Mathematische Vorübungen zum Gebrauche für Anfänger

Frankfurt und Leipzig: bey Philipp Heinrich Perrenon, 1772

http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1768413134

Ex libris
Paedagogii Ducalis
1772.

3 Rthl

Mathematische

Vorübungen

zum

Gebrauche für Anfänger.

Frankfurt und Leipzig,

bey Philipp Heinrich Perrenon. 1772.

Vorrede.

Gegenwärtige Vorübungen sind größten Theils aus dem vortreflichen Lehrbuche genommen, welches im vorigen Jahre zu Berlin ans Licht getreten ist. Die Beweise hat man dort sowol, als auch hie weggelassen. Denn es war eben die Absicht, zärtere Köpfe, die freylich noch nicht zum strengen Erweisen aufgelegt sind, mit den mathematischen Begriffen auf eine leichte Weise bekant zu machen. Sind diese der

Jugend erst geläufig, so ist eben hiedurch schon ein wichtiger Schritt zur Theorie gemacht: denn unter andern Hindernissen, welche zu Anfange aufstoßen, ist wohl jene nicht die geringste, daß durch die Menge aufgehäufter Definitionen die Achtsamkeit des angehenden Lehrlings nur allzu sehr auf die Probe gesetzet, und solcher vom ferneren Fortgange in einer so edlen und gemeinnützigen Wissenschaft zurück gehalten wird.

Von der Art, die Vorlesungen über dieses Werklein einzurichten, brauche ich keine Meldung zu thun, weil solches in der neuen Schulordnung auf das genaueste bestimmet ist, die unlängst auf Gnädigsten Landesherrlichen Befehl heraus gekommen. Münster den 2ten Augustmonats 1771.

Mathematischer Vorübungen
erster Theil
Arithmetik.

Erstes Capitel
Rechnung mit ganzen Zahlen.

1. Was ist die Arithmetik?

Eine Wissenschaft von den Zahlen.

2. Was ist eine Zahl?

Ein Begrif von einer Menge von Dingen einerley Art, das ist, bey denen man nur auf dasjenige sieht, was sie mit einander gemein haben.

Anmerk. Es können daher Dinge, die verschieden sind, nicht anders gezählet werden, oder man kan sich nicht eher einen Begrif von ihrer Menge machen, bis man sie unter einerley Art, oder allgemeinen Namen bringet. Z. E. eine Menge von Hünern, Tauben, Enten, Gänsen ꝛc. in einem Hofe, lassen sich nicht anders zusammenzählen, als wenn man frägt, wie viel Stück Federvieh oder Geflügels es sind. Jedes einzelne Stück in einer solchen Menge von Dingen wird in Rücksicht des allgemeinen Namens derselben die **Einheit** genennet. Eins ist nur eine Zahl, so fern man damit eine Menge zu zählen anfängt, oder so fern es ein Zeichen einer Größe ist, die mit mehrern zusammen gezählet wird.

3. Wie können die Zahlen eingetheilet werden?

1) In **ganze** und **gebrochene** Zahlen oder Brüche. Die ersten bestehen aus Einheiten, deren jede als etwas Ganzes betrachtet wird, die andern aber bestehen aus Einheiten, welche man sich als Theile eines Ganzen vorstellet. Z. E. wenn man saget: drey Thaler, so ist solches eine ganze Zahl, sagt man aber zwey Drittheil Thaler, so ist solches ein Bruch; denn man stellt sich dabey nur zwey gleiche Theile vor, deren dreye erst einen ganzen Thaler ausmachen. 2) In **benannte** und **unbenannte** Zahlen. Bey den ersten werden die Dinge, die man zählet, selbst genant, bey den andern nicht. Z. E. drey Thaler ist eine benannte, drey aber eine unbenannte Zahl.

Anmerk. Es können die Zahlen noch auf verschiedene andere Weisen eingetheilet werden. Z. E. in gerade Zahlen, wie sie sich in zwey gleiche Hälften theilen lassen, deren jede durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, und in ungerade, wenn dieses nicht ist.

4. Welches sind die Zeichen der Zahlen?

Eine jede Zahl kann nicht nur, wie ein anderer Begrif durch ein ausgesprochenes oder geschriebenes Wort, sondern auch im Schreiben noch durch ein besonderes Zeichen ausgedruckt werden; diese Zeichen der Zahlen sind bey allen Europäischen Völkern folgende:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs, Sieben,
8, 9, 0.
Acht, Neun, Null.

Anmerk. Diese Zeichen der Zahlen werden Zifern, oder schlechthin Zahlen genennet. Die meisten alten Völker bedienten sich dazu ihrer Buchstaben; die alten Römer aber hatten folgende Zeichen, denen die neuern beygefüget sind:

I. 1. II. 2. III. 3. IV. 4. V. 5. VI. 6. VII. 7. VIII. 8. IX. 9. X. 10. XI. 11. L. 50. LX. 60. C. 100. D. 500. M. 1000. MDCCLXX. 1770.

5. Was ist von der Bedeutung dieser Zeichen der Zahlen oder Zifern zu bemerken?

Es kann dieselbe 1) aus ihren vorhin gegebenen Figuren, denen die Wörter, durch welche dieselbe ausgesprochen werden, sogleich beygesetzet worden, 2) aus ihren Stellen in einer ganzen Reihe Ziffern, erkant werden. Von dem leztern sind insonderheit folgende Regeln zu bemerken: 1) eine Zifer, welche allein stehet, oder in einer ganzen Reihe die erste Stelle gegen der rechten Hand über einnimt, bedeutet nur so viel Einheiten, als ihre Figur anzeiget, und heißet daher ein Einer, z. E. in folgender Reihe Zifern bedeutet die 5 nichts mehr als fünfe.

4397685.

2) Eine Zifer, welche in einer solchen Reihe die zweyte Stelle von der Rechten zur Linken einnimt, bedeutet zehnmal so viel Einheiten als ihre Figur anzeiget, und heißt ein Zehner, z. E. die 8, welche, wenn sie in der ersten Stelle stünde, ihrer Figur nach nichts mehr als achte bedeuten könte, bedeutet jezt, da sie in der zweyten Stelle stehet, zehnmal acht oder achtzig. Eine Zifer in der dritten Stelle bedeutet wieder zehnmal so viel Einheiten, als sie in der zweyten Stelle bedeutet haben würde, und heißt ein Hunderter, z. E. die 6, welche, wenn sie in der ersten Stelle stünde, ihrer Figur nach, nichts mehr als sechse, in der zweyten Stelle aber

aber sechs mal zehn, oder sechzig bedeuten könte, bedeutet jetzt, da sie in der dritten Stelle stehet, zehnmal sechzig oder sechshundert. Eine Zifer in der vierten Stelle bedeutet wieder zehnmal so viel Einheiten als sie in der dritten Stelle bedeutet haben würde, und heißet ein Tausender. z. E. 7, welche in der dritten Stelle nur sieben hundert bedeuten könnte, bedeutet jetzt zehnmal siebenhundert oder sieben tausend. Eben so bedeutet überhaupt eine jede Zifer zehnmal mehr, wenn sie um eine Stelle von der Rechten gegen die Linke fortgerücket wird.

Anmerk. Die Zifern in der siebenten Stelle bedeuten Millionen, oder tausendmal tausende, in der dreyzehenten Billionen, in der neunzehnten Trillionen, in der fünf und zwanzigsten Quadrillionen, u. s. w.

3) Die Null bedeutet an sich oder wenn sie allein steht gar nichts, sie wird aber gebrauchet, um eine Stelle auszufüllen, in welcher keine andere Zifer stehet, damit man daraus die Stellen der übrigen Zifern in einer Reihe erkennen und darnach ihre Bedeutungen bestimmen könne. Z. E. 0 bedeutet an sich nichts, schreibt man aber dieses Zeichen hinter eine andere Zifer, als 50, so zeiget die Null an, daß die 5 nicht als ein Einer, sondern als ein Zehner anzusehen sey; folglich nicht fünf, sondern zehnmal fünf, oder funfzig bedeute.

Anmerk. Es können also durch die richtige Zusammensetzung der obigen zehn Zifern alle mögliche Zahlen, sie mögen so groß seyn, als sie wollen, ausgedruckt oder bezeichnet werden.

6. Was heist Numeriren?

Die Bedeutung einer mit Zifern geschriebenen Zahl mit Worten, oder eine ausgesprochene Zahl mit geschriebenen Zifern anzeigen.

7. Was ist zu beobachten, wenn eine Reihe Zifern ausgesprochen werden soll?

1) Es wird die ganze Reihe entweder durch besondere Zeichen, z. E. Striche, oder nur im Gedächtnisse, von der Rechten zur Linken, in Classen abgetheilet, deren jede drey Zifern bekömt.

2) Wird eine jede Zifer von der Linken gegen die Rechte nach ihrer Figur und nach ihrer Stelle, welche leztere durch die geschehene Abtheilung bestimmet worden, ausgesprochen, z. E. die obige Reihe Zifern ist also abzutheilen.

4 | 397 | 685

Da man nun die Stellen aller Zifern sogleich übersehen kann, so spricht man diese Reihe von der Linken gegen die Rechte also aus: Vier Millionen, dreyhundert und sieben und neunzig tausend sechs hundert fünf und achtzig.

8. Was

8. Was ist zu beobachten, wenn eine ausgesprochene große Zahl mit Zifern geschrieben werden soll?

1) Es werden auf dem Papier oder Tafel so viele Abtheilungen durch Striche oder andere Zeichen, zwischen welche allemal drey Zifern in einer Reihe geschrieben werden können, gemacht, als die ausgesprochene Zahl erfordert; nämlich, wenn dieselbe nur Tausende enthält, so wird nur ein Strich gemacht; enthält dieselbe Millionen, so werden zwey Striche gemacht; enthält sie tausend Millionen, so werden drey Striche gemacht; enthält sie Billionen, so werden vier Striche gemacht, u. s. w.

2) Wird eine jede ausgesprochene Zahl mit der gehörigen Figur und in die gehörige Stelle von der Linken gegen die Rechte geschrieben, die leergebliebenen Stellen werden mit Nullen ausgefüllet. Z. E. es sey die Zahl zu schreiben: Sieben tausend, dreyhundert, zwey und achtzig Millionen, fünf tausend und vier und sechzig, so werden, weil tausend Millionen darinnen vorkommen, drey Striche gemacht und die einzelnen Zifern nebst den Nullen der drey fehlenden Stellen also zwischen die Striche gesetzet:

7 | 382 | 005 | 064

Anmerk. Es ist sehr zu verhüten, daß man die Einer, welche beym Aussprechen der Zahlen vor den Zehnern, darauf sie folgen sol-

solten, genennet werden, nicht wirklich vor dieselben setze. Z. E. in dem vorigen Exempel wird in den beyden letztern Stellen zur Rechten die 6 eher geschrieben, als die 4, ob man gleich die 4 eher ausspricht, denn 46 würde nicht vier und sechzig sondern sechs und vierzig heißen.

9. Welches sind die Veränderungen, so mit einer Zahl vorgenommen werden können.

Es kann eine jede Zahl entweder vermehret oder vergeringert werden, indem solche Einheiten als die sind, daraus sie bestehet, entweder zu ihr hinzugesetzet, oder weggenommen werden, davon insonderheit zu bemerken:

1) Die **Vermehrung** einer Zahl kann geschehen.

a) Durch das **Addiren** oder die **Addition**, wenn zu einer Zahl eine andere einmal hinzugesetzt wird, z. E. wenn zu 24 die Zahl 3 hinzugesetzet wird.

Anmerk. Die Zahlen, welche addiret werden sollen, heißen die Posten, die gesuchte Zahl aber, welche den Posten zusammen genommen gleich ist, die Summe. z. E. Hier sind 24 und 3 die Posten, die Summe aber ist 27.

b) Durch das **Multipliciren**, oder die **Multiplication**, wenn eine Zahl so viel-

vielmal genommen werden soll, als eine andere Einheiten enthält, z. E. wenn 24 dreymal genommen werden soll.

Anmerk. Die Zahlen welche multipliciret werden sollen, heißen die **Factoren**, und zwar derjenige, welcher multipliciret werden soll, der **Multiplicandus**, der andere aber, womit multipliciret werden soll, der **Multiplicator**. Die Zahl, welche dadurch gefunden wird, heißt das **Product**. z. E. Hier sind 24 und 3 die Factoren, und zwar kan 24 zum Multiplicandus, 3 zum Multiplicator genommen werden, 72 aber ist das Product.

2) Die Verminderung einer Zahl kann geschehen.

a) Durch das **Subtrahiren**, oder die **Subtraction**, wenn von einer Zahl eine kleinere einmal weggenommen wird, z. E. wenn von 24 drey weggenommen wird.

Anmerk. Die gesuchte Zahl, welche anzeiget, wie viel von der größern Zahl übrig bleibet, heißet die Rest, oder die Differenz, z. E. hier ist der Rest 21.

b) Durch das **Dividiren**, oder die **Division**. Wenn von einer Zahl eine an-

andere so vielmal als möglich ist, abgezogen und dadurch gefunden wird, wie vielmal sie in der ersten enthalten sey, z. E. wenn von 24 drey so vielmal als möglich ist, abgezogen wird, welches achtmal geschehen kan, daher 3 in 24 acht mal enthalten seyn muß.

Anmerk. 1) Die Zahl, von welcher eine andere auf solche Weise abgezogen werden soll, heißt der **Dividendus**, diese Zahl, welche abgezogen werden soll, der **Divisor**, die gesuchte Zahl aber, welche anzeiget, wie vielmal der Divisor in dem Dividendus enthalten sey, wird der **Quotient** genennet.

2) Das Zeichen der Addition ist (+), der Subtraction (—), der Multiplication × oder (.), der Division (:), das Zeichen der Gleichheit zweyer Zahlen oder Größen ist (=), z. E. $2+3$ bedeutet, daß 2 und 3 addiret werden sollen, $5-2$, daß 2 von der 5 subtrahiret werden soll, 2×5 oder 2.5, daß beyde Zahlen mit einander multipliciret und $2:5$, oder auch $\frac{5}{2}$, daß 5 durch 2 dividiret werden solle. $2+5=7$ bedeutet: die Summe von 2 und 5 ist 7.

3) Eine

3) Eine jede Zahl, welche durchs Rechnen gefunden worden, wird überhaupt das **Facit**, bey weitläuftigen Rechnungen aber das **Resultat** genennet.

4) Die vier angezeigeten Arten der Veränderung einer Zahl werden die **vier Species** der Rechenkunst genennet.

Die vier Species in ganzen unbenannten Zahlen.

10. **Wie werden zwey oder mehrere Zahlen addiret?**

1) Es werden die gegebene Posten also unter einander gesetzet, daß Zifern von einerley Ordnung, nemlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, und so weiter unter einander kommen, unter welche ein Strich gezogen wird.

2) Werden die Zifern, die untereinander stehen, und zwar zuerst die Einer, hernach die Zehner, alsdenn die Hunderte, u. s. w. zusammengezählet und die Summe unter den Strich gesetzet.

3) Werden die Zehner, welche aus den zusammengezählten Einern entstehen, so gleich zu den gegebenen Zehnern addiret, eben so werden die Hunderte, welche aus den zusammengezähl-

ten Zehnern entstehen, sogleich zu den gegebenen Hunderten addirt, u. s. w. Die also einzelnen gefundene Summen zusammen genommen, geben die gesuchte Summe aller gegebenen Posten. z. E. Es sollen folgende Zahlen, welche sogleich gehörig unter einander gesetzet sind, addiret werden:

	59027
	8493
	36765
Summe	104285

Die unter dem Strich gesetzte Summe ist hier also gefunden worden: 5 und 3 ist 8 (wie man an den Fingern abzählen kann,) 8 und 7 ist 15, von dieser 15 wird die 5 als ein Einer unter den Strich in der Stelle der Einer gesetzet, die 1 aber wird zu der Ordnung der Zehner addiret, indem man sagt, 1 und 6 ist 7; 7 und 9 ist 16; 16 und 2 ist 18, davon die 8 neben die 5 geschrieben, die 1 aber zu der Ordnung der Hunderte addiret wird. Man hätte eigentlich sagen sollen 10 und 60 ist 70 und 90 ist 160; 160 und 20 ist 180, da aber die 8 doch in die Stelle der Zehner geschrieben worden, wo sie 80 bedeutet, so war es überflüssig, die Zehner als Zehner zu nennen. Eben so werden die Hunderte nur als Einer addiret, da denn die Summe 12 kömt, wovon wieder die 2 in die Stelle der Hunderte gesetzt, die 1 aber

zu

zu der Ordnung der Tausende wieder als Einer betrachtet, ist 24, davon die 4 unter die Tausende gesetzet, die 2 aber zu der Ordnung der Zehntausende addiret wird, deren Summe ist 10, welche beyde Zifern hingeschrieben werden, weil in den Posten keine höhere Zifern mehr da sind. Folglich ist die Summe aller Posten 104285.

Exempel zur Uebung.

46384	39426	759384
32965	5683	364102
78203	42675	483917
54628	9840	529436
212180	97624	2136839

Anmerk. Die beste Probe, ob man richtig addirt habe, ist diese, daß man das gegebene Exempel öfters, sonderlich in verschiedenen Zeiten addiret oder von Jemanden anders nachrechnen läßt. Kömt nun allemal dieselbige Summe, so kann man sich auf die Richtigkeit derselben verlassen. Eben dieses gilt von allen Rechnungen.

II. Wie wird eine Zahl von einer größern subtrahiret?

1) Es werden beyde gegebene Zahlen also untereinander gesetzet, daß die Zifern von einerley Ordnung gerade untereinander zu stehen

kommen, unter beyde Reihen aber wird ein Strich gezogen.

2) Wird jede Zifer der kleinern Zahl von der Zifer, welche in der andern Zahl dieselbige Ordnung hat, weggenommen, und der Rest unter den Strich gesetzt.

3) Wenn die Zifer der kleinern Zahl größer ist als die Zifer derselben Ordnung in der größern Zahl; so wird von der Zifer der nächst höhern Ordnung in der großen Zahl, 1 abgenommen oder geborget, welche 1 in Ansehung der nächst niedrigen Ordnung 10 gilt, folglich wird diese 10 zu den Zifern dieser niedrigen Ordnung addiret, und alsdenn die Subtraction vorgenommen; um aber zu bemerken, daß die Zifer der höhern Ordnung nunmehro 1 weniger gilt, wird über dieselbe ein Punct gemacht. Steht aber in der nächst höhern Ordnung eine 0, so macht man über dieselbe nur einen Punct, und borget alsdenn von der darauf folgenden höhern Ordnung 1 oder 10, worauf die Subtraction vorgenommen werden kann, die 0 aber, über welche geborget worden, gilt nunmehr 9, weil die geborgte 1 in Ansehung der dritten niedrigen Ordnung 100 gilt, folglich, wenn davon wieder 10 genommen werden, für die 0 noch 90 oder 9 bleiben. Eben so gelten mehrere Nullen, über welche geborget worden alle zusammen 9. Die ganze unter den Strich geschriebene Reihe

Zi-

Zifern, giebt endlich den gesuchten Rest. z. E. Es sollen folgende beyde Zahlen von einander subtrahiret werden.

	486˙0˙49
	351762
Rest	134287

Der unter den Strich gesetzte Rest ist hier also gefunden worden; 2 von 9 weggenommen, bleibt 7, (wie man an den Fingern leicht abzählen kann) diese 7 wird unter den Strich gesetzet, 6 kann ich nicht von 4 abziehen, bey der 0 in der höhern Ordnung kann ich nicht borgen, daher wird bey der 6 eins geborget, dieses 1 aber gilt eigentlich hundert, davon wird wieder 10 geborget, folglich bleiben für die Null 90, nun addiret man diese 10 zu der 4, und sagt: 6 von 14 bleibt 8, welche unter den Strich gesetzet wird, ferner 7 von 9 bleibt 2; 1 von 5 (denn bey der 6 ist 1 geborget worden, wie der Punct anzeiget) bleibt 4, 5 von 8 bleibt 3, 3 von 4 bleibt 1, folglich ist der ganze Rest 134287.

Exempel zur Uebung.

