Ros Dok Rostocker Dokumentenserver

Dieses Werk wurde Ihnen durch die Universitätsbibliothek Rostock zum Download bereitgestellt.
Für Fragen und Hinweise wenden Sie sich bitte an: digibib.ub@uni-rostock.de

Friedrich Wilhelm Daniel Snell

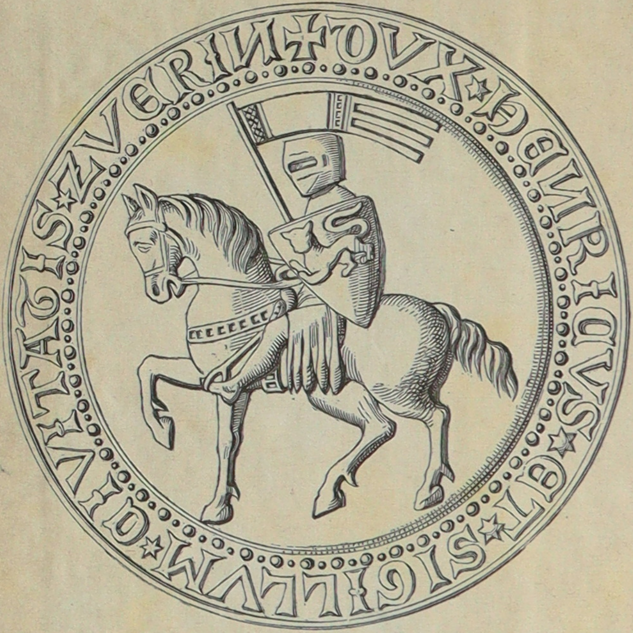
Leichtes Lehrbuch der Geometrie für die ersten Anfänger : Mit 5 Kupfern

Gießen: bey Georg Friedrich Heyer, 1799

https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769

Druck   Freier Zugang   PUBLIC DOMAIN

Landesbibliothek
Mecklenburg-Vorpommern
Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1772388769/phys_0001
DFG



Stadtbibliothek zu Schwerin.

Geschenk von Dr. Bärensprung.

Qa I
104.

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0004
DFG

Leichtes
Lehrbuch
der
Geometrie
für die
ersten Anfänger

von
Friedrich Wilhelm Daniel Snell,
Professor der Philosophie und Lehrer am
Gymnasium zu Gießen.

Mit 5 Kupfern.

Gießen 1799.
bey Georg Friedrich Heyer
Universitäts-Buchhändler.

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0005
DFG

Vorerinnerung.

Dieses Lehrbuch ist für den ersten Cursus der Geometrie, sowohl in Bürgerschulen als Gymnasien bestimmt. Natürlich wird vorausgesetzt, daß der Lehrling schon Unterricht in der Arithmetik erhalten, und vorzüglich die Lehre von den Verhältnissen gefaßt habe, auch die Quadratwurzel auszuziehen verstehe. Daß der Verfasser die beträchtliche Zahl der Elementargeometrieen mit einer neuen vermehrt, wird wohl theils durch den allgemeinen Grund entschuldigt werden können, daß jeder Lehrer beym Unterricht, wenn es möglich ist, gern seinen eigenen Leitfaden gebraucht; theils durch die ziemlich allgemein zugestandene Wahrheit, daß in Ansehung der Methode bey dem ersten Unterrichte noch manches zur Erleichterung für den Lehrling und Erweckung seines Interesse an dieser nützlichen Wissenschaft, geschehen kann. Ob der Verfasser hierzu auch etwas beygetragen habe, mögen Sachverständige entscheiden. Wenigstens war es sein ernstliches Bestreben. Daß er die Trigonometrie, (aus der Lehre von den Chorden entwickelt, und als einen Theil der Geometrie) mit aufgenommen, auch bey der Anwendung der theoretischen Sätze auf Berechnung der Flächen und Körper, Aufnehmung der Felder u. s w. sich nicht allzukurz gefaßt hat, wird hoffentlich nicht gegen den Zweck dieses Lehrbuchs seyn. Gießen, den 20. Februar 1799.

Erstes Kapitel.

Erklärungen von Linien, Winkeln und Figuren.

1. Erklärung. Die Geometrie lehret, wie man die Größe ausgedehnter Dinge, nämlich der Linien, Flächen und Körper, ausmessen soll: z. B. die Länge eines Grabens, eines Wegs, die Breite eines Flusses, die Höhe eines Thurms, die Fläche eines Ackers, den körperlichen Inhalt eines Kastens, einer Klafter Holzes u. dergl.

2. Erklärung. Eine mathematische Linie ist eine Länge, ohne Breite und Dicke. Der Anfang und das Ende derselben sind mathematische Punkte. Ein mathematischer Punkt ist blos die Grenze einer Linie, und hat keine Länge, Breite und Dicke, oder er hat gar keine Ausdehnung.

3. Anmerkung. Die mathematischen Linien und Punkte kann man nur in Gedanken zeichnen. Diejenigen, welche wirklich auf ein Papier oder eine Tafel gezeichnet werden, können nie so fein ausfallen, daß sie gar keine Breite hätten, und heisen daher, zum Unterschiede von jenen, physische Linien und Punkte. Es ist aber nöthig, wenn man genaue Zeichnungen liefern will, daß man die Linien so fein als möglich ziehe.

Da der Punkt nur die Grenze einer Linie ist, so ist er gar kein Theil derselben: denn sonst wäre er selbst eine kleine Linie. Es wäre daher unrichtig, wenn man sagen wollte, daß eine Linie aus vielen Punkten zusammengesetzt sey.

4. **Erklärung.** Eine **grade Linie** ist eine solche, welche weder zur Rechten noch zur Linken von ihrer ersten Richtung abweicht. (fig. 1) Man benennt eine Linie gewöhnlich mit zwey Buchstaben, welche am Anfange und am Ende stehen, so wie hier, die Linie a b. Eine **krumme Linie** weicht von ihrer ersten Richtung beständig ab.

5. **Grundsatz.** Zwischen zwey Punkten ist nur eine grade Linie möglich, aber unzählich viele krumme. Die grade Linie ist die kürzeste unter denselben. Zwey grade Linien können daher auch keinen Raum einschließen.

6. **Anmerkung.** Um Linien auf dem Papier zu ziehen, gebraucht man ein richtiges Lineal, und ein gutes Bleystift oder eine Reißfeder. Auf einem Balken zieht man eine grade Linie gewöhnlich durch eine schwarzgefärbte Schnur, welche noch naß ist. Auf dem Felde durch eine Schnur, welche an zwey Stäbe, die im Anfangs- und Endpunkte der Linie stehen, gespannt ist: oder wenn sie lang ist, durch Stäbe, die in grader Richtung hinter einander gesteckt sind, (wovon in der Folge noch mehr gesagt werden wird.)

7. **Erklärung.** Wenn man eine grade Linie messen will, so gebraucht man dazu eine grade Linie von willkührlicher Länge, welche eine **Ruthe** heißt. Die geometrische Ruthe wird in 10 **Schuhe**, der

der Schuh in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien oder Striche getheilt.

8. Anmerkung. Man theilt auch im gemeinen Leben die Ruthe in 12, oder 16, oder 18 Schuhe. Die Rheinländische Ruthe hält 12 Schuhe. Für diese Maaße hat man folgende Zeichen angenommen: eine Ruthe (°), Schuh ('), Zoll (''), Linie oder Strich ('''). Z. B. 14 Ruthen, 9 Schuhe, 5 Zolle, 2 Linien, schreibt man: 14° 9' 5'' 2'''.

Am bequemsten ist die in der Geometrie gewöhnliche Decimal-Eintheilung, weil man durch Multiplication und Division mit 10 die größern Maaße leicht in die kleinern, oder die kleinern in die größern verwandeln kann. z. B. 6° sind 60' oder 600''. Man darf also nur ein, zwey Nullen anhängen, um die Zahl der Ruthen in Schuhen oder Zollen auszudrücken. — Ferner: 325'' sind 3° 2' 5''. Hier wird die letzte Ziffer zur rechten Seite die Zolle bedeuten, die zweyte die Schuhe, die dritte die Ruthen.

9. Erklärung. Eine ebene Fläche ist diejenige, welche so beschaffen ist, daß wenn man innerhalb derselben aus irgend einem Punkte a grade Linien nach b, c, d, e ziehet, diese ganz in die Ebene hinein fallen. (fig. 3.) Eine krumme Fläche ist eine solche, von welcher kein Theil eben ist.

10. Anmerkung. Die krummen Flächen sind entweder doppelt oder einfach gekrümmt. Zu den ersten gehört die Kugelfläche, da man nach keiner Richtung grade Linien in ihnen ziehen kann. Zu den letztern gehört die Fläche eines runden, überall gleich dicken Körpers (z. B. einer Walze, Radwelle), in welcher man nach gewissen, aber nicht nach allen, Richtungen

grade Linien ziehen kann, die ganz in die Fläche hinein fallen.

Wenn man vor einer Ebene oder Fläche schlechthin redet, so versteht man darunter eine ebene Fläche.

11. Erklärung. Wenn sich eine grade Linie a b um den einen feststehenden Endpunkt a drehet, so beschreibt der andere Endpunkt b eine in sich selbst zurückkehrende Linie, welche ein Cirkel oder Kreis genennt wird. (fig. 4.) Der feststehende Endpunkt a ist der Mittelpunkt oder Centrum; die von dem Punkte b beschriebene Linie ist die Peripherie oder der Umfang des Cirkels; die Linie a b heißt der Halbmesser (radius.)

12. Anmerkung. Alle Halbmesser eines Cirkels sind gleich groß, weil alle Punkte der Peripherie von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind.

13. Erklärung. Eine grade Linie a b, (fig. 5.) welche durch den Mittelpunkt des Cirkels gehet, heißt sein Durchmesser (diameter.) Der Durchmesser ist der doppelte Halbmesser; daher sind alle Durchmesser eines Cirkels gleich groß — Eine Linie c d, welche nicht durch den Mittelpunkt gehet, heißt eine Sehne oder Chorde. Dergleichen Sehnen können unzählig viele in einen Cirkel gezeichnet werden, die immer größer werden, je näher sie dem Mittelpunkte liegen: die größte Sehne ist der Durchmesser — Ein Stück der Peripherie, z. B. c m d heißt ein Bogen — Die Fläche zwischen einer Sehne, und dem dazu gehörigen Bogen, z. B.

zwi-

zwischen c d und c m d, heißt ein Abschnitt. — Die Fläche, welche zwischen zwey Radien e b und e f, und dem Bogen f b liegt, heißt ein Ausschnitt. — Eine grade Linie o p, welche die Peripherie des Cirkels in einem Punkte m berührt, heißt eine Tangente des Cirkels.

14. Anmerkung. Um Cirkel auf dem Papier zu zeichnen, gebraucht man Instrumente, welche auch Cirkel heißen. Man hat sie von mancherley Art, größere und kleinere; solche, wo man statt des einen Cirkelfußes einen Bleystift, eine Reißfeder u. s. w. einschrauben kann.

Auf dem Felde zeichnet man die Kreise mit einer Schnur, deren eines Ende an einem eingesteckten Stabe festhängt, worauf das andere Ende nebst einem daran befestigten spitzigen Stäbchen herum geführt wird — Man gebraucht dazu auch einen Stangencirkel, (fig. 6.) einen Stab mit 2 eisernen Spitzen, die an ihren Hülsen hin und her geschoben, und am Ende festgeschraubt werden können.

15. Erklärung. Die Peripherie jedes Cirkels, er mag groß oder klein seyn, wird in 360 gleiche Theile getheilt, welche Grade heißen. Ein Halbcirkel hält also 180 Grade, und der vierte Theil des Cirkels, oder ein Quadrant, hält 90 Grade. (Wenn diese Theilung auch nicht wirklich geschieht, so kann man sie doch in Gedanken verrichten, oder kann sich vorstellen, als sey jeder Cirkel in 360 Grade getheilt.

16. Anmerkung. Es ist an sich willkührlich, wie groß die Anzahl der Grade seyn soll: Denn man hätte auch statt 360 nur 100 oder 200 Grade anneh-

men können. Wahrscheinlich ist diese Zahl deswegen gewählt worden, weil sie sich mit vielen Zahlen grade dividiren läßt. Man kann also die Peripherie eines Cirkels leicht in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 gleiche Theile theilen.

17. Erklärung. Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile getheilt, welche Minuten heißen; jede Minute in 60 Secunden; jede Secunde in 60 Tertien.

18. Anmerkung. Die Bezeichnung ist wie bey den Ruthen, Schuhen und Zollen. Wenn man z. B. einen Bogen gemessen hat, welcher 6 Grade, 19 Minuten, 12 Secunden, 10 Tertien groß ist, so schreibt man: er hält $6^{\circ}\ 19'\ 12''\ 10'''$. Aus dem Zusammenhang wird man in jeder Stelle eines Buchs leicht sehen, ob daselbst von der Länge einer graden Linie oder eines Cirkelbogens die Rede ist, ob also Ruthen, Schuhe und Zolle, oder Grade, Minuten und Secunden durch diese Zeichen angedeutet werden.

19. Erklärung. Cirkel von verschiedener Größe, die um einen und denselben Mittelpunkt gezeichnet werden, heißen concentrische Cirkel, (fig. 7.) Wenn aus dem Mittelpunkte a die Halbmesser a d und a e gezogen werden: so ist zwar der Bogen d e länger, als der Bogen b c, aber die Zahl der Grade ist doch bey beyden gleich. Denn weil die Peripherie jedes Cirkels 360 Grade hält, so werden die Grade des kleinern Cirkels kleiner, als die Grade des größern Cirkels seyn. Eben so wird der Bogen b c kleinere Grade als der Bogen d e, und dennoch beyde gleich viele enthalten.

20. An-

20. Anmerkung. Die Größe eines solchen Bogens mißt man mit einem hölzernen oder meßingenen Halbcirkel, welcher in seine 180° getheilt ist, und Transporteur heißt. (fig. 8.) Man legt ihn mit seinem Mittelpunkte an den Mittelpunkt des Cirkels a, so daß das Lineal m n an dem Radius a d genau anliegt. Alsdann fällt ein Stück des Halbcirkels m r zwischen die Linien a d und a e: Die Grade des Bogens m v werden von m nach v gezählt, und zeigen an, wie viele Grade der Bogen d e hält.

21. Erklärung. Die Neigung zweyer graden Linien a b und a c in einen Punkt a heißt ein Winkel (angulus) (fig. 9) Der Punkt a, wo sich die Linien durchschneiden, heißt die Spitze des Winkels (vertex): die Linien a b und a c heißen die Schenkel oder Seiten desselben (crura).

22. Anmerkung. Um die Größe eines solchen Winkels zu bestimmen, stelle man sich vor, als wenn die Spitze desselben in dem Mittelpunkte eines Cirkels läge, alsdann fällt ein Bogen des Cirkels zwischen die Schenkel, welcher das Maas des Winkels ist (wie in der 8ten Figur). Man mißt daher einen Winkel auch mit dem Transporteur, (20). Hieraus ist klar, daß nicht die Länge oder Kürze der Schenkel, sondern die Neigung derselben die Größe der Winkel bestimmet.

23. Anmerkung. Man kann die Winkel auf dreyerley Art bezeichnen, und wir werden uns in der Folge bald der einen, bald der andern bedienen. 1) Entweder benennt man ihn mit einem Buchstaben auswendig an der Spitze (wie fig. 9. der Winkel a, oder $<$ a); 2) oder mit einem Buchstaben, der inwendig an die Spitze gesetzt wird, (wie fig. 10. die Winkel m und n): 3) oder mit drey Buchstaben,

 welche

welche an den beyden Schenkeln und an der Spitze stehen, dann muß aber der Buchstabe an der Spitze in die Mitte kommen, z. B. fig. 9. ist $\angle$. b a c.

24. **Erklärung.** Wenn sich zwey grade Linien durchschneiden, so heißen die gegenüberstehenden Winkel a und b, oder c und d **Vertikalwinkel** (fig. 11.)

25. **Erklärung.** Wenn eine grade Linie auf eine andere, aber nicht ans Ende fällt, so entstehen zwey Winkel a und b, welche **Nebenwinkel** heißen, (fig. 12.) Sind diese einander nicht gleich: so heißt der größere Winkel a ein **stumpfer**, der kleinere b ein **spitzer Winkel**.

26. **Erklärung.** Wenn die beyden Nebenwinkel m und n einander gleich sind, so heißen sie **rechte Winkel** (fig. 13). Weil nun das Maaß zweyer Nebenwinkel ein Halbcirkel oder 180 Grade ist: so hält jeder rechte Winkel 90°, ein stumpfer hält mehr, ein spitzer weniger als 90°.

27. **Erklärung.** Eine Linie a c (fig. 13.) welche mit einer andern b d rechte Winkel macht, steht auf dieser **senkrecht**, oder **perpendikulär** — Senkrechte Linien und rechte Winkel gehören immer zusammen, daher kann man auch sagen: wenn eine Linie auf einer andern senkrecht steht, so sind die dadurch entstehenden Nebenwinkel einander gleich, oder es sind rechte Winkel.

28. **Erklärung.** Die Linie a b (fig. 14.) läuft mit c d **parallel**, wenn sie von dieser gleich weit entfernt ist.

29. Anmerkung. Wenn zwey Linien m n und q r einer dritten o p parallel sind, so sind sie unter einander selbst parallel. (fig. 15.)

30. Anmerkung. Wenn auf einer Linie a b (fig. 16.) zwey senkrechte Linien c d und e f stehen, so laufen dieselbigen parallel, d. i. sie werden sich weder einander nähern, noch von einander entfernen; man mag sie so lange ziehen, als man will.

31. Anmerkung. Man hat mehrere Methoden, wie man auf dem Papier eine Linie mit einer andern parallel ziehen kann, wovon einige hier, andere weiter unten genennt werden sollen. 1) Mit Hülfe eines Parallel-Lineals, (fig. 17.) welches aus zwey Linealen besteht, die durch messingene bewegliche Bändchen so aneinander gefügt sind, daß sie näher an einander oder weiter von einander geschoben werden können. Gesetzt, man sollte (fig. 18.) durch den Punkt c eine Linie mit a b parallel ziehen, so legt man das eine Lineal an a b, und thut das andere auf bis an den Punkt c worauf die Linie gezogen werden kann. 2) Man kann dieses auch mit einem einfachen Lineal und einem Cirkel verrichten. Das Lineal wird an a b gelegt, der Cirkel von a b bis c aufgethan, und an dem Lineal herunter gezogen, nun wird der andere Cirkelfuß durch c eine Linie zeichnen, welche mit a b parallel läuft. 3) Endlich kann man sich zu diesem Behuf auch einen rechtwinkelichten Triangel (von dem weiter unten mehr vorkommen wird) von Holz oder Messing machen lassen. Diesen legt man (fig. 19.) an a b, legt das Lineal unten dran, schiebt den Triangel fort bis c, und ziehet die Linie e d.

34. Erklärung. Eine Figur ist eine von Linien eingeschlossene Fläche. (Also ist ein Winkel

keine Figur.) — Es kann gradlinichte und krummlinichte Figuren geben — Es giebt auch Figuren, welche theils von graden, theils von krummen Linien eingeschlossen sind, und gemischte Figuren heißen können (fig. 20.)

33. Anmerkung. Eine gradlinichte Figur muß wenigstens drey Seiten haben: Denn zwey grade Linien können keinen Raum einschließen.

34. Erklärung. Die grade Linien, welche einen Raum einschließen, bilden einen Triangel oder ein Dreyeck. (Hier ist nur von ebenen Figuren die Rede. Eine andere Art von Triangeln sind die sphärischen, welche von drey krummen Linien auf einer Kugelfläche eingeschlossen werden. Diese gehören aber nicht in die ersten Gründe der Geometrie.)

Die Triangel werden eingetheilt, entweder in Ansehung ihrer Winkel, oder in Ansehung ihrer Seiten.

I. In Ansehung ihrer Winkel.

1. Hat er einen rechten und zwey spitze Winkel, so heißt er rechtwinkelicht. (fig. 21.)
2. Hat er einen stumpfen und zwey spitze Winkel, so heißt er stumpfwinkelicht. (fig. 22.)
3. Sind die drey Winkel spitz, so heißt er ein spitzwinkelichter Triangel. (fig. 23.) — (Es kann überhaupt nur ein rechter, oder ein stumpfer Winkel in einem Triangel seyn: die

andern

andern beyden müssen spitz seyn. Sie können aber auch alle drey spitz seyn.)

II. In Ansehung ihrer Seiten.

1. Sind die drey Seiten gleich, so heißt er gleichseitig. (fig. 24.)

2. Sind nur 2 Seiten gleich, so ist er gleichschenkelicht. (fig. 25.)

3. Ist keine Seite der andern gleich, so ists ein ungleichseitiger Triangel. (fig. 26.)

35. Anmerkung. In einem Triangel sind zwey Seiten zusammen immer länger als die dritte.

36. Anmerkung. In jedem Triangel kann man immer eine Seite, welche man will, die Grundlinie nennen. (z. B. a b in der 27sten Figur. Von der Spitze c, welche der Grundlinie a b gegenüberstehet, kann man sich eine Linie c d, senkrecht auf a b gezogen vorstellen, welche die Höhe des Triangels heißt. Wenn der △ stumpfwinkelicht ist (fig. 28), so fällt c d außerhalb desselben, und man muß die Grundlinie a b so weit verlängern, bis sie c d erreicht.

37. Anmerkung. In einem rechtwinkelichten Tr. a b c (fig. 29) heißt die Linie c b, welche dem rechten Winkel a gegenübersteht, die Hypothenuse. Diese ist die längste unter den drey Seiten. Die andern Seiten a b und a c, welche den spitzen Winkeln a und b gegenüberstehen, heißen Catheten.

38. Erklärung. Die viereckichten Figuren sind entweder Parallelogrammen oder Trapezien. Ein Parallelogramm ist eine vier-

viereckichte Figur, worin die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen, und gleich lang sind. Dazu gehören folgende 4 Arten:

1) Das Quadrat, (fig. 30.) welches vier gleiche Seiten, und vier rechte Winkel hat.

2) Das länglichte Rechteck (Rectangulum oblongum. (fig. 31.) welches vier rechte Winkel hat, und worin je zwey und zwey gegenüberstehende Seiten gleich sind.

3) Die Raute (Rhombus.) fig. 32) welches vier gleiche Seiten hat, und worin zwey gegenüberstehende Winkel spitz, und die zwey andern stumpf sind.

4) Die länglichte Raute (Rhomboides.) (fig. 33.) worin die gegenüberstehenden Seiten gleich, und die Winkel spitz und stumpf sind.

39. Anmerkung. Die Aehnlichkeit und Verschiedenheit dieser 4 Figuren ist leicht aufzufinden. — Alle übrige viereckichte Figuren heißen Trapezien. Es können darin zwey Seiten parallel laufen, wie fig. 34, oder es läuft keine Seite mit der andern parallel, wie fig. 35.

40. Erklärung. Alle gradlinichte Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, heißen vielseitige oder vieleckichte Figuren (auch Polygone) Wenn darin sowohl alle Seiten, als auch alle Winkel einander gleich sind, so heißen sie reguläre Vielecke (fig. 36); die übrigen irreguläre (fig. 37).

41. Unter den krummlinichten Figuren ist der Cirkel die merkwürdigste in der Geometrie. Daher wird blos von dieser, und sonst von keiner krummlinichten Figur in der Folge die Rede seyn.

Man kann die Eintheilung der Figuren, um der bessern Uebersicht willen, in einer Tabelle darstellen.

Figuren sind

entweder gradlinichte — oder krummlinichte.

Diese sind

entweder Dreyecke — oder Vierecke — oder Vielecke.

Dreyecke		Vierecke		Vielecke	
theils gleichseitige	theils rechtwinkelichte	Parallelogrammen	Trapezien	reguläre	irreguläre.
oder gleichschenklichte	oder stumpfwinkelichte	1 Quadrat			
oder ungleichseitige	oder spitzwinkelichte	2 Länglichtes Rechteck			
		3 Raute			
		4 Länglichte Raute.			

42. Anmerkung. Zum Beschluß dieser Erklärungen von Linien und Figuren wollen wir noch den Unterschied zwischen Linien, Flächen und Körper in der Geometrie merken. Man kann diesen Unterschied in viererley Rücksicht betrachten, 1) in Ansehung der Ausdehnung, 2) der Entstehung, 3) der Begrenzung, 4) der Messung.

1) Es giebt dreyerley Ausdehnungen, (oder Dimensionen), in die Länge allein, in die Länge und

Breite, und in die Länge, Breite und Dicke (oder Höhe). Die Linie hat nur eine Länge, aber keine Breite und Dicke; die Fläche hat eine Länge und Breite, aber keine Dicke; der Körper hat Länge, Breite und Dicke. Die Linie hat eine, die Fläche zwey, der Körper drey Dimensionen.

2) Man kann sich vorstellen, als entstünde eine Linie durch die Bewegung eines Punktes; eine Fläche durch die Bewegung einer Linie; ein Körper, durch die Bewegung einer Fläche.

3) Die Grenzen der Linie sind mathematische Punkte; Die Grenzen der Fläche sind Linien; die Grenzen des Körpers sind Flächen.

Also sind Punkte keine Theile der Linie, Linien keine Theile der Fläche, Flächen keine Theile des Körpers. Man möchte noch so viele Punkte nebeneinander setzen, sie würden doch keine Linie bilden, weil sie keine Länge haben. Eben so können mehrere aneinander gelegte Linien keine Fläche bilden, weil sie keine Breite haben, und mehrere aufeinander gelegte Flächen können keinen Körper bilden, weil sie keine Dicke haben. Theile der Linien, Flächen und Körper, sie mögen noch so klein seyn, sind wieder Linien, Flächen und Körper.

4) Um also eine Linie zu messen, muß man eine andere Linie z. B. eine Ruthe, Schuh u. dergl. nehmen; um eine Fläche zu messen, gebraucht man eine andere Fläche; um einen Körper zu messen, gebraucht man einen andern Körper als Maas, so wie man z. B. die Größe eines Landes nach Quadratmeilen, den Inhalt eines Fasses nach Schoppen und Maa-

sen

sen bestimmt. (Von den gewöhnlichen Quadrat und Cubik-Masen, um die Größe der Flächen und Körper zu bestimmen, wird in der Folge noch mehr vorkommen, wo auch zugleich gelehrt werden wird, wie man damit messen soll.)

Dieses mag vorläufig genug von dem Unterschiede der Linien, Flächen und Körper seyn, um sich wenigstens eine allgemeine Uebersicht davon zu verschaffen.

Zweytes Kapitel.

Von der Gleichheit der Triangel.

43. Zwey grade Linien a b und c d (fig. 38.) sind einander gleich, wenn sie sich wechselsweise decken. Man muß sich nämlich vorstellen, die Linie a b sey so auf c d gelegt, daß der Endpunkt a auf c und der Endpunkt b auf d fällt. Alsdann decken sie sich, und sind einander gleich.

Zwey Winkel (fig. 39.) sind gleich, wenn sie sich decken, d. i. wenn in dem Falle, daß die Spitzen a und d aufeinander gelegt werden, der Schenkel a b in d e und a c in d f fällt, (wenn auch die ganzen Schenkel nicht gleich groß sind, denn es kommt bey der Gleichheit der Winkel auf die gleich große Neigung der Schenkel an)

Zwey Triangel (fig. 40.) sind gleich, wenn sie sich wechselsweise decken, so daß die drey Seiten des einen in die drey Seiten des andern fallen.

Zwey Figuren überhaupt sind gleich, wenn sie sich decken (wie die Fünfecke fig. 41).

Linien, Winkel und Figuren müssen sich decken, wenn sie gleich sind.

44. Lehrsatz. Wenn in zwey Tr a b c und d e f (fig. 40.) eine Seite und zwey Winkel gleich sind, so decken sich die ganzen Tr, oder sie sind gleich.

