. Also ist auch umgekehrt der Logarithme der Quadratwurzel halb so groß, als der Logarithme der Quadratzahl, und der Logarithme der Cubicwurzel beträgt den dritten Theil des Logarithmen der Cubiczahl. Wenn demnach die Logarithmen zweyer Zahlen bekannt sind, so ist die halbe Summe dieser Logarithmen der Logarithme ihrer mittlern geometrischen Proportionalzahl.

Der 3. Zusatz.

24. Der Logarithme eines Quotienten, also auch eines unächten Bruchs, wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendi subtrahirt. Es sey $D : d = Q$, so ist $D = Q \times d$, (19 §. Rech.) mithin $l.D = l.Q + l.d$, und das giebt $lQ = lD - ld$.

Der 4. Zusatz.

25. In jedem System ist log. $1 = 0$. Denn es ist $1 = \frac{a}{a}$, was auch a bezeichnen mag, also $l1 = la - la = 0$, weil in einerley System gleiche Zahlen gleiche Logarithmen haben.

Der 5. Zusatz.

26. Wenn zu dreyen Zahlen eine vierte geometrische Proportionalzahl gesucht wird, und ihre Logorithmen bekannt sind; so addirt man die Logarithmen der mittlern Zahlen, und subtrahirt von der Summe den Logarithmen der ersten Zahl, um den Logarithmen der vierten Proportionalzahl zu finden.

Die 5. Erklärung.

27. Das Briggische oder gemeine Logarithmen-System hat die Grundzahl 10, es ist in demselben log. 10=1, und es liegt die geometrische Progreßion zum Grunde, worin 1 das erste Glied, und 10 der Exponent ist. Nur die Logarithmen der Zahl 10 und ihrer Potenzen (70 §. Rech.) sind in diesem System ganze Zahlen; die Logarithmen der Zahlen zwischen Eins und 10 sind ächte Brüche; die Logarithmen aller übrigen Zahlen aber, die nicht in der Hauptreihe vorkommen, sind unächte Brüche. Wenn man sie also in Decimaltheilen berechnet, so bestehet jeder Logarithme aus einer ganzen Zahl mit einer Reihe dazu gehöriger Decimaltheile. Diese ganze Zahl heißt die Kennziffer des Logarithmen, nur für die Zahlen, welche zwischen 1 und 10 fallen, ist 0 die Kennziffer.

Der 1. Zusatz.

28. Die Zahl, welche mit einem Logarithmen zusammen gehört, bestehet aus einer Ziffer mehr, als die Kennziffer des Logarithmen Eins enthält. Von 1 bis 9 ist die Kennziffer 0, von 10 bis 99 ist sie 1, von 100 bis 999 ist sie 2, von 1000 bis 9999 ist sie 3, und so ferner fort.

Der 2. Zusatz.

29. Die Quadratwurzel aus der Zahl 10 ist schon im 82 §. der Rechenkunst gefunden; und wenn man

aus

aus der so gefundenen Wurzel jedesmahl aufs neue die Quadratwurzel sucht, so findet man die nachstehenden Zahlen mit ihren Logarithmen.

A =	10,00000000	lA =	1,00000000	B =	√A
B =	3,16227766	lB =	0,50000000	C =	√B
C =	1,77827941	lC =	0,25000000	D =	√C
D =	1,33352143	lD =	0,12500000	E =	√D
E =	1,15478198	lE =	0,06250000	F =	√E
F =	1,07460790	lF =	0,03125000	G =	√F
G =	1,03663296	lG =	0,01562500	H =	√G
H =	1,01815174	lH =	0,00781250	I =	√H
I =	1,00903505	lI =	0,00390625	K =	√I
K =	1,00450737	lK =	0,00195312	L =	√K
L =	1,00225115	lL =	0,00097656	M =	√L
M =	1,00112494	lM =	0,00048828	N =	√M
N =	1,00056234	lN =	0,00024414	O =	√N
O =	1,00028113	lO =	0,00012207	P =	√O
P =	1,00014056	lP =	0,00006103	Q =	√P
Q =	1,00007027	lQ =	0,00003051	R =	√Q
R =	1,00003514	lR =	0,00001526	S =	√R
S =	1,00001757	lS =	0,00000763	T =	√S
T =	1,00000878	lT =	0,00000381	V =	√T
V =	1,00000439	lV =	0,00000191	W =	√V
W =	1,00000219	lW =	0,00000095	X =	√W
X =	1,00000110	lX =	0,00000048	Y =	√X
Y =	1,00000055	lY =	0,00000024	Z =	√Y
Z =	1,00000028	lZ =	0,00000012		

Alle solche Wurzeln aus 10 sind zwar irrational, und eben darum keine ganze Zahlen; man kann aber aus diesen Wurzeln durch die Multiplication solche Producte zusammen setzen, die einer gegebenen ganzen Zahl so nahe kommen, als man will; und das wird

ein Mittel, die Logarithmen für ganze Zahlen durch Näherung zu finden.

Der 3. Zusatz.

30. Die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen (44 §. Rech.) kann man leicht durch Addition der Logarithmen ihrer einfachen Factoren finden: (23 §.) demnach ist nur bey den Primzahlen die Anwendung einer Näherungsmethode nothwendig. Zwischen 1 und 10 fallen die Primzahlen 2, 3, 5, 7; unter den im 29 §. gefundenen Zahlen ist nur $B > 2$, die übrigen sind alle kleiner, und wenn man C mit D oder E multiplicirt, so werden die Producte grösser als 2. Aber C mit F multiplicirt giebt 1,91095306, und diese Zahl ist zwar noch kleiner als 2, aber doch nicht mehr so viel als C davon verschieden. Eben dieses Product C . F kann man der Zahl 2 noch näher bringen, wenn man unter den weiter folgenden Wurzeln diejenigen übergehet, welche in C . F multiplicirt ein Product geben würden, das grösser als 2 wäre, unter den übrigen aber die größte als Factor wählet. Dazu dienet hier die sogleich folgende Wurzel G, und man wird nun leicht der nachstehenden Rechnung folgen können.

$C = 1{,}77827941$	$lC = 0{,}25000000$	
$F = 1{,}07460790$	$lF = 0{,}03125000$	$a = C.F$
$a = 1{,}91095306$	$la = 0{,}28125000$	$b = a.G$
$b = 1{,}98095690$	$lb = 0{,}29687500$	$c = b.I$
$c = 1{,}99885491$	$lc = 0{,}30078125$	$d = c.N$
$d = 1{,}99997890$	$ld = 0{,}30102539$	$e = d.T$
$e = 1{,}99999643$	$le = 0{,}30102920$	$f = e.X$
$f = 1{,}99999861$	$lf = 0{,}30102968$	$g = f.Y$
$g = 1{,}99999969$	$lg = 0{,}30102992$	$h = g.Z$
$h = 2{,}00000024$	$lh = 0{,}30103004$	

Weil

Weil g noch nicht völlig $= 2$, und $h > 2$ ist; so muß $\log. 2 > lg$, aber auch $\log. 2 < lh$ seyn. Wenn also $\log. 2 = 0{,}3010299$ angenommen wird, so weiß man gewiß, daß höchstens nur 0,0000001, ja vielleicht nicht völlig soviel fehle. Man kann viel engere Gränzen finden, wenn man für alle Zahlen die Rechnung auf noch mehr Decimalstellen fortsetzet. Führte man sie bis zur 12ten Decimalstelle fort, so würde man $0{,}301029995084 < \log. 2$, aber schon $0{,}301029998809 > \log. 2$ finden: also kann $\log. 2 = 0{,}3010300$ gesetzt werden, wenn man nur bis auf die 7te Decimalstelle rechnet. Das giebt $\log. 4 = 2 . \log. 2 = 0{,}6020600$, und $\log. 8 = 3 . \log. 2 = \log. 4 + \log. 2 = 0{,}9030900$, (23 §.)

Der 4. Zusatz.

31. Weil $5 = 10 : 2$ ist, so hat man nun auch $\log. 5 = l10 - l2$ (24 §.) $= 0{,}6989700$. Ferner ist $5 . C = 8{,}89139705$ schon ziemlich nahe $= 9$: wenn man also das vorige Verfahren wieder anwendet; so findet man $\log. 9 = 0{,}9542425$, und daraus $\log. 3 = \frac{1}{2} \log. 9$ (23 §.) $= 0{,}4771212$, also auch $\log. 6 = l3 + l2 = 0{,}7781513$. Weiter ist $6 . E = 6{,}92869188$ ziemlich nahe $= 7$, und die Anwendung des vorigen Verfahrens giebt $\log. 7 = 0{,}8450980$. Jede Primzahl gehört zu den ungraden Zahlen, wenn man 2 ausnimmt, und wenn m die nächstvorhergehende grade Zahl bezeichnet; so ist $m + 1$ ein allgemeiner Ausdruck für die Primzahl. Weil nun $m + 1 = m \left(1 + \frac{1}{m}\right)$ ist: so kann man unter den zum voraus berechneten Zahlen B, C, D, E, u. s. w. (29 §.) diejenige

leicht finden, die dem Factor $1 + \frac{1}{m}$ am nächsten kommt, und hiernächst die Rechnung, wie in den vorigen Beyspielen gewiesen ist, fortsetzen. Die Zahl 11 ist $= 10(1 + 0{,}1)$ und $F = 1{,}07460790$ kommt den Factor $1 + 0{,}1$ unter den im 29ten §. berechneten Zahlen am nächsten. Man erhält $10F = 10{,}7460790$, und 11 mit dieser Zahl dividirt giebt 1,02... Diesem Quotienten kommt $H = 1{,}01855174$ am nächsten, und man erhält $10F.H = 10{,}94543740$. So begreift man, wie auf diesem Wege auch log. 11, und überhaupt die Logarithmen der weiter folgenden Primzahlen haben gefunden werden, und wie hiernächst die Logarithmen der ganzen Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung folgen, in Tafeln haben gebracht werden können. Von andern und kürzern Methoden, dieses Problem aufzulösen, muß die höhere Mathematik weitern Unterricht ertheilen.

Der 5. Zusatz.

32. Unter mehrern solchen gedruckten Tafeln, wovon gleich mehr Nachricht folgen wird, hat man Handausgaben, welche die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthalten. Wenn man sich nun an die Eigenschaften der Kennziffer erinnert, (27. §.) so siehet man leicht, daß die Logarithmen der ersten 1000 Zahlen auch fehlen könnten, daß es auch nicht einmahl nöthig wäre, den Logarithmen der Zahlen zwischen 1000 und 10000 die Kennziffer voran zu setzen, weil man von selbst weiß, daß es 3 seyn muß. Wenn aus den Tafeln log. $3000 = 3{,}4771212$ gefunden wird, so weiß man von selbst, daß log. $300 = 2{,}477\ldots$ log. $30 = 1{,}477\ldots$ log. $3 = 0{,}477\ldots$ seyn müsse. Wenn ferner log. $2450 = 3{,}38911661$ ist,

ist, so hat man von selbst log. 245 = 1,389 ... log. 24,5 = 1,389 ... log. 2,45 = 0,389 ...; mithin dienen solche Tafeln auch schon in manchen Fällen, die Logarithmen unächter Brüche zu finden, die aus einer ganzen Zahl mit Decimaltheilen bestehen.

Der 6. Zusatz.

33. Die Tafeln enthalten nur die ersten 7 Decimalstellen der Logarithmen, weil man sie bey vielen Rechnungen nicht schärfer nöthig hat. Vergleicht man nun den Logarithmen einer Zahl, die über 1000 hinaus gehet, mit dem nächstvorhergehenden und nachfolgenden, so wird man die Differenzen bis auf ganz kleine Abweichungen gleich groß finden, ja diese Abweichungen werden desto unbedeutender, je näher die Zahlen der Gränze 10000 kommen. Demnach verhalten sich die Differenzen der Logarithmen dieser Zahlen bis auf die 7te Decimalstelle, wie die Differenzen der dazu gehörigen Zahlen.

Anmerkung.

34. Das Briggische Logarithmen-System hat den Nahmen vom Hrn. Henrich Brigg, ehemahligen Prof. der Geom. zu Oxford, der die ersten Tafeln berechnet hat, nachdem kurz vorher ein Schottländischer Freyherr, Johann Neper, den Gebrauch der Logarithmen einzuführen versucht hatte. Nepers Logarithmen gehörten aber zu einem andern System, und Brigge wählte nachher selbst auf Nepers Rath die Grundzahl 10. Seine Tafeln enthalten die Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 20000, und überdem von 90000 bis 100000. Adrian Vlacq, ein Holländischer Mathemathiker, ergänzte nachher die Logarithmen für die Zahlen von 20000 bis 90000. Zu den ersten Uebungen in logarithmischen Rechnungen sind zwar die ziemlich allgemein bekannten, theils in Holland theils in Deutschland veranstalteten kleinen Handausgaben der trigonometrischen und logarithmischen Tafeln hinlänglich: wer sich aber in der Mathematik über die ersten Anfangs-

gründe erheben will, der muß sich mit einer vollständigern Ausgabe nach dem Muster der englischen versehen, die H. Sherwin veranstaltet und H. Gardiner bey neuern Ausgaben hie und da noch mehr berichtiget hat. Ihr Titel ist: Sherwins Mathematical Tables, contriv'd after a most comprehensiv Method. Ich besitze die dritte Londner Ausgabe von 1742, man hat aber auch schon eine vierte von 1761, und im Jahr 1770 ist zu Avignon eine ähnliche französische Ausgabe unter dem Titel: Tables des Logarithmes publiées cidevant en Angleterre par M. Gardiner veranstaltet worden. Sonst fehlte es immer noch an einer ähnlichen guten deutschen Ausgabe, bis endlich der jetzige Herr Ober-Baurath Schulze in Berlin im Jahr 1778 eine ganz ähnliche in vieler Absicht schätzbare Ausgabe besorgt hat; sie hat mit Recht den mehr allgemeinen Titel: Neue und erweiterte Sammlung Logarithmischer, Trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln, 2 Bände in gr. 8. Dazu ist nun vor ganz kurzem noch eine ähnliche Sammlung unter dem Titel gekommen: Logarithmische, Trigonometrische und andre zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, von Georg Vega, Unterlieut. und Lehrer der Math. beym K. K. 2ten Feld-Artillerie-Regiment. Wien 1783. In allen diesen Sammlungen findet man zugleich die Tafeln für die Sinus, und die übrigen trigonometrischen Linien von Minute zu Minute bis zu 90 Graden. Eigentlich hat man alle diese Linien in Decimaltheilen für den Halbmesser = 1 gesucht, in den meisten Tafeln aber nur bis auf die 7te Decimalstelle mitgetheilt. Kürze halber hat man das Comma bey der Stelle der Einer ausgelassen, und das war eben soviel, als wenn man sie alle mit 10000000 multiplicirte, also auch den Halbmesser der Tafeln dieser Zahl gleich setzte.

Die 1. Aufgabe.

35. **Eine Zahl, die höchstens aus 7 Ziffern bestehet, ist gegeben; man soll mit Hülfe der Tafeln ihren Logarithmen bis auf die 7te Decimalstelle finden.**

Auch

Auch umgekehrt: die ersten 7 Decimalstellen eines Logarithmen mit der Kennziffer sind gegeben; man soll die ersten 7 Ziffern der dazu gehörigen Zahl finden.

Aufl. 1. Die vorgelegte Zahl mag eine ganze Zahl mit oder ohne beygefügte Decimaltheile seyn; so kommt es doch nur darauf an, daß man ihren Logarithmen für den Fall suche, wenn die vierte Ziffer Einer bezeichnete, und die etwa nachfolgenden Decimaltheile wären. Ist also die Zahl 473832,1 gegeben, so suche man den Logarithmen der Zahl 4738,321, alsdenn hat man auch log. 473832,1 = l 4738,321 × 100 = log. 4738,321 + l 100. Ferner hat man aus den Tafeln

l 4739 = 3,6756867
l 4738 = 3,6755951
Diff. der Logarithmen 916

Die Differenz der dazu gehörigen Zahlen ist 1, und die gegebene Zahl übertrift die kleinere um 0,321.

Demnach setze man den 33 §. gemäß nach der Regel Detri

1 : 0,321 = 916 zur vierten Zahl 294.

Nun weiß man, daß dieses Zehnmilliontheile sind, die man zum nächstkleinern Logarithmen noch addiren muß, und man erhält log. 3738 = 3,6755951
+ 294

log. 3738,321 = 3,6756245
also log. 373832,1 = 5,6756245.

2. Die Kennziffer des Logarithmen sey welche sie wolle, man suche nur, wie groß die dazu gehörige Zahl seyn müste, wenn 3 die Kennziffer wäre. Es sey 1,8741918 der gegebene Logarithme, und n die dazu gehörige Zahl; so ist auch $ln = 3,8741918 - 2$

also $ln + l100$, oder $l100 . n = 3,8741918$. Vermöge dieser Tafeln gehört dieser Logarithme zur Zahl 7485, also ist $100 . n = 7485$, und $n = 74,85$.

Wäre 2,5639462 der gegebene Logarithme, und m die dazu gehörige Zahl; so fände man

$l\,3664 =$	$3,5639555$	$l\,10 . m =$	$3,5639462$
$l\,3663 =$	$3,5638369$	$l\,3663 =$	$3,5638369$
	Differ. 1186		Differ. 1093

Demnach kann man ansetzen (33 §.) 1186 : 1093 = 1,000 : vierte Zahl 0,922, und man erhält $10 . m = 3663,922$, also $m = 366, 3922$.

Der 1. Zusatz.

36. Hat man den Regeln des 14 und 15 §. gemäß für den Halbmesser = 1 die Sinus und Cosinus bis auf 7 Decimalstellen berechnet; so werden alle diese Zahlen ganze Zahlen für einen Halbmesser, dessen Länge die Zahl 10000000 angiebt. (Man vergleiche den 34 §. am Ende.) Für jede dieser Zahlen kann also dem 35 §. gemäß der Logarithme gesucht werden. In den Sinustafeln findet man $\sin . 28° 17' = 4738321$, also ist vermöge §. 35 $n . 1 . \log . \sin . 28° 17' = 6,6756245$, und der Logarithme des ganzen Sinus ist = 7. In den Sammlungen mathematischer Tafeln (34 §.) findet man zwar eben diesen Logarithmen für den $\sin . 28° 17'$, aber nicht mit der Kennziffer 6, sondern 9, und eben so auch den Logarithmen für den Halbmesser der Tafeln nicht = 7, sondern = 10 gesetzt. Das rührt daher, weil man die Zahlen für die Sinus wirklich auf mehr als 7 Decimaltheile für den Halbmesser 1 berechnet hatte, hiernächst aber, als man die Logarithmen suchte, die ersten 10 Decimalstellen behielte, und nun die Zahlen als ganze Zahlen an-

ansahe. Das hieß, sie alle mit 10000000000 multipliciren, und eben diese Zahl für den Halbmesser der Tafeln annehmen. Weil man in den gewöhnlichen Tafeln die Zahlen und Logarithmen nur bis auf die 7te Decimalstelle mitgetheilt hat; so hätte man auch alle Kennziffern um 3 vermindern sollen: man hat es aber unterlassen, weil dieser Umstand auf die Resultate der trigonometrischen Rechnungen gewöhnlich keinen weitern Einfluß hat.

Der 2. Zusatz.

37. Wenn r den Halbmessern der Tafeln, und α jeden Winkel oder in Graden ausgedrückten Kreisbogen bezeichnet; so ist $\text{tang}\alpha = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{r \cdot \text{tang}\alpha}{\sin\alpha}$: (11. 12 §.) also $\log . \text{tang} . \alpha = lr + l\sin\alpha - l\cos\alpha$, und $\log . \sec\alpha = lr + l\text{tang}\alpha - l\sin\alpha$. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus werden also leicht für die Tangenten und Secanten die Logarithmen ebenfalls gefunden.

Der 3. Zusatz.

38. Die Sehne des Bogens AB ist $= 2\sin\frac{1}{2}\alpha$, BD $= \sin\alpha$, AD $= \text{sinv}\alpha$ wenn man ACB $= \alpha$ setzt. Demnach ist $4 . (\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\text{sinv} . \alpha)^2$, und für den Halbmesser $= 1$ ist $\sin\alpha^2 = 1^2 - \cos\alpha^2$, $\text{sinv}\alpha^2 = (1 - \cos\alpha)^2$ (12 §.) $= 1 - 2\cos\alpha + \cos\alpha^2$; (72 §. Rech.) also $4(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 = 2 - 2\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$, oder $2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 = \text{sinv}\alpha$, welches die Proportion giebt $1 : \sin\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha : \text{sinv}\alpha$. Weil nun diese Proportion für jeden andern Halbmesser ebenfalls richtig ist; so hat man auch $r : \sin\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha : \text{sinv}\alpha$, wenn r den Halbmesser 89 Fig.

ser der Tafeln bedeutet, und $l\sin v\,\alpha = l2 + 2l\sin\frac{1}{2}\alpha - lr$.

Anmerkung.

39. Anfängern ist es eine sehr vortheilhafte Uebung, wenn sie nach dieser Anweisung einige trigonometrische Linien mit ihren Logarithmen berechnen. Die Rechnung kann allemahl für den Halbmesser 10000000 geführt werden, so wie ihn die Tafeln gewöhnlich angeben: man wird alsdenn für die Logarithmen auch eben dieselben Zahlen bis auf die 7te Decimalstelle finden, nur daß die Tafeln die Kennziffer um 3 grösser angeben. (36 §.)

Der 5. Lehrsatz.

91 Fig. 40. Im rechtwinklichten Dreyeck *ABC* verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Auch verhält sich eine Perpendiculärseite *AC* zur andern *AB*, wie der ganze Sinus zur Tangente des der zweyten Perpendiculärseite gegenüberstehenden Winkels.

Beweis. 1. Man beschreibe den Bogen BD mit dem Halbmesser CB = CD, so ist AB der Sinus des Winkels ACB für diesen Halbmesser CB. Der Ausdruck sin tot, oder statt dessen der Buchstab R, bezeichne nun allemahl den Halbmesser der Tafeln, und wenn die abgekürzten Ausdrücke, wie sin ACB, tang. ACB, u. s. f. gebraucht werden; so verstehe man allemahl die dem dabey genannten Winkel zugehörige Linie so, wie sie in den Tafeln berechnet ist. Alsdenn hat man sin. tot : sin ACB = CB : AB, (10 §.) und es ist der sin. tot. zugleich der Sinus des gegenüberstehenden rechten Winkels BAC. Aus demselben Grunde ist sin. tot : sin ABC = CB : CA, und aus den Proportionen sin ABC : sin. tot = CA : CB

sin. tot : sin ACB = CB : AB folgt auch sin ABC : sin ACB = CA : AB. (174 §. Geom.)

2. Wird

2. Wird mit dem Halbmesser CA der Bogen AE beschrieben; so ist AB des Winkels ACB Tangente für den Halbmesser CA, folglich hat man auch CA : AB = sin. tot : tang ACB, und aus eben dem Grunde AB : AC = sin. tot : tang ABC.

Der 6. Lehrsatz.

41. In jedem Dreyeck *ABC* verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel. 92 Fig.

Beweis. Man ziehe BD auf AC senkrecht, so hat man statt des schiefwinklichten Dreyecks zwo rechtwinklichte ABD, CBD; mithin ist AB : BD = R : sin A, und BC : BD = R : sin C, also ferner AB : BC = sin C : sin A (174 §. Geom.) Demnach ist auch aus eben dem Grunde BC : AC = sin A : sin B, und aus beyden Proportionen folgt AB : AC = sin C : sin B. (174 §. Geom.)

Zusatz.

42. Das Verhältniß jeder Seite zum Sinus des gegenüberstehenden Winkels ist also im Dreyeck allemahl einerley. (172 §. Geom.)

Die 2. Aufgabe.

43. Im Dreyeck sind zweene Winkel *A* und *B* nebst einer Seite *AB* in Zahlen gegeben: man soll die übrigen beyden Seiten durch Rechnung finden. 92 Fig.

Aufl. Wenn zweene Winkel bekannt sind, so findet man leicht dem 79 §. Geom. gemäß den dritten Winkel: man hat also ausser der bekannten Seite AB allemahl auch den gegenüberstehenden Winkel C. Demnach kann man ansetzen:

sin C : AB = sin A : BC,
sin C : AB = sin B : AC, (41 §.)

Das

Das vierte Glied in jeder dieser Proportionen wird nach der Regel Detri gefunden: man rechnet hier aber gewöhnlich statt der Zahlen mit ihren Logarithmen nach der Regel des 25 §.

Ein Exempel wird gnügen, um das ganze Verfahren auch für die noch folgenden Aufgaben zu erläutern. Es sey $C = 48° 35'$, $A = 57° 29'$, $AB = 74$ Fuß: so ist $\sin C : AB = \sin A : BC$, und man erhält:

l. AB =	1,8692317
l. sinA =	9,9259487
	11,7951804
l. sinC =	9,8750142
l. BC =	1,9201662

Daraus findet man $BC = 83{,}2082$ Fuß. (35 §.)

Die 3. Aufgabe.

92 Fig. 44. Es sind zwo Seiten *AB*, *BC*, gegeben, und einer von beyden entgegen gesetzten Winkeln, man soll die übrigen Winkel, und die dritte Seite finden.

Aufl. Man sucht zuerst die Winkel vermittelst der im 41 §. bewiesenen Proportion, die man so ordnen kann, daß der unbekannte Winkel, welcher der einen bekannten Seite gegenüber stehet, in die vierte Stelle kommt. Wenn also ausser den Seiten AB, BC, der Winkel A gegeben ist; so setzt man an $BC : \sin A = AB : \sin C$.

Der Sinus, welcher vermittelst dieser Proportion gefunden wird, gehört für zweyerley Winkel, wofern es nicht etwa der ganze Sinus ist: also könnte C wohl stumpf oder spitz seyn. Wenn indessen A stumpf, oder ein rechter Winkel ist, so weiß man, daß C nothwendig spitz seyn müsse. Auch wenn A

spitz

spitz, und überdem BC > AB ist, so ist ebenfalls C nothwendig spitz, weil sonst BC < AB seyn müste: also bleibt die Sache nur zweifelhaft, wenn A spitz und BC < AB ist, welches mit dem 97 §. Geom. übereinstimmet. Bey Anwendung dieser Lehren in der Ausübung kennt man gemeiniglich die Grösse des gesuchten Winkels schon einigermassen im voraus, weßwegen der Zweifel mehrentheils wegfällt.

Hat man den Winkel C gefunden, so ist auch B bekannt, und man sucht AC vermittelst der Proportion sin A : BC = sin B : AC.

Der 7. Lehrsatz.

45. Im Dreyeck ABC verhält sich die Summe zwoer Seiten $AC + CB$ zu ihrer Differenz $AC - CB$, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberstehenden Winkel $\frac{1}{2}(B + A)$ zur Tangente ihrer halben Differenz $\frac{1}{2}(B - A)$. 93 Fig.

Beweis. Man verlängere AC nach D, nehme CD = CE = CB, so ist AD = AC + CB, und AE = AC − CB: auch ist DBE ein rechter Winkel. (137 §. Geom.) Man ziehe ferner AG mit BE parallel, und BD schneide diese Parallellinie in G, so ist bey G ebenfalls ein rechter Winkel; auch ist GAD = CEB. Ferner ist CEB = $\frac{1}{2}$DCB (83 §. Geom.) = $\frac{1}{2}$(CBA + CAB), also auch GAD = $\frac{1}{2}$(CBA + CAB). Ueberdem ist GAB = GAD − CAB, also GAB = $\frac{1}{2}$CBA + $\frac{1}{2}$CAB − $\frac{1}{2}$CAB − $\frac{1}{2}$CAB, oder GAB = $\frac{1}{2}$(CBA − CAB).

Für den Halbmesser AG sind GD und GB die Tangenten der Winkel GAD und GAB, also GD : GB = tang $\frac{1}{2}$(CBA + CAB) : tang $\frac{1}{2}$(CBA − CAB). Aber auch GD : GB = AD : AE (176 §. Geom.)

$= AC + CB : AC - CB$; also erhält man $AC + CB : AE - CB = tg.\frac{1}{2}(CBA + CAB) : tg.\frac{1}{2}(CBA - CAB)$.

Zusatz.

46. Aus der Proportion $AC : CB = \sin B : \sin A$ (41 §.) folgt $AC + CB : AC - CB = \sin B + \sin A : \sin B - \sin A$, (175 §. Geom.) Demnach ist auch $\sin B + \sin A : \sin B - \sin A = tang.\frac{1}{2}(B + A) : tang\frac{1}{2}(B - A)$.

Die 4. Aufgabe.

92 Fig. 47. Im Dreyeck ist ein Winkel *C* gegeben, und zwey anliegende Seiten *AC* und *BC*: man soll die übrigen Winkel und die dritte Seite finden.

Aufl. 1. Man sucht zuerst die Winkel auf folgende Art. Weil $B + A = 160° - C$, so hat man auch $\frac{1}{2}(B + A) = 90° - \frac{1}{2}C$. Ferner setzt man an $AC + CB : AC - CB = tg.\frac{1}{2}(B + A) : tg.\frac{1}{2}(B - A)$, so erhält man vermittelst dieser Proportion $\frac{1}{2}(B - A)$, und findet alsdenn $B = \frac{1}{2}(B + A) + \frac{1}{2}(B - A)$, und $A = \frac{1}{2}(B + A) - \frac{1}{2}(B - A)$. (100 §. Rechenk.) Nachdem so die Winkel gefunden sind, setzt man an

$$\sin A : BC = \sin C : AB.$$

2. In dem Fall, wenn der gegebene Winkel ein rechter Winkel ist, kann man kürzer die beiden spitzen Winkel mit Hülfe der Tangenten finden. Wäre
91 Fig. A ein rechter Winkel, und wäre alsdenn die Länge der anliegenden Seiten AC, AB, gegeben, so könnte man ansetzen $AC : AB = \sin. tot : tang\ C$. (40 §.) Diese Proportion giebt C, und hiernächst hat man $B = 90° - C$.

Die 5. Aufgabe.

94 Fig. 48. Die drey Seiten eines Dreyecks *ABC* sind gegeben: man soll die beyden Segmente *CE*,

CE, *BE* der Grundlinie finden, worin sie von der graden Linie *AE* getheilt wird, die von der Spitze *A* des gegenüberstehenden Winkels darauf senkrecht fällt.

Aufl. Man nehme EG = EB, so ist CG = CE − EB die Differenz der Segmente, und diese findet man vermittelst der Proportion BC : AC + AB = AC − AB : CG. Die Grundlinie BC ist die Summe der Segmente, also findet man das grössere CE = ½ (BC + CG), und das kleinere Segment BE = ½ (BC − CG). (100 §. der Rechenk.)

Beweis. Ein Kreis aus A mit dem Halbmesser AB beschrieben geht durch G und schneidet AC in F. Man verlängere AC bis an den Kreis in D, und ziehe die Sehnen FB, GD: so ist der Winkel FBC = GDC, (136 §. Geom.) und C gehört zu beyden Dreyecken CBF, CDG. Demnach sind diese Dreyecke einander ähnlich, und man erhält BC : CF = CD : CG, (181 §. Geom.) oder BC : CD = CF : CG. Es ist aber CD = AC + AB, und CF = AC − AB, also BC : AC + AB = AC − AB : CG.

Die 6. Aufgabe.

49. Im Dreyeck *ABC* sind alle drey Seiten gegeben: man soll die Winkel finden. 94 Fig.

Aufl. Man nehme eine Seite BC für die Grundlinie, ziehe aus der Spitze A des gegenüberstehenden Winkels eine grade Linie AE darauf senkrecht, und suche die Segmente BE, CE. (48 §.) Alsdenn hat man im rechtwinklichten Dreyeck ABE ausser dem rechten Winkel bey E noch die Seiten AB, BE, und kann die Winkel, mithin ABE finden. (44 §.) Hiernächst findet man jeden von den übrigen beyden Seiten den Regeln des 41 §. gemäß.

Anmerkung.

50. Nur die hier unumgänglich nothwendige Kürze verbietet es, mehrere Exempel zur Uebung und Anwendung der Aufgaben des 44. 47. 49. §. hieher zu setzen, welche Anfängern vorzüglich zu empfehlen ist. Die Trigonometrie wird in der ganzen Mathematik und vorzüglich in der höhern Rechenkunst und Geometrie so sehr häufig gebraucht, daß niemand hoffen darf, es weit darin zu bringen, wenn er sich nicht die Gründe der trigonometrischen Rechnungen vollkommen geläufig gemacht hat. Geschickte Lehrer, welche etwa dieses Handbuch zum Grunde legen, werden die nöthigen Exempel leicht beyfügen. Wer durch eignen Fleiß sich weiter helfen will, der wird im 1. Theil der Anfangsgründe, und im 2ten Theil des Lehrbegriffes alle nöthige Anleitung finden.

Anfangsgründe der allgemeinen Rechenkunst.

Die 1. Erklärung.

1. Entgegengesetzte Grössen sind solche, die zwar unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff enthalten sind, aber doch eine solche Beziehung gegen einander haben, daß die eine um eben soviel abnimmt, als die andre wächst, und umgekehrt. Wenn vorausgesetzt wird, daß von dem Hauptbegriff die Rede sey, so kann man jede davon durch Verneinung der ihr entgegengesetzten anzeigen, und diese heißt alsdenn kurz eine negative Grösse, wenn gleich die Verneinung eigentlich nur im Ausdruck

druck liegt. Die ihr entgegengesetzte, welche ohne Verneinung ausgedrückt wird, nennt man eine positive Grösse. Der negativen Grösse setzt man das Zeichen (—) als ein Verneinungszeichen, der positiven Grösse aber das Zeichen (+) voran.

Die 2. Erklärung.

2. Entgegengesetzte Grössen addiren heißt die grössere um einen Theil vermindern, welcher so groß ist, als die ihr entgegengesetzte kleinere: Nicht entgegengesetzte Grössen addirt man dagegen in eben dem Sinne, wie sonst dies Wort in der Rechenkunst gebraucht wird. Eine Grösse wird in allen Fällen von einer andern subtrahirt, wenn man diejenige, welche der zu subtrahirenden entgegengesetzt ist, zur andern addirt.

Der 1. Zusatz.

3. Die Summe positiver Grössen ist positiv, und die Summe negativer Grössen ist eine negative Grösse. Dagegen ist die Summe zwoer entgegengesetzten Grössen mit der grössern von einerley Beschaffenheit.

Der 2. Zusatz.

4. Wenn bey der Subtraction beyde Grössen einerley Zeichen haben, und die zu subtrahirende Grösse kleiner, als die andere ist, wovon man subtrahiren soll; so behält der Rest eben das Zeichen, und die Subtraction ist mit der arithmetischen einerley. Weil hier übrigens allemahl vorausgesetzt wird, daß die Grösse, wovon man subtrahirt, auch in den entgegengesetzten Zustand übergehen könne; so läßt sich auch das grössere vom kleinern subtrahiren. Was als Rest gesucht wird, ist der Ueberschuß des grössern über das kleinere mit dem entgegengesetzten Zeichen.

Der 3. Zusatz.

5. Soll man eine Grösse von der ihr entgegengesetzten subtrahiren; so ist das eigentlich eine Vermehrung der Grösse, wovon man subtrahiren soll, um das entgegengesetzte der zu subtrahirenden Grösse. Demnach erhält der Rest einerley Zeichen mit derjenigen, wovon man subtrahirt.

Anmerkung.

Im zweiten Theil meines Lehrbegriffes der gesammten Mathematik findet man weitere Erläuterungen dieser Begriffe mit ihren Folgen, die nur anfangs befremdend scheinen, so lange man sich daran nicht gewöhnt hat. Wenn man + 4 von + 7 subtrahiren soll; so muß + 4 als ein Theil, der das gesuchte um 4 vermehrt hat, in 7 enthalten seyn, und man soll diese geschehene Vermehrung wieder aufheben: also muß man 7 um 4 vermindern. Wenn man aber — 4 von + 7 subtrahiren soll; so muß — 4 als ein Theil, der das gesuchte um 4 vermindert hat in 7 enthalten seyn, und man soll diese geschehene Verminderung wieder aufheben; das heißt, man muß 7 um 4 vergrössern. Es war wirklich $7 = 11 - 4$, also muß 11 daraus werden, wenn die Verminderung um 4 wieder aufgehoben wird.

Willkührliche Sätze.

6. Man bedient sich mit vielem Vortheil der Buchstaben des Alphabets als ganz allgemeiner Zeichen, wodurch man Zahlen, Linien, und überhaupt jede andre Art von Grössen, welche man will, verstehen kann. Gleiche Grössen werden mit einerley Buchstaben, ungleiche mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet. Die schon bekannten Zeichen der vier Rechnungsarten werden beybehalten. Uebrigens sind die Buchstaben hier gewissermassen das, was bey Rechnungen mit genannten Zahlen die Nahmen der Grössen sind: also kann man diejenigen, welche mit einerley Buchsta-

ben

ben bezeichnet sind, als gleichartige, die übrigen als ungleichartige Grössen ansehen.

Die 1. Aufgabe.

7. Eine Reihe, die aus positiven und negativen Grössen, als Theilen zusammengesetzt ist, zu einer andern Reihe eben solcher Grössen zu addiren.

Aufl. Man schreibe die gleichartigen Theile untereinander, und setze in jeder Columne die Summe mit dem dazu gehörigen Zeichen dem 3 H. gemäß darunter. Brüche, von ungleichartiger Benennung bringe man vorher auf gleiche Benennung. Wenn übrigens ungleichartige Theile vorkommen, so setze man diese mit den dazu gehörigen Zeichen ohne andre Veränderung in die Summe.

Exempel.

$$\begin{array}{llll} ax & -2bb & -5ce & +6ab & -3f \\ 5ax & +6bb & -7ce & & +2f-g \\ \hline 6ax & +4bb & -12ce & +6ab & -f-g \end{array}$$

Die 2. Aufgabe.

8. Eine Reihe, die aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetzt ist, von einer andern solchen Reihe zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die zu subtrahirende Reihe unter der andern hin, wie bey der Addition, verwandle in Gedanken vor jedem Gliede, welches man subtrahiren soll, das davorstehende Zeichen ins entgegengesetzte, und addire das entgegengesetzte dessen, was man subtrahiren soll. Kommen Brüche mit vor, so bringe man sie vorher auf einerley Benennung.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 6yy - 3gxx + hff - c - d \\ 5yy - 2gxx + 7hff \quad - 3d \\ \hline 1yy - \quad gxx + 8hff - c + 2d \end{array}$$

Die 3. Erklärung.

9. Eine Grösse mit einer negativen Zahl multipliciren, heißt von der Grösse, welche dem Multiplicando entgegengesetzt ist, das Vielfache machen, welches der Multiplicator anzeigt. Eben so auch, wenn eine Grösse mit einer negativen Zahl dividirt werden soll; so verlangt man den Quotienten von der Grösse, welche dem Dividendo entgegengesetzt ist.

Der 1. Zusatz.

10. Jedes Product entgegengesetzter Factoren ist negativ, und jedes Product nicht entgegengesetzter Factoren ist positiv.

Der 2. Zusatz.

11. Entgegengesetzte Grössen geben bey der Division einen negativen, nicht entgegengesetzte Grössen aber einen positiven Quotienten.

Der 3. Zusatz.

12. Wenn man dem 186 §. der Geom. gemäß zu dreyen graden Linien a, b, c, die vierte geometrische Proportionallinie d sucht, und $a = 1$ setzt, so ist $d = b \times c$. Wird aber $b = 1$ gesetzt; so ist $d = \frac{c}{a}$. Man kann also in diesem Sinn eine Linie mit der andern multipliciren, oder dividiren.

Der 4. Zusatz.

13. Bey der Voraussetzung, daß die Einheit positiv angenommen werde, behalten die Regeln des 10. und 11. §. ihre völlig allgemeine Richtigkeit, auch

auch wenn von der Multiplication und Division in dem allgemeinen Sinn des 12 §. die Rede ist.

Anmerkung.

Man s. davon mit mehrern den 2ten Theil meines Lehrbegriffes der gesammten Mathematik im 17 u. f. §. §. der allgem. Rechenkunst. Man muß sich hier, wie in vielen andern Fällen, an einen abgekürzten Sprachgebrauch gewöhnen. An sich ist $b \times c$ nichts anders als das Product der Linie c mit der Zahl $\frac{b}{a}$, und man schreibt nur kurz $b \times c$ anstatt $\frac{b}{a} . c$, wenn $a = 1$ ist. Der Quotient $\frac{c}{a}$ ist allemahl eine Zahl, wenn c und a Linien sind, (160 §. Geom.) und man schreibt nur kurz $d = \frac{c}{a}$ anstatt $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, wenn $b = 1$ ist. Soll $d = \frac{c}{a}$ eine Linie seyn, so wird nur in dem Ausdruck $d = \frac{c}{a} . b$ Kürze halber b ausgelassen, wenn $b = 1$ ist. Es kann auch $d = \frac{c}{a : b}$ seyn, da dann $a : b$ eine Zahl ist. Wenn eine Linie mit einer Zahl dividirt wird, so ist der Quotient auch eine Linie: denn der Quotient ist mit dem Dividendus allemahl von einerley Art, wenn der Divisor eine Zahl ist. Der Multiplicator ist eigentlich allemahl eine Zahl, also das Product auch allemahl mit dem Multiplicandus von einerley Art. Wenn auch b und c Seitenlinien eines Rechtecks wären, so ist doch $b \times c$ keinesweges eine Fläche, sondern oft eine Zahl. Man setze im 214 §. Geom. $AB = b$, $CE = c$, so ist eigentlich $P = \frac{AB}{L} \cdot \frac{CE}{L} \cdot Q$, oder das Product der beyden Zahlen $\frac{AB}{L}$, $\frac{CE}{L}$, in einander ist der Exponent des Verhältnisses der Fläche P zur Fläche Q: man schreibt nur Kürze halber $P = AB . BE$, wenn man im Längenmasse L, und im Flächenmasse Q für Eins annimmt. An diese Begriffe muß man sich halten, sonst kann der kurze Sprachgebrauch leicht zu fehlsamen Folgerungen Anlaß geben.

Die 3. Aufgabe.

14. Eine Grösse, die aus mehrern positiven und negativen Theilen zusammengesetzt ist, mit einer andern ebenfalls zusammengesetzten Grösse zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach einander alle Theile des Multiplicandi mit einem jeden Theil des Multiplicators für sich nach der Regel des 10 §., und bringe die einzelnen Producte alle nach den Regeln des 7 §. in eine Summe: so hat man das verlangte Product.

Exempel.

$a + b$	$a - b$	$a + b$
$a + b$	$a - b$	$a - b$
$+ab + bb$	$- ab + bb$	$- ab - bb$
$aa + ab$	$aa - ab$	$aa + ab$
$aa + 2ab + bb$	$aa - 2ab + bb$	$aa - bb$

Die 4. Aufgabe.

15. Eine Grösse mit einer andern einfachen oder zusammengesetzten Grösse zu dividiren.

Aufl. 1. Wenn man ein Product aus zweyen oder mehrern Factoren mit einem solchen Divisor dividiren soll, der selbst unter den Factoren des Products vorkommt; so ist die Division geschehen, wenn man nur den Factoren wegläßt, der mit dem Divisor einerley ist, wie die nachstehende Rechnung zeiget.

ab		abc		x^2y	
$b)$	a	$ac)$	b	$x)$	xy
ab		abc		x^2y	
0		0		0	

2. Demnach könnte auch das Dividendum aus mehrern Theilen bestehen, und man würde die Theile des Quotienten nach einander eben so finden, wenn der Divisor nur einfach wäre.

a^2b

$$\begin{array}{l|l} a^2b - bfg + bc^2 & \\ b) & a^2 - fg + c^2 \\ a^2b - bfg + bc^2 & \\ \hline o \quad o \quad o & \end{array}$$

3. Wenn auch der Divisor aus mehrern Theilen bestehet, so ordnet man die Theile des Dividendi am bequemsten so, daß diejenigen zuerst nach einander folgen, welche den ersten Theil des Divisors als einen Factor enthalten. Hiernächst dividire man den ersten Theil des Dividendi mit dem ersten Theil des Divisors, so erhält man den ersten Theil des Quotienten. Mit diesem multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividendo ab. Den Rest dividire man nochmahl wie vorhin, so erhält man den zweyten Theil des Quotienten. Dies Verfahren setze man fort, bis entweder alles aufgeht, oder ein Rest bleibt, den man zu den übrigen Theilen des Quotienten noch als den Zähler eines Bruchs hinzusetzen muß, wozu der Divisor als Nenner gehört.

Exempel.

$$\begin{array}{l|l} ab - ac + bb - 2bc + cc & \\ b - c) & a + b - c \\ ab - ac & \\ \hline bb - 2bc + cc & \\ b - c) & \\ bb - bc & \\ \hline - bc + cc & \\ b - c) & \\ - bc + cc & \\ \hline o & \end{array}$$

4. Ein

4. Ein Bruch, wie $\frac{1}{1+x}$, kann vermittelst einer solchen Division in folgende Reihe aufgelöset werden $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$, die sich nie endiget. Die Sache hat alle Aehnlichkeit mit dem aus der Rechenkunst (59 §.) schon bekannten Verfahren, um einen gemeinen Bruch in Decimaltheile zu verwandeln, wobey ebenfalls die Reihe der Decimaltheile oft nie aufhört. Wäre der Bruch $\frac{1}{1-x}$ gegeben, so würde man die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots$ finden.

Der 1. Lehrsatz.

16. Ein Bruch wird unendlich groß, wenn sein Zähler eine bestimmte Grösse hat, sein Nenner aber verschwindet.

Beweis. Weil der Bruch $\frac{b}{x}$ wächst, wenn sein Nenner x abnimmt, der Zähler b aber einerley bleibt, so muß er über alle Gränzen wachsen, und grösser werden, als jede Grösse, die sich angeben lässet, wenn der Nenner kleiner wird, als jede Grösse, die sich angeben läßt. Das ist aber der Fall, wenn $x = 0$ wird.

Der 2. Lehrsatz.

17. Ein Bruch verschwindet, wenn sein Zähler eine bestimmte Grösse hat, der Nenner aber unendlich groß wird.

Beweis. Der Bruch $\frac{b}{x}$ wird ohne Aufhören kleiner, wenn sein Nenner x ohne Aufhören wächst, der Zähler b aber einerley bleibt. Wenn also der Nen-

Nenner grösser wird, als jede Grösse, die sich angeben läßt, so muß der Bruch kleiner werden, als jede Grösse, die sich angeben läßt, das heißt, er muß = 0 werden.

Die 4. Erklärung.

18 Jede Potenz (70 §. Rech.) oder Dignität erhält den Nahmen von der Anzahl der gleichen Factoren, welche die Potenz ausmachen. Die erste Dignität von a ist a selbst. Die zweyte Dignität ist mit der Quadratzahl, und die dritte mit der Cubiczahl einerley. Um eine Potenz kurz zu bezeichnen, schreibe man a^5 statt $aaaaa$, b^7 statt $bbbbbbb$, und nennt die oben rechter Hand beygefügte kleine Ziffer, welche die Anzahl der gleichen Factoren der Potenz angiebt, den Index oder Exponenten der Potenz.

Die 5. Erklärung.

19. Jeder von den gleichen Factoren, die in einander multiplicirt eine Potenz ausmachen, heißt die Wurzel der Potenz. Das Zeichen $\sqrt{}$ kann die Wurzel einer jeden Potenz bezeichnen, wenn man eine kleine Ziffer drüber setzt, welche anzeigt, wieviele solcher gleichen Wurzeln die unter dem Zeichen gesetzte Grösse durch die Multiplication in einander als eine Potenz darstellen sollen. Diese Ziffer heißt alsdenn der Wurzel-Exponent. Diesemnach ist $\sqrt[4]{81} = 3$, weil $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ die Zahl 81 ausmacht.

Die 5. Aufgabe.

20. Potenzen, die gleiche Wurzeln haben, in einander zu multipliciren.

Aufl. Das Product ist eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent ist die Summe der Exponenten ihrer Factoren. Man findet $a^3 . a^5 = a^8$, $b^3\ b^7\ b^2 = b^{12}$.

Beweis. Es ist $a^3 . a^5 = aaa . aaaaa = a^8$, und $b^3\ b^7\ b^2 = bbb . bbbbbbb . bb = b^{12}$.

Die 6. Aufgabe.

21. Eine Potenz mit einer andern von eben der Wurzel zu dividiren.

Aufl. Man subtrahire den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendi: so ist der gesuchte Quotient eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent ist der herausgebrachte Rest. Es ist $\frac{a^5}{a^3} = a^2$, $\frac{b^7}{b^4} = b^3$, wie gleich für sich daher klar ist, weil im Dividendo soviele gleiche Factoren wegfallen müssen, als im Divisor vorhanden sind.

Zusatz.

22. Wenn auch der Exponent im Divisor grösser, als im Dividendo wäre, so könnte man nach eben der Regel verfahren, nur würde alsdenn der Exponent des Quotienten negativ werden. (4 §.) Man findet $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$, und das ist soviel als $\frac{1}{a^2}$, denn $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1 . aaa}{aaaaa} = \frac{1}{a^2}$.

Die 7. Aufgabe.

23. Eine Potenz von neuen auf eine Potenz eines andern Exponenten zu erheben.

Aufl. Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem neuen Exponenten: das Product wird der Exponent der verlangten Potenz

von

von eben der Wurzel seyn. Es ist $(a^3)^2 = a^6$, $(b^3)^4 = b^{12}$, wie man gleich so übersiehet: $(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^{3+3}$, (20 §.) also auch $(b^3)^4 = b^{3+3+3+3} = b^{12}$.

Die 8. Aufgabe

24. Die Wurzel einer verlangten Ordnung aus einer gegebenen Potenz noch auf eine andre Art, als durch das vorangesetzte Wurzelzeichen auszudrücken.

Aufl. Man dividire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem Wurzelexponenten, so ist der Quotient zugleich der Exponent einer Potenz von eben der Wurzel, welches die gesuchte ist. Man findet so $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$, $\sqrt[7]{a^{21}} = a^3$.

Der 1. Zusatz.

25. Auch alsdenn, wenn die Division nicht aufgienge, könnte man den Exponenten als einen Bruch schreiben, auf folgende Art:

$$\sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{3}{7}}, \quad \sqrt[9]{y^4} = y^{\frac{4}{9}}.$$

Potenzen dieser Art heissen Bruchpotenzen.

Der 2. Zusatz.

26. Dergleichen Bruchpotenzen sind wirkliche Potenzen von Wurzelgrössen. Man bemerke nur, daß $x^{\frac{1}{3}}$ soviel sey als $\sqrt[3]{x}$, $x^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x}$, so ist $x^{\frac{3}{7}} = (x^{\frac{1}{7}})^3$. (23 §.) Auch ist $\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{x} . \sqrt[7]{x} . \sqrt[7]{x} = (\sqrt[7]{x})^3$.

Die 6. Erklärung.

27. Eine Gleichung heißt ein allgemeiner Ausdruck, der es angiebt, was für Operationen mit gewissen Grössen vorgenommen werden müssen, damit eine Grösse gefunden werde, die eben soviel beträgt, als

als wenn man mit denselben, oder auch noch andern Grössen wiederum andere Veränderungen vornimmt. Von der Art wären schon die Ausdrücke $2 \times 2 = 2 + 2$, $7 \times 9 = 60 + 3$. In solchen Fällen, wenn man sich bey Auflösung einer Aufgabe der Buchstaben als allgemeiner Zeichen bedient, ist es bequem, daß man die bekannten Grössen mit den ersten Buchstaben des Alphabets, was aber als unbekannte Grösse gesucht wird, mit einem von den letzten Buchstaben bezeichne.

Zusatz.

28. Aus einer Gleichung kann man sehr viele andre herleiten, wenn man auf beyden Seiten gleiches addirt, oder subtrahirt, oder auf beyden Seiten mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt.

Es sey $ax + bb = fx + gg$,
so ist auch $ax = fx + gg + bb$,
also ferner $ax - fx = gg - bb$,
oder $(a - f)x = gg - bb$,

$$\text{folglich } x = \frac{gg - bb}{a - f},$$

$$\text{oder } x = \frac{(g+b)(g-b)}{a - f}$$

Die 7. Erklärung.

29. Die Gleichung, welche unmittelbar aus den Bedingungen einer Aufgabe geschlossen wird, nennt man die Fundamentalgleichung der Aufgabe: und die Gleichung auflösen heißt daraus eine andre herleiten, worin die unbekannte Grösse an einer Seite des Gleichheitszeichens allein stehet, an der andern Seite aber die bekannten Grössen so mit einander verbunden sind, daß sich daraus erkennen läßt wie

wie die unbekannte Grösse aus den bekannten gefunden werden könne.

Zusatz.

Wenn eine Aufgabe vorgelegt ist, so beruhet der Hauptkunstgriff, um die Auflösung zu finden, auf der folgenden Regel. Man nimmt an, die gesuchte Grösse sey bereits gefunden; man drückt sie durch ein allgemeines Zeichen aus, und verbindet sie hierauf mit den gegebenen Grössen so, wie es den Vorschriften der Aufgabe gemäß ist: so erhält man die Fundamentalgleichung. Aus dieser schließt man hiernächst rückwärts auf die Veränderungen, die man mit den gegebenen Grössen vornehmen muß, wenn die gesuchte gefunden werden soll, indem man die Gleichung auflöset.

Die 8. Erklärung.

30. Eine einfache Gleichung ist eine solche, worin keine höhere Potenzen von der unbekannten Grösse, als die erste, vorkommen. Höhere oder zusammengesetzte Gleichungen nennt man diejenigen, worin die unbekannte Grösse auf höhere Potenzen, als auf die erste steigt. Wenn alsdenn in allen unbekannten Gliedern der Gleichung einerley Potenz der unbekannten Grösse vorkommt, so ist es eine reine Gleichung, wiedrigenfalls eine unreine höhere Gleichung. Uebrigens erhält die höhere Gleichung den Nahmen einer quadratischen, cubischen, biquadratischen Gleichung u. s. f. von der höchsten Potenz, auf welcher die unbekannte Grösse darin erhaben ist.

Die 9. Aufgabe.

31. Eine einfache Gleichung aufzulösen.

1. Wofern unter den Gliedern der Gleichung Brüche vorkommen, so multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Product aller Nenner.

2. Diejenigen ganz bekannten Glieder der Gleichung, welche nun vor dem Gleichheitszeichen stehen, und mit unbekannten Gliedern durch die Addition oder Subtraction verbunden sind, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen hinter dasselbe.

3. Die Glieder hinter dem Gleichheitszeichen, welche die unbekannte Grösse enthalten, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen dem Zeichen der Gleichheit voran.

4. Nun wird das, was vor dem Gleichheitszeichen steht, ein Product der unbekannten Grösse mit einer Summe mehrerer bekannten Factoren ausmachen, die man hier auch Coefficienten nennt. Demnach dividire man mit dem aus allen bekannten Coefficienten zusammengesetzten Factor auf beyden Seiten; so ist die Auflösung der Gleichung gefunden.

Es sey $\frac{ax}{b} - \frac{ef}{g} = \frac{mx}{n} + c,$

(1ste Regel) $agnx - befn = bgmx + bcgn$

(2. 3. Regel) $agnx - bgmx = bcgn + befn$

(4te Regel) $(agn - bgm)x = bcgn + befn$

also $x = \frac{bcgn + befn}{agn - bgm}$,

oder $x = \frac{(cg + ef)bn}{(an - bm)g}$.

Der 1. Zusatz.

32. Eine reine höhere Gleichung kann nach eben diesen Regeln aufgelöset werden, nur muß man voraus-

aussetzen, daß aus jeder vorgelegten Grösse die Wurzel einer vorgeschriebenen Ordnung gefunden werden könne.

Es sey $a^5 + x^5 = \frac{fx^5}{g} + g^2h^3$,

so erhält man $a^5g + gx^5 = fx^5 + g^3h^3$,

also ferner $(g - f)x^5 = g^3h^3 - a^5g$,

und $x^5 = \frac{(g^2h^3 - a^5)g}{g - f}$,

mithin $x = \sqrt[5]{\frac{(g^2h^3 - a^5)g}{g - f}}$.

Der 2. Zusatz.

33. Dergleichen Wurzeln kann man in Zahlen vermittelst der Logarithmen finden. Man sieht leicht, daß die im 23 §. Trig. für die zweyte und dritte Potenz, auch eben so für die Quadrat- und Cubicwurzel bewiesenen Sätze allgemein sind. Die Logarithme einer jeden Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; wenn aber der Logarithme der Potenz mit dem Wurzelexponenten dividirt wird, so erhält man den Logarithmen der Wurzel. Es ist also $l.\, a^n = n\, l.\, a$, und $l.\sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} b$.

Der 3. Zusatz.

34. Die Addition und Subtraction, besonders auch die Multiplication und Division, in dem allgemeinen Sinn verstanden, wie davon im 12 §. die Erklärung ist gegeben worden, sind nicht blos arithmetische, sondern auch geometrische Operationen. Wenn die Buchstaben a und b grade Linien

bedeuten; so sind auch $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$, (oder eigentlich $\frac{a \times b}{1}$, $\frac{a}{b} \times 1$) grade Linien. (Man vergleiche den 13 §. und die beygefügte Anmerkung.) Eben das gilt von den Ausdrücken a^n, b^n, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$. Wenn nemlich eine geometrische Progreßion von 1 anfängt, so sind alle folgende Glieder Potenzen des zweyten Gliedes, wie der allgemeine Ausdruck zeiget:

$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad a^6 \quad a^7 \ldots a^n$

Demnach ist a^2 zu 1 und a die dritte, ferner a^3 zu $1, a, a^2$, die vierte stetige geometrische Proportionallinie, u. s. f. fort, wenn a eine Linie bezeichnet. Diesemnach wird die Methode, eine Aufgabe durch Gleichungen aufzulösen, so allgemein, daß sie sich nicht allein auf arithmetische sondern auch auf geometrische Aufgaben anwenden lässet.

Die 10. Aufgabe.

94 Fig. 35. Im Dreyeck ABC sind die drey Seiten gegeben, und aus der Spitze des Winkels A ist AE auf die Grundlinie senkrecht herabgelassen: man soll beyde Segmente CE und BE der Grundlinie finden.

Aufl. Wenn nur eins von beyden Segmenten gefunden ist, so hat man das andre auch, weil ihre Summe der gegebenen Grundlinie CB gleich ist. Dem 27 §. gemäß setze man $CE = x$, $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, so wird $BE = b - x$. Im rechtwinklichten Dreyeck ACE ist $AE^q = AC^q - CE^q$, und weil auch AE eine Perpendiculärseite im rechtwink-

winklichten Dreyeck ABE ist, so hat man überdem $AE^q = AB^q - BE^q$, also $AB^q - BE^q = AC^q - CE^q$. Das ist schon die Fundamentalgleichung der Aufgabe, wenn man nur die schon vorhin festgesetzten Zeichen braucht. Es wird nemlich $aa - (b-x)^2 = cc - xx$. Man schreibe den 14 §. gemäß $bb - 2bx + xx$, statt $(b-x)^2$, so wird $aa - (b-x)^2 = aa - bb + 2bx - xx$, und man erhält die Gleichung $aa - bb + 2bx - xx = cc - xx$. Wird hiernächst xx auf beyden Seiten addirt, so fällt dies Quadrat ganz aus der Rechnung weg, und die Gleichung, welche anfangs quadratisch zu werden schien, bleibt nur eine einfache Gleichung, die man leicht nach den Regeln des 31 §. völlig auflöset. Man hat nemlich $aa - bb + 2bx = cc$, also $2bx = bb + cc - aa$, und es wird $x = \frac{1}{2}b + \frac{cc - aa}{2b}$, oder $x = \frac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$.

Der 1. Zusatz.

36. Die Auflösung kommt mit derjenigen völlig überein, welche im 48 §. der Trigonometrie schon ist gefunden worden. Es ist nemlich den dortigen Schlüssen gemäß die Differenz der Segmente $CG = \frac{(c+a)(c-a)}{b}$, wovon die Hälfte zur halben Summe $\frac{1}{2}b$ addirt das grössere Segment geben muß. (100 §. Rech.) Man hat also hier ein Beyspiel davon, wie die Methode der Gleichung auf eben die Auflösung führen kann, worauf auch geometrische Schlüsse ohne Rechnung leiten.

Der 2. Zusatz.

37. In der zum Grunde gelegten Figur ist AC $\rhd$ AB, also $c \rhd a$, und $c - a$ ist eine positive Grösse: eben darum ist auch der Ausdruck $\frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ positiv. Man nehme CH $= \frac{1}{2}b$, so ist HE $= \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$, und E liegt in der Figur rechter Hand des Puncts H. Je weniger a von c übertroffen wird, desto kleiner ist $c - a$, also auch HE desto kleiner, und E liegt dem Punct H desto näher. In dem Fall $c = a$, wäre $c - a = 0$, also HE $= 0$: das heißt, nun fällt E mit H zusammen, wie auch wegen der bekannten Eigenschaft des gleichschenklichten Dreyecks nicht anders seyn kann.

Der 3. Zusatz.

38. Wenn $c \lhd a$ wäre, so würde $c - a$ negativ, also auch HE eine negative Grösse seyn: das will sagen, nun würde HE eine der vorigen entgegengesetzte Lage haben, so wie es die 95ste Figur vorstellet. Alsdenn hat man $x = \frac{1}{2}b - \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$, und so dient die Auflösung dieser Aufgabe zugleich, die Begriffe von den entgegengesetzten Grössen, und die darauf gegründeten Rechnungsregeln zu erläutern.

Der 4. Zusatz.

39. Je grösser a gegen c angenommen wird, desto grösser wird $\frac{(c+a)(a-c)}{2b}$, also x desto kleiner. In dem Fall wird $x = 0$, wenn $\frac{1}{2}b = \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$ ist: das will sagen, nun fällt E

in

in C; also muß AC auf CB senkrecht, und das Dreyeck rechtwinklicht seyn. Dasselbe folgt aus der Voraussetzung $\frac{1}{2}b = \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$, oder $b = \frac{aa-cc}{b}$: denn das giebt ferner $bb = aa - cc$, also $bb + cc = aa$, dem 131 §. der Geometrie gemäß.

Der 5. Zusatz.

40. Wird $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} \geqq \frac{1}{2}b$; so wird x negativ, weil nun E linker Hand des Puncts C fällt. Alsdenn ist $aa - cc \geqq bb$, oder $aa \geqq bb + cc$, und der Winkel ACB ist stumpf, welches alles den Grundsätzen der Geometrie gemäß ist.

Der 3. Lehrsatz.

41. Wenn der Unterschied positiver und negativer Grössen in Betrachtung kommt; so hat jedes positive Quadrat zwo unterschiedene Wurzeln, die zwar in Ansehung der Grösse einerley, einander aber entgegengesetzt sind.

Beweis. Weil nicht allein $+a$ mit $+a$, sondern auch $-a$ mit $-a$ multiplicirt eine positive Quadratzahl $+a^2$ giebt, (10 §.) so ist nicht allein $+a$ sondern auch $-a$ die Quadratwurzel aus $+a^2$.

Zusatz.