5˙3˙29	63˙0˙0˙0	398˙0˙5˙7
436	51394	26589
4893.	11606	371468

Anmerk. Die Probe, ob man richtig subtrahiret habe, ist diese, daß man den gefundenen Rest zu der kleinern Zahl addire, da denn die Summe der größern Zahl gleich seyn muß. z. E. wenn in dem ersten Exempel der Rest 134287 zu 351762 addirt wird, so ist die Summe 486049 welches die größte Zahl ist

12. **Wie wird eine Zahl mit einer andern multipliciret?**

1) Wenn der Multiplicator nur eine Zifer hat: so wird jede einzelne Zifer des Multiplicandus von der Rechten zur Linken, so vielmal genommen, als der Multiplicator Einheiten hat, und jedes solches einzelnes Product unter die Zifer des Multiplicandus gesetzt, daraus es entstanden ist. Kömt aber in solchem Product eine Zifer einer höhern Ordnung, so wird dieselbe zu dem Producte addiret, welches aus der Ziffer der nächst höhern Ordnung im Multiplicandus entsteht. Alle diese einzelne Producte, z. E. es sollen folgende beyde Zahlen mit einander multipliciret werden.

$$\begin{array}{rr} & 3856 \\ & 4 \\ \hline \text{Product} & 15424 \end{array}$$

Das unter den Strich gesetzte Product ist hier also gefunden worden. 4 mal 6 ist 24, von die-

diesem Producte wird die 4 in die Stelle der Einer gesetzet, die 2 aber im Gedächtniß, oder wie man zu reden pflegt, **im Sinne** behalten. Hierauf sagt man 4 mal 5 ist 20, wozu die im Sinne behaltene 2 addiret wird, von dem hiedurch vermehrten Product 22 wird die eine 2 unter die 5 geschrieben, die andere 2 aber im Sinne behalten. Ferner sagt man, 4 mal 8 ist 32, und 2 dazu ist 34, wovon die 4 unter die 8 gesetzet wird, die 3 aber behält man im Sinne. Endlich saget man, 4 mal 3 ist 12 und 3 dazu ist 15, welche Zahl, weilen keine höhere Zifer im Multiplicandus mehr übrig ist, ganz hingeschrieben wird. Folglich ist das gesuchte Product 15424.

2) Wenn der Multiplicator **mehrere Zifern** enthält: so wird zuerst das Product aus der Zifer der niedrigsten Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus gefunden, und unter den Strich geschrieben, hierauf wird auch das Product aus der Zifer der nächst höhern Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus gefunden und unter den Strich geschrieben, aber so, daß die niedrigste Zifer dieses Products gerade unter die andere Zifer des Multiplicators, daraus es entstanden ist, komme. Eben so werden die Producte aus den Zifern der folgenden höhern Ordnungen des Multiplicators in den Multiplicandus gefunden

und unter den Strich geschrieben. Endlich werden alle diese Producte in eine Summe gebracht, welche das gesuchte ganze Product giebt. z. E. Es sollen folgende beyde Zahlen mit einander multipliciret werden:

	4658
	342
	9316
	18632
	13974
Product	1593036

Das unter den untern Strich gesetzte Product ist also gefunden worden. Das Product aus 2 in den Multiplicandus 4658 ist 9316, welches zuerst unter den obern Strich geschrieben worden. Das Product aus 4 in den Multiplicandus ist 18632, welches ebenfalls unter den Strich geschrieben worden, aber so, daß die 2 gerade unter die 4 gekommen, weil man eigentlich nicht hätte sagen sollen 4 mal 8 ist 32, sondern 40 mal 8 ist 320 u. s. w. daher die Stelle der Einer leer bleiben müssen. Eben so ist das Product aus der 3 in den Multiplicandus nämlich 13974 so geschrieben worden, daß die 4 unter die 3 in die Stelle der Hunderte gekommen, weil man eigentlich hätte sagen sollen 300 mal 8 ist 2400 u. s. w. Die Summe aus die-

diesen dreyen einzeln Producten aber, nämlich 1593036, ist das ganze gesuchte Product.

Exempel zur Uebung.

```
   72835
    5364
--------
  291340
 437010
218505
364175
--------
390686940
```

```
  3682
120400
--------
1472800
7364
3682
--------
443312800
```

```
  4380200
   3925==0
-----------
  219010000
  87604
 394218
131406
-----------
171922850000
```

Anmerk. 1) Weil man das Product aus einer Zifer in eine andere nicht sogleich an den Fingern abzählen kan, wie bey dem Addiren und Subtrahiren möglich ist; so hat man diese Producte alle in ein Verzeichniß, welches das **Ein mal Eins** genennet wird, gebracht. Es kan dassel-

 be

be am bequemlichsten im folgenden Täflein vorgestellet werden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dieses Täflein ist also verfertiget worden. Es sind die neun Zifern in die oberste Reihe nach der Breite des Papiers und auch in die vorderste Reihe nach der Länge des Papiers herunter geschrieben worden. Hierauf ist jede Zahl in der vordersten 8 mal nach einander zu sich addiret und in die folgenden Reihen oder Abtheilungen geschrieben worden. z. E. 2 und 2 ist 4, diese 4 ist neben die 2 der vordersten Reihe gesetzet, 4 und 2 ist 6, diese 6 stehet neben der 4, 6 und 2 ist 8, diese 8 stehet neben der 6, u. s. w. Der Gebrauch dieses Täfleins bestehet darinnen, daß, wenn

wenn man das Product aus einer Zifer in eine andere, z. E. aus 6 in 8 wissen will, man die eine, als hier 6, nur in der vordersten, die andere, als hier 8, in der obersten Reihe aufsuche, alsdenn aber mit einem Finger in die Reihe, die sich mit der 6 anfängt nach der Breite des Papiers, mit dem Finger aber in der Reihe, die sich mit der 8 anfängt, nach der Länge des Papiers fortgehet, da wo nun beyde Finger zusammentreffen, oder in dem gemeinschaftlichen Fache beyder Reihen, stehet 48, dieses ist das gesuchte Product aus 6 in 8.

2) In den beyden letzten gegebenen Exempeln sind wegen der in den Factoren vorkommenden Nullen theils diese Factoren, theils ihre einzelne Producte sogleich so gesetzet worden, daß man nicht nöthig hatte eine Menge überflüssiger Nullen zu machen, ohne doch in den Stellen der Zifern zu fehlen.

13. Wie wird eine Zahl durch eine andere dividiret?

1) Wenn der Divisor **nur eine Zifer** hat: so wird zuerst gesuchet, wie vielmal der Divisor in der ersten, oder wenn diese kleiner ist, in den beyden erstern Zifern des Dividendus von der Linken zur Rechten enthalten sey; das ist, es wird

vermittelst des Ein mal Eins eine Zahl ausfündig gemacht, welche mit dem Divisor multipliciret, ein Product giebt, welches so groß oder nächst kleiner ist als die erste oder beyden ersten des Dividendus. Diese Zahl, welche der erste Theil des Quotienten ist, wird hinter einem Strich neben dem Dividendus, das Product aber unter die erste oder beyden ersten Zifern des Dividendus geschrieben und von solchen abgezogen. Hierauf wird die Zifer der nächst niedrigen Ordnung im Dividendus nebst solchen Rest, wenn dergleichen da ist, geschrieben, oder wie man zu reden pflegt, **herunter gehohlt**, und aufs neue gefunden, wie vielmal der Divisor in dieser Zahl enthalten sey und der Quotient hinter den vorigen Quotienten geschrieben, worauf derselbe wieder mit dem Divisor multipliciret und das Product subtrahiret wird. Eben so wird mit den folgenden Zifern des Dividendus verfahren. Alle einzelne Theile des Quotienten hinter dem Strich zusammen genommen geben den gesuchten ganzen Quotienten. z. E. Es soll 5274 durch 2 dividiret werden: so ist die Rechnung folgende:

2)

```
2) 5274|2637
   4   |
   ――
   12
   12
   ――
    7
    6
   ――
    14
    14
   ――
     0
```

Der Quotient 2637, welcher anzeiget, daß die 2 in 5274 2637 mal enthalten sey, ist hier also gefunden worden: 2 ist in 5 zweymal enthalten, denn nach dem Einmal Eins ist 2 mal 2 viere, welches nächst kleiner ist als 5. Diese 2 ist als der erste Theil des Quotienten hinter dem Strich, das Product 4 aus 2 in dem Divisor aber unter die 5 geschrieben und von derselben subtrahiret worden. Neben den Rest 1 ist die folgende Zifer des Dividendus, nämlich 2, geschrieben worden, welche mit dem Rest 1 zusammen 12 machet. In dieser 12 ist der Divisor 6 mal enthalten, denn 2 mal 6 ist 12; folglich ist die 6 hinter den Strich neben die 2, das Product 12 aber unter die 12 gesetzet worden. Da nun kein Rest bleibet, so ist sogleich die 7 herunter gehohlet worden, in welcher der Divisor 3 mal enthalten ist, folglich ist die 3 hinter den Strich, und das Product aus 3 in den Di-

vi-

visor, nämlich 6 unter die 7 geschrieben und von derselben subtrahiret worden. Endlich ist die 4 herunter gehohlet worden, welche mit dem vorigen Rest 14 machet. In 14 ist aber der Divisor 7 mal enthalten, folglich ist der ganze Quotient 2637.

2) Wenn der Divisor **mehrere Zifern** enthält, so suchet man nur, wie vielmal die erste Zifer des Divisors zur Linken in der ersten oder den beyden ersten Zifern des Dividendus enthalten sey, und nimt an, weil diese erste Zifer des Divisors die größte in derselben ist, daß der ganze Divisor eben so vielmal in den ersten Zifern des Dividendus enthalten sey, daher man solche gefundene Zahl hinter den Strich schreibet. Hierauf wird dieser gefundene erste Theil des Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliciret und das Prooduct von den ersten Zifern des Dividendus subtrahiret. Solte dieses nicht angehen, so wird der Quotient so lange um 1 vermindert, bis man das Product aus demselben in den Divisor subtrahiren kann. Neben den Rest wird die nächstfolgende Zahl des Dividendus geschrieben, und wieder gesucht, wie vielmal in der ganzen Zahl die erste Zifer des Divisors enthalten sey, u. s. w. Die einzelnen Quotienten zusammen genommen, geben den gesuchten ganzen Quotienten, z. E. es soll 75328 durch 32 dividiret werden, so ist die Rechnung folgende:

32)

```
32) 75328 | 2354
    64    |
    ---
    113
     96
    ---
    172
    160
    ---
     128
     128
   ------
      0
```

Der Quotient 2354 ist hier also gefunden worden: 3, als die erste Zifer des Divisors, ist in 7 zwey mal enthalten, folglich ist 2 hinter den Strich, und das Product aus 2 in 32, nämlich 64, unter die beyden ersten Zifern des Dividendus, nämlich 75, geschrieben und subtrahiret worden. Neben den Rest ist die folgende Zifer des Dividendus, nämlich 3 geschrieben worden. Da nun 3 in 11 dreymal enthalten ist, so ist 3 der zweyte Theil des Quotienten, das Product aus 3 in 32, nemlich 96, ist hierauf von 113 subtrahiret worden.

Exempel zur Uebung.

```
6)350429|58404. . 584)294608173|504466
  30                    2920
  --                    ----
   50                    2608
   48                    2336
   --                    ----
    24                    2721
    24                    2336
    --                    ----
     29                    3857
     24                    3504
     --                    ----
     (5                     3533
                            3504
                            ----
                            (29
```

Anmerk. 1) Wenn nach der letzten Subtraction noch ein Rest bleibet, folglich der Divisor in den Dividendus nicht völlig aufgehet, so wird solcher Rest, wie in beyden vorhergehenden Exempeln zu sehen, in eine Klammer eingeschlossen.

2) Wenn der Dividendus sowol als der Divisor am Ende Nullen haben, so können von beyden gleich viele weggestrichen werden, worauf nur die übrig gebliebene Zahlen in einander dividiret werden. Hat der Divisor allein Nullen, so können dieselben ebenfalls weggestrichen und bey der Division von dem Dividendus eben so viele Zifern am Ende weggelassen werden. In bey-

beyden Fällen aber müssen die weggestrichenen Nullen oder ausgelassenen Zifern des Dividendus mit zum Reste gesetzet werden. z. E. Es soll 486700 mit 500, ferner 563947 mit 24000 dividiret werden. Die Rechnung ist folgende:

```
5øø) 4867øø|973        24øøø) 563947|23
     45                       48
     --                       --
      36                       83
      35                       72
      --                       --
       17                     (11947
       15
       --
      (200
```

3) Wenn der Quotient mit dem Divisor multipliciret wird, so gibt das Product, wenn dazu vorhero der bey der Division gebliebene Rest addiret wird, den Dividendus, und wenn ein Product mit dem einen Factor dividiret wird, so giebt der Quotient den andern Factor. Daher dienen die Multiplication und Division einander gegenseitig zur Probe. z. E. Wenn in dem vorhergehenden zweyten Exempel der Quotient 504466 mit dem Divisor 584 multipliciret und der Rest 29 zu dem Producte addiret worden; so erhält man den Dividendus 294608173. Jmgleichen wenn in dem obigen letzten Multiplications = Exempel das Product

171922850000 mit dem einen Factor 39250 dividiret wird, so ist der Quotient 4380200 dem andern Factor gleich.

4) Die Multiplication sowol als Division können auf folgende Weise ohne Ein mal Eins verrichtet werden. Es soll z. E. 85426 mit 4952 multipliciret werden, so wird der Multiplicandus 85426 zuerst doppelt genommen, oder zu sich selbst addiret, dadurch erhält man 170852, welches eben so viel ist, als wenn man ihn mit 2 multipliciret hätte; hierauf wird demselben eine 0 angehängt, wodurch er zehn mal größer wird, und von 854260 die Hälfte genommen, diese ist 427130, welches eben so viel ist als wenn man den Multiplicandus mit 5 multipliciret hätte. Ferner wird der Multiplicandus von seinem Zehnfachen oder 854260 subtrahiret, der Rest 768834 giebt das Neunfache des Multiplicandus. Endlich wird das vorhin gefundene Doppelte des Multiplicandus 170852 nochmals verdoppelt, oder zu sich selbst addiret, wodurch man das Einfache des Multiplicandus, nämlich 341704, erhält. Diese vier gefundene Zahlen werden gehörig unter einander gesetzet und addiret. Die Summe giebt das gesuchte Product, wie folgende Rechnung zeiget:

Das

Das Zweyfache war		170852
Das Fünffache	-	427130
Das Neunfache	-	768834
Das Vierfache	-	341704
Die Summe		423029552

Imgleichen wenn 38315736923 durch 46389 dividiret werden soll; so findet man von diesem Divisor wie vorhin, das Doppelte 92778, das Dreyfache 139167, das Vierfache 18556, das Fünffache 231945, das Sechsfache 278334, das Siebenfache 324723, das Achtfache 371112, und das Neunfache 417501. Hierauf suchet man unter die Zahlen diejenige, welche nächst kleiner ist als die sechs ersten Zahlen des Dividendus, hier 371112, welche Zahl das Achtfache des Divisors ist, folglich ist der erste Theil des Quotienten 8, die Zahl 371112 wird hierauf von den sechs ersten Zahlen des Dividendus abgezogen: ferner die 3 herunter gehohlt und wieder unter den vorhin gefundenen Zahlen diejenige, welche der Zahl 120453 am nächsten komt, hier 92770, gesuchet, welche das Zweyfache ist, folglich ist der andere Theil des Quotienten 2. Eben so werden die übrigen Theile des Quotienten gefunden, wie folgende Rechnung zeiget:

Das

	38315736923	825966
Das Achtfache	371112	
	120453	
Das Zweyfache	92778	
	276756	
Das Fünffache	231945	
	448119	
Das Neunfache	417501	
	306182	
Das Sechsfache	278334	
	278483	
Das Sechsfache	278334	
	(149	

Die benannten Zahlen.

14. Was ist von den benannten Zahlen zu bemerken?

Es werden dieselben eben so wie die unbenannten addiret, subtrahiret, multipliciret und dividiret, nur ist dabey zu bemerken, daß hier gemeiniglich verschiedene Einheiten vorkommen, daher man wissen muß, wie viel kleinere Einheiten eine größere enthält, auch die Zahlen von einerley Einheit gehören unter einander, wie aus folgendem Exempel deutlich erhellet.

Das Addiren.

Es sollen folgende Posten, die man sogleich gehörig unter einander, nämlich Thaler unter Thaler, Schillinge unter Schillinge, Pfenninge unter Pfenninge gesetzt hat, addiret werden:

Rthlr.		Schill.		Pf.
246	--	18	--	4
520	--	8	--	7
364	--	12	--	8
472	--	20	--	3
750	--	14	--	6
2354		18		4

Die unter dem Strich gesetzte Summe ist folgender maßen gefunden. Es ist bekannt, daß ein Thaler 28 Schillinge, ein Schilling 12

Pfen-

Pfenninge enthalte. Dies voraus gesetzet, sind erstlich alle Pfenninge, eben so wie unbenannte Zahlen in eine Summe gebracht. Die Summe war 28. Da nun diese schon Schillinge beträgt, oder einige solche größere Einheiten, deren jede aus 12 kleinern bestehet, enthält: so wurde sie durch 12 dividiret. Der Quotient 2 zeigt an, wie viel Schillinge, der Rest 4 aber wie viel Pfenninge über 2 Schillinge in 28 Pfenninge enthalten seyn. Die 4 wurde daher unter die Pfenninge geschrieben, die 2 aber zu den Schillingen addiret, deren Summe 74 betrug. Da nun diese schon Thaler, oder größere Einheiten, deren jede aus 28 kleinern bestehet, enthält; so wurde sie durch 28 dividiret. Der Quotient 2 zeigt an, wie viel Thaler, der Rest 18 aber wie viel Schillinge über 2 Thaler in in 74 enthalten seyn. Die 18 wurde daher unter die Schillinge geschrieben, die 2 aber zu den Thalern addiret, deren Summe 2354 machet.

Es kann diese Summe noch kürzer gefunden werden, wenn man sogleich bey der Addition der Zahlen einer niedrigen Ordnung, entweder durch einen Punkt, oder durch Einbeugung des Fingers bemerket, wie oft eine Einheit der höhern Ordnung vorkomme. Z. E. indem man sagt 6 und 3 ist 9 und 8 ist 17; so sieht man gleich, daß in 17 Pfenningen ein Schilling und 5 Pfenninge enthalten seyn; daher macht man bey der 12 in der Ordnung der Schillinge einen Punkt, oder schlägt den Finger in der linken Hand ein, die 5 aber wird zu der 7 addiret, welches wieder einen Schilling macht, daher entweder bey der 8 in der Ordnung der Schillinge wieder ein Punkt gemacht, oder noch ein Finger in der linken Hand eingeschlagen wird. Die noch übrige 4 wird hierauf unter den Strich gesetzt; die beyden Puncte aber, oder eingeschlagene Finger zeigen an, daß zu den Schillingen 2 zu addiren sey, oder beym Gebrauch der Punkte, daß anstatt 12 in der Ordnung der

Schillinge 13, anstatt 8 wiederum eins mehr oder 9 zu sagen seyn. Eben so verfährt man bey der Addition der Schillinge, denn so oft hier 28 vorkommt, wird ein Punkt in der Ordnung der Thaler gesetzt, oder ein Finger eingebogen.

Exempel zur Uebung.

Cent.		℔		Loth		Quent.
24	--	57	--	12	--	2
53	--	24	--	30	--	3
46	--	87	--	16	--	1
37	--	59	--	4	--	3
64	--	13	--	25	--	2
226		22		25		3

Bey diesem Exempel ist zu bemerken, daß 4 Quentchen ein Loth, 32 Loth ein Pfund, 110 Pfund ein Centner ausmachen.

Das Subtrahiren.

Es sollen folgende beyde Zahlen von einander subtrahiret werden:

Rthl.		Schill.		Pf.
325	- -	4	- -	6
262	- -	10	- -	8
62	- -	21	- -	10

Dies ist also gefunden worden: zuerst sollten 8 Pfenninge von 6 abgezogen werden. Es wurde also von den Schillingen ein Schilling geborget; ein Schilling beträgt 12 Pfenninge, folglich wurden die 12 geborgten Pfenninge zu den 6 addiret, also von der Summe 18, die untenstehende 8 Pfenninge abgezogen, da denn der Rest 10 beträgt. Eben so wurden von den Thalern einer, oder 28 Schillinge geborget, und aus der Summe 31 die untenstehende 10 subtratrahiret. Endlich aus 324 Thalern die unten-stehende 262.

Es kann durch eine solche Subtraction insonderheit das Alter eines Menschen gefunden werden. Z. E. es sey jemand gebohren im Jahr 1710 den 20 Junii Abends um 4 Uhr, und gestorben 1764 den 16 Nov. Morgens um 8 Uhr; so wird sein Alter also berechnet:

1764 Jahr	11 Monat	16 Täge	8 Stunden
1710 --	6 --	20 --	16 --
54 Jahr	4 Monat	26 Täge	16 Stunden

In der obern Reihe ist die Zeit des Todes, und darin 11 Monat angesetzet worden, weil der November der eilfte Monat im Jahr ist; in der untern Reihe aber ist die Zeit der Geburt, und darin 6 Monat, weil der Junius der sechste Monat im Jahre ist, imgleichen 16 Stunden gesetzet worden, weil der Tag von der Mitternacht anfängt, und von da bis 4 Uhr Abends 16 Stunden verflossen sind. Bey der Subtraction der untern Reihe muste ein Tag oder 24 Stunden geborget, und diese zu den 8 Stunden addiret, von der Summe 32 aber 16 abgezogen werden. Ferner da 20 Tage auch nicht von 15 können abgezogen werden, so mußte ein Monat, welcher hier 31 Tage enthält, denn der vorhergehende Monat, welcher allemal genommen werden muß, ist hier der October, welcher 31 Tage hat, geborget werden. Diese 31 Tage zu 15 addiret, geben 46 Tage, wovon die 20 Tage unten abgezogen sind, da also 26 Tage, ge, oder weil 7 Tâge eine Woche ausmachen, 3 Wochen und 5 Tâge übrig bleiben. Folglich ist das gesuchte Alter 54 Jahr, 4 Monat, 3 Wochen, 5 Tâge und 16 Stunden.