Beweis. Gesetzt es sey a b = d f, W a = W d, und W c = W f, und man legt den ersten Tr auf den andern, so fällt a c auf d f, der Punkt a auf d, und der Punkt c auf f: also muß, weil W a = W d, auch a b auf d e fallen, und weil W c = W f so muß c b auf f e fallen, und so die ganzen Tr sich decken.

45. Lehrsatz. Wenn in zwey Tr (fig. 40.) zwey Seiten und der dazwischen liegende Winkel gleich sind, so decken sie sich ebenfalls, oder sie sind gleich.

Beweis. Es sey bekannt, daß a b = d e, a c = d f und W a = W d, und man lege den ersten Tr auf den andern, so fällt a b auf d e und a c auf d f, und der Endpunkt b auf den Punkt e, so wie der Endpunkt c auf f. Also muß auch die Linie b c auf e f fallen, weil zwischen zwey Punkten nur eine grade Linie möglich ist.

46. Lehrsatz. Wenn in zwey Tr. (fig. 42.) die Seite a b = d e, b c = e f, und W c = W f, welcher der längern von diesen beyden Seiten gegenübersteht: so decken sich die Tr oder sie sind gleich.

Beweis. Wenn man den ersten auf den äußern legt, so deckt b c die Seite f c, und weil W c = W f, so fällt c a auf f d. Da nun auch b a auf e d fallen muß (weil sie sonst nicht gleich lang seyn würden, wie doch voraus gesetzt worden ist): so muß der Punkt a auf den Punkt d fallen, und W a = W d, auch a c = d f seyn, die ganzen Tr müssen sich decken.

47. **Anmerkung.** Hier ist zu bemerken, daß, wenn zwey Seiten und der Winkel, welcher der kürzern von diesen zwey Seiten gegenübersteht, in zwey Tr gleich sind, nicht immer folgen muß, daß sich die Tr decken. Denn gesetzt es sey (fig. 43.) a b = d e, b c = e f, und W a = W d (welche den kürzern Seiten b c und e f gegenüber stehen): so könnte b c zweyerley Lage haben, da b c = b m, ohne daß sich etwas in der Größe dieser Seiten und Winkel änderte. Nun ist zwar Tr a b c = Tr d e f, aber Tr a b m ist nicht dem Tr d e f gleich, wie schon der Anblick der Figur zeigt. Wenn also aus der Voraussetzung, daß in zwey Tr worin zwey Seiten und ein Winkel, der nicht zwischen ihnen liegt, gleich sind, geschlossen werden soll, daß diese Tr sich nothwendig decken müssen: so muß (wie im §. 46.) angenommen werden, daß der Winkel der größern von den beyden Seiten gegenübersteht.

48. **Lehrsatz.** Wenn die drey Seiten eines Tr den drey Seiten eines andern gleich sind, so decken sie sich ebenfalls.

Beweis. In der 40sten Figur sey a c = d f, a b = d e und b c = e f. Man lege den ersten Tr a b c auf den andern Tr d e f, so fällt

fällt a c auf d f. Gesetzt nun es sollten a b und c b nicht auf d e und f e fallen: so müßten sie entweder länger oder kürzer als diese seyn. Da sie ihnen aber gleich sind, so müssen sie in dieselbe fallen, so daß der Punkt b auf den Punkt e fällt, und die ganzen Tr. sich decken.

49. Aus den §. 45. 46. und 48. folgt der Hauptsatz: wenn in zwey Triangeln drey Stücke gleich sind, (unter welchen aber wenigstens eine Seite seyn muß), also entweder eine Seite und zwey Winkel, oder zwey Seiten und ein Winkel, oder die drey Seiten: so sind auch die übrigen Seiten und Winkel gleich und die Triangel decken sich, haben also gleich große Flächen. Nur der Fall in der Anmerkung 47. ist ausgenommen).

50. Anmerkung. Aus diesem Satze werden sehr viele andere Sätze bewiesen. Zur Erläuterung will ich nur ein Beyspiel vorläufig anführen. Gesetzt man hätte (fig 44.) in den Tr a b c und a d e die Winkel o und x gemessen, und gleich groß gefunden; ferner hätte man gemessen, daß a b = a f und a c = a e: so kann man daraus schließen, daß auch b c = d e.

51. Anmerkung. Wenn man weiß, daß die drey Winkel eines Tr den drey Winkeln eines andern Tr gleich sind, aber man weiß nicht, ob eine oder etliche Seiten auch gleich sind: so kann man nicht schließen, daß sich die Tr decken müssen. Denn der eine kann viel kleiner seyn als der andere (fig. 45.). Gesetzt es sey W a = W d, W b = W e, W. c =

W. f, so folgt nicht, daß die Seiten auch gleich seyn müssen. Man sagt alsdann, die Tr sind einander ähnlich, wovon weiter unten mehr vorkommen wird.

52. Anmerkung. Wenn in zwey rechtwinkelichten Tr nur zwey Seiten, oder eine Seite und zwey Winkel gleich sind, so decken sie sich. Denn die rechten Winkel sind ohnehin gleich.

53. Anmerkung. Wenn zwey Tr (fig. 46.) eine Seite m o gemeinschaftlich haben: so müssen sie sich decken, wenn nur außerdem noch zwey Stücke darin gleich sind.

54. Lehrsatz. Zwey gradlinichte Figuren, worin die Seiten und Winkel nach einerley Ordnung gleich sind, (fig. 47.) so daß a = A, b = B, c = C, d = D, e = E, und a b = A B, b c = B C, c d = C D, d e = D E, e a = E A: decken sich wechselsweise, und sind einander gleich.

Beweis. Denn man kann jede gradlinichte Figur in Tr zertheilen, und so von jedem Tr besonders die Gleichheit beweisen.

55. Aufgabe. Eine grade Linie a b in zwey gleiche Theile zu theilen (fig. 48.)

Auflösung. Setze den Cirkel mit dem einen Fuß in a, thue ihn willkührlich auf, mit dem andern Fusse beschreibe über und unter der Linie a b kleine Bogen. Hierauf setze den Cirkel in b, und beschreibe mit der vorigen Eröffnung desselben wiederum kleine Cirkelbogen, welche die vorigen in den Punkten ken c und d durchschneiden. Lege das Lineal an die Punkte c und d, und ziehe eine Linie, welche die Linie a b in dem Punkte f in zwey gleiche Theile theilen wird, so daß a f = f b.

Beweis. Der Tr d a c = Tr d b c. (§. 49.) Denn 1) a d = b d, 2) a c = b c, 3) c d = c d (weil diese Linie beyden Tr. gemeinschaftlich ist). Also ist W o = W x. — Ferner ist Tr a f c = Tr b f c, weil 1) W o = W x, 2) a c = b c, 3) c f = c f. Also ist auch a f = b f.

56. Aufgabe. Einen Winkel b a c (fig. 49.) in zwey gleiche Theile zu theilen, so daß W m = W n.

Auflösung. Setze den Cirkel in die Winkelspitze a, thue ihn willkührlich auf, und stecke in beyden Schenkeln die Punkte b und c ab, so ist a b = a c. Setze den Cirkel in b, beschreibe einen kleinen Bogen, mit derselben Eröffnung beschreibe aus c einen Bogen, welcher den vorigen in dem Punkte d durchschneidet. Ziehe eine Linie aus a durch d nach f, diese theilt den Winkel in zwey gleiche Theile.

Beweis. Der Tr a b d = Tr a c d. Denn 1) a b = a c, 2) b d = c d, 3) a d = a d. Also decken sich die Tr, und es ist W m = W. n.

57. Anmerkung. Man kann auf dieselbe Art grade Linien und Winkel in 4, 6, 8 u. s. w. gleiche Theile theilen, wenn man immer fort halbiret.

58. Aufgabe. Aus dem Punkte c in der Linie d e eine senkrechte Linie aufzurichten. (fig. 50.)

Auflösung. Setze den Cirkel in c, thue ihn willkührlich auf mache mit einer und derselben Eröffnung Durchschnitte in d und e, so daß c d = c e. Aus d und e mache mit gleicher Eröffnung Durchschnitte in a, so ist d a = e a. Nun ziehe a c, diese Linie wird senkrecht auf d e stehen.

Beweis. Weil in den beyden Tr a d c und a e c die drey Seiten gleich sind, so werden sie sich decken, und W o = W r. Dieses sind also rechte Winkel, und daher a c auf d e senkrecht.

59. Aufgabe. Aus einem Punkte c, welcher über einer Linie m n liegt, eine senkrechte Linie auf m n herunter zu ziehen. (fig. 51.)

Auflösung. Aus c mache mit gleicher Eröffnung des Cirkels Durchschnitte in der untern Linie in den Punkten d und e. Thue den Cirkel weiter auf, und mache mit dieser Eröffnung aus d und e Durchschnitte in b. Ziehe eine Linie durch b und c bis nach a, welche auf m n senkrecht stehen wird.

Beweis. Tr b c d = Tr b c e. Denn 1) c d = c e, 2) b d = b e, 3) b c = b c. Also ist W s = W r. — Ferner ist Tr b d a = Tr b e a. Denn 1) b d = b e 2) b a = b a 3) W s = W r. Also ist auch W o = W x. Diese sind daher rechte Winkel, und es folgt, daß b a auf m n senkrecht stehen muß.

60. Anmerkung. Man kann diese und die vorige Aufgabe auch vermittelst eines Transporteurs, oder auch eines Winkelhakens (rechtwinkelichten Dreyecks von Holz oder Messing: siehe §. 31. fig. 19.) auflösen. Gesetzt man wollte (fig. 52.) aus dem Punkte c auf die Linie a b ein Perpendikel setzen, so müßte man den Winkelhaken genau mit der einen Seite an a b und mit der Spitze an c legen, und sodann c e ziehen. Wollte man aber (fig. 53.) von dem Punkte c ein Perpendikel herunter fallen lassen: so müßte man den Winkelhaken an der Linie a b so lange fortschieben, bis die andere Seite desselben an c liegt, worauf die Linie c d gezogen wird.

Auf dem Felde (fig. 54.) kann man folgendermaßen aus dem Punkte c eine senkrechte Linie auf m n ziehen. Man messe c a = c b, stecke in a und b Stäbe, spanne eine Schnur von b nach a, aber nicht fest angezogen. Die Mitte dieser Schnur bemerke mit einem Zeichen, ziehe sie sehr straff nach d hin, und bemerke den Punkt, wo die Mitte der Schnur liegt, welches d ist, von diesem ziehe eine Linie nach c — Mit geringer Veränderung kann man mit einer Schnur auch die andere Aufgabe (59. §.) auflösen.

Auf dem Felde kann man auch die sogenannte Kreutzscheibe (fig. 55.) gebrauchen. Dies ist ein quadratförmig geschnittenes Brettchen, einige Finger dick, in welches zwey Schnitte a b und c d, die sich rechtwinkelicht durchkreutzen, eingesäget worden sind. Diese viereckichte Scheibe wird auf einem Stock bevestigt. Soll man nun z. B. von einem Punkte d in einer Linie a b, eine senkrechte Linie aufrichten: so stellt man den Stab in d, richtet den einen Kreutzschnitt nach den Stäben in a und b. Nach der Richtung des andern Kreutzschnittes läßt man einen Stab in c einstecken, so ist c d auf a b senkrecht, weil die Nebenwinkel bey d gleich, also rechte Winkel sind

61 Aufgabe. Einen Winkel zu zeichnen, der einem andern gegebenen Winkel gleich ist.

Erste Auflösung. Mit dem Transporteur. Gesetzt man sollte (fig. 57.) in der Linie c e an den Punkt d einen Winkel setzen, der dem W a gleich ist: so meßt man den W a (§. 22.), legt den Transporteur mit der Mitte an d, und bemerkt mit einer Nadel den Punkt b, so daß der Bogen m b so groß ist, als das Maaß des W a. Hierauf zieht man die Linie f b d.

Zweyte Auflösung. Mit dem Cirkel. Man soll einen W d zeichnen, (fig. 58) so groß als der gegebene Winkel a. Setze den Cirkel in a, und beschreibe einen Bogen c b. Setze ihn in d, und beschreibe mit gleicher Eröffnung den Bogen e g. Trage die Linie c b mit dem Cirkel von e nach f und ziehe die Linie f d, so ist W d = W a. Denn Tr a c b = Tr d e f, weil 1) a c = d e, 2) a b = d f, 3) c b = e f, (§. 49.)

62. Aufgabe. Auf einer gegebenen Linie a b (fig. 59.) einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Auflösung. Mache mit der Eröffnung des Cirkels von a bis b aus den Punkten a und b Durchschnitte in c, und ziehe c a und c b, welche beyde alsdann a b gleich sind.

63. Lehrsatz. In einem gleichseitigen Tr a b c (fig. 59.) sind auch die drey Winkel gleich.

Be-

Beweis. Ziehe die Linie c d in die Mitte von a b, so ist Tr a c d = Tr c d b, weil die drey Seiten gleich sind; also ist auch W o = W x. — Eben so ziehe auch die Linie b e in die Mitte der Linie c a, so ist Tr b e c = Tr b e a, weil die drey Seiten gleich sind, also auch W o = W m. Daher sind die drey Winkel m, o, x gleich.

64. **Aufgabe.** Aus zwey gegebenen Linien a b und a c (fig. 60.) einem gleich schenkelichten Triangel zu zeichnen.

Auflösung. Setze a b als Grundlinie hin. Thue hierauf den Cirkel so weit auf, als a c lang ist, und beschreibe mit dieser Eröfnung aus a und b kleine Bogen, die sich in c durchschneiden, und ziehe c a und c b, welche gleich lang sind. Also ist der Tr c a b gleichschenkelicht.

65. **Lehrsatz.** Die W o und x an der Grundlinie eines gleichschenkelichten Tr a b c. (fig. 60.) sind gleich.

Beweis. Ziehe aus c die Linie c d in die Mitte der Linie a b, so ist Tr a d c = Tr b d c, weil die drey Seiten gleich sind, also ist auch W o = W. x.

66. **Aufgabe.** Aus drey gegebenen Seiten a b, a c und b c, welche nicht gleich lang sind, einen ungleichseitigen Triangel zu zeichnen. (Fig. 61.)

Auflösung. Zeichne die eine Linie a b als Grundlinie. An a setze die Linie a c, und an b die Linie b c. — Man kann aber auch die Linien in einer andern Ordnung zusammensetzen: Denn aus drey gegebenen Linien läßt sich nicht mehr als ein Triangel zeichnen.

67. Anmerkung. Jeden Tr, dessen drey Seiten man gemessen hat, kann man auf diese Art abzeichnen oder copiren. Dieses reicht ein leichtes Mittel dar, wie man jede gradlinichte Figur, z. B. den Riß von einem Garten, Walde, Felde und dergleichen copiren kann. Denn es ist möglich, jede gradlinichte Figur in Tr zu zertheilen, und man darf hierauf nur die Tr einen nach dem andern in ihrer Ordnung abzeichnen.

68. Aufgabe. Aus zwey gegebenen Linien a b und a c (fig. 62.) einen rechtwinkelichten Tr zu zeichnen.

Auflösung. Setze mit Hülfe des Transporteurs oder eines Winkelhakens die zwey Linien a b und a c rechtwinkelicht zusammen, darauf ziehe die Linie b c.

69. Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten a b und a c, und dem dazwischen liegenden spitzen oder stumpfen Winkel a, einen Tr zu zeichnen. (Fig. 63.)

Auflösung. Zeichne a b als Grundlinie, an a setze den gegebenen Winkel mit dem Transporteur an, und ziehe die Linie a c, und zuletzt von b nach c die Linie b c.

70. Auf-

70. **Aufgabe.** Aus einer gegebenen Seite a b und den beyden Winkeln a und b einen Tr zu zeichnen. (Fig. 64.)

Auflösung. Zeichne a b als Grundlinie, setze mit dem Transporteur an beyde Enden die gegebenen W a und b, welche sich beyde in c durchschneiden.

71. **Lehrsatz.** (Fig. 65.) Die Vertikalwinkel (§. 24.) sind gleich, also W o = W x, und W m = W n.

Beweis. Zeichne aus dem Durchschneidungspunkte der Linien a b und c d einen Cirkel, dieser ist das Maas der vier Winkel o, m, x, n, am Mittelpunkte, sie halten also zusammen 360°. Zwey davon, die nebeneinander liegen, halten jedesmal 180°. Also sind W o + W m = W o + W n. Wenn von diesen gleichen Summen auf beyden Seiten Gleiches abgezogen wird, so bleibt Gleiches übrig. Man ziehe daher W o ab, so ist W m = W n. — Eben so ist W o + W m = W m + W x. Ziehe W m ab, so bleibt W o = W x.

72. **Lehrsatz.** Wenn zwey Linien c d und e f (fig. 66.), welche parallel laufen, von einer dritten Linie a b durchschnitten werden: so sind die Winkel x und y gleich. (Diese heißen **Wechselwinkel.**)

Beweis. Lasse ein Perpendikel m n auf e f fallen (§. 59) und ein anderes r s auf c d, so ist

Tr.

$Tr\,m\,s\,r = Tr\,m\,n\,r$, weil außer den rechten Winkeln bey n und s und der gemeinschaftlichen Seite m r auch noch $m\,n = r\,s$; denn sie laufen parallel und stehen zwischen zwey Parallel Linien (so wie die Sprossen einer Leiter gleich lang sind, wenn die Leiterbalken parallel laufen.) Also folgt, daß $W\ y = W\ x$.

73. Anmerkung. In dieser Figur muß auch der innere W y dem äußern W o gleich seyn. Denn $W\ o = W\ x$, weil sie Vertikalwinkel sind (§. 71.), und $W\ x = W\ y$, als Wechselwinkel (§. 72.) also ist $W\ o = W\ y$. Denn wenn zwey Größen (wie o und y) einer dritten (wie x) gleich sind: so müssen sie unter einander selbst gleich seyn. (Zur Erläuterung führe ich ein Beyspiel von Münzsorten an. Es sind 24 Livres = 11 fl.: ferner 4 Laubthaler = 11 fl. Also 24 Livres = 4 Laubthaler.)

Daraus folgt auch, daß wenn drey, vier und mehrere parallellaufende Linien (fig. 67.) von einer andern durchschnitten werden, alle Winkel a, b, c, d, e einander gleich sind, oder daß der Winkel, unter dem sie geschnitten werden, immer derselbige bleibt.

74. Lehrsatz. Wenn zwey parallellaufende Linien c d und e f von einer dritten a b durchschnitten werden (fig. 68.) so halten die beyden innern Winkel y und r sowohl, als x und s 180 Grade. (Wenn man den rechten Winkel durch R ausdrücket: so kann man auch sagen $W\ y + W\ r = 2\ R$. Ferner $W\ x + W\ s = 2\ R$.)

Beweis. $x + r = 180°$ weil sie Nebenwinkel sind: $y = x$ als Wechselwinkel. Also $y + r$
180°.

$= 180^\circ$. Ferner da $r = s$, so ist auch $x + s = 180^\circ$.

75. Anmerkung. Wenn aber die Linien c d und e f (fig. 69.) nicht parallell laufen, so werden die zwey Winkel y und r, welche auf der Seite liegen, wo sich die Linien einander nähern, zusammen kleiner als 180° seyn. Die andern beyden Winkel x und s werden zusammen größer als 180° seyn.

76. Anmerkung. Die drey Sätze in den §§. 72. 73. 74. können auch umgekehrt werden, und sind eben so richtig. Man kann nämlich sagen: Wenn zwey Linien c d und e f (fig. 66. und 68.) von einer dritten Linie a b durchschnitten werden, und 1) entweder ist $y = x$, 2) oder $y = o$, 3) oder $y + r = 180^\circ$: so folgt, daß die Linien c d und e f parallel laufen.

77. Aufgabe. Durch den Punkt c (fig. 70) mit der Linie a b eine Parallellinie f e zu ziehen.

Auflösung. Messe den W x, und setze ihn entweder mit dem Transporteur oder dem bloßen Cirkel (nach dem 61sten §.) an den Punkt c, alsdann ergiebt sich die Linie f c d, welche mit a b parallel seyn muß, da die W o und W x gleich sind.

78. Lehrsatz. In jedem Tr halten die drey Winkel zusammen 180°, oder die Winkel $a + b + c = 2$ R. (fig. 71.)

Beweis. Ziehe durch die Spitze des Tr die Linie m n parallel mit der Grundlinie, dann sind W a = W r., und W b = W s als Wechselwinkel. Nun ist das Maas der drey Winkel $r + c + s$ zusammen ein Halbcirkel oder 180°. Da man

a also

a anstatt r, und b anstatt s setzen kann: so sind $a + c + b = 180^\circ$.

79. Anmerkung. Wenn man daher die Größe zweyer Winkel in einem Triangel weiß, so weiß man auch die Größe des dritten. Man darf nur die Summe der beyden bekannten Winkel von 180 abziehen. Z. B. wenn (fig. 71.) a und b gemessen werden, und W $a = 60^\circ$, W $b = 70^\circ$, so ist ihre Summe $= 130$ Dies von 180 abgezogen ist der Rest $= 50$. Also W $c = 50^\circ$.

80. Anmerkung. Eben so erfährt man, wenn ein Winkel bekannt ist, die Summe der beyden übrigen. Man muß ihn nämlich von 180 abziehen. Z. B. der bekannte Winkel sey $= 60^\circ$, so halten die beyden andern zusammen 120°.

81. Anmerkung. Wenn in einem gleichschenkelichten Tr, (fig. 60.) worin die beyden Winkel an der Grundlinie gleich sind, (§. 65.) ein Winkel bekannt ist, so weiß man auch die übrigen. Z. B. es sey W $a = 50^\circ$, so ist W $b = 50^\circ$, und da $a + b = 100^\circ$ so ist W c 80°. — Oder es sey $c = 40^\circ$ so sind W $a + b = 140^\circ$, also jeder $= 70^\circ$.

82. Anmerkung. Wenn man in einem rechtwinkelichten Tr (fig. 29.) den einen spitzen Winkel weiß, so weiß man auch den andern. Denn man darf ihn nur von 90 abziehen, um die Größe des andern zu erfahren. Z. B. Es sey W $b = 40^\circ$ so ist W $c = 50^\circ$. — Hält aber jeder 45°, so sind auch die Seiten a b und a c gleich (§. 65.), und der rechtwinkelichte Tr ist zugleich ein gleichschenkelichter — Eben so kann man auch schließen: wenn die Schenkel a b und a c gleich sind: so hält jeder der Winkel b und c 45°.

83. Anmerkung. Weil 2 rechte Winkel $= 180^\circ$, so können keine 2 rechte, noch viel weniger 2 stumpfe Winkel in einem Tr seyn.

84. Anmerkung. Da in einem gleichseitigen Tr (fig 59) die drey Winkel gleich sind (§. 63.), so muß jeder $= 60^\circ$ seyn Denn 3 mal $60 = 180$.

85. Lehrsatz. Wenn man eine der drey Seiten eines Tr verlängert, z B. die Seite a b nach d hin, (fig. 72) so ist der neu entstandene äussere Winkel o gleich den innern Winkeln $m + n$ zusammengenommen, die gegenüber stehen.

Beweis. $m + n + x = 180^\circ$. Ferner $o + x = 180^\circ$ als Nebenwinkel. Also $m + n + x = o + x$ oder wenn auf beyden Seiten x weggelassen wird, so ist $m + n = o$. — Z. B. Es sey $m = 40^\circ$, $n = 60^\circ$, also $x = 80^\circ$. Da nun $o + x = 180^\circ$, so ist $o = 100^\circ$, aber $m + n = 40 + 60 = 100$, also $o = m + n$.

86. Erklärung. Ein Winkel, dessen Spitze an den Mittelpunkt eines Cirkels steht, heißt Centri-Winkel. (Wir wollen ihn schlechtweg C. W. nennen) Z. B. der Winkel a b c (fig. 73) Ein Winkel, dessen Spitze in der Peripherie eines Cirkels liegt, heißt Peripherie-Winkel. (Diesen wollen wir P. W. nennen.) Z. B. der W a d c.

87. Anmerkung. Diese Winkel können in mehrern Fällen auf einem und demselben Bogen stehen, wie fig. 73, wo sie beyde mit ihren Schenkeln auf dem Bogen a c stehen. Um die Fälle, wo dieses angehet,

zu unterscheiden, wollen wir die Figur 74. betrachten. Hier steht der C. W. c auf dem Bogen d e. Soll nun ein P. W. auf demselben Bogen stehen, so sind drey Fälle möglich. Entweder steht seine Spitze in a oder b, so daß sein einer Schenkel mit einem Schenkel des C. W. zusammenfällt. 2) Oder die Spitze des P. W. steht zwischen a und b, so daß seine Schenkel die Schenkel des C. W. einschließen. 3) Oder die Spitze des P. W. steht zwischen a und d, oder b und e, so daß ein Schenkel desselben einen Schenkel des C. W. durchschneidet. In diesen drey Fällen, wo der C. W. und P. W. auf einem Bogen stehen, kann bewiesen werden: daß der P. W. nur halb so groß, als der C. W. ist. Dieses soll in folgenden drey Lehrsätzen gezeigt werden.

88. **Lehrsatz. Erster Fall.** Wenn beyde Winkel auf dem Bogen b d stehen, und der Schenkel des P. W. a d fällt in den Schenkel des C. W c d, so ist W b c d = 2 W b a d. (oder W e = 2 W x) (fig. 75.)

Beweis. An dem Tr a b c ist eine Seite a c nach d hin verlängert worden: also ist der äussere W e = den beyden innern gegenüberstehenden W x + W o (§. 85). Da nun der Tr a b c gleichschenklicht ist, indem die Linien b c und a c Halbmesser eines Cirkels sind, so sind die Winkel o und x an der Grundlinie a b einander gleich. (§. 65.) Also ist es einerley, ob man sagt: W e = W o + W x oder W e = 2 W x.

89. **Lehrsatz. Zweyter Fall.** Wenn die W b c d (fig. 76.) mit seinen Schenkeln den

W bcd einschließet: so ist letzterer auch zweymal so groß, als ersterer.

Beweis. Ziehe eine Linie von a durch c nach e. Nun findet der vorige erste Fall hier zweymal statt. Der C. W. o und der P. W. x stehn auf dem Bogen b c, und die Seite a e fällt in c e. Also ist W o = 2 W x. Ferner der C. W. r steht mit dem P. W. s auf dem Bogen e d, und die Seite a e fällt in c e. Daher ist W r = 2 W s (§. 88.) Also ist W o + W r = 2 W x + 2 W s oder W bcd = 2 W bad.

90. **Lehrsatz. Dritter Fall.** Wenn die eine Seite a d (fig. 77.) des P. W. b a d, eine Seite b c des C. W. b c d durchschneidet, so ist auch W bcd = 2 W bad, oder W o = 2 W x.

Beweis. Ziehe eine Linie durch a und c nach e. Nun stehen W bae und W bce auf einem Bogen b e. Also ist (nach dem ersten Falle) W bce = 2 W bae. Ferner stehn W dae und W dce auf einem Bogen de. Daher ist, (wieder nach dem ersten Falle) W dce = 2 W dae. Also muß auch W bcd = 2 W bad.

Man kann dieses auch um der Deutlichkeit willen folgendermaßen hinsetzen:

$$o + r = 2\,x + 2\,n. \quad (\S.\ 88.)$$
$$r = 2\,n \quad (\S.\ 88.)$$
$$\text{Also } o = 2\,x.$$

Z. B. Es sey $o + r = 120°$ so ist $x + n = 60°$. Nun sey $r = 50°$, also $n = 25°$, $o = 70°$ und $x = 35°$. Es ist also $35 + 25 = 60$.

91. Anmerkung. Hieraus folgt, daß alle P. W., die auf einem Bogen d e (fig. 74.) stehen, gleich sind. Denn jeder ist halb so groß, als der C. W. c. — Man kann auch sagen: Das Maas eines Peripherie-Winkels ist der halbe Bogen, auf dem seine Schenkel stehen. Ist z. B. der Bogen $= 60°$, so ist der P. W. $= 30°$.