42. Die Quadratwurzel ist hier als die mittlere Proportionalgrösse zwischen 1 und der Quadratzahl anzusehen. (34 §.) Weil aber die Einheit allemahl positiv angenommen wird, so ist nicht allein $+1 : +a = +a : +a^2$, sondern auch $+1 : -a = -a : +a^2$. Auch aus diesem Grunde erhellet die Richtigkeit des Lehrsatzes.

Die 9. Erklärung.

43. Ein Ausdruck bezeichnet eine unmögliche Grösse, wenn derselbe verlangt, daß eine Grösse durch solche Operationen zuwege gebracht werden soll, die mit einander nicht bestehen können.

Zusatz.

44. Die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse ist unmöglich. Denn die Wurzel kann weder positiv noch negativ seyn, weil in beyden Fällen die vorgelegte Grösse als ihr Quadrat positiv seyn müßte, welches doch mit dem vorausgesetzten streitet.

Der 4. Lehrsatz.

45. Jede reine quadratische Gleichung giebt zweene Werthe für die unbekannte Grösse, die entweder beyde möglich, oder beyde unmöglich sind.

Beweis. Wenn x die unbekannte Grösse bezeichnet, so läßt sich x^2 nach den Regeln des 31 §. von den bekannten Grössen so absondern, daß auf die andre Seite des Gleichheitszeichens ein Ausdruck gebracht wird, der keine andre, als bekannte Grössen enthält. Wenn dieser Ausdruck $= A$ angenommen wird, so ist die Gleichung auf die Form gebracht: $x^2 = A$, und es wird A entweder positiv oder negativ seyn. Ueberhaupt kann man $x = \pm \sqrt{A}$ setzen, weil die Quadratwurzel so gut negativ, als positiv seyn kann. (41 §.) Nachdem aber ferner A positiv oder negativ ist, nachdem sind beyde Wurzeln entweder möglich oder unmöglich.

Die 11. Aufgabe.

46. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. 1. Die Gleichung muß zuvor auf eine solche Form gebracht seyn, daß ausser den völlig bekann-

kannten Gliedern einige vorkommen, die x^2 als einen Factor enthalten, andre aber nur die erste Potenz x, wenn x die unbekannte Grösse bezeichnet. Aus der Gleichung

$$a+\sqrt{(bb+xx)}=c-\frac{f}{g}x$$

müßte man zuförderst das Wurzelzeichen wegschaffen. Es wird nemlich $ag+g\sqrt{(bb+xx)}=cg-fx$, also $g\sqrt{(bb+xx)}=(c-a)g-fx$, mithin ferner $gg\ (bb+xx)=(c-a)^2g^2-2\ (c-a)\ fgx+ffxx$.

2. Man ordne nun alles so, daß alle ganz bekannte Glieder hinter das Gleichheitszeichen kommen, was aber x enthält, dem Gleichheitszeichen voran gesetzt werde. Von diesen unbekannten Gliedern lasse man diejenigen die ersten Stellen einnehmen, welche x^2 enthalten, und hiernächst die folgen, worin x als ein Factor vorkommt. Die vorige Gleichung erhält alsdenn die Form

$$(gg-ff)\,xx+2(c-a)fgx=(c-a)^2g^2-b^2g^2.$$

3. Mit dem Coefficienten von xx kann nun die ganze Gleichung dividirt werden, und man erhält

$$xx+\frac{2(c-a)fg}{gg-ff}x=\frac{((c-a)^2-b^2)g^2}{gg-ff}.$$

Allemahl kann also, wie in diesem Exempel, die unreine quadratische Gleichung auf die Form gebracht werden, daß vor dem Gleichheitszeichen xx und ein Product eines bekannten Factors mit x, hinter dem Gleichheitszeichen aber ein völlig bekannter Ausdruck seine Stelle erhalte. Was in x multiplicirt ist, sey $= P$, was hinter dem Gleichheits-

zeichen steht, $= Q$, so erhält die Gleichung diese Form $x^2 + Px = Q$.

4. Man addire nun auf beyden Seiten $\frac{1}{4}P^2$, so erhält man $x^2 + Px + \frac{1}{4}P^2 = Q + \frac{1}{4}P^2$, und aus dem, was vor dem Gleichheitszeichen steht, ist nun $x + \frac{1}{2}P$ die Quadratwurzel. (14 §.) Man kann also diese Gleichung auch so ausdrücken

$$(x + \tfrac{1}{2}P)^2 = Q + \tfrac{1}{4}P^2,$$

und sie ist nun als eine reine Gleichung anzusehen, woraus man ferner $x + \frac{1}{2}P = \pm \sqrt{(Q + \frac{1}{4}P^2)}$ erhält, also auch $x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{(Q + \frac{1}{4}P^2)}$.

Die 10. Erklärung.

47. Die Werthe der unbekannten Grösse, welche aus einer höhern Gleichung gefunden werden, haben den Nahmen: **Wurzeln der Gleichung**, erhalten, weil man sie gewöhnlich nicht anders, als durch Wurzelgrössen ausdrücken kann.

Der 5. Lehrsatz.

48. **Jede unreine quadratische Gleichung hat zwo Wurzeln, und nicht mehrere.**

Beweis. Daß die Gleichung wenigstens zwo Wurzeln habe, erhellet aus dem 46 §. Man nehme an, daß a und b diese Wurzeln bezeichnen, so muß man in der Gleichung $x^2 + Px = Q$ einen jeden dieser Wehrte anstatt x setzen können, und man erhält nicht allein $a^2 + Pa = Q$, sondern auch $b^2 + Pb = Q$. Daraus folgt $a^2 + Pa = b^2 + Pb$, also $P(a - b) = b^2 - a^2$, und $P = \frac{bb - aa}{a - b}$, oder $P = -\frac{aa - bb}{a - b} = -(a + b)$. Hätte die Gleichung

chung noch die dritte Wurzel c, so wäre auch $c^2 + Pc = Q$, also $b^2 + Pb = c^2 + Pc$: mithin ferner $P(b-c) = c^2 - b^2$. Daraus folgt $P = \frac{c^2-b^2}{b-c}$, oder $P = -\frac{b^2-c^2}{b-c} = -(b+c)$. Dieser Werth von P dem vorigen gleich gesetzt, giebt $b + c = a + b$, also $c = a$, und die dritte Wurzel muß mit einer der beyden vorigen einerley seyn.

Der 1. Zusatz.

49. Wenn a und b die Wurzeln der Gleichung bezeichnen, so ist

$$a = -\tfrac{1}{2}P + \sqrt{(Q + \tfrac{1}{4}P^2)}$$
$$b = -\tfrac{1}{2}P - \sqrt{(Q + \tfrac{1}{4}P^2)}$$
$$\text{also } a + b = -P, \text{ oder } P = -(a+b)$$
$$\text{und } ab = \tfrac{1}{4}PP - Q - \tfrac{1}{4}PP = -Q.$$

Der 2. Zusatz.

50. Der allgemeine Ausdruck der quadratischen Gleichung $xx + Px = Q$ giebt auch $xx + Px - Q = 0$. Man setze hier statt P und Q die Werthe aus dem vor. §.; so erhält man $xx - (a+b)x + ab = 0$. Weil nun $x = a$ und $x = b$ ist, so hat man auch $x - a = 0$, und $x - b = 0$, und man findet nach den Multiplicationsregeln (14 §.) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$; mithin ist auch $x^2 + Px - Q = (x-a)(x-b)$. Demnach kann der allgemeine Ausdruck der quadratischen Gleichung, wenn alle Glieder derselben auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht sind, in zwey Factoren zerlegt werden, wovon jeder $= 0$ gesetzt eine einfache Gleichung giebt, worin der Werth der unbekannten Grösse mit einer Wurzel der quadratischen Gleichung einerley ist.

Die

Die 12. Aufgabe.

51. Das erste Glied, die Differenz der Glieder nebst der Anzahl aller Glieder einer arithmetischen Progression sind gegeben: man soll das letzte Glied finden.

Aufl. Es sey das erste Glied $= a$, das letzte $= V$, die Differenz der Glieder $= d$, und die Zahl aller Glieder $= n$; so hat die Progression die allgemeine Form:

1 2 3 4 r n

$a\ a+d\ a+2d\ a+3d \ldots a+(r-1)d \ldots a+(n-1)d.$

Jedes Glied entsteht, wenn zum ersten Gliede die Differenz der Glieder so vielmahl genommen addirt wird, als die Anzahl aller Glieder Eins enthält, die vor demselben bis zum ersten Gliede voran gehen. Demnach erhält man $V = a + (n-1)d$.

Der 6. Lehrsatz.

52. Die Summe des ersten und letzten Gliedes der arithmetischen Progression ist so groß, als die Summe zweyer andern Glieder derselben Progreßion, wenn vor dem einen bis zum ersten Gliede soviele voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten Gliede folgen.

Beweis. Eine Summe zweyer Grössen bleibt einerley, wenn die eine um eben soviel wächst, als die andre abnimmt. So ist $17+3 = 16+4 = 15+5$ u. s. f. Wenn man aber die Glieder einer arithmetischen Progreßion vorwärts vom ersten Gliede gegen das letzte zu, und eben so rückwärts vom letzten Gliede gegen das erste zu fortzählt: so wachsen die Glieder vom ersten gegen das letzte zu immer um eben so viel, als sie vom letzten gegen das erste zu abnehmen, wie man auf folgende Art am besten übersiehet

1	2	3	4	5	6
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$
$a+5d$	$a+4d$	$a+3d$	$a+2d$	$a+d$	a;

also ist die Summe des ersten und letzten Gliedes so groß, als die Summe zwoer andern, wenn vor dem einen bis zum ersten so viele Glieder voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten folgen.

Die 13. Aufgabe.

53. Das erste und letzte Glied der arithmetischen Progreßion, und die Anzahl aller Glieder sind gegeben: man soll die Summe aller Glieder finden.

Aufl. Wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Zahl aller Glieder der Progreßion multiplicirt, so wird das Product so groß, als die Summe aller Glieder der Progreßion doppelt genommen, wie aus dem vor. §. sogleich erhellet. Man setze also die Summe aller Glieder der Progreßion $= S$, das erste Glied $= a$, das letzte $= V$, die Zahl aller Glieder $= n$, so ist $n(a+V) = 2S$, und daraus folgt $S = \frac{1}{2}n(a+V)$.

Zusatz.

54. Man hat also in der Lehre von den arithmetischen Progreßionen zwo Fundamentalgleichungen, nemlich I.) $V = a + (n-1)d$, und II.) $S = \frac{1}{2}n(a+V)$, woraus sich die Auflösung einer jeden Aufgabe muß herleiten lassen, welche die arithmetischen Progreßionen angehet. Sind von den fünf Grössen a, d, n, V, S, drey gegeben, so kann man die übrigen beyden vermittelst der erwehnten Gleichungen finden. Zur Probe dient folgende Aufgabe.

Die

Die 14. Aufgabe

54. Die Summe aller Glieder der arithmetischen Progression ist gegeben, nebst ihrer Differenz und dem ersten Gliede; man soll die Anzahl aller Glieder finden.

Aufl. Es sind gegeben S, d, a, man sucht n: also hat man eine Gleichung nöthig, welche nur diese vier Grössen, und kein V enthält. Aber die Gleichung $S = \frac{1}{2}n(a + V)$ giebt $\frac{2S}{n} = a + V$, also $V = \frac{2S}{n} - a$, und es ist auch $V = a + (n-1)d$. Beyde Werthe gleich gesetzt geben die gesuchte Gleichung $\frac{2S}{n} - a = a + nd - d$, worin nun n die unbekannte Grösse ist. Den Regeln des 31. und 46 §. gemäß findet man ferner

$$2S = 2na + n^2d - nd$$

$$\text{also } n^2d + (2a - d)n = 2S,$$

und die Gleichung wird quadratisch. Man giebt ihr eine zur fernern Rechnung bequemere Form, wenn man sie mit d multiplicirt, da dann

$$n^2d^2 + (2a - d)nd = 2Sd$$

gefunden wird. Nun setze man $nd = z$, so ist $z^2 + (2a - d)z = 2Sd$, und man erhält

$$z = -(a - \tfrac{1}{2}d) \pm \sqrt{(2Sd + (a - \tfrac{1}{2}d)^2)},$$

oder $z = \frac{1}{2}d - a \pm \sqrt{(2Sd + (\frac{1}{2}d - a)^2)}$.

Hat man z gefunden, so erhält man ferner $n = \frac{z}{d}$.

Exempel.

Es sey $S = 235$, $d = 5$, $a = 1$: so wird $\frac{1}{2}d - a = \frac{3}{2}$, $(\frac{1}{2}d - a)^2 = \frac{9}{4}$, $2Sd = 2 \cdot 235 \cdot 5 = 2350$.

2350. Folglich ist $2Sd + (\frac{1}{2}d - a)^2 = 2352{,}25$, und die Quadratwurzel daraus $= 48{,}5$. Demnach ist entweder $z = +50$, oder $z = -47$. Der erste Werth giebt $n = \frac{z}{d} = 10$, der andre $n = -\frac{47}{5} = -9\frac{2}{5}$. Die Ursache, warum hier zwey verschiedene Werthe von n gefunden werden, ist diese, weil man die Progreßion auch rückwärts fortsetzen kann, auf folgende Art:

Anzahl der Glieder $= n$,

$-4\ -3\ -2\ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7$

Glieder der Progreßion.

$-24-19-14-9-4\ \ 1\ \ 6\ 11\ 16\ 21\ 26\ 31$

Wenn man die Zahlen in der obern Reihe die Indices nennt, so gehört mit dem Index -9 in der Progreßion die Zahl -49, und mit dem Index $-9\frac{2}{5}$ die Zahl -51 zusammen. Man setze $n = -9\frac{2}{5}$, und brauche diesen Werth in der Gleichung $V = a + (n-1)\,d$, so findet man $V = 1 - 10\frac{2}{5} \cdot 5 = 1 - 52 = -51$, wie erfordert wird, und wenn man alsdenn

$$a + V = -50$$

mit $\frac{1}{2}n = -4{,}7$ multiplicirt,

so wird $\frac{1}{2}n\,(a + V) = 235 = S$, wie der Voraussetzung gemäß ist.

Die 15. Aufgabe.

55. Das erste Glied, der Exponent des Verhältnisses eines jeden Gliedes zum nächstvorhergehenden, und die Anzahl aller Glieder einer geometrischen Progreßion sind gegeben: man soll das letzte Glied finden.

Aufl. Man setze das erste Glied $= a$, den Exponenten $= m$, die Zahl aller Glieder $= n$, das letzte

letzte Glied = V, so hat die Progreßion die folgende Form

1 2 3 4 5 6 r n

$a\ ma\ m^2a\ m^3a\ m^4a\ m^5a \ldots m^{r-1}a \ldots m^{n-1}a.$

Jedes Glied entsteht, wenn das erste Glied mit einer solchen Potenz des Exponenten m multiplicirt wird, wovon der Exponent um Eins kleiner ist, als der mit diesem Gliede zusammengehörige Index. Demnach ist $V = m^{n-1}a$.

Der 7. Lehrsatz.

56. Wenn man das erste und letzte Glied der geometrischen Progreßion in einander multiplicirt, so ist das Product eben so groß, als das Product zweyer andern Glieder in einander, wenn vor dem einen bis zum ersten so viele Glieder voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten Gliede folgen.

Beweis. Ein Product bleibt von gleicher Grösse, wenn man einen Factor mit einer dritten Zahl multiplicirt, und dagegen den andern Factor mit eben der Zahl dividirt. Das ist der Fall wenn man das erste und letzte Glied der geometrischen Progreßion in einander multiplicirt hat, und nun das zweyte vom Anfang mit dem zweyten vom Ende, das dritte vom Anfang mit dem dritten vom Ende, u. s. f. multiplicirt, wie man gleich übersiehet, wenn man die Glieder der Progreßion in umgekehrter Ordnung so untereinander setzt:

$a\ \ ma\ \ m^2a\ \ m^3a\ \ m^4a\ \ m^5a\ \ m^6a$

$m^6a\ \ m^5a\ \ m^4a\ \ m^3a\ \ m^2a\ \ ma\ \ a$

Das Product ist immer m^6a^2.

Die 16. Aufgabe.

57. Die Summe aller Glieder der geometrischen Progreßion zu finden, wenn das erste und

und letzte Glied, nebst dem Exponenten gegeben sind.

Aufl. Man setze das erste Glied $= a$, den Exponenten $= m$, das letzte Glied $= V$, die Anzahl aller Glieder $= n$, und die Summe aller Glieder $= S$, so ist $V = m^{n-1}a$, also $S - V = a + ma + m^2a + m^3a + \ldots + m^{n-2}a$, und $m(S - V) = ma + m^2a + m^3a + m^4a + \ldots + m^{n-2}a$. Ferner ist $S - a = ma + m^2a + m^3a + m^4a + \ldots + m^{n-1}a$; also findet man $m(S - V) = S - a$. Weil nun a, V, m, gegeben sind, und S gesucht wird, so dient die gefundene Gleichung, wenn man S als die unbekannte Grösse behandelt. Es wird nemlich $mS - S = mV - a$, also $S = \frac{mV - a}{m - 1}$.

Der 1. Zusatz.

58. Aus der Gleichung $m(S - V) = S - a$ folgt auch die Proportion: es verhält sich 1 zum Exponenten m, wie die Summe aller Glieder weniger das letzte $S - V$ zur Summe aller Glieder weniger das erste $S - a$.

Der 2. Zusatz.

59. Für die Theorie von den geometrischen Progressionen hat man wiederum zwo Fundamentalgleichungen $V = m^{n-1}a$, und $m(S - V) = S - a$. Wenn also von den fünf Grössen a, m, n, V, S, drey gegeben sind, so können die beyden übrigen gefunden werden.

Die 17. Aufgabe.

60. Aus zwoen einfachen Gleichungen, wenn sie zwo unbekannte Grössen x und y enthalten, eine unbekannte Grösse x so weg-

zuschaffen, daß man aus beyden gegebenen Gleichungen eine dritte herleitet, die allein y mit bekannten Grössen verbunden enthält.

1. Aufl. Man sehe die Grösse y als bekannt an, und suche aus jeder Gleichung den Werth von x nach den Regeln des 31 §. Hiernächst setze man beyde Werthe einander gleich, so hat man eine Gleichung die nur y enthält.

Exempel.

Es sey $x + y = a$, und $fx + gy = bb$, so giebt die erste Gleichung $x = a - y$, die zweyte $x = \frac{bb - gy}{f}$, und beydes gleich gesetzt giebt $a - y = \frac{bb - gy}{f}$, oder $f(a-y) = bb - gy$. Eine Probe dieses Verfahrens hat die Auflösung der Aufgabe im 54 §. schon gegeben.

2. Aufl. Nachdem der Werth von x aus der einen Gleichung hergeleitet ist, kann man ihn auch statt x in der andern substituiren, so wird ebenfalls x weggeschaft. Setzt man im vorigen Exempel den Werth $x = a - y$ in der zweyten Gleichung statt x, so wird $f(a-y) + gy = bb$, also wie vorhin $f(a-y) = bb - gy$.

3. Aufl. Man kann beyde Gleichungen allemahl so verändern, daß sie unter folgenden allgemeinen Ausdrücken begriffen sind:

$$ax + by = cc$$
$$fx + gy = hh.$$

Man multiplicire jede Gleichung mit den Coefficienten, worin x in der andern Gleichung multiplicirt ist, so erhält man

afx

$$afx + bfy = ccf,$$
$$afx + agy = ahh.$$

Man subtrahire eine Gleichung von der andern, so wird $(bf - ag)\,y = ccf - ahh$, und x ist weggeschaft.

Zusatz.

61. Aus dreyen Gleichungen, wenn sie drey unbekannte Grössen x, y, z, enthalten, kann man auf völlig ähnliche Art eine Gleichung herleiten, die nur eine davon enthält. Aus zweyen schaft man zuerst x weg, und aus einer von diesen mit der dritten verbunden schaft man x ebenfalls weg, so hat man zwo Gleichungen, die nur noch y und z enthalten. Aus diesen beyden kann y weggeschaft werden, so kommt man auf eine Gleichung die nur noch z enthält. Aus der ersten und zweyten von den Gleichungen $x + y = a$, $x + z = b$, $fx + gy = hz$, erhält man $a - y = b - z$, aus der zweyten und dritten aber $b - z = \frac{hz - gy}{f}$, also $fb - fz = hz - gy$, und es wird $y = \frac{(h+f)\,z - bf}{g}$, so wie auch $y = a - b + z$. Mithin ist ferner $a - b + z = \frac{(h+f)\,z - bf}{g}$, oder $(a - b + z)\,g = (h+f)\,z - bf$, und diese Gleichung enthält allein z.

Die 11. Erklärung.

62. Eine Aufgabe heißt eine **bestimmte Aufgabe**, wenn sie auf eben so viele Gleichungen leitet, als unbekannte Grössen gesucht werden sollen. Kann man im Gegentheil nicht eben so viele Gleichungen daraus herleiten, als man Grössen finden soll, so ist es eine **unbestimmte Aufgabe**.

Die 18. Aufgabe.

63. Eine bestimmte Aufgabe aufzulösen.

Aufl. Man leite so viele Gleichungen, als unbekannte Grössen z, y, x, u. s. f. zu suchen sind, aus den Bedingungen der Aufgabe her. Aus diesen Gleichungen schaffe man alle unbekannte Grössen bis auf eine z weg, so erhält man eine Gleichung, woraus der Werth von z gefunden wird. Unter den Gleichungen, die auf die letzte geleitet haben, müssen solche seyn, die ausser z noch x oder y enthalten: in dieser setze man den gefundenen Werth statt z, so erhält man den Werth von x oder y in lauter bekannten Grössen. Man gehe weiter zurück auf die Gleichungen, die ausser einer der beyden vorigen, oder allen beyden, noch die dritte enthalten, und verfahre wie vorhin, so erhält man den Werth der dritten Grösse, und kann so fortfahren, bis alle unbekannte Grössen bestimmt sind.

Exempel. Wendet man diese Schlüsse auf die drey Gleichungen im 61 §. an, so findet man aus der Gleichung $(a-b)\,g + gz = (h+f)\,z - bf$ den Werth $z = \frac{(a-b)\,g + bf}{h+f-g}$. Also ferner $x = b - \frac{(a-b)\,g+bf}{h+f-g}$, und $y = a - x = a - b + \frac{(a-b)\,g+bf}{h+f-g}$.

Zusatz.

64. Wenn die Aufgabe unbestimmt ist, also nicht genug Gleichungen vorhanden sind, um auf diese Art alle unbekannte Grössen zu finden; so dienen doch die Gleichungen, worauf die Aufgabe leitet, dazu, daß

daß man findet, wie einige unbekannte Grössen von den übrigen abhängen; wie also jene gefunden werden können, wenn diese willkührlich angenommen oder sonst bestimmt werden.

Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Drey oder auch mehr ebene Winkel, RCM, RCN, MCN, schliessen eine Ecke, oder einen körperlichen Winkel ein, wenn ihre Seitenlinien zwar in einerley Punct, wie die Seitenlinien der Pyramide in ihrer Spitze, zusammen laufen, übrigens aber die Ebene eines jeden die Ebene des anliegenden Winkels so schneidet, daß ihr gemeinschaftlicher Schenkel zugleich die Durchschnittslinie ist. Die ebenen Winkel, welche die Ecke umher begränzen, nennt man die Seitenflächen der Ecke, und die Winkel an RC, MC, NC, unter welchen jede Seitenfläche die anliegende schneidet, heissen die Winkel der Ecke. Wenn die Ecke nur drey Seitenflächen hat, so heißt sie kurz ein körperliches Dreyeck. 164 Fig.

Der 1. Zusatz.

2. Wenn die drey Seitenlinien des körperlichen Dreyecks CM, CN, CR, gleich lang sind, so kann

man aus der Spitze C als Mittelpunct mit dem Halbmesser CM in der Ebene einer jeden Seitenfläche die Kreisbogen MN, MR, RN, beschreiben. Diese Bogen schliessen alsdenn ein sphärisches Dreyeck ein, (335 §. Geom.) denn es sind Bogen gröster Kreise auf einer Kugelfläche, wozu der Mittelpunct C mit dem Halbmesser CM gehört. Die Winkel dieses sphärischen Dreyecks sind mit den Winkeln des körperlichen Dreyecks einerley, und die Bogen, welche als Seitenlinien zum sphärischen Dreyeck gehören, sind die Maasse der Winkel, welche man als die Seitenflächen des körperlichen Dreyecks betrachtet.

Der 2. Zusatz.

79 Fig. 3. Man kann sich also jedes körperliche Dreyeck zugleich als ein sphärisches, und eben so umgekehrt, jedes sphärische Dreyeck OMB zugleich als ein körperliches Dreyeck vorstellen, dessen Spitze im Mittelpunct C der Kugel liegt. Die Halbmesser, welche von den Winkelpuncten O, M, B, nach den Mittelpunct C der Kugel laufen, sind die Seitenlinien, und die Ebenen der Kreisausschnitte BCO, BCM, OCM, die Seitenflächen der Ecke an der Spitze C.

Der 3. Zusatz.

79 Fig. 4. Wenn man beyde Schenkel FH, FK, eines sphärischen Winkels HFK nach A und D soweit verlängert, daß FA, FD, Quadranten werden, alsdenn aber durch A und D den Bogen AD eines grösten Kreises führt; so ist die Spitze F des Winkels der zu diesem grösten Kreise gehörige Pol, (333 §. Geom.) und AD ist das Maaß des Winkels HFK. Denn FH, FK, sind Bogen gröster Kreise, deren Ebenen einander in der graden Linie FC schneiden, weil C der Mittelpunct der Kugel ist. Man ziehe die

die Halbmesser CA, CD, so sind FCA, ECD, rechte Winkel, und FC stehet auf der Ebene ACD senkrecht, (256 §. Geom.) also ist CF des durch A und D laufenden grösten Kreises Axe, (231 §. Geom.) und F der dazu gehörige Pol. (333 §. Geom.) Ferner ist der Winkel ACD mit dem sphärischen Winkel HFK einerley, (335 §. Geom.) also ist der Bogen AD das Maaß eben dieses Winkels.

Der 4. Zusatz.

5. Aus dreyen ebenen Winkeln, wenn ihre Summe 360° ausmacht, kann keine körperliche Ecke zusammengesetzt werden, denn diese Winkel fallen in einerley Ebene zusammen: daraus folgt, daß auch die drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes, wenn keiner von den Winkeln mehr als 180° beträgt, zusammen weniger als 360° ausmachen. Im folgenden wird nur von solchen sphärischen Dreyecken die Rede seyn, worin kein Winkel die Gränze von 180° übertrift.

Die 2. Erklärung.

6. Ein sphärisches Dreyeck heißt **rechtwinklicht**, wenn es auch nur einen rechten Winkel hat, obgleich die übrigen ebenfalls rechte Winkel seyn können. Man nennt alsdenn die Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, die **Perpendiculärseiten**, und die dritte gegenüberliegende Seite die **Hypothenuse**.

Willkührlicher Satz.

7. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sey in der Folge allemahl der rechte Winkel = R, die eine Perpendiculärseite = B, die andre = P, der Winkel an B = M, der Winkel an P = N, die Hypothenuse = H. 164 Fig.

Der 1. Lehrsatz.

164 8. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck Fig. *RMN* verhalten sich:

I. Die Sinus der Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

II. Auch verhält sich der ganze Sinus zum Sinus einer Perpendiculärseite, wie die Tangente des an dieser Seite anliegenden Winkels zur Tangente der gegenüberstehenden Perpendiculärseite.

Beweis. Es sey C der Mittelpunct der Kugel, RC, MC, NC, Halbmesser, so ist die Ebene des Sectors RCN auf der Ebene RCM senkrecht, weil R ein rechter Winkel ist. Wenn also NG auf CR senkrecht gezogen wird, so ist auch NG auf der Ebene RCM senkrecht. (269 §. Geom.) In der Ebene RCM sey GF auf CM senkrecht gezogen, so liegt die grade Linie FN in der Ebene MCN, und die Ebene des Dreyecks FGN ist auf der Ebene RCM senkrecht. (267 §. Geom.) Aber auch FM ist auch FG senkrecht, vermöge der Verzeichnung, also ist FM auf der Ebene FGN senkrecht, (269 §. Geom.) mithin auch auf FN. Demnach ist GFN der Neigungswinkel der Ebene MCN gegen MCR, (255 §. Geom.) und eben so groß ist der sphärische Winkel M. (335 §. Geom.)

Für den Halbmesser CN sind NF, NG, die Sinus der Bogen H und P, und im Dreyeck FGN ist NF : NG = sin. tot : sinNFG; (40 §. Trig.) oder NF : NG = sin. tot : sinM; also ist auch sin H : sin P = sin. tot : sin M, oder sin H : sin. tot = sin P : sin M. Weil nun aus eben dem Grunde sinH : sin. tot = sin B : sin

: sin N seyn muß; so hat man auch sin B : sin N = sin P : sin N.

Für den Halbmesser = 1 ist tang P = $\frac{GN}{CG}$, und tang NFG = tang M = $\frac{GN}{GF}$, (40 §. Trig.) also wird CG tang P = GN = GF . tang M, und CG : GF = tang M : tang P (95 §. Rech.) Im Dreyeck CFG aber ist CG : GF = sin. tot : sin B, (40 §. Trig.) mithin auch sin. tot : sin B = tang M : tang P, und aus eben dem Grunde sin. tot : sin P = tang N : tang B.

Zusatz.

9. Wenn die trigonometrischen Linien für spitze Winkel positiv angenommen werden, so bleiben zwar die Sinus der stumpfen Winkel zwischen 90° und 180° positiv, aber ihre Tangenten sind negativ. (6 §. Trig.) Daraus folgt, daß jede von den Perpendiculärseiten P oder B, ein Quadrant, kleiner oder grösser als ein Quadrant sey, nachdem der gegenüberstehende Winkel = 90°, kleiner oder grösser als 90° ist.

Der 2. Lehrsatz.

10. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich

III. Der ganze Sinus zum Cosinus eines Catheti, wie der Cosinus des andern Catheti zum Cosinus der Hypothenuse.

IV. Der ganze Sinus zum Cosinus eines Catheti, wie der Sinus des anliegenden Winkels zum Cosinus des gegenüberliegenden Winkels.

165 Fig. **Beweis.** Das bey R rechtwinklichte Dreyeck MNR sey auf einer Kugelfläche verzeichnet, wozu der Mittelpunct C gehört. Man verlängere die Bogen MR bis Q, MN bis S, soweit bis MQ, MS, Quadranten werden, und führe durch Q und S einen gröſten Kreis; so ist M dieses Kreises Pol, und der Bogen QS ist das Maaß des Winkels RMN. (4 §.) Nun sind die Ebenen beyder Sectoren RCN, QCS, auf der Ebene MCR oder MCQ senkrecht, also schneiden sie einander in der graden Linie CV, die auf QCR oder QCM senkrecht ist: (270 §. Geom.) mithin ist CV des Kreises QRM Axe und V der dazu gehörige Pol, (233 §. Geom.) die Bogen VQ, VR, sind Quadranten, und QR ist das Maaß des sphärischen Winkels SVN. Das Dreyeck VSN ist bey S rechtwinklicht; wenn man also Kürze halber den Sinus totus $= r$ setzt, so ist $r : \sin VN = \sin SVN : \sin SN$ (8 §.), oder $r : \cos P = \cos B : \cos H$. Ferner ist $r : \sin VN = \sin VNS : \sin VS$, (8 §.) also auch $r : \cos P = \sin N : \cos M$.

Zusatz.

11. Wenn ein Cathetus $= 90°$ ist, so ist auch die Hypothenuse $= 90°$. Wenn beyde Catheti kleiner, oder beyde gröſser als $90°$ sind; so ist die Hypothenuse $< 90°$: wenn aber der eine Cathetus kleiner, der andre gröſser als $90°$ ist; so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Der 3. Lehrsatz.

12. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich:

V. Der ganze Sinus zur Corangente eines der beyden übrigen Winkel, wie die Corangente

gente des andern Winkels zum Cosinus der Hypothenuse.

VI. Der ganze Sinus zum Cosinus eines der übrigen beyden Winkel, wie die Cotangente der anliegenden Perpendiculärseite zur Cotangente der Hypothenuse, oder wie die Tangente der Hypothenuse zur Tangente der anliegenden Perpendiculärseite.

Beweis. Die Figur sey wie im 10 §. gezeichnet, 165
so ist r : sin SN = tang VNS : tang SV, (8 §.) also Fig.
r : cos H = tang N : cot M, oder r : tang N = cos H : cot M. Aber cot N : r = r : tang N, (12 §. Trig.) also auch cot N : r = cos H : cot M, oder r : cot M = cot N : cos H. Ueberdem ist r : sin SV = tang SVN : tang SN (8 §.) also auch r : cos M = cot B : cot H = tang H : tang B.

Zusatz.

13. Wenn ein Winkel an der Hypothenuse = 90° ist, so ist die Hypothenuse ein Quadrant. Wenn beyde Winkel an der Hypothenuse kleiner, oder beyde grösser als 90° sind, so ist die Hypothenuse < 90: ist aber der eine von diesen Winkeln kleiner, der andre grösser als 90°, so ist H > 90°.

Die 1. Aufgabe.

14. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel noch zwey Stücke des Umfanges gegeben, man soll eines von den übrigen dreyen Stücken des Umfanges finden.

Aufl. Weil in der Aufgabe ausser dem rechten Winkel allemahl noch drey Stücke vorkommen, wovon zwey gegeben sind, und das dritte gesucht wird; so können nur folgende Fälle eintreten.

I. Es

I. Es können alle drey Seiten vorkommen, zwey sind gegeben, die dritte wird gesucht: alsdenn dient die Proportion $r : \cos B = \cos P : \cos H$. 10 §. n. III. Man kann sie allemahl so ordnen, daß das gesuchte die vierte Stelle erhält.

II. Es können zwo Seiten und ein Winkel vorgelegt seyn; das sind alsdenn

a) entweder beyde Perpendiculärseiten und ein Winkel, und man hat $r : \sin B = \tang M : \tang P$, oder $r : \sin P = \tang N : \tang B$, (8 §. n. II.)

b) oder die Hypothenuse, eine Perpendiculärseite und ein Winkel, also

α) entweder der Winkel, welcher der Perpendiculärseite gegenüber liegt, wie H, B, N, oder H, P, M, und alsdenn hat man $r . \sin H = \sin N : \sin B$, oder $r : \sin H = \sin M : \sin P$, (8 §. n. I.)

β) oder der Winkel zwischen beyden Seiten, wie H, B, M; H, P, N, da dann die Proportion $r : \cos M = \tang H : \tang B$, oder $r : \cos N = \tang H : \tang P$ gebraucht wird. (12 §. n. VI.)

III. Es kann auch nur eine Seite mit zweenen Winkeln vorgelegt seyn, also

a) entweder die Hypothenuse und zweene Winkel wie H, M, N, da dann die Proportion $r : \cot M = \cot N : \cos H$ dient, (12 §. n. V.)

b) oder eine Perpendiculärseite und zweene Winkel, wie B, M, N, oder P, M, N, und man findet das gesuchte vermittelst der Proportion $r : \cos P = \sin N : \cos M$, oder $r : \cos B = \sin M : \cos N$. (10 §. n. IV.)

Anmer-

Anmerkung.

Exempel in Zahlen, die hier Kürze halber übergangen werden müssen, können geschickte Lehrer leicht selbst wählen, um Anfängern die Anwendung dieser Regeln geläufig zu machen.

Der 4. Lehrsatz.

15. Auch im schiefwinklichten sphärischen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel.

Beweis. Wenn ABC ein solches Dreyeck ist, so lege man durch die Spitze B eines Winkels, den Mittelpunct der Kugel, und den Pol des grösten Kreises, wozu der Bogen AC gehört, welcher dem Winkel B entgegen stehet, eine Ebene. Diese schneidet die Kugelfläche in einem grösten Kreise, der durch B läuft, und auf AC irgendwo in D senkrecht steht. Auf solche Art kann man allemahl aus der Spitze eines Winkels auf die entgegengesetzte Seite einen grösten Kreisbogen senkrecht herablassen. Alsdenn hat man anstatt des schiefwinklichten Dreyecks ABC zwey andre ABD, CBD, die bey D rechtwinklicht sind, und man erhält $r : \sin AB = \sin A : \sin BD$, $r : \sin BC = \sin C : \sin BD$. (8 §. n. I.) Aus beyden Proportionen folgt die dritte $\sin AB : \sin BC = \sin C : \sin A$. (174 §. Geom.) 166 Fig.

Zusatz.

16. Auch alsdenn, wenn der lothrechte Bogen BD nicht innerhalb des Dreyecks ABC, oder der Durchschnittspunct D nicht zwischen A und C fiele, würden diese Schlüsse ihre Anwendung finden. Es fällt aber D zwischen A und C, wenn die Winkel an A und C von einerley Art sind: das Gegentheil erfolgt,

folgt, wenn diese Winkel von verschiedener Art sind, wie man leicht aus dem 9 §. schliessen kann.

Der 5. Lehrsatz.

166 17. Wenn *BD* auf der Grundlinie *AC* senk-
Fig. recht steht, so hat man folgende vier Proportionen.

1. Die Sinus der beyden Stücke der Grundlinie, verhalten sich umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Winkel.

2. Ihre Cosinus aber wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

3. Die Sinus der beyden Winkel an der Spitze *B* verhalten sich wie die Cosinus der Winkel an der Grundlinie

4. Ihre Cosinus aber umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

Beweis. Es ist r : sin AD = tang A : tang BD, und r : sin CD = tang C : tang BD (8 §. n. II.) also sin AD : sin CD = tang C : tang A. (174 §. Geom.) Ferner ist r : cos BD = cos AD : cos AB und r : cos BD = cos CD : cos BC, (10 §. n. III.) also cos AD : cos AB = cos CD : cos BC. Weiter ist r : cos BD = sin ABD : cos A, und r : cos BD = sin CBD : cos C, (10 §. n. IV.) also sin ABD : cos A = sin CBD : cos C; auch hat man r : cot BD = cos ABD : cot AB, und r : cot BD = cos CBD : cot BC, (12 §. n. VI.) mithin cos ABD : cot AB = cos CBD : cot BC. Die letzte Proportion giebt auch cos ABD : cos CBD = cot AB : cot BC = tang BC : tang AB. (12 §. Trig.)

Der

Der 1. Zusatz.

18. Man setze $90° - AD = \alpha$, und $90° - CD = \beta$, so ist $\cos AB : \cos BC = \sin\alpha : \sin\beta$ (17 §. n. 2.) mithin $\cos AB + \cos BC : \cos AB - \cos BC = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$, (175 §. Geom.) folglich auch $\cos AB + \cos BC : \cos AB - \cos BC = \tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ (46 §. Trig.) Es ist aber $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90° - \frac{1}{2}(AD+CD) = 90° - \frac{1}{2}AC$, und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(CD-AD)$, also erhält man $\cos AB + \cos BC : \cos AB - \cos BC = \cot \frac{1}{2}AC : \tang \frac{1}{2}(CD-AD)$, mithin auch $\cot \frac{1}{2}(AB+BC) : \tang \frac{1}{2}(BC-AB) = \cot \frac{1}{2}AC : \tang \frac{1}{2}(CD-AD)$.

Der 2. Zusatz.

19. Aus der Proportion $\cos C : \cos A = \sin CBD : \sin ABD$ (17 §. n. 3.) folgt $\cos C + \cos A : \cos C - \cos A = \sin CBD + \sin ABD : \sin CBD - \sin ABD$ (175 §. Geom.) also auch $\cos C + \cos A : \cos C - \cos A = \tang \frac{1}{2}(CBD+ABD) : \tang \frac{1}{2}(CBD-ABD)$, oder $\cot \frac{1}{2}(C+A) : \tang \frac{1}{2}(A-C) = \tang \frac{1}{2}(CBD+ABD) : \tang \frac{1}{2}(CBD-ABD)$.

Die 2. Aufgabe.

20. **Im schiefwinklichten sphärischen Dreyeck wird ein Winkel gesucht, und drey andre Stücke sind gegeben, man soll die Auflösung finden.**

Aufl. I. Wenn alle drey Seiten AB, BC, AC, gegeben sind, und der Winkel A gesucht wird, so lasse man aus der Spitze B eines der übrigen Winkel den Bogen BD auf AC senkrecht fallen, damit A zugleich ein Winkel des rechtwinklichten Dreyeckes ABD werde, worin 166 Fig.

worin ausser dem rechten Winkel auch A gegeben ist. Alsdenn ist cot $\frac{1}{2}$(BC + AB) : tang $\frac{1}{2}$(BC − AB) = cot $\frac{1}{2}$AC : tang $\frac{1}{2}$(CD − AD); (18 §.) und wenn vermittelst dieser Proportion $\frac{1}{2}$(CD − CA) gefunden ist, so kann dem 100 §. Rech. gemäß auch CD und AD gefunden werden. Hiernächst hat man im rechtwinklichten Dreyeck ABD die Proportion cot AD : cot AB = r : cos A (12 §. n. VI. und 14 §. β.) und diese giebt den gesuchten Winkel A. Wäre AB > BC, so müste man jene Proportion so ausdrucken: cot $\frac{1}{2}$(AB + BC) : tang $\frac{1}{2}$(AB − BC) = cot $\frac{1}{2}$AC : tang $\frac{1}{2}$(AD − CD).

II. Wenn zwo Seiten und ein Winkel gegeben sind, so können drey Fälle eintreten.

a. Es sind gegeben zwo Seiten AB, AC, die den gegebenen Winkel A einschliessen, man sucht C. Aus des dritten Winkels B Spitze sey der Bogen BD auf AC senkrecht gezogen, so kann im rechtwinklichten Dreyeck ABD die Seite AD nach der Proportion r : cos A = tang AB : tang BD (12 §. n. VI.) gefunden werden. Ferner hat man CD = AC − AD, und kann weiter ansetzen sin CD : sin AD = tang A : tang C. (17 §. n. 1.)

b) Es sind gegeben zwo Seiten, AB, BC, die den gesuchten Winkel B einschliessen, und ausserdem ein gegenüberstehender Winkel A. Man ziehe den senkrechten Bogen aus des gesuchten Winkels B Spitze, so hat man im rechtwinklichten Dreyeck ABD die Proportion cot A : cos AB = r : cot ABD, (12 §. n. V) und überdem ist tang BC : tang AB = cos ABD : cos CBD, (17 §. n. 4.) da dann B = ABD + CBD gefunden wird.

c. Es

c. Es sind gegeben zwo Seiten, AB, BC, wovon eine dem gegebenen Winkel A, die andre dem gesuchten C gegenüber steht, die also den dritten Winkel B einschliessen. Man schliesse sin BC : sin A = sin AB : sin C, (15 §.) so hat man leicht den gesuchten Winkel.

III. Wenn nur eine Seite mit zweenen Winkeln gegeben ist, so können zwey Fälle vorkommen.

α. Es ist gegeben die Seite AB, zwischen den gegebenen Winkeln, A, B, man soll den dritten Winkel C finden. Der senkrechte Bogen BD giebt zweene Winkel an der Spitze B, und man hat cot A : r = cos AB : cot ABD, (§. 12. n. V.) also ferner CBD = CBA — ABD, da dann der zweyte Ansatz sin ABD : sin CBD = cos A : cos C (17 §. n. 3.) den Winkel C giebt.

β. Die Winkel A, C, sind gegeben, die gegebene Seite BC aber liegt zwischen dem einen gegebenen Winkel C und dem gesuchten B. Man ziehet wieder den senkrechten Bogen BC, so giebt das rechtwinklichte Dreyeck BCD den Ansatz cot C : cos BC = r : cot CBD, (12 §. n. V.) und hiernächst setzt man cos C : cos A = sin CBD : sin ABD (15 §. n. 3.) und findet B = ABD + CBD.

In allen Fällen muß man nach den im 16 §. angezeigten Gründen beurtheilen, ob der lothrechte Bogen auch vielleicht ausserhalb des Dreyeckes falle: alsdenn ist AC nicht die Summe sondern die Differenz der Segmente AD, DC, und der Winkel an der Spitze B die Differenz der Winkel ABD, DBC.

Die 3. Aufgabe.

21. Im schiefwinklichten sphärischen Dreyeck wird eine Seite gesucht, und drey andre Stücke sind gegeben: man soll das gesuchte finden.

Aufl. I. Wenn alle drey Winkel A, B, C, gegeben sind, und die Seite AB gesucht wird, alsdenn aber BD senkrecht herabgelassen ist; so hat man im rechtwinklichten Dreyeck ABD den Winkel A, und kann auch ABD finden, wenn man anseßt $\cot\frac{1}{2}(A+C) : \text{tang}\frac{1}{2}(A-C) = \text{tang}\frac{1}{2}(CBD+ABD) : \text{tang}\frac{1}{2}(CBD-ABD)$, (19 §.) da dann ABD nach dem 100 §. Rech. gesucht wird. Hiernächst seßt man $r : \cot A = \cot ABD : \cos AB$. (12 §. n. V.)

II. Wenn zweene Winkel und eine Seite gegeben sind, so hat man drey Fälle zu unterscheiden.

a. Es sind gegeben zweene Winkel A, B, und die dazwischen liegende Seite, man soll eine von den gegenüberstehenden Seiten BC, finden. Vermittelst des aus B senkrecht herabgelassenen Bogens BD erhält man das rechtwinklichte Dreyeck ABD, und kann anseßen $\cot A : r = \cos AB : \cot ABD$ (12 §. n. V.) Weil ferner $CBD = CBA - ABD$ gefunden wird, so schließt man weiter $\cos CBD : \cos ABD = \text{tang}\,AB : \text{tang}\,BC$. (17 §. n. 4.)

b. Es sind ausser der Seite AB gegeben zweene Winkel A, C, an der gesuchten Seite AC. Der senkrechte Bogen BD giebt das rechtwinklichte Dreyeck ABD, und man erhält $r : \cos A = \text{tang}\,AB : \text{tang}\,AD$. (12 §. n. VI.) Hiernächst seßt man $\text{tang}\,C : \text{tang}\,A$

=

= sin AD : sin CD, (17 §. n. I.) und findet AC = AD + DC.

c. Es sind gegeben zweene Winkel, A, B, wovon einer der gegebenen Seite BC, der andre der gesuchten AC gegenüber stehet, die also der dritten Seite AB anliegen. Man setze nur an sin A : sin BC = sin B : sin AC (15 §.), so ist das gesuchte leicht gefunden.

III. Wenn nur ein Winkel und zwo Seiten gegeben sind, so können nur zwey Fälle eintreten.

α. Es ist gegeben der Winkel A und die Seiten AB, AC, welche ihn einschliessen, man sucht die dritte Seite BC. Im oft erwehnten rechtwinklichten Dreyeck ABD hat man r : cos A = tang AB : tang AD, (12 §. n. VI.) also ferner CD = CA − AD, und man setzt hiernächst an cos AD : cos CD = cos AB : cos BC. (17 §. n. 2.)

β. Die Seiten AB, BC, sind gegeben, der gegebene Winkel A liegt zwischen der einen gegebenen Seite AB und der gesüchten AC. Das rechtwinklichte Dreyeck ABD giebt den Ansatz r : cos A = tang AB : tang AD, (12 §. n. VI.) und hiernächst setzt man cos AB : cos BC = cos AD : cos CD, (17 §. n. 2.) so findet man AC = AD + DC.

Die am Schlusse des 18 §. beygefügte Erinnerung findet hier ebenfalls ihre Anwendung.

Die 4. Aufgabe

22. Auf der Oberfläche der Kugel ist ein sphärisches Dreyeck *ABC* gegeben: man soll 167 Fig.

auf eben der Kugelfläche ein andres sphärisches Dreyeck verzeichnen, dessen Seiten die Winkel des vorigen, und dessen Winkel die Seiten des vorigen zu 180° ergänzen.

Aufl. Man verlängere die Schenkel AB, AC, des Winkels A nach E und F soweit, daß AE und AF Quadranten werden; so kann man durch E, F, und den Mittelpunct der Kugel eine Ebene legen, welche die Kugelfläche in einem grösten Kreise schneidet, wozu der Bogen EF gehört, und A ist dieses Kreises Pol. (4 §.) Die Schenkel BA, BC, des Winkels B verlängere man eben so nach G und H, bis BG, BH, Quadranten werden, und führe durch G und H ebenfalls den Bogen GH eines grösten Kreises, dessen Pol also B ist. Wenn alsdenn EF und GH einander in P schneiden, so ist P nicht allein von A sondern auch von B auf der Kugelfläche um 90° entfernt, weil die Bogen AP, BP, Quadranten sind: folglich ist auch P der Pol des grösten Kreises, wozu der Bogen AB gehört. Noch verlängere man CA, CB, nach D und K, nehme auch CD = 90° = CK, und führe durch D und K einen grösten Kreisbogen, der die vorigen PH, PE, in Q und R schneidet: so erhellet wie vorhin, daß nicht allein C der Pol des Bogens DK, sondern auch Q des Bogens GK und R des Bogens FD Pol sey.

Diesemnach ist PH = 90°, GQ = 90°, also PH + GQ = 180°. Aber GQ = GH + HQ, also PH + GH + HQ = 180°. Ferner ist PH + HQ = PQ, folglich auch PQ + GH = 180°, oder PQ + ABC = 180°, weil GH das Maaß des sphärischen Winkels ABC ist. (4 §.) Eben so erhellet,

hellet, daß PR + CAB = 180° und QR + ACB = 180° sey. Ferner ist AE = 90°, BH = 90°, also AE + BH = 180°. Ueberdem ist AE = AB + BE, folglich AB + BE + BH = 180°. Aber BE + BH = EH, mithin ist auch AB + EH = 180°, und EH ist das Maaß des Winkels EPH oder QPR, also wird AB + QPR = 180°. Völlig eben so findet man BC + PQR = 180°, und AC + PRQ = 180°. Diesemnach hat das Dreyeck PQR die verlangten Eigenschaften.

Der 6. Lehrsatz.

23. Die Summe aller dreyer Winkel im sphärischen Dreyeck *ABC* ist grösser als 2*R*, aber kleiner als 6*R*. 167 Fig.

Beweis. Wenn das Dreyeck PQR wie im vor. §. verzeichnet wird, so ist A = 2R − PR, B = 2R − PQ, C = 2R − QR, also A + B + C = 6R − (PR + PQ + QR), folglich A + B + C < 6R. Ueberdem ist PR + PQ + QR < 4R, (5 §.) folglich A + B + C > 2R.

Anmerkung.

24. Wegen der unumgänglich nothwendigen Kürze, worauf der Vortrag hier eingeschränkt werden mußte, liessen sich keine Exempel in Zahlen, um die Rechnungsregeln zu erläutern, beybringen, die aber geschickte Lehrer leicht wählen können. Unter den zwölf Aufgaben, welche bey schiefwinklichten Dreyecken vorkommen können, (20. 21 §.) finden sich nur zwey, deren Auflösung vermittelst einer Proportion allein gefunden werden kann, wenn nemlich zwey gegebene Stücke einander entgegen stehen, und das dritte dem gesuchten entgegengesetzt ist: (20 §. II. Litt. c, und 21 §. II. Litt. c.) in den übrigen Fällen hat man zwey

Proportionen nöthig. In dem Fall, wenn aus den dreyen Seiten ein Winkel gesucht wird, (20 §. I.) kann man die Auflösung auf die nachstehende Proportion bringen $\sin AB \cdot \sin AC : \sin \frac{1}{2}(BC+AB-AC) = \sin \frac{1}{2}(BC+AC-AB) : \sin \frac{1}{2} A^2$. Der Beweis davon findet sich im 2ten Theil des Lehrbegriffes im 545 §. Geom. 440. 441 S. der beym mündlichen Vortrage als eine Probe davon, wie man die analytische Methode hier anwendet, Anfängern zur Uebung vorgelegt werden kann. Die im 22 §. bewiesene Eigenschaft der sphärischen Dreyecke leitet alsdenn auf eine ähnliche Auflösung für den Fall, wenn aus den dreyen gegebenen Winkeln eine Seite gesucht wird. (21 §. I.) Es ist nemlich $\sin A \cdot \sin B : \cos \frac{1}{2}(C+A-B) = \cos \frac{1}{2}(C+B-A) : \cos \frac{1}{2} AB^2$. (a. a. O. 548. 549 §. 442. 443 S.)

Die

Mechanischen Wissenschaften.

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0291
DFG

Erste Gründe
der
Statik fester Körper.

Die 1. Erklärung.

1. Die um uns her befindlichen Körper sind aus Bestandtheilen zusammengesetzt, welche die Materie oder Masse des Körpers ausmachen. Bley, Eisen, sind Massen, eine bleyerne oder eine eiserne Kugel, die daraus verfertigten Körper.

Die 2. Erklärung.

2. Zwischenräume in einer Masse sind solche Theile des Raums, den die Masse im ganzen einzunehmen scheint, welche wenigstens nicht mit Materie von eben der Art angefüllet sind. Je mehr Materie in einerley Raum beyeinander, je geringer also die ganze Summe der Zwischenräume ist, desto dichter ist die Masse. Eine gleichförmig dichte, oder in allen ihren Theilen gleichartige Masse ist eine solche, worin Materie und Zwischenräume so gleichförmig vertheilt sind, daß gleichgrosse Theile des Raums, den die Masse im ganzen einnimmt, gleichviele Masse enthalten. Die ungleichförmig dichte Masse ist von entgegengesetzter Beschaffen-

heit. **Gleichförmig oder ungleichförmig dichte Körper** sind solche, die aus gleichförmig oder ungleichförmig dichter Masse bestehen.

Zusatz.

3. Wenn man die Menge der Bestandtheile einer gleichförmig dichten Masse zählen könnte, so würde man diejenige Menge, welche den Raum eines Cubicfusses oder Cubiczolles einnimmt, für das **Maaß** ihrer **Dichtigkeit** annehmen können. Denn eine andre gleichförmig dichte Masse hätte 2mahl, 3mahl soviele Dichtigkeit, die in einem eben so grossen Raum 2mahl oder 3mahl soviele Bestandtheile enthielte.

Die 1. Erfahrung.

4. Alle um uns her befindliche Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt sind, gegen die Erde herab. Ein Stein von mäßiger Grösse, ein Stück Bley, oder sonst etwas dergleichen, wenn wir es mit der Hand unterstützen, **drückt** die Hand. Wir haben auch allen Grund dafür zu halten, daß jede andre **Unterstützung** von dem Körper ebenfalls **Druck** leide.

Die 3. Erklärung.

5. Die **Bewegung** bestehet in einer ununterbrochenen Veränderung des Orts, und wir nennen alles das eine **bewegende Kraft**, wovon wir urtheilen, daß es eine Bewegung entweder wirklich hervorbringe, oder doch hervorzubringen strebe. Die Kraft, welche die Körper unterwärts drückt, so lange sie unterstützt sind, und gegen die Erde zu beweget, wenn es keine Unterstützung hindert, nennen wir die **Schwere**.

Die 4. Erklärung.

6. Der Druck eines schweren Körpers gegen das, was ihn unterstützt, heißt sein **Gewicht**. Man nennt auch wohl die schweren Körper selbst Gewichte, wenn

wenn man bey denselben nichts weiter als die bestimmte Grösse des Drucks gegen dasjenige betrachtet, was einen solchen Körper herabzufallen hindert.

Der 1. Zusatz.

7. Ein jedes auch noch so kleines Theilchen der uns bekannten Körper ist schwer, und man hat Grund, wenigstens bis auf weitere Prüfung anzunehmen, daß gleiche materielle Theilchen gleiches Gewicht haben. Das Gewicht eines jeden schweren Körpers ist die Summe der Gewichte aller seiner Elementartheilchen: demnach sind die Gewichte solcher Körper gleich groß, die gleichviele Masse haben.

Der 2. Zusatz.

8. Doppelt soviel Masse hat doppelt soviel Gewicht, als die einfache Masse, mithin die dreyfache, vierfache Masse auch dreymahl oder viermahl soviel Gewicht, als die einfache. Demnach verhalten sich die Gewichte der Körper, wie ihre Massen.

Der 3. Zusatz.

9. Wenn es gleichartige und gleichförmig dichte Körper sind, so enthalten gleich grosse Körper gleichviele Masse: also haben gleich grosse Körper dieser Art auch gleiches Gewicht. Ueberdem enthält der doppelt oder dreymahl grössere Körper auch doppelt oder dreymahl mehr Masse; (2 §.) mithin verhalten sich die Gewichte gleichartiger und gleichförmig dichter Körper wie ihre geometrische Grösse. Zwey Cubiczoll Bley, Wasser, Eisen, sind doppelt so schwer, als ein Cubiczoll Bley, Wasser oder Eisen.

Die 5. Erklärung.

10. Das eigenthümliche oder specifische Gewicht einer gleichförmig dichten Masse ist das Gewicht eines

eines Cubicfusses oder eines Cubiczolles dieser Masse, nachdem man die geometrische Grösse des Raums, den sie einnimmt, in Cubicfussen oder Cubiczollen ausdrückt. Wenn in diesem Sinne das eigenthümliche Gewicht einer Masse schon bekannt ist; so darf man nur für jede andre von jener zwar verschiedene für sich aber ebenfalls gleichartige Masse die Zahl wissen, welche angiebt, wie vielmahl ein Cubicfuß oder Cubiczoll davon schwerer oder leichter als eine eben so grosse Menge der erstern Masse sey. Gewöhnlich vergleicht man so das eigenthümliche Gewicht aller übrigen Massen mit dem eigenthümlichen Gewicht eines ganz reinen Regen- oder Schneewassers. Alsdenn ist das **Maaß des eigenthümlichen Gewichts** einer Masse die Zahl, welche angiebt, wie vielmahl das Gewicht einer bekannten Menge Wasser in dem Gewicht einer eben so grossen Menge jener Masse enthalten sey.

Zusatz.

11. Das Maaß des eigenthümlichen Gewichts einer Masse giebt zugleich das Maaß ihrer Dichtigkeit ab. Wenn ein Cubiczoll Queckſilber 14mahl schwerer als ein Cubiczoll Wasser ist, so enthält ein Cubiczoll Queckſilber 14mahl mehr Masse, (8 §.) und ist folglich 14mahl dichter als Wasser. (3 §.)

Die 1. Aufgabe.

12. **Das eigenthümliche Gewicht einer gleichförmig dichten Masse zu finden.**

Aufl. 1. Aus einer festen Masse kann man einen Körper verfertigen lassen, der die Gestalt und Grösse eines Cubiczolles, oder eines Cubicfusses hat, und das Gewicht desselben vermittelst einer richtigen Wage suchen. Auch kann man einen hohlen Würfel

von

von der Art verfertigen lassen. Wenn derselbe alsdenn zuerst leer, hiernächst aber mit Wasser oder einer andern flüßigen Masse angefüllt gewogen wird: so findet man das Gewicht der flüßigen Masse, die den Raum des Würfels ausfüllt, wenn man das Gewicht des leeren Würfels von dem Gewicht des mit der flüßigen Masse angefüllten Würfels subtrahirt.

2. Es ist indessen eben nicht nothwendig, daß man das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles der Masse unmittelbar vermittelst der Wage sucht; ein Cylinder, ein Prisma, und jeder andre Körper, was er auch für eine Gestalt und Grösse hat, kann dazu dienen, wenn man nur die Grösse des Raums, den die Masse ausfüllt, im Cubicmaß durch Rechnung finden kann. Man sucht alsdenn das Gewicht der Masse wie gewöhnlich in Pfunden, oder Unzen, und dividirt diese Zahl mit der Anzahl der Cubiczolle, welche die Grösse des Raums ausmachen, den die Masse ausfüllt; so hat man das Gewicht eines Cubiczolles der Masse, also ihr eigenthümliches Gewicht.

Exempel. $3\frac{3}{8}$ Cubiczoll Wasser Rheinl. Maaß betragen im Cöllnischen Gewicht, 998 Gran, also 1 Cubiczoll Wasser 296 Gran, und 1 Cubicfuß Wasser $66\frac{1}{2}$ Pfund Cöllnisch.

Der 1. Zusatz.

13. Die geometrische Grösse eines Körpers von gleichförmiger Dichtigkeit sey = V, das specifische Gewicht seiner Masse = G, und das Gewicht des ganzen Körpers = P; so sind das drey Grössen, die so von einander abhängen, daß allemahl die dritte leicht gefunden

funden wird, wenn zwey davon bekannt sind. Es ist nemlich $G = \frac{P}{V}$: also $P = G \cdot V$ und $V = \frac{P}{G}$.

Der 2. Zusatz.

14. Folgende kleine Tabelle giebt das eigenthümliche Gewicht einiger Massen in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers an.

Fein Gold, ist	19,640	mahl schwerer als Wasser.
fein Silber	11,091	
Bley	11,325	
Kupfer	8,784	
Eisen	7,645	
Englisches Zinn	7,295	
Eichenholz	0,929	
Tannenholz	0,550	
ganz reines Queckſilber	14,000	
Englisches Queckſilber	13,593	
rectificirter Weingeist	0,866	

Will man nun wissen, wie viel $2\frac{1}{2}$ Rheinländ. Cubiczoll Silber im Cöllnischen Gewicht betragen, so findet man

1 Rheinl. Cubiczoll Silber wiegt 11,091 mahl 296 Gran Cöllnisch, also 3283 Gran, oder 6 Unzen 6 Drachmen 2 Scrupel 3 Gran: mithin betragen $2\frac{1}{2}$ Cubiczoll Silber am Gewicht 17 Unzen 2 Scrupel $7\frac{1}{2}$ Gran.

Die 6. Erklärung.

15. Gegen einen Körper kann eine Kraft so drücken, daß nur ein Theil allein den Druck unmittelbar leidet, oder nur einige Theile allein dem Druck unmittelbar ausgesetzt sind. Alsdenn würde eine Zerreissung der Bestandtheile desselben erfolgen, wenn nicht ihr Zusammenhang untereinander es hinderte, und

und eine Masse, deren Bestandtheile in einer solchen Verbindung sind, nennt man eine feste Masse. Wenn mehr Kräfte zugleich auf eine Masse unter solchen Umständen wirken, daß keine Bewegung erfolgen kann, so sind sie im Gleichgewicht: und die Statik muß die Gesetze des Gleichgewichts solcher Kräfte erklären, die auf feste Massen wirken.

Die 7. Erklärung.

16. Eine schwere feste Masse kann an einem Faden ruhig hängend erhalten werden, und die grade Linie nach welcher der Faden alsdenn gedehnt ist, stellt zugleich die Richtung vor, nach welcher der Körper gegen die Erde herabfällt, wenn der Faden zerreißt, oder doch sonst nicht mehr gehalten wird. Diese grade Linie heißt die Richtung der Schwere, und die Erfahrung lehrt, daß sie auf der Erde, so weit sie uns eine ebene Fläche zu seyn scheint, senkrecht sey.

Zusatz.

17. Wofern die Erde eine Kugel ist, so laufen die Richtungen der Schwere in ihrem Mittelpunct zusammen.

Die 8. Erklärung.

18. Jede mit der Richtung der Schwere parallele Linie heißt eine verticale, lothrechte oder bleyrechte Linie, und jede Ebene, auf welcher die Richtung der Schwere senkrecht ist, nennt man eine horizontale oder wagrechte Ebene. Auch eine grade Linie liegt wagrecht oder horizontal, wenn sie von der Richtung der Schwere senkrecht geschnitten wird.

Zusatz.