Das Multipliciren.

Es sollen 37 Rthl. 25 Schillinge, 8 Pfenninge mit 32 multipliciret werden. Erstlich werden 37 Thaler durch 28 multipliciret, und zum Producte addiret 25. Ferner werden die hiedurch gefundenen 1061 Schillinge mit 12 multipliciret und 8 dazu addiret. Dies Product wird nun durch 32 multipliciret; das Product 407680 wird mit 12 und der Quotient mit 24 divi-

dividiret, um diese Anzahl der Pfenninge wiederum in Schillinge und Thaler zu verwandeln. Wo also herauskommen wird: 1213 Thaler, 19 Schill. 4 Pf. Die Rechnung siehet so aus:

37 Rthlr.

37 Rthlr. 25 Schill. 8 Pf.
28
296
74
25
1061 Schill.
12
2122
1061
8
12740 Pfenninge
32
25480
38220

28 |
12) 407680 | 33973 | 1213 Thaler.
36 | 28
47 | 59
36 | 56
116 | 37
108 | 28
88 | 93
84 | 84
40 | 9 Schillinge.
36
(4 Pfen.

Exempel zur Uebung.

Es sollen 462 Centner, 36 ℔, 12 Loth, 3 Quentchen mit 247 multipliciret werden. Das Product ist 114188 Centner, 69 ℔, 5 Loth, 1 Quentchen.

Das Dividiren.

Es sollen 324 Thaler und 21 Schillinge unter 14 getheilet werden. Man verwandle sie wie oben in Pfenninge, die also gefundene Zahl 109116 theile man durch 14, den Quotienten durch 12, und den daraus entstandenen Quotienten durch 28, da wird heraus kommen für einem jeden 23 Thaler, 5 Schillinge, 6 Pfenninge. Die Rechnung ist folgende:

324 Rthl.

```
        324 Rthl. 21 Schill. -- Pf.
         28
       -----
       2592
       648
         21
       -----
       9093
         12
     --------
      18186
      9093        12 |    28 |
    --------     ----|   ----|
14) 109116 |7794 |   649 | 23 Thaler
      98   | 72  |    56 |
     ----  |---- |   ----|
      111  | 59  |    89 |
       98  | 48  |    84 |
     ----  |---- |   ----|
      131  | 114 |     5 | Schill.
      126  | 108 |       |
     ----  |---- |       |
        56 |   6 | Pf.   |
        56 |     |       |
     ----- |     |       |
```

Exem.

Exempel zur Uebung.

Es sollen 6312 Centner, 42 ℔, 18 Loth, 2 Quentchen durch 68 dividiret werden. Der Quotient ist 92 Centner, 91 ℔, 6 Loth, 3 Quentchen.

Mathe-

Mathematischer Vorübungen

ersten Theils

Zweytes Capitel

Brüche und Proportions-Regeln.

1. Wie entsteht ein Bruch?

Ein Bruch entstehet, wenn eine ganze Einheit in gleiche Theile getheilet, und eine gewisse Anzahl oder Menge solcher Theile bestimmet wird.

Anmerk. 1) Es werden also zu einem Bruche allemal zwey Zahlen erfordert, davon die eine anzeiget, in wie viel gleiche Theile die ganze Einheit eingetheilet worden, die andere aber eine gewisse Menge solcher Theile bestimmet. Die erste heißet der **Nenner**, die andere der **Zähler** des Bruchs. Dieser wird im Schreiben oben, jener unter gesetzet, zwischen beyde aber ein Queerstrich gemacht, z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$. Diese Brüche werden also ausgesprochen: ein halb, zwey Drittheil, drey Viertheil, vier Fünftheil, drey Zehntheil.

2) Die Zahl, welche bey einer Division ganzer Zahlen am Ende übrig bleibet, kann allemal mit dem Divisor in einen Bruch gesetzet werden, darinn der Rest der Zähler und der Divisor der Nenner ist, welcher Bruch dem Quotienten angehänget wird, z. E. wenn 384 mit 5 dividiret wird, so ist der Quotient 76, es bleibt aber 4 übrig, diese mit der 5 in einen Bruch gesetzet, giebet $\frac{4}{5}$; folglich ist der Quotient $76\frac{4}{5}$.

3. Wie können die Brüche eingetheilet werden?

1) In **ächte**, oder **eigentliche**, und **unächte**, oder **uneigentliche** Brüche. Die **erstern** haben einen Zähler der **kleiner** ist als ihr Nenner; die andern haben einen Zähler der **größer** ist als ihr Nenner, und enthalten also eine oder mehrere ganze Einheiten. z. E. $\frac{2}{3}$ ist ein ächter, $\frac{5}{4}$ aber ein unächter Bruch.

2) In **reine** und **gemischte Brüche**. Die erstern haben keine ganze Zahlen vor sich, den andern sind ganzen Zahlen angehängt. z. E. $\frac{3}{4}$ ist ein reiner, $4\frac{1}{2}$ aber ein gemischter Bruch.

3) In **einfache** und **doppelte** oder **gebrochene Brüche**. In den erstern sind der **Zähler** und **Nenner** ganze, in den andern aber

aber gebrochene Zahlen. z. E. $\frac{1}{2}$ ist ein einfacher Bruch, $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ ein halb Viertheil aber, imgleichen $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ ein halb von drey Viertheil, ein doppelter; denn in dem vorletzten ist der Zähler, in dem letzten aber sowol der Zähler als Nenner ein Bruch.

Anmerk. Diejenigen Brüche, deren Nenner eine zehn oder ein Product aus zehnen ist, z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{12}{100}$ werden Decimalbrüche genennet. Es werden dieselben gemeiniglich also geschrieben, daß man bloß die Zähler derselben in gehöriger Ordnung hinter ein Comma setzet, vor welches entweder eine Null, oder wenn es gemischte Brüche sind, die ganze Zahlen, dazu sie gehören, geschrieben werden, z. E. $\frac{3}{10}$ wird also geschrieben 0,3, $\frac{12}{100}$ also 0,12; 4,632 ist so viel $4\frac{632}{1000}$ oder als 4 ganze $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{100}$ und $\frac{2}{1000}$. Diese Decimalbrüche sind bey den Mathematikern sehr gebräuchlich, und haben den Vortheil, daß man mit denselben als Ganzen rechnen kann.

3. **Wie werden die Brüche, die denselbigen Werth haben, in andere verwandelt?**

Ein Bruch wird überhaupt in einen andern Bruch, welcher denselben Werth hat, verwandelt, wenn man den Zähler und den Nenner desselben durch dieselbige Zahl multipliciret, oder dividiret, z. E. wenn der Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 2 multipliciret wird, so entstehet daraus der Bruch $\frac{6}{8}$, welcher eben so viel gilt als $\frac{3}{4}$, ob derselbe gleich mit andern Ziffern ausgedrückt ist. Insonderheit geschiehet dieses 1) durch die **Abbreviation** oder **Aufheben** der Brüche, wenn man einen Bruch, ohne Veränderung seines Werths, durch einen kleinern Zähler oder Nenner ausdrücket. 2) durch die **Resolution** der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werthes in einen andern verwandelt, dessen Nenner gegeben ist, und zwar wird dadurch gemeiniglich diejenige Verwandelung eines benannten Bruchs verstanden, durch welche derselbe einen Nenner bekömt, der eine im gemeinen Leben gewöhnliche Eintheilung der ganzen Einheit, davon der Bruch genommen ist, anzeiget, oder dieselbe in solche Theile eintheilet, welche eine besondere Benennung haben, z. E. wenn man einen Bruch von einem Thaler in einen andern verwandeln soll, dessen Nenner 28 ist, folglich finden soll, wie viel derselbe Bruch an Schillingen enthalte. 3) Wenn man mehrere Brüche **unter gleiche Benennungen bringet**, oder sie so verwandelt, daß sie alle ohne Veränderung ihres Werths gleiche Nenner bekommen, und 4) durch

durch das **Einrichten** gemischter Brüche, wenn man selbe in unächte reine Brüche verwandelt.

Anmerk. Wenn der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multipliciret wird, der Zähler aber unverändert bleibet, so wird der Bruch um so vielmal kleiner als diese Zahl Einheiten enthält; wird aber der Nenner durch eine ganze Zahl, bey unveränderten Zähler, dividiret, so wird der Bruch um so vielmal größer, als diese Zahl Einheiten enthält, z. E. $\frac{2}{6}$ ist nur halb so viel als $\frac{2}{3}$, weil der Nenner des letzten Bruchs mit 2 multipliciret worden. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multipliciret wird, der Nenner aber unverändert bleibt, so wird der Bruch um so viel mal größer als diese Zahl Einheiten enthält, wird aber der Zähler mit einer ganzen Zahl bey unveränderten Nenner dividiret, so wird der Bruch um so viel kleiner als diese Zahl Einheiten enthält, z. E. $\frac{4}{8}$ ist noch einmal so viel als $\frac{2}{8}$, weil der Zähler dieses letztens Bruchs mit 2 multipliciret worden.

4. **Wie wird ein Bruch abbreviirt oder aufgehoben?**

Es wird so wol der Zähler als Nenner eines Bruchs durch dieselbe Zahl dividiret. Z. E. Es soll der Bruch $\frac{36}{48}$ aufgehoben werden, so wird er durch 12 dividiret, wodurch man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhält, welcher eben so viel gilt als $\frac{36}{48}$.

Anmerk. 1) Die Zahl, durch welche ein Bruch aufgehoben werden kann, muß allemal eine ungerade Zahl seyn, wenn der Zähler und Nenner oder einer von beyden ungerade Zahlen sind, z. E. $\frac{15}{21}$ kann nur durch 3 aufgehoben werden, $\frac{27}{36}$ durch 9, $\frac{55}{132}$ durch 11, $\frac{9}{15}$ durch 3. Sind aber der Zähler und Nenner gerade Zahlen, so können sie zuweilen durch ungerade Zahlen, allezeit durch gerade, wenigstens durch 2, aufgehoben werden. Z. E. $\frac{32}{40}$ kann nur durch 8 aufgehoben werden, $\frac{12}{18}$ durch 3 und 6. Endigen sie sich in 0 oder 5, so können sie allemal durch 5 aufgehoben werden, z. E. $\frac{15}{60}$ kann durch 5 aufgehoben werden.

2) Die Zahl, durch welche ein Bruch sogleich in den möglichst kleinsten von gleichem Wehrte verwandelt werden kann, wird gefunden, wenn man den Zähler in den Nenner, den Rest wieder in den Zähler, den neuen Rest wieder in den vorhergehenden, u. s. w. dividiret, bis eine solche Division aufgehet. Der letzte Divisor ist der gemeine größte Theiler des Bruchs, bleibt aber endlich 1 übrig, so

so kann der Bruch gar nicht aufgehoben werden, z. E. wenn $\frac{28}{512}$ aufgehoben werden soll, so wird 512 durch 28 dividiret, da nun 4 in 8 aufgehet, so kann auch der gegebene Bruch durch 4 aufgehoben werden.

5. Wie wird ein Bruch resolviret?

Es wird 1) der Zähler des gegebenen Bruches mit dem gegebenen Nenner multipliciret, 2) wird das Product durch den Nenner des Bruchs dividiret. Der Quotient giebt den Zähler eines Bruches, welcher den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruche gleich ist. Z. E. es soll $\frac{2}{3}$ in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 28 ist. Oder man will wissen, wie viel $\frac{2}{3}$ eines Thalers an Schillinge betrage; so wird der Zähler dnrch 28 multipliciret: das Product 56 demnächst durch den vorigen Nenner 3 getheilet; der Quotient $18\frac{2}{3}$ wird die Zahl in Schillingen ausdrücken. Wenn man nun den Zähler dieses Bruches wieder mit 12 multiplicirt und durch 3 theilt; so wird der Quotient 8 zeigen, was $\frac{2}{3}$ eines Schillings an Hellern betragen. Eben so findet man, daß $\frac{3}{4}$ Thaler 21 Schillinge austragen. Auf die nämliche Art sind $\frac{4}{7}$ eines Centners $62\frac{6}{7}$ Pfund $27\frac{3}{7}$ Loth.

 6. Wie

6. Wie werden zwey oder mehrere Brüche unter einerley Benennung gebracht?

1) Wenn nur zwey Brüche gegeben werden, so wird eines jeden Zähler und Nenner mit des andern Nenner multipliciret, z. E. es sollen die Brüche $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so wird des ersten Bruchs Zähler und Nenner mit 4, des andern Bruchs Zähler und Nenner aber durch 3 multipliciret, dadurch erhält man die Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$, welche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten als $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$. 2) Wenn mehrere Brüche gegeben werden, so wird entweder 1) eines jeden Zähler und Nenner mit dem Product aus allen Nennern der übrigen Brüche multipliciret, z. E. es sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so wird des ersten Bruchs Zähler und Nenner durch 15, des andern Bruchs Zähler und Nenner durch 10, des dritten Bruchs Zähler und Nenner durch 6 multipliciret, wodurch man $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$ und $\frac{12}{30}$ erhält, welche Brüche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten als die gegebene. Oder 2) werden alle Nenner der gegebenen Brüche in einander multipliciret, dieses Product giebt **den gemeinschaftlichen Nenner**, derselbe wird mit allen Nennern der gegebenen Brüche dividiret, die hiedurch gefundene Quotienten aber werden mit allen Zählern der gegebenen Brüche multipliciret. Die hierdurch gefun-

fundenen Producte sind die Zähler zu den Brüchen, welche alle den gemeinschaftlichen Nenner haben, und dem gegebenen gleich sind. z. E. es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so ist die Rechnung folgende:

210		
105 $\frac{1}{2}$	105	2
		3
70 $\frac{2}{3}$	140	6
		5
42 $\frac{3}{5}$	126	30
		7
30 $\frac{2}{7}$	60	210

Der gemeinschaftliche Nenner, welcher aus dem Producte der Nenner aller gegebenen Brüche in einander entstanden ist, ist hier 210, die Quotienten aus allen Nennern in diesem gemeinschaftlichen Nenner sind 105, 70, 42, 30, die Producte aus allen Zählern in diese Quotienten sind 105, 140, 126, 60, folglich sind $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{126}{210}$, $\frac{60}{210}$ die Brüche, welche anstatt der gegebenen gesetzt werden können, und alle gleiche Nenner haben.

7. **Wie werden gemischte Brüche eingerichtet?**

Es wird die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, welcher derselben angehängt ist, multiplitipliciret, und zu dem Producte der Zähler dieses Bruches addiret. Die Summe ist der Zähler zu einem unächten reinen Bruche, welcher den Nenner des gegebenen Bruches zu seinen Nenner hat, und dem gegebenen gemischten Bruche gleich ist. z. E. Es soll der Bruch $2\frac{3}{4}$ eingerichtet werden, so wird 2 mit 4 multipliciret und zu dem Producte 8 der Zähler 3 addiret, die Summe 11 ist der Zähler eines Bruchs, welcher 4 zum Nenner hat, folglich $\frac{11}{4}$ ist. Dieser unächte reine Bruch aber gilt eben so viel als der gemischte $2\frac{3}{4}$.

Anmerk. 1) Es folget hieraus, daß ein unächter Bruch wieder in einen vermischten verwandelt werden könne, wenn man mit dem Nenner desselben seinen Zähler dividiret, und den Rest zu dem Zähler eines Bruchs macht, welcher denselben Nenner hat und dem gefundenen Quotienten angehänget wird. Dieser Quotient mit solchem Bruche giebet einen gemischten Bruch, welcher dem unächten gleich ist, z. E. es soll $\frac{21}{4}$ in einen gemischten Bruch verwandelt werden, so wird 21 durch 4 dividiret, aus dem Rest 1 und dem Nenner 4 der Bruch $\frac{1}{4}$ gemacht, und solcher dem Quotienten 5 angehänget, da denn $5\frac{1}{4}$ eben so viel als $\frac{21}{4}$ ist.

2) Die

3) **Die gebrochenen Brüche** können in einfache verwandelt werden, wenn man die Zähler der beyden Brüche, daraus ein gebrochener Bruch enstehet, und auch die Nenner derselben mit einander multipliciret, und das erste Product zum Zähler, das andere aber zum Nenner eines einfachen Bruches machet, welcher dem gebrochenen gleich ist, z. E. $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{4}$ ist gleich $\frac{1}{8}$, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$ ist gleich $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$, $\frac{2\frac{1}{2}}{4}$ oder $\frac{\frac{5}{2}}{4}$ oder $\frac{5}{2}$ von $\frac{1}{4}$ ist gleich $\frac{5}{8}$, $\frac{3\frac{1}{4}}{4\frac{2}{3}}$ oder $\frac{13}{4}$ von $\frac{14}{3}$ ist gleich $\frac{182}{12}$ oder $15\frac{1}{6}$.

8. Wie wird eine ganze Zahl in einem Bruch verwandelt?

Es wird die gegebene ganze Zahl zum Zähler eines Bruchs gemacht, dessen Nenner 1 ist. Dieser Bruch ist der gegebenen ganzen Zahl gleich. z. E. aus der 3 wird der Bruch $\frac{3}{1}$ gemachet, welcher eben so viel als 3 gilt. Ist der Nenner den dieser Bruch haben soll, gegeben, so wird die gegebene ganze Zahl mit diesem Nenner multipliciret, das Product giebt den Zähler zu einem Bruche, welcher den gegebenen Nenner hat, und der gegebenen ganzen Zahl gleich ist. z. E. Es soll 3 in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 2 ist, so wird 3 mit 2 multiplitipliciret, das Product giebt den Zähler 6 zu dem Bruche $\frac{6}{2}$, welcher den gegebenen Nenner hat und eben so viel als 3 gilt; denn es ist dieses eben so viel als ob 3 zuerst wie vorhin in den Bruch $\frac{3}{2}$ verwandelt, und hierauf der Zähler und Nenner dieses Bruchs durch dieselbe Zahl 2 multipliciret worden wäre. Insonderheit geschiehet dieses durch die **Reduction**, wenn eine ganze benannte Zahl in einen Bruch einer benannten Einheit von einer höhern Ordnung verwandelt wird.

Anmerk. 1) Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner einander gleich, oder dieselben Zahlen sind, z. E. $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{5}$ ist allemal so viel als 1, ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, folglich ein ächter Bruch, z. E. $\frac{2}{3}$ ist weniger als 1, ein Bruch aber, dessen Zähler größer ist als der Nenner, folglich ein unächter Bruch, z. E. $\frac{4}{3}$ ist mehr als 1.

2) Eine jede ganze Zahl, imgleichen auch eine jede gebrochene, kan durch unzähliche Brüche verschiedentlich ausgedrückt werden, z. E. 2 ist so viel als $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$ u. s. w. $\frac{1}{2}$ ist so viel als $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ u. s. w.

Die

Die vier Species in Brüchen.

9. Wie werden zwey oder mehrere Brüche addiret?

1) Wenn die gegebenen Brüche **gleiche Nenner** haben: so werden bloß die Zähler addiret, und die Summe wird zum Zähler eines Bruches gemacht, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat. Dieser Bruch ist der gesuchten Summe aller gegebenen Brüche gleich, z. E. es sollen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{7}$ addiret werden: so ist die Summe $\frac{11}{7}$, oder wenn dieser unächte Bruch in einen gemischten verwandelt wird $1\frac{4}{7}$.

2) Wenn die gegebenen Brüche **verschiedene Nenner** haben: so werden sie erst alle unter einerley Benennung gebracht, worauf die neuen Zähler derselben, wie vorhin, addiret werden, und diese Summe zum Zähler eines Bruchs gemacht wird, welche den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat. z. E. es sollen $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{8}$ addiret werden, so ist die Rechnung folgende:

	168
$56\frac{2}{3}$	112
$28\frac{5}{6}$	140
$24\frac{2}{7}$	48
$21\frac{3}{8}$	63

$$\frac{363}{168} = 2\frac{27}{168} = 2\frac{9}{56}.$$

Exempel zur Uebung.

Es sollen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$ addiret werden, die Summe ist $1\frac{31}{60}$.