92. Anmerkung. Wenn also (fig. 78.) die Schenkel eines P. W. a b c auf einem Halbcirkel stehen, so ist er ein rechter Winkel, oder $= 90°$. — Stehen die Schenkel eines P. W. d b e auf einem Bogen, der größer, als ein Halbcirkel ist: so ist er größer als $90°$, also ein stumpfer Winkel. — Stehen aber die Schenkel eines P. W. f b g auf einem Bogen, der kleiner, als ein Halbcirkel ist, so ist er kleiner als $90°$, also ein spitzer Winkel.

93. Aufgabe. Ueber einer Linie a b (fig. 79.) als Hypothenuse ein rechtwinkelichtes Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung. Theile a b in zwey gleiche Theile in c (§. 55.), beschreibe aus c einen Cirkel, so kannst du eine Menge rechtwinkelichte Tr a b e, a b f, a b g u. s. w. zeichnen, weil die P. W. e, f, g, mit ihren Schenkeln auf einem Halbcirkel stehen, also rechte Winkel sind.

94. Aufgabe. Einen Winkelhaken zu probiren, ob er genau recht winkelicht ist. (fig. 80.)

Auf-

Auflösung. Zeichne einen Cirkel, lege die beyden Schenkel des Winkels an die Endpunkte des Durchmessers a und b. Wenn nun seine Spitze c genau in die Peripherie des Cirkels fällt, so ist er rechtwinkelicht. Fällt aber seine Spitze innerhalb oder ausserhalb der Peripherie: so ist sein Winkel stumpf oder spitz, also ist der Winkelhaken nicht richtig.

95. **Aufgabe.** An dem Ende a einer Linie ab (fig. 81.) eine senkrechte Linie aufzurichten, (ohne den Transporteur oder Winkelhaken dazu zu brauchen.)

Auflösung. Nimm willkührlich über der Linie ab einen Punkt c an, setze in diesen Punkt den Cirkel, thue ihn auf bis a, und beschreibe einen Kreis. Dieser durchschneidet im Punkte f die Linie ab. Ziehe durch f und c einen Durchmesser bis g. Von g nach a ziehe eine Linie. Diese steht senkrecht auf ab.

Beweis. Bey a ist ein rechter Winkel, weil die Schenkel ag und af auf einem Halbcirkel stehen.

96. **Aufgabe.** An irgend einem Punkte a (fig. 82.) in einen Cirkel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Ziehe einen Halbmesser von c nach a hin, und setze auf a nach der vorigen Aufgabe ein Perpendikel ab. Dieses ist die Tangente. Denn eine Tangente steht immer in dem Punkte, wo sie den Cirkel berühret, senkrecht auf einem Halbmesser.

97. **Aufgabe.** Von einen gegebenen Punkte a (fig. 83.) ausserhalb des Kreises eine Tangente af an denselben zu ziehen.

Auflösung. Ziehe von a nach dem Mittelpunkte c eine Linie ac, auf den Punkt d, wo ac den Cirkel schneidet, richte ein Perpendikel auf. Beschreibe mit ca einen Kreisbogen, der das Perpendikel db in e schneidet. Ziehe ce, und nach f ziehe af, so ist af die Tangente vom Punkte a nach dem Kreise hin.

Beweis. de ist eine Tangente, also cde $= 90°$. Nun ist Tr cfa $=$ Tr cde. Denn 1) ca $=$ ce, 2) cf $=$ cd, 3) der W c ist gemeinschaftlich. Daher W cfa $=$ W cde. Oder jeder ist ein rechter Winkel. Also ist af eine Tangente an f.

98. **Lehrsatz.** Ein spitzer P. W. a (fig. 84.) und ein stumpfer b welche auf einer und derselben Sehne stehen, halten zusammen $180°$ oder 2 rechte Winkel.

Beweis. Das Maas des W a ist die Hälfte des Bogens cbd, und das Maas des W b ist die Hälfte des Bogens cad. (§. 91.) — So viel also der W a kleiner als $90°$ ist, um so viel ist W b größer.

99. Anmerkung. Die größte Sehne im Cirkel ist der Durchmesser. Alle übrige, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, werden immer kleiner, je weiter sie sich auf beyden Seiten von demselben entfernen.

So wohl diejenigen Sehnen, welche im Halbcirkel a c b (fig. 85.) als die, welche im Halbcirkel a d b liegen, sind gleich lang, wenn sie auf beyden Seiten gleich weit von dem Durchmesser a b entfernt sind, z. B. m n = o p, q r = s t, u x = y z u. s. w.

100. Anmerkung. Je spitzer ein Winkel ist, (z. B. der W o a p. fig. 86.) um desto kleiner ist auch die Sehne, worauf er steht. Diese Sehnen wachsen bis an den Mittelpunkt, wo die Sehne b o ein Durchmesser wird, worauf ein rechter Winkel b a c steht, (§. 92). Alsdann nehmen die Sehnen d e, f g wieder ab, so wie die stumpfen P. W. welche darauf stehen, zunehmen.

101. Anmerkung. Wenn ein stumpfer und ein spitzer P. W. zusammen 180° halten: so stehen sie 1) entweder auf einer und derselbigen Sehne, (§. 98. fig 84.) — 2) oder die Sehnen, worauf beyde stehen, sind einander gleich. (fig. 86.) Z. B. wenn W o a p + W f a g = 180°, so ist o p = f g. Dieses letztere wird hier nur vorläufig erinnert. Weiter unten (§. 135.) werden wir noch einmal darauf aufmerksam machen, wo bewiesen wird, daß zu gleichen Bogen im Cirkel gleiche Sehnen gehören.)

102. Aufgabe. Die Parallelogramme zu zeichnen.

1) Ein Quadrat. (fig. 87.) Hier muß eine Seite a b gegeben seyn. Setze eine andere Linie a c = a b rechtwinkelicht an a. Mit der Eröffnung des Cirkels von a nach b beschreibe aus b und c kleine Bogen, welche sich in d durchschneiden, und ziehe die Linien b d und c d.

2) Ein längliches Rechteck. (fig. 88.) Hier müssen zwey Seiten a b und a c bekannt seyn,

Diese werden rechtwinkelicht zusammengesetzt, und die beyden andern eben so lang gemacht, nämlich b d = a c, und c d = a b an b und c angesetzt, indem man Durchschnitte in d macht.

3) Eine Raute. (fig. 89.) Hier muß eine Seite a b und der W a gegeben seyn. Setze diesen Winkel mit dem Transporteur an a, mache a c = a b, und setze hierauf an b und c die Seiten b d und c d, beyde so lang als a b.

4) Eine länglichte Raute. (fig. 90.) Es müssen zwey Linien a b und a c und der W a gegeben seyn. Diese Seiten werden unter dem W a zusammengesetzt, und hierauf wird b d = a c, c d = a b gemacht.

103. Erklärung. Wenn in einer gradlinichten Figur aus einer Ecke derselben in eine andere eine grade Linie gezogen wird, so heißt dieselbe eine Diagonal-Linie, (wie a d in der 87sten fig.). Durch solche Linien kann man die Figuren in Triangel zertheilen.

104. Anmerkung. Im Dreyeck kann man keine Diagonal-Linie ziehen; im Viereck braucht man nur eine; ein Fünfeck zwey (fig. 91.); im Sechseck drey (fig. 92.) um dieselbe in Triangel zu theilen. Ueberhaupt braucht man dazu in jedem Polygon drey Diagonal-Linien weniger, als die Figur Ecken hat.

105. Lehrsatz. Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie in zwey gleiche Tr. getheilt, (fig. 87 und 88.)

Be-

Beweis. Weil in einem Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten gleich sind: so sind in den Tr abd und aed, die drey Seiten gleich, nämlich 1) ab = cd. 2) ac = bd. 3) ad = ad. Also ist Tr abd = Tr acd.

106. **Lehrsatz.** Zwey Parallelogrammen abcd und abef welche gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind auch in Ansehung ihres Flächeninhaltes einander gleich. (fig. 93. 94.)

Beweis. Man stelle sich vor, als seyen die Parallelogrammen (fig. 93) auf einander gelegt (fig. 94). Sie sollen eine gemeinschaftliche Grundlinie ab haben, und die Höhe von beyden sey ca. (Daß zwey Parallelogrammen gleiche Höhe haben, ist in dem Falle richtig, wenn die Linie cdef mit der Grundlinie ab parallel lauft). Zuerst lasse man den Tr abg, in welchem beyde Parallelogrammen auf einander liegen, aus der Acht, und sehe auf die Tr ace und bdf. Diese sind gleich: Denn 1) ac = bd, 2) ae = bf. (weil sie gegenüber stehende Seiten von Parallelogrammen sind). 3) ce = df (weil cd = ab, und ab = ef, also cd = ef. Daher ist cd + de = ef + de. Das heißt ce = df.) — Also ist Tr ace = Tr bdf. Nun stelle man sich vor, von diesen beyden gleichen Tr werde der gemeinschaftliche Tr dge weggenommen, so bleiben zwey Trapezin agdc und bgef übrig. Diese müssen auch gleich seyn: Denn wenn man von zwey gleichen Größen Gleiches wegnimmt, so muß Gleiches übrig bleiben. Wenn man endlich zu jedem dieser beyden gleichen Trapezien den Tr abg zusetzt, so kommen die Parallelogrammen wieder heraus, wie sie Anfangs waren. Diese müssen also gleich seyn: Denn wenn man zu zwey gleichen Größen Gleiches zusetzt, so entstehen gleiche Größen. Also $abcd = abef$.

107. Anmerkung. Zur Erläuterung dient Folgendes. Gesetzt die zwey Figuren 93. wären zwey Aecker von gleicher Güte des Bodens: so müßte man auf den einem so viel Frucht ziehen können, als auf dem andern. Oder es seyen zwey gleich dicke Tafeln von einerley Materie, z. B. Bley, Glas, Tannenholz und dergleichen: so müßten sie auch einerley Gewicht haben, und wenn man sie mit Papier überziehen wollte, müßte man zu beyden gleich viel nehmen.

108. Aufgabe. Ein Parallelogramm in zwey gleiche Parallelogrammen zu theilen. (fig. 94*)

Auflösung. Theile ab und cd in den Punkten e und f in gleiche Theile (§. 55), und ziehe die Linie ef. Nun ist $aefc = befd$ (§. 106.)

109. Aufgabe. Ein Parallelogramm (fig. 95.) auf eine solche Art in zwey gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie an einem bestimmten Punkte e anfange. (Z. B. wenn in e ein Brunnen läge, und zwey Personen wollten den Garten abcd also theilen, daß sie beyde aus ihren Gärten an den Brunnen kommen könnten, wie müßte alsdann der Zaun ef gezogen werden? — Es könnte auch bey e ein gemeinschaftlicher Eingang seyn.)

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0048
DFG

Auflösung. Messe a e, und trage diese Größe von d nach f, so daß $ae = df$. Hierauf ist der Punkt f bestimmt, und e f kann gezogen werden.

Beweis. $Tr\ bfd = Tr\ aec$. Denn 1) $ae = fd$, 2) $ac = db$, 3) $W\ a = W\ d$. Also ist auch $ec = bf$. — Ferner $Tr\ bfe = Tr\ cef$. Denn 1) $ec = bf$, 2) $eb = cf$, 3) $ef = ef$. Also ist $Tr\ bdf + Tr\ bfe = Tr\ cef + Tr\ ace$, das ist: Trapez. $bdfe =$ Trapez. $aefc$.

110. Lehrsatz. Jeder Tr, wie a b c (fig. 96.) ist die Hälfte von einem Parallelogramm abcd, das gleiche Grundlinie und Höhe mit ihm hat.

Beweis. Mache $cd = ab$, und $ad = bc$, alsdann entstehen zwey gleiche Tr a b c und b c d, weil die drey Seiten darin gleich sind. Nun ist daher $W\ o = W\ x$, und $W\ m = W\ n$. Also laufen die gegenüberstehenden Seiten parallel, und die Figur ist ein Parallelogramm. (§. 76.)

111. Lehrsatz. Zwey Tr a b e und c d f sind in Ansehung ihrer Fläche gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben (fig. 97 und 98.)

Beweis. Man stelle sich vor, die beyden Tr der 97sten Figur wären mit ihren gleich großen Grundlinien (fig. 98.) aufeinander gelegt. Wenn nun ihre Spitzen e und f in einer graden Linie liegen, die mit der Grundlinie a b parallel lauft: so haben sie gleiche Höhe. Jeder dieser Tr ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 110.) nämlich Tr abe = 1/2 abek und Tr abf = 1/2 abfg. Nun ist abek = abfg (§. 106.) also auch die Hälften dieser Parallelogramme sind gleich, Tr abe = Tr abf.

112. Anmerkung. Diese Tr sind nur in Ansehung ihrer Fläche gleich, obgleich die Seiten (außer der Grundlinie) und die Winkel darin ungleich seyn können: also müssen sie sich auch nicht decken, wenn man sie ganz auf einender legt. Wollte man aber den einen Triangel in kleine Stücken zerschneiden: so würde man damit doch die Fläche des andern bedecken können.

113. Anmerkung. Zwey Tr ab d und bcd (fig. 99.) von gleicher Grundlinie, deren Spitzen in einem Punkt zusammenfallen (also gleiche Höhe haben) müssen in Ansehung der Fläche gleich seyn. (Dies gilt auch von 3, 4 und mehrern Triangeln.) (fig. 100.)

114. Aufgabe. Einen Tr acd (fig. 99) in zwey gleiche Tr zu theilen.

Auflösung. Theile die Grundlinie ac in zwey gleiche Theile ab und bc (§. 55.) und ziehe die Linie bd.

115. Aufgabe. Einen Tr abc (fig. 101) in ungleich großes Parallelogramm adec zu verwandeln.

Auflösung. Halbire die Grundlinie in d, ziehe de mit ac, und ce mit ab parallel.

Beweis. Tr d c g = Tr c e g. Denn 1) d c = c e, 2) W o = W x als Vertikalwinkel, 3) W m = W n als Wechselwinkel.

116. **Anmerkung.** Da man nun jedes schiefstehende Parallelogramm in ein gleich großes rechtwinkelichtes verwandeln kann (§. 106.): so kann jeder Tr in ein gleich großes rechtwinkelichtes Parallelogramm verwandelt werden.

117. **Anmerkung.** Man kann auch umgekehrt ein Parallelogramm in ein gleich großes Tr verwandeln. Gesetzt a d e c (fig. 101.) sollte so verwandelt werden: so müßte man die Grundlinie a d verlängern, so daß a d = d b, und b c ziehen, so wie a b c der verlangte Triangel.

118. **Aufgabe.** Ein Fünfeck a b c d e in einen gleich großen Triangel d f g zu verwandeln.

Auflösung. Ziehe aus der Spitze d die Diagonallinien d a und d b. Mit diesen ziehe aus den Ecken e und c Parallellinien e f und c g, welche die auf beyden Seiten verlängerte Grundlinie a b in den Punkten f und g schneiden. Ziehe d f und d g.

Beweis. Sowohl das Fünfeck als der Triangel bestehen aus drey Triangeln. 1) Tr d a b ist beyden Figuren gemeinschaftlich. 2) Tr d b c = Tr d b g, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie d b haben, und auch gleiche Höhen, da ihre Spitzen c und g in einer Linie liegen, die mit der Grundlinie d b parallel lauft. 3) Tr d a e = Tr d a f. Denn ihre Grundlinie d a ist gemeinschaftlich, und ihre

ihre Spitzen e und f liegen in einer Linie, die mit der Grundlinie d a parallel gezogen worden ist. Also sind die Tr daf, dab, dbg = den Tr dea, dab, dbc, oder Tr dfg = dem Fünfeck abcde.

119. Lehrsatz. Wenn man (fig. 103.) auf die drey Seiten eines rechtwinkelichten Tr abc Quadrate zeichnet: so ist die Fläche des Quadrats cbfg, auf der Hypothenuse cb, so groß, als die Flächen der beyden andern Quadrate acbk, und abih zusammen genommen, die auf die Catheten ac und ab gezeichnet worden sind.

Beweis. Um dieses zu beweisen muß man zuerst aus der Spitze des rechten Winkels a eine Linie ade parallel mit bf ziehen. Dadurch wird das Quadrat bfgc in zwey länglichte Rechtecke bfde zerschnitten. Nun kann man beweisen, daß bfde dem Quadrat abhi gleich ist.

Ziehe die Linien af und ci, dadurch entstehen zwey Tr baf und bci. Diese sind gleich. Denn 1) bf = bc als Seiten eines und desselben Quadrats, 2) ba = bi, als Seiten des Quadrats abih, 3) der stumpfe Winkel o + r = dem stumpfen Winkel o + s. Denn r und s sind rechte Winkel.

Nun ist Tr abf = 1/2 bdef, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie bf und gleiche Höhe ef haben. (Denn a die Spitze des Tr abf liegt in der Linie ade, die mit der Grundlinie bf parallel

parallel lauft.) — Ferner ist Tr bci = 1/2 abih, weil sie eine gemeinschaftliche Grundlinie bi, und gleiche Höhe hi haben, (denn c die Spitze des Tr bci liegt in der Linie cah, die mit der Grundlinie bi parallel lauft.)

Da nun die Tr abf und bci gleich sind, so müssen die Vierecke bdef und abih auch gleich seyn, weil sie noch einmal so groß als die Tr sind.

Auf eben diese Weise wird bewiesen, daß das Parallelogramm cdeg = dem Quadrat cakl, wenn man von g nach a, und von l nach b Linien ziehet, wodurch wieder gleiche Tr lbc und gca entstehen, welche die Hälften von den genannten Vierecken sind. Da dieser Beweis sich von dem vorigen nicht unterscheidet: so wollen wir ihn dem eignen Nachdenken überlassen.

120. Anmerkung. Dieser Satz hat in der ganzen Mathematik sehr viele Anwendung, daher heißt er magister matheseos, oder von seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz.

121. Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Fläche der Fläche zweyer andern Quadrate abcd und efgh zusammen genommen gleich ist. (fig. 104)

Auflösung. Setze diese zwey Quadrate mit den Seiten ab und ef so zusammen, daß bey a ein rechter Winkel entsteht. Ziehe die Hypothenuse fb, und setze darauf das Quadrat fbmn.

122. **Aufgabe.** Die Summe aller Winkel in einem Vieleck (z. B. in einem Fünfeck) zu finden. Diese Aufgabe kann auf zweyerley Art aufgelöset werden.

Erste Auflösung. (fig. 105) Nimm einen Punkt c innerhalb der Figur an, und ziehe von da Linien in alle Ecken. Dadurch wird die Figur in so viele Tr zertheilt, als sie Ecken hat. Die 3 Winkel jedes Tr halten zusammen 180° (§. 78). Daher multiplicire 180 mit der Zahl der Ecken (oder der Seiten) der Figur. Davon müssen aber 360 abgezogen werden: denn die Winkel, die um den Punkt c stehen, halten zusammen 360°. Z. B. im Fünfeck. Fünfmal $180 = 900$. Davon 360 abgezogen, bleiben für die Summe aller Winkel im Fünfeck, es mag regulär oder irregulär seyn 540°. — Auf diese Art findet man im Sechseck die Summe aller Winkel $= 720^\circ$; im Sieben-Eck $= 900^\circ$ u. s. w.

Zweyte Auflösung. (fig. 106.) Man kann auch die Figur durch Diagonallinien in Tr zertheilen, so bekommt man jedesmal 2 Tr weniger, als die Figur Seiten hat. Weil nun in jedem Tr die 3 Winkel $= 180^\circ$: so muß man 180 mit einer Zahl multicipliren, die um 2 geringer ist, als die Zahl der Seiten der Figur. Z. B. im Fünfeck, 3 mal $180 = 540^\circ$; im 6Eck, 4 mal $180 = 720^\circ$ u. s. w.

123. **Erklärung.** In einem regulären Vieleck oder Polygon sind alle Winkel gleich (§. 48.) Man

Man nennt einen solchen W a b c einen Polygonwinkel. Jedes reguläre Vieleck hat so viele Polygonwinkel, als es Seiten hat. Eben so viele Centriwinkel hat es auch, welche ebenfalls alle gleich sind. (fig. 107.)

124. Aufgabe. In einem regulären Vieleck die Größe eines Centriwinkels zu finden.

Auflösung. Dividire 360 mit der Zahl der Seiten des Vielecks. (§. 123.) Z. B. 360 mit 5 dividirt, giebt 72 als Centri-W. des regulären Fünfecks — 360 mit 6 dividirt, giebt 60° als Centri-W. des regulären Sechsecks, u. s. w.

125. Aufgabe. In einem regulären Vieleck die Größe des Polygon-Winkels zu finden.

Auflösung Suche nach §. 122. die Summe aller Winkel, und dividire diese Zahl mit der Zahl der Seiten. Z. B. im 5 Eck, 540 divid. durch 5 $= 108^{\circ}$; im 6Eck, 720 divid. durch 6 $= 120^{\circ}$, u. s. w.

126. Man kann über die regulären Vielecke eine Tabelle entwerfen, worin 1) die Summe aller Winkel, 2) die Größe des Centriwinkels, 3) die Größe des Polygonwinkels steht. Zur Probe diene folgende Tabelle bis auf 12 Eck.

Seiten des regulären Vielecks.	Summe aller Winkel.	Größe des C. W.	Größe des P. W.
5	540°	72°	180°
6	720	60	120
7	900	51 3/7	128 4/7
8	1080	45	135
9	1260	40	140
10	1440	36	144
11	1620	32 8/11	147 3/11
12	1800	30	150

127. **Aufgabe.** Ein reguläres Vieleck in einen Cirkel zu zeichnen. (fig. 107.)

Auflösung. Suche die Größe des Centriwinkels (§. 124) setze denselben mit dem Transporteur an den Mittelpunkt, alsdann ziehe die Sehne a b, und trage dieselbe im Cirkel herum. Z. B. im regul. Fünfeck ist der C. W. = 72°. Dieser wird an den radius g a angesetzt, und g b gezogen, worauf sich die Größe der Sehne a b, als der Seite des regulären Fünfecks ergiebt. — Im Achteck ist der C. W. = 45°. Wenn man diesen an den Mittelpunkt des Cirkels (fig. 108.) ansetzt, so erhält man die Seite des regulären Achtecks, welche in der Peripherie des Cirkels herum getragen wird.

128. **Lehrsatz.** Die Seite eines regulären Sechsecks a b (fig. 109) ist dem Halbmesser a c des Cirkels

Cirkels gleich, worin das Sechseck gezeichnet worden ist.

Beweis. In dem Tr abc ist W o = 60° als Centriwinkel vom Sechseck, und die W r + W s = 120° (§. 78). Da nun bc = ac, als Halbmesser eines Cirkels, so ist auch W r = W s, (§. 65.) Also ist W r = 60° und auch W s = 60°, oder die drey Winkel sind gleich. Daher müssen auch die drey Seiten ab, bc, ac gleich seyn (§. 63.)

129. **Anmerkung.** Es ist also leicht, in einem Cirkel ein reguläres Sechseck zu zeichnen, indem man nur den Halbmesser sechsmal darin herumtragen darf.

130. **Anmerkung.** Wenn man in einen Kreis ein reguläres oder gleichseitiges Dreyeck zeichnen will, so beschreibt man zuerst ein reguläres Sechseck, und ziehet hernach drey Diagonallinien durch den ersten, dritten und fünften Eckpunkt.

131. **Anmerkung.** Will man in einen Kreis ein reguläres Viereck oder ein Quadrat zeichnen: so ziehet man (fig. 110.) zwey Durchmesser a b und c d senkrecht auf einander, und verbindet ihre Endpunkte durch grade Linien.

132. **Aufgabe.** Auf eine gegebene Linie ab (fig. 111) ein reguläres Vieleck, z. B. ein Fünfeck zu zeichnen.

Auflösung. Suche den halben Polygonwinkel des Fünfecks, welcher = 54° ist (§ 125), und setze ihn bey a und b mit den Transporteur an, so durchschneiden sich die Linien bey c. Setze den

Cirkel in c, thue ihn auf bis a, und zeichne einen Kreis. In diesen trage die Linie ab herum.

133. **Aufgabe.** Ein Vieleck abzuzeichnen, dessen Umfangslinien, und die Diagonallinien weniger als Umfangslinien gemessen worden sind (fig. 112).

Auflösung. Da die ganze Figur in Triangel zertheilt worden ist, von deren jedem die drey Seiten bekannt sind: so kann man jeden Triangel besonders abzeichnen, wie im §. 66. gelehrt worden ist.

134 **Lehrsatz.** Wenn in einem Cirkel zwey Sehnen ab und bc (fig. 113) gleich sind: so sind auch die dazu gehörigen Bogen gleich.

Beweis. Ziehe die Halbmesser da, db, dc. Nun ist W abd = W bcd, weil die drey Seiten gleich sind, also ist auch W o = W x. Daher sind die Maaße dieser Winkel, nämlich die Bogen ab und bc auch gleich.

135. **Anmerkung.** Man kann auch umgekehrt sagen: wenn die Bogen gleich sind, so sind auch die dazu gehörigen Sehnen gleich. Denn alsdann ist wieder Tr abd = Tr bcd, weil 1) da = dc, 2) db = db, 3) W o = W x. Also ist auch ab = bc.

136. **Lehrsatz.** Wenn aus dem Mittelpunkte eines Cirkels eine senkrechte Linie auf eine Sehne ab fällt, so wird diese in zwey gleiche Theile getheilt. (fig. 114)

Be-

Beweis. Tr eae = Tr cbe. Denn 1) ca = cb, 2) ce = ce, 3) W o = W x. Also ae = eb.

137. **Anmerkung.** Weil nun auch folgt, daß W m = W n so ist der Bogen ad = dem Bogen db. Also theilt die Linie c d, welche aus dem Mittelpunkte senkrecht auf eine Sehne fällt, sowohl die Sehne, als auch den dazu gehörigen Bogen in zwey gleiche Theile.

138. **Lehrsatz.** Wenn zwey Sehnen de und ab gleich weit von dem Mittelpunkte c abstehen, so sind sie gleich. (fig. 115.)

Beweis. Ziehe die senkrechte Linien cf und cg. Nun ist Tr cdf = Tr cag, denn 1) cd = ca, 2) cf = cg, 3) W cfd = W cga, (da sie rechte Winkel sind), also df = ag. Aber df = 1/2 de und ag = 1/2 ab. (§. 136.) Daher ist de = ab.

139. **Lehrsatz.** Wenn aus b, der Mitte der Sehne ad (fig. 116.) eine senkrechte Linie gezogen wird: so gehet dieselbe durch den Mittelpunkt des Cirkels c, und theilt ihn also in zwey gleiche Theile.

Beweis. Tr abf = Tr dbf, denn 1) ab = bd, 2) bf ist gemeinschaftlich, 3) bey b sind rechte Winkel. Also ist af = df, und daher auch der Bogen af = den Bogen df (§. 134) Ferner Tr abe = Tr dbe, aus ähnlichen Gründen. Daher auch der Bogen ae = Bogen de. Also müssen die Bogen fa + ae gleich seyn den

Bogen fd + de. Die Bogen fae und fde sind Halbcirkel, und die Linie ef geht als Durchmesser durch den Mittelpunkt.

140. Aufgabe. In einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu suchen.

Erste Auflöung. (fig. 116) Ziehe eine Sehne ad, durch ihre Mitte ziehe senkrecht die Linie ef, und halbire sie in c, so ist c der Mittelpunkt.

Zweyte Auflösung. (fig. 117.) Ziehe zwey Sehnen ab, bd, aus ihren Mitten ziehe senkrechte Linien fg, hi. Diese müssen beyde durch den Mittelpunkt gehen; wo sie sich also durchschneiden, ist derselbe.