19. Wagrechte Linien und Ebenen sind also mit der Erdfläche, soweit sie eben zu seyn scheint, parallel.

Die

Die 9. Erklärung.

20. Eine Ebene steht vertical oder lothrecht, wenn jede grade Linie, die aus einem Punct der Ebene lothrecht herabgelassen wird, in der Ebene liegt. Die Ebene ist alsdenn auf jeder horizontalen Ebene senkrecht. (267 §. Geom.)

Die 10. Erklärung.

95 Fig. 21. Eine kreisrunde feste Scheibe BDFG, die so unterstützt ist, daß sie sich um ihren Mittelpunct C zwar frey drehen, sonst aber nicht weichen kann, heißt eine Rolle. Hier wird sie anfangs so betrachtet, als wenn sie selbst kein Gewicht hätte. Wegen des Gebrauchs, wozu sie dienen soll, muß sie am Umfange eine Vertiefung haben, damit man eine biegsame Schnur herumlegen und Gewichte daran hängen, oder auch sonst Kräfte anbringen kann, die an der Schnur ziehen.

Der 1. Grundsatz.

22. Zwo gleiche Kräfte, wenn sie die Rolle auf entgegengesetzte Art zu drehen streben, und ihre Richtungen BA, DE, in der Ebene der Rolle den Umfang derselben berühren, erhalten einander im Gleichgewicht.

Zusatz.

96 Fig. 23. Wenn bey E an dem Faden ABDE ein Gewicht P hängt, und der Faden bey A befestiget ist; so ist zwar die ursprüngliche Richtung DE, nach welcher das Gewicht den Faden zieht, vertical: allein der Punct A wird nach der Richtung AB eben so stark gezogen, als ihn das Gewicht P lothrecht herabziehen würde, wenn es an dem Faden frey, ohne über die Rolle geführt zu seyn, herab hienge. Demnach kann man durch eine Rolle zuwege bringen, daß ein Gewicht nach jeder verlangten Richtung so stark

stark zieht, als es nach seiner ursprünglichen lothrechten Richtung ziehen würde. Auch läßt sich die Grösse einer jeden bewegenden Kraft auf die Art ganz bestimmt und verständlich ausdrücken, wenn man ein Gewicht angiebt, das nach lothrechter Richtung eben so stark als die bewegende Kraft in ihrer Richtung drückt oder ziehet.

Die 11. Erklärung.

24. Eine grade unbiegsame Linie BC, die man sich ohne Schwere, und in einem gewissen Punct A so unterstützt vorstellet, daß sich die Linie zwar um denselben drehen, sonst aber nicht in Bewegung kommen kann, nennt man einen **mathematischen Hebel**, den unterstützten Punct seinen **Ruhepunct**, und was ihn daselbst hält, die **Unterlage**. 97 Fig.

Die 12. Erklärung.

25. Kräfte, die den Hebel auf entgegengesetzte Art zu drehen streben, können einander im Gleichgewicht erhalten. Ist alsdenn die eine an B, die andre auf der andern Seite des Ruhepuncts an C angebracht, so können sie nach übereinstimmigen Richtungen ziehen, und dieser Hebel der ersten Art kann auch ein **doppelarmiger Hebel** heissen. Am Hebel der **andern Art** liegen die Stellen B und C, an welchen die Kräfte angebracht sind, an einer Seite des Ruhepuncts. 97 Fig. 98 u. 99 Fig.

Die 13. Erklärung.

26. Wenn am Hebel Gewichte ziehen oder drücken, so siehet man gewöhnlich das grössere als die **Last**, das kleinere als die **Kraft** an, die jene Last im Gleichgewicht erhalten soll. Hier werden nur die Fälle vornemlich betrachtet werden, wenn die Richtungen der Kräfte parallel und auf dem Hebel

senkrecht sind, da dann der Hebel horizontal liegen muß, wenn die Gewichte in ihrer ursprünglichen Richtung daran ziehen.

Die 14. Erklärung.

106 Fig. 27. Einen gradlinichten Winkel BAC, dessen Schenkel AB, AC, unbiegsame grade Linien ohne Schwere, und bey A so aneinander befestiget sind, daß wenn der eine um A gedrehet wird, der andre in eben die Bewegung kommen muß, nennt man einen **Winkelhebel**. Der Punct A muß zwar gehalten werden, jedoch so, daß die Umdrehungsbewegung frey bleibt. Eine Kraft P an einem Schenkel in B, und eine andre Q am andern Schenkel in C so angebracht, daß sie den Hebel auf entgegengesetzte Art zu drehen streben, können einander im Gleichgewicht erhalten.

Der 2. Grundsatz.

97 Fig. 28. Wenn der Hebel BC horizontal liegt, und die Gewichte P, Q, welche an den Stellen B, C, lothrecht herabziehen, einander im Gleichgewicht erhalten; so trägt die Unterlage A die Summe der Gewichte.

Der 3. Grundsatz.

29. Gleiche Gewichte, die am doppelarmigen Hebel in gleichen Entfernungen vom Ruhepunct hängen, erhalten einander im Gleichgewicht. Ungleiche Gewichte in gleichen Entfernungen aber erhalten einander nicht im Gleichgewicht, das grössere überwiegt das kleinere.

Der 1. Lehrsatz.

30. **Wenn ein paar Gewichte am Hebel der einen Art im Gleichgewicht sind, so sind eben die Gewichte in eben den Entfernungen auch**

auch am Hebel der andern Art im Gleichgewicht.

Beweis. Wenn P und Q in B und C angebracht am doppelarmigen Hebel im Gleichgewicht sind; so nehme man AD = AC, hänge an D ein Gewicht R = Q, und lasse an eben der Stelle D ein Gewicht S = R = Q aufwärts ziehen; so sind alle vier Gewichte noch im Gleichgewicht. Aber auch R in D, und Q in C sind im Gleichgewicht: (29 §.) also müssen auch P und S im Gleichgewicht seyn. 97 Fig.

Wüste man umgekehrt, daß P mit S im Gleichgewicht sey; so könnte man in D und C die Gewichte R und Q beyde = S anbringen, da dann wiederum alle vier Gewichte im Gleichgewicht bleiben müßten. Weil aber R und S für sich im Gleichgewicht sind; so müßten auch P und Q im Gleichgewicht seyn.

Der 2. Lehrsatz.

31. Wenn das eine Gewicht doppelt so groß als das andre, und die Entfernung des einfachen Gewichts vom Ruhepunct doppelt so groß ist, als die Entfernung des doppelten vom Ruhepunct; so sind beyde am Hebel im Gleichgewicht.

Beweis. Wenn CA = CB ist, an A und B aber die gleichen Gewichte P und R hängen, so ist alles im Gleichgewicht, wenn C unterstützt ist. Auf die Unterlage in C drückt alsdenn die Summe der Gewichte P + R = 2P. An C sey eine Schnur befestiget, oben bey D über eine Rolle geführt, und ein Gewicht Q = 2P daran aufgehängt; so bedarf es in C keiner Unterlage, weil nun alle drey Gewichte P, Q, R, im Gleichgewicht sind. Das Gewicht R hindert, daß der Punct A nicht steigen kann, 98 Fig.

und statt dessen kann in A eine Widerlage angebracht seyn, so bedarf es des Gewichts R nicht. Alsdenn ist das einfache Gewicht P in der doppelten Entfernung AB mit dem doppelten Gewicht Q in der einfachen Entfernung AC im Gleichgewicht. Der Hebel AB ist einarmig, aber eben darum gilt dasselbe Gesetz auch für den doppelarmigen Hebel. (30 §.)

Zusatz.

101 Fig. 32. Beym doppelarmigen Hebel AB sey CB = 2CA, Q = 2P, und in C ziehe ein Gewicht R = P + Q = 3P an einer über die Rolle E geführten Schnur aufwärts, so ist alles im Gleichgewicht. (31 §.) Statt des Gewichts Q bringe man in A eine Widerlage an, die es hindert, daß A nicht steigen kann, so ist das dreyfache Gewicht R = 3P in der einfachen Entfernung CA mit dem einfachen Gewicht P in der dreyfachen Entfernung AB im Gleichgewicht. Wenn also CB = 3CA und Q = 3P genommen wird, so folgt wie vorhin, daß R = 4P in der Entfernung CA mit P in der Entfernung AB = 4CA im Gleichgewicht sey. Der Schluß gilt immer weiter für die nächstfolgende um Eins grössere Zahl.

Der 3. Lehrsatz.

33. **Wenn das Verhältniß zweyer Gewichte am Hebel in umgekehrter Ordnung einerley ist, mit dem Verhältniß der Entfernungen vom Ruhepunct; so sind sie im Gleichgewicht.**

Beweis. Wenn der Exponent dieser gleichen Verhältnisse eine ganze Zahl ist; so erhellet die Rich-
102 tigkeit des Satzes aus dem 32 §. Wäre $P = \frac{3}{4}Q$,
Fig. also $4P = 3Q$, und $AC = \frac{3}{4}AB$, mithin $\frac{1}{3}AC = \frac{1}{4}AB$; so nehme man $AD = \frac{1}{4}AB$, $AE = \frac{1}{3}AC$,

also

also AD = AE. In D hänge man ein Gewicht S = 3Q, in E ein Gewicht R = 4P; so ist R mit P, und S mit Q im Gleichgewicht, (32 §.) mithin bleibt der Hebel in Ruhe. Aber R und S sind für sich im Gleichgewicht, (29 §.) demnach müssen auch P und Q im Gleichgewicht seyn. Der Beweis findet allemahl seine Anwendung, was man auch sonst für Brüche statt $\frac{3}{4}$ setzen will.

Der 1. Zusatz.

34. Wenn in C ein Gewicht q aufgehängt wird, das gröſſer oder kleiner ist als $\frac{AB}{AC}P$, so kann es mit P nicht im Gleichgewicht seyn. Man nehme AF = AC, und hänge in F das Gewicht $p = q$, so sind p und q im Gleichgewicht. Ferner ist $Q = \frac{AB}{AC}P$ in C mit P in B im Gleichgewicht. Wenn nun q mit P das Gleichgewicht hielte, so wäre auch p mit Q im Gleichgewicht, dem 29 §. entgegen.

Der 2. Zusatz.

35. Wenn Kraft und Last am Hebel im Gleichgewicht sind, so ist ihr Verhältniß gegeneinander in umgekehrter Ordnung gleich dem Verhältniß der Entfernungen vom Ruhepunct.

Der 3. Zusatz.

36. Wenn sich der Hebel um A drehet, und das Gewicht P in der lothrechten Richtung um die Tiefe BD sinkt; so steigt zugleich Q um die Höhe EC. Weil nun ABD und ACE ähnliche Drevecke sind, so ist BD : CE = AB : AC, und AB : AC = Q : P, wenn P mit Q im Gleichgewicht ist: (35 §.) mithin Q : P = BD : CE, oder es verhält sich die Last 103 Fig.

zur erhaltenden Kraft umgekehrt, wie der Weg der Kraft zum Wege der Last, wenn diejenigen Wege verstanden werden, welche Kraft und Last nach gehobenen Gleichgewicht jede in ihrer Richtung in gleicher Zeit zurück legen würden.

Die 15. Erklärung.

37. Das Moment, oder wie es die practischen Schriftsteller nennen, die Abwage einer Kraft am Hebel ist das Product, welches gefunden wird, wenn man die Kraft mit ihrer Entfernung vom Ruhepunct multiplicirt. In eben dem Sinne braucht man den Ausdruck: Moment der Last.

Zusatz.

38. Kraft und Last erhalten einander am Hebel im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich sind, oder wenn sie gleiche Abwage haben.

Der 4. Lehrsatz.

103 39. Wenn Kraft und Last am Hebel *BC* Fig. gleiche Abwage haben, so bleibt derselbe auch in jeder gegen den Horizont geneigten Lage in Ruhe.

Beweis. Wenn A so gehalten wird, daß sich der Hebel zwar um diesen Punct frey drehen, sonst aber nicht weichen kann; wenn ferner BP, CQ, die lothrechten Richtungen der Gewichte vorstellen; so sind BP, CQ parallel, und in der Ebene dieser Parallellinien liegt auch BC. In derselben Ebene sey DE wagrecht, so sind AD, AE, die Entfernungen der Gewichte P und Q, und man hat vermöge der Voraussetzung $AD \cdot P = AE \cdot Q$, also $P : Q = AE : AD$. Man stelle sich DE als einen andern Hebel vor, der mit dem vorigen BC bey A fest verbunden ist, jedoch so, daß die Umdrehungsbewegung um A frey

frey bleibt. An D ziehe ein Gewicht R = P, an E ein Gewicht S = Q aufwärts; so ist auch R : S = AE : AD, und die Gewichte R und S sind im Gleichgewicht. Ueberdem stellen nun DAB, CAE ein Paar Winkelhebel vor, woran Q und S, so wie P und R für sich im Gleichgewicht sind, wie für sich klar ist: also erhalten alle vier Kräfte den Hebel in Ruhe. Weil aber auch R und S für sich allein im Gleichgewicht sind, so folgt, daß P und Q den Hebel ebenfalls in Ruhe erhalten.

Die 16. Erklärung.

40. Der Punct im gradlinichten Hebel, welcher unterstützt werden muß, wenn der mit Gewichten beschwerte Hebel ruhen soll, heißt der gemeinschaftliche Schwerpunct der Gewichte. Dieser Punct allein leidet alsdenn einen Druck, welcher der Summe der Gewichte am Hebel gleich ist.

Die 2. Aufgabe.

41. Die Länge *BC* des Hebels ist gegeben, und die Grösse der in *B* und *C* hängenden Gewichte *P*, *Q*, man soll den gemeinschaftlichen Schwerpunct *A* finden. 102 Fig.

Aufl. Es wird erfordert, daß P : Q = AC : AB sey, also P + Q : Q = AC + AB : AB, und P + Q : P = AC + AB : AC. (173. 175 §. Geom.) Es ist aber AC + AB die gegebene Länge des Hebels AB; also kann man BA oder CA nach der Regel detri finden; man erhält $BA = \frac{BC \cdot Q}{P+Q}$, und $CA = \frac{CB \cdot P}{P+Q}$.

Zusatz.

42. Wenn ein fester Körper MN nur zwey schwere Elementartheilchen P, Q, hätte, so würde es 104 Fig.

in der graden Linie PQ für beyde einen gemeinschaftlichen Schwerpunct A geben, und es wäre soviel, als wenn A allein ein schweres Element wäre, und das Gewicht P + Q hätte. Kommt noch ein schweres Element R hinzu, so hat es mit dem Gewicht P+Q einen gemeinschaftlichen Schwerpunct in B, und es ist soviel, als wenn B allein das Gewicht P + Q + R hätte. Es sey noch das vierte Element S schwer, es mag mit dem vorigen dreyen in einerley Ebene liegen, oder nicht; so hat das in B befindliche Gewicht P + Q + R, mit dem Gewicht S einen gemeinschaftlichen Schwerpunct in C, und es ist so viel, als wenn der Punct C allein das Gewicht P+Q + R + S hätte. So gilt der Schluß von jeder Anzahl schwerer Elemente des Körpers auf die um Eins grössere Anzahl.

Die 17. Erklärung.

43. Man nennt den **Schwerpunct eines festen Körpers** denjenigen Punct, welcher unterstützt werden muß, wenn der Körper in jeder Lage ruhen soll, und der alsdenn zugleich dem Druck vom ganzen Gewicht des Körpers ausgesetzt ist.

Zusatz.

44. Jeder feste Körper hat einen Schwerpunct: denn es ist der gemeinschaftliche Schwerpunct aller seiner Elementartheile. (42 §.) Der feste Körper kann ruhend erhalten werden, wenn auch nur ein Punct unterstützt ist, der in der Verticallinie durch den Schwerpunct liegt. Wofern derselbe oberhalb des Schwerpuncts liegt, so wird der Körper hangend erhalten. Ist dagegen der Körper unterhalb seines Schwerpuncts unterstützt, so ist sein Stand desto sicherer,

sicherer, je grösser die Grundfläche ist, womit er an das, was ihn unterstützt, anschließt.

Die 18. Erklärung.

45. Eine Ebene, die den Körper durch seinen Schwerpunct schneidet, heißt eine **Ebene der Schwere**, und eine grade Linie durch des Körpers Schwerpunct ein **Durchmesser der Schwere**.

Der 1. Zusatz.

46. Wenn die Masse eines Körpers durch seinen ganzen Raum gleichförmig vertheilt ist; so haben gleich grosse Theilchen desselben auch gleiches Gewicht. Eine Ebene, die einen solchen Körper schneidet, ist eine Ebene der Schwere, wenn nicht allein die ganze Masse des Körpers, mithin der Raum, welchen seine Masse einnimmt, dadurch halbirt wird, sondern auch mit jedem Theilchen auf der einen Seite dieser Ebene ein eben so grosses Theilchen auf der andern Seite in gleicher Entfernung zusammen gehört. Der Punct, worin drey Ebenen der Schwere einander schneiden, ist des Körpers Schwerpunct.

Der 2. Zusatz.

47. Der Schwerpunct einer gleichförmig dichten Kugel ist mit ihrem Mittelpunct einerley, der Schwerpunct eines solchen Cylinders liegt in der Mitte seiner Axe.

Der 3. Zusatz.

48. Eigentlich giebt es keine schwere Ebenen oder schwere grade Linien in der Natur. Wenn aber die Masse einer graden cylindrischen oder prismatischen Stange nach ihrer Länge gleichförmig vertheilt ist, so kann man sie als eine grade Linie betrachten, deren Schwerpunct in ihrer Mitte liegt

Der 4. Zusatz.

49. Sehr dünne Metallblätter und andre sehr dünne Körper die zwar eigentlich in die Klasse der Prismen oder Cylinder gehören würden, aber sehr kleine Höhen haben, kann man als schwere Ebenen von gleichförmiger Dichtigkeit ansehen, wenn ihre Masse der Grundfläche proportional ist. In einem solchen Sinn kann man auch vom Schwerpunct ebener Figuren reden. In dem Sinne kann man sagen, daß des Kreises Schwerpunct in seinem Mittelpunct liegt.

Anmerkung.

Mehrere Lehren vom Schwerpunct findet man im 2ten Theil der Anfangsgründe im 71 u. f. §. §. der Statik. Auch in des Lehrbegr. d. ges. Mathem. 3 Th. 4 Abschn.

Die 3. Aufgabe.

100 Fig. 50. Die schwere cylindrische oder prismatische Stange BC soll als Hebel dienen, ihr Gewicht M die Stelle des Schwerpuncts G, und die Länge der Stange sind bekannt: man soll die Last Q finden, die in C aufgehängt mit der Kraft P in B das Gleichgewicht hält.

Aufl. Man kann BC als einen mathematischen Hebel betrachten, woran ausser der Kraft P in B und der Last Q in C noch ein drittes Gewicht M in G hängt, welches schon mit einem Theil der Last Q das Gleichgewicht hält. Man setze diesen Theil $= m$, den übrigen $= q$, welcher mit P im Gleichgewicht ist; so erhält man $m = \frac{AG}{AC} . M$, und $q = \frac{AB}{AC} P$, also $Q = m + q = \frac{AG . M + AB . P}{AC}$.

Der

Der 1. Zusatz.

51. Dieser Ausdruck giebt $AC \cdot Q = AG \cdot M + AB \cdot P$, oder die Summe der Momente muß an der einen Seite der Unterlage A so groß als an der andern Seite seyn. Wäre also die Last Q gegeben, und man sollte die Kraft P suchen; so fände man $AB \cdot P = AC \cdot Q - AG \cdot M$, mithin $P = \frac{AC \cdot Q - AG \cdot M}{AB}$.

Der 2. Zusatz.

52. Wenn Kraft und Last nebst den übrigen Stücken gegeben sind, und man soll die Stelle der Unterlage A suchen; so erhält man zuerst den Schwerpunct D für beyde Gewichte P und M nach dem 41 §. Es ist nemlich $GD = \frac{GB \cdot P}{P+M}$; ferner ist $CD = CG + GD$, also $CD = CG + \frac{GB \cdot P}{P+M}$: daraus folgt $CD \cdot (P+M) = CG \cdot (P+M) + GB \cdot P$. Weiter ist $CG + GB = CB$, also auch $CD \cdot (P+M) = CB \cdot P + CG \cdot M$. Aber $CA = \frac{CD \cdot (P+M)}{P+M+Q}$, (41 §.) also auch $CA = \frac{CB \cdot P + CG \cdot M}{P+M+Q}$.

Die 19. Erklärung.

53. Eine Wage nennt man ein Werkzeug, das dazu dient, das Gewicht eines Körpers vermittelst eines Gegengewichts zu erfahren. Am bequemsten wird ein Wagebalken, der die Natur eines Hebels hat, mit gleichen oder ungleichen Armen gebraucht, da dann die Wage im letzten Fall eine Schnellwage heißt.

Der

Der 1. Zusatz.

105 Fig. 54. Der Wagebalken AB ist ein gleicharmiger Hebel, wenn man haben will, daß im Zustande des Gleichgewichts Gewicht und Gegengewicht gleich groß seyn sollen. In A und B sind die Stellen, woran die Schalen mit ihren Schnüren oder Ketten aufgehängt werden, die gleich schwer seyn müssen, wenn der Schwerpunct G in der Mitte zwischen A und B bleiben soll. In der graden Linie GL, die auf AB senkrecht ist, werden die Zapfen angebracht, die sich unten in einer Schärfe nach Art eines Keils endigen, damit sich der Balken um diese Schärfe als seine Axe drehen könne, wenn die Zapfen in den Pfannen liegen. Bey dieser Einrichtung, wenn der Schwerpunct G etwas niedriger als die unterstützte Stelle C liegt, kann der Wagebalken sowohl für sich allein, als auch wenn die Schalen daran hängen, und gleiche Gewichte darin liegen, nur alsdenn ruhen, wenn CG vertical, also AB horizontal ist, und diese Lage anzuzeigen, dient die auf AB senkrechte Zunge KL.

Der 2. Zusatz.

55. Wenn an B ein Gewicht hängt, das etwas schwerer ist, als das Gegengewicht in A, so fällt der Schwerpunct in D weiter nach B hin. Nun muß der Arm GB sinken, und der Balken kann nur ruhen, wenn CD vertical, und AB gegen die Verticallinie unter dem Winkel CDG geneigt ist. Demnach giebt der Wagebalken von einerley Gegengewicht einen desto stärkern Ausschlag, je kleiner die Entfernung CG zwischen dem Schwerpunct und der untern Schärfe der Zapfen ist.

Der

Der 3. Zusatz.

56. Die Schnellwage wird in der Hauptsache eben so eingerichtet, nur daß es am bequemsten ist, wenn der kurze Arm für sich mit dem langen im Gleichgewicht, oder auf dem langen Arm äquirt ist. Ueberdem bedarf es nur einer Schale mit Schnüren am kurzen Arm, am langen Arm aber muß das Gegengewicht verschoben werden können. Die Eintheilungen am langen Arm werden entweder den Gründen der Theorie gemäß, (33 §.) oder welches eben so gut und für die Richtigkeit der Ausübung noch sicherer ist, durch Versuche gefunden.

Der 4. Grundsatz.

57. Wenn die Richtungen zwoer gleichen Kräfte die den Winkelhebel auf entgegengesetzte Art zu drehen streben, auf den Armen desselben senkrecht, und ihre Entfernungen vom Ruhepunct gleich groß sind; so erhalten sie einander im Gleichgewicht. 106 Fig.

Der 5. Lehrsatz.

58. Kräfte P, Q, deren Richtungen BP, CE, auf den Armen AB, AC, des Winkelhebels BAC senkrecht sind, erhalten einander im Gleichgewicht, wenn ihr Verhältniß gegeneinander in umgekehrter Ordnung dem Verhältniß der Hebelsarme gleich ist. 107 Fig.

Beweis. Man verlängere BA nach D, nehme AD = AC, und lasse an D die Kräfte R und S, wovon jede = Q ist, nach entgegengesetzten auf AD senkrechten Richtungen ziehen. Ist alsdenn P : Q = AC : AB, so hat man auch P : R = AD : AB, und P ist mit R im Gleichgewicht. (33 §.) Aber auch S ist mit Q im Gleichgewicht, (57 §.) also ruhet der Hebel. Weil nun R und S für sich im Gleich-

Gleichgewicht sind; so erhalten auch P und Q einander im Gleichgewicht.

Zusatz.

108 Fig. 59. Wenn auch die Richtungen Pp, Qq, zweier Kräfte am Winkelhebel PAQ mit den Armen desselben schiefe Winkel machen, so erhalten sie dennoch einander im Gleichgewicht, wenn nur ihr Verhältniß gegeneinander dem Verhältniß der Entfernungen ihrer Richtungslinien vom Ruhepunct in umgekehrter Ordnung gleich ist. Man ziehe AB und AC auf Pp und Qq senkrecht, und bringe nach den Richtungen Bb und Cc die Kräfte $R = P$, $S = Q$, an, so sind P und R, so wie Q und S im Gleichgewicht. Ferner ist vermöge der Voraussetzung $P : Q = AC : AB$, also auch $R : S = AD : AB$, und R ist mit S im Gleichgewicht: folglich auch P mit Q.

Die 20. Erklärung.

109 Fig. 60. Wenn eine cylindrische Axe KL senkrecht durch die Mitte einer Scheibe DGHI geht, und an derselben so befestiget ist, daß die Axe, wenn sie gehörig unterstützt ist, sich mit der Scheibe zugleich drehen muß; so heißt das Hebezeug ein **Rad an der Axe**, und die cylindrische Axe nennt man die zum Rade gehörige **Welle**. Letztere ist gewöhnlich an beyden Enden A und B mit runden Zapfen versehen, die auf gehörig eingeschnittenen oder gebohrten Zapfenlagern ruhen. Wenn die Welle mit einer Ebene auf ihrer geometrischen Axe AB senkrecht geschnitten wird; so heißt der Halbmesser EF des kreisförmigen Schnitts Kürze halber der **Halbmesser der Welle**.

Zusatz.

61. Wenn an der Welle ein Seil befestiget ist, das sich auf dieselbe aufwickeln muß, wenn das Rad um-

umläuft; so läßt sich vermittelst des Rades eine am Seil hängende Last Q herauf ziehen, wenn eine am Umfang des Rades angebrachte Kraft P dasselbe umdrehet.

Die 21. Erklärung.

62. Man kann alle Arten der sogenannten Haspel und Winden als Räder an der Welle ansehen, wenn mit der Welle nur etliche Arme, wie CD, CG, CH, CI, verbunden sind, die von Menschen umgetrieben werden können. Die Welle kann wagrecht liegen, wie beym Kreuzhaspel, oder lothrecht stehen, wie bey der Erdwinde, und dem Göpel. Ein Radhaspel ist ein wirkliches Rad, das am Umfange Zapfen hat, welche Menschen angreifen können. Auch hat die Kurbel DEF (118 Fig.) die Natur des Rades, wenn mit der Welle AB ein grader oder krummer Arm DE so verbunden ist, daß an EF ein Mensch mit der Hand angreifen, und so die Welle drehen kann.

Der 6. Lehrsatz.

63. Wenn die Richtungslinie der Kraft P den Umfang des Rades, und die Richtung der Last den Umfang eines auf der Welle senkrechten kreisförmigen Schnitts berührt; so erhalten Kraft und Last einander im Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades. 109 Fig.

Beweis. Man lasse an F eine Kraft R = Q ziehen, und die Richtung FR sey der Richtung FQ grade entgegengesetzt. Wenn ferner der Halbmesser CD den Umfang der Welle in M schneidet, so sey auch an M eine Kraft S = Q auf CM senkrecht, und

der

der Kraft P entgegengesetzt angebracht. Alsdenn ist für sich klar, daß R und S im Gleichgewicht sind. Weiter hat man vermöge der Voraussetzung $P : Q = EF : CD$, also auch $P : S = CM : CD$, mithin sind P und S im Gleichgewicht. (33 §.) Ueberdem sind Q und R im Gleichgewicht, so daß das Rad ruhen muß. Weil aber R und S für sich einander im Gleichgewicht erhalten, so muß auch P mit Q im Gleichgewicht seyn.

Zusatz.

64. Wenn vom Umfange des Rades an einer Schnur ein Gewicht P herabhienge, so würde bey einem Umlauf des Rades, das Gewicht P als Kraft betrachtet, um eine Tiefe sinken, die der Peripherie des Rades gleich wäre, und das Gewicht Q würde zugleich um eine Höhe steigen, so groß als die Peripherie der Welle. Also verhält sich der **Weg der Kraft zum Wege der Last** wie des Rades Halbmesser zum Halbmesser der Welle, (199 §. Geom.) mithin auch bey diesem Hebezeuge **wie die Last zur erhaltenden Kraft.**

Die 22. Erklärung.

65. Ein Rad kann ein andres mit umdrehen, wenn jenes auf seinem Umfange Erhöhungen hat, die in Vertiefungen auf des andern Umfang eingreifen. Dergleichen Erhöhungen heissen **Zähne**, wenn sie in der Ebene des Rades, welches nun ein **Sternrad** heißt, nach den Richtungen der Halbmesser am äussern Umfange aufgesetzt sind. Dagegen nennt man sie **Kämme**, und das Rad selbst ein **Kammrad** oder **Kronrad**, wenn sie auf des Rades Ebene senkrecht sind.

Die

Die 23. Erklärung.

66. Von zweyen Rädern, davon eins ins andre eingreift, ist gewöhnlich das eine in Vergleichung mit dem andern nur klein, und man nennt es ein Getriebe. In dem Fall insbesondre wird es ein Trilling genannt, wenn es aus zwoen parallelen Scheiben bestehet, die vermittelst mehrerer am Umfange mit der Axe parallel eingesetzter Stäbe zusammen gefüget sind. Die Stäbe dienen statt der Zähne. Wenn in der Welle nur Vertiefungen eingeschnitten sind, die statt des Getriebes dienen, so heißt es ein Kumpf.

Die 24. Erklärung.

67. Räder, welche durch eine um ihre Peripherie geführte Schnur, die in solcher Absicht eine Vertiefung haben muß, einander in Bewegung setzen, heissen Seilräder. Beyde Enden der Schnur müssen alsdenn gehörig zusammen gefüget seyn, da sie dann eine Schnur ohne Ende heißt.

Der 7. Lehrsatz.

68. Die Kraft am Umfange des ersten Rades, wenn mehrere in einander greifen, verhält sich zur Last an der letzten Welle, wie das Product der Halbmesser aller Getriebe, die Welle, woran die Last hängt, statt des letzten Getriebes verstanden, zum Product der Halbmesser aller Räder.

Beweis. Es sey a des Rades ABC, und α des Getriebes DHI Halbmesser; so drückt der Triebstecken D gegen den Zahn E, wenn an B die Last P hängt. Setzt man diesen Druck $= K$, so ist $K = \frac{a}{\alpha} P$. (63 §.) Dieser Druck K ist als eine 110 Fig.

Kraft anzusehen, die das folgende Rad EFG zu drehen strebt. Wenn an desselben Welle LMN die Last Q hängt, und des Rades Halbmesser $= b$, der Welle Halbmesser $= \beta$ ist; so wird im Fall des Gleichgewichts erfordert, daß $Q = \frac{b}{\beta} K$ sey, also $Q = \frac{b}{\beta} . \frac{a}{\alpha} . P$, oder $P : Q = \alpha . \beta : a . b$. Wenn aber die Welle LMN noch ein Getriebe hat, so drückt der Triebstecken R gegen den Zahn S mit der Gewalt $\frac{b}{\beta} . K$, und an der Welle VW, wenn ihr Halbmesser $= \gamma$, des Rades Halbmesser $= c$ ist, hält eine Last $R = \frac{c}{\gamma} . \frac{b}{\beta} K$ damit daß Gleichgewicht, oder $R = \frac{c . b . a}{\gamma . \beta . \alpha} P$. So gilt der Schluß von jeder Zahl von Rädern auf die folgende um Eins grössere Anzahl.

Die 25. Erklärung.

69. Man kann zwey oder mehr Rollen vermittelst zweener Kloben, worin die Rollen umlaufen, so zusammen ordnen, wie es die 111 Figur vorstellet. Der obere Kloben hängt vermittelst eines Hakens an einer zulänglich festen Unterstützung, unten bey A ist ein neuer Haken, woran ein Seil befestiget und wechselsweise um eine untere und obere Rolle geführt ist, bis es zuletzt von I nach K herab hängt. Eine solche Zusammenordnung mehrer obern und untern Rollen nennt man einen Flaschenzug.

Zusatz.

Zusatz.

70. Die Seile müssen sich nicht aneinander reiben, darum sucht man alles so einzurichten, daß sie nur wenig von der parallelen Lage abweichen, wenn sie durch die unten anhängende Last Q gespannt sind.

Der 8. Lehrsatz.

71. Wenn alle Seile am Flaschenzuge parallel hängen, und vollkommen biegsam sind; so ist die Kraft in der Last, der sie das Gleichgewicht hält, sovielmahl enthalten, als Eins in der Zahl aller Seile, woran der untere Kloben mit der Last hängt.

Beweis. Im Zustande des Gleichgewichts müssen alle Seile gleich stark gespannt seyn: mithin trägt jedes Seil, wofern sie parallel hängen, soviel von der Last, als jedes der übrigen. Demnach wird dieser Theil der Last gefunden: wenn man die Last mit der Zahl der Seile dividirt, woran der untere Kloben hängt: und dieser Theil der Last wird von der Kraft P im Gleichgewicht erhalten.

Zusatz.

72. Wenn die Kraft P sinkt, und die Last Q gehoben wird, so verkürzen sich alle Seile, woran der untere Kloben mit der Last hängt, und das Seil wird länger, woran die Kraft P hängt. Steigt die Last um einen Fuß höher, so sinkt die Kraft um soviele Füsse als Seile vorhanden sind, woran die Last hängt. Demnach verhält sich auch beym Flaschenzuge die Last zur erhaltenden Kraft umgekehrt, wie der Weg der Kraft zum Wege der Last.

Der 9. Lehrsatz.

73. Wenn eine grade Linie *AB* um den sonst festen Punkt *B* wie ein Hebel beweglich 112 Fig.

ist, an einem andern Punct *A* aber die Kräfte *P* und Q in den Richtungen *AP*, *AQ*, in einerley Ebene mit *AB* so angebracht sind; daß die Sinus der Winkel *BAP*, *BAQ*, sich in umgekehrter Ordnung wie die Kräfte verhalten; so bleiben die Kräfte im Gleichgewicht.

Beweis. Man ziehe BE und BF auf AP, AQ senkrecht, stelle sich EBF als einen mit BA fest verbundenen Winkelhebel vor, nehme auch überdem an, daß an E eine Kraft R = P in der Richtung E*p*, an F aber eine Kraft S = Q in der Richtung F*q* entgegen drücke; so sind alle vier Kräfte im Gleichgewicht. Ferner sind BE, BF, die Sinus der Winkel BAP, BAQ, für den Halbmesser AB: mithin ist vermöge der Voraussetzung P : Q = BF : BE, also auch R : S = BF : BE und die Kräfte R, S, sind im Gleichgewicht: (58 §.) also müssen auch P und Q im Gleichgewicht seyn.

Die 26. Erklärung.

74. Der Punct B leidet von der vereinigten Gewalt beyder Kräfte P und Q einen Druck in der Richtung BG, wenn man AB nach G verlängert. Beyde Kräfte zusammen drücken also auch den Punct A in der Richtung AB, welche man die mittlere Richtung der Kräfte P und Q nennt. Eine Kraft, welche den Punct A nach der mittlern Richtung AB so stark drückt, als er von beyden Kräften P und Q zusammen nach dieser Richtung gedrückt wird, nennt man die mittlere Kraft, und von derselben unterscheidet man die Kräfte P und Q durch den Nahmen der Seitenkräfte.

Der 10. Lehrsatz.

113 Fig. 75. Wenn man aus dem Winkel *PAQ*, den die Richtungen *AP*, *AQ*, der Seitenkräfte *P*, Q, einschliessen, ein Parallelogramm *ACBD* so

so verzeichnet, daß die Seitenlinien *AC*, *AD*, sich wie die nach diesen Richtungen drückenden Seitenkräfte verhalten; so ist die Diagonallinie *AB* die mittlere Richtung: auch gilt der Schluß umgekehrt. Wenn die Diagonallinie eines Parallelogramms, die mittlere Richtung zweyer Kräfte ist, die nach den Seitenlinien wirken; so verhalten sich diese wie die Seiten des Parallelogramms: die mittlere Kraft selbst aber verhält sich zu jeder von den Seitenkräften *P*, oder Q, wie die Diagonallinie *AB* zu der Seitenlinie, welche zugleich der Kraft *P* oder Q Richtung vorstellt.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist P : Q = AC : AD, also auch P : Q = AC : BC, weil AD = BC. Im Dreyeck ABC aber ist AC : BC = sin ABC : sin BAC (41 §. Trigon.) und ABC = BAD (107 §. Geom.) also AC : AD = sin BAD : sin BAC, mithin auch P : Q = sin BAD : sin BAC. Demnach ist AB die mittlere Richtung. (74 §.) Man verlängere AB nach E, und setze es sey an A in der Richtung AE eine Kraft R angebracht, die der mittlern Kraft gleich ist; so sind P, Q, R, im Gleichgewicht. Alsdenn sind Q und R ein Paar Seitenkräfte und AF ist ihre mittlere Richtung, wenn AD : AE = Q : R genommen, und das Parallelogramm AEFD verzeichnet wird. Weil nun die Lage der Seitenlinien und der Diagonallinie dieses Parallelogramms gegeben ist, so ziehe man DF # AE, und FE # AD, alsdenn ist auch CAD + FAD = 2R. Demnach muß AF mit AC in grader Linie liegen, und daraus folgt, daß EAF = BAC sey. Ferner ist EF mit BC parallel, weil beyde mit AD parallel sind, also

der Winkel AFE = ACB, so wie AEF = ABC. Ueberdem ist EF = BC, weil beyde so groß als AD sind, also haben die Dreyecke AFE, ABC auch gleiche Seiten, und es ist AE = AB. Vermöge der Voraussetzung war AD : AE = Q : R, also ist AD : AB = Q : R. Ueberdem ist AC : AD = P : Q, also auch AC : AB = P : R. (174 §. Geom.)

Die 27. Erklärung.

76. Bey Anwendung dieser Lehren ist die Redensart gewöhnlich, die mittlere Kraft R sey aus den Seitenkräften zusammengesetzt, und man siehet leicht, daß die Meinung nicht seyn könne, die mittlere Kraft sey die Summe der Seitenkräfte. Wenn umgekehrt statt der mittlern Kraft die Seitenkräfte gesucht werden, so drückt man das so aus: man solle die mittlere Kraft in die Seitenkräfte zerlegen.

Die 2. Erfahrung.

77. Die Oberflächen der festen Körper sind nie so vollkommen glatt, daß sich auf denselben nicht eine grosse Menge kleiner Erhöhungen und Vertiefungen finden sollte, ob man gleich den Oberflächen recht harter Körper, dergleichen Steine, Glas, einige Metalle und Holzarten sind, durch Abschleifen und mancherley Arten von Politur eine ziemliche Glätte zuwege bringen kann. Wenn nun ein Körper an der Fläche eines andern fort geschoben, und zugleich gegen dieselbe gedrückt wird; so greifen die kleinen Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern, und einer kann sich alsdenn am andern nicht fortbewegen, ohne daß die Theile des einen, welche dem andern im Wege sind, niedergebeuget, oder wohl gar von den übrigen abgerissen werden.

Die

Die 28. Erklärung.

78. Der Widerstand, welcher die Bewegung eines Körpers hindert, wenn er an der Oberfläche eines andern fortgeführt, und zugleich gegen dieselbe gedrückt wird, heißt das Reiben, oder die Friction.

Zusatz.

79. Wenn ein schwerer Körper auf einer wagrechten Ebene ruhig liegt, so trägt diese das ganze Gewicht des Körpers. Derselbe müste also von jeder auch nur geringen Kraft nach horizontaler Richtung in Bewegung gesetzt werden, wenn die Friction kein Hinderniß machte. Hat der Körper eine ebene Grundfläche, womit er an die Ebene anschließt, welche ihn unterstützte; so ist die Friction sehr beträchtlich. Der daher rührende Widerstand der Bewegung kann so viel betragen, als wenn eine Kraft die Bewegung zu hindern strebte, die dem vierten ja wohl dem dritten Theil vom Gewicht des auf der wagrechten Ebene liegenden Körpers gleich ist.

Der 11. Lehrsatz.

80. Auf einer gegen dem Horizont geneigten Ebene *ABDI* kann ein schwerer Körper Q nicht ruhig liegen, es wäre denn, daß die Friction seine Bewegung hinderte. 114 Fig.

Beweis. Es sey CBDR eine horizontale Ebene, welche die geneigte Ebene in BD schneidet. Ferner sey G des Körpers Schwerpunct, und GH auf dem Horizont, GK auf der schiefen Ebene senkrecht; so ist die Ebene des Winkels HGK auf beyden Ebenen ABDI, CBDR senkrecht. (267 §. Geom.) Wenn also AB und BC ihre Durchschnitte mit den erwehnten Ebenen sind, so ist ABC der schiefen Ebene Neigungswinkel gegen den Horizont. Man ziehe HE mit GK, HF und GE mit AB parallel; so läßt sich

der Druck des Gewichts Q nach der lothrechten Richtung GH in zwo andre Kräfte nach den Richtungen GF und GE zerlegen. (75 §.) Der Druck nach der Richtung GF ist auf der Ebene ABDI senkrecht, und wird von ihr völlig aufgehalten: aber dem Druck nach der Richtung GE ist nichts im Wege. Demnach muß der Körper längst der Ebene herabsinken, wenn es nicht vielleicht die Friction hindert.

Die 29. Erklärung.

81. Die Kraft, welche den Körper längst der schiefen Ebene herabzusinken nöthiget, nennt man das relative oder respective Gewicht des Körpers, und unterscheidet es von seinem absoluten Gewicht, dessen Richtung lothrecht ist.

Der 1. Zusatz.

82. Die Richtung GE des relativen Gewichts ist mit der schiefen Ebene parallel, (254 §. Geom.) und liegt zugleich in der Ebene des Neigungswinkels der schiefen Ebene gegen den Horizont. Wenn AC in dieser Neigungsebene auf BC senkrecht gesetzt wird, so sind die Dreyecke ABC, EHG einander ähnlich. Denn bey C und E sind rechte Winkel, auch ist EGH = BAC, weil GE mit AB, GH mit AC parallel ist. (265 §. G.) Demnach ist ferner GE : GH = AC : AB, und eben so verhält sich das relative Gewicht des Körpers auf der schiefen Ebene zu seinem absoluten Gewicht.

Der 2. Zusatz.

83. Wenn man Kürze halber AB die Länge, AC die Höhe, BC die Grundlinie der schiefen Ebene nennt; so verhält sich das relative Gewicht des Körpers, zu seinem absoluten Gewicht, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Eine Kraft P, die den Körper als Last betrachtet auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhal-

erhalten soll, muß dem relativen Gewicht desselben gleich seyn, wenn ihre Richtung mit der schiefen Ebene parallel, und unter eben dem Winkel gegen den Horizont geneigt seyn soll.

Der 3. Zusatz.

84. An der Last Q sey eine mit AB parallel laufende Schnur befestiget, die bey M über eine Rolle geführt ist; und daran hänge das Gewicht P als Kraft betrachtet; so muß P um eine lothrechte Tiefe sinken, die der Länge AB der Ebene gleich ist, wenn die Last Q in ihrer lothrechten Richtung um die Höhe AC steigen soll. Für das Gleichgewicht wird erfodert, daß sich Q : P = AB : AC verhalte, also wiederum die Last zur Kraft, wie der Weg der Kraft zum Wege der Last.

Der 4. Zusatz.

85. Eine Kraft, deren Richtung GN in der Neigungsebene ABC liegt, und mit der Grundlinie BC parallel ist, kann die Last auf der schiefen Ebene ebenfalls im Gleichgewicht erhalten. Man ziehe LN auf GN senkrecht, so läßt sich der senkrechte Druck gegen die schiefe Ebene in der Richtung GK aus zwoen andern Pressungen in den Richtungen GH und GN zusammensetzen. Alsdenn wird erfodert, daß sich die Last in der Richtung GH zur erhaltenden Kraft in der Richtung GN verhalte, wie GH : GN, oder wie GH : HL. Es ist aber HGL = FHL (183 §. Geom.) = ABC, und GHL = 90° = ACB: also sind die Dreyecke ABC, GHL einander ähnlich, und man erhält GH : HL = BC : AC. Demnach verhält sich die Last zur erhaltenden Kraft in der mit der Grundlinie parallelen Richtung, wie die Grundlinie der Ebene zu ihrer Höhe.

Die 30. Erklärung.

115 Fig. 86. Der Keil ist ein grades dreyseitiges Prisma DEFGHI, woran zwo Seitenflächen DFGH, EFGI, einen sehr spitzen Winkel mit einander einschliessen, um vermittelst desselben durch Schläge oder einen starken Druck auf die dritte Seite EH, welche der Rücken des Keils heißt, die Theile eines andern Körpers von einander zu treiben. Wenn die Grundfläche DEF, GHI, des Prisma, also auch alle damit parallele Schnitte, gleichschenklichte Dreyecke sind; so heißt auch der Keil gleichschenklicht. In der 116 Figur stellet das Dreyeck ABC einen Schnitt durch den Schwerpunct des gleichschenklichten Keils vor, der mit den Grundflächen parallel ist. Man nennt alsdenn Kürze halber AB den Rücken, AC oder BC die Seitenlinie des Keils, und DC seine Länge.

Zusatz.

116 Fig. 87. Wenn EHIF einen schon zum Theil zerspaltenen Körper vorstellet, worin der Keil bis an EF so steckt, daß die Mittellinie DC vertical, und der Rücken AB horizontal ist; so kann man sich auf dem Rücken ein Gewicht P vorstellen, welches den Keil weiter zu treiben strebt. Der zerspaltene Körper drücke an den Stellen E und F entgegen, und die grade Linie EF sey mit AB parallel. Ferner ziehe man durch E und F ein paar auf den Seitenlinien des Keils senkrechte grade Linien, so werden sich diese in einerley Punct K der Linie DC schneiden: der Druck P in der senkrechten Richtung DC aber zerlegt sich in zwo andre Pressungen nach den Richtungen KE und KF, die auf den Seitenflächen des Keils senkrecht und bey den hier angenommenen Voraussetzungen gleich groß sind. Wofern man überdem voraussetzen kann, daß die Rich-

Richtung des Widerstandes bey E sowohl als bey F auf der Seite des Keils senkrecht, auch der Widerstand selbst auf beyden Seiten von gleicher Grösse sey; so muß im Fall des Gleichgewichts jede von den Seitenkräften nach KE oder KF dem entgegen drückenden Widerstande gleich seyn.

Der 12. Lehrsatz.

88. In solchen Fällen, wenn die im vor. §. angenommenen Voraussetzungen statt finden, verhält sich die Kraft, welche den Keil in dem zerspaltenen Körper weiter zu treiben strebt, zum Widerstande an jeder Seite, wie der Rücken des Keils zur Seitenlinie.

Beweis. Man ziehe durch E und F grade Linien mit KF und KE parallel, so wird das Parallelogramm der Kräfte EKFO ein Rhombus, und KO = 2KL, mithin die Kraft P in der Richtung KO zur Kraft KE = 2KL : KE. Ferner ist der Winkel EKL = CEL (183 §. Geom.) = CAD, und bey L und D sind rechte Winkel: demnach sind die Dreyecke EKL, ACD, einander ähnlich, und man erhält KL : KE = AD : AC, also auch 2KL : KE = 2AD : AC = AB : AC. Diese Proportion mit der vorigen verglichen giebt folgende: die Kraft P : Kraft KE = AB : AC. 116 Fig.

Zusatz.

89. Diese Regel giebt Borellus in seinem Werke: De motu animalium. Setzt man mit dem Mersennus voraus, die Richtung des Widerstandes sey die mit AB parallele Linie EL, so macht die nach M verlängerte Richtung der Kraft KE mit EL den Winkel MEL. Wenn alsdenn EN lothrecht ist; so hält eine Kraft $p = \frac{AC}{AB} P$ in der Richtung EM mit dem Widerstan-

derstande R in der Richtung EL das Gleichgewicht, wenn sich verhält $p : R = \sin NEL : \sin NEM$. (73 §.) Es ist aber $NEL = 90°$, und $NEM = CKE = DAC$: mithin wird $p : R = \sin. tot. : \sin DAC = AC : CD$, also $p = \frac{AC}{CD} . R$, mithin auch $\frac{AC}{AB} . P = \frac{AC}{CD} . R$, und daraus folgt $P = \frac{AB}{CD} . R$. Das ist Mersenni Regel, es verhalte sich die Kraft zum Widerstande, wie der Rücken des Keils zur Länge.

Die 31. Erklärung.

117 Fig. 90. Es sey ABHG ein grader Cylinder, und GH ein Schnitt mit der Grundfläche AB in der Entfernung AG parallel: auf der Oberfläche dieses Cylinders sey eine krumme Linie AMNG nach dem Gesetz gezeichnet, daß, wenn durch einen Punct M derselben eine grade Linie mit der Axe EF des Cylinders parallel gehet, und den Umfang der Grundfläche in P trift, allemahl das Verhältniß AP : PM dem Verhältniß des Umfangs der Grundfläche zur Höhe AG gleich sey. Diese Linie heißt eine **Schraubenlinie**, und AG ist eines **Schraubenganges Höhe**. Der Cylinder selbst wird die **Spindel**, und der Umfang seiner Grundfläche oder eines jeden auf der Grundfläche senkrechten Schnitts der **Umfang der Spindel** genannt.

Der 1. Zusatz.

91. Wenn PT in der Ebene der Grundfläche liegt, und ihre Peripherie in P berührt; so berührt die Ebene MPT die Cylinderfläche in der graden Linie PM, und sie ist auf dem Halbmesser EP der Grundfläche senkrecht. (256 §. Geom.) Man nehme PT dem Bogen PA, und PV dem Bogen PBLA gleich: so ist

TV

TV dem Umfang der Spindel APBLA gleich. Man ziehe ferner TM, und setze VX auf TV senkrecht, so ist $VX = \frac{TV}{TP} \cdot PM$, oder $VX = \frac{APBLA}{AP} \cdot PM$, also VX = AG, und TX ist eine Tangente des Schraubenganges.

Der 2. Zusatz.

92. Es sey die grade Linie MR in der Ebene TVX auf der Tangente TX des Schraubenganges senkrecht, so ist sie zugleich auf dem Schraubengange in M senkrecht. Ferner ist der Winkel RMP = 90° − PMT = PTM. Man stelle sich über der Schraubenlinie einen erhöheten Schraubengang und TVX als ein festes lothrecht stehendes Dreyeck vor, auf dessen Hypothenuse der Schraubengang in M ruhet. Oben auf der Spindel drücke das Gewicht P, so daß die Stelle M in der lothrechten Richtung MS einen Druck = P leidet. Ferner sey MZ mit PT parallel, also PMZ = 90°, und gegen eben die Stelle M des Schraubenganges, die den Druck P in der Richtung MS leidet, drücke eine Kraft V in der Richtung MZ so, daß aus beyden Kräften P und V nach der mittlern Richtung MR ein Druck entstehe, der, weil er auf TX senkrecht ist, davon völlig aufgehalten wird. Alsdenn wird erfordert, daß sich verhalte P : V = sin RMZ : sin RMS. Weil nun RMS = PTM war, so ist RMZ = PMT, also P : V = sin PMT : sin PTM = PT : PM, oder P : V = Peripherie APBLA : AG.

Die 32. Erklärung.

93. Man stelle sich vor, die Ebene des Dreyecks VTX werde um die Schraubenspindel so gewunden, daß

daß PT an den Bogen PA, und PV an den Bogen PBLA anschliesse; so wird die Ebene des Dreyecks so gekrümmt, daß sie an die Cylinderfläche anschließt, VX fällt mit AG zusammen, und die Hypothenuse TX krümmt sich in die Figur des Schraubengangs AMNG. Diesen neuen Schraubengang stelle man sich hohl vor, so, daß der erhöhete Schraubengang AMNG darin passe; so wird das die Mutterschraube.

Der 13. Lehrsatz.

117 94. Wenn Schraube und Mutterschraube
Fig. in einander greifen, und eine Kraft *V* bey *A* in einer auf der Axe *EF* senkrechten Ebene, deren Richtung *AC* den Umfang der Spindel berührt, die Spindel um ihre Axe zu drehen strebt; wenn ferner eine Last *P* die Spindel nach der Richtung *FE* drückt, die sich gegen die Kraft *V* verhält, wie der Umfang der Spindel zur Höhe des Schraubenganges; so ist alles im Gleichgewicht, wofern die Mutterschraube nicht weichen kann.

Beweis. Wenn alles, wie hier vorausgesetzt wird, richtig in einander passet, so vertheilt sich der Druck P über den ganzen Schraubengang gleichförmig. Der letztere sey nach seiner ganzen Länge in sehr kleine gleich grosse Theile eingetheilet, und die Anzahl aller Theile sey $= m$; so leidet jede Stelle M einen Druck $\frac{1}{m} P = p$ in der Richtung MS. Man setze die Höhe des Schraubenganges $= a$, die Peripherie der Spindel $= b$; so ist vermöge der Voraussetzung $V = \frac{a}{b} . P$. Wird nun ferner an M eine

Kraft

Kraft $v = \frac{1}{m} V$ in der Richtung MZ, zugleich aber auch eine eben so grosse Kraft in der grade entgegengesetzten Richtung MY angebracht; so sind alle Kräfte v in der Richtung MY mit V im Gleichgewicht. An jeder Stelle M entsteht überdem aus den Kräften v in der Richtung MZ, und p in der Richtung MS ein gegen den hohlen Schraubengang senkrechter Druck in der Richtung MR, der völlig aufgehalten wird: also ist alles im Gleichgewicht. Weil daher an jeder Stelle M alle die Kräfte $MZ = \frac{1}{m} V$ und $MY = \frac{1}{m} V$ schon für sich im Gleichgewichte sind; so bleibt das Gleichgewicht ungestöhrt wenn diese weggenommen werden: also ist $V = \frac{a}{b} P$ mit P im Gleichgewicht.

Der 1. Zusatz.

95. Wäre mit der Schraube der Hebelsarm EO in einer auf der Axe EF senkrechten Ebene verbunden, und daran eine auf EO senkrechte Kraft W angebracht; so entsteht daraus bey A in der Richtung AC ein Druck $V = \frac{EO}{EA} . W$. Damit dieser mit P das Gleichgewicht halte, wird erfordert, daß $P = \frac{b}{a} . V$ sey, (94 §.) also $P = \frac{b}{a} . \frac{EO}{EA} . W$. Der Exponent des Verhältnisses der Peripherie des Kreises zum Durchmesser sey π, so ist $b = 2\pi EA$, also auch $P = \frac{2\pi . EO}{a} . W$. 117 Fig.

Der

Der 2. Zusatz.

96. Die von der Kraft W angegriffene Stelle O macht einen Umlauf, oder die Stelle O legt den Weg $2\pi . EO$ zurück, wenn die Last P um die Höhe $AG = a$ eines Schraubenganges gehoben wird: also gilt auch bey der Schraube in einem gewissen richtigen Sinne das Gesetz: die Last verhalte sich zur Kraft umgekehrt wie der Weg der Kraft zum Wege der Last.

Die 33. Erklärung.

118 97. Eine Schraube ohne Ende wird aus
Fig. einer Schraubenspindel AB und einem Sternrade HI so zusammengefüget, daß die Schraubengewinde zwischen den Zähnen des Sternrades, deren Figur darnach eingerichtet seyn muß, eingreifen, einen Zahn des Rades nach dem andern fortschieben, und so das Rad in Umlauf bringen können, wenn die Spindel umläuft. Letztere ist alsdenn, wie die Welle eines Rades, an beyden Enden mit gehörig unterstützten Zapfen, C, D, versehen, und um sie in Umlauf zu bringen, kann die Kurbel DEF dienen. Die Lage ihrer Axe CD muß mit der Tangente des Rades, da wo die Schraubengänge eingreifen, parallel seyn.

Zusatz.

98. Wenn eine Kraft V die Kurbel DEF zu drehen strebt, und $DE = r$, die Höhe der Schraubengänge $= a$ gesetzt wird; so entsteht von der Kraft V gegen den Zahn G ein Druck $= \frac{2\pi r}{a} . V$. (95 §.)

Man setze ferner der Welle KL Halbmesser $= e$, des Rades HI Halbmesser $= f$, die bey L herabhängende Last

Last = P; so ist im Fall des Gleichgewichts $\frac{2\pi r}{a} V = \frac{e}{f} . P$, also $P = \frac{2\pi r . f}{a . e} V$.

Die 34. Erklärung.

99. Hebel und Rolle, das Rad an der Axe, der Keil und die Schraube heissen einfache Maschinen, weil es die gewöhnlichsten Theile sind, woraus man grössere Maschinen zusammensetzt.

Zusatz.

100. Wenn man den Keil ausnimmt, so findet bey den übrigen einfachen Maschinen das Gesetz seine Anwendung, vermöge dessen zwo Kräfte, davon man eine als die Last betrachtet, welche von der andern als der Kraft bewegt werden soll, einander im Gleichgewicht erhalten, wenn sie sich in umgekehrter Ordnung wie die Wege verhalten, die sie in gleicher Zeit in der Richtung zurück legen würden, nach welcher sich ihre Würkung äussert. Es ist vom *des Cartes* zuerst in der Maschinenlehre gebraucht worden, und heißt von ihm das Carteſianiſche Grundgeſetz der Statik. Am Keil würken drey Kräfte gegeneinander, um deswillen findet bey demſelben das erwehnte Geſetz nicht ſchlechthin ſeine Anwendung. Ueberhaupt bedarf das Geſetz noch mehrere Erläuterung, und die Maſchinenlehre wird davon weiter unten mehr Unterricht geben.

Erste Gründe der Hydrostatik.

Die 1. Erklärung.

1. Eine Masse ist flüßig, wenn sich gar keine Theile in derselben angeben lassen, welche aus noch kleinern Theilen bestehen, die unter sich wie Theilchen einer festen Masse zusammenhängen.

Der 1. Zusatz.

2. Wenn also nur ein Theil, oder einige Theile allein, der Wirkung bewegender Kräfte ausgesetzt sind, so können diese Theile für sich allein in Bewegung kommen, ohne daß die ganze Masse mit in Bewegung kommt.

Der 2. Zusatz.

3. Zwo Kräfte an zweyen verschiedenen Elementartheilchen einer flüßigen Masse, wenn ihre Richtungen in der graden Linie zwischen diesen Elementartheilchen liegen, und einander entgegengesetzt sind, können einander nicht im Gleichgewicht erhalten: es müßte denn auf irgend eine Art verhindert werden, daß die dazwischen liegenden Theilchen nicht ausweichen können, wenn die Richtungen der Kräfte wider einander laufen.

Die 2. Erklärung.

4. Eine flüßige Masse heißt hier eine unelastische Masse soweit sie sich durch einen äussern Druck nicht

nicht in einen engern Raum zusammenpressen läßt, wenn sie gleich wegen ihrer Flüßigkeit dem Druck nach allen Seiten auszuweichen strebt. Die Wissenschaft von den Gesetzen des Gleichgewichts solcher Kräfte, die auf unelastische flüßige Massen wirken, heißt die Hydrostatik.

Der 1. Grundsatz.

5. Wenn eine unelastische nicht schwere flüßige Masse in einer graden prismatischen oder cylindrischen festen Röhre *AB* zwischen zweyen Stempeln *CD*, *EF*, eingeschlossen ist, und wenn alsdenn gleiche Kräfte diese Stempel einander entgegentreiben; so bleiben diese Kräfte im Gleichgewicht, und der Druck pflanzt sich durch die flüßige Masse nach allen Seiten auch gegen die feste Röhre gleichförmig fort. 119 Fig.

Der 1. Zusatz.

6. Wenn EF kein beweglicher Stempel, sondern statt dessen ein fester Boden wäre, so litte derselbe eben so viel Druck,, als wenn er dem Druck des Stempels CD unmittelbar ausgesetzt wäre. Damit alles in Ruhe bliebe, müßte nun die feste Röhre gehalten werden, daß sie nicht weichen könnte.

Der 2. Zusatz.

7. Wenn die Röhre prismatisch ist, so leidet jedes Stück GH einer von ihren ebenen Seitenflächen, das der Grundfläche des Stempels gleich ist, ebenfalls soviel Druck, als wenn der Stempel unmittelbar dagegen preßte. Jedes grössere oder kleinere Stück GL der festen Fläche der Röhre leidet einen Druck, der sich zu dem Druck des Stempels gegen

CD verhält, wie der Flächeninhalt von GL zur Grundfläche des Stempels CD.

Der 3. Zusatz.

8. Um über die Grösse des Drucks zu urtheilen, wenn die Röhre cylindrisch oder ihr Umfang sonst gekrümmet ist, muß man sich ein so kleines Stück vom festen Umfange der Röhre vorstellen, daß die Krümme desselben nicht merklich ist. Ein so kleines Stück der krummen Fläche kann alsdenn als eine ebene Fläche betrachtet werden, und man kann die Schlüsse des vor. §. darauf anwenden.

Der 4. Zusatz.

120 Fig. 9. Zwo grade Röhren AB, BC, von ungleicher Weite könnten bey B wohl so aneinander gefügt seyn, daß ihre Axen in einerley grade Linie zusammen fielen. Wenn nun die ungleich grossen Stempel DE und FG einander entgegengepreßt werden; so kann nur alsdenn das Gleichgewicht bestehen, wenn sich der Druck gegen DE zum Druck gegen FG verhält, wie die Fläche DE zur Fläche FG.

Der 5. Zusatz.

10. Würde die Röhre sonst gehalten, daß sie nicht weichen könnte, und wäre statt des Stempels bey FG ein fester Boden, wenn die Fläche DE einem Druck = P ausgesetzt ist; so litte FG einen Druck $= \frac{FG}{DE} P$.

Die 3. Erklärung.

122 Fig. 11. In allen Fällen, wenn eine nicht schwere flüssige Masse in einem festen Gefäß ABCDEF, von welcher Figur man will, eingeschlossen ist; und wenn alsdenn von aussen her an einer solchen Stelle, AB, wo

wo das Gefäß eine Oefnung hat, gegen die flüßige Masse ein Druck preßt, muß man denjenigen Druck, welchen die Fläche AB unmittelbar leidet, von dem nach allen Seiten durch die flüßige Masse fortgepflanzten Druck unterscheiden. Es wird übrigens hier und im folgenden allemahl vorausgesetzt, daß die festen Gefässe sonst gehalten werden, damit sie nicht weichen können.

Der 1. Zusatz.

12. Man setze den Druck, welchen die Fläche AB unmittelbar leidet = P, und FE sey ein ebenes Stück von der festen Fläche, welche die flüßige Masse von allen Seiten umgiebt; so ist der gegen FE fortgepflanzte Druck $= \frac{FE}{AB} \cdot P$. 122 Fig.

Der 2. Zusatz.

13. Wäre FE eine andre offene Stelle des Gefässes, so würde ein Druck P gegen AB ohne Zweifel die flüßige Masse zur Oefnung EF heraustreiben. Um das zu hindern, müßte auch gegen EF von aussen her ein Druck pressen, der $= \frac{FE}{AB} \cdot P$ wäre. Derselbe würde alsdenn mit dem Druck P gegen AB im Gleichgewicht seyn.