Es sollen $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{24}$ addiret werden. Die Summe ist 3.

Anmerk. Wenn gemischte Brüche addiret werden sollen; so werden zuerst die den ganzen Zahlen angehängten Brüche, hernach die ganzen Zahlen allein addiret, zu der letzten Summe aber noch die ganzen Einheiten hinzugethan, welche aus der Addition der Brüche entstanden sind. z. E. Es soll $3\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $6\frac{3}{4}$ addiret werden, die Summe der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ allein genommen, ist $\frac{23}{12}$ oder $1\frac{11}{12}$, die Summe der ganzen Zahlen allein genommen, ist 14, folg-

folglich die Summe der gemischten Brüche $15\frac{1}{12}$. Eben so ist die Summe von $3\frac{4}{7}$, $5\frac{3}{8}$, $16\frac{7}{9}$, $31\frac{5}{28}$, $43\frac{7}{72}$, gleich 100.

10. Wie wird ein Bruch von einem größern subtrahiret?

1) Wenn die gegebenen Brüche beyde **gleiche Nenner** haben: so wird blos der Zähler des kleinen Bruchs von dem Zähler des größern subtrahiret, und der Rest zum Zähler eines Bruchs gemacht, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat. Dieser Bruch ist die gesuchte Differenz der gegebenen Brüche. Z. E. Es soll $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahiret werden: so ist die Differenz $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$.

2) Wenn die gegebenen Brüche **verschiedene Nenner** haben: so werden sie erst beyde unter gleiche Benennung gebracht, worauf der neue Zähler des kleinern Bruchs von dem neuen Zähler des grössern subtrahiret, und die Differenz zum Zähler eines Bruches gemacht wird, welcher den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat. Z. E. Es soll $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahiret werden: so werden erst beyde in die Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ verwandelt, und alsdenn 8 von 9 subtrahiret, folglich ist die Differenz beyder Brüche $\frac{1}{12}$.

Anmerk. 1) Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiret werden soll: so wird diese ganze Zahl erst in einen Bruch ver-

verwandelt, welcher den Nenner des gegebenen Bruchs hat. Z. E. Es soll $\frac{3}{4}$ von 6 subtrahiret werden: so wird 6 erst in den Bruch $\frac{24}{4}$ verwandelt und als den 3 von 24 subtrahiret, folglich ist die gesuchte Differenz $\frac{21}{4}$ oder $5\frac{1}{4}$.

2) Wenn gemischte Brüche von einander subtrahiret werden sollen: so werden sie entweder erst beyde in unächte verwandelt, und alsdenn subtrahiret, oder es wird der Bruch, welcher der ganzen Zahl, die subtrahiret werden soll, angehängt ist, von dem Bruche der größern Zahl, und hernach die kleinere ganze Zahl von der größern abgezogen, im Fall aber, daß der Bruch der kleinern Zahl größer ist, als derjenige der größern, wird von der größern ganzen Zahl 1 geberget, in einen Bruch verwandelt, welcher den Nenner des kleinern Bruchs hat, hierauf zu demselben addiret und endlich die Subtraction der Brüche und ganzen Zahlen vorgenommen. Z. E. Es soll $2\frac{1}{4}$ von $5\frac{3}{4}$ abgezogen werden: so ist die Differenz $3\frac{2}{4}$ oder $3\frac{1}{2}$. Ferner, es soll $4\frac{2}{3}$ von $6\frac{1}{2}$ subtrahiret werden: so müssen entweder beyde erst in die unächte Brüche $\frac{14}{3}$ und $\frac{13}{2}$, hernach in die Brüche mit gleichen Nennern $\frac{28}{6}$ und $\frac{39}{6}$ verwandelt und alsdenn die Zähler subtrahiret werden, da denn die Dif-

Differenz $\frac{11}{6}$ oder $1\frac{5}{6}$ ist; oder wenn die Brüche und ganzen Zahlen allein subtrahiret werden sollen; so muß, weil der Bruch $\frac{2}{3}$ größer ist, als $\frac{1}{2}$, erst 1 von der 6 geborget, dieses in den Bruch $\frac{2}{2}$ verwandelt, und dazu $\frac{1}{2}$ addiret werden, worauf $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{2}$, nachdem beyde Brüche in diese mit gleichen Nennern verwandelt worden, subtrahiret und die Differenz $\frac{5}{6}$ zu der Differenz der beyden ganzen Zahlen 4 und 5, welche 1 ist, gesetzet wird, folglich ist die gesuchte Differenz wieder $1\frac{5}{6}$.

11. Wie wird ein Bruch mit einem andern multipliciret?

Es wird der Zähler des einen Bruchs mit dem Zähler des andern, imgleichen der Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des andern multipliciret. Das erste Product giebt den Zähler, das andere den Nenner eines Bruchs, welcher dem gesuchten Producte beyder Brüche gleich ist. z. E. Es soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$ multipliciret werden; so wird 2 mit 3 und 4 mit 5 multipliciret. Das erste Product 6 giebt den Zähler, das andere 20 den Nenner des Bruchs $\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$, welcher das gesuchte Product ist.

Anmerk. 1) Da der Bruch $\frac{3}{4}$ nicht ein ganzes mal oder vielmal, sondern nur $\frac{2}{5}$ mal genommen werden sollen; das ist, da derselbe erst in 6 gleiche Theile getheilet, und nur zwey solcher Theile genommen werden sollen: so siehet man leicht, daß das Product kleiner seyn muß als beyde Factoren. Denn wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, vielmal nimmt, das ist, mit einer ganzen Zahl, die über 1 ist, multipliciret, so muß sie größer werden; multipliciret man sie mit 1, so muß sie unverändert bleiben; multipliciret man sie aber mit weniger als 1, das ist mit einem Bruche, so muß sie nothwendig kleiner werden.

2) Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciret werden soll: so darf man nur den Zähler des Bruchs mit dem gegebenen Ganzen multipliciren. Das Product giebt den Zähler eines Bruchs, welcher den Nenner des gegeben Bruchs hat und das gesuchte Product ist. z. E. Es soll $\frac{3}{4}$ mit 2 multipliciret werden, das Product ist $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$.

3) Wenn gemischte Brüche multipliciret werden sollen: so müssen sie allemal erst in unächte verwandelt, und alsdenn auf die angezeigte Weise multipliciret werden. z. E. Es soll $3\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{7}$ multipliciret werden, das Product ist $\frac{210}{14}$ oder 15. Es soll $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciret werden, das Product ist $\frac{60}{15}$ oder 4.

12. Wie

12. Wie wird ein Bruch durch einen andern dividiret?

Es wird der Divisor umgekehret, das ist, der Zähler desselben wird zum Nenner und der Nenner zum Zähler, hierauf wird derselbe mit dem Bruche multipliciret. Das hiedurch gefundene Product ist der gesuchte Quotient. z. E. Es soll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{2}$ dividiret werden: so wird $\frac{1}{2}$ als der gegebene Divisor umgekehret, so daß das $\frac{2}{1}$ werde, dieser Bruch wird mit $\frac{2}{3}$ multipliciret, das Product $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist der gesuchte Quotient.

Anmerk. 1) Da durch die Division eines Bruchs in einen andern, nur gefunden werden soll, wie vielmal der erste in dem andern enthalten sey, oder wenn der Divisor größer ist als der Dividendus, der wievielste Theil vom Divisor dem Dividendus gleich sey, so sieht man leicht, daß der Quotient nicht nur größer als der Dividendus, sondern auch selbst eine ganze Zahl seyn könne, indem ein Bruch in einem andern etliche mal enthalten seyn kann. Denn wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, mit einer ganzen Zahl, die über 1 ist, dividiret, so muß der Quotient kleiner seyn, als der Dividendus; dividiret man sie mit 1, so muß sie unverändert bleiben, oder der Quotient dem Dividendus gleich seyn: dividiret man sie aber weniger als durch 1, das ist, durch einen Bruch, so muß der Quotient nothwendig größer seyn, als der Dividendus.

2) Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiret werden soll, so darf man nur den Nenner des Bruchs mit der gegebenen Zahl dividiren. Das Product giebt den Nenner eines Bruchs, welcher den Zähler des gegebenen Bruchs hat, und der gesuchte Quotient ist. z. E. Es soll $\frac{3}{4}$ durch 2 dividiret werden, der Quotient ist $\frac{3}{8}$.

3) Wenn **gemischte Brüche** dividiret werden sollen, so müssen sie allemal erst in unächte verwandelt, und alsdenn auf die angezeigte Weise dividiret werden. z. E. Es soll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividiret werden, der Quotient ist $\frac{68}{35}$ oder $1\frac{33}{35}$. Es soll $6\frac{2}{9}$ durch $\frac{5}{8}$ dividiret werden, der Quotient ist $\frac{448}{45}$ oder $9\frac{43}{45}$.

Die Verhältnisse und Proportionen.

13. Was ist ein Verhältniß?

Eine Vergleichung zweyer Zahlen, oder überhaupt zweyer Größen von einerley Art, in Ansehung ihrer Größen. z. E. Wenn man die beyden Zahlen 2 und 3 gegen einander hält, oder gegen einander vergleichet, und dabey nur auf die

die Größe sieht, welche die eine gegen die andere hat, so nennet man diese Vergleichung derselben ein Verhältniß.

Anmerk. Die beyden Zahlen oder Größen, welche gegen einander gehalten oder verglichen werden, nennet man die **Glieder des Verhältnisses.** Diejenigen, welche man sich zuerst hiezu vorstellet oder voransetzet, wird das **vorhergehende**, die andere das **nachfolgende** Glied des Verhältnisses genant. Ein großes Verhältniß ist, dessen Glieder in Ansehung ihrer Größe sehr von einander verschieden sind; ein kleines, dessen Glieder in Ansehung ihrer Größe nicht sehr von einander verschieden sind, z. E. wenn 1 und 100 verglichen werden, so stehen diese beyde Zahlen in einem größern Verhältniß als 1 und 2. Ist das vorhergehende Glied kleiner als das nachfolgende, so nennet man es ein **steigendes** Verhältniß; ist aber das vorhergehende Glied größer als das nachfolgende, ein **fallendes.**

14. **Wie werden die Verhältnisse eingetheilet?**

In **arithmetische** und **geometrische** Verhältnisse. Ein **arithmetisches** Verhältniß entstehet, wenn man bey Vergleichung zweyer Zahlen oder Größen darauf siehet, um vieviel die eine größer ist, als die andere, folglich wenn man durch die Subtraction der einen von der andern untersuchet, um wieviel sie von einander unterschieden sind. Ein **geometrisches Verhältniß** entstehet, wenn man bey Vergleichung zweyer Zahlen oder Größen darauf siehet, wie vielmal die eine Größe größer ist als die andere, folglich wenn man durch die Division der einen in die andere untersuchet, wie vielmal die erste in die andere enthalten ist.

Anmerk. 1) Es findet also zwischen jeden zwey Zahlen oder Größen sowol ein arithmetisches als geometrisches Verhältniß statt, nachdem man bey ihrer Vergleichung entweder auf ihren Unterschied oder auf ihren Quotienten, den man hier gemeiniglich wird den **Exponenten** nennen, siehet, folglich, nachdem man sie entweder von einander subtrahiret oder in einander dividiret, z. E. wenn man 6 und 2 mit einander vergleichet, und dabey auf die Differenz beyder Zahlen, nämlich 4, siehet, so hat man ein arithmetisches Verhältniß, siehet man aber dabey auf ihren Exponenten 3, so hat man ein geometrisches Verhältniß.

2) Ein arithmetisches Verhältniß zwischen zwey Zahlen wird dadurch bezeichnet, daß man zwischen beyde einen Strich machet, ein

ein geometrisches aber dadurch, das zwischen beyde zwey unter einander stehende Puncte gesetzet, z. E. 6 — 2 zeiget an, daß 6 und 2 in ein arithmetisches; 6 : 2 aber daß beyde Zahlen in ein geometrisches Verhältniß gesetzet worden.

15. Was ist eine Proportion?

Eine Gleichheit zweyer Verhältnisse, welche darin bestehet, daß beyde Verhältnisse einerley Differenz oder einerley Exponenten haben. z. E. Die vier Zahlen 6, 3, 4, 2 stehen in einerley geometrischen Proportion, weil die beyden ersten sowol als die beyden letzten, wenn man sie in Verhältnisse setzet einerley Exponenten 2 haben.

Anmerk. 1) Die vier Zahlen, welche in eine Proportion stehen, werden unter einander proportionirte Zahlen genannt, die erste und vierte Zahl, folglich das vorhergehende Glied des ersten, und das nachfolgende des letztern Verhältnisses werden die **äußern**, die zweyte und dritte Zahl aber, folglich das nachfolgende Glied des ersten, und das vorhergehende des letztern Verhältnisses werden die **mitlern** Glieder der Proportion genennet.

2) Die Gleichheit zweyer Verhältnisse wird durch zwey unter einander gezogene Striche, welche man zwischen die mittlern Glie-

Glieder der daraus entstehenden Proportion machet, z. E. 2:4=3:6 zeiget an, daß die beyden geometrischen Verhältnisse 2:4 und 3:6 einander gleich sind, folglich diese vier Zahlen in einer Proportion stehen. Diese Zeichen werden im Reden also ausgedrücket; 2 verhält sich so zu 4 wie 3 zu 6.

16. Wie werden die Proportionen eingetheilet?

In **arithmetische** und **geometrische Proportionen**. Die ersten bestehen aus zwey gleichen arithmetischen, die andern aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen, z. E. 3—1 =4—2 ist eine arithmetische, aber 2:4=3:6 eine geometrische Proportion.

Anmerk. 1) Wenn in einer Proportion die beyden mitlern Glieder einerley Zahl sind, folglich das nachfolgende Glied des ersten Verhältnisses mit dem vorhergehenden des andern Verhältnisses einerley ist, so wird die Proportion **stetig** oder **zusammenhangend** genannt, und die Zahl, welche in beyden mitlern Gliedern vorkommt, wird die mitlere **Proportionalzahl** zwischen den Zahlen, welche die beyden äußern Glieder sind, genennet, z. E. 2:4=4:8 ist eine stetige Proportion,

tion, und 4 die **mittlere** geometrische Proportionalzahl zwischen 2 und 8.

2) Wenn die Ausdrücke: Verhältniß, Proportion und Progression ohne Beysatz gebrauchet werden, so wird allemal die geometrische Verhältniß, Proportion und Progression verstanden, weil diese häufiger vorkommen, als die arithmetischen.

17. Welches sind die allgemeinen Eigenschaften der Proportion?

1) In **arithmetischen Proportionen** ist die Summe der äußern Glieder allemal der Summe der mittlern Glieder gleich. Z. E. wenn in den Proportionen 3 — 2 = 6 — 5 die beyden äußern Glieder 3 und 5 addiret werden, so ist die Summe 8, eben dieselbe Zahl wird gefunden, wenn man die beyden mittlern Glieder 2 und 6 addiret.

2) In **geometrischen Proportionen** ist das Product aus den äußern Gliedern allemal dem Producte aus dem mittlern gleich. Z. E. wenn in der Proportion 2 : 6 = 3 : 9 das erste Glied 2 mit dem letztern Glied 9 multiplicirt wird, so ist das Product 18. Eben dieselbe Zahl wird gefunden, wenn man die mittlern Glieder 6 mit 3 multipliciret.

Die Regel de Tri.

18. Was ist die Regel de Tri?

Eine Vorschrift, nach welcher aus drey gegebenen Zahlen, welche nebst einer vierten, die unbekannt ist, in einer geometrischen Proportion stehen, diese vierte unbekannte Zahl gefunden werden kann.

19. Wie vielerley ist die Regel de Tri?

Zweyerley, die **gerade** oder **directe**, wenn sich die erste Zahl verhält zur zweyten, wie die dritte zur vierten. Die **umgekehrte**, wenn sich die erste Zahl verhält zur zweyten, wie die vierte zur dritten. Wenn mehr als drey Zahlen verschiedener Proportionen gegeben werden, so ist die Regel de Tri **zusammengesetzt**.

20. Worin bestehet die directe und einfache Regel de Tri?

Ueberhaupt in folgenden, 1) man stelle die

Glie-

Glieder oder Terminos nach Angebung der Frage in ihre gehörige Ordnung. 2) Man multiplicire das dritte Glied durch das zweyte, und theile das Product durch das erste, so wird der vierte Terminus x heraus kommen. 3) Wenn benannte Zahlen, als Thaler, Schill. Pf. vorkommen; so müssen diese erst auf das kleinste Maaß gebracht werden. 4) Wenn Brüche vorhanden sind, so bringe man sie erst zur nämlichen Benennung.

Exempel.

Wenn 3 Ellen kosten 7 Rthl. was kosten 9.

$3 : 7 = 9 : x$

9
7
3)63 | 21 Rthl.

also ist der vierte Terminus 21, oder 9 Ellen kosten 21 Rthl.

Die Probe: man multiplicire den ersten und vierten; imgleichen den zweyten und dritten: wenn die Producte gleich sind so ist richtig gerechnet.

2tes Exempel.

Wenn 2 Pfund und 12 Loth Gewürz kosten 15 rthl.

rthl. 24 Schillinge; was werden 5 Pfund und 30 Loth kosten?

```
 15           32
 28            2
----         ---
 120          64
 30           12
----         ---
 420          76 Loth, dieses ist 2 ℔
  24                          12 Loth.
----
 444 Schillinge sind 15 rthl. 24 Schillinge.
          32
           5
         ---
         160
          30
         ---
         190 Loth sind 5 ℔ und 30 Loth.
```

also:

```
      76 : 444 = 190 : x
             190
          -------
           39960
           444
       ---------
   76)  48360 | 1110.
        76    |
       ----
         83
         76
        ----
          76
          76
         ----
```

folg-

folglich 1110 Schillinge, welche demnächst wiederum zu Thaler gemacht werden müssen.

Anmerk. Wenn die Frage auch verwirrt würde, z. E. das erste Exempel also: wenn man 7 Thaler für 3 Ellen ausgeben muß; was werden 9 kosten. So bemerke man folgende Regel. Dem Terminus der die Frage bey sich hat (hier 9) gebe man die dritte Stelle: dem, der ihm ähnlich ist (hier Ellen) gebe man die erste Stelle, und dem noch übrigen die zweyte Stelle, so wird der vierte richtig herauskommen.

21. Worin bestehet die umgekehrte Regel de Tri.

Wenn aus den Umständen der Frage bekant ist, daß solche gebraucht werden müsse; so wird folgendes beobachtet. Dem Terminus, welcher die Frage bey sich hat, gebe man die erste Stelle, den beyden übrigen die zweyte und dritte (was für eine gilt gleich) und verfahre, wie vorhin.

Exem-

Exempel.

100 Arbeiter werden binnen 8 Tägen fertig. Binnen welcher Zeit werden 50 fertig werden? Je weniger Arbeiter vorhanden sind, destomehr Täge werden sie nöthig haben; oder würde man hier die directe Regel anwenden, so würde der vierte Terminus 4 Täge geben, welches keinen Platz finden kann, wenn 100 8 Täge vonnöthen haben. Man braucht also die umgekehrte Regel.

$$50 : 100 = 8 : x$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 5\cancel{0} \mid 80\cancel{0} \mid 16 \text{ Täge.} \\ 5 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline \end{array}$$

2 Exempel.

125 Soldaten kommen 10 Täge mit ihrem Vorrathe aus, wie lange werden damit 625 auskommen?

$625 : 125 = 10 : x. \frac{1250}{625} = 2$ Täge.

20. In welchen Fällen läßt sich die Rechnung abkürzen?

1) Wenn der erste und zweyte Terminus, oder auch der erste und dritte Terminus, sich durch eine andere Zahl so theilen lassen; daß die Theilung aufgehet; so kann man die Theilung vorher verrichten.

Z. E. 5 Ellen kosten 20 was kosten 17?

$$5 : 20 = 17 : x$$
$$1 : 4 = 17 : x.$$

Folglich werden 17 kosten $17 \times 4 = 68$ Thaler. Ein Laufer läuft 100 Meilwegs binnen 8 Tagen, in wie viel Zeit wird er 25 Meilwegs abgemacht haben?

$$100 : 8 = 25 : x$$
$$4 : 8 = 1 : x$$
$$x = \tfrac{8}{4} = 2 \text{ Tage.}$$

2) Wenn Brüche vorkommen; so kehre man den ersten Bruch um; und multiplicire die Zähler und Nenner durch einander.

Z. E. $\frac{1}{2}$ ℔ kostet $\frac{5}{6}$ eines Thalers, was kosten $\frac{3}{4}$ ℔.

$$\tfrac{2}{1} \times \tfrac{5}{6} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{30}{24} = 1\tfrac{6}{24} = 1\tfrac{1}{4}.$$

3) Wenn

3) Wenn der erste und zweyte, oder auch der erste und dritte Terminus gleiche Nenner haben; so können sie ausgelassen werden.