141. Aufgabe. (fig. 117) Durch drey gegebene Punkte a, b, d, welche nicht in einer graden Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe die Linien ab und bd, und suche nach der zweyten Art des vorigen §. den Mittelpunkt c, woraus der Kreis beschrieben werden kann. Also kann man um einen jeden Tr einen Cirkel zeichnen, der durch seine drey Spitzen geht.

142. Anmerkung. Durch zwey gegebene Punkte kann man eine große Menge Cirkel ziehen. Durch mehr als drey Punkte kann man nur in dem Falle einen Cirkel ziehen, wenn ihre Lage und Entfernung so abgemessen ist, daß sie grade in die Peripherie eines Cirkels fallen müssen. Aber durch drey Punkte, (die

(die nicht in einer graden Linie liegen,) kann man immer einen Cirkel ziehen, und zwar nur einen einzigen.

143. Aufgabe. Eine gerade Linie ab (fig. 118) in gleiche Theile zu theilen, (z. B. in fünf gleiche Theile.)

Auflösung. Ziehe unter einen willkührlichen Winkel eine Linie bc an b. Trage auf bc von b fünf gleiche Theile von willkührlicher Länge, so wird sich finden, wo der Endpunkt c liegt. Ziehe die Linien ca, und mit dieser parallel ziehe durch die Theilungspunkte u, v, w, x Linien up, vo, wn, xm. Nun sind die Theile am, mn, no, op, pb einander gleich.

Beweis. Ziehe die Linien mr, ns parallel mit cb. Nun ist Tr amr = Tr mns, weil 1) rm = sn (§. 38.) 2) W ram = W smn, 3) W rma = W snm (§. 73.) Also am = mn. Eben so beweißt man die Gleichheit der übrigen Stücke no, op, pb.

144. Aufgabe. Einen Triangel (fig. 119.) in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Theile nach dem vorigen §. die Grundlinie ab in so viele gleiche Theile, als verlangt werden. Von den Theilungspunkten ziehe Linien nach der Spitze c. Nun sind die Triangel gleich, weil sie gleiche Grundlinien und Höhe haben.

145. Anmerkung. Man kann auf dieselbe Art ein Trapezium (fig. 120.) in gleiche Theile theilen, wenn zwey Linien desselben parallel laufen. Diese werden zuerst getheilt — Die Figur 121. zeigt, wie ein Parallelogramm in eine verlangte Zahl gleicher Parallelogramme getheilt werden kann, wenn man zuerst die Grundlinie in so viele gleiche Theile theilt, als verlangt werden.

Drittes Kapitel.

Von der Ausmessung der Flächen.

146. Um Flächen auszumessen, muß man erst wissen, wie man grade Linien misset. Auf dem Papier braucht man dazu einen kleinen Maaßstab von Holz oder Messing und dergleichen von willkührlicher Länge, der in Ruthen, Schuhe und Zolle eintheilt ist. Der bequemste Maasstab ist der tausendtheilige, welcher 10 Ruthen, oder 100 Schuhe, oder 1000 Zolle enthält. Wir wollen ihn weiter unten §. 186 genauer beschreiben; wo sein Gebrauch gelehrt werden soll.

Wenn eine grade Linie auf dem Felde gemessen werden soll, so muß sie erst durch Stäbe bezeichnet werden. Zuerst werden an die beyden Ende der Linie Stäbe senkrecht eingesteckt, welche 4 bis 5 Fuß lang, und unten mit spitzem Eisen beschlagen sind, und Meßstäbe genennt werdeu. Hierauf läßt man dazwischen in der Entfernung von 100 bis 200 Schritten noch mehrere Meßstäbe einstecken. Damit diese alle in eine grade Linie zu stehen kommen, so stellt sich eine Person von der Gesellschaft 5 bis 6 Schritte hinter den einen Stab, der am Ende der Linie stehet, und visiret nach dem andern Ende

 hin.

hin. Ein anderer Gehülfe stellt sich mit einem Stabe eine Strecke davon, und hält denselben senkrecht schwebend über der Erde. Der erste Gehülfe muß ihm durch Zeichen zu verstehen geben, ob er seinen Stab weiter zur Rechten oder zur Linken rücken soll, bis sich die Stäbe decken. Alsdann wird er senkrecht eingesteckt. Eben so verfährt man mit den folgenden Stäben.

Hierauf wird die Linie mit einer Meßstange, eine Ruthe lang, die in Schuhe eingetheilt ist, gemessen. Am besten ists, wenn man von einem Stabe zum andern eine Schnur spannet, und daran die Ruthe legt.

Wenn die zu messende Linie lang ist: so gebraucht man dazu eine Meßkette, die 5 bis 10 Ruthen lang ist. Jedes Glied derselben ist einen Schuh lang, und die Glieder hängen mit kleinen Ringen aneinander. Am Ende von 10 Schuhen oder einer Ruthe ist ein größerer Ring angebracht. Durch die Ringe an den beyden Enden der Meßkette werden Stäbe gesteckt. Zwey Gehülfen tragen die Kette, und legen sie an die Linie. Ein dritter visiret nach der oben beschriebenen Art, und sieht zu, daß die Stäbe jedesmal, wenn die Kette gelegt wird, grade in die zu messende Linie fallen. Dieses setzt man fort, bis die ganze Linie gemessen ist, und zählet, wie oft man die Meßkette angelegt hat.

Wenn

Wenn die Linien an Bergen auf und ablaufen: so müssen sie doch so gemessen werden, als wenn sie horizontal oder auf einem ebenen Boden fortliefen. Hier ist eine Meßstange besser als eine Kette zu brauchen, weil man sie mit Hülfe einer Setzwage leicht horizontal legen kann. An das Ende wird jedesmal ein Stab senkrecht eingesteckt, und hernach die Meßstange da wieder angelegt, wo der Stab gestanden hat. (fig. 122.) Man erhält dadurch statt der Länge der Bergaufwärtsgehenden Linie a c die horizontale Linie a b. Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, alle Flächen auf der Erde, sie mögen noch so uneben seyn, also auszurechnen, als wenn sie lauter ebene Flächen wären.

147. **Erklärung.** Eine quadratförmige Fläche, welche eine Ruthe, Schuh oder Zoll lang und breit ist, heißet eine Quadratruthe, Quadratschuh, Quadratzoll. — Nach solchen Maaßen muß man die Größe der Flächen bestimmen. Wenn man z. B. fragt, wie groß ein Acker sey? so will man wissen, wie viel 9 Ruthen oder 9 Schuhe er halte. — Die Größe ganzer Landschaften wird auch nach Quadratmeilen bestimmt, welches Quadrate sind, die eine Meile lang und breit sind. Hierzu gehören aber noch mancherley Kenntnisse, die in den ersten Anfangsgründen der Geometrie nicht vorkommen können.

148. Anmerkung. Wenn man sich von der Ausmessung der Flächen einen deutlichen Begriff machen will: so muß man bedenken, daß es hier nicht dar-

um zu thun ist, blos die Länge der Umfangslinien der Fläche zu wissen, sondern den Innhalt der Fläche selbst. Wer z. B. die Größe seines Ackers wissen will, um einen Ueberschlag zu machen, wie viele Frucht er ohngefähr darauf ziehen könne, ist dazu nicht im Stande, wenn er blos den Umfang des Ackers weiß. Man müßte also ein Maaß erfinden, das die Größe der Fläche selbst angiebt; und dieses Maaß müßte selbst eine Fläche seyn. Denn jedes Ding, das gemessen werden soll, muß ein Maas haben, das mit ihm von einerley Art ist. Daher braucht man zur Messung einer Linie eine kleinere Linie, z. B. eine Ruthe, Schuh, oder Zoll. Gesetzt, man wollte nun wissen, wie groß die Fläche eines Tisches wäre, und schnitte sich so viele Quadratzolle von Papier, daß man den ganzen Tisch damit belegen könnte: so brauchte man diese hernach nur zu zählen. Dieses ist aber zu weitläuftig, und auch öfters nicht thunlich. Daher hat man einen kürzern Weg ausgedacht, die Menge der Q. Ruthen, Q. Schuhe u. s. w. zu finden, die in einer Fläche enthalten sind. Dies soll nun in den folgenden Aufgaben gelehrt werden.

149. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines vollkommenen Quadrats zu finden. (fig. 123.)

Auflösung. Messe eine Seite ab, und multiplicire sie mit sich selbst. Z. B. Es sey ab = 4′ so ist das Quadrat abcd = 16 Quadrat Schuh.

Beweis. Denn da ab = ac, so kann man sich vorstellen, als wenn das ganze Quadrat in Streifen getheilt wäre, deren jeder einen Schuh breit ist, und jeder Streifen muß so viele Quadratschuhe enthalten, als es Streifen überhaupt sind. Hier sind z. B. im untersten Streifen abmn vier Quadratschuhe, und da es auch vier Streifen seyn müssen, (weil die Figur sonst kein Quadrat wäre): so ist der Inhalt 4 mal 4, oder 16 Quadratschuhe.

150. Anmerkung. Weil bey dem Längenmaaße eine geometrische Ruthe = 10 Schuh, 1 Schuh = 10 Zoll, 1 Zoll = 10 Linien (oder Striche): so muß bey dem Flächenmaaße 1 Q. Ruthe = 100 Q. Schuhe, 1 Q. Schuh = 100 Q. Zolle, 1 Q. Zoll = 100 Q. Linien seyn. — Z. B. fig. 124 sey a b = b c = 1 Ruthe, so ist der Flächeninnhalt = 100 Q. Schuhe.

151. Anmerkung. Man kann also eine Zahl von Q. Ruthen leicht in Q. Schuhe verwandeln, wenn man diese Zahl mit 100 multipliciret, das ist, wenn man zwey Nullen anhängt. Hängt man an die Zahl der Q. Schuhe noch zwey Nullen, so hat man die Q. Zolle. Z. B. 12 Q. Ruthen sind = 1200 Q. Schuhe, diese sind = 120000 Q. Zolle. — Auf umgekehrte Art kann man eine Zahl von Q. Zollen in Q. Schuhe verwandeln, wenn man sie mit 100 dividirt, oder von der Rechten zur Linken zwey Ziffern für die Q. Zolle abschneidet: z. B. 2876 Q. Zolle sind 28′76″. — Ist die Zahl so groß, daß man noch weitere zwey Ziffern abschneiden kann: so bekommt man die Q. Ruthen. Z. B. 267864 Q. Zolle sind 26° 76′ 64″ im Quadratmaße.

152. Aufgabe. Den Flächeninhalt eines länglichten Rechtecks zu finden (fig. 125.)

Auflösung. Messe die Länge und Breite, und multiplicire sie mit einander. Z. B. ab = 7″, ac = 3″ so ist der Flächeninhalt von abcd = 21 Q. Zolle.

Beweis. Denn die Breite zeigt an, wie viel Streifen, und die Länge, wie viel Q. Zolle in jedem Streifen sind.

153. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines schiefstehenden Parallelogramms (einer Raute oder länglichten Raute) zu finden (fig. 126).

Auflösung. Lasse von der obersten Linie eine senkrechte Linie auf die Grundlinie fallen. Diese ist die Höhe des Parallelogramms. Messe sowohl die Höhe als die Grundlinie, und multiplicire sie mit einander. Z. B. ab = 12′, cd = 10′, so ist abef = 120 Q. Schuhe.

Der Beweis fließt aus dem §. 106, daß ein schiefwinklichtes und rechtwinkelichtes Parallelogramm in Ansehung der Fläche gleich sind, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben.

154. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Triangels zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Höhe und Grundlinie mit einander, und dividire das Produkt durch zwey. Z. B. In fig. 27 sey ab = 8′, cd = 6′, so ist Tr abc = 48/2 = 24 Quad. Schuhe.

Der Beweis fließet aus dem §. 110, daß jeder Tr die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe ist.

155. **Anmerkung.** Bey einem stumpfwinkelichten Tr wie fig. 28, fällt die Höhe ausserhalb desselben, und man muß die Grundlinie so weit verlängern, bis die senkrechte Linie cd sie berühret.

156. Anmerkung. Man kann auch, um den Innhalt eines Tr zu finden die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multipliciren. Z. B.

$$\begin{array}{r} 1/2\ ab = 4 \\ cd = 6 \\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ab = 8 \\ 1/2\ cd = 3 \\ \hline 24 \end{array}$$

157. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Trapeziums zu finden, in welchem zwey Linien a b and d c parallel laufen. (fig. 127.)

Auflösung. Messe die Linien ab und cd, addire die Zahlen, nimm von der Summe die Hälfte, und multiplicire sie mit der Höhe ca. Z. B. ab = 10′, cd = 8′, also ab + cd = 18′, die Hälfte ist = 9. Es sey ca = 4′, so ist der Inhalt von ab cd = 4. 9 = 36 Q. Schuhe.

Beweis. Ziehe de parallel mit ca. Theile eb in zwey gleiche Theile in f. Ziehe fg parallel mit de, und dg parallel mit ab, so entsteht ein Parallelogramm afgc, dessen Grundlinie af das Mittel zwischen den Linien cd und ab ist, weil ef = fb. Nun muß bewiesen werden, daß das Parallelogramm afgc = dem Trapezium abdc. Dies folgt daraus, weil Tr fbn = Tr dgn. Denn 1) W o = W x als Vertikalwinkel, 2) W r = W s als Wechselwinkel, 3) dg = fb. Also ist dem Parallelogramm afgd ein so großer Tr dgn zugesetzt worden, als der Tr fbn ist, der von dem Trapezium abgeschnitten worden ist. Daher ist afgc = abdc.

158. **Aufgabe.** Ein Trapezium auszurechnen, worin keine Seite mit der andern parallel lauft. (fig. 128.)

Auflösung Theile die Figur durch die Diagonallinie ae in 2 Tr, und rechne jeden besonders aus. Die Produkte addire zuletzt.

$$\begin{array}{ll} \text{Z. B. } ae = 20 & ae = 20 \\ 1/2\,bn = 5 & 1/2\,dm = 6 \\ \hline \text{Tr } abe = 100 \text{ Q. S.} & \text{Tr } ade = 120 \text{ Q. S.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Tr } abe = 100 \\ \text{Tr } ade = 120 \\ \hline \text{Trapez. } abed = 220 \text{ Q. S.} \end{array}$$

159. Anmerkung. Man erspart etwas Mühe in der Messung der Linien, wenn man eine Grundlinie ae für beyde Tr annimmt.

160. **Aufgabe.** Die Fläche eines regulären Vielecks auszunehmen (fig. 129.)

Auflösung. Ziehe aus dem Mittelpunkte Linien in die Ecken, wodurch so viele gleiche Triangel entstehen, als das Vieleck Seiten hat. Daher rechne nur einen Tr aus, und multiplicire die Zahl, die dessen Fläche anzeigt, mit der Zahl der Seiten. Z. B. ab = 8′ 1/2 cd = 3′. Inhalt des Tr abc = 24 Q. Schuhe. Inhalt der ganzen Figur = 6. 24 = 144 Q. Sch.

161. **Aufgabe.** Die Fläche eines irregulären Vielecks (fig. 112.) auszurechnen.

Auf-

Auflösung. Theile dasselbe durch Diagonallinien in Tr, rechne jeden besonders aus, und addire dieselben.

162. **Aufgabe.** Ein reguläres Vieleck in einen gleich großen Tr zu verwandeln. (fig. 130, n. 1. und 2.)

Auflösung. Zeichne einen rechtwinkelichten Tr, dessen Grundlinie ab so groß ist, als die Linien AB, BC, CD, DE, EA zusammen genommen, die das reguläre Vieleck einschließen, und dessen Höhe ac gleich ist der Höhe ox von einem der Tr des Vielecks. Alsdann ist Tr abc = ABCDE.

Beweis. Man stelle sich vor, als seyen die Tr des Vielecks, ABo, BCo u. s. w. (welche alle gleich groß sind,) neben einander auf die Linie ab gesetzt. Weil nun ac = ox: so ist ac so hoch, als alle diese Tr abd, bef u. s. w. Zertheile durch die Linien cb, ce, cg, ci den großen Tr in lauter schiefstehende Tr. Diese schiefstehende Tr sind den gradstehenden gleich, weil sie gleiche Grundlinien und Höhe mit ihnen haben. Es ist nämlich Tr abc = Tr abd, Tr bec = Tr bef, Tr egc = Tr egh, Tr gic = Tr gik, Tr ilc = Tr ilm. Also ist Tr alc = dem regulären Vieleck ABCDE.

163. Wenn man ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten (fig. 131.) in einen Cirkel zeichnet: so werden die Tr des Vielecks sehr schmal, und ihre Grundlinien sehr klein werden. Je größer die Anzahl der Seiten eines solchen Vielecks ist, desto näher

näher kommt sein Umfang dem Umfange, und sein Flächeninhalt dem Flächeninhalt des Cirkels, in welchen es beschrieben worden ist. Stellte man sich nun ein solches Vieleck von unzählig vielen Seiten vor: so würde sein Umfang dem Umfange des Cirkels gleich seyn. Ferner würde auch der Flächeninhalt von beyden gleich seyn.

Da man nun nach dem vorigen §. jedes reguläre Vieleck in einen gleich großen Triangel verwandeln kann, wenn man die Grundlinie desselben, und seine Höhe gleich macht dem Umfange des Vielecks und der Höhe eines seiner Tr; so kann man auf ähnliche Art auch einen jeden Cirkel in einen gleich großen Tr verwandeln. Denn der Cirkel ist als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten anzusehen. Macht man daher einen Triangel, dessen Grundlinie und Höhe gleich sind dem Umfang und Halbmesser des Cirkels: so haben beyde Figuren eine gleich große Fläche. — Es ist nicht nöthig, daß man wirklich einen solchen Triangel zeichnet, der einen gegebenen Cirkel gleich ist; man kann sich aber doch vorstellen, als wenn ein solcher gezeichnet worden wäre. — Hierauf beruhet nun die folgende Aufgabe von der Ausmessung der Fläche eines Cirkels.

164. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Cirkels zu finden.

Auflösung. Stelle dir vor, als sey der Cirkel in einen gleich großen Triangel verwandelt, dessen

dessen Grundlinie und Höhe dem Umfang und Radius des Cirkels gleich sind. Da man nun den Inhalt eines Tr findet, wenn man seine Grundlinie mit der halben Höhe multipliciret (§. 156) so findet man auch den Inhalt des Cirkels, wenn man seinen Umfang mit dem halben Radius (oder 4ten Theil des Durchmessers) multipliciret. (Wenn es wegen der Zahlen bequemer ist: so kann man auch den ganzen Durchmesser mit dem 4ten Theil der Peripherie multipliciren.

Z. B. Durchmesser = 100″, Peripherie = 314″. Multiplicire 314 mit 25.

```
 314
  25
────
1570
628
────
```

Inhalt des Cirk. = 7850 Quadrat-Zolle.

165. Anmerkung. Da alle Cirkel, sie mögen groß oder klein seyn, einander ähnlich sind: so müssen sich die Längen des Durchmessers und der Peripherie bey einem wie bey dem andern Cirkel verhalten: das heißt, es muß bey jedem Cirkel ein gewisses bestimmtes Verhältniß zwischen dem Durchmesser und der Peripherie statt finden. Dieses ist ohngefehr wie 1 zu 3, oder die Peripherie ist etwas größer, als 3 mal so lang, wie der Durchmesser. Wenn man z. B. ein Band um einen Hut ziehen will: so darf man das Band nur queer über die Mitte des Hutes legen, diese Länge 3 mal nehmen, und noch etwas zugeben: so ist das Band lang genug, um den Hut damit einzufassen.

Da indessen dieses Verhältniß, wie 1 zu 3, nicht sehr richtig ist: so hat man durch verschiedene Kunstgriffe, (die hier nicht weiter beschrieben werden können,) richtigere Verhältnisse gefunden. In den Rechnungen nimmt man gewöhnlich an, daß sich der Durchmesser zur Peripherie verhält, wie 100 zu 314, oder wie 7 zu 22. Wir wollen in den folgenden Rechnungen das leztere Verhältniß gebrauchen.

Es würde beschwerlich und unnöthig seyn, wenn man sowohl den Durchmesser, als die Peripherie eines Cirkels, dessen Fläche man ausrechnen will, messen wollte. Wenn man nur eins von beyden gemessen hat: so kann man mit Hülfe des obigen Verhältnisses nach der Regel de Tri das andere ausrechnen.

166. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Cirkels auszurechnen, dessen Durchmesser gemessen worden ist.

Auflösung. Sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält 7 zu 22, so verhält sich die gemessene Länge des Durchmessers, zu der Länge der Peripherie. Wenn diese gefunden worden ist: so multiplicire sie mit dem 4ten Theil des Durchmessers.

Z. B. der Durchmesser sey = 2′ 8″ oder 28″

7 : 22 = 28 : Peripherie.

```
        22
     ------
        56
        56
     ------
  7)   616  | 88″ = Länge der Peripher.
        56
     ------
        56      88
        56       7 = dem 1/4 des Dchm.
     ------   -----
         0    616 Q.″ oder 6′ 16″ ist
                   die Fläche des Cirkels.
```

167. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Cirkels auszurechnen, dessen Peripherie gemessen worden ist.

Auflösung. Sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält 22 zu 7, so verhält sich die gemessene Länge der Peripherie zu der Länge des Durchmessers. Wenn diese gefunden worden ist: so multiplicire den 4ten Theil davon mit der Peripherie (oder auch den ganzen Durchmesser, mit dem vierten Theile der Peripherie.)

Z. B. Die Peripherie sey = 60″

22 : 7 = 60 : Durchmesser.

$$\begin{array}{r|l} 7 & \\ 22)\ 420 & 19\frac{1}{11} = \text{Durchmesser.} \\ 22 & \\ \hline 200 & \\ 198 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19\frac{1}{11} \\ 15 = 1/4 \text{ Peripherie.} \\ \hline 95 \\ 19 \\ \hline 285\ \frac{15}{11} \\ 286\ \frac{4}{11} \end{array}$$

286 $\frac{4}{11}$ □. Zoll ist die Fläche des Cirkels.

168. **Anmerkung.** Die Ausrechnung der Flächen der Cirkel kommt häufig vor, besonders bey der Berechnung des Inhalts mancher Körper, wie in der Folge gezeigt werden soll.

169. Lehrsatz. Wenn man (fig. 132) in Cirkeln von verschiedener Größe auf ihre Durchmesser ab und cd Quadrate zeichnet: so muß eines jeden Cirkels Fläche, zu der Fläche des Quadrats seines Durchmessers in einem gewissen bestimmten Verhältnisse stehen.

Beweis. Denn sowohl alle Cirkel, als alle Quadrate sind, jede unter sich, einander ähnlich.

170. Aufgabe. Das Verhältniß zwischen der Fläche des Cirkels, und der Fläche des Quadrats auf seinen Durchmesser zu finden.

Auflösung. Wir wollen annehmen, der Durchmesser sey in 100 gleiche Theile getheilt, welche Zolle heißen mögen: so hält die Peripherie 314 solcher Zolle (§. 165). Nun multipliciren wir 100 mit sich selbst, so erhalten wir 10,000 Q. Zolle, als den Flächeninhalt des Quadrats auf dem Durchmesser. — Wenn wir ferner 314 mit 25 (als dem 4ten Theile des Durchmessers) multipliciren: so erhalten wir 7850 Quadrat-Zolle als die Fläche des Cirkels. Also verhält sich die Fläche des Cirkels, zur Fläche des Quadrats vom Durchmesser, wie 7850 zu 10,000, oder wie 785 zu 1000. (Denn das Verhältniß ändert sich nicht, wenn man an beyden Zahlen eine Nulle wegstreicht; so wie zum Beyspiel 20 zu 30 sich verhält, wie 2 zu 3.)

171. Aufgabe. Man kann mit Hülfe dieses Verhältnisses noch auf eine andere Art den Inhalt

halt eines Cirkels ausrechnen, wenn dessen Durchmesser gemessen worden ist.

Auflösung. Nimm das Quadrat von dem gemessenen Durchmesser, und sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält 1000 zu 785, so verhält sich die Fläche des Quadrats vom gemessenen Durchmesser, zu der Fläche des Cirkels. Z. B. der Durchmesser sey = 4' so ist die Fläche seines Quadrats = 16 Q. Schuhe.

1000 : 785 = 16 : Fläche des Cirkels.

$$\begin{array}{r} 785 \\ 16 \\ \hline 4710 \\ 785 \\ \hline \end{array}$$

$$1000 \,|\, \begin{array}{r} 12560 \\ 1000 \\ \hline 2560 \\ 2000 \\ \hline 560 \end{array} \,|\, 12\tfrac{56}{100}$$ Q. Schuhe ist die Fläche des Cirkels.

172. **Anmerkung.** Aus dem §. 169 folgt, daß wenn man in die drey Quadrate Fig. 103. Cirkel zeichnet, die Flächen der beyden kleinern Cirkel zusammengenommen der Fläche des größern Cirkels gleich seyn müssen. Denn was von den Quadraten gilt (siehe §. 119.), muß auch von den darin gezeichneten Cirkeln gelten.

Viertes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Triangel.

173. Lehrsatz. Wenn (fig. 118) in dem Tr abc eine Linie nw mit der Linie ac parallel lauft: so schneidet sie von den Linien bc und ba zwey Stücke bn und bw ab, welche sich so verhalten, wie die ganzen Linien bc und ba, oder es ist bn: ba = bw: bc.

Beweis. Denn in dem §. 143 wurde gezeigt, daß sowohl bc als ba, jedes in 5 gleiche Theile getheilt worden. Also ist bn: ba = 3: 5, und bw: bc = 3: 5. Daher ist bn: ba = bw: bc.

Eben so ist bm: ba = bx: bc, weil bm: ba = 4: 5, und bx: bc = 4: 5.

174. Anmerkung. Wenn man daher (fig. 133.) in einem Triangel abc irgendwo eine Linie de mit einer Seite bc parallel ziehet: so stehen die abgeschnittenen Stücke ad und ae in eben dem Verhältniß, wie die ganzen Linien ab und ac. Das heißt, es ist ad: ae = ab: ac. Z. B. wenn ab: ac = wie 7: 8, so ist auch ad: ae = 7: 8. Denn es ist möglich, die Linie ab in so viele gleiche Theile getheilt,

getheilt zu denken, daß ein Theilungspunkt in d falle. Da nun de parallel mit bc ist: so muß ae so viele gleiche Theile halten, als ad, und ac so viele, als ab, (obgleich die Theile der Linie ac nicht grade eben so groß, als die Theile von ab seyn müssen, sondern größer oder kleiner werden, nachdem ac länger oder kürzer, als ab ist.)

Aus eben dem Grunde folgt, daß wenn (fig. 134) de mit ac parallel lauft, bd: ba = be: bc, und wenn (fig. 135.) de mit ab parallel lauft, so ist cd: ca = ce: cb.

Man mag also eine Linie de, mit welcher von den 3 Seiten des Tr man will parallel ziehen, so müssen die abgeschnittenen Stücke in eben der Proportion stehen, wie die ganzen Linien, die geschnitten worden sind.

175. Anmerkung. Bey der Figur 133 gelten auch folgende Proportionen, db: ab = ec: ac
ferner, ad: db = ae: ec
ferner, ad: de = ab: bc
ferner, ae: ed = ac: cb.

176. **Aufgabe.** Zu drey gegebenen Linien ad, ae, ab die vierte Proportionallinie zu finden, so daß sich ad zu ac, wie ab zur vierten verhält. (fig. 136.)

Auflösung. Zeichne einen Winkel von willkühtlicher Größe. Trage aus der Spitze auf einen Schenkel die Linie ad, und auf den andern Schenkel die Linie ae. Ziehe die Linie de. Dann trage auf den ersten Schenkel die Linie ab, und ziehe durch b eine Parallellinie mit de, welche den andern Schenkel in c schneidet. Nun ist ac die gesuchte vierte Proportionallinie. — Wenn z. B. ad = 4″ ae = 5″, ab = 8″ so ist ac = 10″. — Der Beweis fließt aus §. 174.