Der 2. Grundsatz.

14. Wenn ein grades lothrecht stehendes prismatisches oder cylindrisches Gefäß *ABCD* mit schwerem Wasser angefüllt ist; so leidet der Boden *BC* einen Druck, der dem Gewicht der ganzen darüber stehenden Wassermasse gleich ist. 121 Fig.

Der 1. Zusatz.

15. Das Gewicht einer solchen graden Wassersäule wird leicht gefunden, wenn die Grundfläche BC im Quadratinhalt, und ihre Höhe im Längenmasse, auch überdem das eigenthümliche Gewicht des Wassers bekannt ist. Setzt man ihren körperlichen Inhalt im Cubicmaaß = V, so ist V = BC. AB. (313 §. G.) Setzt man ferner das eigenthümliche Gewicht des Wassers = g, und das Gewicht der Säule = P, so ist P = g. BC. AB. (13 §. Stat.)

Der 2. Zusatz.

16. Ein Rheinländischer Cubicfuß Wasser wiegt 66 Pfund im Cöllnischen Gewicht, und 1 Duodecimalcubiczoll Wasser 293 Gran; ein Decimalcubiczoll aber 506 Gran. Demnach muß man eine von diesen Zahlen statt g setzen, nachdem man den Inhalt der Säule in Cubicfussen, Duodecimal- oder Decimalcubiczollen ausdrückt.

Die 4. Erklärung.

17. Wenn eine ebene Fläche einen gleichförmig darüber vertheilten Druck leidet, dessen Richtung auf der Ebene senkrecht ist; so wird durch die Höhe des Drucks die Höhe einer graden Wassersäule verstanden, deren Grundfläche eben so groß ist, als die Fläche, welche den Druck leidet, und deren Gewicht dem Druck gegen diese ebene Fläche gleich ist.

Die 1. Aufgabe.

122 Fig. 18. Die Grösse der Fläche *AB* ist im Quadratmaaß gegeben, und die Grösse des Drucks gegen diese Fläche ist ebenfalls wie gewöhnlich in Pfunden ausgedruckt: man soll die Höhe des Drucks finden.

Aufl.

Aufl. Der Druck sey so groß, als wenn ein Ge-wicht von 100 Pfunden lothrecht gegen AB preßte; so kann man leicht finden, wie viel Raum 100 Pfund Wasser einnehmen. Dividirt man diese 100 Pfund mit 66 Pfund, als dem Gewicht eines Cubicfusses Wasser; so giebt der Quotient die Grösse dieses Raums in Cubicfussen. Wenn man aber mit 293 Gran oder 506 Gran dividirt; so erhält man die Grösse dieses Raums im ersten Fall in Duodecimal- im letzten Fall in Decimalcubiczollen. Man wählt das eine oder das andre, nachdem die Grösse der Fläche AB in Quadratfussen oder Quadratzollen ausgedrückt ist.

Die 100 Pfund Wasser betragen 768000 Gran und diese mit 293 Gran dividirt geben 2621 Cubiczoll für die Grösse des Raums, den 100 Pfund Wasser einnehmen. (M. vergl. den 135. Stat.) Die Fläche AB sey 24 Quadratzoll groß, so findet man, dem 313 §. Geom. gemäß, wie hoch eine grade Säule über einer Grundfläche von 24 Quadratzoll seyn muß, damit ihr Inhalt 2621 Cubiczoll betrage, wenn man diesen Cubicinhalt der Säule mit dem Quadratinhalt ihrer Grundfläche dividirt. In dem erwählten Exempel findet man $\frac{2621}{24} = 109\frac{5}{24}$ Zoll, und das ist die gesuchte Höhe des Drucks gegen AB.

Der 1. Lehrsatz.

19. Wenn die im Gefäß *ABCDEF* eingeschlossene flüßige Masse von aussen her einem Druck gegen *AB* ausgesetzt ist; so pflanzt sich der Druck gegen jedes Stück *EF* von dem festen Umfange des Gefässes, wenn dasselbe eine ebene Fläche ist, so fort, daß die Höhe des Drucks gegen *EF* der Höhe des Drucks gegen *AB* gleich ist. 122 Fig.

Beweis. Wenn A die Höhe des Drucks gegen AB bezeichnet; so will das sagen, der Druck gegen AB ist dem Gewicht einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche = AB, und deren Höhe = A ist. Das eigenthümliche Gewicht des Wassers sey also = g; so ist dieser Druck = g . AB . A. Ferner sey der gegen EF fortgepflanzte Druck = P, so ist $P = \frac{EF}{AB} . g . AB . A$ (12 §.), also $P = g . EF . A$, und die Höhe dieses Drucks ist ebenfalls = A. (18 §.)

Der 2. Lehrsatz.

123 Fig. 20. **Wenn ein Gefäß *ABCD*, das einen ebenen wagrechten Boden hat, mit schwerem Wasser angefüllt und alles in Ruhe ist; so leidet der Boden *AB* einen Druck, dessen Höhe so groß ist, als die lothrechte Höhe *CP* der über demselben stehenden Wassermasse.**

Beweis. Die ganze Wassermasse sey vermittelst der wagrechten Ebenen EF, GH, KL, in mehrere Schichten von so kleinen Höhen getheilt, daß man jede davon für sich als ein grades prismatisches oder cylindrisches Gefäß ansehen kann; so ist jeder von den Querschnitten KL, GH, EF, u. s. f. für sich einem unmittelbaren Druck ausgesetzt, der vom Gewicht darüber stehenden Schichte herrührt. Aber auch jeder Druck gegen einen solchen Querschnitt, wie KL, pflanzt sich gegen den nächstfolgenden GH fort, und vermehrt den Druck, welchem GH für sich schon wegen des Gewichts der Schichte KGHL ausgesetzt ist. Demnach leidet GH einen Druck, dessen Höhe CM + MN = CN, und eben darum auch EF einen Druck, dessen Höhe = CN + NO = CO, folglich

AB

AB einen Druck, dessen Höhe CO + OP = CP. Diese Schlüsse gelten allemahl, die Zahl der Schichten, worin die Wassermasse getheilt ist, sey so groß als man will.

Der 1. Zusatz.

21. Wenn die höchste Fläche CD der im Gefäß befindlichen Wassermasse eben und wagrecht ist; so bedarf es dessen nicht, daß das Gefäß oben geschlossen sey; die schwere Wassermasse bleibt alsdenn für sich im Gleichgewicht, weil CD weiter keinem Druck ausgesetzt ist.

Der 2. Zusatz.

22. Der Druck in jeder Tiefe CO unter der höchsten Wasserfläche pflanzt sich auch seitwärts fort, und die Höhe des Drucks gegen E oder F ist = CO. Dieser Druck wächst also nach dem Gesetz der Stetigkeit, und ist in jeder folgenden Tiefe grösser, als in der vorigen.

Der 3. Lehrsatz.

23. Schweres Wasser kann nur alsdenn in einem Gefäß ruhig, und alle schwere Elemente des Wassers können nur alsdenn im Gleichgewicht seyn, wenn die höchste Fläche desselben eben und wagrecht ist.

Beweis. Wenn die höchste Fläche EMFNG nicht beydes zugleich eben und wagrecht wäre, so wäre jeder wagrechte Querschnitt wie MN einem Druck ausgesetzt, und die Höhe dieses Drucks wäre so groß, als die Tiefe dieses Querschnitts unter der höchsten Gränze F der Wassermasse. Eben dieser Druck würde sich auch seitwärts fortpflanzen, also würde die Wassermasse zerfliessen, und das Gleichgewicht könnte nicht bestehen. 124 Fig.

Der 4. Lehrsatz.

125 Fig. 24. In Gefässen und Röhren, *ABHF*, *GHDE*, die unter einander so verbunden sind, daß aus dem einen das etwa darin befindliche Wasser ins andre hinüber treten kann, bleibt schweres Wasser nur alsdenn ruhig stehen, wenn die höchsten Wasserflächen *AF*, *GE*, in einerley wagrechten Ebene liegen.

Beweis. In jeder Tiefe AL unter der höchsten Gränze AF der Wassermasse im Gefäß ABHF ist das Wasser einem Druck ausgesetzt, der sich auch seitwärts fortpflanzt. Wenn nun H eine Stelle in dieser Tiefe ist, woselbst das Wasser seitwärts aus einem Gefäß ins andre treten kann; so ist jedes in dieser Tiefe befindliche Element des Wassers auch von der andern Seite her einen Druck ausgesetzt, wozu die Höhe GQ gehört. Im Fall des Gleichgewichts müssen diese Pressungen von beyden Seiten her gleich seyn, also wird erfodert, daß AL = GQ sey.

Der 5. Lehrsatz.

126 Fig. 25. Wenn in zusammenhängenden Gefässen oder Röhren *AKB*, *CKD*, zwey schwere Flüßigkeiten von verschiedener Art, die sich nicht mit einander vermischen, im Gleichgewicht sind; so verhalten sich ihre lothrechten Höhen *AG*, *DH*, über der Ebene *EF*, womit sie an einander gränzen, in umgekehrter Ordnung, wie die eigenthümlichen Gewichte der flüßigen Massen.

Beweis. Wenn eine von den Massen für sich allein den Raum EFKCD ausfüllet; so erhellet, daß EF nicht mit CD in einer wagrechten Ebene liegen könne,

könne, weil EF einem Druck ausgesetzt ist, der von der schweren Flüßigkeit AEFB herrührt. Wenn nun EF und LM in einer wagrechten Ebene liegen; so ist die Flüßigkeit im untern Raum EFKLM für sich im Gleichgewicht. (24 §.) Man setze, die Dichtigkeit oder das eigenthümliche Gewicht der einen Masse AEFB sey $= g$, der andern $= G$; so leidet EF einen Druck $= g . EF . AG$, und LM ist dem Druck $G . LM . DH$ ausgesetzt. (20 §.) Das Gleichgewicht aber erfordert, daß sich verhalte $g . EF . AG : G . LM . DH = EF : LM$, (13 §.) und daraus folgt $g . AG : G . DH = 1 : 1$, also $g . AG = G . DH$, mithin ferner $AG : DH = G : g$.

Der 6. Lehrsatz.

26. Ein fester Körper *ABC*, der in eine flüßige Masse *DEF* ganz eingetaucht ist, verliert darin so viel von seinem Gewicht, als eine eben so grosse Menge des flüßigen wiegt. 127 Fig.

Beweis. Der feste Körper leidet an jeder Stelle wie A oder B nach einer auf seiner Oberfläche senkrechten Richtung einen Druck, der dem Gewicht einer Säule des flüßigen gleich ist, wovon die Grundfläche der Stelle, die den Druck leidet, gleich ist, und die Höhe so groß, als die Tiefe dieser Stelle unter der höchsten Fläche DF der flüßigen Masse. Jede dieser Pressungen wie AG zerlegt sich in zwo andre in den Richtungen AL und AK, wovon jene horizontal und diese vertical ist. Eben so zerlegt sich der Druck BH nach der horizontalen Richtung BN, und der verticalen BM. Den im 75 §. der Statik festgesetzten Gründen gemäß findet man, daß die Summe aller der verticalen Pressungen, welche

wie

wie AK den festen Körper zu heben streben, die Summe aller der lothrechten Pressungen übertreffe, die den Körper wie BM unterwärts drücken, und daß der Ueberschuß so groß sey, als das Gewicht einer so grossen Menge der flüßigen Masse, die mit dem festen Körper einerley Raum ausfüllet. Auch findet man, daß die horizontalen Pressungen einander insgesammt im Gleichgewicht erhalten.

Aber auch ohne diese Schlüsse völlig auseinander zu setzen, welches nicht so ganz im Kurzen geschehen kann, läßt sich die Richtigkeit des behaupteten Satzes sehr leicht aus folgenden Gründen herleiten. Wenn der Raum ABC anstatt des festen Körpers mit einer eben so grossen Menge des flüßigen angefüllt, und nun alles in Ruhe ist; so leidet die den Raum ABC ausfüllende flüßige Masse von allen Seiten her offenbar eben so viel Druck, als der feste Körper leidet, wenn er in eben dem Raum enthalten, und mit dem Flüßigen umgeben ist. In jenem Fall aber muß nothwendig das Resultat aller lothrechten Pressungen dem Gewicht der im Raum ABC enthaltenen flüßigen Masse gleich seyn, und alle horizontale Pressungen müssen einander im Gleichgewicht erhalten: also muß es auch in diesem Falle mit dem gesammten Druck gegen den festen Körper eben die Bewandniß haben.

Zusatz.

127 Fig. 27. Wenn ABC ein hohles Gefäß und der innere Raum mit der flüßigen Masse angefüllet ist; so leidet der feste Umfang des Gefässes an jeder Stelle einen eben so festen Druck, als in dem Fall, wenn die feste Fläche ABC mit der flüßigen Masse von aussenher umgeben und grade so tief eingetaucht ist, daß

daß ihre höchste Gränze die Wasserfläche OP berührt, nur ist im ersten Fall der Druck gegen jede Stelle dem Druck entgegengesetzt, welchen diese Stelle im letzten Falle leidet. Demnach ist der gesammte Druck, womit die schwere flüßige Masse ein Gefäß, welches sie anfüllet, unterwärts preßt, dem Gewicht der ganzen im Gefäß enthaltenen Menge des Flüßigen gleich.

Anmerkung.

M. s. hievon die Anfangsgründe der Mathem. Wissenschaften, 2 Theil, 18. 25 §.

Der 7. Lehrsatz.

28. Ein fester Körper *ABCK*, der nicht so viel wiegt, als eine eben so grosse Menge des Flüßigen, worin er versenkt wird, sinkt nur soweit hinein, bis der eingetauchte Theil *ABC* dem körperlichen Raum nach so groß ist, als eine Menge des Flüßigen, deren Gewicht eben so groß, als das Gewicht des ganzen Körpers ist. 128 Fig.

Beweis. Die flüßige Masse, soweit sie den eingetauchten Theil umgiebt, strebt ihn mit einer Gewalt zu heben, die so groß ist, als das Gewicht einer so grossen Menge des Flüßigen, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum füllen würde. Weil nun der feste Körper mit seinem ganzen Gewicht zu sinken strebt; so kann nur alsdenn das Gleichgewicht bestehen, wenn das Gewicht einer Menge der flüßigen Masse, die mit dem eingetauchten Theil einerley körperlichen Inhalt hat, so groß ist, als das Gewicht des festen Körpers.

Der

Der 1. Zusatz.

29. Es sey g der Mittelpunkt der Grösse des eingetauchten Theils ABC; so erhellet, daß alle verticale Pressungen, die den festen Körper zu heben streben, im Gleichgewicht bleiben, wenn der Punkt g allein so gehalten wird, daß derselbe nicht steigen kann. Das ist aber der Fall, wenn G der Schwerpunkt des ganzen Körpers ist, und beyde Punkte G, g, in einerley lothrechten Linie liegen. Die grade Linie Gg steht alsdenn auf der wagrechten Wasserfläche DH senkrecht.

Der 2. Zusatz.

30. In dem Fall, wenn der Schwerpunkt des festen Körpers niedriger liegt, als der Mittelpunkt der Grösse des eingetauchten Theils, wird derselbe gleichsam hängend erhalten: er hat alsdenn einen weit mehr sichern Stand, als in dem umgekehrten Fall, wenn sein Schwerpunkt höher liegt, als der Mittelpunkt der Grösse des eingetauchten Theils.

Die 2. Aufgabe.

31. Das eigenthümliche Gewicht einer festen oder flüßigen Masse in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers zu finden.

Aufl. 1) Einen festen Körper wiegt man zuerst in freyer Luft, hiernächst aber im Wasser, und bemerkt den Theil seines Gewichts, welchen er im Wasser verliert. Weil das zugleich das Gewicht einer Menge Wasser ist, die mit dem festen Körper einerley cubischen Inhalt hat; (26 §.) so dividire man das ganze Gewicht des festen Körpers mit dem Theil desselben, welchen er im Wasser verliert: der Quotient giebt an, wievielmahl

der

der feste Körper schwerer ist, als eine eben so grosse Menge Wasser.

2) Wofern der feste Körper leichter ist, als eine eben so grosse Menge Wasser, so wird er im Wasser nicht ganz untersinken, es sey denn, daß man ihn mit einem andern festen Körper verbindet, dessen Masse um ein ansehnliches schwerer als Wasser ist. Die zum hydrostatischen Gebrauch besonders eingerichteten Wagen sind gewöhnlich mit einem kleinen gläsernen Eimer versehen, welches man mit einem metallenen Deckel schliessen kann, um einen hinein gelegten Körper, der specifisch leichter als Wasser ist, zu hindern, daß er im Wasser nicht empor komme. Von dem Gewicht, welches das Eimer mit dem hineingelegten Körper zusammen im Wasser verliert, zieht man den Theil ab, welchen das Eimer für sich allein im Wasser verliert, so bleibt das Gewicht einer Menge Wasser übrig, die mit dem ins Eimer hineingelegten Körper einerley cubischen Inhalt hat. Diese nimmt man zum Divisor, und dividirt mit demselben das Gewicht des festen Körpers, welches nun kleiner als jener Divisor seyn wird; so erhält man einen ächten Bruch, der das eigenthümliche Gewicht der festen Masse in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers angiebt.

3) Um das eigenthümliche Gewicht andrer Flüssigkeiten mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers zu vergleichen, wählt man am besten ein massives Stück Glas, dessen Figur an sich willkührlich ist, nur daß man es bequem an einem zarten Faden muß aufhängen können. Die zum hydrostatischen Gebrauch eingerichteten Wagen sind damit gewöhnlich

lich unter dem Nahmen der Glasperle versehen. Diese wiegt man ein für allemahl in der Luft und im Wasser, damit man wisse, wieviel sie im Wasser verliert. Sie wird alsdenn mehr in einer schwerern und weniger in einer leichtern Flüßigkeit verlieren. Das Gewicht, was sie in einer jeden andern flüßigen Masse verliert, wird mit demjenigen dividirt, was sie im Wasser verliert; so weiß man das eigenthümliche Gewicht der flüßigen Masse in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers.

4) Von diesen Quotienten werden sich wenige in ganzen Zahlen angeben lassen, und es hat hier seine grosse Bequemlichkeit, wenn man die übrigen in Decimaltheilen ausdrückt, so wie die kleine Tafel im 15 §. der Statik davon eine Probe giebt. Die in derselben aufgeführten Zahlen sind, vermittelst des hier beschriebenen Verfahrens gefunden worden.

Zusatz.

32. Beym Gebrauch recht scharfer hydrostatischer Wagen findet man, daß nicht alle Arten des gemeinen Wassers, als Regenwasser, Brunnenwasser, Flußwasser, einerley eigenthümliches Gewicht haben: daher wählt man gewöhnlich Regenwasser, um das eigenthümliche Gewicht der übrigen Massen damit zu vergleichen, weil man es für das reinste hält. Es muß aber alsdenn, wie leicht zu erachten ist, nicht von den Dächern, sondern unter freyen Himmel aufgefangen werden. Um es von den fremden Theilen, die etwa demselben noch beygemischt sind, zu reinigen, ist das filtriren allein nicht hinlänglich: es muß, wenn man alles

aufs

aufs genaueste beobachten will, destillirtes Regen- oder Schneewasser seyn.

Der 8. Lehrsatz.

33. Der gesammte Druck, womit die im Gefäß *DEFH* enthaltene flüßige Masse das Gefäß unterwärts preßt, wird um eben soviel gröſſer, als der darin versenkte feste Körper *ABCK* von seinem Gewicht verliert, er mag ganz oder zum Theil eingetaucht seyn. 128 Fig.

Beweis. Die flüßige Masse steigt im Gefäß höher, wenn der feste Körper hineingetaucht wird. Wenn nun anfangs LM die höchste Fläche war, und wenn diese beym Versenken des festen Körpers bis DH steigt, so wiegt die zwischen LM und DH enthaltene flüßige Masse soviel, als der feste Körper am Gewicht verliert. Aber auch um eben soviel nimmt der Druck zu, womit die flüßige Masse das Gefäß unterwärts preßt: denn es hat eben den Erfolg, als wenn noch soviel mehr flüßiges ins Gefäß hineingegossen wäre, als den Raum von LM bis an DH ausfüllet.

Der 9. Lehrsatz.

34. Je kleiner die Differenz *AD* der Halbmesser zwoer concentrischer Kugelflächen *ABM*, *DEP*, in Vergleichung mit ihren Halbmessern ist, desto näher kommt der körperliche Inhalt des Raums zwischen diesen Kugelflächen dem Inhalt eines graden Cylinders oder Prismen über einer Grundfläche so groß, als die kleinere Kugelfläche *DEP* ist, und in einer Höhe, die so groß ist, als die Differenz *AD* der Halbmesser. 129 Fig.

Beweis. Man setze $CA = r$, $CD = \varrho$, so ist die grössere Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$, die kleinere $= \frac{4}{3}\pi\varrho^3$ (342 §. Geom.) also der Raum zwischen beyden Kugelflächen $= \frac{4}{3}\pi(r^3 - \varrho^3)$. Ferner findet man $r^3 - \varrho^3 = (r^2 + r\varrho + \varrho^2)(r - \varrho)$, also ist eben der Raum $= \frac{4}{3}\pi(r^2 + r\varrho + \varrho^2)(r - \varrho)$. Man setze diesen Raum $= V$, und $AD = r - \varrho = \delta$; so ist $r = \varrho + \delta$, und $r^2 = \varrho^2 + 2\varrho\delta + \delta^2$, $r\varrho = \varrho^2 + \delta\varrho$, also $r^2 + r\varrho + \varrho^2 = 3\varrho^2 + 3\delta\varrho + \delta^2$, und man findet $V = \frac{4}{3}\pi(3\varrho^2 + 3\delta\varrho + \delta^2)\delta$, oder $V = 4\pi\varrho^2 \cdot \delta + 4\pi(\delta^2\varrho + \frac{1}{3}\delta^3)$. Es sey nun $\delta = \frac{1}{n}\varrho$, und n eine sehr grosse Zahl: so ist $V = 4\pi\varrho^2 \cdot \delta + 4\pi\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3}\right)\varrho^3$, und dieser Werth kommt der Gränze $4\pi\varrho^2 \cdot \delta$ desto näher, je grösser die Zahl n angenommen ist. Uebrigens ist $4\pi\varrho^2$ = der Kugelfläche DEP, (366 §. Geom.) und $4\pi\varrho^2 \cdot \delta$ der Inhalt eines Cylinders oder Prismen auf einer eben so grossen Grundfläche in einer Höhe $= \delta = AD$. (313 §. Geom.)

Der 10. Lehrsatz.

129 Fig. 35. Wenn eine feste Kugel *KLST* überall in gleicher Höhe *AK* mit Wasser umgeben ist, dessen Elemente gegen den Mittelpunct der Kugel schwer sind; so erhält sich alles im Gleichgewicht. Die feste Kugelfläche *KLST* aber leidet einen gleichförmig darüber vertheilten Druck, der dem Gewicht einer graden Wassersäule gleich ist, wovon die Grundfläche so groß als die Kugelfläche *KLST*, und die Höhe der Höhe *AK* gleich ist.

Beweis.

Beweis. Man stelle sich vor, daß die ganze Wassermasse durch Kugelflächen, die mit der festen Kugel concentrisch sind, in mehrere Schichten von sehr kleinen Höhen KH, HO, FD, DA, getheilt sey; so leidet jede Kugelfläche, wie DEP einen gleichförmig darüber vertheilten Druck, der dem Gewicht der unmittelbar darauf liegenden Schichte gleich ist. Setzt man das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= g$, so ist dieser Druck $= g$. DEP. AD. (34 §. u. 13 §. Stat.) Eben dieser Druck pflanzt sich gegen die nächstfolgende Kugelfläche FGQ nach dem Gesetze des 12 §. fort; der unmittelbare Druck gegen DEP verhält sich zu dem gegen FGQ fortgepflanzten Druck, wie DEP zu FGQ: also ist der gegen FGQ fortgepflanzte Druck $= g$. FGQ. AD. Demnach ist auch dem im 17 §. festgesetzten Sprachgebrauch gemäß AD die Höhe des fortgepflanzten Drucks, und dazu kommt die Höhe DF des unmittelbaren Drucks: mithin leidet FGQ einen Druck, dessen Höhe $= AD + DF = AF$ ist. Diese Schlüsse setzt man leicht auf ähnliche Art wie im 20 §. weiter fort, und findet alsdenn allemahl, daß jede von den concentrischen Kugelflächen, also auch die unterste KLST einen Druck leide, dessen Höhe einerley ist, mit der Höhe der darüber stehenden Wassermasse. Weil übrigens die höchste Kugelfläche ABMN gar keinen Druck leidet; so erhellet, daß die ganze kugelförmige Masse Wasser sich selbst im Gleichgewicht erhalte.

Der 1. Zusatz.

36. Weil die vorgetragenen Schlüsse allemahl ihre Anwendung finden, die innere feste Kugel KLST mag so klein angenommen werden, als man will; so erhellet, daß auch dieser innere Raum mit Wasser

angefüllet seyn könnte, wenn alle Elemente desselben gegen denselben Mittelpunkt C schwer sind.

Der 2. Zusatz.

130 37. Nur alsdenn, wenn die äussere Fläche der Fig. gegen den Mittelpunkt C schweren Wassermasse ABDEF kugelförmig ist, erhält sich alles im Gleichgewicht. Wäre nemlich nicht ABDEF, sondern BDHI eine aus C beschriebene Kugelfläche, welche die Oberfläche der Wassermasse so schnitte, das oberhalb BKD, wenn das ein Stück der Kugelfläche ist, sich noch ein Theil BGDK der Wassermasse befände; so litte BKD noch einen Druck, der sich auch seitwärts fortgepflanzt. Demnach würde die Wassermasse BGKD noch zerfliessen; und das Gleichgewicht könnte nicht bestehen.

Der 3. Zusatz.

38. Weil alles Wasser auf der Erde eigentlich gegen den Mittelpunkt der Erde schwer ist; so erhellet aus den eben vorgetragenen Schlüssen, daß die Oberfläche des Weltmeeres, wenn alles ruhig ist, ein Stück von einer Kugelfläche sey, die mit der Erde selbst einerley Mittelpunkt hat.

Die 3. Aufgabe.

39. **Das Gewicht eines festen Körpers der auf dem Wasser schimmend erhalten wird, ist gegeben: man soll die Grösse des eingetauchten Theils im Cubicmaaß finden.**

Auflk. Man suche im Cubicmaaß, wie groß der Raum sey, welchen eine Menge Wasser füllet, die eben so viel wiegt, als der ganze Körper. (28 §.) Die Grösse dieses Raums wird in Cubicfussen oder Cubiczollen gefunden, nachdem man das Gewicht

des

des festen Körpers mit dem Gewicht eines Cubicfusses, oder Cubiczolles Wasser dividirt.

Z. E. Wenn der feste Körper 330 Pfund wiegt, so nimmt der eingetauchte Theil soviel Raum ein, als 330 Pfund Wasser, und diese füllen einen Raum von 5 Cubicfuß, weil 1 Cubicfuß Wasser 66 Pfund wiegt.

Zusatz.

40. Wenn umgekehrt die Grösse des eingetauchten Theils im Cubicmaaß bekannt ist; so läßt sich daraus leicht das Gewicht des ganzen festen Körpers finden. Denn er wiegt soviel, als die Menge Wasser, welche mit dem eingetauchten Theil gleichviel Raum einnimmt. Man multiplicire also die Zahl, welche die Grösse des eingetauchten Theils in Cubicfussen oder Cubiczollen angiebt, im ersten Fall mit dem Gewicht eines Cubicfusses im letzten Fall mit dem Gewicht eines Cubiczolles Wasser; so hat man das Gewicht der Menge Wasser, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum füllet: also zugleich das Gewicht des festen Körpers.

Die 4. Aufgabe.

41. Ein Körper ist aus zweyen mit einander vermischten ungleichartigen Massen zusammengesetzt, die nach der Vermischung noch einen Raum füllen, welcher der Summe der Räume gleich ist, die sie vor der Vermischung einnahmen: man soll durch eine hydrostatische Probe finden, wie viel von jeder dieser Massen in der aus ihrer Vermischung entstandenen enthalten sey.

Aufl. Man muß zuförderst das eigenthümliche Gewicht einer jeden von beyden unvermischten Mas-

sen suchen, wofern es nicht sonst schon bekannt ist: überdem sucht man auch das eigenthümliche Gewicht der vermischten Masse, (31 §.) und findet alsdenn leicht nach der Alligationsregel (111 §. Rech.) in welchem Verhältnisse beyde Massen zur Vermischung genommen sind. Hiernächst giebt die Vermischungsregel, welche mit der Societätsregel (110 §. Rech.) einerley ist, wieviel eigentlich von jeder Masse in dem Körper enthalten sey, der aus ihrer Vermischung entstanden ist.

Exempel. Ein aus Gold und Silber zusammen geschmolzener Körper wiegt 20 Pfund, und verliert im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund: die Frage ist, wieviel Gold, und wieviel Silber derselbe enthalte?

1) Man suche mit Hülfe der im 15 §. der Statik schon mitgetheilten Tafel, wieviel 20 Pfund fein Gold, und 20 Pfund fein Silber im Wasser verlieren. Das feine Gold ist 19,64mahl schwerer als Wasser: also wiegt eine Menge Wasser, die mit 20 Pfund Gold einerley Raum füllet, 19,64mahl weniger, und man findet, wieviel 20 Pfund Gold im Wasser verlieren, wenn man das Gewicht der 20 Pfunde oder 153600 Gran mit 19,64 dividirt. Das giebt 7821 Gran. Silber ist 11,091mahl schwerer als Wasser. Wenn also 20 Pfund oder 153600 Gran mit 11,091 dividirt werden, so findet man, daß 20 Pfund Silber 13849 Gran im Wasser verlieren.

2) Man setze nach der Alligationsregel

verlieren	Grane	auf
20 Pf. fein Gold	7821	4249 Gran fein Gold
20 Pf. schlecht Gold	9600	sind also
20 Pf. Silber	13849	1779 Gran Silber
		zugesetzt
		Summe 6028 Gr. schlecht Gold.

3) Man

3) Man setze ferner nach der Vermischungsregel

schlecht Gold fein Gold
6028 Gr. — 4249 Gr. — 20 Pfund?

Antw. 14,1 Pfund fein Gold,
also 5,9 Pfund Silber.

Die 5. Aufgabe.

42. Das specifische Gewicht einer flüßigen Masse vermittelst eines hineingetauchten festen Körpers zu finden, der darin nicht ganz untersinkt.

Aufl. Man suche die Grösse des eingetauchten Theils im Cubicmaaß, so ist das zugleich die Grösse einer Menge des flüßigen, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum ausfüllet, und deren Gewicht so groß ist, als das Gewicht des festen Körpers. Wenn also dieses Gewicht des festen Körpers mit der Zahl dividirt wird, welche die Grösse des eingetauchten Theils im Cubicmaasse angiebt; so erhält man das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles des flüßigen, nachdem die Grösse des eingetauchten Theils in Cubicfussen, oder Cubiczollen ausgedrückt ist.

Exempel. Von einem festen Körper der 10 Cubicfuß groß, und 330 Pfund schwer ist, taucht sich nur die Hälfte, wovon die Grösse 5 Cubicfuß beträgt, ins Wasser: wieviel wiegt also ein Cubicfuß Wasser? Antwort $\frac{330}{5} = 66$ Pfund.

Zusatz.

43. Wenn von einem und eben demselben festen Körper in zweyen verschiedenen Flüßigkeiten, sich ungleiche Theile eintauchen, so verhalten sich die eigenthümlichen Gewichte der Flüßigkeiten umgekehrt, wie die eingetauchten Theile: eine Flüßigkeit ist

nochmahl so schwer als die andre, wenn der in der ersten eingetauchte Theil des festen Körpers nur halb so groß ist, als der, welcher sich in der andern eintaucht. Es bleibt nemlich das Dividendum einerley: also müssen die Quotienten, welche die eigenthümlichen Gewichte der Flüßigkeiten anzeigen, sich umgekehrt wie die Divisoren verhalten, (21 §. Rech.) also umgekehrt wie die Grösse der eingetauchten Theile.

Die 5 Erklärung.

44. Durch eine Senkwage versteht man einen zu dem Gebrauch eingerichteten festen Körper, daß man aus der Grösse des Theils, der sich davon in eine Flüßigkeit senkt, auf das eigenthümliche Gewicht der Flüßigkeit, oder auch wohl noch eines andern mit jenem verbundenen festen Körpers schliessen kann.

Der 1. Zusatz.

131 45. Gewöhnlich besteht die Senkwage aus einer Fig. Röhre AB, die unten mit einer hohlen Kugel BC zusammenhängt, oder auch wohl mit zwoen solchen Kugeln, einer grössern BC, und einer andern CD unter der vorigen, die noch kleiner als jene ist. Man legt alsdenn soviel Bleyschrot oder sonst was schweres hinein, als nöthig ist, damit das Werkzeug in der einen oder der andern Flüßigkeit sich bis auf eine gewisse Tiefe senke, die an der Röhre durch ein Zeichen bemerkt wird. In leichtere Flüßigkeiten sinkt alsdenn die Senkwage tiefer, als in schwerere.

Der 2. Zusatz.

46. Man kann der Senkwage die Einrichtung geben, daß sie anzeigt, wievielmahl das specifische Gewicht des Wassers im specifischen Gewicht der mit der Senkwage zu prüfenden flüßigen Masse enthalten ist,

und

und die alsdenn erforderliche Eintheilung der Röhre läßt sich nach theoretischen Gründen durch Rechnung finden. M. s. davon die Anfangsgründe der Math. Wissensch. 2. Band 52 u. f. §. der Hydrostatik 198 u. f. S. auch die Anfangsgründe der Naturlehre 170 u. f. §. 179 u. f. S.

Erste Gründe der Aerometrie.

Die 1. Erklärung.

1. Eine flüßige Masse nennt man elastisch, wenn sie zwar durch einen äussern Druck in einen engern Raum zusammen gepreßt werden kann: aber auch desto stärker entgegendrückt, und zugleich nach allen Seiten sich auszubreiten strebt, je kleiner der Raum ist, worin sie schon ist zusammengepreßt worden. Ihr Bestreben sich nach allen Seiten auszubreiten, nennt man ihre Federkraft, oder Elasticität.

Der 1. Grundsatz.

2. Wenn eine elastische nicht schwere flüßige Masse, in einer graden prismatischen oder cylindrischen Röhre AB zwischen zwoen Stempeln CD, EF, eingeschlossen ist, und wenn alsdenn gleiche Kräfte diese Stempel einander entgegen treiben; so kommen diese Kräfte alsdenn allererst ins Gleichgewicht, 119 Fig.

wenn die flüßige Masse soweit zusammengedrückt ist, daß ihr Gegendruck gegen jeden Stempel der Kraft an jedem Stempel gleich ist. Der Druck pflanzt sich alsdenn zugleich nach allen Seiten auch gegen die feste Röhre gleichförmig fort.

Der 1. Zusatz.

119 Fig. 3. Wenn CD, EF, keine bewegliche Stempel, sondern statt dessen feste mit dem übrigen Umfang der Röhre zusammenhängende Seitenflächen wären; so würde die eingeschlossene elastische flüßige Masse gegen jede von diesen Flächen noch eben so stark, als vorhin drücken. Die Grösse dieses Drucks ist der Federkraft der flüßigen Masse gleich.

Der 2. Zusatz.

119 Fig. 4. Der von der Federkraft der eingeschlossenen Masse herrührende Druck gegen die Flächen CD, EF, und eben so gegen jedes andre Stück vom festen Umfange des Gefässes, welches die Masse umgiebt, ist über diese Flächen gleichförmig vertheilt: auch ist die Grösse dieses Drucks gegen jede solche Fläche, wie EF, bekannt, wenn die Höhe einer graden und schweren Wassersäule bekannt ist, die, wenn sie über derselben Fläche lothrecht stünde, vermöge ihres Gewichts diese Fläche eben so stark drücken würde.

Die 2. Erklärung.

5. Wenn eine ebene Fläche dem von der Federkraft einer elastischen flüßigen Masse herrührenden Druck ausgesetzt ist; so versteht man durch die Höhe des Drucks, wie im 16 §. der Hydrostatik die Höhe einer graden Wassersäule deren Grundfläche so groß ist, als die Fläche, die den Druck leidet, und deren Gewicht dem Druck gegen diese Fläche gleich

gleich ist. Hier nennt man eben diese Höhe auch wohl die der Federkraft der elastischen flüßigen Masse zugehörige Höhe.

Zusatz.

6. Diese Höhe ist einerley, die gepreßte Fläche mag groß oder klein seyn, so lange die flüßige Masse und ihre Federkraft einerley bleibt. Denn die doppelte Fläche leidet doppelt soviel Druck, und das Gewicht einer Wassersäule über der doppelten Grundfläche ist doppelt so groß, als über der einfachen Grundfläche, wenn die Höhe einerley bleibt.

Die 3. Erklärung.

7. Jede elastische flüßige Masse kann hier Kürze halber Luft heissen: daher hat die Wissenschaft von den Gesetzen des Gleichgewichts solcher Kräfte, die auf elastische flüßige Massen wirken, den Nahmen Aerometrie oder Aerostatik erhalten.

Die 1. Erfahrung.

8. Es giebt in der Natur wirklich eine solche elastische Luft, und alle Räume, die uns sonst leer zu seyn scheinen, sind damit angefüllet, wir sind überall mit einer solchen Luft umgeben, und es kann uns jeder Athemzug davon überzeugen. Allerley leichte Erfahrungen überzeugen uns, daß diese Luft sich zwar zusammendrücken lasse, aber auch ein Bestreben äussere, sich wieder auszubreiten. Man ist nicht im Stande, einen Stempel, der in einem hohlen festen Cylinder genau passet, bis auf den Boden herab zu stossen, der Cylinder müste denn im Boden eine Oefnung haben, durch welche die im Cylinder befindliche Luft ausweichen könnte. Sobald der Druck gegen den Stempel, nachdem derselbe bis auf eine gewisse Tiefe in den Cylinder hineingetrieben

ben ist, nachläßt, fährt der Stempel zurück, welches ein Erfolg ist, den man der Federkraft der im Cylinder eingeschlossenen Luft zuschreiben muß. Wenn der Cylinder im Boden, oder seitwärts, eine Oefnung hat, die man anfangs, wenn der Stempel hineingetrieben wird, mit einem Hahn verschliessen kann; so dringt die Luft hiernächst nach Oefnung des Hahns mit einem desto stärkern Geräusche heraus, je stärker man sie vermittelst des Stempels zusammengedrückt hatte.

Die 2. Erfahrung.

132 Fig. 9. Mit dem Gefäß EFG, welches nur oben bey G eine Oefnung hat, sey eine Röhre GH, und diese wieder mit dem Cylinder ABCD, worin ein Stempel K beweglich ist, in Verbindung. Die Röhre sey mit dem Hahn ML versehen, damit die Verbindung zwischen dem Gefäß und Cylinder nach Gefallen gesperret werden könne. Man ziehe den Stempel vom Boden des Cylinders zurück, und drehe hiernächst den Hahn so, daß die Verbindung zwischen dem Cylinder und Gefäß hergestellet werde. In demselben Augenblick wird man ein Gezische hören, und daß dieses daher rühre, weil ein Theil von der Luft, die im Gefäß befindlich war, in dem Cylinder getreten ist; davon kann man sich auf mehr als eine Art überzeugen. Wird der Hahn sogleich wieder verschlossen, so läßt sich nun der Stempel nicht mehr ganz bis auf den Boden zurücktreiben, wofern anders alles gut schliesset, und der Erfolg ist übrigens mit dem im 8 §. beschriebenen einerley.

Zusatz.

10. Es folgt daraus, daß die Luft schon in dem Zustande, wie sie um uns her befindlich ist, ein Bestreben

streben äussere, sich nach allen Seiten auszubreiten. Der Versuch gelingt allemahl, die Oefnung G mag oben, unten oder seitwärts befindlich seyn. In dem Fall, wenn sie unten oder seitwärts befindlich wäre, 133 Fig. liesse sich wohl eine andre mögliche Ursache des Erfolgs angeben. Die Luft könnte auch schwer seyn, und als eine schwere Flüßigkeit durch eine Seitenöfnung, oder auch unten ausfliessen. Sie würde aber in den Cylinder, auch alsdenn nur so hoch hineintreten können, als sie in dem damit verbundenen Gefäß gestanden hätte; und in dem Fall, welchen die 132 Figur vorstellet, würde sie dem Stempel gar nicht folgen, wenn sie zwar schwer aber nicht elastisch wäre.

Die 3. Erfahrung

11. Man kann anstatt des Hahnen im Boden 132 des Cylinders über der Oefnung H eine Klappe oder Fig. ein sogenanntes Ventil anbringen, welches sich durch einen leichten Druck von aussenher öfnen lässet, aber die Oefnung nur desto fester schliesset, wenn von innen her etwas dagegen drückt. Ferner kann auch der Stempel eine Oefnung erhalten, die von oben auf ähnliche Art mit einem Ventil geschlossen wird. Wenn alsdenn nach dem ersten Zuge der Stempel wieder gegen den Boden des Cylinders zurückgestossen, und dadurch die durch das Ventil bey H hineingetretene Luft zusammengedrückt wird, so stößt sie das Ventil im Stempel offen, und tritt durch diese Oefnung aus dem Cylinder heraus. Ein neuer Stempelzug nimmt alsdenn abermahl einen Theil Luft aus dem mit dem Cylinder verbundenen Gefässe weg, und man kann dies Verfahren mit eben dem Erfolge mehrmahls wiederhohlen.

Zusatz.

Zusatz.

12. Es folgt daraus, daß auch solche Luft, deren Dichtigkeit um ein beträchtliches geringer ist, als die Dichtigkeit der um uns her befindlichen Luft im natürlichen Zustande, noch ein Bestreben behalte, sich nach allen Seiten auszubreiten. Mit jedem Stempelzuge breitet sich die Luft, welche im Gefässe war, durch den ganzen innern Raum des Gefässes und des Cylinders aus: also wird ein Theil davon zwar weggenommen, im Gefäß aber bleibt allemahl noch Luft zurück, deren Dichtigkeit nun geringer ist, als die Dichtigkeit der in eben dem Gefäß eingeschlossenen Luft vor dem Stempelzuge war.

Die 4. Erklärung.

13. Man nennt ein solches Werkzeug eine **Luftpumpe**, welches dazu dient, die Luft aus einem eingeschlossenen Raum, wo nicht gänzlich, doch wenigstens größtentheils wegzunehmen, auch wohl umgekehrt mehr Luft hinein zu bringen, als derselbe für sich schon enthält.

Der 1. Zusatz.

14. Wenn die Luftpumpe dienen soll, die Luft zu verdünnen; so kann sie in der Hauptsache die im 9. bis 12 §. beschriebene Einrichtung haben, ob man gleich die Sache auf mancherley Art abändern, und alles zum Gebrauch unter andern auch dadurch bequemer einrichten kann, daß man, um die Bewegung des Stempels zu erleichtern, eine eigene mechanische Anordnung, entweder nach Art einer Winde, oder einer Zug- und Druckstange damit verbindet. Damit man sehen könne, was in der verdünnten Luft vorgehet, wählt man am liebsten gläserne Gefässe, und damit man desto bequemer allerley Sachen hinein legen

legen könne, läßt man einem solchen Gefässe die Gestalt einer Klocke geben, die man hiernächst auf einen metallenen recht eben abgeschliffenen horizontal liegenden Teller setzen kann. Der Teller dient alsdenn wie ein Boden des Gefäßes, worin die Luft verdünnt werden soll, er hat in der Mitte bey G eine 133 Oefnung, und diese ist vermittelst einer Röhre HIG Fig. mit dem Boden des Cylinders ABCD in Verbindung. Der untere Rand der Klocke muß recht eben abgeschliffen seyn, damit er an den Teller gut anschliesse. Um jedoch desto sicherer das Hineindringen der äussern Luft abzuhalten, legt man ein Stück nasses nicht gar zu dickes Leder auf den Teller, und darüber setzt man die Klocke.

Der 2. Zusatz.

15. Anstatt der Ventile dient auch im Boden 133 des Cylinders ein doppelt durchbohrter Hahn, den Fig. man bey jedem Stempelzuge so stellen kann, daß ein Weg aus der Klocke durch den Hahn in den Cylinder hinein offen ist, bey jedem Rückzuge aber in einer andern Stellung so, daß ein Weg aus dem Cylinder durch den Hahn in die äussere freye Luft offen ist. Wenn alsdenn die Klocke stark genug ist, daß man sie vermittelst einer dazu dienlichen Anordnung mit Schrauben am Teller befestigen kann; oder wenn statt dessen bey G sonst ein hinlänglich starkes Gefäß festgeschroben wird; so dient die Luftpumpe auch, die Luft im Gefässe zu verdichten. Man muß alsdenn, wenn der Stempel von Boden des Cylinders weggezogen wird, den Hahn so stellen, daß von aussen durch den Hahn Luft in den Cylinder hineintreten kann; beym Rückzuge aber muß der Hahn die andre Stellung haben, damit die in den

Cylin-

Cylinder hineingetretene Luft durch den Hahn in die Klocke, oder ein andres Gefäß, das ihre Stelle vertritt, hineingetrieben werden könne.

Der 3. Zusatz.

133 Fig. 16. Auch wenn die Pumpe Ventile hat, kann auf mehr als eine Art die Anordnung so gemacht werden, daß sie zum Verdichten dient: die Anordnung der Pumpe wird aber alsdenn ziemlich zusammengesetzt. Wenn das Werkzeug nur als Druckpumpe dienen soll; so ist nur ein Ventil im Boden des Cylinders nöthig, welches sich von innen nach aussen öfnet, wenn der Stempel gegen den Boden des Cylinders getrieben wird. Im Stempel könnte ein eben so liegendes Ventil angebracht seyn: statt dessen kann aber auch eine kleine Oefnung oberwärts im Cylinder dienen, wie bey L vorgestellt ist. Sobald der Stempel soweit heraufgezogen ist, daß er ein wenig über die Oefnung tritt; sobald dringt die Luft von aussen in den Cylinder hinein, und wird beym Rückzuge von dem Stempel durchs Ventil im Boden des Cylinders wieder hinausgetrieben.

Anmerkung.

Herr Otto von Guerike, vormahls Bürgermeister in Magdeburg und Churbrandenburgscher Rath, erfand um die Mitte des vorigen Jahrhunderts die Luftpumpe. Der damalige Lehrer der Mathematik zu Würzburg, Caspar Schott, machte eine Beschreibung davon im Jahr 1657. in einem Werke bekannt, das den Titel führt: Ars mechanico-hydraulico-pneumatica, daraus lernte sie Herr Robert Boyle kennen, und machte diese Erfindung mit einigen Veränderungen auch in England weiter bekannt. Von allen dem findet man mehr Nachricht in den Anfangsgründen der Mathematischen Wissenschaften, 2. Band, III. Abschnitt, 21 u. f. §. 239 u. f. S. und im VI. Theil des Lehrbegriffs der gesammten Mathematik

matik in V. Absch. der Pneumatik, im 60 u. f. §. §. 460 u. f. S. Die Versuche, welche man anstellet, um dadurch zu erfahren, was mit mancherley Massen in der verdünnten Luft vorgehet, gehören in die Naturlehre, und man kann darüber meine Anfangsgründe der Naturlehre zu Rath ziehen, besonders im XI. und XII. Abschn. 225 u. f. S.

Die 4. Erfahrung.

17. Eine fest zugebundene trockne Blase, worin nur wenig Luft in den Falten versteckt ist, schwillt auf, wenn man sie erwärmt. Sie zerspringt auch wohl mit einem Knall, wenn man sie, ohne sie zu verbrennen, stark genug erhitzt, und Luft genug darin vorhanden ist.

Der 1. Zusatz.

18. Einerley Luftmasse hat also bey gleicher Dichtigkeit in einerley Raum mehr Federkraft, wenn sie mehr erwärmt, und weniger Federkraft, wenn sie weniger erwärmt ist.

Der 2. Zusatz.

19. Die Versuche lehren ferner, daß die Federkraft gleich warmer und ungleich dichter Luftmassen sich sehr nahe, wie ihre Dichtigkeit verhalte. Doppelt so dichte Luft hat bey gleicher Wärme doppelt so viele Federkraft, als Luft von der einfachen Dichtigkeit. Weil Hr. Mariotte im Discours de la Nature de l'Air 1676, und im Traité des mouvemens de eaux, II Partie, II Discours, p. 165, Paris 1686, dieses Gesetz mit Versuchen bestättiget hat, so nennt man es gewöhnlich das Mariottische Gesetz der Dichtigkeiten der Luft, obgleich auch Robert Boyle schon auf eben dieses Gesetz verfallen war.

Die 5. Erfahrung.

20. Eine hohle Kugel, die mit einem Hahn verschlossen werden kann, nachdem man vorher die Luft soviel möglich herausgezogen hat, wäge man leer, und hiernächst auch mit Luft angefüllt; so findet man, daß im letzten Fall allemahl mehr Gegengewicht, als im ersten Fall nöthig ist. Demnach ist die Luft schwer. Gewöhnlich findet man in den niedrigsten Gegenden unten an der Erdfläche, die Luft bey mittelmäßiger Wärme ohngefehr 800 bis 850mahl leichter als Wasser, bald etwas mehr, bald weniger, weil die Dichtigkeit der Luft nicht immer einerley ist.

Zusatz.

21. Weil überall auf der ganzen Erde Luft anzutreffen ist, selbst auf den höchsten Bergen, wo nur Menschen hingekommen sind, und weil eben diese Luft auch schwer ist; so wird es begreiflich, wie selbige nach den Gesetzen des Gleichgewichts (35 §. Hydrost.) die ganze Erdkugel bis auf eine ansehnliche Höhe umgeben könne, ohne daß sie wegen ihrer Elasticität sich ausbreite und von der Erde entferne. Diese gesammte die ganze Erde umgebende Luftmasse heißt die Atmosphäre oder der Dunstkreis.

Der 1. Lehrsatz.

22. Wenn bey gleicher Wärme in der Atmosphäre alles im Gleichgewicht ist, so hat die Luft unten an der Erdfläche die gröste Federkraft und Dichtigkeit, in grössern Höhen von der Erdfläche nimmt aber ihre Federkraft und Dichtigkeit immer mehr ab, bis endlich an der äussersten Gränze der Atmosphäre ihre Federkraft unmerklich wird.

Beweis.

Beweis. Weil die Luft flüßig und gegen den Mittelpunct der Erde schwer ist, so muß sie im Zustande des Gleichgewichts die Erdkugel überall in gleicher Höhe umgeben. (37 §. Hydrost.) Demnach stelle KLST die Erdkugel vor, und die Atmosphäre sey vermittelst solcher Kugelflächen HIR, OWX, FGQ, DEP, u. s. f. die mit der Erdkugel einerley Mittelpunct haben, in Schichten von sehr kleinen Höhen eingetheilt; die Dichtigkeit der Luft in der höchsten Schichte sey $n \cdot g$, und g das eigenthümliche Gewicht des Wassers: so erhellet, daß die Kugelfläche DEP dem unmittelbaren Druck $= n \cdot g \cdot$ DEP. AD ausgesetzt sey, (35 §. Hydrost.) und die Höhe dieses Drucks ist $= n \cdot$ AD. (18 §. Hydrost.) In der nächstniedrigern Schichte sey die Dichtigkeit der Luft $= m \cdot g$, so leidet FGQ ausser dem unmittelbaren Druck $= m \cdot g \cdot$ FGQ. FD auch noch den fortgepflanzten Druck $= n \cdot g \cdot$ FGQ. AD, (35 §. Hydrost.) und es ist $n \cdot$ AD $+ m \cdot$ FD die Höhe des gesammten Drucks gegen FGQ. Ferner sey $r \cdot g$ die Dichtigkeit der Luft in der dritten Schichte, so ergiebt sich wie vorhin, daß OWX einen Druck leide, womit die Höhe $n \cdot$ AD $+ m \cdot$ FD $+ r \cdot$ OF zusammengehört. So erhellet, daß jede folgende Schichte einem Druck ausgesetzt sey, dessen Höhe schon grösser ist, als die Höhe des Drucks gegen die nächstvorhergehende war. Weil nun in jeder Schichte die Federkraft der Luft mit diesem Druck im Gleichgewicht ist; so ist die Federkraft der Luft in einer solchen Schichte desto grösser, je näher sie der Erdfläche ist: unten an der Erdfläche hat also die Luft die gröste Dichtigkeit und Federkraft. Dagegen ist die Federkraft desto kleiner, mithin auch 129 Fig.

die Dichtigkeit der Luft desto kleiner, (19 §.) je höher die Schichte über der Erdfläche erhaben ist. An der äussersten Gränze der Atmosphäre ist die Luft weiter keinem Druck ausgesetzt: also muß daselbst ihre Federkraft unmerklich seyn.

Zusatz.

23. Wenn die Höhe OH einer solchen Schichte gegeben, und die Dichtigkeit der Luft in dieser Schichte $= z \cdot g$, die Höhe des Drucks gegen ihre obere Gränze $= p$ ist; so findet man die Höhe des Drucks gegen die untere Gränze HIR $= p + z \cdot$ OH.

Die 6. Erfahrung.

23. Eine gläserne etwas mehr als 28 Pariser Zoll lange Röhre, die an dem einen Ende verschlossen ist, kann man mit Queckſilber füllen. Wenn man hiernächst diese Röhre umkehrt, und die Oefnung mit dem Finger beym Umkehren verschlossen hält; so kann man das offene Ende in ein Gefäß mit Queckſilber setzen, ohne daß alles Queckſilber aus der Röhre herabfiele, wenn man die Röhre unten nur alsdenn allererst öfnet, wenn das Ende der Röhre ins Queckſilber eingetaucht ist. Das Queckſilber sinkt zwar anfangs in der Röhre etwas herab, es bleibt aber bald darauf ohngefehr 28 Pariser Zoll hoch über der Oberfläche des Queckſilbers im Gefäß stehen. Evangelista Torricellius hat diesen Versuch mit den daraus flieſſenden Folgen zuerst bekannt gemacht, und daher hat die Röhre von ihm den Nahmen der Torricellianischen Röhre, nachher aber auch den Nahmen des Barometers erhalten.

Der 2. Lehrsatz.

24. In den niedrigsten Gegenden an der Erdfläche drückt die Luft wegen ihrer Federkraft

Kraft gegen jede ebene Fläche so stark, als wenn eine Queckſilber-Säule 28 Pariſer Zoll hoch, oder ſtatt deſſen eine 32 Fuß hohe Waſſerſäule lothrecht darüber ſtünde.

Beweis. Wenn AB die oben bey A verſchloſſene und unten bey B offene Torricellianiſche Röhre, CD aber das Gefäß vorſtellet, worin das Queckſilber bis an EF ſteht, wenn es ſich in der Röhre in der Höhe GH erhält; ſo erhellet, daß das Queckſilber nur bis an G in die Röhre hineintreten könnte (24 §. Hydroſtat.) wenn nicht ein Druck gegen die Fläche EF des Queckſilbers im Gefäß mit der Säule GH das Gleichgewicht hielte: Dieſer Druck muß ſo groß ſeyn, als das Gewicht einer Queckſilberſäule über der Grundfläche EF in der Höhe GH. Weil nun nichts vorhanden iſt, das gegen die Fläche EF drücken könnte, als die Luft; ſo muß dieſer Druck der Luft mit der Queckſilberſäule GH im Gleichgewicht ſeyn. Jede andere Ebene leidet demnach ebenfalls ſo viel Druck, als wenn eine 28 Zoll hohe Queckſilberſäule lothrecht darüber ſtünde, (6 §.) oder ſtatt deſſen eine 14mahl 28 Zoll, oder 32 Fuß hohe Waſſerſäule, weil Queckſilber 14mahl ſchwerer als Waſſer iſt. 135 Fig.

Der 1. Zuſatz.

25. Wenn man die Höhe der Queckſilberſäule in der Torricellianiſchen Röhre, welche mit dem Druck der Luft das Gleichgewicht hält, die **Barometerhöhe** nennt; ſo dient dieſe aufs genaueſte die Gröſſe des Drucks der Luft jedesmahl zu finden, weil die Erfahrung lehrt, daß dieſe Höhe an einerley Ort nicht immer einerley ſey, ſondern bald etwas

höher bald etwas kleiner, als 28 Pariser Zolle ausfalle.

Der 2. Zusatz.

26. Die eigentliche Barometerhöhe läßt sich am bequemsten messen, wenn Röhre und Gefäß an einer in Zolle und Linien eingetheilten Tafel befestiget sind. Die gewöhnlichste Einrichtung des Barometers, wie es die 136 Figur vorstellet, ist jetzt sehr allgemein bekannt, wobey das Gefäß mit Queckſilber eine kleine gläserne Flasche FG ist, die mit der Röhre AB zusammen hängt. Wenn in der kleinen Flasche das Queckſilber bis an DE in der Röhre bis an H steht, so ist CH die Barometerhöhe. Von andern Einrichtungen findet man Nachrichten im 2ten Bande der Anfangsgründe der Math. Wiſſ. im IV. Abschn. der Aerostatik, und im 3ten Theil des Lehrbegriffes der ges. Mathem. im 3ten Abschnitt der Aerostatik.

136 Fig.

Der 3. Zusatz.

27. Was dem im 17 §. der Hydrostatik erklärten Sprachgebrauch gemäß Höhe des Drucks der Luft gegen eine Fläche heiſſen würde, das könnte man hier auch die Waſſer-Barometerhöhe nennen. Die Queckſilber-Barometerhöhe ist 14mahl niedriger. Es ist an sich einerley, ob das, was oben Höhe des Drucks hieß, die Höhe einer Waſſersäule, oder die Höhe einer Queckſilbersäule seyn soll, deren Gewicht dem Druck gleich ist: hier ist es gewöhnlich bequemer, daß man die Höhe einer Queckſilbersäule verstehe, die alsdenn schlechthin Barometerhöhe heißt, wenn vom Druck der Luft die Rede ist.

Der

Der 4. Zusatz.

28. Auf einem Berge ist die Barometerhöhe allemahl kleiner als unten am Fuß des Berges, und diese Höhe muß desto mehr abnehmen, je höher man den Berg hinaufkömmt. (24 §.) Wenn im 23 §. das dortige g das eigenthümliche Gewicht des Queckſilbers, und z die Zahl bezeichnet, welche angiebt, wievielmahl die Luft zwiſchen den Gränzen OWX und HIR leichter als Queckſilber iſt; wenn ferner p die Barometerhöhe an der Gränze OWX bezeichnet; ſo iſt $p + z$. OH die Barometerhöhe an der Gränze HIR.

Die 7. Erfahrung.

29. Alle bekannte beſonders flüßige Maſſen, werden von der Wärme in einen gröſſern Raum ausgedehnt, und nehmen nach der Erkaltung wieder einen kleinern Raum ein.

Die 5. Erklärung.

30. Ein Thermometer nennt man ein ſolches Werkzeug, welches ungleiche Grade der Wärme mit einander zu vergleichen, oder auch nur Aenderungen beſonders in der Wärme der Luft bemerklich zu machen dient.

Zusatz.

31. Wenn man eine enge gläſerne Röhre AB, 137 Fig. die unten mit einer Kugel, oder ſonſt mit einem kleinen Behältniß von willkührlicher Geſtalt in Verbindung iſt, bis an eine gewiſſe Stelle der Röhre mit geſchwächten Weingeiſt, oder Queckſilber, gefüllt hat; ſo ſteigt die flüßige Maſſe in der Röhre höher, wenn man das Werkzeug erwärmt, und fällt tiefer herab, wenn das Werkzeug kälter wird. Die Urſache iſt, weil Wärme und Kälte ſtärker

auf die Flüßigkeit als auf das Glas wirken. Eine solche Röhre mit der Kugel befestiget man an einer eingetheilten Tafel, so hat man ein Thermometer.

Die 8. Erfahrung.

32. Man setze die Kugel mit dem untern Ende der Röhre in schmelzenden Schnee, oder in zerflossenes thauendes Eis, und bemerke die Stelle an der Röhre, wo die Flüßigkeit stehen bleibt, unter dem Nahmen des Frostpuncts. Nachher erwärme man die Kugel und Röhre allmählig, tauche sie zuletzt in siedendes Wasser, und bemerke die Stelle, wo nun die Flüßigkeit stehen bleibt, unter dem Nahmen des Siedepuncts. Hat man diese Stellen an einem Thermometer einmahl richtig gesucht, und man wiederhohlt das Verfahren mehrmahl zu verschiedenen Zeiten, auch an verschiedenen Orten; so lehrt die Erfahrung, daß sowohl im schmelzenden Schnee oder Eise, als auch im siedenden Wasser die Flüßigkeit immer bey einerley Stelle stehen bleibe, wenn man nur den Versuch im siedenden Wasser immer zu einer solchen Zeit anstellet, wenn das Barometer in derselben Höhe stehet, wie es das erstemahl stand. Den Frostpunct zeigt die Flüßigkeit in freyer Luft allemahl beym angehenden Frostwetter.

Zusatz.

33. Die übrige Einrichtung des Thermometers kommt nur darauf an, daß man den Abstand zwischen dem Frostpunct und Siedepunct, welcher der Fundamentalabstand heissen kann, in eine gewisse Menge gleicher Theile unter dem Nahmen der Thermometergrade richtig eintheile. Nachdem man demselben entweder 180, oder nur 80, oder

150

150 gleiche Theile giebt, nachdem erhält man die Fahrenheitische, oder die Reaumürische, oder die Delisliſche Scale. Nach Reaumur ſetzt man beym Froſtpunct 0, und zählt 80 Grade bis zum Siedepunct hinauf. Nach Delisle wird oben beym Siedepunct 0 geſetzt, und man zählet 150 Grade von oben herab bis zum Frierpunct. Nach Fahrenheit aber trägt man zuförderſt 32 ſolcher Grade, wovon 180 den Fundamentalabſtand ausmachen, unter den Froſtpunct gegen die Kugel zu, und ſetzt dahin, wo ſich die 32ſte Abtheilung endiget, die Null: von dieſer Null an zählet man hiernächſt 212 Grade bis zum Siedepunct hinauf, ſo fällt der 32ſte mit dem Froſtpunct zuſammen. M. ſ. den Lehrbegriff der geſ. Mathem. im III. Theil, im IV. Abſchn. der Aeroſtat. 336 u. f. S. auch die Anfangsgründe der Mathem. Wiſſenſch. 2 Band, V. Abſchn. der Aeroſtat. 275 u. f. S.

Der 4. Lehrſatz.

34. Wenn *CD* ein Stück der Erdfläche, *CA* aber eine lothrechte Linie bis an die höchſte Gränze der Atmoſphäre vorſtellet, die Stellen *H* und *M* aber ungleich hoch über der Erdfläche erhaben ſind; ſo verhalten ſich die Höhen *CM*, *CH*, der Stationen über der Erdfläche, wie die Logarithmen der Verhältniſſe, in welchen die Barometerhöhen abnehmen. 142 Fig.