Z. E. $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : x$

$1 : 2 = \frac{3}{4} : x$

$x = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$

4) Wenn der erste Terminus um eins größer ist als der zweyte; so findet man den vierten, wenn der dritte durch den ersten getheilet, und der Quotient alsdenn vom dritten abgezogen wird. Ist der erste um eins kleiner: so muß der Quotient zum dritten addiret werden. Dieser Vortheil läßt sich nicht selten in der Münzreduction anbringen. Z. E. 6 Thaler Cöllnisch macht am hiesigen Gelde 5 Thaler, was werden 40 Thaler Cöllnische machen.

$6 : 5 = 40 : x$

$x = 40 - \frac{40}{6} = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3}$ Thaler.

Wiederum 6 Thaler in hiesigen Gelde beträgt anderswo 7 Thaler; was werden 36 Thaler hiesigen Geldes dorten betragen?

$6 : 7 = 36 : x$

$x = 36 + \frac{36}{6} = 42.$

Die

Die zusammengesetzte Regel de Tri.

21. Was ist die Regula Quinque?

Wenn fünf Termini gegeben werden, und der sechste gesucht wird. Z. E. 600 Thaler geben in 6 Jahren 50 Procent. Was geben 1600 in 4 Jahren?

22. Worinn bestehet die Regel de Tri?

Hier kommen Begriffe von Ursach, Wirkung und Zeit vor. Man unterscheide die angegebene Ursachen, Zeiten und Wirkungen, von jenen, welche die Frage bey sich führen. Man nenne also die gegebene Wirkung $=E$, ihre Ursache $=C$, ihre Zeit $=T$, die verlangte Wirkung $=e$, ihre Ursache $=c$, die zugehörige Zeit $=t$. So ist.

$$e \times C \times T = E \times c \times t.$$

$$\text{und } e = \frac{E \times c \times t.}{C \times T.}$$

Hieraus entstehet diese Regel. Man multiplicire durch einander 1) die gegebene Wirkung, Zeit und Ursache der verlangten Wirkung. 2) Zeit und Ursache der gegebenen Wirkung. 3) man theile das erste Product durch das zweyte; so ist der Quotient die **verlangte** Wirkung. Aehnlichermaßen verfähret man, wenn Zeit oder Ursache verlanget wird, wie aus beygefügten Exempeln erhellet.

Est ist nemlich $c = \frac{e \times C \times T}{E \times T}$

$$t = \frac{e \times C \times T}{E \times c}$$

1. Exempel.

600 Thaler geben in 6 Jahren 50 Procent. Was werden 1600 Thaler in 4 Jahren austragen?

$C = 600$
$T = 6$
$E = 50$
$c = 1600$
$t = 4$
$e = x$

$e =$

$$e = \frac{Excxt}{CT} = \frac{50 \times 1600 \times 4}{600 \times 6} = \frac{50 \times 16 \times 4}{36} = \frac{800}{5}$$
$$= 88\tfrac{8}{9} \text{ Thaler.}$$

2 Exempel.

Ein Pflug kann in einem Tage 2 Morgen Acker umpflügen, wie wiel viel Pflüge werden erfordert, um 144 Morgen in 6 Tagen einzupflügen?

$$C = 1$$
$$T = 1$$
$$E = 2$$
$$c = x$$
$$t = 6$$
$$e = 144$$

$$x = \frac{eCT}{2t} = \frac{144 \times 1 \times 1}{2 \times 6} = 12 \text{ Pflüge.}$$

3 Exempel.

Ein Capital von 100 Thaler giebt in einem

Jahre 5 Thaler Procent. Wie viel Zeit wird vorbeygehen, bis ein Capital von 3000 Thaler 900 an Zinsen einbringet?

$$C = 100$$
$$T = 1$$
$$E = 5$$
$$c = 3000$$
$$t = x$$
$$c = 900$$

$$t = \frac{eCT}{Ec} = \frac{900 \times 100 \times 1}{5 \times 3000} = \frac{90}{15} = 6.$$

Anmerk. Der Grund dieser Formeln wird anderswo erwiesen werden. Sie haben den Vortheil zum Voraus, daß man nicht erst nachzufragen brauche, ob die Regel directe oder umgekehrt sey. Die Probe der richtigen Rechnung wird daraus offenbar, daß wiederum heraus kommen müsse: $eCT = Ect$.

Als

Als im letzten Exempel:

$$eCT = 900 \times 100 \times 1 = 90000$$

$$Ect = 5 \times 3000 \times 6 = 15000 \times 6 = 90000.$$

Die Gesellschaftsregel.

25. Was ist die Gesellschaftsregel?

Wenn mehrere Glieder zusammenlegen, um daraus einen Gewinn zu ziehen, und nach einer verflossenen gewissen Zeit ein jeder nach Angabe des Beytrags seinen Gewinn bekömt.

26. Worin bestehet diese Regel?

Man setze die Summe der Auslage und des ganzen Gewinnes zum ersten und zweyten Terminus; zum dritten, was ein jeder vor sich dazu hergegeben, und so oft muß dieses wiederholt werden, so viel in der Gesellschaft vorhanden sind.

Exempel.

Drey Kaufleute haben zusammen gelegt 1000 Thaler. Sie haben damit gewonnen 2000. Der erste hat dazu gegeben 240. Der zweyte 300. Der dritte 460.

$1000 : 2000 = 1 : 2 = 240 : x \ldots x = 480$
$1000 : 2000 = 1 : 2 = 300 : y \ldots y = 600$
$1000 : 2000 = 1 : 2 = 460 : z \ldots z = 920$

$x + y + z = 2000$

Anmerk. Hätte einer das Geld längere Zeit in dem Handel stehen gehabt, als der andere, so müßte die Einlage durch die Zeit

mul-

multipliciret werden, und demnächst fort-gefahren werden wie vorhin.

Exempel.

Der erste Kaufmann hat in den Handel

	Thaler.	Monate.
gesteckt	100.	19.
der 2te	130.	10.
der 3te	300.	6.

Sie haben nach 9 Monaten gewonnen 10000

Es war also die Einlage des ersten: = 1900

des 2ten = 1300

des 3ten = 1800

also in allem = 5000

$$5000 : 10000 = 1 : 2 = 1900 : x \ldots x = 3800$$
$$5000 : 10000 = 1 : 2 = 1300 : y \ldots y = 2600$$
$$5000 : 10000 = 1 : 2 = 1800 : z \ldots z - 3600$$
$$x + y + z = 10000$$

Die andern Regeln der Rechenkunst, werden viel bequemer in der Algebra abgehandelt.

Ende der Rechenkunst.

Mathe=

Mathematischer Vorübungen

zweyter Theil

Buchstaben Rechnung

Erstes Capitel.

Reduction, Addition, Subtraction buchstäblicher Größen.

1. Was ist eine buchstäbliche Größe?

Der Ausdruck einer Zahl, oder anderen Dinges, das sich messen läßt, in Buchstaben. Z. E. So kann 100 ausgedruckt werden durch a, 20 durch b, und so ferner.

Anmerk. Die Zeichen der Addition ꝛc. sind die nämlichen, deren schon vorhin Erwähnung geschehen. Also kann man aussprechen: $a+b$, $c+d$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$. Wenn zween oder mehr Buchstaben neben einander stehen, so wird dadurch auch die Multiplitiplication verstanden; so ist a b so viel als a×b.

2. Was sind bejahende und verneinende Größen?

Bejahend oder **positiv** nennt man solche, die das Zeichen + vor sich haben, und können einen Besitz oder Gewinn bedeuten; **verneinend** oder **negativ**, welche das Zeichen — vor sich haben, und bedeuten alsdenn einen Abgang oder Verlust. .. Wenn vor den Buchstaben kein Zeichen steht, so wird das Zeichen + darunter verstanden.

3. Was sind die Coefficienten?

Zahlen, welche anzeigen, wie oft der Buchstabe, die eine Größe ausdruckt, vorhanden sey. z. E. 3a, 2b und so ferner. Wo keine Zahl vorsteht, wird 1 darunter verstanden, denn a ist so viel als einmal a oder 1×a.

4. Was sind gleichartige oder gleichnamige Größen?

Solche wo die nämliche Buchstaben auf die nämliche Art vorhanden sind. Also sind 2ab, — ab gleichartige Größen, bc — cd ungleichartige, ab — bc wiederum ungleichartige. .. Wiederum ab, ba sind gleichartig, ab und $\frac{b}{a}$ sind ungleichartig. Man kann dieses im mündlichen Vortrage durch Zahlen deutlicher machen.

Anmerk. 2a und aa sind ganz verschieden, es es sey z. E. $a=10$ so ist $2a=20$, und $aa=10+10=100$.

Das Reduciren.

5. **Wie soll man die Buchstabengrößen reduciren oder zum kürzesten Ausdruck bringen?**

Man beobachtet dabey folgende Regeln.

I. Man setze die Buchstaben nach der Ordnung des Alphabets.

Z. E. an statt $cd+ad+a+ab+bb$.

Schreibt man $a+ab+ad+bb+cd$.

II. Wenn mehrere gleichartige Größen mit den nämlichen Zeichen vorkommen, so zähle man sie zusammen.

Z. E. An statt $ab+ab+bc+bc$ schreibt man $2ab+ebc$.

Oder auch an statt $-cd-cd-d-d-d$ schreibt man $-2cd-3d$.

III. Wenn die Zeichen gleichartiger Größen verschieden sind, das ist, wenn die eine das Zeichen $+$ das andere $-$ vor sich hat. So sind noch drey Fälle zu bemerken.

1. Wenn dasjenige, was hinter den Zeichen sich befindet, beyderseits **gleich** ist, so wird es schlechtweg ausgelassen, weil es gegen einander aufgeht, oder nichts ist als $3-3=0$ $2ab-2ab=0$.

2. Wenn dasjenige was hinter den Zeichen $+$ stehet **grösser** ist, so wird die kleine Zahl aus

der größeren subtrahirt, und der Ueberrest unter dem Zeichen + hingeschrieben, z. E. $5ab - 3ab = 3ab$.

3. Wenn dasjenige was hinter den Zeichen — stehet größer ist, so wird wiederum die kleine Zahl von der größeren abgezogen, und der Rest unter dem Zeichen — hingeschrieben. z. E. $3cd - 8cd = -5cd$.

Anmerk. Die Ursache dieses Verfahrens ist nicht schwer einzusehen. Es bedeute zum Exempel a 3 Thaler, und + a sey so viel, als 3 Thaler gewonnen, so heist — a so viel als 3 Thaler verlohren.

Wiederum ist 2a so viel als 6 Thaler
4a ist 12 Thaler
5a ist 15 Thaler

1) $2a - 2a = 6 - 6 = 0$

Das ist: wer 6 Thaler gewinnt, und eben so viel verliert, besitzt in der That davon nichts.

2) $5a - 2a = 3a = 3 + 3 = 9$.

Das ist: wer 15 Thaler gewonnen, und 6 Thaler verlieret, hat in der That 9 Thaler.

3) $2a - 5a = -3a = -9$

Das ist: wer 6 Thaler gewonnen, dagegen 15 verlohren, hat in der That 9 Thaler verlohren.

Exempel.

Man soll reduciren $c + a + c - a + b + b - b - b - b - c$

So

So schreibt man I. $a-a+b+b-b-b-b+c+c-c$

II. $a-a+2b-3b+2c-c$

III. $-b+c$

2. Exempel.

$cd+abc-c+abc+d+c+aa-a-cd-cd$

I. $aa-a+abc+abc-c+c+cd-cd-cd$

II. $aa-a+2abc-c+c+cd-2cd$

III. $aa-a+2abc-cd$

Das Addiren.

6. **Was ist bey der Addition zu beobachten?**

Man muß aus den Buchstaben-Größen eine Summe machen. Dieß geschiehet, wann man die nicht gleichartige Größen mit ihren Zeichen hinschreibt, und die Gleichartigen zum kürzeren Ausdruck bringet, wie gezeigt werden soll.

Exempel.

I. Zu	$3a-b+4f-3g$
Sollen addirt werden	$2a-5b+2f-2g$
Summa	$5a-6b+6f-5g$

II. Zu	$6a-4b+3f-g$
Soll addirt werden	$3a+5b-8f+g$
Summa	$9a+b-5f$

$$
\begin{array}{rl}
\text{III. Zu} & 2a - b + 3g \\
\text{Soll addirt werden} & 4a + 3b - h \\
\hline
 & 6a + 2b + 3g - h
\end{array}
$$

Man kann sich dieser Rechnung auch in Zahlen bedienen. Wenn jemand z. E. nach Empfang und Ausgabe wissen wollte, wie viel er noch wirklich im Vermögen hätte.

Hier kann der Empfang durch + die Ausgabe durch — ausgedruckt werden. Z. E. Jemand hat empfangen 20 Th. 4 Sch. 8 Pf. er hat ausgegeben 12 Th. 12 Sch. 9 Pf. So würde das Exempel also stehen

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Th.} & & \text{Sch.} & & \text{Pf.} \\
20 & + & 4 & + & 8 \\
-12 & - & 12 & - & 9 \\
\hline
8 & - & 8 & - & 1
\end{array}
$$

Er hätte folglich 8 Th. müßte aber davon ausgeben 8 Sch. 1 Pf. Es wäre also sein Vermögen 7 Th. 19 Sch. 11 Pf.

Das Subtrahiren.

7. Wie soll man buchstäbliche Größen von einander subtrahiren?

Regul I. Die Zeichen der Größe, welche subtrahirt werden soll, werden verändert, nämlich + in —, und — in +: demnächst geschiehet die Reduction wie vorhin.

Exem-

Exempel.

I. Aus	$5a - 3b + f - 9h$
Soll subtrahirt werden	$2a + 3b + f - 8h + g$
Man ändre die Zeichen	$-2a - 3b - f + 8h - g$
Die erste und dritte Reihe reducirt.	$3a - 6b \quad - h - g$

Anmerk. Es läßt sich die Operation abkürzen, wenn man die veränderte Zeichen unter den Buchstaben schreibt, die reducirt werden sollen, und sofort die Reduction verrichtet. Voriges Exempel käme also zu stehen.

Aus	$5a - 3b + f - 9h$
Wird subtrahirt	$2a + 3b + f - 8h + g$
Aenderung der Zeichen	$- \quad - \quad - \quad + \quad -$
Reduction und Rest	$3a - 6b \quad - h - g$
II. Aus	$6ab - 2cd + 3dh + h - m$
sol subtrah. werd.	$4ab - 6cd + 5dh + n$
Zeichen geänd.	$- \quad + \quad - \quad -$
Rest	$2ab + 4cd - 2dh + h - m - n$

Anmerk. Die Ursache, weswegen die Zeichen geändert werden, ist hieraus offenbar. Es sey $ab = 3 \times 4 = 12$ Th. So ist $+ ab$ so viel als ein Gewinn von 12 Th. $- ab$ so viel als ein Verlust von 12 Thalern, wird nun ein Gewinn von 12 Th. mir entzogen, so ist dieß so viel als wenn ich 12 Thaler verlöhre: wird mir ein Verlust von 12 Thaler entzogen, oder werde ich von einem Verluste dieser Summe befreyet, so ist

es

es eben so viel, als wenn ich 12 Thaler gewönne.

Anmerk. Man kann sich auch dieser Rechnung in Zahlen bedienen. Wenn nemlich die Frage entstehet, was noch zu bezahlen übrig seye, wenn eine Summe bezahlt werden muß, und darauf schon etwas bezahlt wäre. Z. E. Es muste jemand bezahlen 20 Th. 14 Sch. 6 Pf. Er hätte darauf bezahlt 12 Th. 18 Sch. 8 Pf. So stunde das Exempel also:

Th.		Sch.		Pf.
20	+	14	+	6
12	+	18	+	8
—		—		—
8	—	4	—	2

Das ist: Es müßte derselbige 8 Thaler annoch bezahlen, bekäme aber 4 Sch. und 2 Pf. zurück.

II. Jemand hat an Waare empfangen.

	Cent.		℔		Loth		Quent.
	17	—	10	+	4	+	3
davon verkauft	12	+	5	+	16	—	4
	—		—		—		+
folglich vorräthig	5	—	15	—	12	+	7

Man sieht hieraus, daß durch diese Art zu rechnen, die mühsame Reduction der größeren Einheiten, auf die geringeren ersparet werde; daher dieß Verfahren selbst bey vielen Rechnungen, die im gemeinen Leben vorkommen, mit Bequemlichkeit gebraucht wird.

Mathematischer Vorübungen

zweyten Theils

Zweytes Capitel

Multiplication und Division buchstablicher Größen.

1. Was sind complexe Größen?

Solche, die mit den Zeichen + oder — zusammen hangen, also sind $ab+c-d$ complexe Größen; die also nicht zusammen hangen, sind incomplex oder einzeln. z. E. $abcd$ oder auch $\frac{ab}{cd}$.

2. Welche Regeln sind bey der Multiplication zu beobachten?

I. In Absicht der Zeichen. 1) Positiv multipliciret durch positiv giebt ein positives Product. 2) Positiv durch negativ, oder negativ durch positiv giebt ein negatives Product. 3) Negativ durch negativ giebt ein positives Product. Kürzer: einerley Zeichen geben + verschiedene —.

II. Die Coefficienten richten sich nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst.

III. Die Buchstaben werden neben einander hingeschrieben.

IV. Ist eine **complexe** Größe durch eine **einfache** zu multipliciren; so werden alle Glieder von jener durch diese multipliciret. Complexe Größen werden durch einander multiplicirt.

V. Wenn eine Reduction statt findet; so muß sie allezeit vorgenommen werden.

Exempel I. von einfachen Größen:

1. Man soll	$3ac$
multipliciren durch	$5cd$
Product	$15accd$
2. Man soll	$-8ad$
multipliciren durch	$4cde$
Product	$-32acdde$
3. Man soll	$-2ac$
multipliciren durch	$-bd$
Product	$+2abcd$

II. Complexe durch einfache.

1. Man soll	$3ab-2d$
multipliciren durch	$6b$
Product	$18abb-12bd$
2. Man soll	$3ab-4cd+def$
multipliciren durch	$2mn$
Product	$6abmn-8cdmn+2defmn$

3. Man

3. Man soll $-2ab+3cd-gf$
multipliciren durch $-4bc$

Product $8abbc-12bccd+4bcfg$

III. Complexe durch complexe.

1. Man soll $a+b$
multiplciren durch $a+b$

Den obern Factor multipliciret durch a I. Product $aa+ab$
multipl. durch b II Product $ab+bb$

ganzes Product reducirt $aa+2ab+bb$

2. Man soll $a-b$
multipliciren durch $a-b$

Den obern Factor multipliciret durch a I Product $aa-ab$
durch b II Product $-ab+bb$

$aa-2ab+bb$

3. Man soll $a+b$
multipliciren durch $a-b$

I Product $aa+ab$
II Product $-ab-bb$

ganzes Product $aa-bb$

4.
$$\begin{array}{r} 3a+b \\ 5a-4b \\ \hline 15aa+5ab \\ -12ab-4bb \\ \hline 15aa-7ab-4bb \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} 2a+3b-2c \\ 4a+5b \\ \hline 8aa+12ab-8ac \\ +10ab+15bb-10bc \\ \hline 8aa+22ab+15bb-8ac-10bc \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} n+1 \\ n+1 \\ \hline nn+n \\ +n+1 \\ \hline nn+2n+1 \end{array}$$

Anmerk. Anstatt aa schreibt man lieber kürzer a^2, eben so anstatt aaa schreibt man a^3, und diese oben zur rechten geschriebene Zahlen nennt man **Exponenten.** Man muß sie aber wohl von den Coefficienten zu unterscheiden wissen, weil sie ganz was anders bedeuten. Um die Operation durch die gewöhnliche Rechenkunst zu erläutern mag folgendes Exempel dienen, deren ähnliche zur Uebung nützlich aufgegeben werden können.

Es sey $a=8$ $b=2$ So ist $a-b=8-2$.

$$\begin{array}{r|r} a-b & 8-2 \\ a-b & 8-2 \\ \hline aa-ab & 64-16 \\ -ab+bb & -16+4 \\ \hline aa-2ab+bb & 64-32+4=36 \end{array}$$

An-

Anmerk. Man soll a durch b multipliciren. Es sey $a = 8$ Th. $b = 3$; so ist $+a$ ein Gewin von 8 Th. $-a$ ein Verlust von 8 Th. Multipliciren durch $+b$ ist dreymal addiren, multipliciren durch $-b$ ist dreymal subtrahiren.

Also ist I. $+a \times +b$ den Gewin dreymal addiren: welches giebt einen Gewin von 24 Thalern.