177. Lehrsatz. Wenn (fig. 137) alle Winkel eines Tr ABC allen Winkeln eines andern Tr abc, in gehöriger Ordnung genommen gleich sind, so daß W A = W a, W B = W b, W C = W c: so stehen die Seiten des einen Tr in eben dem Verhältniß, wie die Seiten des andern.

Beweis. Weil W A = W a, so kann man sich vorstellen, als sey der kleinere Tr a b c mit der Spitze a auf die Spitze A des größern Tr ABC gelegt, (fig. 138), so daß a b in AB, und a c in AC fallen muß. Nun muß b c mit BC parallel laufen, weil W B = W b, und W C = W c (§ 76). Daraus folgen, nach den §. 173 und 174 die Proportionen AB : BC = ab : bc

AB : AC = ab : ac

AC : CB = ac : cb

178. Anmerkung. Man kann auch den kleinen Tr abc mit der Spitze b in B legen, (fig. 139.) so liegt a c mit A C parallel, weil W a = W A, W c = W C, und es folgen dieselbigen Portionen

Wenn man (fig. 140) die Spitze c in C legt, so muß wieder a b mit A B parallel laufen: also folgen auch dieselbigen Proportionen.

179. Anmerkung. Wenn zwey Winkel eines Tr zwey Winkel eines andern Tr gleich sind, so muß auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Tr gleich seyn (weil ihre Summe immer 180° ist, nach dem §. 78). Daher kann man statt des Lehrsatzes

satzes §. 177 auch sagen: wenn in 2 Tr zwey Winkel gleich sind, so stehen die Seiten in Proportion.

180. Anmerkung. Man kann den Satz auch umkehren: wenn in einem Triangel eine Linie mit einer der drey Seiten parallel lauft; so müssen die Winkel des kleinern Triangels den Winkeln des größern gleich seyn.

Ueberhaupt: wenn die Seiten zweyer Triangel in Proportion stehen, so müssen auch die Winkel des einen den Winkeln des andern in gehöriger Ordnung gleich seyn.

181. Erklärung. Aehnliche Triangel sind solche, welche gleiche Winkel in gehöriger Ordnung haben, und deren Seiten zu einander in Proportion stehen.

182. Aus dem Vorigen folgt der Hauptsatz:

Zwey Triangel sind einander ähnlich, wenn man gemessen hat, daß:

1) entweder zwey Winkel in ihnen gleich sind;

2) oder daß die Seiten des einen in demselben Verhältnisse stehen, wie die Seiten des andern;

3) oder daß ein Winkel in beyden gleich ist, und wenn man sie mit diesen gleichen Winkeln in einander legt, die Grundlinie des einen

Triangels der Grundlinie des andern parallel lauft.

183. Anmerkung. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ein liegendes S, (nämlich ∽). Wenn man z. B. bezeichnen will, daß die Tr der 137sten Figur einander ähnlich sind, so setzt man: Tr ABC ∽ Tr a b c.

Da alle gradlinichte Figuren in Triangel getheilt werden können: so besteht ihre Aehnlichkeit in denselben Eigenschaften, die wir bey ähnlichen Tr antreffen. Zwey gradlinichte Figuren sind daher ähnlich, wenn 1) die Winkel in gehöriger Ordnung in beyden gleich sind, 2) die Seiten der einen in denselben Verhältnisse stehen, wie die Seiten der andern. Z. B. wenn fig. 141. W A = W a, W B = W b, W C = W c, W D = W d, W E = W e, und AB: BC = a b: b c, ferner BC: CD = b c: c d, ferner CD, ferner CD: DE = c d: d e, ferner DE: EA = d e: e a, ferner EA: AB = e a: a b.

184. Aufgabe. Einen Tr a b c (fig. 137) zu zeichnen, der einen andern ABC ähnlich ist, wenn eine Seite b c gegeben ist.

Auflösung. Mache entweder die zwey Winkel c und b den zwey Winkeln C und B gleich: oder suche zu CB, BA, und c b die 4te Proportionallinie, wie auch zu CB, CA, und c b; so findest du die Linien b a und c a (§. 176.)

185. Aufgabe. Einer jeden gegebenen gradlinichten Figur eine ähnliche zu verzeichnen. Z. B. Es sey fig. 141 ABCDE gegeben, man soll ein ähnliches Fünfeck a b c d e zeichnen.

Auf-

Auflösung. Zerfälle die gegebene Figur ABCDE durch Diagonallinien in Tr, und zeichne nach dem vorigen §. ähnliche Tr in derselben Ordnung und Lage, wie sie in der ersten Figur liegen, so entsteht dadurch die ähnliche Figur abcde.

186. **Aufgabe.** Einen tausendtheiligen Maasstab (fig. 142) zu verfertigen.

Auflösung. Die ganze Länge des Maasstabs AB wird in 10 gleiche Theile getheilt, von denen hier nur 3 abgebildet sind. Der erste Theil AC wird wieder in 10 gleiche Theile getheilt. Dieses sind Hunderttheile des Maasstabs, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 von C nach A bezeichnet sind. Von A nach D wird rechtwinkelicht auf AC eine Linie von willkührlicher Länge aufgerichtet; die auch in 10 gleiche Theile getheilt wird. Durch diese Theilungspunkte werden Parallellinien mit AB gezogen, deren letzte die Linie DF ist. Endlich werden queerüber Linien von D nach 9, von 9 nach 8, von 8 nach 7 u. s. w. zuletzt von 1 nach C gezogen. Durch diese Queerlinien werden die Räume von C nach 1, von 1 nach 2 u. s. w. wieder in 10 gleiche Theile getheilt. Denn in dem Tr CE1 liegt der kleine Tr Cmn, dessen Linie mn mit E, parallel lauft. Daher ist Tr CE1 $\backsim$ Tr Cmn, (§. 175).

Also ist $CE : Cn = E1 : mn$.

Da nun $CE : Cn = 10 : 1$.

so ist auch $E1 : mn = 10 : 1$.

Also

Also ist $mn = 1/10$ von $E1 = 1/100$ AC $= 1/1000$ von dem ganzen Maasstabe. — Aus eben den Gründen ist $or = 2/10\ E1$.

Denn CE : Cr = 10 : 2
und CE : Cr = E1 : or
daher E1 : or = 10 : 2

187. Anmerkung. Man kann AC als eine Ruthe ansehen, C1 als einen Schuh, mn als einen Zoll. Dieser Maasstab dient also dazu, um eine Figur, die man nach dem gewöhnlichen großen Maaßstabe auf dem Felde gemessen hat, verkleinert auf das Papier zu zeichnen. Er heißt daher auch der verjüngte Maasstab. Uebrigens ist es willkührlich, wie groß dieser Maaßstab seyn soll. Wer viel mit Zeichnungen zu thun hat, thut am besten, wenn er sich einige verjüngte Maaßstäbe von verschiedener Länge verfertiget um die Wahl zu haben, wie groß oder klein er den Riß verfertigen will, den er zu machen hat.

Mit Hülfe dieses Maaßstabes, eines Cirkels, Lineals und Transporteurs kann man gemessene Felder, Waldungen und dergleichen im Kleinen abzeichnen, oder in Grund legen. — Zweitens: wenn der Maaßstab bekannt ist, nach welchem eine Figur gezeichnet worden ist: so kann man hernach jede Linie derselben mit dem Cirkel nehmen, und an den Maaßstab setzen, um ihre Länge zu erfahren. Dieser zweyfache Gebrauch eines so nützlichen und für den Geometer unentbehrlichen Instruments soll bey künftigen Aufgaben noch mehr erläutert werden.

188. Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde zu messen.

Auf-

Auflösung. Man gebraucht dazu verschiedene Instrumente, wovon wir einige der vorzüglichsten beschreiben wollen.

1) Das Meßtischchen. Dieses ist ein gewöhnliches viereckigtes Tischchen auf einem festen Stand, worauf es nach der Setzwage horizontal gestellt werden kann. Hierauf wird ein Bogen Papier, entweder mit einem viereckichten Rahmen oder mit Mundleim auf das Tischchen bevestigt, und wohl ausgespannt. Um über das Tischchen hin visiren zu können, gebraucht man ein Lineal von Holz oder Messing (fig. 143) woran zwey Plättchen an beyden Enden mit Einschnitten rechtwinkelicht angebracht sind, durch welche man visiren kann. Diese Plättchen heißen Dioptern, und das Linial heißt das Diopternlineal.

Will man nun mit dem Meßtischchen einen Winkel BAC (fig. 144) auf dem Felde aufzeichnen: so stellt man es genau über den Punkt A, und visirt nach den Gegenständen B, C (welches Bäume, Thürme, oder auch eingesteckte Stäbe seyn können) mit dem Diopternlineal, und ziehet mit Bleystift die Linien ab und ac, worauf man diesen Winkel bac mit dem Transporteur messen kann.

2) Das Astrolabium. Dieses ist ein ganzer oder halber Kreis von Messing, der in 360 oder 180 Grade, jeder Grad wieder in halbe und Viertel-Grade, getheilt ist. Es stehet auf einem

einem dreifüßigen Stand oder Stativ, und ist so eingerichtet, daß man es sowohl horizontal als vertikal stellen kann. (Diese ganze Einrichtung läßt sich an einem Astrolabio leicht zeigen, daher sie hier nicht weitläuftig beschrieben werden soll. Nur bemerke ich noch, daß die vertikale Stellung, zum Unterschied von der horizontalen, diejenige heißet, wenn die Fläche des Astrolabiums senkrecht nach der Erdoberfläche stehet, wie z. B. die Wand eines Gebäudes. Man nennt die horizontale Stellung auch die wagerechte, und die vertikale die lothrechte. Denn ein an einem Faden herunter hängendes Gewicht heißt ein Loth.)

Auf dem Astrolabio sind zwey Lineale mit Dioptern (wie das fig. 143) angebracht. Das eine steht fest vom 1sten bis zum 180sten Grade; das andere ist um den Mittelpunkt des Instruments beweglich.

Will man nun einen Winkel in horizontaler Fläche messen: so stellt man (fig. 145) das Astrolabium an die Spitze desselben A, und visiret mit den feststehenden Diopternlineal nach B, worauf man das bewegliche Diopternlineal so lange rucket, bis man den Gegenstand C dadurch erblicket. Hierauf kann man auf dem zwischen den beyden Linealen liegenden Bogen die Grade zählen, welche das Maas des Winkels BAC angeben.

Soll aber (fig. 146) ein Winkel in vertikaler Stellung gemeßen werden, (wie z. B. wenn man

man den Winkel wissen wollte, den zwey Linien machen, die von der Spitze eines Thurms und von seinem Fuße nach einem Punkte A gezogen werden): so stellt man das Astrolabium vertikal in den Punkt a, und visiret wieder durch die zwey Lineale nach B und C, worauf man die Grade des Bogens zählen kann, der zwischen den beyden Linealen liegt. Diese geben das Maas des Winkels BAC.

189. Anmerkung. Man braucht zur Messung der Winkel auch die Boussole, einen in 360° eingetheilten Kreis, in dessen Mittelpunkt sich eine Magnetnadel frey bewegt. Diese zeigt immer mit ihrer Spitze nach Norden. Dabey ist auch ein Diopterlineal angebracht. Stellt man nun das Instrument an die Spitze des Winkels, und visirirt zuerst nach einem Schenkel hin, wo man sich den Stand der Magnetnadel merkt: so wird sich, indem man das Instrument drehet, und nach dem andern Schenkel visiret, die Nadel um einen eben so großen Winkel an dem Kreise fortschieben, und man kann nun nur die Grade zählen, die die Nadel während des Umdrehens durchlaufen hat, so weiß man die Größe des Winkels, der gemessen werden sollte. Fig. 147. stellt eine Boussole vor.

Andere Instrumente zur Messung der Winkel, wie z. B. die Zollmannische Meßscheibe übergehen wir hier.

190. Aufgabe. Die Entfernung zweyer Orte B und C zu messen, wenn man aus einem Standpunkte A an beyde hinkommen, und also die Linien AB und AC messen kann.

Auflösung. 1) Mit den Meßtischchen (fig. 144). Setze das Tischchen in A, und zeichne den Winkel BAC nach der vorher beschriebenen Weise auf das Papier. Hierauf messe die Linien AB und AC mit der Meßkette, und trage das Maaß derselben im Kleinen von dem verjüngten Maaßstabe mit dem Cirkel auf das Tischchen von a nach b und nach c. Ziehe die Linie a c. Diese Linie nimm mit dem Cirkel, und setze sie auf den verjüngten Maasstab. Soviel diese auf dem kleinen Maasstabe hält, eben soviel hält BC nach dem großen Maaße auf dem Felde.

Z. B. Man wollte wissen, wie weit zwey Bäume B und C von einander entfernt wären, zwischen welchen eine Hecke, Sumpf oder dergleichen läge, daß man nicht grade von B nach C messen könnte. Gesetzt AB wäre $= 200^\circ$ und AC $= 240^\circ$, so müsse a b und a c eben so groß nach dem kleinen Maaßstabe gemacht werden. Wenn man nun endlich durch die Messung der Linie a c auf dem kleinen Maasstabe fände, daß sie 120° groß wäre, so müßte die Entfernung von B nach C auch 120° nach dem großen Maaße seyn.

Beweis. Tr ABC und Abc sind ähnlich. Denn AB : AC $= 200 : 240$, und Ab : Ac $= 200 : 240$. Daher stehen die Seiten des kleinen und großen Tr in Proportion, und den Winkel A haben sie gemeinschaftlich. Daher folgt aus §. 182. daß die beyden Tr ähnlich sind, die Seiten des kleinen Tr zu den Seiten des großen sich verhalten, wie

das

das kleine Maas zum großen. Wenn also bc im kleinen Maaße 120° hält: so muß auch BC im großen Maaße 120° halten.

Mit andern Worten heißt das so viel

Ab : bc = 200 : 120 im kleinen Maaße.
Also AB : BC = 200 : 120 im großen Maaße.

2) Mit dem Astrolabio (fig. 145). Messe den Winkel A, und mit der Meßkette die Linien AB und AC. Zeichne auf ein Papier einen kleinen Tr abc, wo W a = W A, und ab, ac nach dem kleinen Maaße so groß sind, als AB, AC nach dem großen. Messe hierauf bc nach dem kleinen Maasstabe, so weißt du, wie groß BC nach dem großen Maaße ist.

Der Beweis ist derselbe, wie vorhin. Der ganze Unterschied in diesen beyden Verfahrungsarten bestehet nur darin, daß man auf das Tischchen sogleich den kleinen Tr aufzeichnet, der dem großen ähnlich ist. Wenn man sich aber des Astrolabiums bedienet: so wird der kleine Tr hernach zu Hause gezeichnet. Dieses findet bey allen dergleichen Messungen statt. Daher wollen wir es hier einmal für allemal anmerken.

191. Aufgabe. Die Entfernung von B nach C zu messen, wenn man vom Standpunkte A nicht an beyde, sondern nur an einen B messen kann, als wenn z. B. zwischen A und C ein Fluß oder dergleichen befindlich ist.

Auflösung. 1) Mit dem Meßtischchen. (fig. 147). Stelle das Tischchen in A, zeichne den W BAC drauf, messe die Linie AB, und trage sie aufs Tischchen von a nach b. Hierauf stecke einen Stab in A, und stelle das Tischchen in B, so daß die Linie ab genau in AB fällt. Visire nach C hin, so werden auf dem Tischchen die Linien von b und a sich in c schneiden. Messe die Linie bc nach dem kleinen Maase. Dieses zeigt die Größe der Linie BC nach dem großen Maase.

Beweis. Denn Tr ABC und Tr abc sind ähnlich, weil die Winkel darin gleich sind: also verhalten sich auch die Linien des Tr abc so gegeneinander, wie die Linien des Tr ABC (§. 182.)

Gesezt, AB = 150° so ist ab = 150° nach dem kleinen Maase. Wäre also bc = 160° nach dem kleinen Maase, so wäre auch BC = 160° nach dem großen Maase.

ab : bc = 150 : 160
AB : BC = 150 : 160.

2) Mit dem Astrolabio. Messe die Winkel A und B, und die Linie AB mit der Meßkette. Zeichne zu Hause einen kleinen Tr abc, worin ab nach dem kleinen Maase soviel hält, als AB nach dem großen, und mache mit dem Transporteur W a = W A, W b = W B. Nun ist Tr abc ∽ Tr ABC, weil die Winkel gleich sind. Also kann man wieder bc nach dem kleinen Maase messen, so zeigt dieses an, wie viel BC nach dem großen Maase hält.

192. Aufgabe. Auf eine andere Art die Entfernung eines Ortes a von b zu finden, wenn man von b nicht nach a kommen kann. (fig. 148)

Auflösung. Setze bey b einen rechten Winkel cba an. (Dieses kann entweder mit dem Instrumente fig. 55. geschehen, wo man durch einen Kreutzschnitt nach a visiret, und darauf einen Stab c in die Linie stecken läßt, welche man durch den andern Kreutzschnitt bemerket. Oder man gebraucht das Astrolabium, wo man die beyden Lineale so stellt, daß sie rechte Winkel formiren, und nun durch die Dioptern des einen nach a, und durch die des andern nach der Gegend hin visiret, wo man den Stab c einstecken lässet. Man kann drittens auch das Meßtischchen gebrauchen, wenn man darauf zwey sich rechtwinkelicht schneidende Linien gezeichnet hat, und das Tischchen so rucket, daß man durch das an die eine Linie gelegte Diopternlineal den Gegenstand a erblicket, und hierauf das Lineal an die andere Linie leget, und nach der Gegend hinsiehet, wo der Stab c eingesteckt wird.)

Nachdem dieses geschehen, so messe auf der Linie von b nach c 10 Ruthen ab bis g, wo ein Stab eingesteckt wird. Von g nach d wird noch eine Ruthe gemessen. Bey d wird ebenfalls ein rechter Winkel gde angesetzt. Einer der Gehülfen stellt sich bey das Instrument in d, und visiret nach der Gegend von c hin. Ein anderer geht mit einem Stabe in der Linie de fort, bis er siehet, daß der Stab g und a in einer Linie stehen (oder sich decken.) Dann steckt er seinen Stab in f ein. Nun stehen f g a in einer Linie, und es entstehen zwey Tr b a g und d f g, welche ähnlich sind. Denn W o = W x als Vertikalwinkel, W a b g = W g d f als rechte Winkel, also auch W b a g = W d f g. Nun müssen also die Seiten der beyden Tr in Proportion stehen.

$$dg : df = bg : ba$$

oder $dg : bg = df : ba$.

Nun ist $dg : bg = 1 : 10$

also ist auch $df : ab = 1 : 10$.

Messe daher d f, und multiplicire es mit 10 (hänge eine Nulle an die Zahl) so weißt du, wie viele Ruthen a b lang ist. — Z. B. Es sey $df = 12^\circ$ so ist $ab = 120^\circ$.

193. Anmerkung. Man hätte auch bey b und d statt der rechten Winkel zwey gleiche stumpfe Winkel ansetzen können, und die Linien d g und b g länger oder kürzer machen können, als vorhin. Dann müßte man aber nach der Regel de Tri rechnen, wie sich d g zu b g verhält: so verhält sich d f zu a b. Auf die beschriebene Art ist alles bequemer. Denn wenn sich d g zu b g wie 1 zu 10 verhalten: so bedarf man keiner Rechnung. d g kann sich zu b g auch wie 1 : 100 verhalten.

194. **Aufgabe.** Die Breite eines Flusses a b zu finden.

Erste Auflösung. (Fig. 149) Stecke Stäbe in a und b. Messe an dem Ufer hin eine Linie von willkührlicher Länge b c. Eben so lang mache c d. Messe den Winkel a b c, und mache den

Win-

Winkel cde ihm gleich. Gehe von d nach e fort, bis c und a sich decken. Dann stecke den Stab e ein. Nun ist de = ab.

Beweis. Tr abc = Tr cde. Denn 1) bey c sind Vertikalwinkel, 2) W abc = W cde, 3) bc = cd, also auch de = ab.

Zweyte Auflösung. (Fig. 150.) Stelle einen Stab bc senkrecht in b, woran oben in einer Ritze ein Queerholz oder Lineal steckt, das sich horizontal und schief stellen läßt. Stelle dieses Lineal so schief, daß du drüber hin den Punkt a erblickest. Nun drehe den Stab bc langsam herum, so daß er nicht aus seiner senkrechten Stellung verrückt wird. Visire wieder über das Lineal, welches ebenfalls noch seine vorige Stellung haben muß. Lasse an dem Punkte d, den du auf der Erde an dem Ufer erblickest, ein Zeichen machen, und messe die Linie bd. Diese ist so lang, wie die Breite des Flusses ab.

Beweis. Tr abc = Tr bcd. Denn 1) bc ist gemeinschaftlich, 2) W acb = W dcb, 3) W abc = W dbc.

195. **Anmerkung.** Diese beyde Auflösungen gründen sich zwar nicht auf die Lehre von der Aehnlichkeit, sondern von der Gleichheit der Triangel. Sie werden aber hier wegen ihrer Aehnlichkeit mit den andern vorhergehenden Aufgaben mitgenommen.

196. **Aufgabe.** Die Entfernung zweyer Orte C und D zu finden, wenn man an keinen derselben aus einem gegebenen Punkte A hinmessen kann.

(Dies könnte der Fall seyn, wenn zwischen A und der Linie CD ein Fluß befindlich wäre.) (fig. 151.)

Auflösung. Messe eine Standlinie AB, welche aber nicht zu kurz seyn darf, wenn die Entfernung CD etwas lang ist. Die beyden Endpunkten A und B müssen so liegen, daß man von da die Punkte C und D sehen kann. Auch muß die ganze Linie AB so gelegt werden, daß die Winkel r, m, n, o nicht sehr spitz werden, weil es sonst schwer seyn würde, sie völlig richtig aufzuzeichnen und zu messen. — Stelle das Tischchen in A und einen Stab in B. Trage die Linie AB nach dem verjüngten Maasstabe auf das Tischchen, und zeichne an den Punkt a die Winkel r und m mit Hülfe des Diopternlineals. Hierauf stecke einen Stab in A und trage das Tischchen in B, so daß die Linie ab auf dem Tischchen in die Linie AB auf dem Felde fällt, und der Punkt b in B. Visire nach C und D, und zeichne die Winkel n und o. Alsdann werden sich die Linien bc und ac, ferner bd und ad schneiden, so daß eine kleine Figur auf dem Tischchen entstehet, die der großen ähnlich ist.

Beweis. Tr ABC ∽ Tr abc weil die Winkel in beyden gleich sind. Also ist AB : BC = ab : bc.

Ferner Tr ABD ∽ Tr abd, weil die Winkel in beyden gleich sind. Also ist AB : BD = ab : bd. Daher muß auch Tr BCD ∽ Tr bcd, weil sie einen Winkel o gemeinschaftlich haben, und die Seiten in Proportion stehen, daher muß sich auch

AB

AB zu ab verhalten, wie CD zu cd, das ist, wie das große Maas zu dem kleinen.

Hat man also z. B. AB = 300° gefunden, und ab eben so groß nach dem kleinen Maaße gemacht: so meßt man nur cd nach dem kleinen Maaße, welches anzeigt, wie viel CD nach dem großen Maaße hält.

Wenn man statt des Tischchens das Astrolabium gebraucht: so meßt man auf dem Felde nur die Linie AB und die Winkel r, m, n, o, worauf man eine Figur abcd zeichnen kann, die der großen ABCD ähnlich ist.

197. Anmerkung. Man kann (fig. 152). auch die Winkel an drey Orten messen, sowohl in a und b, als in e, der Mitte zwischen beyden. Es läßt sich nun aus den gemessenen Linien ae und cb, und den gemessenen Winkeln r, m, n, o, s eine kleine Figur zeichnen, die der großen ähnlich ist, und hierauf die Linie cd in der kleinen messen, wodurch das Maas der großen bekannt wird.

198. Aufgabe. Die Höhe ab eines Thurms, Baums und dergleichen mit Hülfe eines Stabes zu messen (fig. 153).

Auflösung. Stecke einen Stab cd in einiger Entfernung von ab senkrecht in die Erde. Dieser Stab kann ohngefähr 4 oder 5 Schuh lang seyn. Oben stecke man in eine Spalte ein Lineal mn, welches man um den Punkt d hin und her bewegen kann, so daß es mit dem Stabe cd jeden beliebigen Winkel formiren kann. Visire von v nach m gegen den Punkt b, und hernach von m nach n gegen die Erde, und lasse durch einen Gehülfen den Punkt e auf der Erde bezeichnen, welcher mit dem Lineal m n und dem Punkte b in einer graden Linie liegt. Messe hierauf die Linien e c und c a, und sage nach der Regel de Tri: wie sich verhält e c zu c d, so e a zu a b. — Z. B. Es sey e c = 8′, c d = 4′, e a = 40′, so ist 8 : 4 = 40 : 20. Also ist a b = 20′.

Beweis. Weil c d und a b senkrecht auf der Erde stehen, so laufen sie parallel, und W o = W t, W r = W s (§ 73). Der W x ist beyden Triangeln e c d und e a b gemeinschaftlich. Also sind sie ähnlich, und e c : c d = e a : a b.

199. Anmerkung. Man kann auch die ganze Auflösung dadurch erleichtern, daß man das Lineal m n festsstellet, so daß es mit dem Stabe c d einen Winkel von 45° macht. Dieses geschiehet folgendermaaßen. Man legt den Stab c d (fig. 154.) auf die Erde, und bezeichnet den Punkt e, wo seine Spitze liegt. Die 3 Punkte a, c, e müssen aber in einer graden Linie liegen. Hierauf richtet man ihn senkrecht auf, und stellt das Lineal m n so, daß man darüber weg den Punkt e erblicket. Nun ist c e = c d, also das rechtwinkelichte Dreyeck e c d ist gleichschenkelicht. Daher ist W o = W x (§. 65) und jeder hält 45°. Wenn das Lineal auf diese Art gestellt worden ist: so kann man diese Aufgabe auf folgende Art auflösen.

200. Aufgabe. (Fig. 155.) Die Höhe a b zu finden.

Auf-

Auflösung. Stelle den Stab c d an denjenigen Ort, wo du drüber weg die Spitze b erblickest. Weil nun e c = c d, und die Länge c d bekannt ist: so messe nur c a, und addire dazu c d, so hast du e a. Diese Linie ist gleich der Höhe a b. — Z. B. Wenn c d = 4′, c a = 22′, so ist e a = a b = 26′.

Beweis. c d ist mit a b parallel, also W o = W z. Nun ist W o = 45°, also auch W z = 45°. Da nun W x = 45°, so ist der Tr e a b gleichschenkelicht, und e a = a b.

201. **Aufgabe.** Die Höhe a b eines Thurms und dergleichen (fig. 156) mit Hülfe des Astrolabiums zu finden, wenn man bis an den Fuß a hinmessen kann.

Auflösung. Stelle das Astrolabium c d in einiger Entfernung von a b senkrecht, wende die Scheibe vertikal (§. 188), visire mit dem einen horizontal gestellten Diopternlineal nach dem Punkte f, und mit dem andern beweglichen Diopternlineal nach der Spitze b. Zähle die Grade des Bogens zwischen den beyden Linealen. Dies giebt den Winkel x. Weil b f auf f d senkrecht ist, so ist W m = 90°. Messe endlich die Linie c a, welche f d gleich ist. Zeichne einen kleinen Tr, welcher dem großen Tr d f b ähnlich ist. Mache nämlich f d im kleinen Maaße so lang, als f d im großen Maaße ist; setze an d mit dem Transporteur den W x, und an f einen rechten Winkel. Da nun die Winkel in beyden Tr gleich sind, so sind sie ähnlich, und die Seiten stehen in Proportion. Also verhalten sich f d und f b nach dem kleinen Maase so, wie nach dem großen. Wenn daher f b nach dem kleinen Maasstabe gemessen wird: so weiß man, wie viel diese Linie nach dem großen Maase hält. — Zuletzt wird noch die Höhe des Astrolabiums c d gemessen, welche = a f, und zu f b addiret, so erhält man die ganze Höhe a b.