Beweis. Die lothrechte Höhe CA der Atmoſphäre ſey bey E, F, G, H, u. ſ. f. fort vermittelſt wagrechter Flächen in ſehr kleine gleiche Theile getheilt, welche nun die Höhen eben ſo vieler Luftſchichten vorſtellen, die ſo niedrig ſind, daß ſich die Dich-

tigkeit der Luft von C bis E, von E bis F u. s. f. nicht merklich ändert. Man bezeichne die Barometerhöhen in E, F, G, H, u. s. f. mit dem Buchstaben e, f, g, h, u. s. w., unten in C aber an der Erdfläche sey die Barometerhöhe $= a$. Ferner lasse man $\Delta, \alpha, \beta, \gamma$, u. s. f. die Zahlen bezeichnen, welche die Dichtigkeit der Luft in diesen Schichten nach der Ordnung von unten hinauf in Vergleichung mit der Dichtigkeit des Queckſilbers ausdrücken: so hat man $e : f = \Delta : \alpha$, (19 §.) und CE = EF, also $e : f = \Delta . CE : \alpha . EF$. Weiter ist $a = e + \Delta . CE$, und $e = f + \alpha . EF$, (28 §.) also $\Delta . CE = a - e$, und $\alpha . EF = e - f$; mithin $e : f = a - e : e - f$, oder $a - e : e - f = e : f$. Daraus folgt $a : e = e : f$, (172 §. Geom.) folglich sind die Barometerhöhen in C, E, F, in geometrischer Progreßion. Aber aus eben dem Grunde sind die Barometerhöhen e, f, g, in den Stellen E, F, G, wiederum in geometrischer Progreßion: mithin nehmen diese Barometerhöhen in einerley geometrischen Progreßion ab, wenn die Höhen der Schichten gleich groß sind.

Es sey nun $CH = m . CE$, und $CM = n . CE$, in M sey die Barometerhöhe $= p$, in H aber $= q$; so laufen diese Barometerhöhen in geometrischer Progreßion fort, die mit a anfängt. Zählt man das erste Glied nicht mit, so ist von den Gliedern, die nach dem ersten folgen,

das 1ste Glied $= e$
das 2te . . . $= f$
das 3te . . . $= g$
das $m$te . . . $= q$
das $n$te . . . $= p$

Die-

Diesemnach ist ferner

$\log. \frac{a}{p} : \log. \frac{a}{q} = n : m$, (18 §. Trigon.)

also $\log. \frac{a}{p} : \log. \frac{a}{q} = CM : CH$.

Der 1. Zusatz.

35. Es sey k die Höhe einer gleichförmig dichten Luftsäule, die, wenn sie durchgängig die Dichtigkeit Δ hätte, mit dem Druck der ganzen Atmosphäre zunächst an der Erdfläche das Gleichgewicht hielte; so ist an der untersten Gränze C die Barometerhöhe $a = \Delta . k$, und an der Gränze E ist vermöge der Voraussetzung, die Barometerhöhe $= e$, also $a = e + \Delta . CE$, (28 §.) und das giebt $e = \Delta . (k - CE)$. Daraus folgt, es sey $a : e = k : k - CE$, oder $a : e = \frac{k}{k - CE} : 1$. Ferner ist $\frac{k}{k - CE} = 1 + \frac{CE}{k - CE}$ desto näher $= 1 + \frac{CE}{k}$, je kleiner CE genommen wird, also hier ohne merklichen Fehler $\frac{k}{k - CE} = 1 + \frac{CE}{k}$, und man erhält $a : e = 1 + \frac{CE}{k} : 1$, oder $\frac{a}{e} = 1 + \frac{CE}{k}$. Vermöge des 34 §. aber ist $l\frac{a}{p} : l\frac{a}{e} = CM : CE$, also auch

$$l\frac{a}{p} : l\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = CM : CE.$$

Der

Der 2. Zusatz.

36. Wenn die Dichtigkeit der Luft unten an der Erdfläche 800mahl kleiner als die Dichtigkeit des Wassers, und zugleich ihre Federkraft so groß ist, daß sie mit einer 32 Pariser Fuß hohen Wassersäule das Gleichgewicht hält; so würde ein 800mahl 32 Fuß oder 25600 Fuß hohe Luftsäule, wenn sie durchgängig einerley Dichtigkeit mit der untern Luft hätte, ebenfalls mit der Federkraft der untern Luft im Gleichgewicht seyn. Demnach wäre im 47 §. die Höhe $k = 25600$ Pariser Fuß oder 4266 Toisen. Man setze die Zahl $\frac{CE}{k} = \frac{1}{10000000}$; so wird $CE = \frac{1}{10000000} k = 0{,}00256$ Fuß, und diese Höhe ist so sehr klein, daß die Aenderung in der Dichtigkeit der Luft von C bis E nicht merklich ist, wie den Schlüssen des 34 §. gemäß erfordert wird.

Der 3. Zusatz.

37. Die Dichtigkeit und Federkraft der Luft ist zwar nicht immer einerley, folglich auch die Höhe k nicht immer von einerley Grösse: indessen kann doch der angenommene Werth der Zahl $\frac{CE}{k} = \frac{1}{10000000}$ allemahl beybehalten werden. In den Fällen, wenn die Dichtigkeit der Luft nicht völlig 800mahl kleiner als die Dichtigkeit des Wassers wäre, würde k noch kleiner, also auch CE noch kleiner ausfallen, als die eben geführte Rechnung ergiebt. Wäre aber auch die Dichtigkeit der Luft mehr denn 800mahl, vielleicht zuweilen 1000mahl kleiner als die Dichtigkeit des Wassers; so würde doch die Höhe k nicht über

32000

32000 Fuß betragen, und das würde $CE = \frac{32}{10000} = 0{,}0032$ Fuß geben, immer noch so klein, als die im 34 §. angenommene Voraussetzung es erfordert.

Der 4. Zusatz.

38. Es sey also $\frac{CE}{k} = \frac{1}{10000000}$, also $1 + \frac{CE}{k} = 1{,}0000001$, und $CE = \frac{1}{10000000} k$; so findet man aus vollständigen Logarithmen-Tafeln log. Brigg. $\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = 0{,}00000004342944$ beynahe $= 0{,}00000004343$. Es war aber $l\frac{a}{p} : l\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = CM : CE$, (35 §.) also erhält man $l\frac{a}{p} : 0{,}00000004343 = CM : \frac{1}{10000000} k$, mithin ferner $l\frac{a}{p} : 0{,}4343 = CM : k$. Daraus folgt $l\frac{a}{p} = \frac{0{,}4343 \cdot CM}{k}$, und umgekehrt $CM = \frac{k \cdot l(a:p)}{0{,}4343}$.

Der 5. Zusatz.

39. Es sey nun in jeder andern Stelle H die Barometerhöhe $= q$; so ist $l\frac{a}{q} = \frac{0{,}4343 \cdot CH}{k}$, mithin $l\frac{a}{p} - l\frac{a}{q} = \frac{0{,}4343}{k} \cdot (CM - CH)$. 142 Fig.

Weil

Weil ferner $l\frac{a}{p} - l\frac{a}{q} = l\frac{q}{p}$ (24 §. Trigon.) und CM − CH = HM ist; so erhält man $l\frac{q}{p} = \frac{0{,}4343 \cdot HM}{k}$, und umgekehrt $HM = \frac{k \cdot l(q:p)}{0{,}4343}$. Diese Gleichung ist so allgemein, daß die im vor. §. gefundene als ein besondrer Fall, nemlich der, wenn die unterste Stelle an der Erdfläche angenommen wird, darunter enthalten ist. Wird nemlich CM statt HM gesetzt, so muß man a statt q setzen; das giebt die Gleichung des vor. §.

Die 2. Aufgabe.

142 Fig. 40. Man hat in zweyen ungleich hoch über der Erdfläche erhabenen Stationen H und M die Barometerhöhen q und p beobachtet, auch hat man die Höhe HM der einen Station über der andern gemessen: man soll die Höhe k einer gleichförmig dichten Luftsäule finden, welche mit der Federkraft der Luft unten an der Erdfläche im Gleichgewicht seyn würde.

Aufl. Die Gleichung des vor. §. giebt $0{,}4343 \cdot HM = k \cdot l(q:p)$, also $k = \frac{0{,}4343 \cdot HM}{l(q:p)}$.

Hr. Bouguer (M. s. in dem Werk, das den Titel führt: Figure de la Terre, Paris 1749, die Introduction, mit der Aufschrift: Relation abregée du voyage au Peru, pag. xxxix.) fand die Barometerhöhe zu Cárabourou 254,75 Linien $= q$, auf dem Pichincha 191 Linien $= p$. Also war

l. q

$$\text{l. } q = 2{,}4061142$$
$$\text{l. } p = 2{,}2810334$$

mithin $\text{l.} \frac{q}{p} = 0{,}1250808$.

oder $\text{l}(q:p)$ beynahe $= 0{,}1251$. Die Station auf dem Pichincha war 1209 Toisen höher, als die zu Carabourou, also HM $= 1209$. Daraus findet man $0{,}4343 \cdot \text{HM} = 525{,}0687$, und $k = \frac{525{,}0687}{0{,}1251} = 4197$ Toisen, welches von der Bestimmung im 48 §. nicht viel unterschieden ist.

Wenn die Barometerhöhe in der untern Station 29 Zoll, also 348 Linien, in der obern eine Linie weniger, nemlich 28 Zoll 11 Linien beträgt, und zwischen beyden Stationen eine Wärme von $16\frac{1}{4}$ Graden des Queckſilberthermometers mit der Reaumürſchen Scale herrſcht; ſo iſt nach den Erfahrungen des Herrn de Luc (Unterſuchungen über die Atmoſphäre, 2ter Theil, 561 u. 588 §., 99 und 126 S. der Ueberſ.) die Höhe der einen Station über der andern 12,497 Toiſen. Man ſetze alſo $q = 348$ Linien, $p = 347$ Linien, ſo findet man

$$\text{l. } q = 2{,}5415792$$
$$\text{l. } p = 2{,}5403295$$

alſo $\text{l.} \frac{q}{p} = 0{,}0012497$

Ferner iſt HM $= 12{,}497$ Toiſen, und man erhält $k = \frac{0{,}4343 \cdot 12{,}497}{0{,}0012497} = 4343$ Toiſen.

Die

Die 3. Aufgabe.

142 41. Man hat in zweyen ungleich hoch über
Fig. der Erdfläche erhabenen Stationen H und M die Barometerhöhen q und p beobachtet, und es soll daraus die Höhe HM der obern Station über der untern gefunden werden: vorausgesetzt, daß die Atmosphäre zur Zeit der Beobachtung völlig im Gleichgewicht gewesen, auch wenigstens zwischen beyden Stationen durchgängig gleich warm gewesen sey.

Aufl. Es ist $HM = \frac{k \cdot l(q:p)}{0{,}4343}$ (39 §.) $= \frac{10000 \cdot k \cdot l(q:p)}{4343}$. Weil nun bey dem Zustande der Atmosphäre, den die Erfahrungen des Herrn de Luc voraussetzen, $k = 4343$ Toisen angenommen werden muß, so wird bey eben diesen Voraussetzungen

$$HM = 10000 \cdot l\frac{q}{p}.$$

Bey dem Zustande der Atmosphäre, den die Erfahrungen des Herrn Bouguer voraussetzen, ist $k = 4197 = 4343 - 146$ beynahe $= 4343\,(1 - \frac{1}{30})$. Werden diese Werthe gebraucht, so erhält man HM

$$= (1 - \tfrac{1}{30}) \cdot 10000 \cdot l\frac{q}{p}.$$

Herr Bouguer erinnert, daß die Rechnungen nach dieser Gleichung in der untersten Luftgegend der gemäßigten Zone bis auf eine Höhe von 700 oder 800 Toisen nicht so richtige Resultate als in grössern Höhen geben, und das aus dem Grunde, weil der Zustand der Luft in höhern Gegenden sehr viel beständiger

diger ist, als in den untern Gegenden. In Höhen, die grösser als 700 bis 900 Toisen sind, ändert sich die Barometerhöhe überhaupt nur um $1\frac{1}{2}$ Linien, wenn dagegen die Aenderung nahe an der Erdfläche auf 2 Zoll beträgt. Dieserwegen findet man, wie hoch eine Station über der Meeresfläche liegt, am sichersten so, daß man sucht, wie tief sie unter dem steinigten Gipfel des Pichincha liegt, dessen Höhe vermittelst geometrischer Messungen von 2434 Toisen ist befunden worden: auch stehet daselbst das Barometer fast unveränderlich 15 Zoll 11 Linien, oder 191 Linien hoch.

Auf dem Gipfel des Pic von Teneriffa ist die Höhe des Barometers von 209 Linien beobachtet worden, also setzt man $q = 209$, $p = 191$, und findet

$$\text{l. } q = 2{,}3201463$$
$$\text{l. } p = 2{,}2810334$$

mithin $\text{l.} \frac{q}{p} = 0{,}0391129$

und $10000\ \text{l} \frac{q}{p} = 391{,}129$ Toiſ.

Man ſubtr. $\frac{1}{30}\left(10000\ \text{l} \frac{q}{p}\right) = 13$ Toiſen.

Ueberſchuß der Höhe des Pichincha über dem Pic . . . . . 378 Toiſen.

Dieſe ſubtrahirt von der Höhe des Pichincha . . . . . 2434 Toiſ. giebt

die Höhe des Pic auf Teneriffa 2056 Toiſen.

Die Regel des Herrn de Lüc ist auch in niedrigen Gegenden brauchbar, wenn man bey Beobachtung der Barometerhöhen zugleich die Grade der Wärme in der untern und obern Station nach dem Queckſilber-

Thermometer mit der Reaumürschen Scale beobachtet. Findet man die Wärme in der untern und obern Station verschieden, so nimmt man aus beyden ein Mittel. Bey geringerer Wärme, als der von $16\frac{3}{4}$ Graden des erwehnten Thermometers ist jede von den Luftschichten, mit deren äussern Gränzen einerley Barometerhöhe zusammen gehört, niedriger, als jene Rechnung voraussetzt, bey grösserer Wärme aber höher, und Hr. de Lüc schließt aus seinen Erfahrungen: man müsse für jeden Grad des Queckſilber-Thermometers mit der erwehnten Scale $\frac{1}{215}$ der Höhe,

welche die Gleichung $HM = 10000\, l\frac{q}{p}$ giebt,

bey geringerer Wärme, als der von $16\frac{3}{4}$ Gr. abziehen, bey grösserer Wärme aber zusetzen.
M. s. a. a. O. den 607 §. 137. 138 S.

Der 1. Zusatz.

42. Wenn man hiebey alles völlig genau nehmen will, so muß man noch erwägen, daß eine in der Barometerhöhe auf gewöhnliche Art eingeschlossene Queckſilbersäule, die mit der Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält, bey grösserer Wärme länger sey, als bey geringerer Wärme. Eine bey der Temperatur des thauenden Eises 27 Zoll lange Queckſilbersäule wird nach Hrn. de Lüc (a. a. O. 364. 369 §.) um 6 Linien länger, wenn sie bis zur Hitze des siedenden Wassers erwärmt wird. Eine Säule, die bey der Temperatur des thauenden Eises nur halb so lang wäre, würde um 3 Linien länger werden, wenn sie bis zur Wärme des siedenden Wassers erhitzt würde. Ueberhaupt kann man annehmen, daß bey gleicher Aenderung der Wärme das Verhältniß der Aenderungen

rungen in der Länge von zwo Queckſilberſäulen mit dem Verhältniß ihrer Längen einerley ſey.

Der 2. Zuſatz.

43. Wenn die Wärme 17 Grade beträgt, ſo iſt die Höhe des Queckſilbers über 0 im Thermometer $= \frac{17}{80}$ des Fundamentalabſtandes. Dieſen und jeden ähnlichen Bruch bey einem andern Grade der Wärme kann man die Thermometerhöhe nennen, den Fundamentalabſtand = 1 geſetzt. Iſt nun die Federkraft der Luft ſo groß, daß ſie bey 0 Grad Wärme 27 Zoll hoch Queckſilber trägt, ſo wird bey eben der Federkraft der Luft und 17 Grad Wärme die Barometerhöhe 27 Zoll $+ \frac{17}{80}$. 6 Lin. betragen: alſo 27 Zoll $+ \frac{m}{80}$. 6 Lin. bey m Graden Wärme.

Die 4. Aufgabe.

44. Man hat die Barometerhöhe bey einem gewiſſen Grade der Wärme nach dem Queckſilber-Thermometer mit der Reaumürſchen Scale beobachtet; man ſoll finden: wie groß die Barometerhöhe bey eben der Federkraft der Luft ſeyn würde, wenn das Thermometer 0 Grad Wärme zeigte.

Aufl. Das Barometer ſtehe 28 Zoll hoch bey 17 Grad Wärme. Man ſuche zuerſt, wie hoch es bey 17 Grad Wärme ſtehen würde, wenn es bey 0 Grad Wärme 27 Zoll hoch wäre: (43 §.) dieſe Höhe würde 27 Zoll $+ \frac{17}{80}$. 6 Lin. betragen. Ferner ſetze man an

27 Zoll $+ \frac{17}{80}$. 6 Lin. : 28 Zoll $= \frac{17}{80}$. 6 Lin. : geſ. Gröſſe, um welche man die Barometerhöhe von 28 Zoll vermindern muß. (42 §.)

Dieſe Verminderung beträgt alſo

$$\frac{28 \text{ Zoll}}{(27 + \frac{17}{80} \cdot \frac{1}{2}) \text{ Zoll}} \cdot \frac{17}{80} \cdot 6 \text{ Lin.}$$

Allemahl also, wenn die beobachtete Barometerhöhe in Zollen ausgedrückt $= a$ ist, und die Zahl der Grade der Wärme $= m$, so hat man für die gesuchte Grösse den Ausdruck $\frac{a}{(27 + \frac{m}{80} \cdot \frac{1}{2})\text{ Zoll}} \cdot \frac{m}{80} \cdot 6$ Lin. Weil aber m nicht leicht mehr als 20 betragen wird; so ist gewöhnlich dieser Ausdruck beynahe $= \frac{a}{27\text{ Zoll}} \cdot \frac{m}{80} \cdot 6$ Lin. Man zieht diese Verbesserung von der Barometerhöhe a ab, wenn das Thermometer m Grade über 0 zeigt: widrigenfalls wird sie addirt.

Der 1. Zusatz.

45. Herr de Lüc hat zu diesem Gebrauch die Thermometerscale ohne sonderlichen Nutzen verändert, da ohnehin die so grosse Verschiedenheit der Thermometersprache unangenehm ist. Er theilt den Fundamentalabstand in 96 Grade: daher muß man in dem Ausdruck für die Correction die Zahl 96 statt 80 setzen, wenn man seine Scale brauchen will, und es ist alsdenn die Correction $= \frac{a}{27\text{ Zoll}} \cdot m \cdot \frac{1}{16}$ Lin. Ferner sind 12 de Lücsche Grade mit 10 Reaumürschen einerley. Noch weniger wäre es nöthig gewesen, die Stelle an der Scale zu verändern, wo 0 stehen soll. Diese setzt Hr. de Lüc 12 seiner Grade, also 10 Reaumürsche Grade über dem Frostpunct: also behält er bis zum Siedepunct 84 seiner Grade, oder 70 Reaumürische.

Der 2. Zusatz.

46. Das Barometer stehe 27 Zoll hoch bey 0 Grad Wärme nach de Lüc, oder 10 Grad Wärme nach

nach Reaumür; so wäre bey eben der Federkraft der Luft, und o Graden Wärme nach Reaumür, die Barometerhöhe = 27 Zoll $-\frac{1}{8}$. 6 Lin. = 27 Zoll $-\frac{3}{4}$ Lin. = $26\frac{15}{16}$ Zoll. (44 §.) Eine so lange Queckſilberſäule dehnt ſich bis zur Hitze des Siedepuncts aus um $\frac{26\frac{15}{16}}{27}$. 6 Linien, oder um 5,9861 Linien. (42 §.) Sollte das *m* im vor. §. de Lücſche Grade bedeuten, ſo wäre eigentlich die Correction $\frac{a}{27 \text{ Zoll}}$. (*m* + 12) . $\frac{1}{16}$ Linien; hiemit wäre die Barometerhöhe auf die Temperatur von 12 Grad unter o nach der neuen Scale reducirt, und die Correction würde = o, wenn *m* = − 12 geſetzt wird. Statt deſſen reducirt Hr. de Lüc die Barometerhöhe auf o Grad Wärme nach ſeiner neuen Scale, und ſetzt die Correction = $\frac{a}{27 \text{ Zoll}}$. *m* . $\frac{1}{16}$ Linien, wenn das *m* die Grade ſeiner Scale bedeutet. Das heißt: annehmen, eine Queckſilberſäule, die bey der Temperatur von o Grad Wärme nach Reaumür, oder − 12 Grad Wärme nach der neuen Scale 27 Zoll − $\frac{3}{4}$ Lin. lang iſt, ſey bey der Hitze des ſiedenden Waſſers 27 Zoll + $\frac{12}{16}$ Lin. oder 27 Zoll + $5\frac{1}{4}$ Linien lang. Die Differenz iſt alſo 6 Linien, die eigentlich nur 5,9861 Linien ſeyn ſollte, welches aber keinen merklichen Fehler giebt.

Anmerkung.

Die Königl. Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Göttingen hatte hierüber für das Jahr 1785. folgende Preisfrage ausgeſetzt:

„aus den Geſetzen, nach denen die Dichten der Luft und „des Queckſilbers von der Wärme geändert werden,

„Vorschriften wie Höhen mit dem Barometer zu messen „sind, herzuleiten und zu beweisen;
welche der Hr. Pr. Hennert aufgelöset und den Preis von der Societät erhalten hat. Seine Schrift ist unter folgendem Titel besonders gedruckt: Commentatio de altitudinum mensuratione ope barometri, ad quaestionem a Soc. Reg. Goetting. praemio ornata, ejusdemque Soc. permissu edita 1786.

Die 6. Erklärung.

47. Hat man an einem Orte während eines ganzen Jahres, oder mehrere Jahre nach einander die Barometerhöhen beobachtet: so kann man die arithmetische Mittelzahl zwischen der grösten und kleinsten beobachteten Höhe für die mittlere Barometerhöhe des Orts annehmen.

Zusatz.

48. Hat man auf diese Art die mittlere Barometerhöhe für zwey verschiedene Oerter gefunden, so kann man nach den Regeln des 41 §. suchen, wie hoch der eine Ort über dem andern erhaben ist. Freylich setzt man dabey voraus, als wenn dies Barometerhöhen wären, die man zu gleicher Zeit bey einerley Zustande der Atmosphäre beobachtet hätte, welches eigentlich nicht seyn sollte: und eben darum darf man auch nicht erwarten, daß auf diesem Wege die gesuchte Höhe ganz richtig gefunden werde.

Die 7. Erklärung.

49. Wenn in der Kugel des Thermometers Luft eingeschlossen ist, und diese, wenn ihre Federkraft durch die Wärme verstärkt wird, eine andre Flüßigkeit in der mit der Kugel verbundenen Röhre hinauf treibt, aber wieder sinken läßt, wenn ihre Federkraft bey der Abkühlung vermindert wird; so heißt es ein Luft-Thermometer.

Der

Der 1. Zusatz.

50. Die oben bey A offene Glasröhre AB sey unten bey B umgebogen, und bey C wieder eine Kugel CDEF daran geschmolzen, so kann man oben durch die Oefnung A Queckſilber hinein laufen lassen, bis die Kugel etwa zur Hälfte damit angefüllet ist. Um einen Theil Luft aus der Kugel heraus zu lassen, kann anfangs bey E eine Oefnung seyn, die man nachher zuschmelzt. Fährt man hiernächst fort, in die Röhre Queckſilber zu füllen, so wird die Luft in der Kugel von der Queckſilbersäule GH, soweit als das Queckſilber über der Fläche DF hinauf tritt, zusammengedrückt. Bey mehrerer Erwärmung treibt hiernächst die wärmere Luft das Queckſilber höher über H hinauf, und wenn sie abkühlet, so sinkt das Queckſilber wieder herab. 144 Fig.

Der 2. Zusatz.

51. Einerley Luftmasse in einerley Raum hat bey doppelter oder dreymahl grösserer Wärme auch zweymahl oder dreymahl mehr Federkraft: oder überhaupt, bey gleicher Dichtigkeit ändert sich die Federkraft der Luft in einerley Verhältniß mit ihrer Wärme. Das Maaß der Federkraft der Luft im Raum DEF ist die jedesmahlige Barometerhöhe um die Höhe der Säule DH vermehrt: also ist die Summe dieser Höhen zugleich das Maaß der Wärme dieser Luft. Nur muß der innere Raum der Kugel in Vergleichung mit dem innern Raum der Röhre ansehnlich groß seyn, damit das Queckſilber in der Röhre um ein beträchtliches steigen und fallen kann, ohne daß die Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft dadurch beträchtlich geändert wird. Ein solches Luftthermometer hat Herr Amontons zuerst gebraucht, und in den Memoires de l'Acad. de Paris 1702. beschrieben.

Der 3. Zusatz.

144 Fig. 52. Die Scale dieses Lufthermometers kann man von G an aufwärts, wie es Hr. Amontons gemacht hatte, in Zolle und Linien eintheilen. Alsdenn muß zu der jedesmahligen Höhe der Queckſilberſäule an dieſer Scale die dermahlige Barometerhöhe addirt werden, um die Höhe der Queckſilberſäule zu haben, die mit der Federkraft der eingeſchloſſenen Luft das Gleichgewicht hält, alſo ihrer Wärme proportional iſt. Man kann aber auch noch vortheilhafter die Höhe einer Säule Queckſilber, die mit der Luft bey bekannter Temperatur, etwa der des thauenden Eiſes, das Gleichgewicht hält, für Eins annehmen, und die übrigen Höhen bey andern Temperaturen durch Zahlen ausdrücken, wovon jene erwehnte Säule die Einheit iſt. Nach Hrn. Amontons Beobachtungen gehören zuſammen

mit Zollen des Thermometers	die Temperatur des
51 Zoll 6 Linien	frierenden Waſſers
73 Zoll 0 Linien	ſiedenden Waſſers.

Die letzte Höhe durch die erſte dividirt giebt 1,417. Demnach wäre die Wärme des ſiedenden Waſſers 1,417 mahl gröſſer, als die Wärme des frierenden Waſſers.

Der 4. Zusatz.

53. Herr Lambert (Pyrometrie 113. 141 §.) nimmt als ein mittel aus mehrern Beobachtungen dafür die Zahl 1,370 an. Wird alsdenn die Höhe der Queckſilberſäule, die bey der Terperatur des frierenden Waſſers mit der Luft das Gleichgewicht hält, in 1000 gleiche Theile getheilt, ſo kommen zwiſchen dem

dem Frostpunct und Siedepunct 370 solcher Theile als Grade des Luftthermometers. Der Gang eines so eingetheilten Luftthermometers stimmt mit dem Gange des Fahrenheitischen Queckſilberthermometers ganz gut zusammen, und 37 Grade des Luftthermometers geben 18 Grade des Fahrenheitischen.

Der 5. Zusatz.

54. Wird die Oefnung G an der Kugel eines gewöhnlichen Barometers zugeschmolzen, so wird daraus ein Bernoullisches Luftthermometer. (M. s. Daniel Bernoulli Hydrodynam. Sect. X. §. 9. p. 204.) Die Höhe CH der Queckſilbersäule, welche die eingeschlossene Luft trägt, wird sich sehr nahe mit der Wärme der eingeschlossenen Luft in einerley Verhältniß ändern, wenn der Raum der Kugel in Vergleichung mit dem Raum der Röhre ansehnlich groß ist. Um es mit dem nach Lambertscher Art eingetheilten Amontonschen Luftthermometer übereinstimmend zu machen, muß man die Höhe CK des Queckſilbers bey der Temperatur des frierenden Wassers suchen, und diese Höhe in 1000 gleiche Theile eintheilen. Weil diese Höhe ohngefehr 28 Zoll betragen wird, so muß die ganze Höhe der Röhre wenigstens 1,37 mahl 28, das sind 38 bis 39 Zoll, lang seyn, wenn das Werkzeug auch der Hitze des siedenden Wassers ausgesetzt werden soll. Bey 32 Grad Fahrenh. kommen 1000 Luftthermometer-Grade. 136 Fig. 144 Fig.

Erste Gründe der Mechanik und Hydraulik.

Die 1. Erklärung.

1. Wenn ein Punct sich bewegt, so ist der Weg, welchen er nimmt, eine Linie, die entweder grade oder krumm seyn kann. Im ersten Fall versteht man durch die Richtung der Bewegung die Lage der graden Linie, worin sich der Punct bewegt. Im letzten Fall ändert der Punct seine Richtung ununterbrochen, und sie kommt in jedem Augenblick mit der graden Linie überein, die den krummen Weg des Puncts an der Stelle, wo er sich jetzt befindet, berührt.

Zusatz.

2. Wenn alle Puncte einer Masse sich in graden Linien bewegen, die unter einander parallel sind; so kennt man alle Umstände, die bey der Bewegung der ganzen Masse merkwürdig sind, sobald nur die Bewegung eines von diesen Puncten bekannt ist.

Die 2. Erklärung.

3. Die Bewegung eines Puncts ist gleichförmig, wenn er in gleichen Zeittheilen gleiche Theile seines Weges zurück leget: und die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung beurtheilet man aus

aus der Grösse des Weges, der in einer Secunde, einer Minute, oder sonst einer bekannten Zeit zurück gelegt wird. In solchen Fällen, wenn zwey verschiedene Puncte sich in einerley graden Linie gleichförmig fortbewegen, wird die relative Geschwindigkeit des einen in Ansehung des andern aus der Grösse des Weges beurtheilet, um welchen sich der eine von dem andern in bekannter Zeit entfernt, oder vielleicht anstatt dessen einer dem andern genähert hat.

Zusatz.

4. Wenn alle Puncte einer festen oder flüßigen Masse mit gleichen Geschwindigkeiten in parallelen Linien fortgehen, so kann man die Geschwindigkeit eines jeden dieser Puncte als die Geschwindigkeit der ganzen Masse betrachten.

Die 3. Erklärung.

5. Die Mechanik im besondern Sinn, wenn sie von der Statik unterschieden wird, soll von den Gesetzen der Bewegung fester Körper Unterricht geben, und die Hydraulik von den Gesetzen, nach welchen die Bewegungen des Wassers und andrer unelastischer flüßiger Massen erfolgen.

Anmerkung.

Einige allgemeine Lehren von der Bewegung überhaupt, und von Bewegungen, welche die Schwere verursacht, finden in beyden Wissenschaften ihre Anwendung. Weil hier von dem, was die Mechanik fester Körper eigenthümliches hat, gar nichts beygebracht werden konnte; so sind die ersten Grundbegriffe von den Bewegungen überhaupt, und die allgemeinen Gesetze der Bewegung schwerer Massen, soweit sie auch bey flüßigen Massen ihre Anwendung finden, hier unter dem gemeinschaftlichen Nahmen der Mechanik und Hydraulik vorgetragen worden.

Die

Die 1. Aufgabe.

6. Die Grösse des Weges ist gegeben, welchen ein Körper mit gleichförmiger Bewegung zurück geleget hat: man soll seine Geschwindigkeit für jede Zeitsecunde finden.

Auflösung. Man dividire den zurückgelegten Weg mit der Zahl der Zeitsecunden, die während der Bewegung verflossen sind; so weiß man, wie groß der in jeder Zeitsecunde zurückgelegte Weg sey, und das ist die gesuchte Geschwindigkeit.

Z. E. Ein Körper ist 1000 Fuß weit in 3 Minuten fortgerückt; wie groß war seine Geschwindigkeit? Antwort $\frac{1000 \text{ Fuß}}{180 \text{ Sec.}} = 5\frac{5}{9}$ Fuß in jeder Secunde.

Der 1. Zusatz.

7. Es sey die Geschwindigkeit der Bewegung $= c$, der Weg $= s$, welcher in der Zeit t, zurück gelegt wird; so sind das drey Grössen, wovon die dritte leicht gefunden wird, wenn zwey davon gegeben sind. Es ist nemlich $c = \frac{s}{t}$ (6 §.) also $s = c \cdot t$, und $t = \frac{s}{c}$.

Der 2. Zusatz.

8. Wenn zwey Puncte in einer graden Linie mit ungleichen Geschwindigkeiten einander folgen; so subtrahirt man die Geschwindigkeit des nachfolgenden, von der Geschwindigkeit des voranlaufenden, um die relative Geschwindigkeit zu finden, womit sich der vordere von dem hintern entfernt. Wären die Geschwindigkeiten gleich, so wären beyde Puncte gegen einander in relativer Ruhe.

Der

Der 3. Zusatz.

9. Wäre die Geschwindigkeit des hintern grösser, als die Geschwindigkeit des vordern; so würde die Subtraction eine negative Grösse geben: (4 §. Allg. Rech.) das hiesse nun der vordere entfernt sich nicht vom hintern, sondern nähert sich ihm. In dem Fall, wenn beyde einander entgegen laufen, kann man die Geschwindigkeit des vordern als negativ ansehen, und die relative Geschwindigkeit wird nun die negative Summe der beyden Geschwindigkeiten (5 §. Allg. Rech.) das heißt, der vordere nähert sich dem hintern mit der Summe beyder Geschwindigkeiten.

Der 4. Zusatz.

10. Wenn sich beyde Puncte nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, so betrachtet man die Geschwindigkeit des hintern als negativ. Die relative Geschwindigkeit ist nun die positive Summe beyder Geschwindigkeiten.

Anmerkung.

11. Geschickte Lehrer werden sich dieser an sich ganz leichten Sätze sehr gut bedienen können, um Anfängern die Begriffe von positiven und negativen Grössen recht geläufig zu machen.

Der 1. Grundsatz.

12. Jede körperliche Masse ist gegen Ruhe und Bewegung gleichgültig. Ein ruhender Körper setzt sich nicht selbst in Bewegung. Auch ändert ein Körper, der einmahl in Bewegung ist, nie selbst weder die Richtung noch die Geschwindigkeit seiner Bewegung, wofern dies nicht sonst von einer Ursache herrührt, die man sich als eine bewegende Kraft vorstellen kann.

Die

Die 4. Erklärung.

13. Die Trägheit körperlichen Massen bestehet in ihrer Gleichgültigkeit gegen Ruhe und Bewegung.

Zusatz.

14. Wenn also ein Körper in Bewegung ist, und diese in einerley Richtung mit einerley Geschwindigkeit ununterbrochen fortsetzt, so erfolgt solches nach dem Gesetz der Trägheit, und es bedarf keiner bewegenden Kraft, um den Körper in einer solchen Bewegung zu erhalten.

Die 1. Erfahrung.

15. Ein schwerer Körper, der sich völlig selbst überlassen frey bewegt, fällt in 2 Secunden Zeit viermahl tiefer, in 3 Secunden 9 mahl tiefer, als in 1 Secunde; und überhaupt verhalten sich die Höhen des Falles, wie die Quadratzahlen der verflossenen Zeiten. Die Höhe aber, wovon ein schwerer Körper in der ersten Zeitsecunde frey herabfällt, beträgt $15\frac{5}{8}$ Rheinländische Fuß.

Die 2. Aufgabe.

16. Die Zeit ist gegeben, worin ein schwerer Körper von einer gewissen Höhe herabgefallen ist: man soll die Höhe des Falles finden.

Aufl. Weil der Körper in der ersten Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß tief herabgefallen ist, so multiplicire man diese Höhe mit der Quadratzahl der verflossenen Zeitsecunden. (11 §.) Sind während des Falles 5 Secunden verflossen, so setzt man an:

Höhe des Falles in 1 Sec. 15,625 Rheinl. Fuß.
Quadratzahl der verfl. Zeit 25

78125
31250

Höhe des Falles in 5 Sec. 390,625 Rheinl. Fuß.

Die

Die 3. Aufgabe.

17. Aus der gegebenen Höhe des Falles zu finden, wieviel Zeit während der Bewegung verflossen ist.

Aufl. Man dividire die gegebene Höhe des Falles mit 15,625 Rheinl. Fuß, welches die Höhe des Falles für die erste Secunde ist; so hat man die Quadratzahl der verflossenen Zeitsecunden. (12 §.) Wenn also daraus die Quadratwurzel gezogen wird, so weiß man die verflossene Zeit.

Es sey die Höhe des Falles . . 250 F.
so ist die Höhe des Falles für die 1 Sec. = $15\frac{5}{8}$,
und die Division giebt 16 für die Quadratzahl der verfl. Zeitsecunden, welches also 4 Secunden sind.

Die 5. Erklärung.

18. Die Wirkung einer Kraft, vermöge welcher sich die Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers ununterbrochen vermehrt, heißt ihre Beschleunigung. Wenn die Kraft beständig mit gleicher Stärke wirkt, und dem Körper in gleichen Zeiten gleiche Grade der Geschwindigkeit mittheilt, so ist die Beschleunigung der Bewegung gleichförmig. Die Geschwindigkeit wächst alsdenn in eben dem Verhältniß, wie die Zeit, welche während der Bewegung verfließt.

Der 1. Lehrsatz.

19. Die Bewegung der frey herabfallenden schweren Körper wird von der Schwere gleichförmig beschleuniget, so daß die Geschwindigkeit in eben dem Verhältnisse zunimmt, wie die Zeit, welche während der Bewegung verfließt.

Beweis.

138 Beweis. In der Zeit T sey der schwere Körper
Fig. von A nach P gefallen, und es sey die Höhe von $15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß $= g$, so ist $AP = g \cdot T^2$. (12 §.) Wenn ferner während des Falles von P nach Q die Zeit t verfließt, also während der ganzen Bewegung von A bis Q die Zeit $T + t$; so ist $AQ = g \cdot (T+t)^2$; (12 §.) also $AQ = g \cdot T^2 + 2g \cdot T \cdot t + g \cdot t^2$, und $PQ = AQ - AP = 2g \cdot T \cdot t + g \cdot t^2$. Diejenige Geschwindigkeit sey $= c$, welche der Körper in dem Augenblick erlangt hat, da er in P ankommt, und c' sey die Geschwindigkeit, womit er in Q ankommt; so ist $c' > c$. Ferner sey Pp der Weg, welchen er in der Zeit t schon vermöge seiner Trägheit mit gleichförmiger Bewegung zurücklegen würde, wenn auch die Schwere die Bewegung nicht weiter beschleunigte; so ist $Pp < PQ$, also $\frac{Pp}{t} < \frac{PQ}{t}$, und $c = \frac{Pp}{t}$, (7 §.) mithin $c < \frac{PQ}{t}$. Wenn dagegen Pq den Weg vorstellet, welchen der Körper in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c' zurücklegen würde, so ist $Pq > PQ$, also $\frac{Pq}{t} > \frac{PQ}{t}$, und $c' = \frac{Pq}{t}$, (7 §.) folglich $c' > \frac{PQ}{t}$. Je kleiner die Zeit t angenommen wird, desto weniger sind die Geschwindigkeiten c und c' verschieden, und beyde Geschwindigkeiten werden gleich, wenn man $t = 0$ annimmt: also muß alsdenn $c = c' = \frac{QP}{t}$ werden, weil $\frac{PQ}{t}$ nie kleiner

als

als c und nie grösser als c' seyn kann. Ob nun gleich in demselben Fall auch $PQ = o$ wird, weil Q mit P alsdenn einerley ist; so erhält man doch $\frac{PQ}{t} = 2g \cdot T + gt$, also $c = 2g \cdot T$, weil $t = o$ ist. Der Werth $c = 2gT$ ist die Gränze unter welcher $\frac{PQ}{t}$ nicht abnehmen kann, t mag so klein als man will angenommen werden. Wenn demnach T zweymahl 3mahl grösser wird, u. s. f. so wird auch c zweymahl, 3mahl und überhaupt in eben demselben Verhältnisse grösser.

Der 1. Zusatz.

20. Nach Verlauf der ersten Secunde hat die Schwere dem Körper eine Geschwindigkeit von 31,25 Rheinl. Fuß mitgetheilt: denn es wird $c = 2g$, wenn $T = 1$ Sec. gesetzt wird.

Der 2. Zusatz.

21. Wenn man weiß, wieviele Zeit während des Falles verflossen ist; so wird die Geschwindigkeit gefunden, welche die Schwere dem Körper während des Falles mitgetheilt hat, wenn man $31\frac{1}{4}$ Fuß mit der Zahl der verflossenen Zeitsecunden multiplicirt.

Der 3. Zusatz.

22. Umgekehrt findet man, wieviele Zeit verfliessen muß, wenn die Schwere dem fallenden Körper eine Geschwindigkeit von gegebener Grösse mittheilen soll, dadurch, daß man die gegebene Geschwindigkeit mit $31\frac{1}{4}$ Rheinl. Fuß dividirt.

Die 4. Aufgabe.

23. Aus der gegebenen Höhe des Falles die Geschwindigkeit zu finden, die der Körper während des Falles erlangt hat.

Aufl. 1) Man suche die während des Falles verflossene Zeit, (17 §.) und daraus ferner die erlangte Geschwindigkeit. (21 §.)

2) Wenn t die verflossene Zeit, s die Höhe des Falles, und c die erlangte Geschwindigkeit bezeichnet; so ist $t = \sqrt{\frac{s}{g}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$, (17 §.) also $c = 2gt$ (21 §.) $= \frac{2g\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$, oder $c = 2\sqrt{gs}$, weil $g = \sqrt{g} . \sqrt{g}$ ist.

Exempel. Ein Körper sey 27 Fuß hoch herabgefallen, so ist

$g = 15{,}625$
$s = 27$

109375
31250

421,875

Die Quadratwurzel ist 20,5396, also die Geschwindigkeit $c = 41{,}0792$ Rheinl. Fuß.

Die 5. Aufgabe.

24. Die Geschwindigkeit ist gegeben, welche die Schwere einem frey herabfallenden Körper mitgetheilt hat; man soll die Höhe des Falles finden.

Aufl. 1) Man suche die während des Falles verflossene Zeit, (22 §.) und daraus ferner die Höhe des Falles. (16 §.)

2) Wenn

2) Wenn die Buchstaben t, s, c, die kurz vorhin bemerkte Bedeutung behalten, so findet man $t = \frac{c}{2g}$ (22 §.) und $s = gtt$, (16 §.) also $s = g\frac{c^2}{4gg}$, oder $s = \frac{c^2}{4g}$.

Die 6. Aufgabe.

25. Ein schwerer Körper wird in B nach verticaler Richtung durch einen Stoß oder auf andere Art in Bewegung gesetzt, und die Geschwindigkeit ist gegeben, womit er zu steigen anfängt: man soll finden, wie groß nach Verlauf einer gegebenen Zeit seine Geschwindigkeit sey, und der in eben dieser Zeit zurückgelegte Weg. 138 Fig.

Aufl. Es sey die Geschwindigkeit $= h$, womit er zu steigen anfängt, BP sey der in der Zeit t zurückgelegte Weg, und c die Geschwindigkeit der Bewegung nach Verlauf eben so vieler Zeit t: so erhellet, daß die Schwere der steigenden Bewegung in jeder verflossenen Zeit so viele Geschwindigkeit entziehe, als sie der Bewegung, wenn der Körper fiele, in eben so vieler Zeit zusetzen würde. Demnach wird die Geschwindigkeit h in der Zeit t um den Theil $2gt$ vermindert, (19 §.) und nach Verlauf der Zeit t hat der Körper noch die Geschwindigkeit $c = h - 2gt$.

Wenn die Schwere nicht entgegen wirkte, so würde der Körper in der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung einen Weg $= ht$ zurücklegen. (7 §.) In eben so vieler Zeit aber wird dieser Weg um den Theil gtt vermindert, und es ist eben so viel, als wenn der schwere Körper in der Zeit t beydes zu-

gleich um die Höhe ht stiege, und von der Höhe gtt herab fiele: (16 §.) also findet man die in der Zeit t zurückgelegte Höhe $BP = ht - gtt$.

Zusatz.

26. Wenn die Zeit $t = \frac{h}{2g}$ angenommen wird, so hat man $2gt = h$, und es wird $c = h - 2gt = 0$. Das will sagen, nach so vieler Zeit hört die steigende Bewegung auf.

Der 2. Lehrsatz.

27. Die Höhe, welche ein schwerer Körper erreicht, wenn er mit einer gewissen Geschwindigkeit h lothrecht zu steigen anfängt, ist eben so groß, als die Höhe, wovon er herabfallen müste, wenn ihm die Schwere eben die Geschwindigkeit h mittheilen sollte.

Beweis. Während der steigenden Bewegung verfließt die Zeit $t = \frac{h}{2g}$, (26 §.) und in der Zeit t erreicht der Körper die Höhe $BP = ht - gtt$. (25 §.) Man setze demnach $t = \frac{h}{2g}$, so wird $ht = \frac{hh}{2g}$, und $gtt = \frac{hh}{4g}$: also findet man $BA = \frac{hh}{2g} - \frac{hh}{4g}$, d. i. $BA = \frac{hh}{4g}$. Eben so hoch aber müste ein schwerer Körper herabfallen, wenn ihm die Schwere die Geschwindigkeit h mittheilen sollte. (24 §.)

Die 2. Erfahrung.

139 Fig. 28. Wenn ein Gefäß ABCD mit Wasser angefüllet, und unten mit einer kleinen Röhre DE versehen

sehen, diese Röhre aber zugleich von E nach F aufwärts gebogen ist, damit das ausspritzende Wasser gräde in die Höhe steigen kann; so ist die Höhe, welche der springende Wasserstrahl FG erreicht, beynahe so groß, als die Höhe des Wassers selbst im Gefäß.

Der 1. Zusatz.

29. Die Geschwindigkeit, womit das Wasser durch die Oefnung F spritzt, ist so groß, als die Geschwindigkeit, welche ein schwerer Körper erlangen würde, wenn er so hoch herab fiele, als der Wasserstrahl steigt. (27 §.) Wenn der Widerstand der Luft, und andre Hindernisse die Bewegung nicht verzögerten, so würde der Strahl die Höhe des Wassers im Gefäß völlig erreichen: also bringt das Wasser aus dergleichen kleinen Oefnungen der Gefässe und Röhren mit einer Geschwindigkeit hervor, die ein schwerer Körper erlangen würde, wenn er so hoch herab fiele, als die höchste Wasserfläche im Gefäß über der Oefnung erhaben ist. Man findet davon aus theoretischen Gründen die vollständigen Beweise im 2ten Bande der Anfangsgründe im I. Abschnitt der Hydraulik, und im V. Theil des Lehrbegriffes im I. bis IV, u. XI. XII. Abschnitt der Hydraulik.

Der 2. Zusatz.

30. Wenn die Oefnung bey F kreisförmig ist, oder doch eine solche Figur hat, daß man ihren Inhalt geometrisch ausrechnen kann; so läßt sich finden, wieviel Wasser in gegebener Zeit ausspritzt: nur muß der Abgang des Wassers im Gefäß beständig durch neuen Zufluß ersetzt, und das Wasser in demselben beständig auf einerley Höhe erhalten werden.

Es spritzt nemlich in jeder Secunde eine Wassersäule aus, wovon die Grundfläche der Oefnung, und die Höhe der Geschwindigkeit des ausspritzenden Wassers gleich ist. Wird diese in jeder Secunde ausströmende Wassermenge mit der Anzahl der verflossenen Zeitsecunden multiplicirt, so hat man die ganze in der gegebenen Zeit ausgeflossene Wassermenge.

Der 3. Zusatz.

139 Fig. 31. Wenn das Gefäß ABCD cylindrisch oder prismatisch ist; so verhält sich die Geschwindigkeit, womit das Wasser durch die Oefnung FK strömt, zur Geschwindigkeit, womit es im Gefäß sinkt; umgekehrt, wie die Fläche vom Querschnitt AB des Gefässes zur Fläche FK der Oefnung. Es ströme nemlich in einer Secunde ein Cylinder aus der Oefnung FK, dessen Länge FH ist, und in eben der Zeit sinke das Wasser im Gefäß von AB nach MN, so ist FH die Geschwindigkeit des durch die Oefnung strömenden Wassers, und AM die Geschwindigkeit des Wassers im Gefäß. Weil nun die ausgeflossene Wassermenge = FK . FH ist, (30 §.) und diese im Gefäß den Raum AB . AM ausfüllte; so hat man FK . FH = AB . AM, mithin FH : AM = AB : FK.

Der 4. Zusatz.

134 Fig. 32. Es ist einerley, ob die Röhre, durch welche das Wasser ausläuft, wieder aufwärts gebogen ist, oder nicht. Wenn auch diese Röhre DE wagrecht liegt, oder gegen den Horizont geneigt ist, so wird die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers doch allemahl nach der Regel des 29 §. gefunden. Auch wenn man voraussetzt, daß das Gefäß beständig in gleicher Höhe voll erhalten werde; so findet man die Wasser-

Wassermenge, welche in gegebener Zeit ausläuft, nach der Regel des 30 §.

Die 7. Aufgabe.

33. Ein Wasserbehälter *ABCD* liegt auf einem erhabenen Orte, aus demselben soll das Wasser vermittelst einer Fallröhre *EFGH* einem niedriger liegenden Springbrunnen zugeführet werden, und das Wasser soll $\frac{3}{4}$ Zoll dick springen. Die Frage ist: wie vielen Zufluß muß der Wasserbehälter alle Stunden haben, wenn das Wasser in demselben 50 Rheinl. Fuß höher steht, als die Oefnung *H* der Springröhre. 149 Fig.

Aufl. Man suche 1) die Geschwindigkeit, womit das Wasser durch die Oefnung H springt, aus der Höhe von 50 Rheinl. Fuß dem 29. und 23 §. gemäß, und setze das dortige $s = 50$ Fuß; so findet man

$$g = 15{,}625$$
$$s = 50$$
$$gs = 781{,}25,$$

also $\sqrt{gs} = 27{,}95$ Fuß, und die gesuchte Geschwindigkeit $2\sqrt{gs} = 55{,}90$ Fuß.

2) Die Fläche der kreisförmigen Oefnung, die im Durchmesser $\frac{3}{4}$ Zoll hält. In Decimaltheilen sind das 0,75 Zoll, die Quadratzahl ist 0,5625 Quadratz. und diese mit 0,785 multiplicirt (242 §. Geom.) giebt die Fläche der Oefnung = 0,441563 Quadratzoll, oder 0,003066 Quadratfuß.

3) Beydes in einander multiplicirt, giebt die Wassermenge in einer Secunde = 0,1713894 Cub.

Fuß, und die mit 3600 Secunden multiplicirt giebt die nöthige Wassermenge in einer Stunde = 617 Cub. Fuß.

Die 1. Anmerkung.

34. Es ist nicht völlig einerlei, ob die Springröhre eine conische oder cylindrische Figur hat, und ob sie im letzten Fall noch besonders mit einer in der Mitte kreisförmig durchbohrten Platte geschlossen ist. Die Wassermenge, welche in gegebener Zeit durchfließt, hängt von der Beschaffenheit dieser Röhre mit ab. Die nöthigen Nachrichten davon findet man im 2 Bande der Anfangsgründe, im 18 §. der Hydraulik, 431 u. f. S. und noch umständlicher im V. Theil des Lehrbegriffes, im II. Abschnitt, 36 u. f. §. 51 u. f. S.

Die 2. Anmerkung.

35. Die Brunnenmeister sind gewohnt, den Abfluß und Zufluß des Wassers nach sogenannten Wasserzollen zu berechnen, und nach des Herrn Mariotte Bestimmung soll eigentlich ein Wasserzoll so viel Wasser seyn, als in 1 Minute Zeit durch eine kreisförmige Oefnung von 1 Zoll im Durchmesser läuft, wenn das Wasser 1 Linie hoch über dem obersten Rande steht. Die Erfahrung hat ihn belehrt, daß die Wassermenge 14 Pariser Pinten betrage, jede zu 2 Pfund gerechnet.

Die 6. Erklärung.

36. Eine **Wasserpumpe** überhaupt ist eine hohle cylindrische, auch wohl prismatische Röhre, worin ein Stempel vermittelst einer Stange beweglich ist, der dazu dient, das Wasser entweder in der Röhre selbst, oder in einer andern damit verbundenen zum Steigen zu nöthigen. Ein **Druckwerk** hat die Einrichtung, daß der Stempel unmittelbar gegen das Wasser preßt: im **Saugwerk** folgt das Wasser dem Stempel, weil es vom Druck der Luft hinaufgetrieben wird.

Der

Der 1. Zusatz.

37. Die Pumpenröhre CDEF steht lothrecht im Wasser, und ist unten im Boden mit einem Ventil, oder einer Klappe versehen. Durch diese dringt das Wasser von selbst, wenn der Stempel hinauf gezogen wird, nach den Gesetzen der Hydrostatik eben so hoch in die Pumpenröhre hinein, als es ausserhalb der Röhre steht. Wenn auch gleich der Stempel noch etwas höher über der Wasserfläche AB hinaufgezogen wird; so verursacht doch der Druck der Luft auf diese Wasserfläche, daß das Wasser dem Stempel noch weiter folgt. Wenn hiernächst der Stempel wieder niedergedrückt wird, so fällt die Ventilklappe unten zu, und das Wasser kann nicht anders als seitwärts durch die sogenannte Knieröhre MNO ausweichen, da es denn bey der Einrichtung, welche die 141 Figur vorstellt, bey O ausspritzt. Die Knieröhre ist bey M ebenfalls mit einer Ventilklappe versehen, die so lange zufällt, als der Stempel in die Höhe gezogen wird. 141 Fig.

Der 2. Zusatz.

38. Die 145. Figur stellt ein Saugwerk vor; dasselbe ist bey CD, gleich unter der Stelle, wo der Stempel seinen niedrigsten Stand hat, mit einem Ventil versehen, welches das Wasser offen stößt, wenn der Stempel steigt, da es denn demselben folgt. Die Ventilklappe bey CD fällt aber zu, sobald der Stempel wieder zu sinken anfängt, und das unter demselben befindliche Wasser würde nirgends hin ausweichen können, wenn nicht der Stempel selbst durchlöchert, und die Oefnung ebenfalls mit einer Ventilklappe versehen wäre. Durch diese Klappe tritt das Wasser über den Stempel 145 Fig.

hinauf, indem derselbe herab sinkt. Wenn er aber von neuen gehoben wird, so hebt er zugleich das Wasser, welches nun die Ventilklappe im Stempel zugedrückt hält, mit in die Höhe. Oberhalb des Stempels irgendwo bey E ist die Ausflußröhre, aus welcher, sobald die Pumpenröhre allererst ganz mit Wasser angefüllet ist, mit jedem Stempelzuge soviel Wasser läuft, als der Stempel mit jedem Zuge hebt.

Der 3. Lehrsatz.

141 Fig. 39. Wenn eine Druckpumpe einen frey springenden Wasserstrahl zuwege bringen soll, so ist die Höhe *OP*, welche der springende Wasserstrahl, wenn nichts ausser der Schwere seine Bewegung verzögerte, erreichen würde, von der Grundfläche des Kolbens angerechnet, der Höhe einer Wassersäule über der Grundfläche des Stempels gleich, deren Gewicht so groß, als die Kraft ist, welche den Stempel gegen die Wasserfläche preßt.

Beweis. Wenn eine Kraft den Stempel gegen die Wassersäule GH drückt, so muß der Erfolg eben so seyn, als wenn die Pumpenröhre höher, und diese zugleich in grösserer Höhe mit Wasser angefüllet wäre. Wäre die Pumpenröhre hoch genug, so daß das Wasser bis an QR reichte; so würde die Fläche GH von der Wassersäule GHQR Druck leiden, und dieser Druck würde den Erfolg haben, daß der Wasserstrahl die Höhe OP bis an die Fläche QR erreichte, wenn nichts seine Bewegung verzögerte: demnach muß der Druck des Stempels, wenn er eben so groß ist, als der Druck jener Wassersäule, den Wasserstrahl eben so hoch treiben.

Der

Der 1. Zusatz.

40. In freyer Luft steigt der Wasserstrahl nie völlig so hoch, als jene Regel angiebt, ob gleich das Wasser wirklich mit einer Geschwindigkeit aus der Oefnung O ausströmt, die mit der Höhe OP zusammengehört. Der Unterscheid fällt desto beträchtlicher aus, je grösser die Geschwindigkeit des steigenden Wassers ist: demnach muß dieser Unterscheid nothwendig mit in Rechnung gezogen werden.

Der 2. Zusatz.

41. Oft ist es nur darum zu thun, vermittelst der Druckpumpe das Wasser zu nöthigen, daß es in eine Röhre wie MNOP aufwärts steige, da es denn oben bey P aus der Röhre in einen Behälter fließt, aus welchem es zum anderweitigen Gebrauch weiter abgeleitet werden kann. Eine Kraft, so groß als das Gewicht einer Wassersäule über der Grundfläche des Stempels, so hoch als die Oefnung P über dem Stempel erhaben ist, würde mit der in der Steigröhre befindlichen Wassersäule im Gleichgewicht seyn. Damit das Wasser wirklich steige, wird eine etwas grössere Kraft erfordert, die jedoch jene erwehnte nur wenig übertreffen darf, wenn die Steigröhre nicht zu eng, und die Bewegung des Stempels nicht zu schnell ist. Dieserwegen muß der Durchmesser von den Querschnitten der Steigröhre $\frac{2}{3}$ oder auch $\frac{3}{4}$ vom Durchmesser der Pumpenröhre betragen. 143 Fig.

Die 8. Aufgabe.

42. Die Höhe ist gegeben, welche der springende Wasserstrahl, den eine Druckpumpe treibt, erreichen soll: man sucht die Kraft, welche den Stempel gegen die Wasserfläche drücken muß.

Aufl.

Aufl. 1) Wenn b diejenige Höhe ist, die der springende Strahl in freyer Luft erreichen soll, und a die Höhe, welche der Geschwindigkeit des aus der Gußmündung strömenden Wassers zugehört; so wird nach einer vom Herrn Mariotte aus vielen Versuchen geschlossenen Regel erfordert, daß $a = b + \frac{b^2}{300}$ sey, wenn b, also auch a, in Fussen ausgedrückt wird.

2) Wenn die Höhe a gefunden ist, so suche man das Gewicht einer Wassersäule, wovon die Grundfläche so groß als die Grundfläche des Stempels, und die Höhe $= a$ ist: so groß ist die gesuchte Kraft.

Exempel. Die Pumpenröhre ist 6 Zoll im Durchmesser, und der Strahl soll 80 Fuß hoch steigen: so ist $b = 80$ Fuß, also $a = 80 + \frac{6400}{300} = 101$ Fuß. Die Grundfläche des Stempels hat im Durchmesser $\frac{1}{2}$ Fuß, also ist ihr Flächeninhalt $\frac{11}{14} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{56}$ Qu. Fuß. Dieser mit $a = 101$ Fuß multiplicirt giebt 19,839 Cub. Fuß für den körperlichen Inhalt einer Wassersäule, deren Gewicht der gesuchten Kraft gleich ist. Wird derselbe mit 66 Pfund multiplicirt, so erhält man 1309$\frac{1}{2}$ Pfund, als die gesuchte Kraft.

Zusatz.

143 Fig. 43. Soll das Wasser in einer Steigröhre MNOP gehoben werden, so wird etwas mehr Kraft erfodert, als diejenige, welche das Wasser in der Steigröhre im Gleichgewicht erhalten könnte. Wenn also b die Höhe ist, zu welcher das Wasser gehoben werden soll, und wenn man alsdenn das Gewicht einer Wasser-

Wassersäule sucht, die über der Grundfläche des Stempels eben diese Höhe *b* hätte; so hat man die Kraft, welche mit dem Wasser in der Steigröhre das Gleichgewicht hält. Um wieviel nun die Kraft, welche den Stempel bewegen soll, jenes Gewicht übertreffen müsse, das hängt von der Geschwindigkeit der Bewegung des Stempels, der Länge der Steigröhre, und dem Verhältniß ihrer Querschnitte zu den Querschnitten der Pumpenröhre ab. Man vergleiche die Anfangsgründe 2 Band, 57. 58 §. Hydraulik 478. 479 S. Aus den Gründen der Theorie ist alles vollständiger hergeleitet im V. Theil des Lehrbegriffes, im XXIII. Abschnitt 541. u. f. S.

Die 9. Aufgabe.

44. Die Grösse des Widerstandes zu finden, den die Kraft am Stempel eines Saugwerks bey jedem Zuge überwinden muß.

Aufl. Man suche das Gewicht einer Wassersäule, 145
wovon die Grundfläche so groß, als die Grundfläche Fig.
GH des Stempels ist, und die Höhe so groß, als die Höhe GQ des Stempels über der Wasserfläche AB, wovon das Wasser herauf gezogen werden soll. So groß ist der Widerstand, welchen die Kraft überwinden muß, die den Stempel vermittelst der Stange KL aufwärts ziehet.

Beweis. Die Luft drückt von oben herab auf den Stempel so stark, als wenn eine 32 Fuß hohe Wassersäule darauf stünde, deren Grundfläche mit der Grundfläche des Stempels einerley wäre. Eben der Stempel aber leidet auch gegen seine untere Grundfläche GH einen aufwärts gerichteten Druck, der dem Gewicht einer Wassersäule über der Grund-

fläche

fläche des Stempels gleich ist, deren Höhe aber übrig bleibt, wenn man die Höhe GQ von 32 Fuß abziehet. Man stelle sich vor, die Höhe QP sey 32 Fuß groß, und G sey das eigenthümliche Gewicht des Wassers; so ist der Druck gegen MN = G . MN . QP. Weil aber MN = GH, so ist eben der Druck = G . GH . QP. Ferner ist der Druck gegen GH = G . GH . GP, und dieser von dem vorigen abgezogen giebt einen Ueberschuß = G . GH . (QP – GP) = G . GH . GQ. So stark wird also der Stempel unterwärts gepreßt, und so groß muß eine an der Stange KL aufwärts ziehende Kraft seyn, um mit jenem Druck das Gleichgewicht zu halten.

Der 1. Zusatz.

45. Wenn bey E die Ausgußröhre befindlich ist, in der Höhe GF über der Grundfläche des Kolbens; so drückt ausser der Atmosphäre auch noch die Wassersäule EFGH von oben her auf den Stempel: also ist der gesammte Widerstand, den die Kraft zu überwinden hat, dem Gewicht einer Wassersäule über der Grundfläche des Stempels gleich, wovon die Höhe FQ = GF + GQ so groß ist, als die Höhe der Ausgußröhre E über der Wasserfläche AB, wovon das Wasser hinaufgezogen werden soll.

Der 2. Zusatz.

46. Bey der wirklichen Bewegung muß die Kraft etwas grösser seyn, und die erforderliche Grösse hängt ab von der Geschwindigkeit der Bewegung, von der Länge der Saugröhre, auch vom Verhältnisse der Querschnitte der Pumpenröhre CDEF zu den Querschnitten der Saugröhre RS. Der Ueberschuß der nöthigen Kraft über jene, die schon zum Gleichgewicht

wicht erfordert wird, ist desto kleiner, je kürzer die Saugröhre seyn kann, je langsamer die Bewegung des Stempels ist, und je weiter die Saugröhre in Vergleichung mit der Weite der Pumpenröhre ist. Der Durchmesser der Querschnitte der Saugröhre muß um deßwillen $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ vom Durchmesser der Querschnitte der Pumpenröhre betragen. M. s. davon die Anfangsgründe 2 Band, 52 §. Hydraul. 471 S. und die vollständigere Ausführung davon im V. Bande des Lehrbegriffes im XVIII. und XIX. Abschnitte 461 u. f. S.