II. $+a \times -b$ den Gewin dreymal subtrahiren, welches giebt einen Verlust von 24 Thalern.

III. $-a \times +b$ den Verlust dreymal addiren: welches giebt einen Verlust von 24 Thalern.

IV. $-a \times -b$ den Verlust dreymal subtrahiren; welches einen Gewin von 24 Thaler gibt. Es geben also einerley Zeichen $+$, verschiedene Zeichen $-$.

Das Dividiren.

3. Welche Regeln sind bey der Division zu beobachten?

I. Einerley Zeichen geben $+$, verschiedene $-$.

II. Die Coefficienten richten sich nach der gewöhnlichen Rechenkunst.

III. Wenn die nämliche Größe zugleich der **Divisor** und **Dividendus** ist, so ist der Quotient $= 1$.

IV. Wenn der nämliche Buchstabe im **Divisor** und **Dividendus** vorkomt; so wird selbiger im Schreiben ausgelassen.

V. Wenn eine **complexe** Größe durch eine **einfache** getheilet wird; so werden alle Glieder von jener durch diese getheilet.

VI. Wenn sich nichts aufheben läßt, so wird der Divisor unter dem Dividendus als ein Bruch hingeschrieben.

Exempel.

I. von incomplexen Größen:

$$\frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{ab}{ab} = 1$$

$$\frac{4ab}{2b} = 2a$$

$$\frac{3bc}{4c} = \tfrac{3}{4}b$$

$$\frac{8aad}{-2ad} = -4a$$

$$\frac{-12abc}{4b} = -3ac$$

$$\frac{-6abc}{-3abn} = 2\frac{c}{n}$$

II. Complexe durch einfache:

1. Man soll $2ab - 4bd + b$ theilen durch b

so

so kann man dis also schreiben $\frac{2ab}{b} - \frac{4bd}{b} + \frac{b}{b}$

und aufgehoben $2a - 4d + 1$ der Quotient.

2. Man soll $abc - abcd - ab$
theilen mit $-ab$

Also $\frac{abc}{-ab} - \frac{abcd}{-ab} - \frac{ab}{-ab}$

und aufgehoben $-c + cd + 1$ der Quotient.

3. Man soll $bd + ad + bc$
theilen durch d

$$\frac{bd}{d} + \frac{ad}{d} + \frac{bc}{d}$$

Also $b + a + \frac{bc}{d}$ der Quotient.

Anmerk. Wie complexe Größen zu dividiren sind, braucht noch nicht vorgetragen zu werden. Doch ist die Sache keiner besondern Schwierigkeit unterworfen, und richtet sich nach der gewöhnlichen Art zu dividiren in der Rechenkunst. Doch mit dem Unterscheide, daß man allezeit nur durch das erste Glied des Divisors theilet. Den Geübtern zu Gefallen will ich ein oder anders Exempel hinzufügen. Man bemerke nur daß der Dividendus durch D, der Divisor durch d, der Quotient durch Q angezeigt werde. Die Multiplication des gefundenen Quoti durch den ganzen Divisor

sor soll durch M, die Subtraction dessen aus dem Dividendus durch S, der Rest durch R bemerkt werden.

1tes Exempel.

Man soll theilen aa — bb durch a — b.

			d. a — b
D.	aa — bb		Q. a + b
M.	aa — ab		
S.	— +		
R.		ab — bb	
M.		ab — bb	
S.		— +	
R.	o	o	

2tes Exempel.

Man soll aa + 2ab + bb theilen durch a + b.

			d. a + b
D.	aa + 2ab + bb		Q. a + b
M.	aa + ab		
S.	— —		
R.		ab + bb	
M.		ab + bb	
S.		— —	
R.	o	o	

Die Probe der Multiplication wird durch die Division; der Division durch die Multiplication, eben so wie in der gemeinen Rechenkunst vorgenommen.

Mathe=

Mathematischer Vorübungen
dritter Theil.
Geometrie.

Erstes Capitel.
Verzeichnung und Ausmessung der Linien und Flächen.

1. Was ist die Geometrie?

Die Wissenschaft von der Ausmessung des Raumes.

2. Wie vielerley Ausmessungen sind bey dem Raume möglich?

Es kan derselbe 1) in Ansehung der Länge nach **Linien**, 2) in Ansehung der Länge und Breite nach **Flächen**, 3) in Ansehung der Länge, Breite, und Dicke nach einem körperlichen Maaße ausgemessen werden.

Anmerkung. Ein geometrischer **Körper** ist nach allen Seiten ausgedehnt, die äuſserſten Gränzen, welche denſelben einſchließen, ſind **Flächen**, die Gränzen der Flächen ſind **Linien**: die Gränzen der Linien aber **Puncte**. Folglich ſind bey einem geometriſchen Körper alle drey angezeigte Ausmeſſungen: bey einer Fläche aber nur zwey derſelben, bey einer Linie nur eine, und bey einem Puncte gar keine möglich: das iſt, ein geometriſcher Körper hat eine Länge, Breite, und Dicke (oder Höhe und Tiefe) zugleich; eine Fläche nur eine Länge, und Breite, eine Linie nur eine Länge, ein Punct aber keins von allen dreyen.

3. **Wie können die Linien eingetheilet werden?**

In gerade und krumme Linien. Z. E. AB Fig. 1. iſt eine gerade; CDE Fig. 2. aber eine krumme Linie.

Anmerkung. Zwiſchen jeden zween Puncten kann man ſich eine gerade Linie vorſtellen, welche allemal der kürzeſte Weg von dem einen Puncte zum andern iſt.

4. **Welches iſt die vornehmſte krumme Linie?**

Die Cirkellinie, welche entſteht, wenn ſich eine gerade Linie AC Fig. 3. um einen feſten Punct C in einer Fläche herumbewegt, und welche alſo allenthalben von dieſem feſten Puncte gleichweit entfernet iſt.

An-

Anmerkung. Der feste Punct C in der Mitte der Cirkellinie wird der **Mittelpunct**, die krumme Linie ABFD selbst, in Ansehung dieses Mittelpunctes die **Peripherie**, oder der **Umkreis**, ein jedes Stück derselben EFG ein **Bogen** genennet. Die gerade Linie AC, deren Ende A die Cirkellinie beschreibet, heißt der **Halbmesser**, oder **Radius**, eine gerade Linie BD, welche von einem Puncte der Peripherie B gegen einen überliegenden D durch den Mittelpunct C gezogen werden kann, der **Durchmesser** oder **Diameter**, welcher also aus zween Halbmessern besteht, und die größte gerade Linie ist, welche in einem Cirkel gezogen werden kann, auch denselben genau in zween gleiche Theile BAD und BFD theilet; eine jede gerade Linie EG, welche von einem Puncte der Peripherie gegen einen andern, aber nicht durch den Mittelpunct gezogen wird, eine **Sehne**.

[5. Was sind parallele Linien?]

Linien, welche, wenn sie auf beyden Seiten verlängert werden, niemals zusammenstoßen, sondern beständig gleichweit von einander entfernet bleiben. Z. E. Die Linien AB und CD, Fig. 4. sind einander parallel, weil sie nie an einander kommen würden, wenn man sie gleich nach der Seite A und C, oder B und D verlängerte.

6. Was ist ein Winkel?

Die Neigung zweyer Linien gegen einander, welche sich in einem Puncte durchschneiden. Z. E. Die beyden Linien AC und CB, Fig. 5. welche sich in dem Puncte C durchschneiden, schliessen einen Winkel ACB ein.

Anmerkung. 1. Der Punct C, darin beyde Linien einander durchschneiden, heißt die **Spitze**, oder der **Scheitelpunct** des Winkels, die Linien AC und CB selbst aber, werden die **Schenkel** des Winkels genennet.

2. Bey der Bestimmung der Größe eines Winkels wird durchaus nicht auf die Länge der Schenkel, sondern nur auf ihre Neigung gegen einander gesehen; daher zween Winkel einander gleich sind, wenn diese Neigung bey dem einen eben so groß ist, als bey dem andern, obgleich die Schenkel des einen Winkels viel größer sind, als des andern.

7. Wie werden die Winkel eingetheilet?

In **rechte**, spitzige und **stumpfe** Winkel.

Anmerkung. 1. Wenn ein Schenkel CB Fig. 6. und 7. eines Winkels ACB über den Scheitelpunct C verlängert wird, so entsteht neben dem vorigen noch ein Winkel

ACD

ACD. ist nun dieser letztere dem erstern gleich, wie Fig. 6. das ist, neiget sich die Linie AC nicht mehr gegen CD als gegen CB, so wird jeder dieser Winkel ein **rechter** Winkel genennet, und die Linie AC heißt in Ansehung der Linie DB eine **senkrechte** oder **lothrechte**, oder **perpendiculäre** Linie. Ist aber der eine von diesen beyden Winkeln kleiner, als der andere, wie Fig. 7. das ist: neiget sich die Linie AC mehr gegen CD als gegen BC, so werden beyde **schiefe** Winkel, und zwar der Winkel ACD, welcher kleiner ist, als ein rechter, ein **spitziger**, der Winkel ACB aber, welcher größer ist, als ein rechter, ein **stumpfer** Winkel genannt.

2. Wenn beyde Schenkel eines Winkels ACB Fig. 8. über den Scheitelpunct verlängert werden, so entstehen allemal vier Winkel, davon diejenigen, deren Spitzen gegen einander gekehret sind, als ACB, und DCE; imgleichen ACD und BCE, **vertical** Winkel heißen. Die wirkliche Ausmessung des Winkels auf dem Papiere, oder Felde, läßt sich am füglichsten durch Instrumente zeigen.

8. *Wie wird eine gerade Linie gezeichnet?*

1. Eine kleinere wird nach einem Linial, Fig. 1.

vermittelst eines Stiftes, Bleyfeder, Schreibfeder, Reißfeder ꝛc. gezogen.

2. Eine größere wird durch einen ausgespannten Faden, z. E. auf Bauholz, in Gärten ꝛc. oder auf dem Felde nur durch eingeschlagene Stäbe bestimmet.

Anmerk. Zwischen zween eingesteckten Stäben ist allemal eine gerade Linie; sollen nun mehrere Stäbe zwischen beyde in dieselbe gerade Linie gesteckt, oder dieselbe verlängert werden, so müssen diese letztern Stäbe alle so gestellet werden, daß, wenn man hinten einem der äußersten Stäbe in einiger Entfernung steht, dieser die übrigen alle decket.

9. Wie werden parallele Linien gezogen?

Es werden über der Linie A B, Fig. 9, zu welcher eine andere Linie in einer gegebenen Entfernung parallel gezogen werden soll, zween Bögen M, M, und N, N, die ihre Mittelpuncte in der gegebenen Linie, in E und F, und die angegebene Entfernung zum Halbmesser haben, beschrieben, und an diesen wird die Linie CD hindurch gezogen, welche der AB parallel ist.

10. Wie wird eine Linie senkrecht gegen die andere gezogen?

1. Wenn der Punct C, woraus auf AB die perpendicular Linie CD gezogen werden soll, in

der

der Linie AB liegt, Fig. 10. α; so verfährt man folgender maßen. Man schneide beyderseits von der Linie AB gleiche Theile CM, CN ab. Aus den Puncten M und N beschreibe man zweyen Cirkelbögen mit der nemlichen Eröffnung des Cirkels, die sich in D schneiden. Durch die Puncte C und D ziehe man CD: es wird CD auf AB senkrecht seyn.

2. Wenn der Punkt D außer der Linie AB liegt, Fig. 10 β. so beschreibe man aus D einen Cirkelbogen MFN, welcher die Linie AB in den Puncten M und N schneidet. Aus M und N beschreibe man über (oder auch unter) den Punct D zween Bogen, die sich einander schneiden in E, durch E und D ziehe man die Linie EC; sie wird senkrecht seyn auf AB.

Anmerk. 1. Es läßt sich eben dieß durch den Winkelhaken bewerkstelligen.

3. Wenn man eine jede Linie MN, Fig. 10 β in zween gleiche Theile theilen sollte, so werden aus den Puncten M und N, erstlich durch einen Punkt D, zweytens durch einen andern Punkt E, oben oder unter D, zween Bogen jedesmal beschrieben, wo sich jedes paar Bögen einander schneidet, zieht man die Linie EC so ist MN zweyfach getheilet oder $MC = CN = \frac{MN}{2}$

4. Wenn man über eine Linie AB Fig. 11. einen halben Cirkel ACB beschreibt, und demnächst

nächst aus den beyden Endpuncten des halben Zirkels A und B gegen einen willkührlichen Punkt C an der Peripherie, zwo gerade Linien AC, und BC ziehet, so ist der Winkel ACB allzeit ein rechter.

11. Wie kan man einen Bogen EF oder Winkel ECF in zween gleiche theilen?

Aus den Punkten E und F beschreibe man mit der nemlichen Eröffnung des Cirkels zween Bögen, die sich in D schneiden. Durch D und C die Spitze des Winkels oder den Mittelpunkt des Bogens ziehe man die Linie DC, so ist der Winkel $ECG = GCF = \frac{ECF}{2}$ und der Bogen $EG = GF = \frac{EF}{2}$. Wäre der Mittelpunkt des Bogens nicht gegeben, so müßte es erst gesucht werden, wie folgende Aufgabe lehret.

12. Wie kann zu einer Cirkellienie der Mittelpunct gefunden werden?

Es werden in dem gegebenen Umkreis des Cirkels A. B. C. D. E. F. G. Fig 13. α zween willkührliche Linien AC und CE, die erste durch die Linie BF, der andere durch die Linie DG in zween gleiche Theile getheilet. Der Punct M, darin diese beyden Linien einander durchschneiden, ist der gesuchte Mittelpunct.

An-

Anmerk. Eben so kann zu einem gegebenen Bogen BCDE der Mittelpunct gefunden, und folglich dieser Bogen ausgezogen, oder ein Stück einer Cirkellienie ergänzet werden.

13. Wie wird eine gerade Linie gemessen?

1. Es wird eine gewisse Länge zum Maaßstabe angenommen, und in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile eingetheilet.

2. Wird durch wiederholte Anlegung des Maaßstabes an die Linie oder Länge, welche gemessen werden soll, gefunden, wie vielmal dieser Maaßstab oder seine Theile in derselben enthalten sind.

Anmerk. 1. Der Maaßstab, womit man die Länge eines Tuches, Landes u. d. g. zu messen pfleget, wird eine Elle genannt, welche man wieder in vier gleiche Theile, oder Viertel theilet. Bey Gebäuden, und auf dem Felde bedient man sich der Ruthe, welche man von den Handwerksleuten in zwölf Werkschuhe, oder Füße, und jeder Werkschuh wieder in zwölf Zölle getheilet wird. Zween Werkschuh machen eine Elle aus, die Feldmesser aber theilen eine Ruthe in zehn Füße oder Schuhe, jeden Schuh in zehn Zölle, jeden Zoll in zehn Linien. Die

Landruthen enthalten 15 oder 16 Füße, eine französische enthält 6 pariser Füße.

14. Wie wird eine Cirkellienie gemessen?

Man muß den angegebenen Diameter durch 314 multipliciren, und durch 100 theilen, oder noch genauer, man multiplicirt den angegebenen Diameter mit 355, und theilt das Product durch 113. Der Grund dessen wird anderswo vorkommen. Ueberhaupt ist der Umfang des Cirkels dreymal so groß, als der Diameter und etwas darüber. Eine Tresse, die um einen Huth gesetzet, oder ein Stück Eisen, das um ein Rad geschlagen werden soll, muß etwas über dreymal so lang seyn, als der Durchmesser des Huthes oder des Rades.

15. Wie können die Flächen eingetheilet werden?

In **ebene**, und **gebogene**, oder **gekrümmte** Flächen.

Anmerk. Eine vollkommen ebene Fläche muß so beschaffen seyn, daß zwischen jeden zween Puncten in derselben eine gerade Lienie gezogen werden kann, welche ganz in die Fläche fällt: folglich muß ein Linial, welches man mit der Schärfe auf dieselbe setzet, allenthalben, wo man es anleget, dichte an eine solche Fläche anschließen.

16. Was wird durch den Umfang oder Perimeter einer Fläche, durch eine Figur und durch die Seiten und Ecken derselben verstanden?

Die Linien, welche eine Fläche umschließen oder umgränzen, werden zusammen genommen, der Umfang oder Perimeter der Fläche, in Ansehung der Art ihrer Zusammensetzung aber eine Figur genannt, die einzeln Linien aber, welche eine solche Figur ausmachen, heißen die **Seiten**, und die Winkel, welche sie einschließen, die Ecken der Figur.

Anmerk. Eine von den Seiten einer Figur wird in Ansehung der Lage gegen den übrigen Seiten, die **Grundlinie** oder **Basis** der Figur genannt. Die **Höhe** einer Figur aber wird durch eine gerade Linie bestimmet, welche von der obersten Ecke derselben senkrecht gegen die Grundlinie oder den verlängerten Theil derselben ist gezogen worden. Z. E. Wenn in den Figuren 26 und 27 AB zur Grundlinie ist angenommen worden, so ist CP die Höhe derselben.

17. Wie können die Figuren eingetheilet werden?

1. In Ansehung der Beschaffenheit ihrer Seiten in **geradlinigte** und **krummlinigte** Figuren. Die Seiten der erstern bestehen aus geraden,

raden, diejenigen der andern aus krummen Linien.

2. In Ansehung der **Größe** ihrer Seiten oder Winkel in **reguläre** und **irreguläre** Figuren. Die erstern haben lauter gleiche, die andern ungleiche Seiten und Winkel.

3. In Ansehung der Menge ihrer Seiten oder Winkel in **Dreyeckte** oder **Triangel, Vierecke** und **Vielecke**, oder **Polygone**. Die ersten haben drey, die andern vier, die dritten mehr als vier Seiten und Winkel.

18. *Wie können die Dreyecke oder Triangel wieder eingetheilet werden?*

1. In Ansehung der Seiten

a) in **gleichseitige**, welche drey gleiche Seiten und Winkel haben, und regulär sind, wie Fig. 13.

b) in **gleichschenklichte**, welche zwey gleiche Seiten und Winkel haben, wie Fig. 14.

c) in **ungleichseitige**, welche drey ungleiche Seiten und Winkel haben, wie Fig. 15.

2. In Ansehung der **Winkel**

a) in **rechtwinklichte**, welche einen rechten Winkel haben, wie Fig. 16.

b) in

b) in **stumpfwinklichte**, welche einen stumpfen Winkel haben, wie Fig. 17.

c) in **spitzwinklichte**, welche lauter spitzige Winkel haben, wie Fig. 13.

19. **Wie können die Vierecke weiter eingetheilet werden?**

1. In Ansehung der **Seiten**

a) in **gleichseitige**, welche vier gleiche Seiten haben, wie Fig. 18. und 20.

b) in **ungleichseitige**, welche ungleiche Seiten haben, wie Fig. 19 und 21.

2. In Ansehung der Winkel

a) in **rechtwinklichte**, welche vier rechte Winkel haben, dazu gehöret:

aa) Das **Quadrat**, welches vier rechte Winkel, und zugleich vier gleiche Seiten hat, wie Fig. 18.

bb) Das **länglichte Viereck**, oder **Rectangulum**, in welchem vier rechte Winkel, aber nur jede zwey einander gegenüber liegende Seiten einander gleich sind, wie Fig. 19.

b) in **schiefwinklichte**, welche schiefe Winkel haben, dazu gehöret:

aa) Die **Raute**, welche vier schiefe Winkel, aber vier gleiche Seiten hat, wie Fig. 20.

bb) Die **länglichte Raute**, in welcher vier schiefe Winkel, aber nur jede zwey einander gegenüber liegende Seiten einander gleich sind, wie Fig. 21.

cc) Das **Trapezium**, welches vier schiefe Winkel, und lauter ungleiche Seiten hat, wie Fig. 22.

20. Wie können die Vielecke oder Polygonen weiter eingetheilet werden?

Es werden dieselben nach der Anzahl ihrer Seiten und Winkel in **Fünfecke**, **Sechsecke**, **Siebenecke**, u. s. w. eingetheilet. Z. E. Fig. 23. ist ein Sechseck.

21. Wie können die Triangel aus gegebenen Linien gezeichnet werden?

1. Ein gleichseitiges Dreyeck, wie Fig. 13. wird aus einer gegebenen Linie AB also gezeichnet. Es wird die gegebene Linie AB zwischen den Spitzen eines Cirkels gefasset, und mit demselben aus dem einen Endpuncte dieser Linie B ein Bogen, aus dem andern A aber ein anderer Bogen beschrieben. Hierauf werden aus eben diesen Endpuncten gegen den Durchschnitspunct dieser Bögen C die Linien BC und AC gezogen.

2. Ein

2. Ein gleichschenklichtes Dreyeck, wie Fig. 14. wird aus zwey gegebenen Linien AB und AC also gezeichnet. Es werden aus den Endpuncten der einen Linie AB, mit der andern zu den Schenkeln gegebenen Linie AC Bögen beschrieben, und hierauf gegen den Durchschnittspunct C dieser Bögen die Linien AC, BC gezogen.