Wenn z. B. $fd = 80'$ in der großen und kleinen Figur, und $fb = 60'$ in der kleinen Figur, so ist f b auch in der großen Figur $= 60'$. Wenn also $cd = af = 4'$, so ist $ab = 64'$.

Zu dieser Aufgabe braucht man daß Meßtischchen nicht, weil man es nicht gut vertikal stellen kann.

202. Aufgabe. Eine Höhe a b (fig. 157) durch die Messung seines Schattens auf gleichem Boden zu finden.

Auflösung. Stecke einen Stab c d, dessen Größe bekannt ist, auf den von der Sonne beschienenen Platz senkrecht. Messe zu gleicher Zeit die Längen der Schatten von dem Thurm oder Baum a b und dem Stabe c d, nämlich die Linien a x und c z. Nun sage nach der Regel de Tri, wie sich c z zu c d verhält, so a x zu a b. — Z. B. $cz = 5'$ $cd = 4'$, $ax = 40'$

$$5 : 4 = 40 : 32.$$

Also ist $ab = 32'$.

Beweis. ab und cd sind senkrecht, also parallel. Die Sonnenstrahlen bx und dz sind ebenfalls parallel. Also haben die Tr cdz und abx gleiche Winkel, und sind ähnlich. Daher cz: cd = ax: ab.

203. Anmerkung. Um diese Auflösung gebrauchen zu können, muß ab auf einem freyen Platze stehen, welcher eben ist, damit man den Schatten richtig messen kann. Auch müssen die Schatten von ab und cd genau zu gleicher Zeit gemessen werden, damit bx und cz als parallel laufend angenommen werden können.

204. **Aufgabe.** Die Höhe ab (fig. 157*) mit Hülfe eines Spiegels zu finden.

Auflösung. Lege den Spiegel in einiger Entfernung von ab horinzontal auf die Erde. Stelle dich so weit hinter den Spiegel, bis du das Bild von der Spitze b grade in der Mitte des Spiegels in dem Punkte c erblickest. Die Linie cd soll die von dem Auge des Messenden senkrecht auf die Erde gezogene Linie seyn. Nun messe ec, cd und ea, so findest du nach der Regel de Tri ab. Gesetzt es sey ec = 3′, cd = 5′, ea = 33′ so ist

$$3 : 5 = 33 : 55'.$$

Also ist ab = 55.

Beweis. Es ist durch Erfahrung bekannt, daß Lichtstrahlen, welche von einem Objekt unter einem gewissen Winkel in einen Spiegel fallen, auf der andern Seite mit dem nämlichen Winkel zurückgeworfen werden. Daher wird W o = W x. Denn

be

be ist der Strahl von der Spitze b in den Spiegel, und ed der aus dem Spiegel zurückgeworfene Strahl in das Auge bey d. Beyde Strahlen machen also mit der horizontalen Fläche des Spiegels, oder mit der auf der Erde gezogenen horizontalen Linie aec gleiche Winkel. Nun ist ferner Wm = Wn als rechte Winkel. Also ist Tr aeb ∽ Tr ced, weil sie gleiche Winkel haben. Daher müssen auch ihre Seiten in Proportion stehen, und es ist

$$ec : cd = ea : ab.$$

205. **Aufgabe.** Die Höhe eines Thurms und dergl. ab (fig. 158.) zu finden, an dessen Fuß man nicht messen kann.

Auflösung. Messe eine Linie cd, so daß die Punkte acd in einer graden Linie liegen. Stecke einen Stab in c und stelle das Astrolabium in d senkrecht. Visire auf der vertikal gestellten Scheibe mit den beyden Diopternlinealen nach dem Stabe c und nach der Spitze b: dadurch wird der Winkel n gefunden. Stelle hierauf das Astrolabium in c und messe den Winkel x, wodurch auch der Nebenwinkel y bekannt wird.

Nun ist von dem Tr fgb eine Seite, und 2 Winkel bekannt, also läßt sich ein ihm ähnlicher Tr nach dem verjüngten Maaßstabe entwerfen. Wird in diesem die Linie fg bis h verlängert, und darauf von b ein Perpendikel gefället: so entsteht ein Tr, der dem Tr fhb ähnlich ist. In diesem wird hb nach dem kleinen Maaße gemessen: Dieses zeigt,

wie

wie groß hb nach dem großen Maaße ist. Dazu muß noch die Höhe des Astrolabiums fc = ha addiret werden, um ab zu finden.

Z. B. Es sey hb nach dem kleinen Maaße 36′ und die Höhe des Astrolabiums fc = 4′, so ist ab = 40′.

206. **Aufgabe.** Die Höhe eines Gebäudes, Baums und dergleichen ab (fig. 159.) aus zwey Fenstern eines nahe stehenden Hauses, die übereinander stehen, zu messen.

Auflösung. Messe die Linie cd, um welche ein Fenster über das andere erhaben ist. Hierauf stelle das Astrolabium in beyde Fenster, und messe die Winkel, welche die Linien nach der Spitze und dem Fuße von ab machen. Wo sich die Schenkel der Winkel durchschneiden, da liegen die Punkte a und b. Man muß also die Figur im Kleinen zeichnen, und darin ab messen: so erfährt man, wie hoch ab ist.

207. **Anmerkung.** Wenn man die Höhe eines kleinen Berges cb, (fig. 122) finden will: so muß man sich zweyer Stäbe bedienen, wie §. 146. gezeigt worden ist. — Man kann auch auf die Spitze ein Zeichen (z. B. eine Stange mit einer weißen Fahne) stecken lassen, und nach dem vorigen §. die Höhe messen. Doch wird dieses Verfahren nur bey geringen Höhen anwendbar seyn. — Die Höhe ansehnlicher Gebirge wird gewöhnlich mit Hülfe eines Barometers gefunden. — Will man wissen, wie viel ein Ort, der eine halbe, oder ganze Meile, oder mehrere Meilen von einem andern entfernt ist, höher oder tiefer liegt: so

so muß man sich dazu eines Instruments bedienen, das unter dem Namen der Wasserwage bekannt ist — Von allen diesen und mehreren Messungen findet man in größern Werken Nachricht; (z. B. in J. Tobias Mayers Unterricht zur praktischen Geometrie. Göttingen 1792. zweyte Auflage. 4 Theile in 8vo.)

208. Erklärung. Eine Gegend aufnehmen und in Grund legen, heißet, entweder die Umfangslinien und Diagonalen, oder Linien und Winkel, oder eine Standlinie, und die an den Enden derselben liegenden Winkel messen, und darnach eine kleine ähnliche Figur zeichnen. Wir wollen die verschiedenen Methoden einzeln durchgehen.

209. Aufgabe. Eine Figur ohne Instrument zum Winkelmessen in Grund zu legen. (fig. 141)

Auflösung. Messe alle Umfangslinien, und die Diagonalen weniger, als jene sind, wodurch die Figur in Tr getheilt wird. Hierauf wird jeder Tr im Kleinen aufgezeichnet, wodurch eine ähnliche Figur entstehet. (Siehe §. 185)

210. Anmerkung. Diese Methode ist etwas unbequem, weil sie lange aufhält, da sehr viele Linien gemessen werden müssen. Daher wird sie nur bey der Grundlegung kleiner Felder, Wiesen, Gärten und dergleichen gebraucht, wenn man keinen Winkelmesser anwenden will.

211. Aufgabe. Eine gradlinichte Figur aus einem Punkte g innerhalb derselben, in Grund zu legen. (Fig. 160.)

Auf-

Auflösung. Stelle das Meßtischchen in g, und stecke in den Punkt auf dem Tischchen, der grade über dem Punkte g auf der Erde ist, eine Nadel. Von hier aus visire nach allen Stäben, die in die Eckpunkte der Figur, A, B, C u. s. w. gesteckt sind, und ziehe Linien auf dem Papier. Messe die Linien gA, gB u. s. w. und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe auf das Tischchen von g nach a, b, c, d u. s. w. Diese Endpunkte a, b, c ꝛc. werden zusammengezogen, wodurch eine kleine Figur entstehet, die der großen ähnlich ist. Denn die Tr gab und gAB, ferner gbc und gBC u. s. w. haben einen Winkel gemein, und die Seiten stehen in Proportion.

212. **Anmerkung.** Man kann zu dieser Aufgabe auch das Astrolabium gebrauchen, wodurch die Winkel um g gemessen, und zu Hause mit den gemessenen Seiten so zusammengesetzt werden, daß eine ähnliche Figur entstehet. Auf dem Felde zeichnet man sich in eine Schreibtafel eine Figur aus freyer Hand, die mit der großen Figur ohngefähr dieselbe Gestalt hat. In diese schreibt man die Größe der Seiten und Winkel, und zeichnet darnach zu Hause die richtige Figur. Aber das Meßtischchen ist um deswillen bequemer, weil man darauf sogleich die ganze verkleinerte Figur bekommt, ohne daß man es zu verrücken nöthig hat.

Auch diese Auflösung geht, wie die vorige, nur auf die Grundlegung solcher Figuren, welche 1) so beschaffen sind, daß man drinnen herumgeden kann. Daher nicht auf Moräste, Seen, Teiche und dergleichen, — 2) muß die Fläche nicht mit Wald bewachsen seyn, weil man sonst nicht aus einem Punkt innerhalb derselben an die Ecken sehen kann: 3) darf sie nicht sehr groß seyn, weil sonst das Messen der vielen Linien an die Ecken sehr beschwerlich seyn würde.

213. **Aufgabe.** Eine gradlinichte Figur aus dem Umfang in Grund zu legen (fig. 161).

Auflösung. Stecke Stäbe in die Ecken A, B, C u. s. w. Messe mit dem Astrolabium die Winkel HAB, ABC, BCD u. s. w. und mit der Meßkette die Linien AB, BC, CD, DE u. s. w. (Doch ist es schon hinreichend, wenn man drey Winkel weniger, als Umfangslinien sind, misset.) Hierauf kann man nach dem verjüngten Maasstabe die Linien ab, bc, cd u. s. w. nach derselben Proportion nehmen, wie in der großen Figur, und sie unter denselben Winkeln zusammen setzen, so, daß $Wa = WA$, $Wb = WB$ u. s. w. so entstehet eine Figur, die der großen ähnlich ist.

Will man das Tischchen gebrauchen: so steckt man in die Eckpunkte Stäbe, messet die Umfangslinien, stellt das Tischchen in A, visiret, nach H und B, und trägt die Linie AB im Kleinen von a nach b. Auf diese Art verfährt man bey jedem Winkel, bis sich zuletzt die kleine Figur auf den Tischchen schließet, welche der großen ähnlich ist.

214. **Anmerkung.** Diese Aufgabe findet bey Waldungen, Seen, sumpfichten Gegenden, Vestungen u. dergleichen statt, wo man keinen Standpunkt innerhalb der Figur wählen kann. Man kann, wenn die Figur groß ist, bey trübem Wetter die Umfangslinien messen; bey heiterm Himmel die Winkel.

215. Aufgabe. Eine gradlinichte Figur aus zwey Orten a und b (fig. 162), woraus man sie ganz übersehen kann, in Grund zu legen.

Auflösung. Messe die Standlinie ab. Sowohl an a als an b visire nach den Punkten c, d, e, f, u. s. w. wo entweder Stäbe stecken, oder Bäume, Kirchthürme und dergleichen stehen. Da man nun in allen Tr abc, abd, abe, u. s. w. eine Linie ab und die Winkel weiß: so kann man eine kleine ähnliche Figur verzeichnen.

Wird das Tischchen gebraucht, so wird die Standlinie ab verkleinert aufgetragen, und nun an ab unter den gehörigen Winkel die Linien ac, bc, ad, bd u. s. w. angesetzt, wodurch man sogleich die kleine Figur auf dem Felde in Grund leget.

216. Anmerkung. Man kann dadurch eine ganze Gegend, von mehrern Stunden in die Länge und Breite aufzeichnen. Die Punkte c, d, e, f ꝛc. sind die merkwürdigsten Gegenstände, z. B. große Bäume, Thürme, andere Gebäude. Die Standlinie muß alsdann verhältnißmäßig lang seyn, damit die Winkel cab und cba wenigstens um einige Grade verschieden sind. Weil auch die sehr spitzigen Winkel die Durchschneidungspunkte nicht gar genau geben: so muß die Standlinie ab eine solche Lage haben, daß ihre Verlängerung nicht gar zu nahe an einem der Orte c, d, e u. s. w. vorbey lauft. Denn sonst würden die Winkel zu spitz werden. — Da man hier nur eine Linie zu messen braucht: so ist diese Auflösung bey etwas großen Figuren, die man übersehen kann, den vorigen vorzuziehen. Freylich läßt sie sich nicht überall, z. B. bey der Grundlegung der Waldungen, anwenden. — Der Riß auf dem Tischchen wird mit dem

Cirkelfuß gezeichnet, damit die Linien recht fein werden. Da er während der Zeichnung leicht etwas schmutzig werden kann, so wird er hernach auf ein anderes Papier abgezeichnet. Man klebt nämlich denselben mit Mundleim auf ein Papier, und durchsticht mit einer feinen Nadel alle Hauptpunkte des Risses so, daß das untere Papier nicht durchstochen wird.

217. Aufgabe. Den Flächeninhalt einer gradlinichten Figur, die in Grund gelegt worden, auszurechnen.

Auflösung. Hier ist nichts weiter nöthig, als daß man die verkleinerte Figur durch Diagonallinien in Triangel theilt, jeden besonders ausrechnet, und diese Zahlen addiret.

218. Aufgabe. Eine Fläche, die in krumme Linien eingeschlossen ist, in Grund zu legen.

Auflösung. Fig 163. a. sey ein Wald, dessen Umfang aus krummen Linien bestehet. Man stecke durch Stäbe a, b, c u. s. w. grade Linien so nah als möglich an dem Umfang. Diese Linien und die Winkel an den Ecken werden gemessen, und daraus eine gradlinichte Figur gezeichnet. Hierauf werden von a, b, c u. s. w. die Entfernungen bis an den krummen Umfang gemessen, und in den Riß nach dem verjüngten Maasstabe eingetragen, und durch ihre Endpunkte der Umfang der krummlinichten Figur gezeichnet.

219. Anmerkung. Eben so verfährt man, wenn man einen Fluß mit seinen Krümmungen in Grund legen will, wie fig. 163. b. Längst dem Ufer her, werden

den die graden Linien, ab, bc, cd u. s. w. und von a, b, c etc. die Entfernungen bis an den Fluß gemessen, und aufgezeichnet, worauf man die Krümme des Flusses zeichnen kann.

220. Aufgabe. Den Flächeninhalt einer krummlinichten Figur zu finden (fig. 163. a).

Auflösung. Wenn die ganze Figur in Grund gelegt worden ist: so theile die gradlinichte Figur, welche die krumme umgiebt durch Diagonallinien in Triangel, und rechne dadurch den Flächeninhalt derselbigen aus. Hierauf müssen die kleinen viereckichten Flächen, wie abrs, welche zwischen den graden und krummen Linien liegen, besonders ausgerechnet, und von dem Inhalt der gradlinichten Figur abgezogen werden, wonach der Inhalt der krummlinichten Fläche übrig bleibt. Man kann, ohne einen beträchtlichen Fehler zu begehen, diese Vierecke als Parallelogrammen gelten lassen, wie abrs, wo die Länge ab, und die Breite ar ist.

221. Aufgabe. Eine Figur abcde, (fig. 164.) die auf ein Papier gezeichnet worden, auf dem Felde nach dem großen Maase auszustecken.

Auflösung. Bevestige das Papier mit dem Riß auf das Meßtischchen, und stelle es horizontal auf den Punkt A, der einer der Eckpunkte der großen Figur auf dem Felde seyn soll, so daß a auf dem Tischchen grade über A auf dem Felde liegt. Messe ab und ae nach dem kleinern Maase, visire mit dem Diopternlineal an ab und ae hin, und lasse Stäbe nach diesen Richtungen stecken. Diese Linien mache nach dem großen Maaße so lang, wie ab und ae nach dem kleinen sind, und stecke Stäbe B und E an ihre Endpunkte. Nun ist ab: ae = AB: AE. Stecke einen Stab in A, und stelle das Tischchen in B, so daß der Punkt b über B und ba in der Linie BA liegt. Visire an bc hin, und mache eine Linie BC auf dem Felde so lang, als bc im Kleinen ist. Eben so verfahre an den übrigen Eckpunkten, bis die ganze Figur ABCDE auf dem Felde ausgesteckt ist, welche der kleinen Figur abcde ähnlich ist. Man kann auch das Tischchen in A stehen lassen, die Linien ac und ad messen, und nach dieser Richtung die Linien AC, AD eben so lang nach dem großen Maaße machen lassen.

Diese Aufgabe kann vorkommen, wenn nach einem vorher entworfenen Grundrisse, Gebäude, Anlagen in Gärten, Baumpflanzungen und dergleichen, oder Schanzen, Vestungen, Lager u. s. w. angelegt werden sollen.

---

221. Bisher haben wir gesehen, wie man Triangel und Figuren, die in Triangel getheilt worden, in Grund legen, und ihre Flächen ausrechnen kann, indem man in dem großen Triangel von sechs Stücken (nämlich seinen drey Seiten und drey Winkeln) drey Stücke misset, worunter wenigstens eine Seite seyn muß, entweder 1) eine Seite und

und zwey Winkel, oder 2) zwey Seiten und einen Winkel, oder 3) die drey Seiten, und hierauf mit dem verjüngten Maasstabe und Transporteur einen kleinen Triangel zeichnet, der dem großen Triangel ähnlich ist. Alsdann werden die Winkel in beyden Triangeln gleich seyn, und die Seiten in Proportion stehen.

Nach diesem Verfahren erhält man nur dann einen ganz genauen Riß von den großen Triangeln, wenn man sowohl bey der Messung der Linien und Winkel, als auch bey ihrer Aufzeichnung die größte Sorgfalt anwendet. Es kann aber leicht geschehen, daß man, wenn auch die Linien und Winkel auf dem Felde richtig gemessen worden sind, 1) bey ihrer Aufzeichnung auf dem Papier kleine Unrichtigkeiten begehet, die desto weniger bemerkbar sind, je kleiner die Figur ist, welche man entwirft: 2) oder daß man, indem man die Linien der kleinen Figur nach dem verjüngten Maasstabe misset, um aus der Grundlinie und Höhe die Fläche zu finden, diese etwas zu groß oder zu klein nimmt. Denn öfters sind die Instrumente nicht ganz richtig; oder das Auge ist nicht im Stande, die Grenzen der Linien, besonders bey sehr spitzen Winkeln so genau abzumessen, daß nicht einige Ruthen oder Schuhe zu viel oder zu wenig herauskommen. — Indessen behalten die geometrischen Abzeichnungen der Figuren im Kleinen dennoch ihren Werth, und sind öfters sehr nöthig. Nur ist dabey die größte Sorgfalt und Genauigkeit zu empfehlen, wenn man nach diesem

Abzeichnungen die Größe der Flächen bestimmen will.

222. Wir wollen nun noch eine andere Methode kennen lernen, wie man mit Hülfe einer Tabelle und einer leichten Rechnung nach der Regel de Tri die unbekannten Stücke eines Triangels und seinen Flächeninhalt, sehr genau finden kann, wenn man drey Stücke, worunter wenigstens eine Seite seyn muß, gemessen hat. Man nennt diese Berechnung der Triangel gewöhnlich die Trigonometrie.

Weil man dadurch die Fehler, welche sonst bey der Abzeichnung und Messung der Figuren begangen werden, vermeiden kann: so muß sich jeder, der Genauigkeit liebt, auch mit dieser leichten trigonometrischen Methode bekannt machen.

223. Wenn Fig. 165 eine Sehne oder Chorde cd in einem Cirkel gezogen wird, so heißt der Winkel a, dessen Spitze in der Peripherie lieget, und dessen Schenkel ac und ad an die Endpunkte der Chorde cd gehen, der Winkel, welcher zur Chorde cd gehört.

Daher gehört zu einem Durchmesser, der die größte Chorde im Kreise ist, ein rechter Winkel (§. 92. fig. 79.) Zu einer kleinern Chorde, als der Durchmesser, gehöret auf der einen Seite ein stumpfer, auf der andern ein spitzer Winkel. (§. 92 fig. 84.) Diese beyde Winkel halten zusammen 180° oder sind zwey rechten Winkeln gleich.

Wenn

Wenn also ein stumpfer und spitzer Winkel, die mit ihren Spitzen in der Peripherie eines Cirkels liegen, zusammen 180° halten: so stehen sie entweder, auf einer und derselben Chorde (wie fig. 84, wo die Winkel a und b auf der Chorde cd stehen): oder die Chorden, worauf beyde stehen, sind gleich, (wie fig. 86, wenn $fg = op$, so sind $W\,fag + W\,oap = 180$). [§. 101.]

Jeder Tr kann mit seinen drey Spitzen in die Peripherie eines Cirkels gelegt werden (fig. 165. Siehe §. 141). Nun sind die drey Seiten ac, cd, da Chorden im Cirkel, und die gegenüberstehenden Winkel d, a, c sind die zu den Chorden gehörige Winkel.

Diese Sätze, welche im Vorhergehenden weiter ausgeführet worden, sind deswegen hier kurz wiederholt worden, damit das Folgende desto verständlicher und überzeugender vorgetragen werden kann.

224. Man hat willkührlich angenommen, daß der Durchmesser eines Cirkels in 100,000 gleiche Theile, (welche wir schlechtweg Theilchen heißen wollen) getheilt sey, und darnach hat man berechnet, wie groß jede andere Chorde in demselben Cirkel, die zu irgend einem Winkel gehört, sey. Es versteht sich von selbst, daß hier nichts auf die Größe des Cirkels ankommt, in welchem man sich den Durch-

messer und die andern Chorden gezogen denkt. Weil alle Cirkel einander ähnlich sind: so müssen auch die Chorden, welche in zwey Cirkeln von verschiedener Größe gezogen werden, wenn sie zu gleich großen Winkeln gehören, gegen die Durchmesser dasselbe Verhältniß haben. Gesetzt fig. 165 und 166 der Tr a c d sey dem Tr e f g ähnlich, so daß W a = W e, W c = W f, W d = W g, und die Seite c d verhalte sich zum Durchmesser wie 1 : 2, so verhält sich auch f g zu dem Durchmesser des kleinen Cirkels wie 1 : 2. Oder a c verhalte sich zum Durchm. wie 3 : 4, so verhält sich auch e f zum Durchm. wie 3 : 4. Der Cirkel mag daher groß oder klein seyn: so kann man ein bestimmtes Verhältniß angeben, in welchem jede Chorde zum Durchmesser steht. Wenn man also dem Durchmesser 100,000 gleiche Theilchen giebt: so kann man eine Tabelle entwerfen, in welcher stehet, wie viele solcher Theilchen jeder andern kleinen Chorde zukommen. Wir wollen dieses das trigonometrische Maas der Chorden nennen.

Daraus ist eine Chordentafel entstanden, wie diejenige, welche hier beygefügt ist, worin man die Winkel von 15 zu 15 Minuten bis auf 90 Grade findet; also alle Winkel, die um Viertelsgrade verschieden sind. Nebenbey stehet die Länge der zu jedem Winkel gehörigen Chorde, in solchen Theilchen, wovon 100,000 auf den Durchmesser, als die Chorde des rechten Winkels, gehen.

Z. B. Da fig. 167. der Durchmesser bc, der als Chorde zu dem rechten Winkel bac gehört, = 100,000 Theilchen: so kann man finden, wie groß die Chorde de in diesem trigonometrischen Maase ist, wenn man den gegenüberstehenden W dae misset. Wenn z. B. W dae = 40°, so stehet in der Tafel dabey 64278. Dieses ist das trigonometrische Maas von de. Das ist, bc: de = 100,000: 64278.

Wenn man fig. 168. in dem stumpfwinkelichten Tr bac den stumpfen Winkel a = 110° durch Messung gefunden hat, und man will daraus das trigonometrische Maas der Chorde bc suchen: so sucht man in der Chordentafel den spitzen Winkel von 70°, der mit jenen zusammen 180° ausmacht. Man findet dabey 93969 Theilchen als das trigon. Maas der Chorde bc, welche, wie die Figur zeigt, zu dem stumpfen Winkel a = 110°, und dem spitzen Winkel d = 70° gehört.

Chordentafel.

Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.
15'	436	15'	12619	15'	24615
30'	872	30'	13052	30'	25038
45'	1308	45'	13485	45'	25460
1° —	1745	8° —	13917	15° —	25881
15'	2181	15'	14349	15'	26303
30'	2617	30'	14780	30'	26723
45'	3053	45'	15212	45	27144
2° —	3489	9° —	15643	16° —	27553
15'	3925	15'	16074	15	27982
30'	4361	30'	16504	30'	28401
45'	4797	45'	16934	45'	28819
3° —	5233	10° —	17364	17° —	29237
15'	5669	15'	17794	15'	29654
30'	6104	30'	18223	30	30070
45'	6540	45'	18652	45	30486
4° —	6975	11° —	19080	18° —	30901
15'	7410	15'	19509	15'	31316
30'	7845	30'	19936	30'	31730
45'	8280	45'	20364	45	32143
5° —	8715	12° —	20791	19° —	32556
15'	9150	15'	21217	15	32969
30	9584	30'	21643	30	33380
45'	10018	45'	22069	45'	33791
6° —	10452	13° —	22495	20° —	34202
15	10886	15'	22920	15'	34611
30'	11320	30'	23344	30	35020
45'	11753	45'	23768	45	35429
7° —	12186	14° —	24192	21° —	35836

15'

Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.
15'	36243	15'	48862	15'	60529
30'	36660	30'	49242	30'	60876
45'	37055	45'	49621	45'	61221
22° —	37460	30° —	50000	38° —	61566
15'	37864	15'	50377	15'	61909
30'	38268	30'	50753	30'	62251
45'	38651	45'	51129	45'	62592
23° —	39073	31° —	51503	39° —	62932
15'	30474	15'	51877	15'	63270
30'	39874	30'	52249	30'	63607
45'	40274	45'	52621	45'	63943
24° —	40673	32° —	52991	40° —	64278
15'	41071	15'	53361	15'	64612
30'	41469	30'	53729	30'	64944
45'	41865	45'	54097	45'	65275
25° —	42261	33° —	54463	41° —	65605
15'	42656	15'	54829	15'	65934
30'	43051	30'	55193	30'	66262
45'	43444	45'	55557	45'	66588
26° —	43837	34° —	55919	42° —	66913
15'	44228	15'	56280	15'	67236
30'	44619	30'	56640	30'	67559
45'	45009	45'	56999	45'	67880
27° —	45399	35° —	57357	43° —	68199
15'	45787	15'	57714	15'	68518
30'	46174	30'	58070	30'	68835
45'	46561	45'	58424	45'	69151
28° —	46947	36° —	58778	44° —	69465
15'	47331	15'	59130	15'	69779
30'	47715	30'	59482	30'	70090
45'	48093	45'	59832	45'	70401
29° —	48480	37° —	60181	45° —	70710

15'

Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.
15′	71018	15	80125	15′	87672
30′	71325	30′	80385	30′	87881
45′	71630	45′	80644	45′	88089
46° —	71933	54° —	80901	62° —	88294
15	72236	15′	81157	15′	88498
30	72537	30′	81411	30′	88701
45′	72837	45′	81664	45′	88901
47° —	73135	55° —	81915	63° —	89100
15′	73432	15′	82164	15′	89297
30′	73727	30	82412	30′	89593
45	74021	45′	82658	45′	89687
48° —	74314	56° —	82903	64° —	89879
15′	74605	15′	83146	15′	90069
30′	74895	30′	83388	30	90258
45′	75183	45′	83628	45′	90445
49° —	75470	57° —	83867	65° —	90630
15	75756	15′	84103	15′	90814
30	76040	30′	84339	30′	90996
45′	76323	45	84572	45′	91176
50° —	76604	58° —	84804	66° —	91354
15	76884	15′	85035	15′	91531
30	77162	30′	85264	30	91706
45′	77439	45′	85491	45′	91879
51° —	77714	59° —	85716	67° —	92050
15′	77988	15′	85940	15′	92220
30′	78260	30′	86162	30′	92387
45′	78531	45′	86383	45′	92554
52° —	78801	60° —	86602	68° —	92718
15′	79068	15′	86819	15′	92880
30′	79335	30′	87035	30′	93041
45′	79600	45	87249	45′	93200
53° —	79863	61° —	87461	69° —	93358

15′

Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.	Winkel.	Chorde.
15′	93513	15′	97134	15′	99306
30′	93667	30′	97236	30′	99357
45′	93819	45′	97337	45	99405
70° —	93969	77° —	97437	84° —	99452
15′	94117	15′	97534	15	99496
30′	94264	30	97629	30	99539
45′	94408	45	97723	45	99580
71° —	94551	78° —	97814	85° —	99619
15′	94693	15	97904	15	99656
30′	94832	30	97992	30	99691
45	94969	45′	98078	45	99725
72° —	95105	79° —	98162	[illegible]° —	99756
15′	95239	15′	98245	15	99785
30′	95371	30′	98325	30	99813
45′	95501	4′	98404	45	99839
73° —	95630	80° —	98480	37° —	99862
15	95757	15′	98555	15′	99884
30′	95881	30′	98628	30′	99904
45′	96004	45′	98699	45	99922
74° —	96126	81° —	98768	88° —	99939
15′	96245	15′	98836	15	99953
30′	96363	30′	98901	30′	99965
45′	96478	45′	98965	45′	99976
75° —	96592	82° —	99026	89° —	99984
15′	96704	15′	99086	15′	99991
30′	96814	30′	99144	30′	99996
45′	96923	45′	99200	45′	99999
76° —	97029	83° —	99254	90° —	100000

225. Ob es gleich zu weitläuftig seyn würde, hier die Art und Weise vollständig zu erklären, wie diese Chordentafel berechnet worden ist, oder wie man das trigonometrische Maas aller Chorden im Verhältnisse gegen den Durchmesser gefunden hat: so wollen wir doch an einigen Beyspielen sehen, wie dieses bewerkstelligt worden ist, damit die Entstehung der Chordentafel doch einigermasen begreiflich wird.