Der 4. Lehrsatz.

47. Wenn das Gefäß *ABCD* ohngefähr bis auf die halbe Höhe, oder etwas drüber, bis an *GH* mit Wasser angefüllet, in dem Raum oberhalb *GH* aber Luft enthalten ist; wenn ferner eine Röhre *EF*, die sich bey *F* in eine enge Oefnung endiget, mit dem Gefässe so verbunden ist, daß das Wasser aus dem untern Raum in die Röhre treten kann; so springt das Wasser in allen Fällen zur Oefnung *F* heraus, wenn die Dichtigkeit und Federkraft der eingeschlossenen Luft um etwas nicht ganz unbeträchtliches grösser ist, als die Dichtigkeit der Luft im äussern Raum, womit die Oefnung *F* in Verbindung ist. 146 Fig.

Beweis. Wenn die Federkraft der eingeschlossenen Luft so groß ist, daß sie einer Wassersäule in der Höhe *a* das Gleichgewicht halten kann; so hat der von dieser Luft herrührende Druck gegen GH eben die Wirkung, als wenn noch über GH eine Wassersäule in der Höhe *a* stünde. Wenn überdem die Luft in dem Raum, womit die Oefnung F in Verbindung

bindung ist, einer Wassersäule in der Höhe b das Gleichgewicht halten kann, b aber kleiner als a ist; so wird der innere Druck gegen GH, wenn man sich vorstellet, daß in der Röhre das Wasser bis an KL stehe, durch den äussern zum Theil aufgehoben, und KL leidet nur so viel Druck, als wenn eine Wassersäule in der Höhe $a-b$ darüber stünde. Man setze $LF=f$, so weiß man aus dem 29 §. mit dem 39 §. verglichen, daß nun das Wasser aus der Oefnung F mit einer Geschwindigkeit springen müsse, die der Höhe $a-b-f$ zugehört. Wenn also nur die Differenz der Höhen, die der Elasticität der innern und äussern Luft zugehören, grösser als LF ist, so giebt das so angeordnete Gefäß einen Springbrunnen ab.

Der 1. Zusatz.

48. Man nennt diesen Springbrunnen von dem Erfinder den Heronsball, und er wird am gewöhnlichsten so gebraucht, daß das Wasser aus der Oefnung F in die freye Luft springt: da dann die eingeschlossene Luft entweder vermittelst der Luftpumpe oder auf andre Art mehr als die atmosphärische verdichtet werden muß. Wenn das Gefäß klein ist, so kann man den Effect schon dadurch zuwege bringen, daß man mit dem Munde so stark als man kann durch die Oefnung F hineinbläset. Durch die Erhitzung kann die Federkraft der innern Luft ebenfalls verstärkt werden.

Der 2. Zusatz.

147 Fig. 49. Wenn der Heronsball, welchen in der 147 F. das Gefäß AB mit der Röhre EF vorstellet, noch mit zweyen andern Gefäßen so verbunden wird, wie es aus eben der Figur zu ersehen ist; so erhält man den Heronsbrunnen. Anfangs muß der Heronsball

AB

AB etwa bis an RS mit Wasser gefüllet seyn, und dazu dient eine eigene im obern Deckel befindliche Oefnung, die hiernächst mit einem Kork, oder noch besser mit einer Schraube luftdicht verschlossen werden muß. Hiernächst gießt man Wasser in die obere Schüssel AVWO, dasselbe fällt durch die Röhre GH ins untere von allen Seiten luftdicht verschlossene Gefäß CDQ hinab, und treibt, so wie es darin höher steigt, einen Theil der Luft aus demselben durch die Röhre IK hinauf in den Heronsball. Dadurch wird die Luft in dem obern Raum ARSO des Heronsballes und zugleich in der Röhre IK und dem Raum oberhalb PQ im untern Gefäß verdichtet, so lange bis sie mit der Wassersäule MN im Gleichgewicht ist. Hält man bis dahin die Oefnung bey F verschlossen, so springt hiernächst das Wasser mit einer Geschwindigkeit heraus, die der Höhe MN – LF zugehört.

Der 5. Lehrsatz.

50. Wenn der eine Schenkel *CA* der unter dem Nahmen des Hebers bekannten gebogenen Röhre *ACB* im Gefäß hängt, das bis an *DF* voll Wasser ist; so tritt das Wasser nicht allein in die Röhre, wenn in derselben die Luft auf irgend eine Art hinlänglich verdünnt wird, sondern es fährt hiernächst auch fort, durch die Oefnung *B* unten im andern Schenkel mit einer Geschwindigkeit auszufliessen, die mit der Höhe der Wasserfläche *DF* über der Oefnung *B* zusammengehört. 148 Fig.

Beweis. So lange nicht allein an der Wasserfläche DF, sondern auch im Heber die Luft sich im natürlichen, oder überhaupt im gleichen elastischen Zustande befindet; so lange tritt das Wasser in den

Schenkel CA nur bis an GH hinein: (24 §. Hydrost.) Wenn durchs Saugen mit dem Munde an B oder auf andre Art die Luft so weit im Heber verdünnt wird, daß die Höhe, welche als das Maaß ihrer Elasticität dient, um die Differenz FC, oder auch wohl um eine noch grössere Differenz, kleiner wird, als die Höhe der Wassersäule, welche das Maaß von der Elasticität der gegen DF drückenden Luft abgiebt; so muß der Erfolg eben so seyn, als wenn im Gefäß DEF die Wasserhöhe um die Höhe FC oder noch drüber vermehrt wäre. Dieserwegen wird alsdenn das Wasser in den Schenkel AC hinauf und in den Schenkel CB hineintreten. Sobald es in dem niederhängenden Schenkel bis an KL so tief gesunken ist, daß die untere Fläche KL niedriger, als im Gefäß die Wasserfläche DF stehet; sobald ist auch die Höhe des Drucks, womit die Atmosphäre von unten gegen die Fläche KL preßt, kleiner, als die Höhe des Drucks, welchem diese Fläche von obenher ausgesetzt ist, und LM ist die Differenz beyder Höhen. Demnach muß das Wasser noch weiter ab- und bey B ausfliessen. Während dieser Bewegung ist es nun eben so viel, als wenn Gefäß und Heber wie sonst ein Gefäß mit einer Röhre zusammen hängen, und das Wasser muß fortfahren, bey B mit einer Geschwindigkeit auszufließen, die mit der Höhe OB der Wasserfläche DF im Gefäß über der Oefnung B zusammen gehört, wenn anders, wie hier vorausgesetzt wird, die Oefnung B in Vergleichung mit den Querschnitten des Gefässes nur klein ist.

Die

Die ersten Gründe der Maschinenlehre.

Die 1. Erklärung.

1. Wenn eine Maschine eine zeitlang ununterbrochen in gleichförmiger Bewegung bleibt, so sagt man, sie sey im Beharrungsstande. Man beurtheilt alsdenn die Grösse ihres Effects aus der Grösse des Widerstandes, den die Maschine vermittelst der angebrachten Kraft überwindet, und der Geschwindigkeit der Stelle der Maschine, die dem Widerstande unmittelbar ausgesetzt ist. Den Widerstand betrachtet man als die zu bewegende Last, und die Geschwindigkeit der Bewegung der Stelle, welche dem Widerstande unmittelbar ausgesetzt ist, betrachtet man als die Geschwindigkeit der Last.

Zusatz.

2. In solchen Fällen, wenn vermittelst einer Winde ein Ballen Waare, oder sonst etwas Schweres lothrecht in die Höhe gezogen wird, ist eine wirkliche Last da, die in gewisser Zeit um eine gewisse Höhe steigt, die also auch selbst mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt wird. Wenn aber die Maschine auch sonst eine andre Art von Widerstand, wie eine Kornmühle den Widerstand des Getreides zwischen den Mühlsteinen zu überwinden

hat, so ist der Erfolg doch immer eben so, als wenn eine Last in gewisser Zeit auf eine gewisse Höhe gehoben werden sollte. Dieserwegen kann man sich den Effect einer Maschine allemahl so vorstellen, als wenn sie in gewisser Zeit eine gewisse Last auf eine gegebene Höhe herauf brächte.

Die 2. Erklärung.

3. Wenn die Maschine in Bewegung ist; so betrachtet man die Geschwindigkeit der Stelle der Maschine, welche die an der Maschine angebrachte Kraft unmittelbar angreift, als die Geschwindigkeit der Kraft. Wird die Kraft mit dieser Geschwindigkeit multiplicirt; so heißt das Product das **mechanische Moment der Kraft**. Im ähnlichen Sinn verstehet man durch das **mechanische Moment der Last** das Product der Last, oder des Widerstandes in die Geschwindigkeit der Stelle, welche dem Widerstande unmittelbar ausgesetzt ist.

Zusatz.

4. Das mechanische Moment der Kraft ist dem mechanischen Moment der Last gleich, wenn beyde mit einander im Gleichgewicht sind. (100 §. Stat.) Demnach ist auch das mechanische Moment der Kraft dem Effect der Maschine gleich. (1 §.)

Exempel. Von einer Welle, die $\frac{1}{4}$ Fuß im Halbmesser hat, hänge eine Last von 80 Pfunden am Seil herab. An der Welle befinde sich eine Kurbel von 1 Fuß Länge, womit man die Welle drehen kann, und ein Arbeiter greife die Handhabe der Kurbel an, mit einem Bestreben, sie nach einer Richtung zu drehen, die mit ihrer Länge einen rechten Winkel macht, in einer Ebene, die auf der Axe der Welle senkrecht ist. Der Arbeiter drücke so stark gegen

gegen die Kurbel, als wenn er ein Gewicht von 20 Pfunden zu halten hätte, so wird dieser Druck mit der Last im Gleichgewicht seyn, (63 §. Stat.) und noch keine Bewegung erfolgen. Wenn dagegen der Arbeiter anfangs etwas stärker drückt, so wird die Kurbel und mit derselben auch die Welle in Umlauf kommen, so daß die Last gehoben wird. Indem aber die Handhabe der Kurbel der dagegen drückenden Hand des Arbeiters ausweicht, wird der Druck der Hand gegen diese Handhabe kleiner, weil der Arbeiter nicht so stark gegen die ausweichende, als gegen die noch ruhende Kurbel drücken kann. Sobald alsdenn der Druck wieder bis auf 20 Pfund abgenommen hat, sobald wird dieser Druck mit der Last wieder im Gleichgewicht seyn, und die Kurbel mit der Welle wird im gleichförmigen Umlauf bleiben, so lange der Arbeiter mit gleicher Stärke gegen die Kurbel drückt.

Wenn nun die Handhabe mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß in 1 Secunde ausweicht, so wird die Last mit einer Geschwindigkeit von $\frac{3}{4}$ Fuß steigen. Das mechanische Moment der Kraft ist 20 Pfund $\times$ 3 Fuß $= 60$, das mechanische Moment der Last ist 80 Pfund $\times$ $\frac{3}{4}$ Fuß ebenfalls $= 60$. Der Effect dieser Maschine besteht also darin, daß eine Last von 80 Pfunden in jeder Secunde $\frac{3}{4}$ Fuß hoch gebracht wird. Eben die Maschine könnte also 80 Pfund Last in 1 Minute 45 Fuß hoch, und 1 Stunde 2700 Fuß hoch bringen.

Von der Welle könnten zwey verschiedene Seile so herabhängen, daß eins davon sich von der Welle abwickelte, wenn sich das andre aufwickelt, und

umgekehrt. An jedem Seil könnte ein Korb oder sonst ein Behälter hängen, um schwere Sachen, als Baumaterialien, Waaren, oder sonst etwas dergleichen herein zu legen. Man setze, der Arbeiter mit der Winde stehe 75 Fuß hoch über der Stelle, woselbst unten ein solcher Korb wieder mit 80 Pfund in der Zeit beläßiget wird, worin man den oben angekommenen Korb ausleert; so kann nun die Maschine, wenn die von der oben erwehnten Ursache herrührende Zögerung beyseit gesetzt wird, ununterbrochen wirken. Weil das Steigen der Last um ¾ Fuß 1 Sec. Zeit erfordert, so erfordern 75 Fuß Höhe 100 Secunden Zeit. Weil ferner in 100 Sec. Zeit 80 Pfund Last 75 Fuß hoch gebracht werden, so werden in 1 Stunde oder 3600 Secunden Zeit 2880 Pfund Last 75 Fuß hoch gebracht, und das ist der Effect der Maschine für 1 Stunde. Sie hebt auf die unveränderliche Höhe von 75 Fuß nach und nach immer mehr schwere Masse, und alle Stunden beträgt es 2880 Pfund, so lange die Wirkung der Maschine ununterbrochen fortfährt.

Die 1. Aufgabe.

5. Das mechanische Moment der Kraft für den Beharrungsstand der Maschine ist gegeben: man soll die Last finden, welche vermittelst der Maschine in gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe gebracht werden kann.

Aufl. Man multiplicire das mechanische Moment der Kraft mit der gegebenen Zeit, und dividire das Product mit der gegebenen Höhe, so findet man die gesuchte Last.

Beweis.

Beweis. Wenn P die Kraft bezeichnet, und α die Geschwindigkeit der Stelle, welche die Kraft unmittelbar angreift; so ist $P \cdot \alpha$ das mechanische Moment der Kraft. Wenn ferner Q die Last bezeichnet, welche in der Zeit T auf die Höhe f steigt, oder wenn statt dessen die Stelle der Maschine, welche dem Widerstande unmittelbar ausgesetzt ist, in der Zeit T den Weg f zurück legt; so ist $\frac{f}{T}$ die Geschwindigkeit der Last, oder auch der Stelle, welche dem Widerstande ausgesetzt ist, und man findet das mechanische Moment der Last $= Q \cdot \frac{f}{T}$.

Demnach ist ferner $Q \cdot \frac{f}{T} = P \cdot \alpha$, (4 §.) und man findet $Q \cdot f = P \cdot \alpha \cdot T$, mithin $Q = \frac{P \cdot \alpha \cdot T}{f}$.

Erfahrungssätze.

6. Wenn ein Mensch eine Kurbel drehet, und die angegriffene Stelle der Kurbel mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß in einer Secunde ausweicht, so kann der Arbeiter mit einer Kraft von 20 Pfund in die Kurbel wirken.

Ein Pferd, wenn es ziehend an einer Maschine arbeiten soll, kann am füglichsten eine verticalstehende Welle AB vermittelst eines daran horizontal befestigten Zugbaums CD drehen, wenn es bey D angespannt ist, und sodann im Kreise herum läuft, wozu der Halbmesser CD gehört. Dieser Zug- oder Schwengbaum muß wenigstens 10 bis 12 Fuß 154 Fig.

lang seyn, damit der Umlaufskreis nicht zu klein ausfalle. Die Kraft eines Pferdes, wenn es mit doppelt so viel Geschwindigkeit als ein Mensch ziehend arbeitet, schätzt man 7mahl grösser als die Kraft eines arbeitenden Mannes, also auf 140 bis 150 Pfund, wenn die angegriffene Stelle D der Maschine mit einer Geschwindigkeit von 6 Fuß in einer Secunde ausweicht.

Es ist leicht zu erachten, daß diese Bestimmungen nicht allgemein seyn können. Soll die Arbeit eine zeitlang anhaltend fortgesetzt werden, so darf man nur auf 2 Fuß Geschwindigkeit für den arbeitenden Menschen rechnen, wogegen er alsdenn wohl eine Kraft von 25 Pfunden anwenden kann. Für das arbeitende Pferd würde man also 4 Fuß Geschwindigkeit bey einer Kraft von 175 Pfund in Anschlag zu bringen haben.

Die 3. Erklärung.

7. **Ein Rad** in verticaler Stellung, dessen Welle horizontal liegt, kann vom fliessenden Wasser auf eine zweifache Art in Umlauf gebracht und erhalten werden, nachdem es entweder unter dem Rade wegfließt, oder so geleitet ist, daß es von oben herab auf das Rad fällt. Im ersten Fall heißt es ein **unterschlächtiges Wasserrad**, und der Umlauf desselben ist ein Effect des Wasserstosses gegen die
150 Schaufeln DE, OK, u. s. f. Am Umfange des
Fig. **oberschlächtigen** Rades wird der Kranz von der innern Seite geschlossen, und die Schaufeln werden zwischen zwoen Reifen so eingesetzt, daß sie so viele Wasserbehälter abgeben, welche das aufgefangene Wasser allererst ausgiessen, wenn sie beym Umlauf des

des Rades fast die unterste Stelle erreicht haben. Man nennt dergleichen Räder auch Sackräder.

Zusatz.

8. Damit das Wasser an die Schaufeln des unterschlächtigen Rades mit einer etwas beträchtlichen Geschwindigkeit stosse, wird quer durch den Fluß oder Bach, der das Rad treiben soll, ein Damm angelegt, und auf dem Rücken des Dammes der sogenannte Fachbaum L oder Grundbaum in horizontaler Lage befestiget. Ueber demselben kommt eine Wand zu stehen, die mit Oefnungen versehen ist, welche durch vorgesetzte in Falzen bewegliche Schutzbretter geöfnet und wieder geschlossen werden können. Gleich hinter dieser mit Schutzbrettern versehenen Wand hängt das Wasserrad so, daß die Schaufeln, wenn sie in der niedrigsten Stelle DE anlangen, das über den Fachbaum L herabstürzende Wasser auffangen können. Die vornehmsten Theile vom ganzen Bau, der bey solchen Maschinen das Grundwerk heißt, so weit man sie kennen muß, wenn man lernen will, wie der Effect des Rades berechnet wird, stellet die 151 Figur im Grundriß, und die 150 Figur im verticalen Durchschnitt nach der Länge des Flusses vor: wie übrigens der ganze Bau aufgeführt werden müsse, das läßt sich hier nicht zeigen, und gehört auch eigentlich für die Wasserbaukunst oder Hydrotechnick. Man kann darüber Beyers Schauplatz der Mühlenbaukunst, und den ersten Theil von Belidors Wasserbaukunst zu Rathe ziehen. Von kleinern hieher gehörigen Werken ist besonders Hrn. Silberschlags Hydrotechnick zu empfehlen. 151 Fig.

Die 4. Erklärung.

#19 Fig. 9. Die Höhe LN des Wassers über dem Grundbalken heißt der Wasserstand. Gewöhnlich ist das Fluthbette LE des Gerinnes, worin das Rad hängt, eine geneigte Fläche, so daß die Mitte A der Schaufel DE, wenn sie beym Umlauf in der niedrigsten Stelle ankommt, noch niedriger liegt, als die obere Fläche des Grundbalkens. Wenn nun AF horizontal ist, so heißt LF das Gefälle vom Grundbalken bis zur niedrigsten Schaufel, auch das lebendige Gefälle. Die ganze Höhe FN, die Summe des Wasserstandes und des lebendigen Gefälles, macht alsdenn das ganze Gefälle aus, vom obern Wasserspiegel MN bis zur Mitte der niedrigsten Schaufel.

Der 1. Zusatz.

10. Obgleich nicht alle Elemente des Wassers mit gleichen Geschwindigkeiten durch die Oefnung LP fliessen; so kann man doch dem 28 §. Hydraulik gemäß ohne sehr zu fehlen annehmen, das Wasser fliesse durch die Mitte Z der Oefnung mit einer Geschwindigkeit, die der Wasserhöhe ZN zugehört. Was oberhalb Z durchfließt, wird etwas weniger Geschwindigkeit haben, was durch niedrigere Stellen fließt, etwas mehr. Die Geschwindigkeit also, der die Höhe ZN zugehört, kann man als die mittlere ansehen. Von Z bis A erlangt das Wasser durch den Fall noch etwas mehr Geschwindigkeit, und in dem Augenblick wenn es die niedrigste Schaufel trift, ist sie so groß als diejenige, welche ein schwerer Körper erlangt, wenn er von einer Höhe fällt, die dem ganzen Gefälle FN gleich ist.

Der

Der 2. Zusatz.

11. Wenn das Wasser die noch ruhende Schaufel trift; so entsteht aus dem Anstoß ein Druck gegen die Schaufel, der so groß ist, als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche mit der Fläche der Schaufel und deren Höhe mit derjenigen einerley ist, wovon ein schwerer Körper fallen muß, um mit dem anschlagenden Wasser einerley Geschwindigkeit zu erlangen. Eben diese Höhe ist hier also das ganze Gefälle des Triebwassers.

Die 3. Aufgabe.

12. Wenn das Rad schon umläuft, also die Schaufel ausweicht, so kann der Wasserstoß nicht mehr so stark dagegen wirken. Man muß nun die Geschwindigkeit der Schaufel von der Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers abziehen, was übrig bleibt, ist die relative Geschwindigkeit des Triebwassers. Mit dieser wirkt es nur in die Schaufel, und man kann nach der Regel des vorigen §. die Stärke des relativen Wasserstosses finden, wenn man statt der wirklichen Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers die relative Geschwindigkeit desselben in Rechnung bringt. Diese Regel mit der im vor. §. enthaltenen läßt sich nicht so kurz als hier nöthig wäre, aus theoretischen Gründen beweisen. Wenn man indessen darnach rechnet, so stimmen die Resultate sehr wohl mit der Erfahrung überein, und in sofern können diese Regeln auch als solche gelten, die durch die Erfahrung bewährt befunden werden.

Der 4. Zusatz.

13. Das mechanische Moment des relativen Wasserstosses wird gefunden, wenn man die Stärke des

des relativen Wasserstosses nach der Regel des vorigen §. durch Rechnung sucht, und was gefunden wird, mit der Geschwindigkeit der Schaufel multiplicirt. (3 §.) Die Geschwindigkeit der mittelsten Stellen der Schaufel wird bey dieser Rechnung gebraucht. Wenn diese Geschwindigkeit der Schaufel so groß ist, als der dritte Theil der Geschwindigkeit des anschlagenden Triebwassers, so findet man das erwehnte mechanische Moment grösser als in jedem andern Fall, wenn die Geschwindigkeit der Schaufel grösser oder kleiner ist.

Der 1. Lehrsatz.

14. Eine Maschine, welche von einem unterschlächtigen Wasserrade in Wirksamkeit gesetzt werden soll, muß so angeordnet werden, daß die Geschwindigkeit der umlaufenden Schaufeln dem dritten Theil der Geschwindigkeit des anschlagenden Triebwassers gleich ist.

Beweis. Bey dieser Anordnung wird das mechanische Moment der Kraft des Wasserstosses grösser, als bey jeder andern Geschwindigkeit der umlaufenden Schaufeln: (13 §.) also muß in eben dem Fall der Effect der Maschine der möglichst gröste seyn, weil er dem mechanischen Moment der Kraft gleich ist. (4 §.)

Anmerkung.

Hr. Parent hat diese Regel erfunden, und in den Schriften der Pariser Academie im Jahr 1704. bekannt gemacht. Ganz neuerlich aber, hat Hr. Prof. Klügel einige Zweifel gegen diesen Satz in einem geschriebenen Aufsatze, den er der Götting. Soc. bey der Jubelsfeier der dasigen Universität, unter folgendem Titel: „Theoria nova motus machinarum vi aquae in rotam subtus in currentium movendarum:“ einschickte, vorgetragen. Hoffentlich wird er bald im Drucke erscheinen.

Die

Die 2. Aufgabe.

15. Die Kraft wirkt an der Peripherie eines Rades nach der Richtung der Tangente, und die Geschwindigkeit der von der Kraft angegriffenen Stelle ist gegeben: man soll die Umlaufszeit des Rades finden.

Aufl. Man dividire die Peripherie des Rades mit der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle, so findet man die gesuchte Umlaufszeit in Secunden ausgedruckt, wenn die Geschwindigkeit für eine Secunde in Rechnung gebracht wird.

Beweis. Die Umlaufszeit, welche man sucht, ist diejenige, worin die angegriffene Stelle einen Weg zurück legt, welcher der ganzen Peripherie des Rades gleich ist: also wird die Zeit gefunden, welche während dieser Bewegung verfließt, wenn der Weg mit der Geschwindigkeit dividirt wird. (6. 7. §. Mech.)

Der 1. Zusatz.

16. Die Umlaufszeit der Kurbel, wenn sie von einem Menschen gedrehet, auch die Umlaufszeit des Schwengbaums, wenn derselbe von Pferden umgetrieben wird, findet man eben so, wenn statt der Peripherie des Rades die Peripherie des Cirkels in Rechnung gebracht wird, worin die Handhabe der Kurbel umläuft, oder die Stelle des Schwengbaums, woran die Pferde ziehen.

Der 2. Zusatz.

17. Weil beym Umlauf eines Rades alle Puncte in der Peripherie mit gleicher Geschwindigkeit in Bewegung sind; so erhellet, daß in allen Fällen die Umlaufszeit des Rades gefunden werde, wenn die Peripherie

pherie des Rades mit der Geschwindigkeit dividirt wird, womit jeder Punct in der Peripherie umläuft.

Exempel.

18. Man nehme nach dem 6 §. an, die Geschwindigkeit der Handhabe der Kurbel soll 2 Fuß betragen, und der Halbmesser des Umlaufskreises sey 1 Fuß, als die Länge der Kurbel; so findet man die Peripherie = 6,28 Fuß, also die Umlaufszeit = $\frac{6,28}{2}$ = 3,14 Secunden.

Wenn die Länge des Schwengbaums, den ein Pferd mit einer Geschwindigkeit von 4 Fuß ziehen kann, 12 Fuß beträgt; so ist die Peripherie des Umlaufskreises = 75,39 Fuß, und die Umlaufszeit = $\frac{75,39}{4}$ = 18,84 Secunden.

Das unterschlächtige Wasserrad sey 16 Fuß hoch, also der Halbmesser 8 Fuß groß bis an die Mitte der Schaufeln genommen; so ist die Peripherie 50,24 Fuß. Wenn ferner das Gefälle 4 Fuß beträgt, und zwar im Rheinl. Maaß, welches hier allemahl verstanden wird, so findet man die Geschwindigkeit des an die Schaufeln stossenden Triebwassers = $2\sqrt{15,625 \times 4}$ = 15,8 Fuß. Hievon nehme man den dritten Theil, so erhält man 5,26 Fuß für die Geschwindigkeit der umlaufenden Schaufeln, damit die Maschine den möglichst grösten Effect leistet, mithin beträgt die Umlaufszeit des Wasserrades = $\frac{50,24}{5,26}$ = 9,5 Secunden.

Die

Die 3. Aufgabe.

19. Der Quadratinhalt von der Fläche der Schaufel des unterschlächtigen Wasserrades ist gegeben: man soll finden, wie viel Wasserzufluß in jeder gegebenen Zeit nöthig sey, damit die ganze Schaufelfläche vom Wasser getroffen werde.

Aufl. Unter dem Rade muß ununterbrochen in jeder Zeitsecunde ein prismatischer Wasserkörper wegfliessen, dessen Grundfläche so groß als die Schaufelfläche, und dessen Länge so groß als die Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers ist. Man multiplicire also den Quadratinhalt der Schaufel mit der Geschwindigkeit, welche durch den Fall von einer Höhe erlangt wird, die dem ganzen Gefälle gleich ist; so hat man die nöthige Wassermenge für jede Zeitsecunde im Cubicmaaß.

Exempel. Die Länge der Schaufel sey 2 Fuß, die Höhe 1 Fuß, also der Quadratinhalt 2 Quadratfuß, das Gefälle 4 Fuß, also die Geschwindigkeit des Triebwassers 15,8 Fuß; so ist die in jeder Secunde nöthige Wassermenge $= 2 \times 15{,}8 = 31{,}6$ Cub. Fuß, mithin für jede Stunde $= 31{,}6 \times 3600 = 113760$ Cub. Fuß.

Zusatz.

20. Wenn umgekehrt nicht allein das Gefälle, sondern auch die Wassermenge bekannt ist, die in jeder Stunde, Minute oder Secunde zufliessen kann; so findet man leicht, wie groß die Schaufelfläche seyn müsse, damit sie ununterbrochen ganz vom Wasser getroffen werde. Die im Cubicmaaß ausgedrückte in jeder Secunde zufliessende Wassermenge dividire

man

man mit der Geschwindigkeit, welche mit dem Gefälle zusammen gehört; so giebt der Quotient den Quadratinhalt der Schaufel.

Der 2. Lehrsatz.

21. Wenn Rad und Getriebe in einander greifen, so ist die Umlaufszeit des Getriebes in der Umlaufszeit des Rades sovielmahl enthalten, als die Zahl der Triebstecken in der Zahl der Zähne oder Kämme des Rades.

Beweis. Weil jeder Zahn oder Kamm einen Triebstock fortschiebt, so ist das Getriebe einmahl umgelaufen, wenn so viele Zähne vorbey gegangen sind, als das Getriebe Stecken hat; das Getriebe ist zweymahl umgelaufen, wenn zweymahl soviel Zähne vorbey gelaufen sind, als es Stecken hat. Wenn also die Zahl aller Zähne oder Kämme mit der Zahl der Triebstecken dividirt wird, so muß der Quotient anzeigen, wie vielmahl das Getriebe binnen der Zeit umgelaufen ist, da das Rad einen Umlauf gemacht hat.

Zusatz.

22. Wenn an der Welle des Getriebes das zweyte Rad befindlich ist, und dasselbe in ein zweytes Getriebe eingreift: so läuft das erste Getriebe mit dem zweyten Rade zugleich um. Wenn alsdenn die Zahl der Umläufe des zweyten Getriebes, die auf einen Umlauf des zweyten Rades kommen, mit der Zahl der Umläufe des ersten Getriebes multiplicirt wird; die auf einen Umlauf des ersten Rades kommen; so erhält man die Zahl der Umläufe des zweyten Getriebes gegen einen Umlauf des ersten Rades.

Der

Der 3. Lehrsatz.

23. Wenn eine Maschine durch arbeitende Menschen, durch Zugpferde, oder durch die Kraft des Wasserstosses gegen die Schaufeln eines unterschlächtigen Rades ihre Bewegung erhalten soll; so kann man die Anordnung allemahl so machen, daß das mechanische Moment der Kraft den möglichst grösten Werth erhält, wenn die Maschine in den Beharrungsstand kommt.

Beweis. Bey Anordnung einer jeden Maschine kommt es auf die vier Grössen an, die Kraft (P), die Last (Q), die Geschwindigkeit (α) der von der Kraft unmittelbar angegriffenen Stelle der Maschine, und die Geschwindigkeit (β) der Stelle, die dem Widerstande unmittelbar ausgesetzt ist. Ferner kommt die Kraft P mit der Last Q ins Gleichgewicht, wenn $P . \alpha = Q . \beta$ wird, und man kann allemahl zuwege bringen, daß dieser Gleichgewichtszustand erfolgen muß, wenn α die Grösse hat, welche erforderlich ist, damit $P . \alpha$ am grösten ausfalle.

Es ist nemlich in der Gleichung $P . \alpha = Q . \beta$ die Geschwindigkeit α allemahl eine gegebene Grösse: (6. 24 §.) übrigens aber muß man folgende Fälle unterscheiden.

I. Es kann die Zahl der Personen, oder der Thiere, die an der Maschine arbeiten sollen, vorgeschrieben seyn; auch kann vielleicht an einem kleinen Fluß oder Bach, wenn daselbst eine Mühle oder andre Maschine gebauet werden soll, nur ein mäßiger Wasserzufluß seyn, weßwegen die Schaufeln ebenfalls eine vorgeschriebene Grösse erhalten müssen, (20 §.) die man nicht überschreiten darf. In allen diesen Fällen ist

ausser der Geschwindigkeit α auch die Kraft P gegeben. In manchen Fällen ist es aus der Erfahrung, oder vielleicht auch aus andern Gründen bekannt, welche Geschwindigkeit für die Last, oder das, was ihre Stelle sonst als Widerstand vertritt, am vortheilhaftesten sey: alsdenn ist auch β bestimmt. Demnach findet man

1) Die Grösse der Last oder des Widerstandes $Q = \frac{P \cdot \alpha}{\beta}$.

2) Ferner findet man die Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$, wenn man die Geschwindigkeit der Kraft mit der Geschwindigkeit der Last dividirt. Eben diese Zahl ist es, welche angiebt, wie die ganze Anordnung der Maschine beschaffen seyn müsse. Ist es ein Räderwerk, so findet man den 15 §. gemäß die Umlaufszeit des Hauptrades, woran die Kraft wirkt, weil α bekannt ist. Wenn vielleicht auch die Last am Umfange eines Rades angebracht ist, so findet man eben so für dieses Rad die Umlaufszeit, weil β bekannt ist: (17 §.) also weiß man auch, wie viele Umläufe des einen dieser Räder gegen einen Umlauf des andern kommen müssen, und kann die Anzahl der Zähne und Triebstecken darnach gehörig anordnen. (21 §.)

II. Es kann die Grösse der Last oder des Widerstandes vorgeschrieben seyn, vielleicht auch die Geschwindigkeit der Last, oder es ist auch sonst bekannt, wie groß letztere seyn müsse. Diesemnach ist in einem solchen Fall nicht allein Q, sondern auch β gegeben. Aber auch α ist allemahl gegeben: mithin findet man

1) die

1) die Kraft $P = \frac{\beta \cdot Q}{\alpha}$. Weil man nun weiß, mit welcher Kraft Ein Mensch, oder Ein Pferd in die Maschine wirken kann, so ersiehet man aus der gefundenen Grösse der nöthigen Kraft P, ob Ein Arbeiter, Ein Pferd, genüge, oder ob mehrere, und wie viele arbeitende Personen oder Pferde angestellet werden müssen, wenn man Menschen oder Thiere zur Arbeit brauchen will. Soll ein unterschlächtiges Wasserrad die Maschine treiben; so findet man aus dem vorhandenen Gefälle die Geschwindigkeit des unter dem Rade wegfliessenden Wassers. Der dritte Theil davon giebt α als die Geschwindigkeit der Schaufeln: die übrigen zwey Drittheile geben die relative Geschwindigkeit des Wassers, und die dazu gehörige Höhe beträgt $\frac{4}{9}$ des Gefälles. Man suche also noch den cubischen Inhalt einer Menge Wasser, deren Gewicht der gefundenen Kraft P gleich ist, und dividire diesen cubischen Inhalt mit $\frac{4}{9}$ des Gefälles, so findet man, wie groß die Schaufelfläche seyn muß im Quadratmaaß. (12 §.)

2) Ferner findet man eben so, wie in dem vorigen Fall, wie man die übrige Anordnung der Maschine machen müsse, weil α und β wie vorhin nun bekannt sind.

Anmerkung.

24. Die Grösse der Räder und Getriebe mit ihren Zähnen und Stecken, wenn die Maschine ein Räderwerk ist, richtet sich nach der Stärke des Drucks, den sie auszustehen haben, und nach der Festigkeit der Masse, woraus sie verfertiget werden. Weil die Triebstecken den Druck öfter, als die Zähne leiden, so müssen sie etwas stärker als die Zähne seyn. Bey grossen Maschinen, wie bey Mühlen, macht man die Räder und Getriebe aus gutem hartten 152 Fig.

ten Holz; bey andern, wie bey Uhren, aus Metall. Nach Hrn. Belidor Architectura Hydraul. I. Buch II Cap. (318 §.) hat man bey hölzernen Mühlwerken folgende Regeln durch die Erfahrung gut befunden:

die Dicke der Triebstecken müsse sich zu ihrer Zwischenweite wie 8 : 7 verhalten: alsdenn beträgt der Bogen zwischen ihrer Mitte $\frac{1}{8}$ der Triebsteckendicke.

Die Peripherie des Getriebes, durch die Mitte der Triebstecken gezogen, wird = $\frac{15}{8}$ der Triebsteckendicke mit der Zahl der Triebstecken multiplicirt.

Zusatz.

Es sey in der 152 Fig. A der Mittelpunct des Getriebes, AC der Halbmesser bis an die Mitte der Triebstecken genommen, und in diesem verlängerten Halbmesser befinde sich auch der Mittelpunct B des hineingreifenden Rades. Wenn man nun mit den Halbmessern AC und BC die einander in C herrührenden Kreise DCE, FCG beschreibt; so sind das eigentlich die Peripherien, die sich an einander umwälzen sollen. Die Peripherie FCG ist eigentlich der Theilriß für das Rad: man nennt sie kurz die Peripherie des Rades, und ihren Halbmesser BC den Halbmesser des Rades. Die Peripherie des Getriebes muß in der Peripherie des Rades, also auch der Halbmesser AC im Halbmesser BC so vielmahl enthalten seyn, als Umläufe des Getriebes gegen einen Umlauf des Rades kommen sollen. Wenn nun CV die halbe Triebsteckendicke ist; so ist BV die Gränze, welche der Halbmesser der äussern Peripherie der Felgen des Rades, wo die Zähne aufgesetzt werden, nicht übertreffen muß. Nimmt man BK für diesen Halbmesser an, und beschreibt damit die Peripherie HKI, so ist das die äussere Peripherie der Felgen, worüber die Zähne, wenn es ein Sternrad ist, in der Richtung

des

des Halbmessers aufgerichtet werden. Die nähere Bestimmung ihrer Länge, Stärke und geschicktesten Figur setzt mehr Theorie voraus, als hier im vorhergehenden hat vorgetragen werden können.

Die Müller nennen gewöhnlich die äussere Peripherie HKI der Felgen des Rades den Theilriß. Nachdem die Zahl *m* der Zähne für das Rad und die Zahl *n* der Stecken für das Getriebe festgesetzt ist, bestimmen sie alle übrige Abmessungen aus der Grösse des Bogens LN zwischen der Mitte zweyer einander zunächst folgender Zähne. Sie wissen aus der Erfahrung, wie lang dieser Bogen in Zollen seyn muß, nachdem die Maschine mehr oder weniger Gewalt leidet, und nennen die Zahl der Zolle, welche die Länge des Bogens LN angiebt, die Theilung des Rades. Die übrigen Abmessungen von Rad und Getriebe werden so bestimmt. Die Theilung mit der Zahl der Zähne multiplicirt giebt die Peripherie, und diese ferner den Halbmesser BK des Theilrisses. Nachdem nun mit demselben ein Kreis beschrieben, und darauf der Bogen LN von so vielen Zollen, als die Theilung erhalten soll, etwa von 5 Zoll, abgesteckt ist, wird derselbe in 7 gleiche Theile getheilt. Nun wird für die Länge der Zähne LM = NO = $\frac{2}{7}$LN, für die Breite oder Stärke PW = $\frac{3}{7}$LN genommen; so bleibt der Bogen PQ zwischen den Zähnen = $\frac{4}{7}$LN. Wenn alsdenn ferner KT = $\frac{2}{7}$LN genommen ist, so wird TV = $\frac{4}{7}$LN für den Durchmesser der Trillingsstecken genommen, und es bleibt KV = $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{2}{21}$LN. Endlich wird TV in C halbirt, der Halbmesser des Getriebes = $\frac{n}{m}$ BC an-

genommen und von C nach A getragen; so ist A der Mittelpunct des Getriebes. Der mit dem Halbmesser BC zwischen den Zähnen beschriebene Bogen RS ist nun $= \frac{BC}{BK} . PQ = \frac{BC}{BK} . TV$, und die Theilung für den Trilling, oder der Bogen zwischen der Mitte zweyer Triebstecken wird $= \frac{BC}{BK} . LN$. Den Zähnen giebt man an der äussern Gränze M, Q, die Krümme eines Kreisbogens, welches aber auf keiner richtigen Theorie beruhet. Nach Belidor zeichnet man zuerst den Trilling, und bestimmt daraus nachher die Abmessungen des Rades so, daß die Stärke jedes Zahns $= \frac{6\frac{1}{2}}{8}$ der Triebsteckendicke wird, mithin für den Bogen RS $\frac{8\frac{1}{2}}{8}$ der Triebsteckendicke bleibt.

Die 4. Aufgabe.

25. Bey einem Gefälle von 2 Fuß eine unterschlächtige Kornmühle zu bauen, wenn der umlaufende Mühlstein, welcher den Nahmen des Läufers führt, 5 Fuß im Durchmesser halten, 18 Zoll hoch seyn, und 50 mahl in 1 Minute umlaufen soll.

155 Fig. Aufl. An der auf dem Radestuhl horizontal liegenden Welle DE des grossen Wasserrades AB befindet sich gewöhnlich das Kammrad GH, und dasselbe greift in den Trilling PQ, an der eisernen vertical stehenden Welle OL, die hier das Mühleisen heißt. Diese geht Mitten durch den Bodenstein IK, und oben bey L ist der Läufer in seiner Mitte darauf befestiget.

stiget. Beyde Steine müssen in der Mitte durchbort seyn, der Bodenstein, weil das Mühleisen hindurchgehen, und umlaufen soll, ohne den Bodenstein mit umzutreiben, der Läufer aber, um durch die Oefnung das Getreide zwischen beyde Steine zu schütten. Diese Oefnung heißt das Läuferauge. Die übrige Einrichtung kann man leicht in jeder Kornmühle in Augenschein nehmen, auch die Beschreibung bey den oben schon genannten practischen Schriftstellern finden. Die eben beschriebenen Theile machen die Hauptsache aus: demnach folgt nun die nöthige

Berechnung.

I. Nach Hrn. Belidors Erfahrungen ist der Widerstand, den das Getreide dem Umlauf des Läufers entgegensetzt, so groß, als wenn am Umfange des Läufers eine Kraft der Bewegung entgegen drückte, welche dem 52 Theil vom Gewicht des Läufers gleich wäre, das Gewicht des Mühleisens und Trillings mit dazu gerechnet. Wäre in der Entfernung von $\frac{2}{3}$ des Halbmessers ein gleichgültiger Widerstand angebracht, so würde er $\frac{3}{2}$ von $\frac{1}{52}$ oder $\frac{1}{35}$ vom Gewicht des Läufers betragen, wie es Belidor angiebt. (Wasserbauk. I. Th. 2 Buch 653. 655 §.) Einen Pariser Cubicfuß von derjenigen Steinart, woraus in Frankreich die Mühlsteine verfertiget werden, hat Hr. Belidor 110 Pfund schwer befunden. Ich habe bey einigemahl wiederholten hydrostatischen Versuchen die Steinmasse, woraus die in hiesigen Gegenden gebräuchlichen Mühlsteine bestehen, 2,491 mahl schwerer als Wasser befunden. Weil nun 1 Rheinl. Cub. Fuß Wasser 66 Pfund Cöllnisch wiegt; so ist das Gewicht eines Cubicfusses der Steinmasse 164 Pfund.

Der Mühlstein soll 5 Fuß im Durchmesser haben, und 18 Zoll oder $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch seyn. Weil nur derselbe die Figur eines graden Cylinders hat, so ist sein cubischer Inhalt $0{,}785 \cdot 25 \cdot 1{,}5 = 29{,}5$ Cub. Fuß, und sein Gewicht = 4838 Pfund. Hiezu müste noch das Gewicht des Mühleisens und Trillings addirt werden: dagegen geht aber vom Gewicht des Läufers noch das Gewicht einer so grossen Mühlsteinmasse ab, als das Läuferauge füllen würde. Weil beydes sich ohngefähr gegen einander aufheben wird, auch überdem die gröste Schärfe bey der Rechnung hier nicht erreicht werden kann; so genügt es, wenn der 52ste Theil des gefundenen Gewichts für die zu bewegende Last angenommen wird, und dieser beträgt 92 Pfund = Q. Man sucht ferner

II. Die Geschwindigkeit der Last, und das ist hier die Geschwindigkeit eines jeden Puncts in der Peripherie des Läufers. Weil vorgeschrieben ist, daß der Läufer 50 mahl in 1 Minute oder 60 Secunden umlaufen soll, so muß er 1 mahl in $\frac{6}{5}$ Secunden umlaufen. Die Umlaufszeit des Läufers ist also gegeben, und das ist zugleich die Umlaufszeit des Trillings am Mühleisen. Die Peripherie des Läufers beträgt $3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ Fuß, also ist die Geschwindigkeit der Last $15{,}7 : \frac{6}{5} = 13{,}1$ Fuß = β.

III. Die Geschwindigkeit der Kraft findet man aus dem Gefälle. Weil dasselbe nur 2 Fuß beträgt, so erhält man die Geschwindigkeit des anschlagenden Triebwassers $= 2\sqrt{15{,}625 \times 2} = 11{,}2$ Fuß. Hievon ist der dritte Theil 3,7 Fuß = α: Das ist also die Geschwindigkeit der Mitte der Schaufeln, und man findet ferner

IV. Die

IV. Die Umlaufszeit des Wasserrades, wenn man die Höhe desselben willkührlich jedoch nur so groß annimmt, daß auch das Kammrad nicht zu groß ausfalle, weil sich gleich bey der folgenden n. V. ergeben wird, daß die Grösse des Kammrades davon abhänge. Es sey in allen 12 Fuß hoch, die Schaufelnhöhe 1 Fuß, so ist der Durchmesser des Kreises durch die Mitte der Schaufeln 11 Fuß, die Peripherie $3,14 \cdot 11 = 34,54$ Fuß, und die Umlaufszeit $\frac{34,54}{3,7} = 9,3$ Secunden.

V. Die Anzahl der Kämme und Triebstecken. Man dividire die Umlaufszeit des Wasserrades mit der Umlaufszeit des Läufers, so findet man $9,3 : \frac{6}{7} = 7,75$ für die Zahl der Umläufe des Trillings und Läufers gegen einen Umlauf des Wasserrades mit dem Kammrade; also muß das Kammrad $7\frac{3}{4}$ mahl mehr Kämme erhalten, als der Trilling Stecken hat. Giebt man diesem 8 Stecken, so erhält das Rad 62 Kämme.

VI. Die nöthige relative Kraft des Wasserstosses, giebt der Ausdruck $P = \frac{\beta \cdot Q}{\alpha}$, und man hat schon $Q = 92$ Pfund $\beta = 13,1$ Fuß, $\alpha = 3,7$ Fuß, also wird $P = \frac{13,1 \times 92}{3,7} = 326$ Pfund.

VII. Den cubischen Inhalt der Wassersäule, deren Gewicht 326 Pfund beträgt, findet man $\frac{326}{66} = 4,94$ Cubicfuß: das ferner mit $\frac{8}{9}$ des Gefälles, also mit $\frac{8}{9}$ Fuß, dividirt, giebt 5,56 Qu. Fuß für die Schaufelfläche. Ihre Höhe kann man von 1 Fuß annehmen, also muß jede Schaufel 5,56 Fuß lang seyn.

VIII. Wird endlich der Quadratinhalt der Schaufel von 5,56 Qu. Fuß mit der Geschwindigkeit des anschlagenden Triebwassers multiplicirt, so erhält man $5{,}56 \times 11{,}2 = 62{,}272$ Cub. Fuß, als den nöthigen Wasseraufwand in jeder Secunde. Könnte man auf so viel Wasserzufluß nicht sicher rechnen; so würde die Mühle einen so grossen und schweren Läufer, als vorgeschrieben war, nicht führen können.

Zusatz.

26. Der Effect der Mühle verhält sich wie das Product $Q\beta$, und wenn die Peripherie des Läufers $= p$, die Umlaufszeit $= t$ gesetzt wird, so ist $\beta = \frac{p}{t}$, also der Effect $= Q \cdot \frac{p}{t} = Q \cdot p \cdot \frac{1}{t}$. Wird t in Secunden ausgedrückt, so ist $\frac{1}{t}$ die Zahl der Umläufe, welche der Stein in 1 Secunde macht. Ueberdem verhält sich hier Q wie das Gewicht des Läufers, p wie sein Durchmesser, und weil der Läufer in 1 Minute 60 mahl mehr Umläufe als in 1 Secunde macht; so verhält sich auch die Zahl $\frac{1}{t}$ wie die Zahl der Umläufe in 1 Minute. Um also die Effecte verschiedener Mühlen zu vergleichen, multiplicire man das Gewicht des Läufers mit seinem Durchmesser und der Zahl der Umläufe, die er in einer Minute macht. Die Mengen des Mehls, welche Mühlen von verschiedener Anordnung in gleichen Zeiten liefern, verhalten sich nach Hrn. Belidors Erfahrung ziemlich nahe, wie die so berechneten Effecte: also kann man den Effect einer jeden andern Mühle mit dem

Effect

Effect einer Mühle zu la Fere vergleichen, die Hr. Belidor untersucht hat. Diese führte einen 4348 Pfund schweren Läufer von 6 Fuß im Durchmesser, der in 1 Minute 53 mahl umlief, und lieferte in 24 Stunden 120 Septiers gemahlnes Getreide, den Septier zu 75 Pfund gerechnet. Man findet also, wieviel gemahlnes Getreyde die im vor. §. berechnete Mühle liefern würde nach der Proportion 4348 . 53 . 6 : 4838 . 50 . 5 = 120 Septiers : ges. Zahl von 105 Septiers.

Die 5. Erklärung.

27. Handmühlen nennt man diejenigen, welche von Menschen vermittelst einer Kurbel getrieben werden, und Roßmühlen solche, die von Zugpferden in Wirksamkeit gesetzt werden.

Der 1. Zusatz.

28. An der Axe der Kurbel A befindet sich das Kammrad B, welches den Trilling C und mit demselben den Läufer D treibt. Um den Umlauf desto gleichförmiger zu erhalten, sind an der Axe der Kurbel die Schwungflügel K, L, und am Mühlstein die Schwungflügel M, N, angebracht. Wenn nun vorgeschrieben ist, daß zwey Personen die Kurbel drehen sollen; so ist P nebst α gegeben. Soll überdem der Läufer 50 mahl in einer Mitte umlaufen, so ist auch β gegeben, wenn man den halben durchmesser des Läufers willkührlich annimmt. Es sey derselbe $1\frac{1}{2}$ Fuß, also der ganze Durchmesser 3 Fuß, so ist seine Peripherie $3 \times 3{,}14 = 9{,}42$ Fuß, die Umlaufszeit $\frac{6}{5}$ Secunden, also die Geschwindigkeit der Peripherie $\beta = 9{,}42 : \frac{6}{5} = 7{,}85$ Fuß. Der Halbmesser des Umlaufskreises der angegriffenen Stelle A der Kurbel sey 1 Fuß; so ist die Peripherie 6,28 Fuß, und die Um-

153 Fig.

Umlaufszeit $\frac{6,28}{2} = 3,14$ Secunden. Diese mit $\frac{4}{5}$ Secunden dividirt giebt die Zahl der Umläufe des Läufers gegen einen Umlauf der Kurbel = 2,62. Wenn also das Getriebe 6 Stecken hat, so erhält das Kammrad 16 Kämme. Weiter findet man $Q = \frac{\alpha \cdot P}{\beta}$, und es ist P = 50 Pfund, also $Q = \frac{2 \cdot 50}{7,85}$ = 12,738 Pfund, und das mit 52 multiplicirt giebt 662 Pfund für das Gewicht des Läufers. Seine Grösse beträgt also 4,04 Cub Fuß, weil 1 Cubicfuß seiner Masse 164 Pfund wiegt, seine Grundfläche 0,785 . 9 = 7,065 Qu. Fuß, mithin seine Höhe 0,572 Fuß, oder sehr nahe 7 Zoll. Die Menge Mehl, welche die Mühle in 24 Stunden liefern kann, giebt die Proportion 4838 . 5 : 688 . 3 = 105 Septiers : ges. Zahl 9 Septiers.

Die 1. Anmerkung.

29. Schwungflügel und Schwungräder ordnet man nur in solchen Fällen an, wenn der Gang der Maschine sonst zu ungleichförmig ausfallen würde. Man beobachtet dabey folgende Regeln. 1) Das Schwungrad muß seinen Schwerpunct genau in der Umlaufsaxe haben, da es denn eben so viel ist, als wenn es blos träge, gar nicht schwer wäre. 2) Die meiste Masse desselben wird am Umfange vertheilt. 3) Die Figur desselben ist ziemlich, wiewohl wegen des Widerstandes der Luft nicht ganz gleichgültig, denn es muß der Luft nicht zuviel Fläche entgegen setzen. (In einigen Fällen werden aus andern Gründen breite Schwungflügel gewählt, wenn man haben will, daß die Geschwindigkeit einer Maschine, die durch Gewichte getrieben wird, nicht über eine gewisse Gränze wachsen soll.) 4) Das Schwungrad wird an derjenigen Welle der Maschine angebracht, welche am schnellsten umläuft.

Die

Die 2. Anmerkung.

30. Der Erfolg ist dieser. Wenn das Rad einmahl in Umlauf ist, so setzt es die Umlaufsbewegung nach dem Gesetz der Trägheit ununterbrochen gleichförmig fort, wenn nicht die Friction und andre Hindernisse sie verzögern. Wenn nun das Moment des Widerstandes, den die Maschine überwinden soll, vielleicht nicht immer einerley ist, und die Kraft nun den Umlauf mehr beschleunigen würde; so gehört dazu etwas Zeit, und bevor diese verflossen ist, nimmt der Widerstand wieder zu, mithin bleibt die Geschwindigkeit des Umlaufs ziemlich unverändert. Hr. Polhem trägt in den Abhandl. der Königl. Schwed. Acad. d. W. auf die Jahre 1741 u. 1742. eine ganz fehlsame Theorie von Schwungrädern vor, die auch Hr. Büsch in seiner Mathem. zum Nutzen und Vergnügen des gemeinen Lebens, so wie Herr Schmid im 70 — 72 Stück des Hannöv. Mag. vom Jahr 1776. angenommen haben. Selbst Hr. Mönnich in seiner Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen, 1 Abth. Augsburg 1779, 35 u. f. §. schien ihr Beifall zu geben, bemerkte aber nachher die Unrichtigkeit, und zeigte es in der Vorrede an. M. s. davon mit mehrern das 42 und 43 Stück der wöchentlichen Hallischen Anzeigen vom Jahr 1778.

Der 2. Zusatz.

31. An der lothrecht stehenden Welle AB, die von einem Pferde bey D am Zugbaum CD gedrehet wird, befinde sich das Sternrad EF, das in den Trilling G greift, und vermittelst desselben den Läufer H herum treibt. Für diese Roßmühle ist $P = 175$ Pfund, $\alpha = 4$ Fuß. (6 §.) Wenn nun der Läufer 5 Fuß im Durchmesser, also $2\frac{1}{2}$ Fuß im Halbmesser haben, und 50mahl in einer Minute umlaufen soll; so ist die Peripherie 15,7 Fuß, die Umlaufszeit $\frac{6}{5}$ Secunden, die Geschwindigkeit $\beta = 13{,}1$ Fuß. Ferner sey die Länge des Schwengbaums CD = 12 Fuß, so ist die Peripherie, worin das Pferd umläuft, $3{,}14 \cdot 24 =$ 154 Fig.

$= 75{,}36$ Fuß, also die Umlaufszeit $\frac{75{,}36}{4} = 18{,}84$ Secunden. Diese mit $\frac{5}{6}$ Secunden dividirt giebt die Zahl 16, daß also das Sternrad EF 16mahl mehr Zähne haben muß, als das Getriebe G Stecken hat. Weiter findet man $Q = \frac{P \cdot \alpha}{\beta} = \frac{175 \cdot 4}{13{,}1} = 53{,}4$ Pf., welches mit 52 multiplicirt das Gewicht des Läufers giebt von 2777 Pfund. Das ferner mit 164 Pfund dividirt giebt 17 Cub. Fuß für seinen cubischen Inhalt, und dieser mit der Grundfläche von $0{,}785 \cdot 25 = 19{,}625$ Qu. Fuß dividirt, giebt die Höhe von 0,842 Fuß, oder 10 Zoll. Der Effect ist 7mahl grösser, als bey der im vor. H. berechneten Handmühle: also können 63 Septiers in 24 Stunden abgemahlen werden.

Die 6. Erklärung.

32. **Stampfmühlen** sollen dazu dienen, mancherley Materialien durch starkes Stossen oder Schlagen zum anderweitigen eigenen Gebrauch zuzubereiten: einige führen **Stämpfer**, andre **Hammer**. Unter denselben liegen die Materialien in dienlichen Behältnissen, welche von den Stämpfern oder Hammern zerstossen oder geschlagen werden, indem die Maschine sie wechselsweise aufhebt, und wieder fallen läßt. Hieher gehören die Oehlmühlen, Lohmühlen, Pulvermühlen, Walkmühlen, Papiermühlen, und unter den Bergwerksmaschinen die Pochwerke.

Der 1. Zusatz.

156 Fig. 33. Wenn eine Welle, wovon die Figur einen Querschnitt vorstellt, unter dem Nahmen der Daumen mit Zapfen wie A, B, E, F, versehen ist, so können

können diese beym Umlauf der Welle den hervorragenden Zapfen GD des Stämpfers HI von unten ergreifen, ihn auf eine gewisse Höhe heben, und hiernächst wieder fallen lassen. Nach der Länge der Welle wird eine Reihe mehrerer Stämpfer gestellt, und die Daumen werden an der Welle so vertheilt, daß in dem Augenblick, wenn ein Stämpfer niederfällt, ein andrer wieder ergriffen werde, damit immer einerley Anzahl Stämpfer an der Welle hänge, und ihren Umlauf zu hemmen strebe.

Der 2. Zusatz.

34. Wenn jeder Stämpfer für sich bey jedem Umlauf der Welle einigemahl gehoben werden soll, so müssen eben so viele Daumen auf der Peripherie desjenigen Querschnitts der Welle eingesetzt seyn, welcher mit dem nemlichen Stämpfer zusammen gehört. Eben dieser Kreis ist der gemeinschaftliche Umlaufskreis der dazu gehörigen Daumen. Mit jeden einzelnen von den zu einerley Umlaufskreise gehörigen Daumen gehört ferner eine Reihe von so vielen Daumen zusammen, als Stämpfer vorhanden sind, welche nach der Länge der Welle gehörig vertheilt seyn müssen.

Der 3. Zusatz.

35. Wenn 8 Stämpfer vorhanden sind, und während eines Umlaufs der Welle ein jeder dreymahl gehoben werden soll, so muß die Welle 24 Daumen haben. Wenn ferner die Umlaufszeit der Welle $= t$ gesetzt wird, und im jetzigen Augenblick der erste Stämpfer ergriffen wird; so muß die Zeit $\frac{1}{24}t$ bis zu dem Augenblick verfliessen, da der zweyte Stämpfer ergriffen wird. Sollen alsdenn immer 5 Stämpfer an der Welle hängen, so muß die Zeit $\frac{5}{24}t$ verflossen

flossen seyn, wenn der erste niederfällt. Demnach findet man die Erhebungszeit für jeden Stämpfer, wenn die Umlaufszeit der Welle mit einem Bruch multiplicirt wird, dessen Nenner die Zahl aller Daumen ist, der Zähler aber die Zahl aller Stämpfer, die zugleich an der Welle hängen sollen.

Der 4. Zusatz.

36. Die Höhe, um welche jeder Stämpfer gehoben wird, kann kurz die Erhebungshöhe heissen. Wird diese mit der Erhebungszeit dividirt, so hat man die Geschwindigkeit der Last $= \beta$, die Last Q selbst ist das Gewicht eines Stämpfers mit der Anzahl derer multiplicirt, die an der Welle zugleich hängen.

Der 5. Zusatz.

37. Aus der Erfahrung muß übrigens als bekannt angenommen werden, wie vielmahl die Daumenwelle am vortheilhaftesten in einer Minute umlaufen müsse, damit die Bewegung der Stämpfer weder zu schnell, noch zu langsam sey: also ist die Umlaufszeit t gegeben. Wenn demnach überdem auch das Gewicht eines Stämpfers bekannt ist, so hat es weiter keine Schwierigkeit, die ganze Anordnung der Stampfmühle zu berechnen.

Die 7. Erklärung.

38. Eine Holzsägemühle soll eine Säge in die nöthige Bewegung setzen, um Stämme von Bäumen nach ihrer Länge in Bretter oder schwächere Stücken Bauholz zu zerschneiden. In solcher Absicht macht man die Einrichtung so, daß der Säge in lothlechter Stellung eine auf und nieder spielende Bewegung mitgetheilet wird, indem aber diese Säge tiefer einschneidet, auch zugleich der horizontalliegende Block ihr nach und nach entgegen rückt.

Zusatz.

Zusatz.

39. An der Welle AB des Wasserrades befinde sich das Sternrad C, das in den Trilling D greift, und an der Welle dieses Trillings befinde sich die Kurbel E, welche beym Umlauf vermittelst des Lenkers MN die Säge OP auf und nieder schiebt. Diese ist in dem sogenannten Sägegatter FG befestiget, welches in den Falzen der lothrecht stehenden Gattersäulen HI, KL, beweglich ist. Bey jedem Umlauf der Kurbel wird also das ganze Gatter mit der lothrecht darin befestigten Säge einmahl auf- und niedergeschoben. Oben bey O wird mit der Säge der eine Arm eines Winkelhebels verbunden, wovon der andre Arm wiederum mit einer dazu schicklichen Stoßstange verbunden ist, welche bey jedem Umlauf der Kurbel einige Zähne eines Rades fortschiebt, das einem Gerüste nach Art eines Wagens, worauf der Block lieget, die nöthige Bewegung mittheilet. 157 Fig.

Der 4. Lehrsatz.

40. Damit der Widerstand, welchen die Sägemühle zu überwinden hat, soviel möglich immer gleich groß bleibe, muß das Gewicht des Sägegatters mit der Säge halb so groß seyn, als der Widerstand, welchen die Festigkeit des Holzes der Bewegung der Säge entgegen setzet.

Beweis. Wenn die Säge steigt, so schneidet sie nicht ein: also hat die Maschine bey der steigenden Bewegung nur das Gewicht des Gatters mit der Säge zu überwinden. Wenn dagegen die Säge mit dem Gatter sinkt, und ins Holz einschneidet; so ist der Widerstand des Holzes zu überwinden, wozu schon das Gewicht des Sägegatters als Kraft be-

trachtet, das seinige beyträgt. Setzt man also das Gewicht des Gatters = Q, den Widerstand des Holzes = R, so hat die Maschine, wenn die Säge sinkt, eine Last = R – Q, wenn sie aber steigt, eine Last = Q zu überwinden. Damit also dieser Widerstand immer gleich bleibe, wird erfodert, daß Q = R – Q sey, also 2Q = R, und Q = ½R.

Erfahrungssätze.

41. Drey an einer Säge arbeitende Personen können in einer Stunde einen annoch grünen 12 Zoll ins Gevierte starken eichenen Stamm bis auf eine Länge von 10 Fuß von einander sägen, wenn zwey davon unten stehen, und die Säge niederziehen, der dritte aber oben stehet, und die Säge wieder hinauf ziehet, auch jedesmahl von oben herab die Säge mit niederdrückt. Jeder Arbeiter wendet alsdenn etwa 30 Pfund Kraft an, also beträgt der Widerstand 90 Pfund. (M. s. Belidors Wasserbaukunst I. Th. 710 §.) Das völlig trockene Holz widersteht weit stärker, als wenn es noch grün ist. Nach Belidors Erfahrung a. a. O. können 3 Arbeiter einen 12 Zoll dicken völlig trockenen eichenen Stamm in einer Stunde nur auf eine Länge von 5 Fuß von einander sägen. Wenn das eichene Holz 7 bis 8 Zoll dick und noch grün ist, so durchschneiden sie stündlich eine Länge von 25 bis 26 Fuß; wenn es aber völlig trocken ist, nur 17 bis 18 Fuß. Von weichem 12 Zoll starken Holze, wenn es grün ist, zerschneiden 3 Arbeiter stündlich eine Länge von 14 Fuß, wenn es aber trocken ist, nur 6½ bis 7 Fuß. Von weichem alten Holz 7 bis 8 Zoll stark können 3 Arbeiter stündlich eine Länge von 31 bis 32 Fuß zerschneiden.