3. Ein ungleichseitiges Dreyeck, wie Fig 15. wird aus drey gegebenen Linien AB, BC und AC also gezeichnet. Es wird aus dem einem Endpuncte B der einen gegebenen Linie AB mit der andern Linie BC ein Bogen, ferner aus dem andern Endpuncte A mit der dritten Linie AC ein anderer Bogen beschrieben; hierauf werden aus diesen Endpuncten gegen den Durchschnittspunct dieser Bögen C die Linien AC und BC gezogen.

Anmerk. Unter drey gegebenen Linien, aus welchen ein Triangel gezeichnet werden soll, müssen jede zwey zusammen genommen allemal nothwendig größer seyn, als die dritte. Z. E. Die beyden Sparren eines Daches müssen zusammen genommen, nothwendig länger seyn, als der Balken, auf welchen sie gesetzet werden sollen.

22. **Wie können die Vierecke aus gegebenen Linien gezeichnet werden?**

1. Ein Quadrat, wie Fig. 18. oder Raute,

wie Fig. 20. wird aus einer gegebenen Linie BC also gezeichnet. Es wird an die gegebene Linie BC eine andere Linie BA senkrecht, wie Fig. 18. oder unter einem gegebenen schiefen Winkel, wie Fig. 20. gesetzet, und diese der BC gleich gemachet. Hierauf wird eben diese gegebene Linie BC zwischen die Spitzen eines Cirkels gefasset, und mit demselben aus den Puncten A und C Bögen beschrieben. Endlich werden aus den Puncten A und C gegen den Durchschnittspunct dieser Bögen D die Linien AD und CD gezogen.

2. Ein jedes anders **Parallelogramm**, das ist, eine Figur deren zwo gegenüber stehende Seiten parallel sind, wie Fig. 20. wird aus zwey gegebenen Linien BC und BA also gezeichnet. Es wird die eine Linie AB senkrecht, wie Fig. 19. oder unter einem gegebenen schiefen Winkel, wie Fig. 20. an die andere Linie BC gesetzet. Hierauf wird mit der Linie BC aus A ein Bogen, ferner mit der Linie AB aus C ein anderer Bogen beschrieben. Endlich werden aus den Puncten A und C gegen den Durchschnittspunct dieser Bögen D die Linien AD und CD gezogen.

3. Ein **Trapezium**, wie Fig. 22. wird aus vier gegebenen Linien AB, AD, BC, CD, also gezeichnet. Es wird die Linie AB unter dem gegebenen Winkel an die Linie BC gesetzet. Hierauf

auf wird aus A mit der Linie AD ein Bogen, und aus C mit der Linie CD ein anderer Bogen beschrieben. Endlich werden aus den Puncten A und C gegen den Durchschnittspunct dieser Bögen die Linien AD und CD gezogen.

23. Wie können die Vielecke beschrieben werden?

Es läßt sich dieses vermittelst des so genannten Transporteurs am füglichsten vorzeichnen. Weswegen selbiger bey dieser Frage zur Hand genommen werden kann. Wenn man den Radius auf die Peripherie des Zirkels herum trägt, so hat man ein Sechseck.

24. Wie wird eine Fläche gemessen?

1. Ueberhaupt wird eine Quadratfläche von bestimmter Größe, welche wieder in kleinere gleiche Quadratflächen eingetheilet wird, zum Maaßstabe angenommen, und alsdann gefunden, wie vielmal diese Fläche oder deren Theile in der Fläche, welche gemessen werden soll, enthalten sey.

Anmerk. Um diese Ausmessung der Flächen oder Figuren, der oben angezeigten Ausmessung gerader Linien gleichförmig zu machen, bedient man sich der Quadratruthe, oder eines Quadrates, welches eine Ruthe lang und breit ist, diese Quadratruthe enthält 100 Quadratfüße, oder kleinere Quadrate, deren jedes einen Fuß lang und breit ist; der Quadratfuß enthält wieder 100 Quadratzölle, oder kleinere Quadrate, deren jedes einen Zoll lang und breit ist. Ein Stück Landes, welches 180 rheinländische Quadratruthen enthält, wird ein **Morgen** genannt, eine **Hufe** aber heißt ein Stück Landes von 30 Morgen.

2. Insonderheit kann der Quadratinhalt einer Fläche auf folgende Weise aus bloßen Längenmaaß derselben berechnet werden:

a) Wenn die gegebene Fläche ein Triangel ist, so wird die Grundlinie und Höhe derselben gemes-

gemessen, und hierauf entweder 1) die halbe Höhe mit der Grundlinie, oder 2) die halbe Grundlinie mit der Höhe, oder 3) die Höhe mit der Grundlinie vermehret, und in dem letzten Falle das Product mit 2 zertheilet. Die Producte in den beyden ersten Fällen, und der Quotient in dem letztern giebt den Flächeninhalt des ganzen Triangels im Quadratmaaße. Z. E. Es sey in dem Triangel ABC, Fig. 26. die Grundlinie AB $\overset{\circ}{4}\ \overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{6}$; die Höhe desselben CP aber $\overset{\circ}{2}\ \overset{\prime}{5}\ \overset{\prime\prime}{4}$: so ist der Flächeninhalt des ganzen Triangels 5 Quadratruthen, 41 Quadratfuß, und 2 Quadratzoll, welches also geschrieben wird $\overset{\circ}{5},\ \overset{\prime}{41},\ \overset{\prime\prime}{02}$ □ Maaß. Die Rechnungen selbst nach den drey angezeigten Methoden sind folgende:

$AB = \overset{\circ}{4}\acute{2}6''$
$\frac{1}{2} CP = 127$

2982
852
426

ABC $\overset{\circ}{5},4\acute{1},0\acute{2}''$.

$\frac{1}{2} AB = \overset{\circ}{2}\acute{1}\acute{3}$
$CP = 254$

852
1065
426

$\overset{\circ}{5},4\acute{1},0\acute{2}''$

$BC = \overset{\circ}{4}\acute{2}6''$
$CP = 254$

1704
2130
852

2 108204′ dieses halbiret

$\overset{\circ}{5},4\acute{1},0\acute{2}''$.

Anmerk. Es erhellet aus diesen Exempeln, daß in dem Producte für die Quadratzolle und Quadratfüße allezeit zween Ziefern genommen werden müssen. Wenn aber das Maaß der Grundlinie oder der Höhe keine Zölle, oder auch keine Schuhe hat, so muß man in die Stellen derselben Nullen setzen. Z. E. Es sey die

Grund-

Grundlinie AB $\overset{\circ}{4}$ und 6″, die halbe Höhe CP aber $\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}$ so würde die Rechnung diese seyn:

$$
\begin{array}{r}
\overset{\circ}{4}\overset{\prime}{0}6'' \\
\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{0} \\
\hline
8120 \\
406 \\
\hline
\overset{\circ}{4},8\overset{\prime}{7},2\overset{\prime\prime}{0}.
\end{array}
$$

b) Wenn die gegebene Fläche ein Parallelogramm ist, wie Fig. 25. so wird die Grundlinie BC in Längenmaaße, mit der Höhe DP in Längenmaaße vermehret. Das Product giebt den Flächeninhalt des Parallelogramms im Quadratmaaße. Z.E. Es sey BC $\overset{\circ}{5},\overset{\prime}{7},\overset{\prime\prime}{3}$, DP $1\overset{\circ}{3},\overset{\prime}{4}$

$$
\begin{array}{rr}
BC = & \overset{\circ}{5},\overset{\prime}{7},\overset{\prime\prime}{3} \\
DP = & 1\overset{\circ}{3}\,4,\overset{\prime\prime}{0} \\
\hline
 & 22920 \\
 & 1719 \\
 & 573 \\
\hline
BCDA = & 7\overset{\circ}{6},7\overset{\prime}{8},2\overset{\prime\prime}{0}\ \square\ \text{Maaß.}
\end{array}
$$

c)

c) Wenn die gegebene Fläche ein Trapezium, oder Vieleck ist, wie Fig. 28. so wird dieselbe in Triangel eingetheilet, hierauf eines jeden Triangels Flächeninhalt auf die vorhin angezeigte Weise gefunden, und aller dieser Triangel gefundener Flächeninhalt in eine Summe gebracht. Diese giebt der ganzen Fläche Inhalt im Quadratmaaße.

d) Wenn die gegebene Fläche ein Cirkel ist, wie Fig. 29. so wird aus dem gegebenen Durchmesser desselben in Längenmaaße nach **Frage** 14 gefundene Peripherie desselben mit dem vierten Theile des Durchmessers oder halben Radius vermehret. Das Product giebt Flächeninhalt des Cirkels.

Anmerk. Die Größe des **Flächeninhal-**

tes

tes einer Figur muß allemal von der Größe des **Umfanges**, oder **Perimeters** derselben wohl unterschieden werden. Denn es kann eine Figur einen viel größern Perimeter haben, als eine andere, und doch in Ansehung ihres Flächeninhaltes kleiner seyn. Ein Cirkel ist die geraumigste Figur, ein reguläres Vieleck, dessen Perimeter so groß ist, als die Peripherie eines Cirkels, ist kleiner als der Cirkel, ein irreguläres von eben so vielen Seiten noch kleiner, ein Quadrat ist kleiner als ein reguläres Vieleck von gleichem Perimeter, ein irreguläres Viereck noch kleiner, ein gleichseitiger Triangel ist kleiner als ein Quadrat von gleichem Perimeter, und ein ungleichseitiger Triangel

noch

noch kleiner. Z. E. Eine runde Kirche, welche 400 Fuß im Umfange hat, kann mehr Leute in sich fassen, als eine viereckte, deren jede Seite 50 Fuß lang ist. In einem viereckten Garten können mehr Bäume stehen, als in einem dreyeckigen, dessen Zaun eben so lang ist.

Mathe-

Mathematischer Vorübungen dritten Theils

Zweytes Capitel.

Ausmessung der Distanzen und Höhen, Grundrisse, Berechnung der Körper.

Anmerk. Gleich Anfangs wird die Beschaffenheit und der Gebrauch des verjüngten Maasstabes gezeiget.

1. Wie kann die Weite zweyer Orte gemessen werden, zu welchen man entweder gar nicht, oder nicht gerade von einem zum anderen kommen kann?

a) Wenn man zwar zu beyden Orten, aber nicht gerade zu von dem einen zu dem anderen kommen kann, z. E. wenn die Weite des Hauses A, Fig. 30. von dem Baume B, zwischen welchen ein Teich oder Morast lieget, gemessen werden soll; so wird 1) ein willkührlicher Punct C, aus welchem man nach A und B kommen kann, angenommen, und die Weite desselben so wohl von A als von B gemessen. 2) Wird der Winkel ACB gemessen. 3) Werden auf dem Papiere zwo Linien gezogen, welche einen Winkel einschließen, der dem gemessenen gleich ist, beyde Linien

 nien

nien aber werden nach dem verjüngten Maaßstabe so lang gemacht, als die gemessenen im Großen sind. Die Entfernung der beyden Endpuncte dieser Linien, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Weite des Hauses von dem Baume im großen Maaße.

b) Wenn man nur zu einem von den beyden Oertern kommen kann, z. E. Wenn die Entfernung des Hauses A, Fig. 31 von einem Thurme B, der jenseit eines Flusses steht, gemessen werden soll, so wird 1) ein willkührlicher Punct C, aus welchem man nach A kommen kann, angenommen, und die Linie AC gemessen, 2) wird so wohl der Winkel BAC, als ACB gemessen, 3) wird auf dem Papiere eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die Linie AC im großen Maaße; an die beyden Endpuncte dieser Linie aber werden zwey andere Linien unter Winkeln, die den gemessenen gleich sind, gehörig angesetzet, die Entfernung des Endpunctes A in der verjüngten Linie von dem Puncte, in welchem sich die beyden andern Linien durchschneiden, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die gesuchte Weite des Hauses von dem Thurme in großem Maaße.

c) Wenn man zu keinen von beyden Oertern kommen kann, z. E. Wenn die Weite zweyer Thürme einer Stadt, in welche man nicht kommen

men kann, A und B, Fig. 32. gemessen werden soll, so werden

1) zween willkührliche Puncte C und D auf dem Felde vor der Stadt angenommen, und die Weite derselben oder die Linie CD gemessen, 2) werden in C die Winkel ACB und BCD, ferner in D die Winkel CDA und ADB gemessen, 3) wird auf dem Papiere eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so lang ist, als die Linie CD, an derselben jeden Endpunct werden zwey Linien unter den gemessenen Winkeln gehörig angesetzet. Die Entfernung der beyden Puncte, in welchen sich die Linien einander durchschneiden, nach dem verjüngtem Maaßstabe gemessen, giebt die Entfernung der beyden Thürme in der Stadt in großem Maaße.

2. Wie kann die Höhe eines Berges, Thurmes, Hauses, Baumes u. d. g. gemessen werden?

a) Wenn man dicht an den Fuß des Berges, Thurmes rc. kommen kann, z. E. Wenn die Höhe des Thurmes AB, Fig. 33. gemessen werden soll, so kann solches auf folgende Arten geschehen.

aa) Vermittelst eines Winkelmessers. Es wird 1) in einiger Entfernung vom Thurme ein Punct C angenommen, und über denselben der Winkelmesser so gestellet, daß die unbewegliche Diopter horizontal stehe, die bewegliche aber A gerichtet sey, wodurch also die Größe des Winkels ACB gefunden wird, 2) wird die Entfernung dieses Punctes von dem Thurme, oder die Linie DE und die Höhe des Statives des Winkelmessers EC gemessen, 3) wird auf dem Papiere eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die der Linie DE, an dem einen Puncte dieser Linie wird eine andere Linie unter dem gemessenen Winkel angesetzet, an dem andern aber eine senkrechte Linie errichtet, welche die an dem erstern Endpuncte angelegte Linie durchschneidet. Die Länge dieser senkrechten Linie nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Höhe des Thurmes, wenn dazu noch die Höhe des Statives des Winkelmessers ist hinzugesetzet worden.

bb) Vermittelst zweener Stäbe von verschiedener Länge. Es wird 1) in einiger Entfernung von dem Thurme ein langer Stab senkrecht gestellet, 2) wird ein kleinerer Stab so errichtet, daß, wenn man das Auge an des kleinern Stabes Spitze hält, die Spitze des längern Stabes die Spitze des Thurmes bedecket, 3) wird die Höhe beyder Stäbe, ihre Entfernung von einander, und die Entfernung des kleinern Stabes von dem Thurme gemessen, 4) wird folgende Proportion gemacht, wie die Entfernung beyder Stäbe von einander, zu dem Unterschiede ihrer Höhe, also die Entfernung des kleinern Stabes

von

von dem Thurme zu der geſuchten Höhe des Thurmes. Zu dem vierten Proportional-Terminus wird die Höhe des kleineren Stabes addirt. Z. E. Es ſey die Höhe des kleinern Stabes $4'$, des größern $16'$, folglich ihr Unterſchied 6, die Entfernung beyder Stäbe von einander $5'$, und die Entfernung des kleinern Stabes von dem Thurme $6^{\circ}5'$.

$5' : 6' = 65' :$

$$
\begin{array}{r|l}
6' & 5 \\
\hline
39{,}0' & 7^{\circ}8' \\
35 & 4' \text{ Höhe des Stabes.} \\
\hline
40 & 8^{\circ}2' \text{ Hohe des Thurmes.} \\
40 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

cc) Vermittelſt des Schattens. Es wird 1) die Länge des Schattens, welcher der Thurm auf einem freyen ebenen Platz wirſt, und zu eben der Zeit die Länge des Schattens, welche ein ſenkrechter Stab wirſt, nebſt der Höhe des Stabes gemeſſen, 2) wird geſchloſſen, wie die Länge des Schattens vom Stabe zu ſeiner Höhe; alſo die Länge des Schattens vom Thurme zu der geſuchten Höhe des Thurmes.

b) Wenn man nicht dichte an den Thurm kommen kann, Fig. 34. ſo werden 1) in einiger Entfernung von dem Puncte B zween Puncte E und F, welche mit demſelben in gerader

Linie liegen, gewählet, und die Entfernung derselben von einander, oder die Linie EF gemessen, 2) wird in dem Puncte C der Winkelmesser so gestellet, daß die unbewegliche Diopter horizontal, die andere aber gegen A gerichtet sey, wodurch also der Winkel ACL gemessen wird, 3) wird der Winkelmesser eben so in den Punct D gestellet, und der Winkel ADL gemessen, 4) wird auf dem Papiere eine gerade Linie gezogen, und auf dieselbe aus dem einem Puncte die Länge der Linie CD oder EF nach dem verjüngten Maaßstabe getragen; ferner werden an den beyden Endpuncten dieser Länge zwey Linien unter den gemessenen Winkeln gehörig angesetzet, und endlich aus dem Puncte, darinn sich diese beyden Linien durchschneiden, gegen den verlängerten Theil der ersten Linie eine senkrechte Linie gezogen. Die Länge dieser senkrechten Linie, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die gesuchte Höhe des Thurmes in großem Maaße, wozu die Höhe des Statives noch addirt wird.

Anmerk. Auf eine ähnliche Weise kann die Tiefe eines Brunnens, eines Thales, u. d. g. gemessen werden.

3. **Wie kann ein Feld, Garten, Teich, oder ganze Landschaft ausgemessen, in einen Grundriß gebracht, und der Flächeninnhalt davon berechnet werden?**

1) Es werden alle Seiten des Feldes mit einer

ner Meßschnur, oder Meßkette, oder Maaßstabe, und alle Winkel, welche dieselben mit einander machen, mit einem Winkelmesser gemessen und ordentlich aufgeschrieben.

Anmerk. Man könnte auch in der Gegend selbst, wo es thunlich wäre, zween Standpuncte annehmen, aus denen die umliegenden Städte, Thürme u. d. m. gesehen werden könnten, und erstlich die Entfernung dieses Standpunctes, und demnächst die Winkel messen, welche die aus den Puncten nach den Städten, Thürmen gehende geraden Linien so wohl untereinander, als mit der zwischen den Standpuncten enthaltenen Linie einschließen, darauf würde die Linie im verjüngten Maaßstabe aufs Papier gebracht, und alle gemessenen Winkel an die Endpuncte gehörig angesetzet, da denn die Puncte, in welchen die Linien sich durchschneiden, die Lage der beobachteten Oerter auf dem Papiere bestimmen.

2) Wird vermittelst eines Transporteurs die Größe des Winkels, welchen die eine an der ersten liegende Seite mit der ersten auf dem Felde einschließt, an diese erste Seite auf dem Papiere gesetzet, und diese zweyte Linie nach dem verjüng-

ten Maaßstabe so lang gemachet, als die zweyte auf dem Felde gemessene Seite der Fläche im großem Maaße.

3) Wird auf eben diese Weise die dritte und vierte Seite der gemessenen Fläche nach dem verjüngten Maaßstabe und unter den gehörigen Winkeln auf das Papier getragen, bis man endlich, wenn alle Seiten bis auf zweye, und alle Winkel bis auf einen sind aufgetragen worden, eine kleine Figur erhält, welche dem gemessenen Felde ähnlich seyn muß, und den Grundriß dieses Feldes giebt, in welchen man hernach alle merkwürdige Umstände des Feldes, z. E. Grenzsteine, Wege, Flüsse zeichnen kann.

4) Wird dieser Grundriß in Triangel eingetheilet, in jedem Triangel aber eine Linie zur Grundlinie angenommen, und diese, nebst der Höhe nach demselben verjüngten Maaßstabe, nach welchem der Grundriß ist gezeichnet worden, genau gemessen.

5) Wird der Flächeninnhalt eines jeden Triangels, darinn der Grundriß iſt eingetheilet worden, und ferner der Flächeninnhalt des ganzen Grundriſſes nach Fig. 35. in verjüngten Quadratmaaße berechnet, welches zugleich den Flächeninnhalt des ganzen Feldes im großen Quadratmaaße giebt.

Z. E. Es ſey ein Feld ausgemeſſen worden, welches ſieben Seiten hat. Die erſte enthalte $8^{\circ}5'$, die andene $5^{\circ}2'$, die dritte $4^{\circ}7'9''$, die vierte $5^{\circ}9'2''$, die fünfte $5^{\circ}8'9''$, die ſechſte $6^{\circ}7'2'$, die ſiebente $3^{\circ}5'$. Der Winkel zwiſchen der erſten und zweyten Seite ſey $129^{\circ}, 45'$, zwiſchen der zweyten und dritten $139^{\circ}, 15'$, zwiſchen der dritten und vierten 109°, zwiſchen der vierten und fünften 150°, zwiſchen der fünften und ſechſten $120^{\circ}, 30'$, zwiſchen der ſechſten und ſiebenten 131°, zwiſchen der ſiebenten und erſten $120^{\circ}, 30'$.