Wenn (fig. 169) ab die Seite des regulären Sechsecks ist, die dem Halbmesser gleich ist: so hält sie nach trigonometrischen Maase 50000 Theilchen. Da nun c, der Centriwinkel des regulären 6Ecks $= 60^\circ$ (§. 126), so ist W $d = 30^\circ$ (§. 87). Auf diese Art hat man das trigonometrische Maas der Chorde gefunden, die zu dem Peripheriewinkel von 30° gehört.

abcd (fig. 110.) sey ein Quadrat im Cirkel. Der Winkel $acb = 90^\circ$ (§. 92). Daher ist das Quadrat von $ab =$ den beyden Quadraten von ac und cb zusammen (§. 119). ab als Durchmesser ist $= 100000$ Theilchen: sein Quadrat ist $= 10000000000$ Quadrattheilchen. Die Linien ac und bc sind gleich, also sind auch ihre Quadrate gleich. Das Quadrat von ab hält daher halb so viel, als das Quadrat von ab, nämlich 5000000000 Quadrattheilchen. Die Quadratwurzel daraus ist 70710 Theilchen, als das trigonometrische Maas von ac. Diese Chorde gehört zu dem gegenüberstehenden W $adc = 45^\circ$.

Auf

Auf diese Art wird es einigermasen begreiflich, wie man mit Hülfe dieser und einiger andern Sätze aus der Geometrie die ganze Chordentafel berechnen konnte, deren Gebrauch nun weiter gezeigt werden soll.

226. Es ist schon erinnert worden, daß man sich um den Triangel bey allen hier vorkommenden Rechnungen einen Kreis denken muß, so daß die drey Seiten des Triangels Chorden sind. Will man das trigonometrische Maas derselben wissen: so meßt man die gegenüberstehenden Winkel, sucht sie in der Chordentafel auf, und findet dabey das verlangte Maas.

Es sey (fig. 165.)
W a $=50^{\circ}$, so ist cd $=76604$ Theilchen.
W c $=60^{\circ}$, so ist ad $=86602$ — —
W d $=70^{\circ}$, so ist ac $=93969$ — —

127. Dieses trigonometrische Maas allein ist aber nicht hinlänglich, um sich einen Begriff von der Größe dieser Linien in Ruthen, Schuhen und Zollen zu machen. Es dient nur dazu, um zu sehen, in welchem Verhältnisse diese Linien gegen den Durchmesser, und gegen einander selbst stehen. So verhalten sich nach unserm vorigen Beyspiel

cd : ad $=76604 : 86602$ (beynahe wie $7:8$).
Nachdem nun der Cirkel, worin der Triangel liegt, groß oder klein ist, (wie es die Größe oder Kleinheit des Triangels erfordert, werden auch die 100000 Theilchen seines Durchmessers, und die 76604 Theilchen von cd, wie auch die 86602 Theilchen von ad

ad, groß oder klein seyn. Das Verhältniß der Größe dieser Linien wird sich daher nicht ändern, der Cirkel mag noch so groß oder noch so klein seyn.

Es ist also klar, daß man durch dieses Verhältniß der trigonometrischen Maaße der Linien ac, cd, ad noch keinen Begriff von ihrer eigentlichen Größe in Ruthen, Schuhen und Zollen bekommen hat. — Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, daß das Maas einer Linie in Ruthen, Schuhen und Zollen das gemeine Maas derselben heißen soll, um es von dem trigonometrischen Maaße unterscheiden zu können. Es ist übrigens in der Rechnung ganz einerley, ob man die Länge der Seiten im gemeinen Maase nach Rheinländischen, oder Altfranzösischen, oder Neufranzösischen, oder irgend einem andern Maase bestimmt.

Wir wollen hier zum gemeinen Maase immer das in der Geometrie gewöhnliche Decimalmaas gebrauchen, wo eine Ruthe $= 10'$, $1' = 10''$.

Wenn man die Aufgaben auflösen will, 1) aus dem trigonometrischen Maase der Seiten eines Tr ihr gemeines Maas, 2) aus dem gemeinen Maase das Trigonometrische zu finden, (worin die ganze Trigonometrie bestehet): so muß man sich folgenden Hauptsatz merken.

223. Zwey Seiten eines Triangels verhalten sich in ihrem gemeinen Maase eben so gegeneinander, wie in ihrem trigonometrischen Maase.

Die-

Dieser Satz ist für sich klar. Denn da es angehet, dieselben Größen nach verschiedenen Maasen auszumessen: so muß das Verhältniß dieser Maase immer dasselbe bleiben. Z. B. wenn man das Verhältniß des Guldens zum Thaler (leichtes Geld) nach Kreuzern bestimmt: so ist dieses wie 60 : 90 oder wie 2 : 3. Bestimmt man es nach Batzen, so ist es wie 15 : 22 1/2, oder wie 30 : 45, oder ebenfalls wie 2 : 3. — Will man das Verhältniß des Thalers (sächsisch) zum alten Louisd'or nach Rthlr. bestimmen: so ist es wie 1 : 5. Bestimmt man es nach Groschen, so ist es wie 24 : 120, welches auch 1 : 5 ist.

Eben dieses muß auch von dem Verhältniß der Linien gelten, welche man mit kleinen Linien von verschiedener Größe ausmesset. Die Maase müssen immer ein und dasselbe Verhältniß behalten.

229. **Erste Aufgabe.** Wie findet man, wenn man die Winkel eines Tr acd (fig. 165) gemessen, und aus der Chordentafel das trigonometrische Maas der gegenüberstehenden Seiten aufgesucht hat, auch das gemeine Maas dieser Seiten?

Auflösung. Messe hierauf eine Seite z. B. cd nach gemeinem Maase. Sie sey = 4′ 8″ oder 48″, und sage nach der Regel de Tri: das trigonometrische Maas von cd verhält sich zum trigonom. Maase von ad, wie das gemeine Maas von cd zu dem gemeinen Maase von ad.

(Oder wenn wir das erstere Maas durch t. M. und das letztere durch g. M. bezeichnen: so sagt man:

t. M. cd: t. M. ad = g. M. cd: g. M. ad)

76604 : 86602 = 48 : g. M. ad.

```
              48
         --------
          692816
         346408
       ----------
76604)  4156896 | 5' 4 2/7'' = ad im gem. M.
        383020  |
       ----------
          326696
          306416
         --------
           20280
```

Hieraus siehet man, daß, wenn aus dem t. M. das g. M. sucht, man ausser den Winkeln, auch wenigstens eine Seite messen muß, die einem gemessenen Winkel gegenübersteht.

230. **Zweyte Aufgabe.** Wie findet man, wenn man einige Seiten eines Tr in g. M. gemessen hat, wie auch einen Winkel, der einer der gemessenen Seiten gegenübersteht, das t. M. der Seiten, und dadurch die Größe der gegenüberstehenden Winkel?

Auflösung. Zuerst suche den gemessenen Winkel in der Chordentafel, wobey das t. M. der ihm gegenüberstehenden Seite stehet. Hierauf gebraucht man die Regel de Tri, um auch das t. M. der andern gemessenen Seite zu finden. Sucht man end-

endlich dieses in der Chordentafel: so findet man die Größe des einen unbekannten Winkels, und durch Abziehen der Summe der beyden bekannten Winkel von 180, auch den dritten.

Alles gründet sich wieder auf den Satz §. 228. Man darf nur ausser 2 Seiten einen Winkel messen, und das Verfahren des vorigen §. 229. umkehren.

Z. B. fig. 165. Es sey cd = 40′, ad = 54′, Wc = 60°. Also ist nach der Chordentafel ad im trigonom. Maaße = 8660 2. Also sagt man:

g. M. ad : g. M. cd = t. M. ad : t. M. cd.
54 : 40 = 86602 : t. M. cd.

```
              40
54)    3464080 | 64149
       324
        224
        216
          80
          54
          268
          216
           520
           486
            34
```

Also ist 64149 das t. M. von cd, und gehört in der Chordentafel zu dem Winkel a = 39° 50′. Also ist Wd = 80° 10′.

Es ist schon erinnert worden, daß die ganze Trigonometrie in der Auflösung dieser beyden Aufgaben besteht, indem man entweder das gemeine Maas der Seiten, oder die Größe der Winkel wissen will.

Die Anwendung wollen wir zuerst bey der Berechnung eines rechtwinkelichten, und hernach eines schiefwinkelichten (spitz- oder stumpfwinkelichten) Triangels sehen, und bey beyden alle möglichen Fälle einzeln betrachten, und mit Beyspielen erläutern.

231. Von der Berechnung eines rechtwinkelichten Triangels.

Wir wollen um der Deutlichkeit willen die Winkel des rechtwinkelichten Tr abc (fig. 170.) mit den kleinen Buchstaben a, b, c, und die gegenüberstehenden Seiten mit A, B, C benennen, so daß W a der Seite A, W b der Seite B, und W c der Seite C gegenübersteht.

Ausser dem rechten W c, welcher ohnehin bekannt ist, müssen noch zwey Stücke, worunter wenigstens eine Seite ist, gemessen werden. Daraus werden die übrigen unbekannten Stücke gesucht.

Es sind hier vier Fälle möglich. Es können nämlich bekannt seyn:

1) Die beyden kurzen Seiten A und B.

2) Eine kürzere Seite A oder B, und ein spitzer Winkel a oder b.

3) Die Hypothenuse C und eine kürzere Seite A oder B.

4) Die

4) Die Hypothenuse und ein spitzer Winkel a oder b.

223. **Erster Fall.** A und B sind bekannt. Man sucht nun

1) Die Hypothenuse C, indem man die Quadrate von A und B addiret, welches das Quadrat der Hypothenuse giebt. (§. 119.) (Man erspart sich diese Rechnung, wenn man sich eine Tafel anschafft, worin die Quadrate aller Zahlen von 1 bis 10000 zu finden sind.)

Es sey z. B. das g. M. A $= 40'$, g. M. B $= 50'$

Das Quadrat von A $=$ 1600 Quad. Schuhe.

— — von B $=$ 900 — —

— — von C $=$ 2500 — —

Die Wurzel von C $= 50'$.

2) Sucht man den W a.

G. M. C : g. M. A $=$ t. M. C : t. M. A.

50 : 40 $=$ 100000 : t. M. A.

5 : 4 $=$ 100000

4

5) 400000|80000 $=$ t. M. A.

bey 80000 steht in der Chordentafel der Winkel von 53°

3) W b $= 90 -$ W a $= 90 - 53 = 37^{\circ}$

233. **Zweiter Fall.** A (oder B) und a (oder b) sind bekannt. Wir wollen setzen B und a seyen gemessen worden. Nun werden gesucht:

1) W b. Man zieht nämlich den W a von 90 ab.

2) Das gemeine Maas von A. Aus den bekannten W a und b findet man nach der Chordentafel das t. M. von A und B, und weil man das g. M. von B weiß, so sagt man:

t. M. B : t. M. A = g. M. B : g. M. A.

3) Das g. M. C.

t. M. B : t. M. C = g. M. B : g. M. C.

(oder man kann auch die Summe der Quadrate von A und B addiren, und daraus die Wurzel ziehen, ist = g. M. C)

Zu No. 2. wollen wir einige Beyspiele setzen.

Erstes Beyspiel. Man soll auf dem Felde (fig. 170) die Entfernung des Punkts b von dem Punkte c, wo man stehet (oder die Linie A) finden. Setze an c einen rechten Winkel, und messe willkührlich lang eine Linie B. Sie sey = 100°. Messe den W a. Er sey 55° 30'. Also ist W b = 34°30'.

Nun suche darnach in der Chordentafel das t. M. A = 82412, und das t. M. B = 56640.

56640 : 82412 = 100 : g. M. A.

```
                100
         ─────────
56640)  8241200|145 1/2° = g.M.A.
        56640
        ──────
        257720
        226560
        ──────
         311600
         283200
         ──────
          28400
```

Zwey-

Zweytes Beyspiel. Wenn ab (fig. 171) ein Gegenstand ist, dessen Länge man gemessen hat, so wie auch W c, der grade vor der Mitte von ab liegt, so daß Tr acb gleichschenkelicht ist, oder ac = bc: so kann man die Entfernung des Gegenstandes ab vom Punkte c, (oder das gemeine Maas von der Linie cd) finden. Denn in dem Tr cdb sind bekannt 1) die halbe Länge ab = db. 2) W cdb ist ein rechter, weil cd senkrecht auf ab fällt, 3) W 1/2 c, weil W c gemessen worden ist. Also ist auch 4) W b bekannt. Aus den Winkeln 1/2 c und b suche das t. M. von db und cd, und da man das g. M. von db weiß, so kann man das t. M. cd durch die Regel de Tri ausrechnen.

Z. B. ab sey eine Mauer, 220′ lang, also 1/2 ab = db = 110′. In dem Punkte c ist das Auge, welches die ganze Mauer ab übersehen kann. Man messe den W c. Er sey einen halben Grad, oder 30 Secunden groß, also W 1/2 c = 15′. Daher ist W b 89° 45′. Daraus findet man in der Tafel, t. M. db = 436, t. M. cd = 99999.

$$436 : 99999 = 110 : \text{g. M. c d.}$$

```
               110
          ─────────
            999990
           99999
          ─────────
436)  10999890 | 25229 1/10 ist die Entfernung von c nach d
       872
      ──────
       2279
       2180
      ──────
         998
         872
      ──────
        1269
         872
      ──────
         3970
         3924
      ──────
           46
```

Drittes Beyspiel. A sey ein Thurm, dessen Höhe man wissen will (fig. 170.) Wir wollen annehmen, man könne eine Standlinie B bis an den Fuß des Thurms messen. Sie sey = 80′ (wenn man die halbe Breite des Thurms dazu rechnet.) Messe den W a. Er sey = 60°, also W b = 30°. Diese geben das t. M. A. = 86602, und t. M. B = 50000.

$$\text{t. M. B} : \text{t. M. A} = \text{g. M. B} : \text{g. M. A.}$$

50000 : 86602 = 80 : g. M. A.

80

5000$\not{0}$) 69281$\not{0}$ | 158 1/2' ist die Höhe des Thurms, wozu man noch die Höhe des Instruments rechnen muß, womit W a gemessen worden ist.

5000

19281

15000

42816

40000

2816

234. **Dritter Fall.** C und A (oder B) sind bekannt. Es sey C = 35', A = 25'. Man sucht:

1) W a. Suche das t. M. A. (das t. C. ist = 100000 weil C dem rechten Winkel c gegenüber stehet.

g. M. C : g. M. A = t. M. C : t. M. A.

35 : 25 = 100000 : t. M. A.

7 : 5 5

7) 500000 | 71428 = t. M. A.

10 Hierzu gehört

30 W a = 45°

20 30'.

60

4

2) W b = 90 — W a = 44° 30'.

3) Das g. M. B. Da der gegenüber stehende W b = 44° 30', so ist t. M. B = 70090.

t. M. C : t. M. B : = g. M. C : g. M. B.

1000cφ : 7009φ = 35 : g. M. B.

35

35045

21027

10000) 245315|24 1/2' = g. M. B.

235. **Vierter Fall.** C und W a (oder W b) seyen bekannt. Es sey C = 90'. W a = 25°. Man suche:

1) W b = 90 — W a = 65°.

2) g. M. A. Der W a giebt in der Tafel das t. M. A = 42261.

t. M. C : t. M. A = g. M. C. g. M. A.

1000cφ: 42261 = 90 : g. M. B.

9

10000) 380349|38' = g. M. A.

3) g. M. B. Der W b giebt in der Tafel das t. M. B. = 90630.

1000φφ: 906:φ = 9φ : g. M. B.

9

1000) 81567|81 1/2' = g. M. B.

236. **Von der Berechnung der schiefwinkelichten Triangel.**

Es können hier ebenfalls vier Fälle vorkommen: denn es können bekannt seyn:

1. Eine Seite und zwey Winkel.
2. Zwey Seiten und ein Winkel, der zwischen denselben liegt.

3. Zwey

3. Zwey Seiten und ein Winkel, der nicht zwischen denselben liegt.

4. Drey Seiten.

237. **Erster Fall.** (fig. 172.) B, und die beyden W a und c seyen gemessen worden. Suche:

1) W b = 180 — (a + c.)

2) g. M. C. Suche aus den W b und c das t. M. von B und C, und sage:

t. M. B : t. M. C = g. M. B : g. M. C.

3) g. M. A. Suche aus den Winkeln b und a das t. M. von B und A, und sage:

t. M. B : t. M. A = g. M. B : g. M. A.

Erstes Beyspiel. Man habe auf dem Felde die Linie B gemessen. Sie sey = 100°. Wir wollen annehmen, man könne an den Endpunkten a und c einen entfernten Gegenstand b sehen, und wolle die Entfernung von b nach c und a (oder die Linien A und C) ausrechnen. Man messe W c und W a. Es sey W c = 67°, W a = 32°, so ist W b = 180 — (67 + 32) = 180 — 99 = 81° — Man findet das t. M. B = 98768, das t. M. A = 52991, das t. M. v. C = 92050. Da nun das g. M. B = 100 Ruthen, so ist

98768 : 52991 = 100 : g. M. A.

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\;100 \\
\hline
98768)\ 5299100 & 53\ 1/3^{\circ}\ \text{g. M. A.} \\
493840 & \\
\hline
360700 & \\
296304 & \\
\hline
64396 &
\end{array}$$

Eben so findet man das g. M. C.

98768: 92050 = 100: g. M. C.
100

98768) 9205000|93 1/5° = g M. A.
888912
315880
296304
19576

Zweytes Beyspiel. (fig. 158.) Man will die Höhe eines Gegenstandes a b wissen, an dessen Fuß man nicht kommen kann. Messe eine Standlinie cd = fg. Sie sey = 74'. Hierauf die Winkel bey f und g. Es sey W n = 52°, W y = 120°, W x = 60°. Also W o = 8° Aus den W o und W n findet man, t. M. fg = 13917, und t. M. fb = 78801.

13917: 78801 = 74: g. M. fb
74
315204
551607

13917) 5831274|419' = g. M. fb.
55668
26447
13917
125304
125253
51

Im rechtwinkelichten Tr fhb findet man aus der Größe den W m und x, das t. M. fb = 100000, und das t. M. hb = 86602.

$$100000 : 86602 = 419 : \text{g. M. hb}$$

$$\begin{array}{rl} & 419 \\ \hline & 779418 \\ & 86602 \\ & 346408 \\ \hline 100000) & 36286238|362\ 4/5' = \text{g. M. hb,} \end{array}$$

wozu noch ah = fc, als die Höhe des Instruments addirt werden muß.

238. **Zweyter Fall.** (fig. 173.) B und C und der dazwischen liegende W a sollen bekannt seyn. Der W a kann spitz oder stumpf seyn. Wir nehmen hier erstlich den W a als spitz an.

Suche zuerst die Höhe des Triangels, nämlich bd. Weil bey d rechte Winkel sind, so sind im Tr adb alle Winkel bekannt. W x = 90°. Es sey W a = 56° 30', so ist W r = 3° 30'. Aus den W x hat man das t. M. C = 100000

— W a — — t. M. bd = 83388

— W r — — t. M. ad = 55193.

Es sey das g. M. C = 50'.

$$10000\not{0} : 83388 = 6\not{0} : \text{g. M. bd}$$

$$\begin{array}{rl} & 6 \\ \hline 10000) & 506928|50\ 7/10' \text{ oder } 50''\ 7' \\ & = \text{g. M. bd.} \end{array}$$

Fer-

Ferner suche a d.

$$100000 : 55193 = 6 : \text{g. M. a d.}$$

$$\frac{\quad 6}{10000)\ 331158 \,|\, 33\ 1'/10}$$ oder $33'\ 1'' =$ g. M. a d.

B ist bekannt. Es sey $= 80'\ 1'$. Davon ziehe a d $= 33'\ 1''$ ab, so bleibt c d $= 47'$.

Nun suche aus der Summe der Quadrate von b d und c d das Quadrat von A, und ziehe daraus die Wurzel, so hat man A.

b d $= 507''$ c d $= 470''$

Quad. b d $= 257049$ Quad. c d $= 220900$

$$\begin{array}{r} 257049 \\ 220900 \\ \hline \end{array}$$

Quad. A $= 477949$

Daraus die Quadratwurzel ist $= 691'' = 69'\ 1''$ $=$ A.

In dem Tr d c b sucht man aus dem g. M. A und g. M. c d und dem t. M. A (welches dem rechten W o gegenüberstehet, daß also sein t. M. $=$ 100000 ist), das t. M. c d, woraus sich der W s ergiebt.

$691'' : 470'' = 100000 : $ t. M. cd.

$$
\begin{array}{rl}
 & 470 \\
691) & 47000000 \,|\, 68017 = \text{t. M. cd} \\
 & 4146 \\
 & 5540 \\
 & 5528 \\
 & 1200 \\
 & 691 \\
 & 5090 \\
 & 4837 \\
 & 253
\end{array}
$$

Zu 68170 gehört der W s = 42° 45′
Weil nun der W r = 33° 30′
so ist der W b = 76° 15′
Da der W a = 56° 30
13 2° 45′
Dies abgezogen von 17 9° 60′
so ist der W c = 47° 15′

Aus diesem Beyspiel erhellet, wie man in einem Triangel, worin zwey Seiten und ein Winkel, der dazwischen liegt, gemessen worden sind, die Höhe bd, und dadurch den Flächeninhalt des Tr. finden kann.

$$\begin{array}{r} B \text{ ist} = 801'' \\ bd \text{ ist} = 507'' \\ \hline 5607 \\ 4005 \\ \hline 406107. \end{array}$$

Die Hälfte ist 203053 Quad. Zoll, die Fläche des Triang. abc.

Dies macht 20 Quad. Ruthen, 30 Q. Schuh, 53 Q. Zoll.

Wenn (fig. 174) der Perpendikel bd ausserhalb des Tr abc auf die verlängerte Grundlinie fällt: so wird die Rechnung auf dieselbe Art geführt, wie vorher. Weil C, B, a bekannt sind, und bey d ein rechter Winkel: so suche im Tr adb das g. M. bd.

t. M. C: t. M bd = g. M. C: g. M. bd

Ferner suche das g. M. ad.

t. M. C: t. M. ad = g. M. C; g. M. ad.

Nun ist ad — ac = cd.

Quad cd + Quad. bd = Quad. A

Die Wurzel aus Quad. A giebt A.

Ferner: g. M. A: g. M. cd = t. M. A: t. M. cd. Also hat man W s, und W b — W s = W r. Endlich 180 — (W a + W r) = W acb.

Auch den Flächeninhalt des Tr acb findet man wenn man 1/2 ac mit bd multipliciret. — Wenn man

man statt der Buchstaben Zahlen setzet: so kann man dieses Beyspiel wie das vorige berechnen.

Nun ist noch der Fall zu betrachten übrig, wenn (fig. 175) der bekannte W a stumpf ist, der zwischen den bekannten Seiten B und C liegt. Nun ist sein spitzer Nebenwinkel x bekannt, und man hat im Tr bdn alle Winkel, und die Seite bn oder C. Suche die Höhe bd, welche ausserhalb des Tr abe fällt.

T. M. C: t. M. db = g. M. C: g. M. bd.
Ferner suche dn.

T. M. C: t. M. dn = g. M. C: g. M. dn.
Addire dn zu B. Ziehe aus der Summe der Quadrate von dc und bd die Wurzel, dies giebt A.

Ferner: g. M. A: g. M. bd = t. M. A: t. M. bd.

Dies giebt den W c, und also auch W r, wenn man a + r von 180 abziehet.

239. Zur Erläuterung der §§ 237. und 238. wollen wir noch ein Beyspiel hersetzen, das bey dem Feldmessen sehr häufig vorkommt.

Wenn man (fig. 176) die Entfernung zweyer Orte a und b wissen will, ohne an einen von beyden kommen zu können, oder, wie ersters der Fall ist, wegen der Länge der Linie ab dieselbe nicht messen mag: so misset man eine Standlinie cd, die nicht allzukurz ist, und in einer solchen Lage gegen ab, daß die Winkel bey c und d nicht zu spitz werden.

Darauf werden die W o, x, n, m, gemessen, wodurch man auch die W r und s erfährt. Alsdann sucht man:

1) im Tr bcd aus der Seite cd, und den W o und W n + m die Seite bd (§. 237.)

2) im Tr acd aus der Seite cd und den W n und W o + x die Seite ad. (§. 237).

3) ab (§. 238) im Tr adb aus den Seiten ad und bd, und dem dazwischen liegenden W m die Seite.

Zum Beyspiel, es sey cd = 500′, W o = 30°, x = 80°, n = 40°, m = 60°. Da nun n + m + o = 130°, so ist s = 50°. Aus W s und o findet man das t. M. cd = 76601, und t. M. db = 50000.

76604 : 50000 = 500 : g. M. db.

```
            5      00
76604) 25000000 | 326 1/3′ = g. M. db.
       229812
       ------
        201880
        153208
        ------
         486720
         459624
         ------
          27096
```

Da W o + x + n = 150°, so ist W r = 30°. Aus den W r und W o + x (oder, weil dieser stumpf ist, aus seinen Ergänzungswinkel zu 180, welcher = 70°) findet man t. M. cd = 50000, t. M. da = 93969.

50000 :

50000 : 93969 = 500 :
oder 100 : 93969 = 1 : g. M. da.
giebt 939 2/3′ = g. M. da.

Nun suche im Tr a d b die Höhe b g, aus W b g m = 90° und W m ist das t. M. d b = 100000, t. M. b g = 86602.

100000 : 86602 = 326 1/3 : g. M. bg.