Zusatz.

Zusatz.

42. Diese Erfahrungen dienen, die Anordnung einer Sägemühle zu berechnen. Hat man die Einrichtung so gemacht, daß das Gewicht Q des Sägegatters dem halben Widerstande des Holzes gleich ist; so hat die Maschine beständig eine Last = Q zu überwinden, und der Weg dieser Last ist während der Umlaufszeit der Kurbel E dem doppelten Durchmesser ihres Umlaufskreises gleich. Aus der Erfahrung muß bekannt seyn, welches die vortheilhafteste Geschwindigkeit für die Säge sey: also ist auch β bekannt, und aus Q, β, und α, kann man P finden, so wie aus den Geschwindigkeiten α und β auch die Umlaufszeiten des Sternrades C, und Trillings D gefunden werden. Eine Geschwindigkeit der Säge von 5 bis 6 Fuß in einer Secunde genüget völlig, weil bey zuschneller Bewegung des Gatters das heftige Reiben in den Falzen eine zu starke Erhitzung zuwege bringen könnte.

Die 8. Erklärung.

43. Man nennt überhaupt jede Maschine eine **Wasserkunst**, wenn sie dazu dient, Wasser aus der Tiefe in die Höhe zu treiben, es mag in einem erhaben liegenden Behälter zum anderweitigen Gebrauch gesammlet werden, oder von dort wieder andern niedriger liegenden Gegenden frey zufliessen sollen. Unter mancherley dazu dienlichen mechanischen Anordnungen verdienen die **Pumpenkünste** vornemlich Aufmerksamkeit. Ein Paar, oder auch mehrere Paare Pumpen, es mögen Saugwerke, oder Druckwerke seyn, können so mit einander verbunden werden, daß die halbe Anzahl der Stempel das Wasser zum Steigen bringt, wenn die andre Hälfte den Rückzug

macht. Bey einer so zusammengesetzten Pumpenkunst kann übrigens die Zeit, worin die zusammengehörigen Stempel einmahl auf- und niedergehen, die Zeit eines Kolbenspiels heissen: sie ist doppelt so groß, als die Zeit eines Kolbenzuges oder Kolbendrucks.

Der 1. Zusatz.

150 Fig. a. 44. Mit der Welle eines Rades, es sey ein Wasserrad, oder jedes andre, kann eine hinlänglich starke Kurbel CB, und mit dieser wieder eine Stange BF verbunden seyn, welche von der Kurbel bey jedem Umlauf einmahl hin und wieder geschoben wird. Diese Stange kann einer Welle G (150 Fig. b.) mit gleichlangen Armen GH, GI, woran die Pumpenstangen hängen, oder statt dessen einem, oder mehrern gleicharmigen Hebeln, mit deren Armen die Pumpenstangen verbunden sind, die nöthige hin und wieder spielende Bewegung geben. Alsdenn ist der Durchmesser des Kreises, worin die Stelle B der Kurbel umläuft, die sogenannte Warze, woran die Stange hängt, mit der Höhe des Kolbenzuges, und die Umlaufszeit der Kurbel mit der Zeit eines Kolbenspiels einerley.

Der 2. Zusatz.

45. Wenn der Durchmesser der Querschnitte der Pumpenröhre $= a$, die Höhe worauf das Wasser gehoben werden soll, $= f$ und das Gewicht eines Cubicfusses Wasser Kürze halber $= 1$ gesetzt wird; so ist die Kraft, welche die zu hebende Wassersäule im Gleichgewicht erhalten würde $= \frac{1}{4}\pi aaf$. (39. 41. 44. §. Hydraul.) Damit aber der Stempel mit einer vorgeschriebenen Geschwindigkeit bewegt werde, ist noch etwas mehr Kraft nöthig. (41. 43. 46. §. Hydraul.) Diese erforderliche Kraft sey $= \frac{1}{4}\pi aa \cdot k$, so

muß

muß $k > f$ seyn. Ferner sey die Höhe des Kolbenzuges $= b$, die Zeit eines Kolbenzuges $= \vartheta$, so wird in der Zeit ϑ die Wassermenge $\frac{1}{4}\pi naab$ gehoben. Wenn es zwey Pumpen sind, die wechselsweise arbeiten, und die Zeit eines Kolbenspiels $2\vartheta = t$ gesetzt wird, so ist die in der Zeit t gehobene Wassermenge $= 2 . \frac{1}{4}\pi naab$. Sind n Paare Pumpen von gleichen Abmessungen zusammen geordnet; so ist diese Wassermenge $= 2 . \frac{1}{4}\pi naab$. In eben diesem Falle ist der Widerstand, welchen die Stempel überwinden müssen, $= \frac{1}{4}\pi naak$, und ihre Geschwindigkeit $= \frac{2b}{t}$, also das mechanische Moment des Widerstandes $= \frac{1}{4}\pi naak . \frac{2b}{t}$. Ferner sey V eine Menge Wasser, deren Gewicht der an der Maschine angebrachten Kraft gleich ist, und α die Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle; so wird erfodert, daß $V\alpha = \frac{1}{4}\pi naak . \frac{2b}{t}$ sey, oder $V\alpha = \frac{2 . \frac{1}{4}\pi naab}{t} . k$. (23 §.) Die in der Zeit T gehobene Wassermenge sey $= M$, so ist $t : T = 2 . \frac{1}{4}\pi naab : M$, also $\frac{2 . \frac{1}{4}\pi naab}{t} = \frac{M}{T}$, und man erhält $V\alpha = \frac{M}{T} . k$, mithin $M = \frac{V\alpha T}{k}$.

Der 3. Zusatz.

46. Will man das Gewicht eines Cubicfusses Wasser in Pfunden ausdrücken, so sey g die Zahl dieser Pfunde, und man erhält $g . M = \frac{g . V\alpha T}{k}$.

Setzt man ferner $g.M \leq Q$, $g.V = P$, so ist $Q = \frac{P \alpha T}{k}$. Weil nun $k > f$ seyn muß, so ist $Q < \frac{P \alpha T}{f}$. Wenn also Pumpenkünste gebraucht werden, so kann die gehobene Wassermenge nie völlig so groß ausfallen, als sie dem 5 §. gemäß würde gefunden werden. Indessen ist die Pumpenkunst, oder jede andre Wasserkunst, desto vollkommener, je weniger die Wassermenge, welche sie wirklich hebt, von derjenigen verschieden ist, welche jener Regel gemäß gefunden wird. Damit diese Vollkommenheit erreicht werde, ist eine solche Anordnung nöthig, wobey nur eine langsame Bewegung der Pumpenstempel erfolgt: auch müssen die Saugröhren und Steigröhren die gehörige Weite haben. (41. 43. 46 §. Hydraul.)

Berechnung einer Pumpenkunst.

47. I. Wenn ein unterschlächtiges Wasserrad die Kunst treiben soll; so ist bey einem Gefälle von 2 Fuß die Geschwindigkeit des Triebwassers 11,2 Fuß, und die Geschwindigkeit der Schaufeln bey der vortheilhaftesten Anordnung 3,7 Fuß $= \alpha$. Wenn nun soviel Wasserzufluß vorhanden ist, daß die Schaufeln bey 1 Fuß Höhe 6 Fuß lang seyn können; so beträgt ihre Fläche 6 Quadratfuß, und diese mit $\frac{8}{9}$ des Gefälles, also hier mit $\frac{8}{9}$ Fuß multiplicirt giebt die Wassermenge, deren Gewicht der relativen Kraft des Wasserstosses gleich ist, $= 5\frac{1}{3}$ Cub. Fuß, also wird $P = 352$ Pfund. Man nehme an, das Wasser soll 80 Fuß hoch gebracht werden, so findet man $M = \frac{5\frac{1}{3} \cdot 3{,}7 \cdot 3600}{80} = 888$ Cubicfuß, als die Gränze, welche die Wassermenge nicht übertreffen kann.

II.

II. Wie nun die Pumpen paarweise zu vertheilen sind, und wie alles übrige angeordnet werden müsse, das hängt von vielen besondern Umständen ab. In Saugröhren kann das Wasser nur etliche 20 Fuß hoch gehoben werden. In der Pumpenröhre selbst könnte die Ausgußröhre zwar in ansehnlicher Höhe über dem Stempel angebracht seyn, wenn man nicht sonst Ursache hätte, auch hier nicht leicht über eine gewisse Gränze hinaus zugehen. In Bergwerken stellt man daher lieber mehrere dergleichen Pumpen von mäßigen Höhen übereinander, wovon die untern das Wasser in Behälter heben, aus welchen die obern es weiter hinauf treiben. Druckwerke können indessen mit ansehnlich hohen Steigröhren verbunden seyn. Zwey Druckpumpen, auch wohl mehrere Paare können vermittelst ihrer Seitenröhren, wovon jede für sich mit einem eigenen Ventil versehen seyn muß, mit einer gemeinschaftlichen Steigröhre in Verbindung gebracht werden: und weil die Sache am leichtesten zu übersehen ist, so wird es genügen, wenn zur Probe hier vorausgesetzt wird, daß eine so zusammengesetzte Druckpumpenkunst erwählt werden solle.

III. Weil die eine halbe Anzahl Pumpen mit der andern abwechselnd arbeiten soll; so kann man anfangs in allen Fällen die Rechnung so führen, als wenn es nur ein Paar Pumpen wären, und beständig nur eine davon heben sollte. Findet sich am Ende der Rechnung, daß die Pumpen im Durchmesser zu groß ausfallen würden; so macht man alsdenn die Vertheilung auf mehrere. Arbeitete wirklich ununterbrochen nur ein Stempel, so wäre der Widerstand so groß, als das Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche des Stempels in derjenigen Höhe, wor-

auf das Wasser gehoben werden soll. (38 §. Hydraul.) Wenn mehr Stempel zugleich arbeiten; so ist der Widerstand so groß, als das Gewicht einer eben so hohen Wassersäule auf einer Grundfläche so groß, als die Summe der Grundflächen der zugleich arbeitenden Stempel. Man suche also vermittelst der Gleichung $P \cdot \alpha = Q \cdot \beta$ die Last Q, welche mit P das Gleichgewicht hält. Diese kann man finden, sobald β bekannt ist, weil P und α schon gefunden sind. (n. 1.)

IV. Hier ist β die Geschwindigkeit der Stempel, und diese hat man, wenn die Höhe b des Hubs mit der Zeit ϑ eines Zuges, oder die doppelte Höhe des Hubs $2b$ mit der Zeit t eines Kolbenspiels, d. i. der doppelte Durchmesser der Kurbel mit ihrer Umlaufszeit dividirt wird. Die Kurbel sey 18 Zoll lang, so beträgt der doppelte Durchmesser ihres Umlaufskreises 6 Fuß, und es ist zugleich $b = 6$ Fuß. Bey allen Pumpenkünsten wird eine langsame Bewegung der Stempel erfodert: also nehme man die Umlaufszeit der Kurbel so groß an, daß die Geschwindigkeit des Stempels etwa nur $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ Fuß in 1 Secunde betrage. Weil bey der hier zum Grunde gelegten Anordnung die Umlaufszeit der Kurbel mit der Umlaufszeit des Wasserrades einerley ist: so muß man nur mit darauf Rücksicht nehmen, daß die Höhe des Wasserrades nicht zu groß ausfalle. Man versuche also die Voraussetzung, daß die Umlaufszeit 18 Secunden betragen solle, so wird $\beta = \frac{2b}{t} = \frac{6 \text{ Fuß}}{18 \text{ Sec.}} = \frac{1}{3}$ Fuß. Weil $\alpha = 3{,}7$ Fuß betragen muß, so soll die Mitte jeder Schaufel einen so grossen Weg in einer Secunde zurück

zurück legen, mithin in 18 Secunden 18 mahl 3,7 das sind 66,6 Fuß. So groß muß die Peripherie durch die Mitte der Schaufeln seyn, mithin der Durchmesser 21 Fuß, und die ganze Höhe des Rades 22 Fuß. Diese Höhe des Rades kann beybehalten werden, mithin bleibt $\beta = \frac{1}{3}$ Fuß, und man findet $Q = \frac{P \cdot \alpha}{\beta} = 352 \cdot 3{,}7 \cdot 3 = 3907{,}2$ Pfund.

V. Eine Menge Wasser, die das gefundene Gewicht hat, ist $\frac{3907{,}2}{66} = 59{,}2$ Cub. Fuß groß, und eine 80 Fuß hohe Säule von dieser Grösse hat eine Grundfläche von $\frac{59{,}2}{80} = 0{,}74$ Qu. Fuß. So groß müste die kreisförmige Grundfläche des Stempels seyn, wenn nur ein Paar Pumpen gebraucht werden sollte. Die Quadratzahl vom Durchmesser dieses Kreises findet man nach der Proportion $785 : 1000 = 0{,}74 :$ ges. Qu. Zahl $= 0{,}942675$ Qu. Fuß (242 §. Geom.) und die Quadratwurzel daraus $= 0{,}971$ Fuß giebt die Länge des Durchmessers. Weil man wegen andrer Gründe nicht gern so weite Pumpenröhren braucht; so kann man 2 Paar Pumpen wählen, damit die Grundfläche der Stempel nur halb so groß ausfalle. Alsdenn wird die Quadratzahl des Durchmessers dieser Fläche $= 0{,}4713375$ und der Durchmesser $= 0{,}6865$ Fuß, oder $8\frac{1}{4}$ Zoll.

VI. Wenn die Kunst diese berechnete Anordnung hat: so wird während jeder Umlaufszeit, mithin in 18 Secunden, ein cylindrischer Raum voll Wasser gehoben, dessen Grundfläche $= 0{,}74$ Qu. Fuß, und dessen Höhe 6 Fuß ist, also 4,44 Cub. Fuß. Setzt

man ferner 18 Sec. — 4,44 Cub. Fuß — 3600 Sec.? so findet man die in einer Stunde gehobene Wassermenge = 888 Cub. Fuß, welches mit der Rechnung n. 1. überein kommt.

Die 9. Erklärung.

149 Fig. 48. Jede Schaufel des oberschlächtigen Rades, wie RPS wird aus zweyen ungleich breiten Stücken PR, PS, unter einem schicklichen Winkel zusammengesetzt. Der schmalere Theil PS heißt die Riegelschaufel oder Kropfschaufel, und die Ebene derselben geht durch die Axe des Rades. Der breitere Theil PR heißt die Stoßschaufel, und diese steht schräge aufwärts, wenn die Kropfschaufel die horizontale Lage hat: beyder Durchschnittslinie ist mit der Axe des Rades parallel. Wenn CB der Halbmesser der äussern, CE der Halbmesser der innern Peripherie des Kranzes, also EB des Kranzes, oder der Felgen Breite ist; so nehme man EA = $\frac{1}{3}$EB, und beschreibe mit dem Halbmesser CA einen neuen Kreis, so ist das der Theilriß, EA stellt die Lage der Kropfschaufel vor, und die Lage AI der Stoßschaufel ist so, daß sie verlängert durch T gehet, wenn der Theilriß bey Q, T, u. s. f. in so viele gleiche Theile getheilt ist, als das Rad Schaufeln haben soll. Wenn DXY die Zelle ist, welche oben das Wasser auffängt, und FMN unten diejenige, welche es ausgießt; so ist DEF der Wasserhaltende Bogen.

Der 1. Zusatz.

49. Man ziehe FH, DK horizontal, so ist HK die lothrechte Höhe des wasserhaltenden Bogens. Wenn alsdenn das Wasser in den Zellen dieses Bogens gleichförmig vertheilt ist; so strebt es das Rad mit einer eben so grossen Gewalt zu drehen, als

wenn

wenn an der Peripherie des Theilriss's nach der Richtung der Tangente eine Kraft angebracht wäre, so groß, als das Gewicht einer Wassersäule in der Höhe des wasserhaltenden Bogens, über einer Grundfläche, die dem mittlern Querschnitt *AO* der Zellen gleich ist. Die Regel, wenn sie gleich hier der nothwendigen Kürze halber nicht wohl aus Gründen der Theorie hergeleitet werden kann, wird man ohne Bedenken als eine solche gelten lassen, die sich durch die Erfahrung bestättiget, wenn man darnach rechnet, und der Erfolg mit dem Resultat der Rechnung übereinstimmig ist. Ist das Rad regelmäßig gebauet; so muß die lothrechte Höhe des wasserhaltenden Bogens wenigstens $\frac{3}{4}$ von der Höhe des ganzen Rades betragen.

Exempel. Es sey das Rad 20 Fuß hoch, der wasserhaltende Bogen 15 Fuß, der mittlere Querschnitt jeder Zelle ein Rechteck, wovon die Länge 4 Fuß, die Breite 8 Zoll ist; so ist seine Fläche $\frac{8}{3}$ Qu. Fuß. Diese mit 15 Fuß multipli irt giebt 40 Cub. Fuß, und das Gewicht einer solchen Menge beträgt 2640 Pfund.

Der 2. Zusatz.

50. Die vortheilhafteste Einrichtung einer Maschine, die von einem oberschlächtigen Rade getrieben werden soll, erfodert, daß die Geschwindigkeit, womit die Zellen umlaufen, grade so groß sey, als die Geschwindigkeit des hineinfallenden Wassers. Wenn also bekannt ist, wie hoch die Rinne G, aus welcher das Wasser herabfällt, über der obersten Zelle erhaben sey, die das Wasser auffängt; so kann man daraus die Geschwindigkeit der umlaufenden Zellen finden, welches hier die Geschwindigkeit der Peripherie

des

des Theilrisses wird. Die Grösse der nach der Regel des vor. §. gefundenen Kraft mit dieser Geschwindigkeit multiplicirt giebt das mechanische Moment der Kraft, mithin auch den Effect der Maschine.

Exempel Wenn die Höhe der Rinne über der Zelle, die das Wasser auffängt, 2 Fuß beträgt, so ist die damit zusammengehörige Geschwindigkeit 11,2 Fuß. Hat nun das Rad die im vor. §. angenommenen Abmessungen, so wird das mechanische Moment der Kraft = 2640 × 11,2 = 29568. Sollte das Rad eine Kunst treiben, und diese das Wasser 80 Fuß hoch bringen, so würden in jeder Secunde 369,6 Pf. oder 5,6 Cub. F. mithin in jeder Stunde 20160 Cub. Fuß Wasser auf diese Höhe gebracht werden können.

Der 3. Zusatz.

51. Am Umfange des umlaufenden oberschlächtigen Rades muß sich in jeder Secunde ein prismatischer Wasserkörper anlegen, dessen Grundfläche so groß ist, als der mittlere Querschnitt der Zellen im Quadratmaaß, und dessen Länge so groß ist, als die Geschwindigkeit der umlaufenden Zellen, die hier der Geschwindigkeit des hineinfallenden Wassers gleich seyn muß. Oben im 46 §. war der mittlere Querschnitt der Zellen $\frac{8}{9}$ Qu. Fuß und im 47 §. ihre Geschwindigkeit 11,2 also ist der nöthige Wasseraufwand 29,86 Cub. Fuß in jeder Secunde.

Die 10. Erklärung.

52. Wenn ein grosses verticales Rad mit einer horizontalliegenden Welle, das übrigens, die Schaufeln ausgenommen, mit einem Wasserrade alle Aehnlichkeit hat, so eingerichtet wird, daß Menschen oder Thiere auf den äussern oder innern Umfang treten, und auf solche Art das Rad in Umlauf bringen können,

nen, so heißt es ein verticales Trett- oder Laufrad, oder hier schlechthin ein Laufrad.

Der 1. Zusatz.

53. Es sey C der Mittelpunct, CL = CA der Halbmesser des Laufrades; so lehrt die Erfahrung, daß die Stelle A, wo die arbeitenden Personen neben einander auf dem innern Umfange des Kranzes stehen, am füglichsten um 30° von der niedrigsten Stelle L, entfernt seyn könne. Wenn nun AB vertical ist, so ist CB die Entfernung der Kraft vom Mittelpunct, und diese ist der Hälfte des Halbmessers vom Rade gleich. Das statische Moment des Gewichts der in A befindlichen Arbeiter wird also gefunden, wenn dies Gewicht mit der Hälfte des erwehnten Halbmessers multiplicirt wird: also ist die Wirkung eben so, als wenn das halbe Gewicht der arbeitenden Menschen am Umfange des Rades nach der Richtung des Halbmessers wirkte. Die Geschwindigkeit, womit alsdenn die getretene Stelle bey A nach der Richtung der Tangente ausweicht, beträgt ohngefähr 2 Fuß, auch wohl nur $1\frac{1}{2}$ Fuß. Diese also mit dem halben Gewicht der arbeitenden Personen multiplicirt giebt das mechanische Moment der Kraft. 158 Fig.

Der 2. Zusatz.

54. Pferde können sich nicht wohl ebensoweit, als arbeitende Menschen, sondern in grader Linie höchstens nur um den dritten, vielleicht nur um den vierten Theil des Halbmessers von dem verticalen Durchmesser OL entfernen: demnach wirkt nach der Richtung der Tangente nur der dritte, oder im letzten Fall nur der vierte Theil ihres Gewichts.

Der

Der 3 Zusatz.

55. Wenn ausserhalb des Rades ein Gerüste angebracht wird, damit die arbeitenden Menschen auf den äussern Umfang des Rades etwa in der Gegend H treten, und so das Rad drehen können; so wirken sie zwar beynahe mit ihrem ganzen Gewicht nach der Tangente des Rades, aber die Geschwindigkeit der Bewegung kann dagegen nicht völlig so groß seyn. Bey Thieren, weil sie entweder nur mit den Vorderfüssen allein, oder mit den Hinterfüssen allein auf den äussern Umfang des Rades treten können, gewinnet man dadurch noch weniger Vortheil, weil nur ihr halbes Gewicht in das Rad wirken kann.

Der 4 Zusatz.

159 Fig. 56. Ein schiefliegendes Tretrad, wie es die 159ste Figur vorstellet, braucht man alsdenn nur, wenn ein Thier, das zwar von Körper ansehnlich schwer ist, aber nur langsam arbeiten kann, das Rad drehen soll. Wenn PQ die geometrische Axe der Umlaufswelle vorstellet, die gegen den Horizont unter dem Winkel RPC geneigt ist; so neigt sich die Fläche des Rades gegen den Horizont unter einem Winkel, der = RCP ist, und den vorigen zu 90° ergänzt. Dieser Neigungswinkel der Ebene des Rades kann nicht wohl über 15° betragen. Wenn alsdenn das Thier in A seine Stelle hat, so wirkt wenig mehr, als der vierte Theil seines Gewichts in das Rad nach der Richtung AB, und nach der auf dem Halbmesser CA senkrechten Richtung AD noch weniger. Die Geschwindigkeit der Bewegung dieser Stelle kann auch nicht leicht über 2 Fuß in 1 Secunde betragen.

Die

Die 5 Aufgabe.

57. Eine Maschine so anzuordnen, daß sie durch den Stoß des Windes ihre Bewegung erhalte.

Aufl. Durch den Kopf A der Hauptwelle AW werden ein Paar lange hölzerne Bäume DE, FG, welche die Windruthen heissen, so hindurch gesteckt, daß beyde sowohl gegeneinander, als auch gegen die Welle AW eine senkrechte Lage bekommen. Diese Ruthen werden in Entfernungen von 1 bis 2 Ellen mit Löchern durchbort, und hölzerne Sprossen MO, HI, KL, hindurch gesteckt, so lang als der Flügel, um den Wind aufzufangen, breit seyn soll. Die Sprossen werden zu beyden Seiten durch die Leisten oder Rahmen MN, OP, wegen mehrerer Festigkeit verbunden, und hiernächst entweder mit Schilf ausgeflochten, oder mit dünnen Brettern, den sogenannten Thüren zugedeckt, die man bey Stürmen wegnehmen kann. Auch wird wohl zu dieser Bedeckung Seegeltuch gebraucht. Wenn alle zu einerley Flügel gehörige Sprossen in einer Ebene liegen; so bekommt der Flügel die Natur einer festen Ebene, welche gegen die Umlaufsaxe unter einem schiefen Winkel geneigt seyn muß; damit der Wind, wenn er in paralleler Richtung mit der Axe gegen den Flügel stößt, ihn seitwärts drücke, und solchergestalt den Flügel mit der Welle in Umlauf bringe. Uebrigens muß man noch die Einrichtung so machen, daß entweder das ganze Gebäude mit der Maschine, oder nur das Dach mit der Hauptwelle, wenn sich der Wind ändert, allemahl nach demselben gedrehet, und der Kopf der Hauptwelle ihm entgegengestellet werden könne. 160 Fig.

Berech-

Berechnung des Effects der Windflügel.

58. Weil jeder Windflügel eine ansehnliche Länge hat, so laufen die von der Welle mehr entfernten Stellen schneller, die der Welle nähern Stellen langsamer um: also hat der Windstoß auf den ausweichenden Flügel nicht in allen Stellen einerley Wirkung. Unter andern kommt die gute Wirkung der Flügel vornehmlich auf den Winkel an, unter welchem die Fläche eines jeden Flügels gegen die Umlaufsaxe geneigt ist. Unter eben diesem Winkel sind sie beym Umlauf auch gegen die Richtung des Windes geneigt. Im ersten Anfang der Bewegung, wenn der Wind gegen den noch ruhenden Flügel stoßt, würde der Windstoß die gröste Wirkung haben, wenn der Neigungswinkel der Flügel 54° 44′ betrüge: allein auf dem umlaufenden Flügel wirkt der Wind anders, und der gesammte mechanische Effect des Windstosses fällt desto gröſſer aus, je näher der Neigungswinkel der Flügel dem rechten Winkel kommt: es muß aber auch alles übrige recht angeordnet seyn.

Es sey die ganze Länge des Flügels AE = a,
der Neigungswinkel desselben gegen die Umlaufsaxe = ϑ,
die Geschwindigkeit des Windes = C.

Ferner setze man Kürze halber die Zahl $\frac{8-\sqrt{10}}{9}$ oder 0,537525 = ζ, (82 §. Rech.) die Zahl $\frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{3}{4}\zeta + \frac{22+4\sqrt{10}}{81} = 0{,}427767 = \eta$.

Die Geschwindigkeit, womit der äusserste Punct E des Flügels umläuft, sey = α. In G sey des Flügels Schwer-

Schwerpunct, und $AG = f$, $AB = b$, so ist $f = \frac{1}{2}(a + b)$: übrigens bleibe wie bisher allemahl $g = 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß.

Vermöge der Theorie und Erfahrung leisten die Windflügel den besten Effect, wenn alles so angeordnet ist, daß die Geschwindigkeit $\alpha = \zeta . C . \text{tg.} \vartheta$ werde. Alsdenn wirkt der Wind gegen jeden Flügel so stark, als wenn am äussersten Ende desselben bey E eine so grosse Kraft ihn in der Richtung seiner Umlaufsbewegung zu drehen strebte, als das Gewicht einer Luftsäule über der Fläche des Flügels, als ihrer Grundfläche, in einer Höhe, die $= \frac{\eta . f . C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4ga}$ gefunden wird. Gegen alle vier Flügel zusammen wirkt also eine Kraft, die viermahl so groß ist.

Man setze noch die Fläche des Flügels $= A$, das Gewicht eines Cubicfusses Luft $= G$, so wendet man die allgemeine Gleichung für die ganze Maschinenlehre $P . \alpha = Q . \beta$ auf Windflügel an, wenn die Kraft $P = \frac{\eta . G . A . f . C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{ga}$, und $\alpha = \zeta . C . \text{tang}\vartheta$ gesetzt wird. Die Ausdrücke, $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, $\text{tang}\vartheta$, bezeichnen hier die trigonometrischen Linien, welche mit dem Winkel ϑ zusammen gehören, in der Voraussetzung, daß der Halbmesser $= 1$ sey. (36 §. Trig.) Man muß also die Zahlen, welche in den Tabellen gefunden werden, mit 10000000 dividiren, wenn sie hier gebraucht werden sollen.

Wenn bey der Anwendung der Rechnung auf besondre Fälle eben nicht die größte Schärfe nöthig ist; so setzt man $\zeta = 0{,}54$, und $\eta = 0{,}43$. Die Zahl

$\zeta = \frac{\alpha}{C \cdot \text{tang}\vartheta}$ hängt von der Geschwindigkeit α so ab, daß im ersten Anfang der Bewegung, wenn $\alpha = 0$ ist, auch $\zeta = 0$, mithin alsdenn $\eta = 1$ ist. Daher ist die Kraft des Windstosses gegen alle vier Flügel im ersten Anfang der Bewegung $= \frac{G \cdot A \cdot f \cdot C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{ga}$. Bey Berechnung der ganzen Anordnung, damit der größte Effect erhalten werde, wenn die Maschine in den Beharrungsstand kommt, finden übrigens die im 23 §. vorgetragenen Lehren ihre Anwendung.

Die 6. Aufgabe.

59. Eine Kornmühle mit Windflügeln so anzuordnen, daß sie bey einer Geschwindigkeit des Windes von 20 Fuß in einer Secunde einen eben so grossen und so schweren Läufer eben so schnell im Umlauf erhalte, als die im 25 §. berechnete Wassermühle.

Aufl. Man kann die im 25 §. num. I. und II. berechneten Zahlen hier unverändert beybehalten. Dagegen findet man hier, wenn der Winkel $\vartheta = 70°$ angenommen wird, folgende Resultate.

III. Die Geschwindigkeit der Kraft $\alpha = \zeta C \text{ tang}\vartheta = 0{,}54 \cdot 20 \cdot 2{,}75 = 29{,}7$ Fuß, und das ist die Geschwindigkeit der äusersten Sprosse eines jeden Flügels.

IV. Die ganze Länge des Flügels sey 36 Fuß, so findet man die Peripherie des Kreises, worin die äusserste Sprosse umläuft, $= 3{,}1416 \cdot 72 = 226{,}2$

226,2 Fuß, also die Umlaufszeit der Flügel = $\frac{226,2}{29,7}$ = 7,75 Secunden.

V. Die Umlaufszeit des Läufers von $\frac{5}{7}$ Secunden (25 §. n. II.) ist in 7,75 Secunden 6,46mahl enthalten: also muß die Zahl der Triebstecken in der Zahl der Kämme eben so vielmahl enthalten seyn.

VI. Die nöthige relative Kraft des Windstosses $P = \frac{Q \cdot \beta}{\alpha}$ wird gefunden, wenn hier $\alpha = 29,7$ Fuß gesetzt wird, (n. III.) da dann für Q und β die Zahlen aus dem 25. §. num. I. II. genommen werden. Also ist $P = \frac{92 \cdot 13,1}{29,7} = 40,6$ Pfund. Weil diese Kraft auf alle vier Flügel gleich vertheilt seyn muß; so kommt auf jeden Flügel 10,15 Pfund.

VII. Das specifische Gewicht der Luft ist sehr veränderlich, sie ist zuweilen 800mahl, zuweilen nur 700mahl, auch wohl nur 600 bis 650mahl leichter als Wasser: um deßwillen kann man hier als eine Mittelzahl annehmen, die Luft sey 726mahl leichter als Wasser, also das Gewicht eines Cubicfusses Luft $\frac{66}{726} = \frac{1}{11}$ Pfund. Demnach wird der cubische Inhalt einer Luftsäule, die 10,15 Pfund wiegt, = $10,15 : \frac{1}{11} = 111,65$ Cub. Fuß gefunden. Die Höhe dieser Luftsäule ist = $\frac{\eta f C^2 \sin \vartheta^2 \cos \vartheta}{4 g a}$, (58 §.) und oben num. IV. ist $a = 36$ Fuß angenommen. Wird nun ferner $b = 4$ Fuß gesetzt, so erhält man $f = \frac{1}{2}(a + b) = 20$ Fuß: also $\frac{f}{a}$

$= \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$. Weiter ist $C^2 = 400$, und $4g = 62{,}5$: also findet man $\frac{fC^2}{4ga} = \frac{5 \cdot 400}{9 \cdot 62{,}5} = 3{,}555$ Fuß. Aus den trigonometrischen Tafeln erhält man ferner $\sin\vartheta = \sin 70° = 0{,}9397$, $\cos\vartheta = 0{,}3420$, also $\sin\vartheta^2 = 0{,}8829$, $\sin\vartheta^2\cos\vartheta = 0{,}3019$, und $\eta \sin\vartheta^2\cos\vartheta = 0{,}43 \cdot 0{,}3019 = 0{,}1298$: mithin $\frac{fC^2}{4ga} \cdot \eta \sin\vartheta^2\cos\vartheta = 3{,}555 \cdot 0{,}1298 = 0{,}46144$ Fuß, welches die Höhe derjenigen Luftsäule ist, deren Gewicht so groß ist, als die an jedem Flügel nöthige Kraft. Ihr cubischer Inhalt war 111,65 Cubicfuß; also findet man ihre Grundfläche $= \frac{111{,}65}{0{,}46144} =$ 242 Quadratfuß. Die Länge dieser Fläche von der niedrigsten Sprosse bis zur höchsten beträgt 32 Fuß: wenn also jener Quadratinhalt von 242 Qu. F. mit der Länge von 32 Fuß dividirt wird; so findet man 7,5 Fuß für die nöthige Breite der Flügel.

Allgemeine Anmerkung.

60. Die Friction macht bey allen Maschinen, die im grossen gebauet werden, einen beträchtlichen Theil des Widerstandes aus: wie groß aber derselbe in jedem Fall sey, kann alsdenn allererst gefunden werden, wenn die Anordnung der Maschine schon festgesetzt ist. Diese muß also in allen Fällen den bisherigen Lehren gemäß berechnet werden. Hiernächst sucht man, wie groß eine Kraft F seyn müßte, wenn sie mit der schon vorhin in Rechnung gebrachten Kraft P zugleich an einerley Stelle angebracht werden, und mit der Friction aller Theile der Maschine im Gleichgewicht

gewicht seyn sollte. Hat man nun seine Freyheit, die schon in Rechnung gebrachte Kraft P um die gefundene F noch zu vermehren, etwa beym Wasserrade durch Vergrösserung der Schaufelfläche, wenn man Wasserzufluß genug hätte; so kann die Maschine wirklich einen solchen Widerstand überwinden, als für Q gefunden, oder vielleicht als gegeben in Rechnung gebracht ist. Denn $P = \frac{Q \cdot \beta}{\alpha}$ ist mit Q, und F mit der Friction im Gleichgewicht.

Hat man aber nicht Wasserzufluß genug, oder kann man sonst P nicht vermehren; so nehme man an, es sey $Q = R + S$, und S sey ein Widerstand, der an eben der Stelle angebracht, welche die wirkliche Last angreift, eben so stark der Bewegung widerstehen würde, als die Friction aller Theile zusammen genommen der Bewegung der Stelle widersteht, wo die Kraft angebracht ist; so wird erfodert, daß $P = \frac{(R+S)\beta}{\alpha}$ sey. Ein Theil von P wird nun mit R, der übrige mit S im Gleichgewicht seyn. Man setze jenen Theil $= V$, wenn dieser $= F$ ist, also $P = V + F$; so erhält man $(V + F)\alpha = (R+S)\beta$. Weil nun $F\alpha = S \cdot \beta$ seyn soll, so ist auch $V\alpha = R\beta$, oder $(P - F)\alpha = R \cdot \beta$, woraus $R = \frac{(P-F)\alpha}{\beta}$ gefunden wird, welches denn die eigentliche Last ist, so die Maschine im Beharrungsstande bewegen kann.

Anfangsgründe der Artillerie-Wissenschaft.

Die 1. Erklärung.

1. Die Artillerie-Wissenschaft, soweit sie mathematisch ist, lehrt, wie nicht allein die Wirkung des entzündeten Schießpulvers auf die Geschützkugeln berechnet, sondern auch die Bahn der letztern nach ihrer Gestalt und Grösse verzeichnet und ausgemessen werden könne. Vom Schießpulver weiß man, daß es aus einer Vermischung von Salpeter, Schwefel und Kohlen zuwege gebracht werde.

Zusatz.

2. Salpeter, Schwefel und Kohlen müssen gehörig gereiniget, pulverisiret, und gesiebet werden: hiernächst nimmt man 1 Theil Schwefel, und 1 Theil Kohlen, gegen 6 Theile Salpeter. Diese Masse muß 24 bis 30 Stunden wohl untereinander gestampft, auch etwa alle vier Stunden etwas Wasser darunter gegossen und auf die Art zum Körnen zubereitet werden. Im grossen geschicht das in den Pulvermühlen.

Die 2. Erklärung.

3. Man unterscheidet das grobe oder schwere Geschütz von dem kleinen Gewehr, und es ist bekannt, daß das schwere Geschütz deßwegen so heisse, weil es wegen seiner Grösse und Schwere eigene Unterstützungen nöthig hat, darauf es nicht allein beym Gebrauch feste liegen, sondern auch bequem fortgebracht

bracht werden kann. Kanonen oder Stücke sollen dazu dienen, metallene oder steinerne Kugeln auf eine ansehnliche Strecke durch die Gewalt des entzündeten Pulvers vornehmlich in horizontaler Richtung fortzutreiben, ohne daß ihre Bahn beträchtlich von der graden Linie abweicht. Aus Mörsern, die auch Böller heissen, wirft man die sogenannten Bomben, auch wohl steinerne Kugeln, nach einer gegen den Horizont geneigten Richtung. Diese Bomben sind hohle mit Pulver gefüllte gewöhnlich eiserne Kugeln, mit der Einrichtung, daß eine sogenannte Brandröhre damit verbunden, und mit einer Masse gefüllt wird, die so lange fortbrennt, ohne das trockene Pulver zu entzünden, als die Bombe das Ziel, wo sie niederfallen soll, noch nicht erreicht hat.

Die 3. Erklärung.

4. Die innere Höhlung des Geschützes, welche wegen der Figur der Kugeln cylindrisch seyn muß, heißt der Lauf, beym groben Geschütz die Seele, der Raum, welcher mit Pulver gefüllt wird, die Kammer. Die Mündung ist die vordere kreisförmige Oefnung des Laufs, ihr Durchmesser heißt der Kaliber des Stücks, der Durchmesser der Kugel heißt ebenfalls ihr Kaliber, und durch den Spielraum versteht man den Ueberschuß vom Kaliber des Stücks über den Kaliber der Kugel.

Die 4. Erklärung.

5. Der Kaliberstab ist ein Maaßstab, worauf die Grösse der Durchmesser der steinernen, eisernen und bleyernen Kugeln nach ihrem Gewicht verzeichnet ist.

Die 1. Aufgabe.

6. Aus dem Gewicht einer Kugel und dem eigenthümlichen Gewicht der Masse, woraus sie verfertiget ist, ihren Kaliber zu finden.

Aufl. Aus dem Gewicht der Kugel, und dem eigenthümlichen Gewicht ihrer Masse findet man ihre Grösse im Cubicmaaß, (13 §. Stat.) und daraus ferner ihren Kaliber dem 342 §. Geometr. gemäß. Wenn nemlich der körperliche Inhalt der Kugel im Cubicmaaß = S, ihr Durchmesser = d gesetzt wird; so ist $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \cdot 6S$. (343 §. Geom.)

Die 2. Aufgabe.

7. Einen Kaliberstab zu verfertigen.

Aufl. Wenn d den Kaliber der Kugel bezeichnet, so ist ihr Inhalt $= \frac{1}{6}\pi d^3$. (342 §. Geom.) Wenn ferner G das Gewicht eines Cubiczolles ihrer Masse bezeichnet, so ist ihr Gewicht $= \frac{1}{6}G \cdot \pi d^3$, da dann d in Zollen ausgedrückt wird. Dies Gewicht sey = P, so ist $P = \frac{1}{6}G \cdot \pi d^3$, also $d^3 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{P}{G}$, und $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{P}{G}}$, oder $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6P}{G}}$, und man hat $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$. (240 §. Geom.)

Nachdem nun das Gewicht P der Kugel in Pfunden oder Lothen ausgedrückt ist, so muß man auch G in Pfunden oder Lothen ausdrücken: alsdenn ist der Kaliber der 1 pfündigen oder 1 löthigen Kugel $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G}}$. Wenn dieser gefunden ist, so multiplicirt man ihn nur mit den Cubicwurzeln, aus 2, 3, 4, 5, u. s. w. nach der Ordnung, um den Kaliber der Kugel zu finden, die 2, 3, 4, 5 Pfunde, oder auch soviel

soviele Loth wiegt: denn es ist auch $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{6}{G} \cdot \pi}} \cdot \sqrt[3]{P}$.

Der 1. Zusatz.

7. Wird der Kaliber der 1pfündigen, oder 1löthigen Kugel für Eins angenommen; so geben die Cubicwurzeln aus den Zahlen 2, 3, 4, 5, wie sie in der Ordnung folgen, wenn man sie ein für allemahl in Decimaltheilen berechnet, die Kaliber der Kugeln von so vielen Pfunden oder Lothen, als die Cubizahl anzeigt. Daraus ersieht man den Nutzen der nachstehenden Tafel, welche die practischen Schriftsteller gewöhnlich mittheilen.

Gewicht der Kugel	Kaliber	Gewicht der Kugel	Kaliber	Gewicht der Kugel	Kaliber
1	1,000	21	2,759	41	3,448
2	1,259	22	2,802	42	3,476
3	1,442	23	2,844	43	3,503
4	1,587	24	2,884	44	3,530
5	1,707	25	2,924	45	3,557
6	1,817	26	2,962	46	3,583
7	1,913	27	3,000	47	3,609
8	2,000	28	3,036	48	3,634
9	2,080	29	3,072	49	3,659
10	2,154	30	3,107	50	3,684
11	2,224	31	3,141	51	3,708
12	2,289	32	3,175	52	3,732
13	2,351	33	3,207	53	3,756
14	2,410	34	3,240	54	3,780
15	2,466	35	3,271	55	3,803
16	2,519	36	3,302	56	3,826
17	2,571	37	3,332	57	3,848
18	2,620	38	3,362	58	3,871
19	2,668	39	3,391	59	3,893
20	2,714	40	3,420	60	3,915

Die Zahlen in der zweyten Columme, unter der Aufschrift: Kaliber, sind nichts anders, als die Cubicwurzeln aus den in der ersten Columme voran stehenden Zahlen, welche das Gewicht der Kugel in Pfunden oder Lothen angeben. Diesemnach kommt bey der Verfertigung des Kaliberstabes alles darauf an, daß man wisse, wie groß der Durchmesser einer eisernen, bleyernen, oder steinernen Kugel sey, wenn sie 1 Pfund, oder 1 Loth wiegt: die Länge von den übrigen giebt die voranstehende Tabelle in Tausendtheilen jenes Durchmessers oder Kalibers unmittelbar an.

Der 2. Zusatz.

8. Nach Hrn. v. Wolffens Versuchen, (Nützl. Versuche I. Theil 7 §.) wiegt 1 Rheinl. Decimal-Cubiczoll Wasser 495 Gran im deutschen Apotheker-Gewicht, also der Rheinl. Duodec. Cub. Zoll Wasser 286½ Gran, oder genauer 286,46 Gran. Versuche, die ich selbst mehrmals angestellet habe, kommen hiemit besser, als mit andern Bestimmungen, überein. Das deutsche Apothekerpfund von 12 Unzen wiegt 7452 Troysche Aß, und das französische ebenfalls von 12 Unzen, wiegt 7641 Aß: (M. s. die Anfangsgründe, 1 Band, 258 §. Rech. 330 S.) also die deutsche Unze zur Pariser = 7452 : 7641 = 276 : 283, und 16 solcher Pariser Unzen sind einerley mit einem Pfunde Pariser Markgewicht. Man findet also den Rheinl. Duodec. Cub. Zoll Wasser 279,37 Pariser Gran schwer. Das Pariser Längenmaaß beträgt 1,035003 des Rheinländischen, (Anfangsgründe, 1 Band, 252 §. Rech. 322 S.) also das Pariser Cubicmaaß 1,108727 des Rheinländischen Cubicmaasses: demnach wiegt 1 Duodec. Cubiczoll Wasser 315¾ Gran in Pariser Maaß und Ge-

Gewicht, 480 Gran auf die Unze gerechnet, wie es bey medicinischen Gewicht üblich ist. Wenn nun Eisen 7,645 mahl, und Bley 11,31 mahl schwerer als Wasser ist, (15 §. Stat.) so wiegt 1 Cubiczoll Eisen 2214 Gran, oder 5 Unzen 14 Gran, und 1 Cubiczoll Bley 3571 Gran, oder 7 Unzen 211 Gran im Pariser Maaß und Gewicht.

Der 3 Zusatz.

9. Weil man G in Pfunden oder Theilen eines Pfundes ausdrücken muß, wenn man den Kaliber der 1pfündigen Kugel sucht, und weil 7680 Gran ein Pfund von 16 Unzen ausmachen; so hat man $G = \frac{2214}{7680} = \frac{369}{1280}$ Pfund für die eiserne Kugel, und man findet $\frac{6}{G} = \frac{7680}{369} = 20{,}813008$; also $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G} = 6{,}624988$, und man erhält $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G}}$ = 1,896 Pariser Zoll, oder 1 Zoll $10\frac{3}{4}$ Linien für den Kaliber der einpfündigen eisernen Kugel. Bey Anwendung eben dieser Rechnung auf die bleyerne Kugel erhält man $G = \frac{3571}{7680}$, also $\frac{6}{G} = 12{,}905628$, $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G} = 4{,}107990$, und $d = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{G}}$ = 1,6 Zoll, oder 1 Zoll 7,2 Linien.

Der 4 Zusatz.

10. Man multiplicire die Zahl 1,896 Pariser Zoll, als den Kaliber der 1pfündigen eisernen Kugel, (9 §.) mit $\sqrt[3]{4} = 1{,}587$, so findet man 3,008 Zoll,

oder

oder fast grade 3 Zoll für den Kaliber der 4pfündigen eisernen Kugel, so wie es gewöhnlich angenommen wird. Man könnte diese oder eine andre ähnliche Bestimmung, wenn man Kaliber und Gewicht einer Kugel aus der Erfahrung zu bestimmen suchte, bey der ganzen Rechnung zum Grunde setzen, und mit Hülfe der im 7 §. mitgetheilten Tafel auch den Kaliber der 1pfündigen Kugel suchen. Die Kaliber solcher Kugeln, die aus einerley Masse bestehen, verhalten sich wie die Cubicwurzeln aus den Zahlen, die ihre Gewichte angeben, mithin verhält sich der Kaliber der 4pfündigen Kugel : Kaliber der 1pfündigen Kugel $= \sqrt[3]{4} : 1 = 1{,}587 : 1$. Hätte man also den Kaliber der eisernen 4pfündigen Kugel 3 Zoll groß gefunden; so würde man ansetzen

1,587 : 1 = 3 Zoll : Kal. d. 1pf. Kugel,

und man fände 1,89 Zoll, oder 1 Zoll 10,68 Lin. So kann man dergleichen Tafeln selbst prüfen, wie sie die practischen Schriftsteller mittheilen. M. sehe Bions Mathem. Werkschule V. Buch IV. Cap. 201 S. Anfangsgründe der Artillerie von Struensee, II. Theil I. Hauptst. 66 §. 73 S.

Der 5. Zusatz.

11. Die deutschen Feuerwerker brauchen gewöhnlich Nürnberger Maaß und Gewicht, und nach Hrn. Struensee (Anfangsgründe der Artillerie II. Theil, I. Hauptst. 66 §.) sollen 95 französische Pfunde 100 Pfund in Nürnberg ausmachen: das kommt aber mit andern sonst bekannten Vergleichungen nicht überein. Eisenschmidt (de Ponderibus et mensuris Argentor. 1737.) hat selbst die Unze des Nürnberger Gewichts, wovon er a. a. O. pag. 3. sagt, daß

es von den deutschen Artilleristen gebraucht werde, $599\frac{5}{8}$ solcher Gran schwer befunden, wovon 576 eine Pariser Unze ausmachen: also verhält sich das Nürnb. Gew.: Pariser Gew. = 4797 : 4608 = 533 : 512. Das Nürnberger Fußmaaß hält 134,7 Pariser Linien, wovon 144 einen Pariser Fuß ausmachen. Wenn also der Kaliberstab auf Nürnberger Maaß und Gewicht eingerichtet werden soll, so kommt es nur darauf an, daß man das Gewicht eines Cubicfusses des Eisens, des Bleyes, oder der Steinmasse, welches im 7 H. = G gesetzt war, in dem Nürnberger Maaß und Gewicht ausdrücke.

Der 6. Zusatz.

12. Man kann aber auch die nach dem Pariser Maaß und Gewicht schon berechneten Zahlen auf das Nürnberger so reduciren:

4 Pf. Par. thun $\frac{512}{533} \cdot 4 = 3{,}842$ Pf. Nürnb.

3 Zoll Par. thun $\frac{1440}{1347} \cdot 3 = 3{,}207$ Zoll Nürnb.

Eine Kugel 4 Par. Pfund schwer hat 3 Par. Zoll Kaliber; also eine Kugel 3,842 Nürnb. Pf. schwer hat 3,207 Nürnb. Zoll Kaliber: mithin ferner

$\sqrt[3]{}$ 3,842 Pf. : 1 = 3,207 Zoll : Kaliber der Kugel von 1 Nürnb. Pf. Man findet aber $\sqrt[3]{3{,}842} = 1{,}566$, also der Kalib. der Kugel von 1 Nürnb. Pf. = $\frac{3{,}207}{1{,}566} = 2{,}047$ Zoll, oder 2 Zoll 0,56 Lin.

Der 7. Zusatz.

13. Der Spielraum ist nöthig, damit die Kugel, ohne sich am innern Umfange der Kanone zu reiben, durch

durch die Gewalt des entzündeten Pulvers frey zur Mündung herausgetrieben werden könne: er muß aber auch nicht zu groß seyn, weil sonst ein Theil von der Gewalt des Pulvers nicht auf die Kugel wirken kann. Gewöhnlich wird der Kaliber des Stücks auf folgende Art bestimmt. Man suche die Sehne des Bogens von 150 Graden in einem Cirkel, dessen Durchmesser so groß ist, als der Kaliber der Kugel. Die Länge dieser Sehne ziehe man vom Durchmesser ab, und addire den Ueberschuß zum Kaliber der Kugel, so hat man den Kaliber des Stückes. Die Sehne von 150° ist der doppelte Sinus von 75°, und dieser Sinus ist 0,9659258 beynahe = 0,966 für den Halbmesser = 1; also die Sehne des Bogens von 150° = 1,932. Wird dagegen der Durchmesser = 1 gesetzt, so ist die erwehnte Sehne = 0,966, und der Ueberschuß des Durchmessers = 0,034: mithin würde sich verhalten müssen der Kaliber der Kugel zum Kaliber des Stücks, wie 1000 : 1034.

Erfahrungssätze.

14. Wenn von einer gewissen Menge Schießpulver auch nur ein Körnchen angezündet wird; so verbreitet sich die Flamme mit einer ungemeinen Schnelligkeit durch alle über und neben einander liegende Körner. Durch die Verbrennung aber wird eine elastische flüßige Masse hervorgebracht, welche die größte Aehnlichkeit mit der Luft hat, und sich auch alsdenn, wenn die Entzündung in freyer Luft geschicht, mit der größten Gewalt nach allen Seiten ausbreitet. Alles erfolgt eben so, als wenn das Pulver in seinen Bestandtheilen eine ungemein stark zusammen gepreßte Luft enthielte, die beym Verbrennen des Pulvers hervor-

hervorbricht, und deren Ausdehnungskraft durch die Hitze noch vergrössert wird.

Zusatz.

15. Indem die Luft, welche bey der Entzündung des Pulvers erzeugt wird, die Kugel im Lauf oder der Seele des Geschützes vor sich her treibt, drückt sie so lange von der hintern Seite gegen die Kugel, als diese noch nicht die Mündung des Stücks erreicht hat. Dieser Druck wird zwar zum Theil durch den Gegendruck der Atmosphäre von aussen gehoben, dem die vordere Seite der Kugel ausgesetzt ist; allein jener Druck übertrift diesen gar sehr, und die Kugel wird so lange in ihrer Bewegung ununterbrochen, obgleich nach und nach, so wie sich hinter ihr die Luft in einen grössern Raum ausbreitet, immer etwas schwächer beschleuniget, bis sie die Mündung des Geschützes erreicht hat. In dem Augenblick, da sie zur Mündung heraus fährt, hört die fernere Beschleunigung auf, weil die aus dem Pulver erzeugte Luft sich nun nach allen Seiten ausbreiten kann. Es ist möglich, aus Gründen der Theorie mit Erfahrung verbunden, diese der Kugel mitgetheilte Geschwindigkeit durch Rechnung zu finden, wenn die Grösse der Pulverladung, das Gewicht der Kugel, und die Abmessungen des Geschützes gegeben sind; allein die Untersuchung darüber läßt sich hier nicht anstellen. Man findet die allgemeinen Gründe dieser Theorie im VI. Theil des Lehrbegriffes, im VIII. Abschn. der Pneumatik, 564 u. f. S.

Die 2. Aufgabe.

16. Es sey in *A* die Stelle, woselbst ein Geschütz abgefeuert wird, dessen Axe gegen den Horizont unter dem Winkel *CAB* geneigt ist; 161 Fig.

ist; die Geschwindigkeit, womit die Kugel zur Mündung heraus fährt, sey gegeben: man soll die Stelle *M* finden, woselbst sich die Kugel nach Verlauf einer gegebenen Zeit in ihrer Bahn befinden würde, wenn sie ihre Bewegung völlig frey fortsetzen könnte, ohne daß der Widerstand der Luft sie verzögerte.

Aufl. Wenn AB die Richtung der Axe des Geschützes vorstellet, und CAB ihr Neigungswinkel gegen den Horizont ist; so ist AC horizontal, und die Ebene CAB vertical. (272 §. Geom.) In eben dieser Ebene liegt auch die lothrechte grade Linie AD. Man setze die Geschwindigkeit $= h$, womit die Kugel zur Mündung des Geschützes in der Richtung AB heraus fährt, und den Winkel $CAB = \alpha$. Ferner nehme man $AB = h$, und ziehe BD horizontal, BC lothrecht; so ist $AC = h \cos \alpha$, $AD = h \sin \alpha$, wenn der Halbmesser $= 1$ gesetzt wird. (40 §. Trigonom.) Wenn nun die Bewegung der Kugel auch nicht von der Schwere Veränderungen litte, so würde sie in der ersten Secunde den Weg AB mit gleichförmiger Bewegung durchlaufen; sie würde sich also in eben dieser Zeit von der Stelle A in horizontaler Richtung um den Weg AC entfernen, und zugleich um die lothrechte Höhe $CB = AD$ steigen. Demnach ist $AC = h \cos \alpha$ ihre horizontale, und $AD = h \sin \alpha$ ihre verticale Geschwindigkeit. Nur diese letztere wird von der Schwere verzögert, jene aber, die horizontale Geschwindigkeit, bleibt nach dem Gesetze der Trägheit unverändert. Demnach hat die Kugel nach Verlauf der Zeit t in horizontaler Richtung den Weg $ht \cos \alpha$ zurück gelegt, (7 §. Hydraul.) in verticaler Richtung aber, vermöge ihrer steigenden Bewegung, den Weg

ht

$ht \sin\alpha - gtt$. Man nehme also auf der Horizontallinie die Entfernung $AP = ht \cos\alpha$; man richte ferner aus P die lothrechte Linie PM auf, und nehme auf dieser die Höhe $PM = ht \sin\alpha - gtt$; so ist M die Stelle, wo sich die Geschützkugel am Ende der Zeit t befindet.

Der 1. Zusatz.

17. Mit der lothrechten Geschwindigkeit $AD = h \sin\alpha$ kann die Kugel bis zur Höhe $\frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$ steigen, (23 §. der Hydraulik) und während dieser steigenden Bewegung verfließt die Zeit $t = \sqrt{\left(\frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g} : g\right)} = \frac{h \sin\alpha}{2g}$. Eben so viele Zeit verfließt während des Falles von derselben Höhe. Wenn demnach doppelt so viele Zeit, oder die Zeit $\frac{h \sin\alpha}{g}$ verflossen ist; so muß die Kugel bis zur Horizontallinie AH wieder herabgefallen seyn.

Der 2. Zusatz.

18. Man nehme nun $AE = ht \cos\alpha$, und zugleich $t = \frac{h \sin\alpha}{2g}$, so wird $AE = \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$. Aus E richte man die lothrechte Linie $EG = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$ auf, so ist G der höchste Punct in der Bahn der Kugel. Man nehme ferner $EH = AE$, so ist H die Stelle, woselbst die Kugel in der Horizontallinie AE wieder niederfällt.

Die 5. Erklärung.

19. Man unterscheidet den Bogenschuß vom Kernschuß: die erste Richtung des Bogenschusses macht oberhalb der Horizontallinie mit dieser einen schiefen Winkel, welcher der Elevationswinkel heißt; die Richtung des Kernschusses aber ist horizontal.

Der 1. Zusatz.

163 Fig. 20. Beym Kernschuß kann die Kugel sich nicht über der Horizontallinie AH erheben, sie wird vielmehr unter diese Horizontallinie herabsinken. In dem allgemeinen Ausdruck $PM = ht \sin\alpha - gtt$ ist nun α und $\sin\alpha = 0$; also $PM = -gtt$, und das Zeichen (—) zeigt an, daß PM allemahl unter der Horizontallinie liege. Uebrigens bleibt $AP = ht \cos\alpha$, und $\cos\alpha = 1$; das giebt $t = \frac{AP}{h}$. Wird dieser Werth statt t gebraucht, so ist $PM = \frac{g \cdot AP^2}{h^2}$, und man kann das Zeichen (—) nun auch weglassen, weil es ein für allemahl bekannt ist, daß PM unter der Horizontallinie liegt.

Der 2. Zusatz.

21. Je grösser die erste Geschwindigkeit der Kugel ist, desto grösser ist h, und PM desto kleiner. Wenn also gleich beym Kernschuß die Bahn der Kugel eigentlich ein Bogen ist; so weicht sie doch auf eine desto grössere Weite sehr wenig von der graden Linie ab, je grösser die erste Geschwindigkeit der Kugel ist.

Die

Die 3. Aufgabe.

22. Die erste Geschwindigkeit der Kugel, und der Elevationswinkel des Geschützes sind gegeben: man soll die horizontale Schußweite finden.

Aufl. Man multiplicire die Höhe, welche mit der ersten Geschwindigkeit der Kugel zusammen gehört, doppelt genommen mit dem Sinus des doppelten Elevationswinkels, der mit dem Halbmesser Eins zusammen gehört. Wenn nemlich die erste Geschwindigkeit der Kugel $= h$ gesetzt wird, so ist die ihr zugehörige Höhe $= \frac{h^2}{4g}$. (20 §. Hydraul.) Wird ferner der Elevationswinkel $= \alpha$ gesetzt, so erhält man

$$AH = 2 \cdot \frac{h^2}{4g} \cdot \sin 2\alpha = \frac{h^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$ 161 Fig.

Beweis. Um den Mittelpunct C beschreibe man einen Kreis mit dem Halbmesser $CA = 1$, so ist der Durchmesser $AE = 2$. Man mache den Winkel $ACD = \alpha$, und $ACB = 2\alpha$, ziehe die Sehnen AB, BE, und BF auf AE senkrecht; so ist $AB = 2 \sin \alpha$, $BE = 2 \cos \alpha$, $BF = \sin 2\alpha$. (2 §. Trig.) Weiter sind die rechtwinklichten Dreyecke ABE, EBF, einander ähnlich, (183 §. Geom.) und man hat $AE : AB = BE : BF$, also $2 : 2 \sin \alpha = 2 \cos \alpha : \sin 2\alpha$; folglich ist $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Es war aber $AE = \frac{h^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}$, und $AH = 2AE$: (18 §.) also ist $AH = \frac{h^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}$ oder $AH = \frac{h^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}$. 162 Fig.

Der 1. Zusatz.

23. Wenn $\alpha = 45°$ ist, so ist $2\alpha = 90°$, und $\sin 2\alpha = 1$. Wird α noch grösser, so nimmt $\sin 2\alpha$ wieder ab: also ist die Schußweite unter dem Elevationswinkel von 45° am grösten. Sie ist alsdenn $= \frac{h^2}{2g}$, mithin so groß, als die der ersten Geschwindigkeit der Kugel zugehörigen Höhe doppelt genommen.

Der 2. Zusatz.

24. Wenn $\alpha = 15°$ ist, so wird $2\alpha = 30°$, und $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, also $AH = \frac{h^2}{4g}$, und das ist die Höhe, welche mit der ersten Geschwindigkeit der Kugel zusammengehört.

Der 3. Zusatz.

25. Würde die Bewegung der Kugel durch den Widerstand der Luft nicht desto mehr verzögert, je grösser die Geschwindigkeit ist, womit sie sich durch die Luft bewegt; so würde man durch einen Probeschuß unter einen bekannten Erhöhungswinkel, wenn man die horizontale Schußweite gemessen hätte, die anfängliche Geschwindigkeit der Kugel finden können. Es ist nemlich $h = \sqrt{\cdot \frac{2g \cdot AH}{\sin 2\alpha}}$, (22 §.) und für den Winkel $\alpha = 15°$ hätte man $h = 2\sqrt{g \cdot AH}$. Demnach würde man am bequemsten den Erhöhungswinkel von 15° für den Probeschuß wählen. Die größte Schußweite wäre alsdenn doppelt so groß, als die horizontale Weite des Probeschusses, und die Schußweiten unter andern Erhöhungswinkeln würden

den sich alsdann wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel verhalten.

Der 4. Zusatz.

26. Die horizontale Weite des Kernschusses hängt von der lothrechten Höhe der Batterie, wo die Kanone steht, über der Horizontalfläche der Stelle ab, wo die Kugel niederfällt. Wenn CD diese Höhe ist; 163 Fig.
so hat man $CD = \frac{g \cdot AC^2}{h^2}$, (20 §.) also $AC^2 = \frac{h^2 \cdot CD}{g}$, und $AC = h\sqrt{\frac{CD}{g}}$. Es ist aber $\frac{h^2}{g}$ die vierfache Weite des Probeschusses: also würde man diese mit der Höhe CD multipliciren, und aus dem Product die Quadratwurzel ziehen müssen, um die Weite des Kernschusses zu finden.

Der 5. Zusatz.

27. Die erste Geschwindigkeit der Kugel ist ohne Zweifel viel grösser, als sie dem 25 §. gemäß vermittelst des Probeschusses würde gefunden werden; denn die horizontale Schußweite würde im leeren Raum viel grösser ausfallen, als in der widerstehenden Luft: also kann der Probeschuß eigentlich nicht dienen, die erste Geschwindigkeit der Kugel zu finden. Wenn es indessen seine Richtigkeit hätte, wie Herr Belidor glaubt, es durch Erfahrungen gefunden zu haben, daß bey einerley Pulverladung, wenn sonst alles übrige einerley ist, die horizontalen Schußweiten sich so ziemlich richtig, wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel verhielten; so würden die bisher vorgetragenen Regeln, die Schußweiten durch Rechnung zu finden, in der Ausübung sehr brauchbar seyn.

Anmerkung.