Nun ſey AB Fig. 35. nach dem verjüngten Maaßſtabe ſo groß gemachet, als die erſte Seite des Feldes, folglich $8^{\circ}5'$, an AB sey der Winkel ABC von $129^{\circ}, 45'$ gesetzet, und BC im verjüngten Maaße so groß, als die zweyte Seite, folglich $5^{\circ}2'$, an BC sey der Winkel BCD von $139^{\circ}, 15'$ gesetzet, und CD so groß als die dritte Seite u. s. w. so wird die Figur ABCDEFG den Grundriß des ausgemessenen Feldes geben. Dieser Grundriß wird durch die Linien GB, FB, EB, EC in fünf Triangel getheilet, so findet man nach dem verjüngten Maaßstabe, daß die Grundlinie GB in dem ersten Triangel GAB $10^{\circ}7'1''$, die Höhe desselben AH aber $2^{\circ}4'$ betrage. In dem andern Triangel GBE ist die Grundlinie FB $12^{\circ}4'3''$, die Höhe GI $5^{\circ}7'9''$, in dem dritten Triangel FBE ist die Grundlinie FB die vorige, die Höhe EK aber $5^{\circ}1'6''$, in dem vierten Triangel EBC ist die Grundlinie EB $10^{\circ}8'8''$, die Höhe CL $4^{\circ}1'2''$, in dem fünften Triangel ECD ist die Grundlinie EC $8^{\circ}7'4''$, die Höhe DR aber $3^{\circ}0'6''$. Die Berechnung des Flächeninhaltes dieser fünf Triangel ist folgende:

G=

$GB = 1\overset{\circ}{0}\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{1}$
$\frac{1}{2}AH = \overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{0}$

21420
1071

$\triangle GAB = 128\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{20}$

$FB = 1\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{3}$
$\frac{1}{2}EK = 258$

9944
6215
2486

$\triangle FBE = 3\overset{\circ}{2}0\overset{\prime}{6}9\overset{\prime\prime}{4}$

$EC = \overset{\circ}{8}\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{4}$
$\frac{1}{2}DR = 153$

2622
5370
874

$\triangle ECD = 1\overset{\circ}{3}3\overset{\prime}{7}2\overset{\prime\prime}{2}$

$FB = 1\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{3}$
$GI = 579$

11187
8701
6215

2) 719697

$\triangle GBF = 35^{\circ}9848\frac{1}{2}$

$EB = 1\overset{\circ}{0}\overset{\prime}{8}\overset{\prime\prime}{8}$
$\frac{1}{2}CL = 206$

6528
2176

$\triangle EBC\ 2\overset{\circ}{2}4\overset{\prime}{1}2\overset{\prime\prime}{8}$

1) $GAB = 1\overset{\circ}{2}8\overset{\prime}{5}2\overset{\prime\prime}{0}$
2) $GBF = 359848\frac{1}{2}$
3) $FBE = 320694$
4) $EBC = 224128$
5) $ECD = 133722$

Die Summe aller Triangel im □ Maaße ist $= 116^{\circ}, 69^{\prime}, 12^{\prime\prime}\frac{1}{2}$

Dieses ist also auch der Flächeninhalt des ganzen Feldes.

Anmerk. 1) Es wäre nicht nöthig gewesen, die beyden letzten Seiten FG und GA, nebst dem

dem Winkel FGA, welchen sie einschließen, oder die letzte Seite GA nebst den beyden Winkeln FGA, und GAB, welche an dieser Seite liegen, zu messen, weil sich diese Stücke in dem Risse von selbst geben, indessen dienet die wirkliche Ausmessung dieser Stücke dazu, daß man dadurch von der Richtigkeit der ganzen Ausmessung versichert werde.

2) Wenn die Seiten des Feldes über Anhöhen und Berge gehen, so muß nicht die über einen Berg gemessene Länge der Seite in den Grundriß gebracht werden, weil sonst die Ecken des Feldes zu weit aus einander kommen würden, sondern man muß die Entfernung beyder Ecken so messen, wie in der ersten Frage gezeigt worden. Es ist hiebey noch zu bemerken, daß auf einem

Ber-

Berge nicht mehr Bäume stehen können als auf einer Ebene, welche so groß ist, als die Grundfläche des Berges, weil die Bäume alle senkrecht gegen der Grundfläche wachsen.

4. Wie kann man die Körper eintheilen?

1. In Ansehung der Beschaffenheit der Flächen, welche sie einschließen, in Körper mit **ebenen** und **gekrümmten** Oberflächen.

2. In Ansehung der Flächen, die entweder einander alle, oder zwey gegenüber stehende gleich sind, oder auch wo diese, oder gar alle ungleich sind.

5. Was für Körper kommen vorzüglich in Betrachtung?

Prismen, Pyramiden, Kugeln.

1. Das **Prisma** wird unten und oben von

zwoen gleichen Flächen eingeschlossen: die Seitenflächen sind Parallelogramme, so viel als der Anzahl als Seiten an der Grundfläche sind. Unter den Prismen verdient besonders bemerkt zu werden:

a) Der **Würfel** oder Cubus, welcher in allen von sechs Quadratflächen eingeschlossen wird.

b) Der **Balken** oder das **senkrechte Parallepipedum**, welches von sechs Rectangulis, deren zwey gegenüberstehende gleich sind, eingeschlossen wird.

c) Die **Walze** oder der **Cylinder**, welcher von zweyen Cirkulflächen und einer gekrümmten Seitenfläche eingeschlossen wird.

2. Die Pyramide hat nur eine Grundfläche, die Seitenfläche bestehet aus so vielen oben an der Spitze zusammenstoßenden Dreyecken, als

die

die Grundfläche Seiten hat. Unter den Pyramiden wird auch gerechnet:

Der **Kegel**, dessen Grundfläche ein Zirkel ist, und die Seitenfläche gekrümmt und oben zugespitzt ist.

3. Die **Kugel** oder **Sphäre**, welche von einer einigen gekrümmten Fläche, in welcher alle Puncte von dem Mittelpuncte gleiche Entfernung haben, eingeschlossen ist.

6. Wie wird der Inhalt eines Körpers gemessen?

1) Ueberhaupt wird ein Körper von bestimmter Größe, welcher wieder in kleinere gleiche Körper eingetheilet wird, zum Maaßstabe angenommen und alsdann gefunden, wie vielmal dieser Körper oder seine Theile in dem Körper, dessen Inhalt soll gemessen werden, enthalten sey,

2) In-

2) Insonderheit wird das Cubikmaaß oder der körperliche Inhalt

a) eines Würfels also gefunden: Es wird 1) eine Seite des gegebenen Würfels nach Längenmaaß gemessen, 2) wird das Längenmaaß dieser Seite mit sich selbst vermehret, und 3) das gefundene Product wieder mit demselben Längenmaaß vermehret. Dieses Product giebt den gesuchten körperlichen Inhalt des Würfels. Z. E. Es sey die Seite eines Würfels 4°25″, so ist die Rechnung folgende:

425

425″	Längenmaaß einer Seite des Würfels.
425	
2125	
850	
1700	
1806′25″	Quadratmaaß einer Fläche des Würfels.
425	
903125	
361250	
722500	
76°,765′,625″	Cubikmaaß des ganzen Würfels.

Anmerk. Man rechnet auf einen Cubikfuß 1000 Cubikzolle und ſo ferner: Es müſſen alſo für die Cubikzolle, und Cubikfüße allezeit drey Ziefern genommen werden.

b) Eines Balkens oder Säule. Es wird 1) die Länge und Breite der Grundfläche im Längenmaaße mit einander vermehret, oder bey einem Cylinder dieſer Inhalt der Grundfläche aus

M dem

dem Durchmesser derselben gefunden, 2) wird diese Grundfläche mit der Höhe des Balkens oder der Säule vermehret. Dieses Product giebt den gesuchten körperlichen Inhalt.

Anmerk. 1) Es kann auf solche Weise der körperliche Inhalt eines Korn, Stroh, Heuhaufens, einer Mauer gefunden, und daraus z. E. bestimmet werden, wie viel Scheffel Korn ein Kornhaufen enthalte, wenn man nur vorher ausgemachet hat, wie viel Cubikfüße und Zölle ein Scheffel enthält.

c) Einer Pyramide oder Kegels. Es wird 1) der Inhalt der Grundfläche, wie vorhin gefunden, 2) wird derselbe mit dem dritten Theile der Höhe vermehret, oder es wird der dritte Theil der Grundfläche mit der ganzen Höhe vermehret, oder es wird die ganze Grundfläche mit der ganzen Höhe vermehret, und das Product durch 3 zertheilet. In allen dreyen Fällen be-

kömmt

kömmt man den körperlichen Inhalt der Pyramide, oder des Kegels.

d) Einer Kugel. Es wird 1) aus dem Durchmesser der Kugel die Peripherie gefunden, 2) wird diese Peripherie mit dem Durchmesser vermehret: das Product giebt den Inhalt der Kugelfläche, oder der ganzen Fläche, welche die Kugel einschließt, 3) wird diese Kugelfläche mit dem sechsten Theile des Durchmessers, oder der sechste Theil der Kugelfläche mit dem ganzen Durchmesser vermehret, oder auch die ganze Kugelfläche mit dem ganzen Durchmesser vermehret, und das Product hernach mit 6 getheilet werden. In allen dreyen Fällen findet man den körperlichen Inhalt der Kugel. Z. E. der Durchmesser der Erde, welche beynahe kugelrund ist, enthält 1714 geographische oder deutsche Meilen; hieraus kann die Größe der Oberfläche der Erde sowohl, als ihr körperlicher Inhalt also berechnet werden:

113 : 355 = 1714.
355
8570
8570
5142
113) 608470 | 5384,7

113) 608470 | 5384,7 Meilen Umkreis der Erde.
1714
215388
53847
376929
53847
9229375,8 Quadratmeilen, Oberfläche der Erde.
1714
369175032
92293758
646056306
92293758
6) 15819150121,2 | 2636525020,6 Cubikmeilen, körperlicher Inhalt der Erde.

Anmerk. Die Zahlen hinter dem Comma sind Decimal-Brüche, welche das Zehnte einer Meile beynahe angeben.

Wenn

Wenn man nicht so genau als hie geschehen, rechnen wolte; so fände sich auch die Kugel folgender maaßen. 1) Man vermehre den Diameter zweymal durch sich selbst. 2) Zu den Zahlen 300, 157, und den Würfel des Diameters suche man vermittelst der Regel Detri den vierten Proportional-Terminus. Dieser wird der Inhalt der Kugel seyn.

Anmerk. Der körperliche Inhalt ganz irregulärer Körper kann gefunden werden, wenn man sie in ein reguläres Gefäß mit Wasser, oder feinen Sande versenket, die Höhe des Wassers oder Sandes in dem Gefäße bemerket, hierauf den Körper wieder herauszieht, und den körperlichen Inhalt des Raumes mißt, um welchen das Wasser oder der Sand gefallen ist, welcher Raum dem gesuchten Inhalte des Körpers gleich ist.

Ende der Vorübungen.

TAB:I

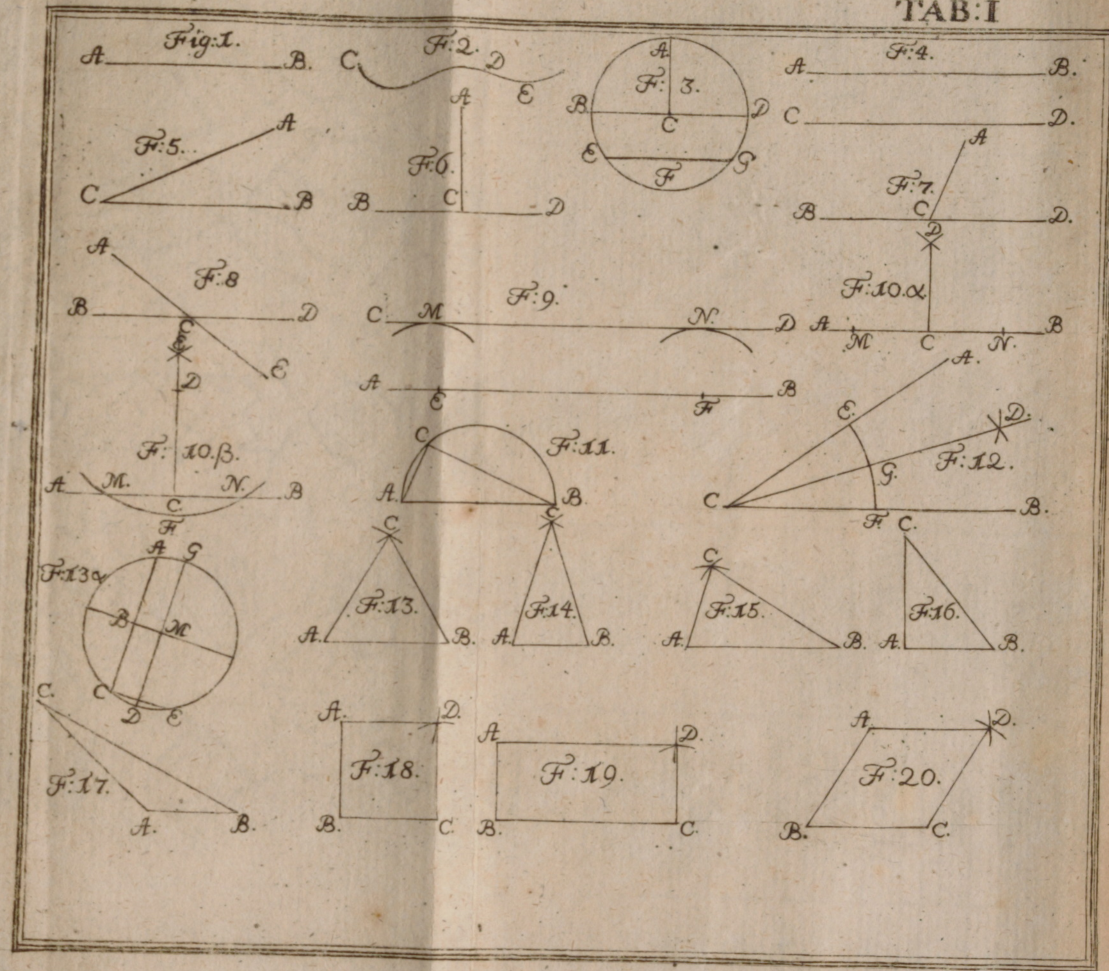

Fig:1.
F:2.
F:3.
F:4.
F:5.
F:6.
F:7.
F:8
F:9.
F:10.α
F:10.β.
F:11.
F:12.
F:13α
F:13.
F:14.
F:15.
F:16.
F:17.
F:18.
F:19.
F:20.

TAB: II

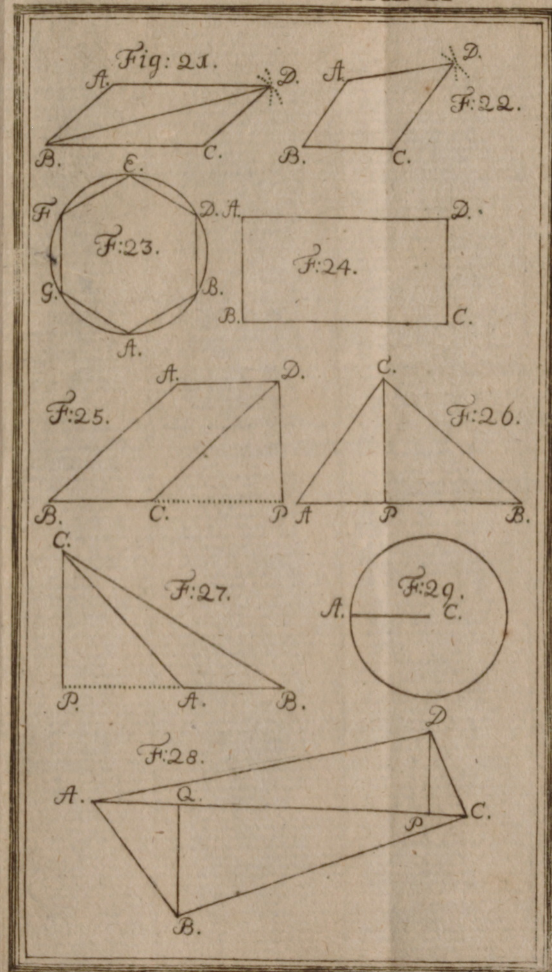
Fig: 21.
A.
D.
B.
C.
A.
D.
F: 22.
B.
C.
E.
F.
D.
F: 23.
G.
B.
A.
A.
D.
F: 24.
B.
C.
A.
D.
F: 25.
B.
C.
P.
C.
F: 26.
A
P
B.
C.
F: 27.
P.
A.
B.
F: 29.
A.
C.
D
F: 28.
A.
Q.
C.
P
B.

TAB:III

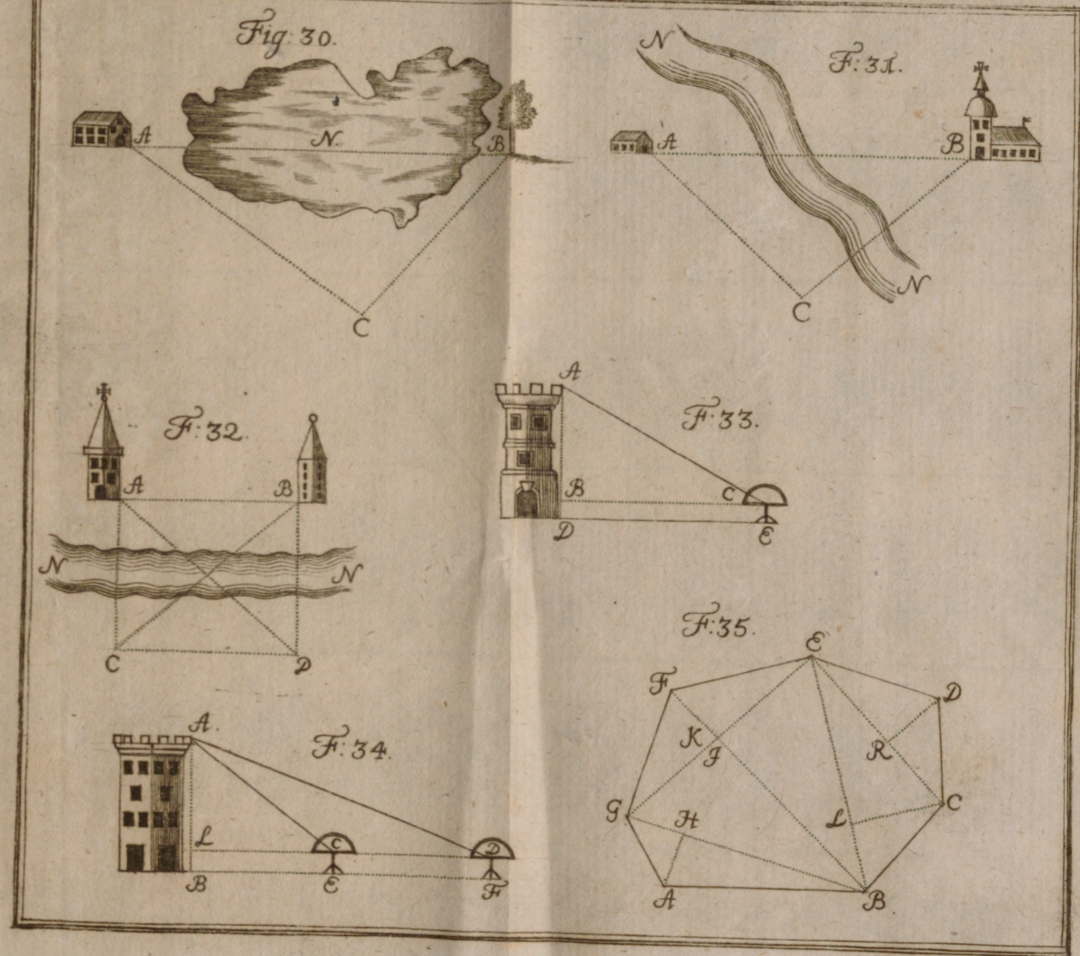
Fig: 30.
A
N.
B
C
F: 31.
N
A
B
N
C
F: 32.
A
B
N
N
C
D
A
F: 33.
B
C
D
E
F: 34.
A.
L
C
D
B
E
F
F: 35.
E
F
D
K
J
R
G
H
L
C
A
B

l:

90000

5000×6=90000.

ftsregel.

ſchaftsregel?

uſammenlegen, um
ehen, und nach ei-
ein jeder nach An-
ewinn bekömt.

dieſe Regel?

r Auslage und des
und zweyten Ter-
in jeder vor ſich da-
zu