28. Die krumme Linie, worin Bomben und Kanonenkugeln sich bewegen würden, wenn der Widerstand der Luft darin keine beträchtliche Aenderung verursachte, heißt in der höhern Geometrie die Parabel: das ist der Grund, weßwegen man durch die paraboliſche Theorie von der Bahn der Geschützkugeln diejenige verstehet, wobey der Widerstand der Luft nicht in Rechnung gebracht wird. Dieser ist aber bey den sehr schnellen Bewegungen der Bomben und Kanonenkugeln so sehr groß, daß ihre Bahn gar sehr von der Parabel verschieden ist. Weil jedoch die erste Geschwindigkeit der Bomben allemahl sehr viel kleiner ist, als die erste Geschwindigkeit der grösten Kanonenkugeln; so läßt es sich daher erklaren, woher es kommt, daß Belidor beym Bombenwerfen die Verhältnisse der Schußweiten so ziemlich der Erfahrung gemäß befunden hat. Solche Untersuchungen darüber, wobey der Widerstand der Luft mit in Rechnung gebracht wird, lassen sich nur mit Hülfe der höhern Mathematik anstellen. Folgende kleine Tabellen können indessen dienen, einigermassen daraus abzunehmen, wieweit die Kugeln getrieben werden, wenn die Stücke mit halbkugelschwer Pulver geladen sind. Die in denselben angezeigte Weite des Kernschusses ist diejenige, um welche sich die Kugel von der Mündung des Stücks entfernt, ohne merklich von der graden horizontalen Linie abzuweichen, welche ihre Bahn an der Mündung des Stücks berührt.

Franzö-

Französische Kanonen	Weite des Kernschusses	Weite des Bogenschusses von 45°
32pfündige	1440 Rhl. Fuß	14400 Rheinl. Fuß
24pfündige	1920 — —	14400 — —
16pfündige	1920 — —	19200 — —
12pfündige	1080 — —	12000 — —
8pfündige	960 — —	10800 — —
4pfündige	720 — —	7200 — —
2pfündige	360 — —	3600 — —
Deutsche Kanonen		
Ganze Karthaune	1200 Rhl. Fuß	14400 Rheinl. Fuß
Halbe Karthaune	1020 — —	12180 — —
Viertel Karthaune	900 — —	10560 — —
Regimentsstück	780 — —	8640 — —
Ganze Schlange	1440 — —	17136 — —
Halbe Schlange	1080 — —	12888 — —
Viertel Schlange	840 — —	10032 — —
Falkonet	672 — —	7968 — —
Halbes Falkonet	494 — —	5880 — —
Serpentinell	384 — —	4488 — —

Was die practischen Schriftsteller sonst noch in der Artillerie vorzutragen pflegen, erfordert, soweit es mathematisch ist, zu viele Theorie, als daß es hier aus seinen Gründen richtig hergeleitet werden könnte, wohin

unter andern auch die Lehre von den Minen gehört. Die Beschreibung der mancherley Geräthschaften wäre hier zu weitläuftig, und die Beschreibung vom Gebrauch des Pulvers zu Lust-Feuerwerken ist mehr physisch und chymisch als mathematisch. Als eines der besten Handbücher für solche Leser, die in der höhern Mathematik nicht geübt sind, empfehlen sich besonders Hn. Carl August Struensees Anfangsgründe der Artillerie, Leipzig und Lignitz 1760.

Ende des ersten Bandes.

Formeln

zum Behuf der sphärischen Trigonometrie.

I. Für rechtwinkliche Kugeldreyecke. *)

Es ist gegeben

1) die Hypothenuse H und ein Kathete.

Man sucht

a) den Winkel der diesem Katheten gegenüber steht.

$$\sin N = \frac{\sin. B}{\sin. H} \text{ **)}$$

$$\sin M = \frac{\sin. P}{\sin. H}$$

b) den an dem Katheten anliegenden Winkel.

*) Die Buchstaben beziehen sich auf die 164ste Figur und auf den 7ten §. der sphärisch. Trigonometrie.

**) Der sinus totus wird in allen diesen Formeln, durchgängig = 1 gesetzt.

$$\text{Cos. N} = \frac{\text{tang. P}}{\text{tang. H}}$$
$$= \text{Cot. H tang. P}$$
$$\text{Cos. M} = \frac{\text{tang. B}}{\text{tang. H}}$$
$$= \text{Cot. H tang. B}$$

c) den andern Katheten.

$$\text{Cos. P} = \frac{\text{Cos. H}}{\text{Cos. B}}$$
$$\text{Cos. B} = \frac{\text{Cos. H}}{\text{Cos. P}}$$

2) Jeder der beiden Katheten.

Man sucht

a) einen Winkel.

Cot. N = Cot. B sin P
Cot. M = Cot. P sin B; oder

$$\text{tang. N} = \frac{\text{tang. B}}{\text{sin P}}$$
$$\text{tang. M} = \frac{\text{tang. P}}{\text{sin B}}$$

b) die Hypothenuse.

Cos. H = Cos. B Cos. P

3) Die Hypothenuse und ein Winkel.

Es wird gesucht

a) der dem gegebenen Winkel gegenüberstehende Kathete.

sin B = sin H sin N.
sin P = sin H sin M.

b) der an dem gegebenen Winkel liegende Kathete.

tang

tang P = Cos. N tang H
tang B = Cos. M tang H

c) der andere Winkel.

Cot. N = Cos. H tang M
Cot. M = Cos. H tang N.

4) Ein Kathete und der ihm gegenüberstehende Winkel.

Man verlangt

a) den anliegenden Winkel.

$$\sin M = \frac{\text{Cos. N}}{\text{Cos. B}} = \text{Cos. N sec. B}$$

$$\sin N = \frac{\text{Cos M}}{\text{Cos. P}} = \text{Cos. M sec. P}$$

b) den andern Katheten.

$$\sin P = \frac{\text{Cot. N}}{\text{Cot. B}} = \text{Cot. N tang B}$$

$$\sin B = \frac{\text{Cot. M}}{\text{Cot. P}} = \text{Cot. M tang P.}$$

c) die Hypothenuse.

$$\sin H = \frac{\sin B}{\sin N} = \frac{\sin P}{\sin M}$$

$$= \sin B \operatorname{Cosec.} N = \sin P \operatorname{cosec.} M$$

5) Ein Kathete und der anliegende Winkel.

Man sucht

a) den andern Winkel.

$$\text{Cos. M} = \frac{\sin N}{\text{Cos. P}}$$

$$\text{Cos. N} = \frac{\sin M}{\text{Cos. B}}$$

b) den

b) den andern Katheten.

tang. B = tang. N sin. P

tang. P = tang. M sin. B

c) die Hypothenuse.

Cot. H = Cot. P Cos. N = Cot. B Cos M.

6) Die beiden Winkel an der Hypothenuse.

Es wird gesucht

a) ein Kathete.

$$\text{Cos. B} = \frac{\text{Cos. N}}{\text{sin M}} = \text{Cos. N Cosec. M}$$

$$\text{Cos. P} = \frac{\text{Cos. M}}{\text{sin N}} = \text{Cos. M Cosec. N}$$

b) die Hypothenuse.

$$\text{Cos. H} = \frac{\text{Cot. M}}{\text{tang. N}} = \text{Cot. M Cot. N.}$$ *)

II. Für schiefwinkliche Kugeldreyecke. **)

Es ist gegeben:

1) die Seite AC und AB; wie auch

a) der eingeschlossene Winkel A.

Man verlangt

α) die dritte Seite CB.

Cos.

*) Die Merkmahle, nach welchen man, in zweifelhaften Fällen, entscheidet, ob das Gesuchte kleiner oder grösser als 90° sey, werden bei dem mündlichen Vortrage beigebracht.

**) Die Buchstaben nachstehender Formeln beziehen sich auf die 166ste Figur, und aus dem 15ten §. der sphär. Trigonometrie, kennt man ihre Bedeutung.

$\cos. CB = \cos. A \sin. AC \sin AB + \cos. AC \cos. AB.$

β) die übrigen Winkel B, C.

$$\text{tang. } B = \frac{\sin A \text{ tang. } AC}{\sin AB - \text{tang. } AC \cos. AB \cos. A};$$

oder $\text{tang } B = \frac{\text{tang } A \sin. u}{\sin (AB - u)}$ (welches bei logarithmen Rechnungen bequemer ist.)

wo u ein Winkel bedeutet, dessen Tangente $= \cos. A$ tang. AC.

$\sin C = \frac{\sin. AB \sin B}{\sin. AC}$; da dann B vorher gefunden seyn muß.

2) der einer gegebenen Seite AC gegenüberstehende Winkel B.

Man sucht

a) den Winkel C, welcher der gegebenen Seite AB gegenüber steht.

$$\sin C = \frac{\sin. B \sin AB}{\sin. AC}$$

Hiebei entscheidet folgende Tafel, ob das Gesuchte, spitzig, stumpf oder zweideutig sey.

Wenn	und	aber	so ist
B	c	b	C
spitzig	spitzig	kleiner als AB	zweideutig
—	—	gröſſer als AB	spitzig
stumpf	stumpf	— — —	zweideutig
—	—	kleiner — —	stumpf
spitzig	stumpf	kleiner als $2R - AB$	zweideutig
—	—	größer als $2R - AB$	stumpf
stumpf	spitzig	— — — —	zweideutig
—	—	kleiner — —	spitzig.

b) den

b) den zwischen den gegebenen Seiten AC, AB liegenden Winkel A.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2} (AC - AB)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} (AC + AB)} \cdot \text{Cot. } \tfrac{1}{2} (B + C)$$

$$= \frac{\text{sin } \frac{1}{2} (AC - AB)}{\text{sin } \frac{1}{2} (AB - AC)} \cdot \text{Cot. } \tfrac{1}{2} (B - C)$$

c) die dritte Seite CB.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} CB = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2} (B + C)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} (B - C)} \cdot \text{tang. } \tfrac{1}{2} (AC + AB)$$

$$= \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} (B + C)}{\text{sin. } \frac{1}{2} (B - C)} \cdot \text{tang. } \tfrac{1}{2} (AC - AB)$$

2) der Winkel *A* sowohl als *B*; dazu

a) die dazwischen liegende Seite AB.

Es wird verlangt

α) der dritte Winkel C.

$$\text{Cos. } C = \text{Cos. } AB \text{ sin } A \text{ sin } B - \text{Cos. } A \text{ Cos. } B; \text{ oder}$$

$$\text{Cos. } C = \frac{-\text{Cos. } (A + u) \text{ Cos. } B}{\text{Cos. } u},$$

wo *u* einen Winkel bedeutet, dessen Tangente = Cos. AB tang. B.

β) jede der beiden übrigen CB und AC.

$$\text{tang. } AC = \frac{\text{sin. } AB \text{ tang } B}{\text{Cos. } AB \text{ Cos. } A \text{ tang } B + \text{sin. } A}$$

$$= \frac{\text{tang. } AB \text{ sin. } u}{\text{sin } (A + u)}, \text{ wo } u \text{ die vorige Bedeutung hat.}$$

$$\text{sin } CB = \frac{\text{sin } A \text{ sin } C}{\text{sin } AB}.$$

Die

Die Beschaffenheit von CB ergiebt folgende Tafel:

Wenn	und	aber	so ist
A	AB	C	CB
spitzig	spitzig	kleiner als A	zweideutig
—	—	grösser als A	spitzig
stumpf	stumpf	grösser als A	zweideutig
—	—	kleiner als A	spitzig
spitzig	stumpf	grösser als $2R-A$	zweideutig
—	—	kleiner — — —	spitzig
stumpf	spitzig	kleiner als $2R-A$	zweideutig
—	—	grösser — — —	stumpf.

b) die einem gegebenen Winkel B gegenüberstehende Seite AC.

Man verlangt

α) die dem andern Winkel A gegenüberliegende Seite CB.

$$\sin CB = \frac{\sin AC \sin A}{\sin B},$$

wo man die Beschaffenheit des Gesuchten wie bei 2, a, β, beurtheilt.

β) die an einem gegebenen Winkel B anliegende Seite AB.

Nachdem CB, wie gleich vorhin, gefunden ist, wird

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} AB = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(B+A)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}(CB+AC)$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}(CB-AC)$$

γ) den dritten Winkel C.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Cos. } \frac{1}{2}(CB-AC)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(CB+AC)} \cdot \text{Cot. } \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(CB-AC)}{\sin \frac{1}{2}(CB+AC)} \cdot \text{Cot. } \tfrac{1}{2}(A-B)$$

3) Jede

3) Jede der drey Seiten CB, AC und AB.
Man sucht:
Alle Winkel, A, B, C.

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(CB+AC-AB)\sin\tfrac{1}{2}(CB-AC+AB)}{\sin AC\,\sin AB}\right)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(AC+AB-CB)\sin\tfrac{1}{2}(AC-AB+CB)}{\sin CB\,\sin AB}\right)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(AB+BC-AC)\sin\tfrac{1}{2}(AB-BC+AC)}{\sin CB\,\sin AC}\right)}$$

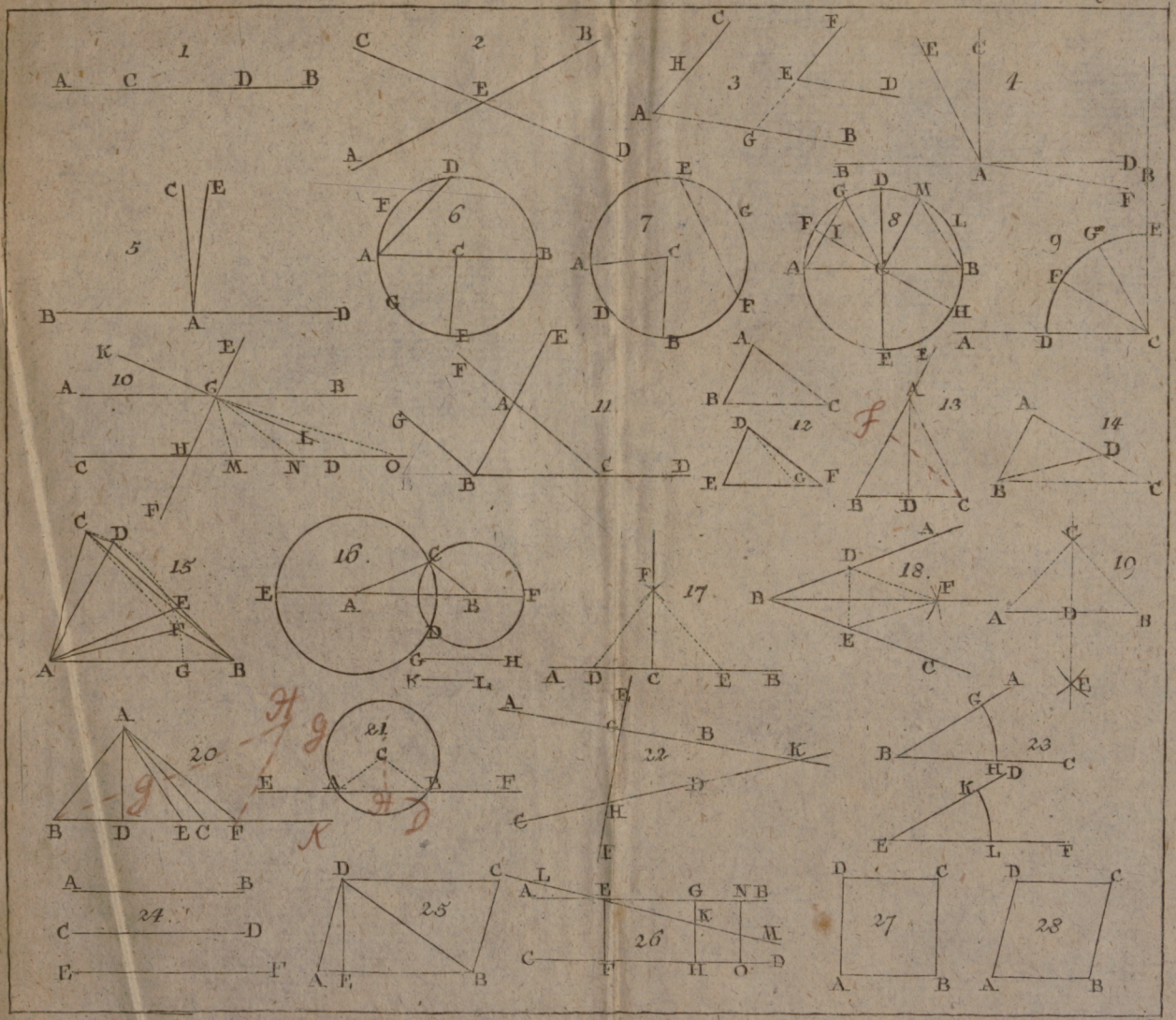
4) Jeder der drey Winkel A, B, C.
Es wird gesucht:
Jede Seite.

$$\sin\tfrac{1}{2}CB=\sqrt{\left(\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,\sin C}\right)}$$

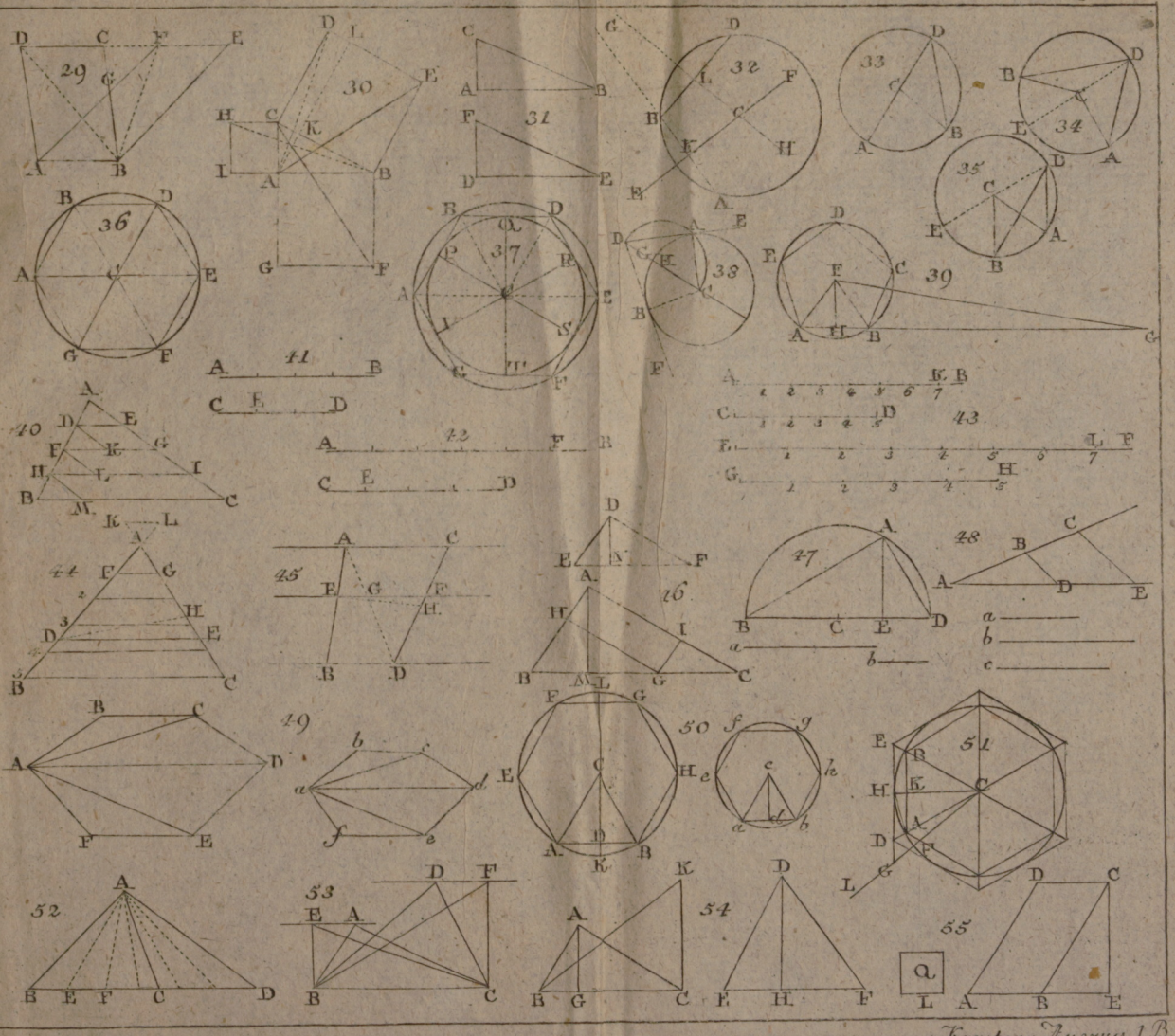
$$\sin\tfrac{1}{2}AC=\sqrt{\left(\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\,\sin C}\right)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}AB=\sqrt{\left(\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\,\sin B}\right)}.$$

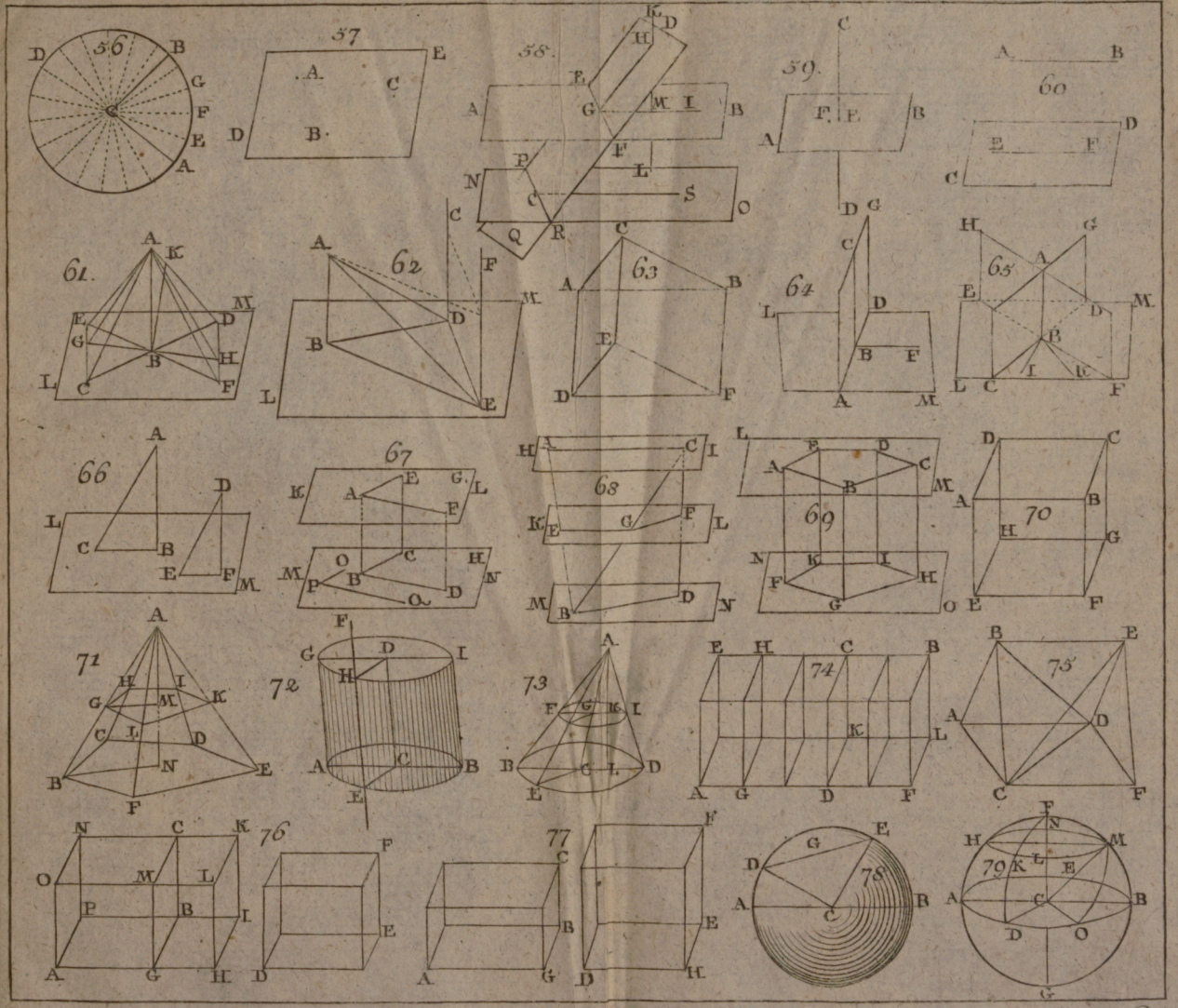




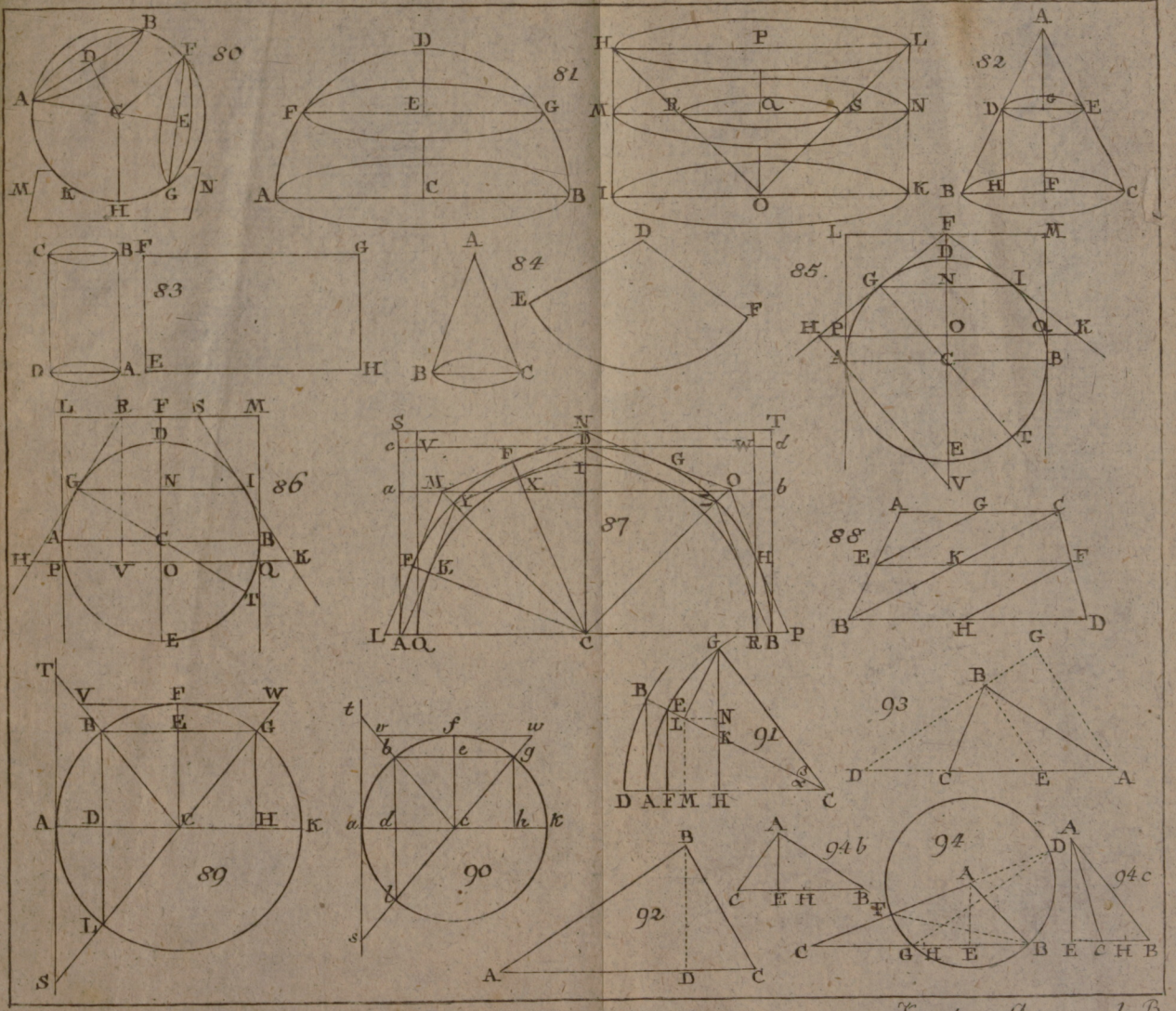
Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0493
DFG



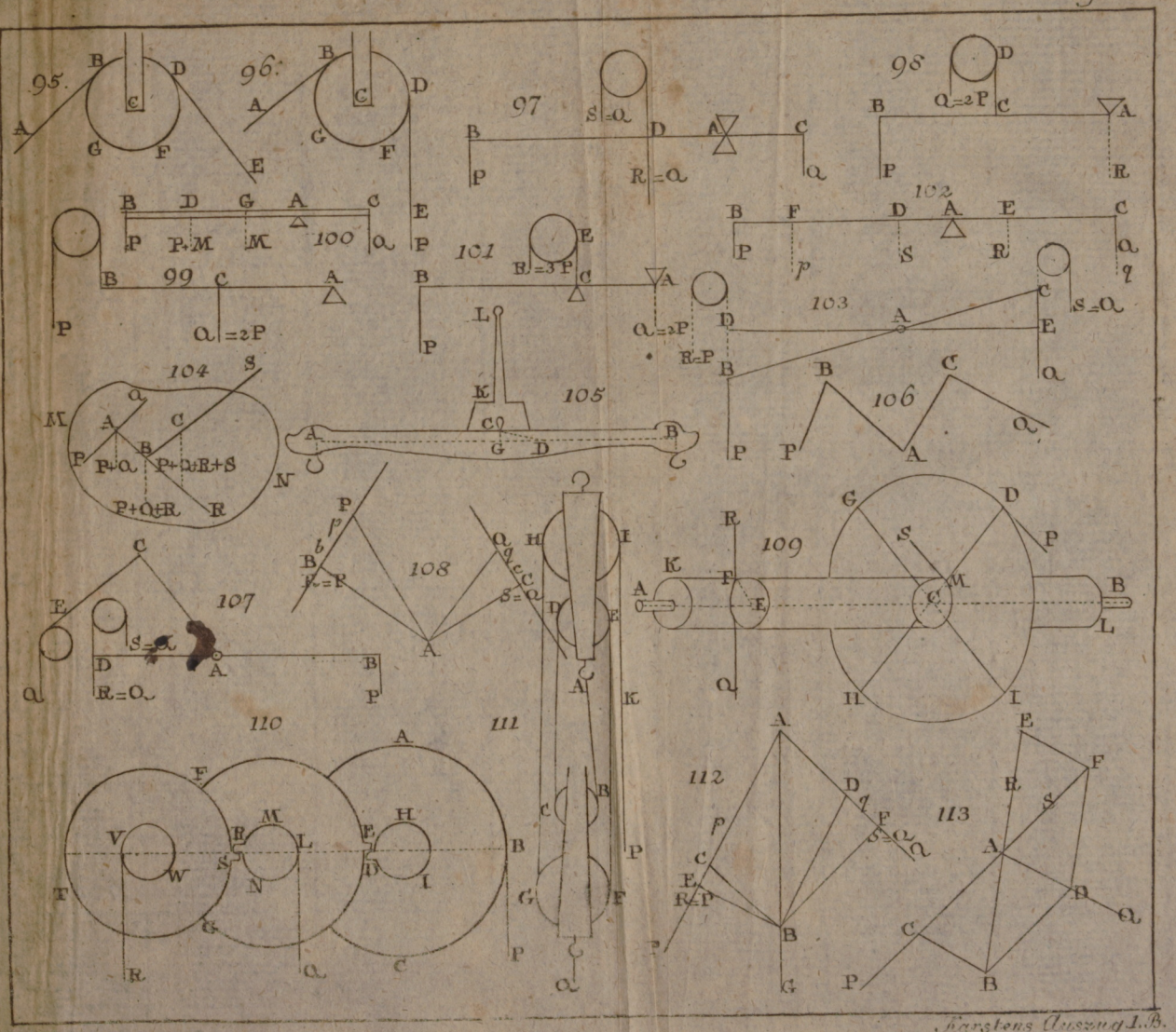
Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0495
DFG



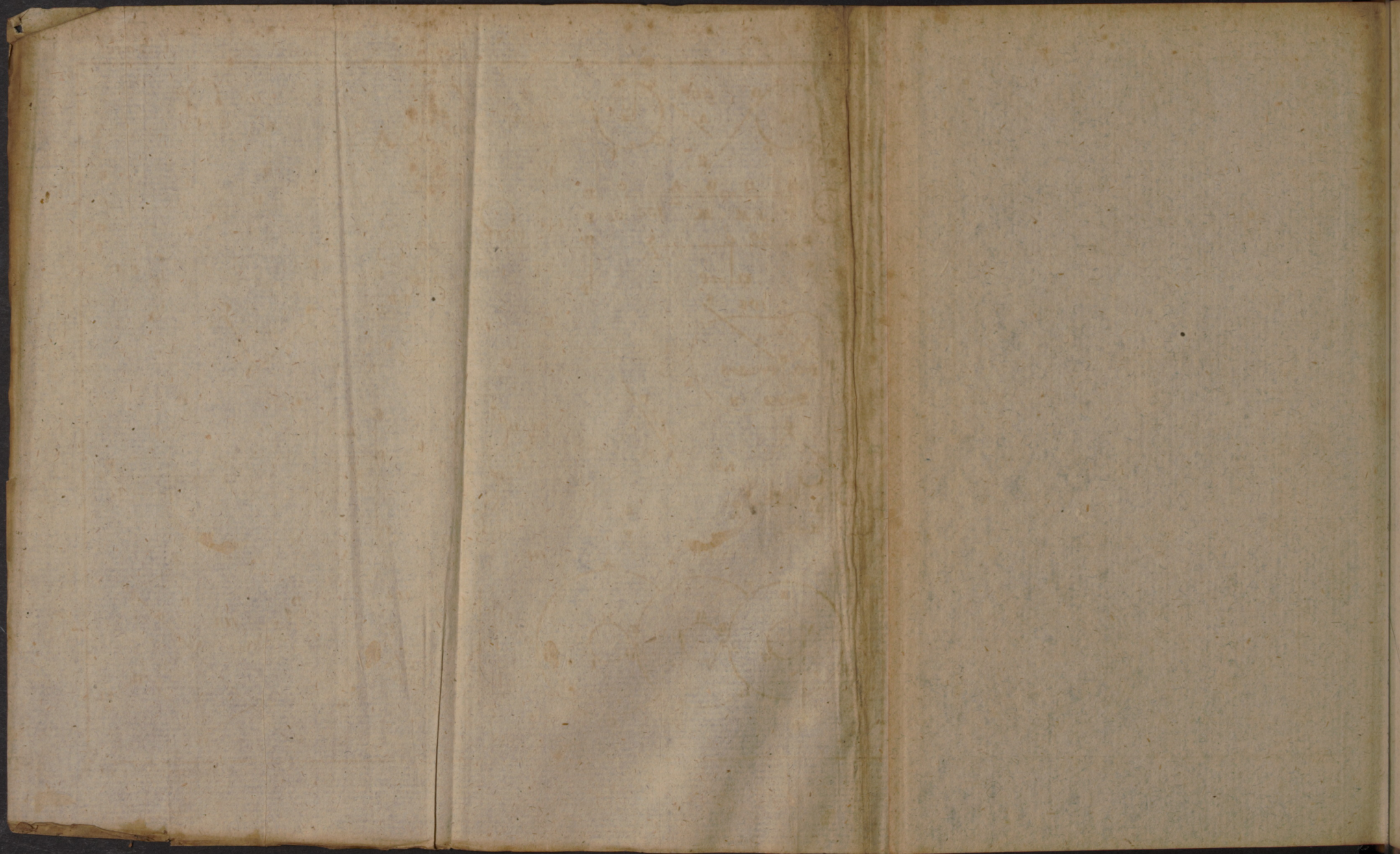
Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0497
DFG



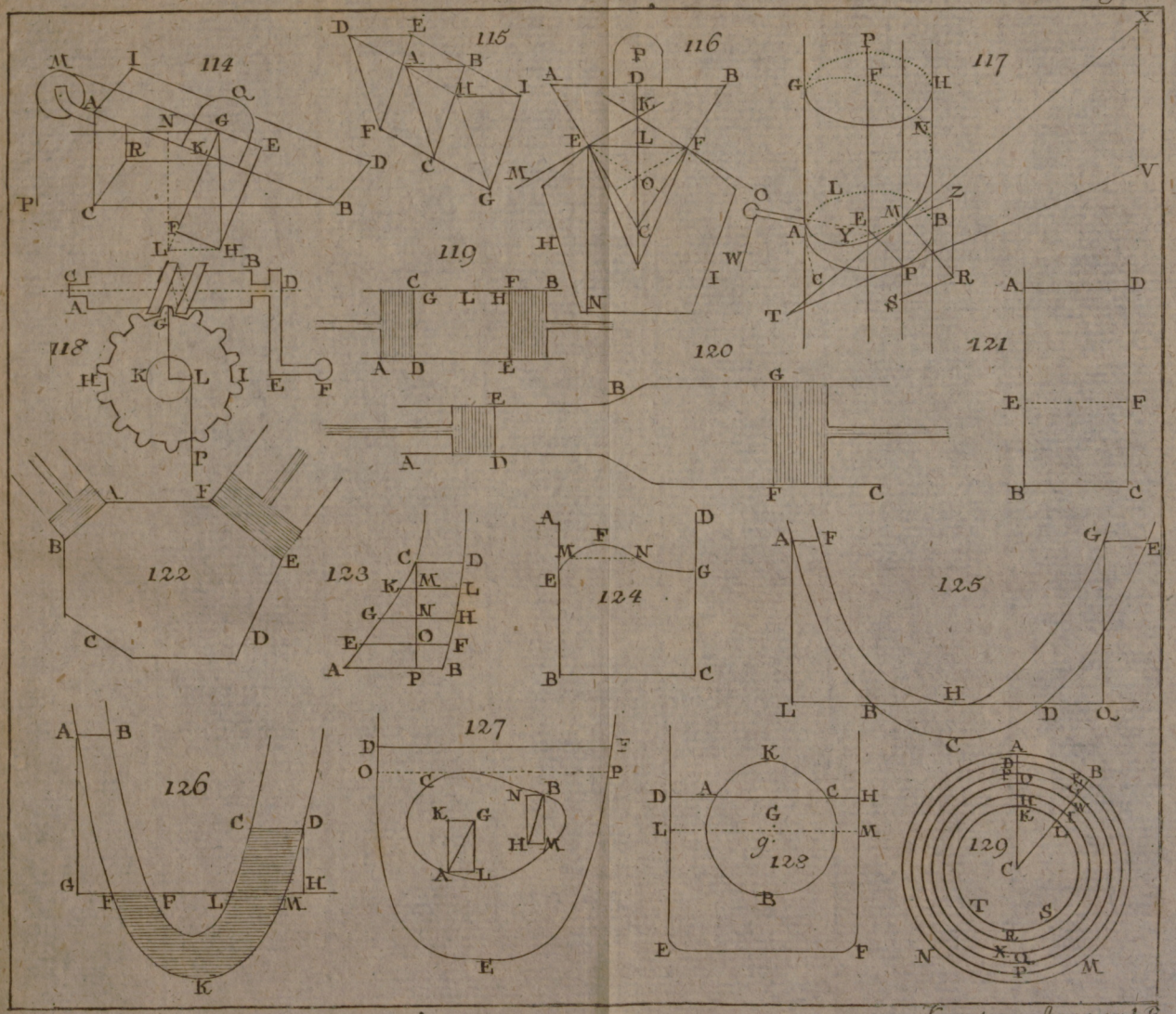
Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0499
DFG



Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0501
DFG

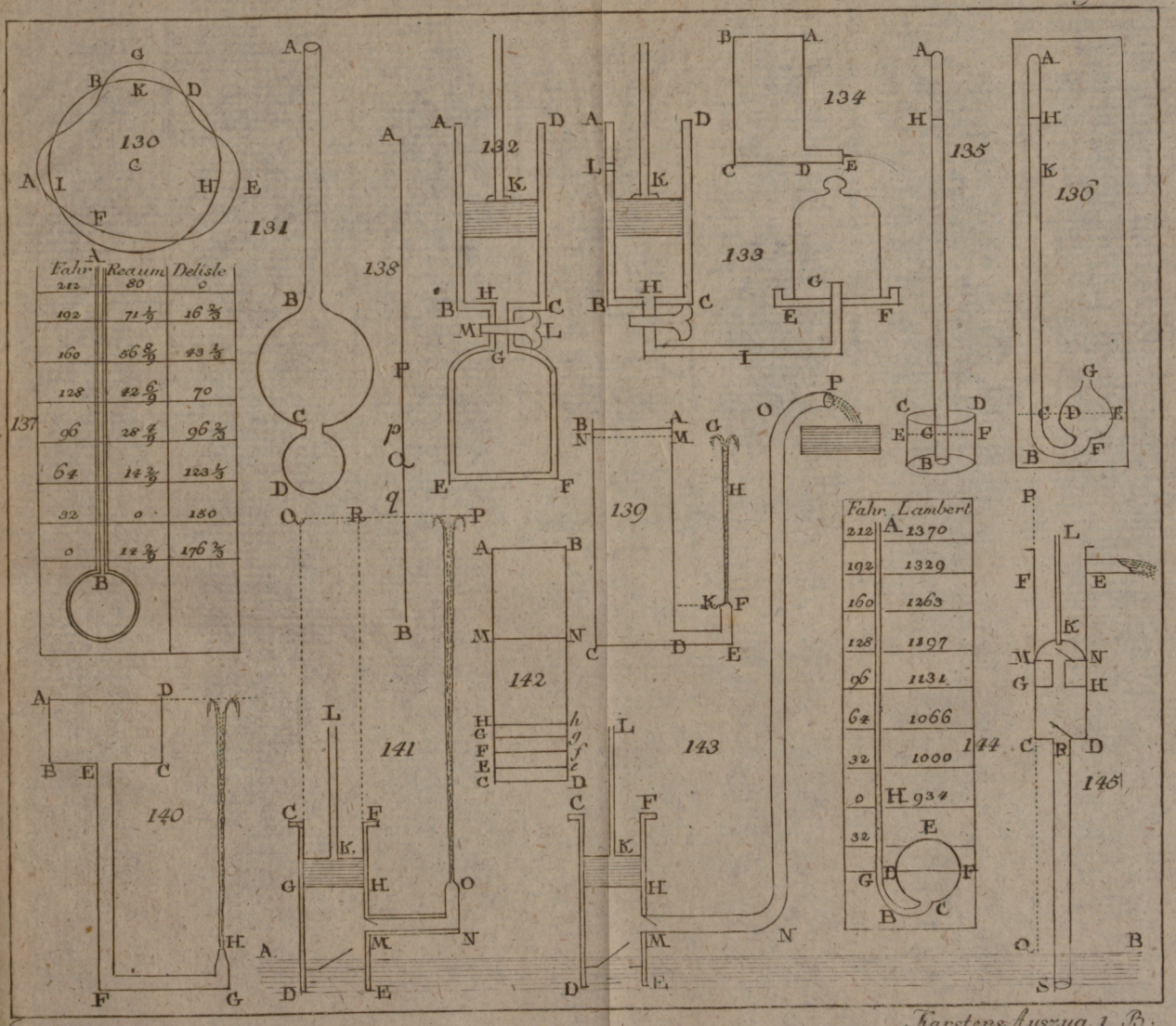


Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0502
DFG



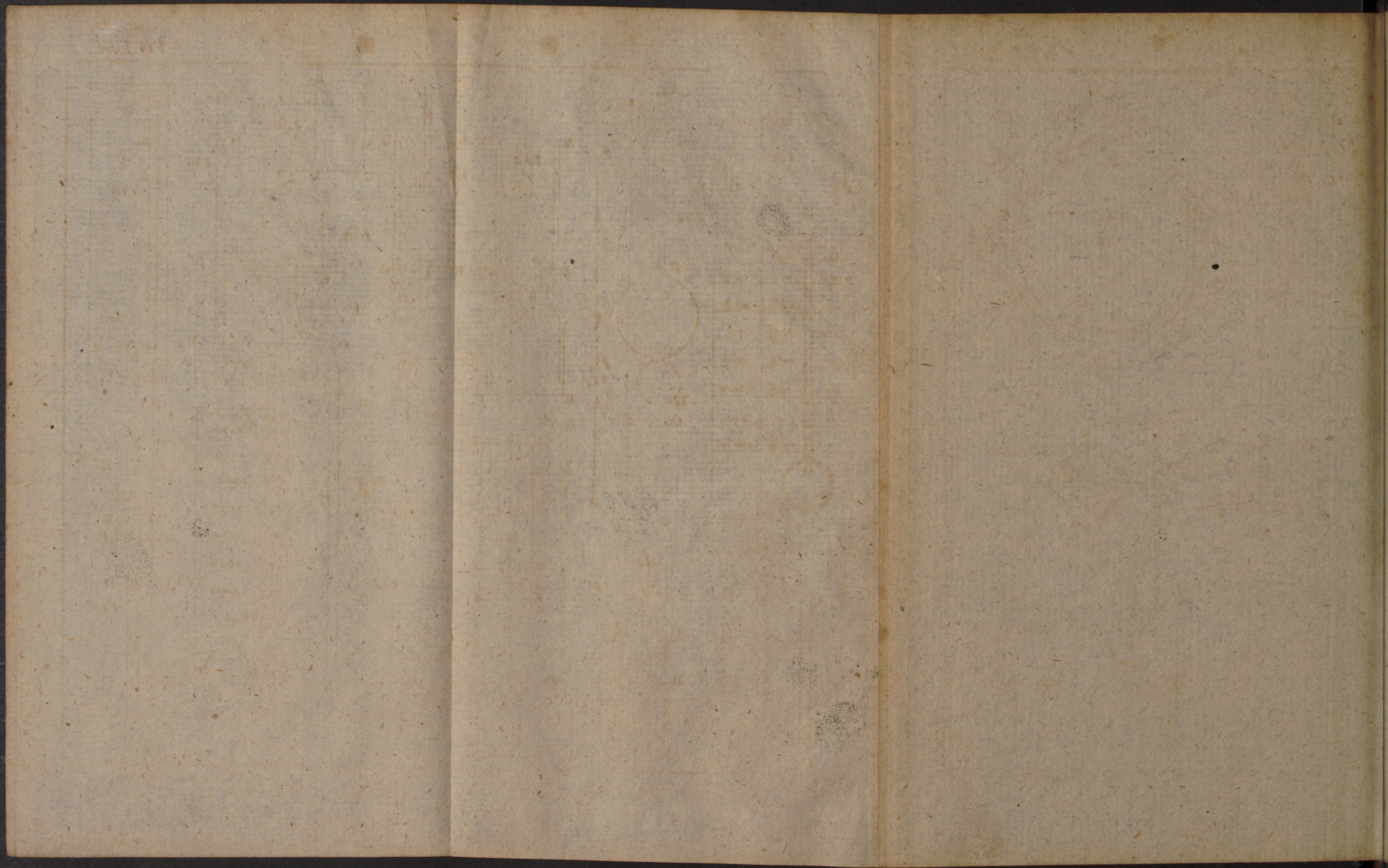
Karstens Auszug I. B.

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0503
DFG

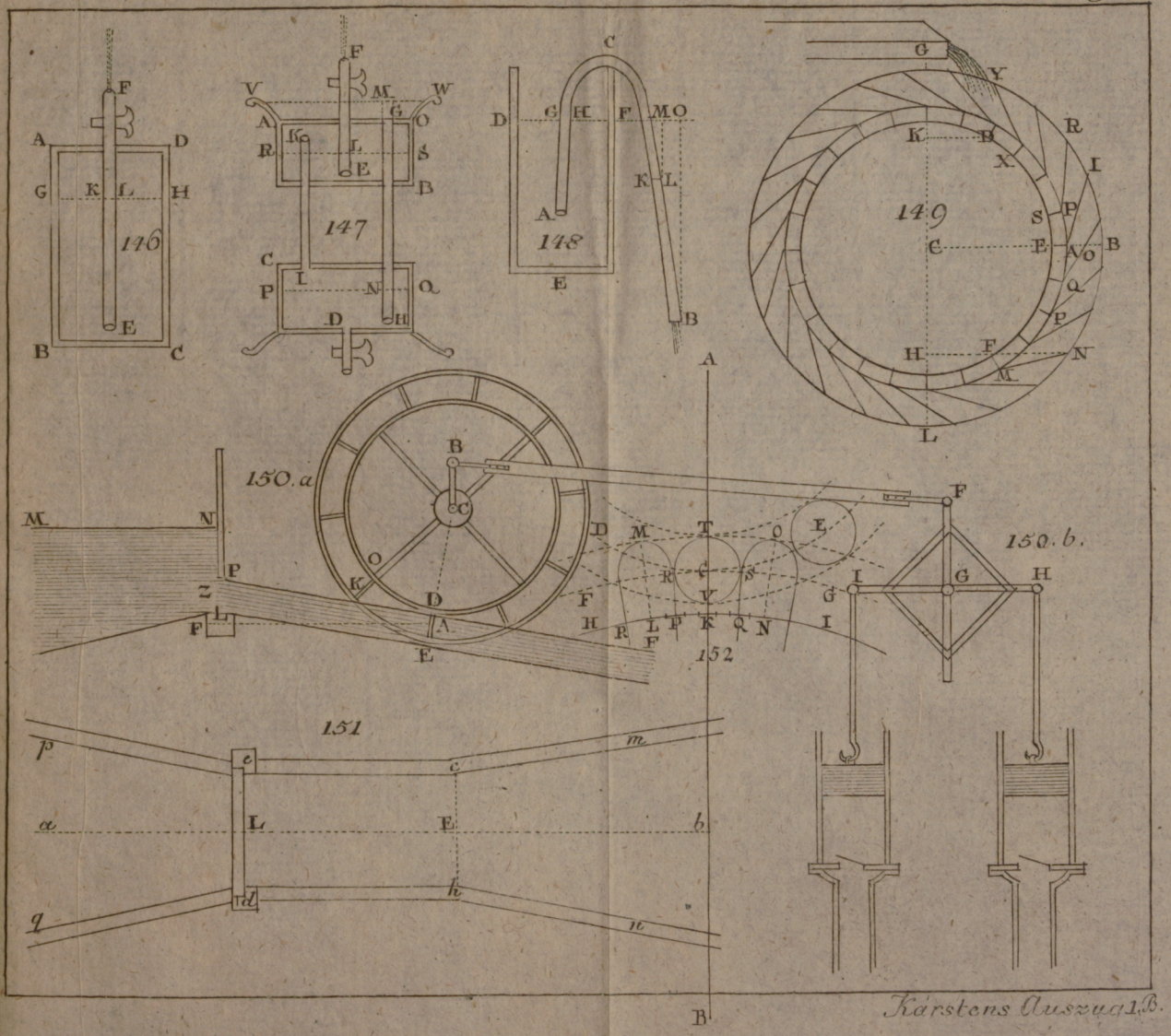


Karstens Auszug. 1. B.

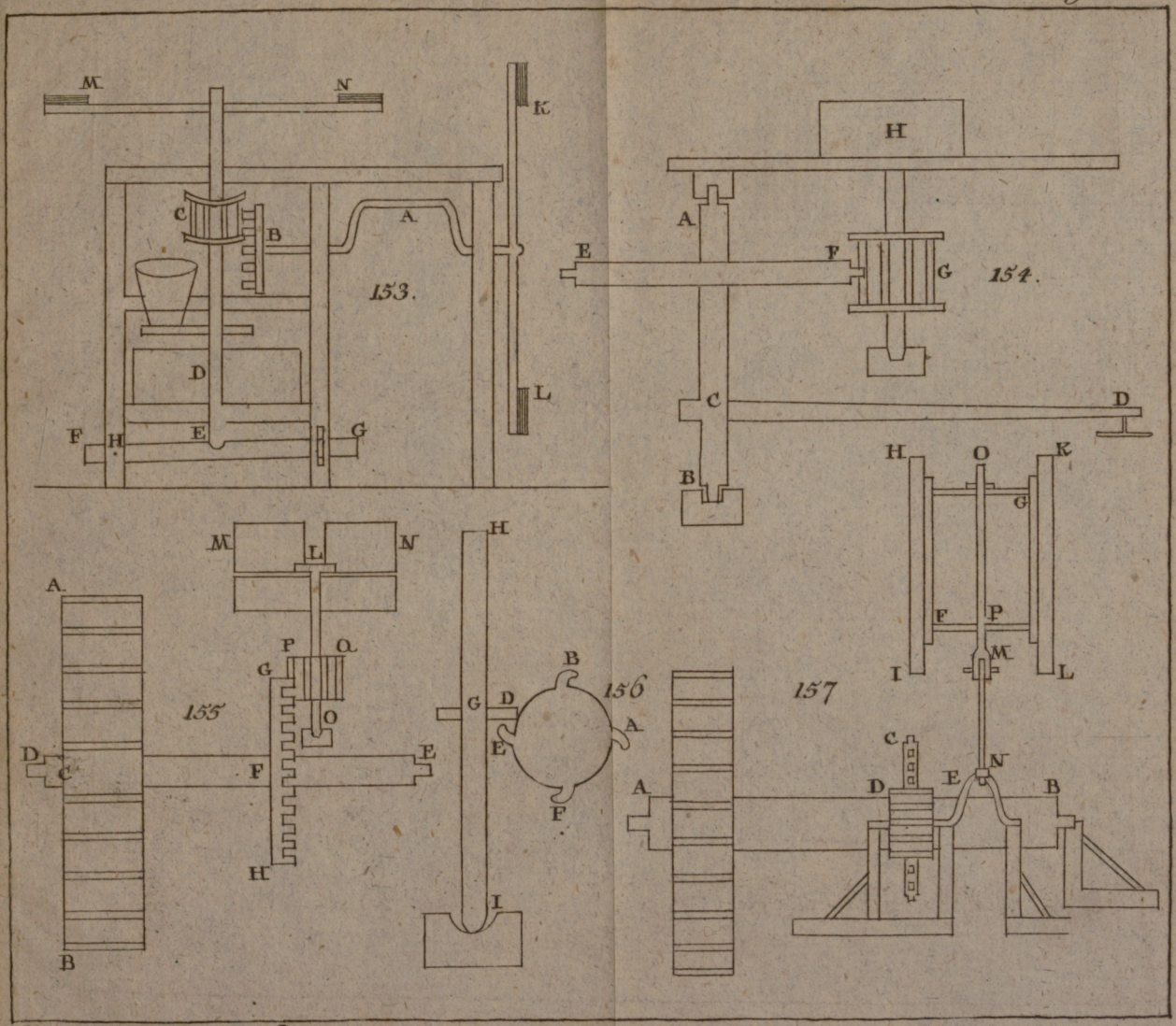
Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0505
DFG



Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0506
DFG

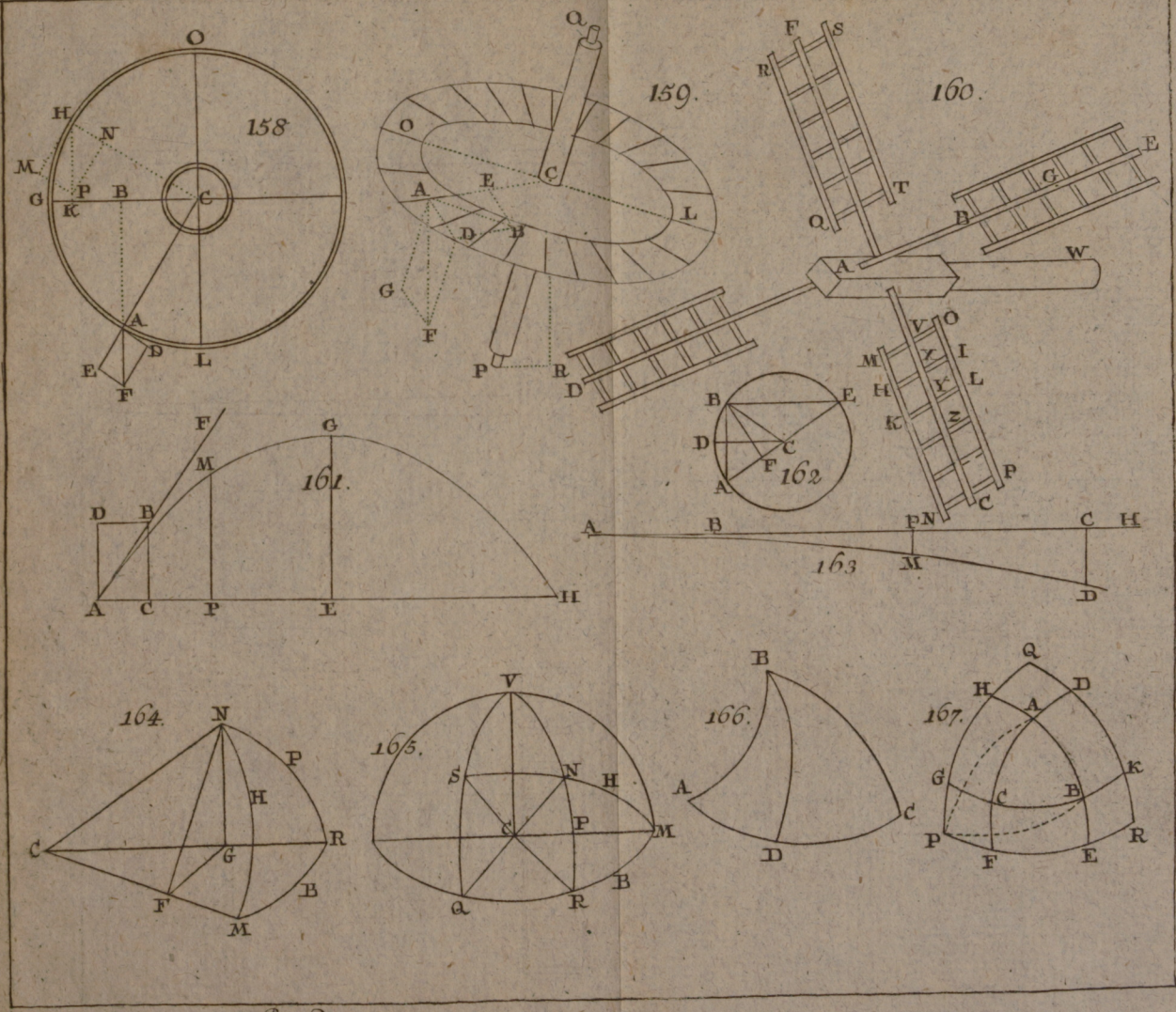


Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1758985720/phys_0507
DFG

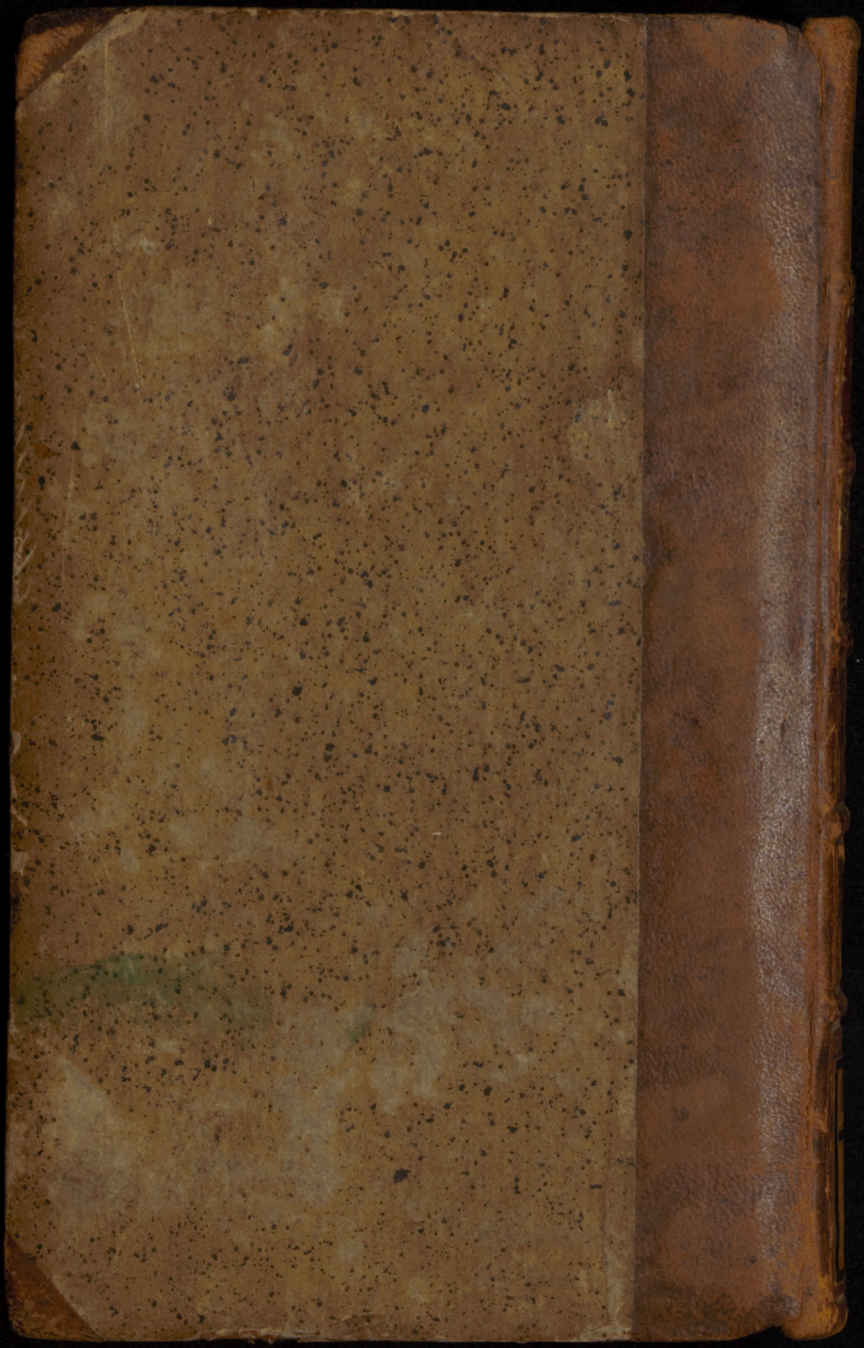


Karstens Auszug 1. B.

Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1758985720/phys_0509
DFG



Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1758985720/phys_0511
DFG



Universitäts Bibliothek Rostock
https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1758985720/phys_0514
DFG

Sinus der doppelten Erhö-

Zusatz.

Weite des Kernschusses
Höhe der Batterie, wo die
rizontalfläche der Stelle ab,
Wenn CD diese Höhe ist; 163
C^2
—, (20 §.) also $AC^2 =$ Fig.

$\frac{CD}{g}$. Es ist aber $\frac{h^2}{g}$
Probeschusses: also würde
D multipliciren, und aus
twurzel ziehen müssen, um
s zu finden.

Zusatz.

indigkeit der Kugel ist ohne
e dem 25 §. gemäß vermit-
rde gefunden werden; denn
te würde im leeren Raum
in der widerstehenden Luft:
eigentlich nicht dienen, die
Kugel zu finden. Wenn
t hätte, wie Herr Belidor
rungen gefunden zu haben,
ladung, wenn sonst alles
rizontalen Schußweiten sich
ie Sinus der doppelten Er-
; so würden die bisher vor-
chußweiten durch Rechnung
ng sehr brauchbar seyn.