3 | | 979
300000

86602
979
779418
606214
779418
300000) 84783358 | 282 2/3′ = g. M. bg.
600000
2478335
2400000
783358
600000
183358

Ferner: t. M. d b : t. M. g d = g. M. d b : g. M. g d
100000 : 50000 = 326 1/3
2 : 1 6) 979 | 163′ = g. M. g d.
3 | 37
6 | 19
1

d a — g d = 939 2/3 — 163 = 776 2/3 = ag.

$$\text{Quad. } ag = \frac{5428900}{9}$$

$$\text{Quad. } bg = \frac{713104}{9}$$

$$\text{Quad. } ab = \frac{6148004}{9}$$

$$\text{Also } ab = \frac{2479}{3} = 826\ 1/3'.$$

240. **Dritter Fall.** (Fig. 172) A und B sind bekannt, und ein W b, der nicht zwischen ihnen liegt. Suche:

1) Aus W b das t. M. B, und nun t. M. A, denn

g. M. B : g. M. A = t. M. B : t. M. A.

Hieraus den W a in der Chordentafel.

2) W c, da W a + b von 180 abgezogen werden.

3) Das g. M. C. Denn

t. M. B : t. M. C. = g. M. B : g. M. C.

Z. B. Es sey B = 120', A = 130', W b = 12°.

126 : 136 = 20791 : t. M. A.

$$\begin{array}{r}
13 \\ \hline
62373 \\
20791 \\ \hline
\end{array}$$

$$12)\ 270283 \,|\, 22523 = \text{t. M. A.}$$

$$\begin{array}{r}
30 \\ \hline
62 \\ \hline
28 \\ \hline
43 \\
36 \\ \hline
7
\end{array}$$

Zu 22523 gehört W a = 13°
W b = 12

$$\begin{array}{r}
\underline{} \\
25°
\end{array}$$

abgezogen von 180

W c = 155°

Aus dem Ergänzungswinkel 25° findet man das t. M. C = 42261

20791 : 42261 = 120 : g. M. C.

$$\begin{array}{r}
120 \\ \hline
845220 \\
42261 \\ \hline
\end{array}$$

20791) 5071320|243 oder wegen des grossen Bruchs fast 244' = C.

$$\begin{array}{r}
41582 \\ \hline
91312 \\
83164 \\ \hline
81480 \\
62373 \\ \hline
19107
\end{array}$$

241. Anmerkung. Der vierte Fall, daß aus drey bekannten Seiten die drey Winkel gesucht werden, kommt selten vor; daher wollen wir ihn hier übergehen.

242. Anmerkung. Man kann nach dieser vorgetragenen Methode die Fläche einer jeden gradlinichten Figur, z. B. eines Waldes, um welchen man die Umfangslinien und Winkel gemessen hat, ausrechnen, wenn man die ganze Figur in Triangel theilt, und jeden Tr besonders trigonometrisch berechnet, worauf man die Flächen derselben addiret. Wer das Vorhergehende verstanden hat, dem wird es nicht schwer fallen, sich selbst als Beyspiel eine solche Figur vorzuzeichnen, und ihre Fläche auszurechnen. Man findet den Inhalt gewiß genauer, als wenn man in der kleinen Figur, die der großen ähnlich gezeichnet worden ist, die Höhen und Grundlinien der Tr, worin die Figur getheilt worden ist, nach dem verjüngten Maasstabe messet, und aus ihnen die Fläche berechnet. Daher ist die Trigonometrie für jeden, der sich mit Auffindung des Flächeninhalts der gradlinichten Figuren beschäftigt, sehr wichtig und nothwendig.

243. Zum Beschluß will ich noch zeigen, wie man mit Hülfe der Chordentafel, und eines verjüngten Maasstabes, der in 1000 gleiche Theile getheilt ist (wie man sie gewöhnlich in allen Reißzeugen findet) zwey Aufgaben genauer auflösen kann, als mit dem halbcirkelförmigen Transporteur. Man kann damit nämlich 1) einen Winkel auf dem Papier messen, 2) einen Winkel, dessen Grade und Minuten gegeben sind, auf das Papier auftragen.

1) Wenn (fig. 177) ein Winkel a gemessen werden soll, so fasse 500 Theile des tausendtheiligen

ligen Maasstabes mit dem Cirkel, trage sie von a auf den einen Schenkel bis c, ziehe aus c einen Kreis, der die Schenkel des W a in b und d schneidet: ab ist der Durchmesser. Ziehe die Chorde bd, welche dem Peripherie-Winkel a gegenüber stehet. Messe bd auf dem Maasstabe, suche das Maas in der Chordentafel, so steht die Größe des W a dabey.

Es ist zu merken, daß, weil in der Chordentafel der Durchmesser = 100000, und darnach alle Chorden berechnet worden sind: aber der Maasstab um der Bequemlichkeit willen nur = 1000, also auch ab nur = 1000: so müssen auch bey den andern Zahlen für die Chorden zwey Ziffern von der rechten zur linken weniger gerechnet werden, als in der Tafel stehen. Ist W dab stumpf, welcher gemessen werden soll (fig. 178), so wird der eine Schenkel ad, der den Cirkel nicht schneidet, auf der andern Seite bis nach e verlängert, und die Chorde be gezogen. Diese zeigt nicht nur die Größe des spitzen W eab, sondern auch des stumpfen W dab, weil sie Nebenwinkel sind.

Exempel zu fig. 177. Es sey bd = 500. Suche in der Tafel 50000, wozu W 30° gehört. Also ist W a = 30°.

Exempel zu fig. 178. Es sey eb = 856. Suche in der Tafel diejenige Zahl, welche 85600 am nächsten kommt. Diese ist

85716, und der dazu gehörige W ist 59°. Also ist W eab $=59^\circ$, und W dab $=121^\circ$.

2) Wenn man (fig. 177) an den Punkt a der Linie ab einen in Graden und Minuten gegebenen Winkel ansetzen soll, welcher spitz ist: so trägt man wieder vom Maasstabe 500 von a nach c, zieht einen Kreis. Hierauf sucht man in der Chordentafel diejenige Chorde, welche zu dem aufzutragenden Winkel gehört, schneidet zwey Ziffern zur Rechten ab, nimmt diese Chorde auf dem Maasstabe, trägt sie von b nach d, und ziehet die Linie da. Alsdann ist der W dab derjenige, welcher gezeichnet werden sollte.

Z. B. der gegebene Winkel sey $=36^\circ$, so wird bd $=587$ gemacht.

Ist ein stumpfer Winkel gegeben, der an a (fig. 178) gesetzt werden soll, so zeichnet man wieder einen Kreis, und trägt die zu dem Nebenwinkel gehörige Chorde von b nach e, ziehet die Linie ead, so ist dab der verlangte Winkel.

Z. B. W dab soll $=140^\circ$ gemacht werden. Sein Nebenwinkel ist $=40^\circ$. Dazu gehört als Chorde $=642$. So lang wird be gemacht, so ist W eab $=40^\circ$, und W dab $=140^\circ$.

Fünf-

Fünftes Kapitel.

Von den Körpern und ihrer Ausmessung.

244. Die Körper werden in der Geometrie blos nach der Größe des Raumes betrachtet, den sie einnehmen: andere Eigenschaften derselben, z. B. ihr Gewicht, ihre Materie u. dergl. werden in der Naturlehre und Naturgeschichte untersucht. — Die wichtigsten Körper für den Geometer sind 1) das Prisma, 2) der Cylinder (oder die Walze), 3) die Pyramide, 4) der Kegel, 5) die Kugel.

245. Ein Prisma ist ein eckichter Körper, der allenthalben (oben, in der Mitte, und unten) gleiche Dicke und Gestalt hat, wie z. B. die meisten Säulen, Balken 2c. Seine beyden Grundflächen sind also gradlinichte Figuren, die mit einander parallel liegen, und gleich sind (sich decken würden, wenn sie auf einander gelegt würden). Alle Durchschnitte des Prisma's, parallel mit den Grundflächen, sind diesen gleich. — Die Seitenflächen des Prisma's sind so viele Parallelogramme, als die Grundfläche Seiten hat.

246. Die Prismata werden eingetheilt in dreyeckichte, viereckichte, und vieleckichte (zu welchen letztern alle gehören, deren Grundflächen 5, 6, und mehrere Ecken haben). Ferner werden sie eingetheilt in 1) senkrechte und 2) schiefe, je nachdem die Seitenlinien mit den Grundflächen rechte oder schiefe Winkel bilden. Fig. 179. ist ein senkrechtes, fig. 180 ein schiefes Prisma.

247. Man kann sich die Entstehung des Prisma's so vorstellen, als würde auf eine gradlinichte Figur (wie Tr abc fig. 179 und 180) eine Linie von a nach d unter einen gewissen Winkel angesetzt, und diese Figur (Tr abc oder eine 4, 5 und mehr seitige) so an der Linie ad fortgeschoben; daß sie immer in derselben Lage bliebe (oder daß alle Lagen derselben unter sich parallel wären.) Würde der von der Figur durchlaufene Raum als ein Körper angesehen, so ist er ein Prisma. — Die Höhe eines Prisma's ist eine senkrechte Linie von einer Grundfläche zur andern.

248. Wenn die Grundflächen des Prisma's Parallelogrammen sind, so heißt es ein Parallelopipedum, (fig. 181.)

Es ist von sechs Parallelogrammen als Seiten und Grundflächen begränzt, wovon je zwey gegenüberstehende einander gleich sind, und die Durchschnitte, die parallel mit der Grundfläche geführt werden, sind dieser gleich, also auch Parallelogrammen.

249. Wenn ein senkrechtes Parallelopipedum von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist: so ists ein **Cubus** oder **Würfel**. (Fig. 182) Seine Länge, Breite und Höhe sind also gleich.

250. Zur Ausmessung des Inhalts der Körper gebraucht man ein Maas, das von eben der Art ist: also muß es auch ein Körper seyn, (so wie man Flächen mit kleinen Flächen, und Linien mit kleinen Linien ausmisset.) Zu diesem Maase ist der Würfel am bequemsten. Ein Würfel, dessen Länge, Breite und Höhe, eine Ruthe, oder einen Schuh, oder einen Zoll lang ist, heißt eine **Cubikruthe**, ein **Cubikschuh**, ein **Cubikzoll**. (Man gebraucht bey der Ausmessung der Weltkörper, z. B. der Erde, auch Cubik-Meilen, also Würfel, die eine Meile lang, breit und hoch sind.) Fragt man nach der Größe eines Körpers (nämlich seines Inhalts): so will man wissen, wie viele Cub. Ruthen, Schuhe und Zolle in den Raum gelegt werden können, den er einnimmt.

251. **Aufgabe.** Eines Würfels (fig. 183) körperlichen Inhalt auszurechnen.

Auflösung. Messe eine Seite desselben, z. B. ab, multiplicire sie mit sich selbst, und das Produkt noch einmal mit ab — Es sey ab = 3′, so ist der Inhalt des Körpers 3. 3. 3 = 27 Cub. Schuh.

Beweis. Durch das Multipliciren der Seite ab mit sich selbst hat man die Zahl der Quadrat-

schuhe

schuhe erhalten, die die Grundfläche abcd enthält, nämlich 9 Quadratschuhe. Da aber ae = ab, also auch ae = 3': so stehen auf jedem der 9 Quadratschuhe der Grundfläche drey Cubikschuhe übereinander. Es sind also 9 kleine viereckichte Säulen, deren jede 3 Cubikschuhe enthält. Daher muß man das Produkt 9 noch einmal mit 3 multipliciren, um den ganzen körperlichen Inhalt des Würfels zu erfahren.

251. Da eine geometrische Ruthe in die Länge = 10', eine Quadratruthe 100 Quad. Schuhe, so ist eine geometrische Cubikruthe = 1000 Cubikschuhe. Eben so ist ein Cubikschuh = 1000 Cubikzolle, und ein Cub. Zoll = 1000 Cubiklinien. — Es ist also leicht, eine Zahl von Cub. Ruthen in Cub. Schuhe, und diese in Cub. Zolle zu verwandeln, wenn man nur jedesmal mit 1000 multipliciret, (das ist, wenn man jedesmal 3 Nullen zur Rechten anhängt). Z. B. 24 Cub. Ruthen sind = 24000 Cubikschuhe, und diese sind 24000 000 Cub. Zolle. —

Eben so leicht läßt sich eine Zahl von Cub. Zollen in Cubikschuhe, und diese in Cub. Ruthen verwandeln, wenn man jedesmal mit 1000 dividiret, (das ist, von der Rechten zur Linken 3 Ziffern abschneidet). Z. B. 2876493 Cub. Zolle sind = 2° 876' 493". — Durch diese Decimaleintheilung erspart man also das Multipliciren und Dividiren.

252. Aufgabe. Die Fläche, welche einen Würfel umgiebt, im Quadratmaas zu finden.

Auf-

Auflösung. Rechne eine Seite aus, und multiplicire diese mit sechs. Z. B. In der 183. Figur ist abcd = 9 Quadratschuhe, also der ganze Umfang des Würfels = 6. 9 = 54 Quadratschuhe.

252. **Anmerk.** Diese Aufgabe kann vorkommen, wenn man wissen will, wie viel Holz oder Blech man zu einem Quadratförmigen Kasten oder einer Büchse braucht.

253. **Aufgabe.** Den körperlichen Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums (fig. 184) zu finden.

Auflösung. Messe die Länge, Breite und Höhe, und multiplicire sie mit einander. Z. B. ab = 4′, ac = 3′, ae = 5′ so ist der Inhalt 60 Cubikschuhe.

Beweis. Auf jedem Quadratschuh der Grundfläche abcd steht eine viereckichte Säule die 5 Cubikschuhe hält, weil die Höhe ae = 5′. Also müssen die 12 Quadratschuhe der Grundfläche mit 5 multipliciret werden.

254. **Anmerk.** Diese Aufgabe kommt bey der Körpermessung häufig vor, z. B. bey Ausrechnung des Inhalts von Mauern, Säulen, Balken, Kasten, Stuben, Kellern, aufgesetzten Klaftern Holz und dergl. Gesetzt, die Klafter Holz ist breit 6′, hoch 6′, und die Länge der Scheiter 4′, so hält sie 4. 6. 6 = 144 Cubikschuhe. — Eine andere Klafter sey breit 9, hoch 6, die Länge der Scheiter 4, so ist ihr Inhalt = 9. 6. 4 = 216 Cubikschuh. Die erste verhält sich zur andern, wie 144 : 216, oder (wenn man beydes mit 72 dividiert) wie 2 : 3.

255. **Lehrsatz.** Ein senkrechtes und schiefes Parallelopipedum (fig. 184) von gleicher Grundfläche und Höhe sind auch in Ansehung ihres körperlichen Inhalts gleich.

Beweis. Man stelle sich vor, beyde Körper würden in unzählig viele Scheibchen geschnitten, die alle parallel mit der Grundfläche lägen, und unendlich dünne wären: so würde die Zahl der Scheibchen in beyden Körpern gleich groß seyn, weil sie gleich hoch sind. Alle Scheibchen unter sich würden auch einander gleich seyn, weil sie gleiche Dicke haben, und alle parallel mit der Grundfläche liegen sollen, und die Grundflächen beyder Körper gleich sind.

256 **Aufgabe.** Der Flächeninhalt eines schiefstehenden Parallelopipedums auszurechnen.

Auflösung. Messe die Grundfläche, und die Höhe, (eine senkrechte Linie von einer Grundfläche auf die andere), und multiplicire sie mit einander. (§. 255.)

257. **Aufgabe.** Den Inhalt eines dreyeckichten Prisma's zu berechnen. (fig. 179.)

Auflösung. Rechne den Triangel aus, der die Grundfläche ausmacht, und multiplicire diese mit der Höhe. Der Beweis ist wie bey dem viereckichten Prisma.

258. **Anmerk.** Man soll (fig. 185) den Inhalt eines Gebäudes nebst dem Raume unter dem Dache (woran die Giebel senkrecht stehen) ausrechnen. Hier muß der untere Theil des Gebäudes als ein Parallelopipedum, der Raum unter dem Dache aber als ein Dreyeckichtes Prisma angesehen werden. Es sey $ag = 100'$, $ab = 60'$, $bc = 80'$, so ist das

untere Gebäude = 100. 60. 80 = 480000 Cubikschuhe. — Weil ab = ce = 60′, so ist 1/2 ce = de = 30,′ ferner sey df 240′, und ek = ag = 100. Also ist der Raum unter dem Dache = 30. 40. 100 = 120000 Cubikschuhe. Zusammen = 600000 Cubikschuhe, oder 600 Cub. Ruthen.

259. Anmerk. Auch hier gilt der Satz, daß ein dreieckichtes, (oder vieleckichtes) schiefstehendes Prisma, von gleicher Grundfläche und Höhe mit einem senkrechten, im körperlichen Inhalte diesem gleich ist.

260. Aufgabe. Den Inhalt eines vieleckichten Prisma's zu finden.

Auflösung. Theile die Grundfläche durch Diagonallinien in Triangel, und rechne sie (nach §. 154) aus. Hierauf multiplicire sie mit der Höhe. Dieses kann z. B. bey vielseitigen Säulen statt finden — Man kann sich also vorstellen, als würde ein solches vielseitiges Prisma durch Schnitte in den Diagonalen der Grundfläche in lauter dreieckichte Prismata getheilt.

261. Aufgabe. Die Fläche, welche ein jedes Prisma umgiebt, in Quadratmaas zu finden.

Auflösung. Multiplicire den Umfang der Grundfläche mit der Höhe. Dieses giebt die Seitenflächen. Denn die Seiten der Grundfläche sind die Grundlinien der Seitenflächen. Diese müssen alle zusammen mit der Höhe multiplicirt werden. Hierauf werden die beyden Grundflächen besonders ausgerechnet, und dazu addiret.

Ist der Körper ein Parallelopipedum, wo die gegenüberstehenden Flächen gleich sind; so kann man nur

nur 3 Flächen ausrechnen, sie addiren, und die Summe doppelt nehmen.

Z. B. fig. 184 ist abcd = 12 Quad. Schuhe
acfe = 15 — —
cdgf = 20 — —

47
2

Die ganze Fläche = 94 Quad. Schuhe.

Wollte man ausrechnen, wie viele Quadrat-Schuhe Tapeten man brauchte, um die Wände eines Zimmers zu tapezieren: so würde der Umfang des Zimmers mit seiner Höhe multiplicirt, da man die Fläche des Bodens und der Decke nicht auszurechnen braucht. Z. B. Länge = 20′ Breite = 15′,
also Umfang = 70′
Höhe = 10′

Fläche der 4 Wände des Zim. = 700 Quad. Schuhe, wovon noch die Fläche der Fenster und Thüren abgezogen werden müssen.

262. Zu den Prismatischen Körpern kann man den Cylinder (oder die Walze) rechnen, welche aber zu Grun flächen keine eckichte Figuren, sondern zwey gleiche Cirkel hat, die parallel liegen (Fig. 186.) Der Cylinder ist auch allenthalben gleich dick, und alle mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte sind Cirkel, die ihr gleich sind. Um ihn herum gehet eine krumme Fläche. Die Linie dc, welche die Mittelpunkte der beyden Grundflächen d und c mit einander verbindet, heißt die Axe des Cylin-

Cylinders. Steht diese senkrecht auf der Grundfläche: so ist der Cylinder ein senkrechter: sonst aber ein schiefer. — Bey dem erstern ist die Axe die Höhe, bey dem letztern eine senkrechte Linie von der obern Grundfläche auf die untere.

263. Man kann sich die Entstehung des Cylinders auf ähnliche Art, wie bey dem Prisma vorstellen, so daß nämlich ein Kreis an einer Linie cd fortbewegt würde, ohne seine Neigung gegen diese Linie zu ändern. — Bey einem senkrechten Cylinder kann man sich auch denken, als würde ein Parallelogramm acde um eine feststehende Seitenlinie cd im Kreise herumbewegt. Der durchlaufene Raum ist Cylinderförmig.

264. Da man jeden Cirkel als ein reguläres Polygon von unzählig vielen Seiten ansehen kann (§. 163.) so kann man auch den Cylinder als ein Prisma ansehen, dessen Grundfläche unzählig viele Seiten hätte.

265. Was also vom Prisma gilt, gilt auch von dem Cylinder, daß nämlich ein schiefstehender gleichen Inhalt mit einem senkrechten Cylinder hat, wenn sie beyde gleiche Grundfläche und Höhe haben.

266. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Grundfläche mit der Höhe. Da nun die Grundfläche ein Kreis ist: so muß man entweder den Durchmesser ab (fig.

186), oder die Peripherie derselben messen, und nun nach den §. 166. 167 verfahren. Der Quadratinhalt wird mit der Höhe multiplicirt, wie bey allen Prismatischen Körpern geschehen muß. — Der Beweis ist daher hier ebenderselbe, welcher bey der Berechnung des 4eckichten Prisma's vorgekommen ist.

Z. B. Es sey eine Mühlwelle lang 18′, der Durchmesser = 2′.

$$7 : 22 = 2 : \text{Peripherie}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 7)\ 44 \,|\, 6\ 2/7' = \text{Peripherie} \\ 42 \\ \hline 2 \end{array}$$

$6 \,|\, 2/7'.\ 1/2' \,| = 3\ 1/7$ Quad. Schuh.

Dies mit der Länge $18.\ 3\ 1/7 = \frac{22}{7}\ 18 \,|\, \frac{396}{7} = 56\ 4/7$ Cub. Schuh.

267. Anmerkung. Die Cylinderberechnung kommt auch vor bey runden Säulen, cylindrischen Büchsen und andern Gefäßen, Brunnen, gleich dicken Baumstämmen u. s. w. Gesetzt, man wollte einen solchen Baum (oder wenigstens ein Stück vom Stamme desselben) als Cylinder berechnen: so müßte man erst den Umfang oder den Durchmesser des Baums messen. Den Umfang mißt man am besten mit einem Streifen Pergament, das in Schuhe und Zolle getheilt ist. Den Durchmesser mit einem Maasstabe, an welchem rechtwinkelicht zwey Lineale a b und c d gelegt werden, welche den Baum von drey Seiten einschliessen. Nun zeigt die Zahl der Schuhe und Zolle von a nach c (fig. 187) die Länge des Durchmessers e f. Die Figur 3 stellt die Cirkelförmige Grundfläche des Baums vor.

Gesetzt der Durchmesser ef sey = 12''

7 : 22 = 12 : Peripherie

```
   12
  ----
   44
  22
 -----
7) 264|37 5/7   37 5/7
   ---              -------
   54       264      3|792 Quad. Zolle der
   --       ---        ---      Grundfläch.
    5        7          7
```

Die Länge des Baums sey 21 Schuhe = 210''

```
        792
        210
     -------
       7920
     1584
   ---------
7) 166320|23760 Cub. Zolle oder 23' 760''
   --               ist der Inhalt des Baumes.
    26
    --
     53
     --
      42
      --
       0
```

268. **Aufgabe.** Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Peripherie der Grundfläche mit der Höhe des Cylinders. Es sey die Periph. d. Grundfl. = 12', die Höhe des Cyl. = 10', so ist der Inhalt der Seitenfläche = 120 Quad. Schuhe.

Beweis. Wenn man sich vorstellet, als sey ein Bogen Papier so um einen Cylinder gelegt, daß er auf der krummen Oberfläche ganz davon bedeckt würde, und man legte den Bogen hernach auseinander: so würde man ein Parallelogramm haben, dessen Grundlinie gleich der Peripherie der Grundfläche des Cyl., und Höhe gleich der Höhe des Cyl. wäre. Daher muß diese krumme Fläche an Flächeninhalt dem Parallelogramm gleich seyn.

Werden zu dieser Fläche noch die beyden Grundflächen des Cylinders addirt: so hat man die ganze Oberfläche desselben.

269. Eine **Pyramide** ist ein spitzer Körper, dessen Grundfläche eine gradlinichte Figur ist. Daher giebts dreyeckichte, viereckichte, vieleckichte Pyramiden. Eine Linie von der Spitze senkrecht auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide. — Auch hier ist der Unterschied unter senkrechten und schiefen Pyramiden, wie bey den Prismatischen Körpern.

270. Man kann sich die Entstehung einer Pyramide folgendermasen vorstellen. Es werden (fig. 188) von einem Punkte d über einer Figur abc grade Linien da, db, dc nach den Ecken der Figur gezogen. Durch diese Linien denke man sich Seitenflächen gelegt; davon wird ein Körper begränzt, den man Pyramide nennt. — Diese Seitenflächen sind Triangeln, die mit den Spitzen zusammen fallen, und deren Grundlinien in die Umfangslinien der Grundfläche fallen. Es sind ihrer also so viele, als die Grundfläche Seiten hat.

271. Ein Schnitt parallel mit der Grundfläche der Pyramide ist dieser ähnlich. — (Der Beweis ist leicht aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel und anderer gradlinichter Figuren zu führen.)

272.

272. Zwey Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind auch im körperlichen Inhalte gleich. Denn wenn man beyde, parallel mit der Grundfläche, in unzählig viele Scheibchen zerschnitte, die alle unendlich dünne wären: so würde 1) wegen der gleichen Höhe der Pyramiden, die Zahl der Scheibchen in beyden gleich seyn, 2) würden die beyden untersten Scheibchen, die 2ten, 3ten u. s. w. in beyden Körpern gleich seyn, da alle Queerschnitte der Grundfläche ähnlich sind, und in gleichen Verhältnissen in beyden Körpern abnehmen. Also würden die unzählig vielen Scheibchen der einen Pyramide denen der andern gleich seyn.

273. Jede dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe.

Der Beweis läßt sich an einer Figur nicht so gut zeigen, als wenn man ein hölzernes dreyeckichtes Prisma in drey dreyeckichte Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe zerschneidet.

Fig. 189. Der erste Schnitt geschiehet durch d nach ab, der zweite durch daf. Dadurch entstehen 3 Pyramiden. 1) acbd, 2) bfad, 3) afed (der letzte Buchstaben d zeigt die Spitze der Pyramiden an). 1 und 2 sind gleich, da Grundfläche dcb von der Pyr. dcba, und Grundfläche dbf von der Pyr. dbfa gleich sind, und ihre Spizzen a zusammen fallen. Auch sind 2 und 3 gleich, weil die Grundfläche afb von der Pyram. afbd,

und Grundfläche afe von der Pyr. afed gleich sind, und ihre Spitzen in d zusammen fallen. — Also sind die drey Pyramiden einander gleich.

274. Anmerkung. Da jede vielseitige Pyramide, deren Grundfläche in Triangel zertheilt wird, in dreyeckichte Pyramiden zertheilt werden kann (so wie jedes Prisma in dreyeckichte Primata): so gilt der vorige Satz allgemein, daß jede Pyramide der 3te Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe ist.

275. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Pyramide zu finden.

Auflösung. Multiplicire die Grundfläche mit dem 3ten Theil der Höhe. — Z. B. Eine der Pyramiden bey Sakkara in Aegypten ist hoch 345'. Der dritte Theil davon ist 115. Jede Seite der quadratförmigen Grundfläche ist lang 700' Also die Grundfläche = 700.

$$
\begin{array}{r}
700 = 490000 \text{ Quad. Sch.} \\
115 \\
\hline
245 \\
49 \\
49 \\
\hline
\end{array}
$$

Inhalt der Pyramide = 56350000 Cub. Schuh.

Anmerkung. Die Fläche einer Pyramide findet man, wenn man jeden Tr, der sie umgiebt, besonders ausrechnet, und diese addiret.

276. Ein Kegel (fig. 190.) ist ein spitzer Körper, der statt der eckichten Grundfläche eine cirkelförmige hat. Die Linie von der Spitze des Kegels a nach dem Mittelpunkte der Grundfläche c heißt die

die Axe des Kegels. — Steht die Axe senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Kegel ein senkrechter; steht sie aber schief darauf, so ists ein schiefer Kegel.

277. Die Entstehung des senkrechten Kegels kann man sich auf zweyerley Art vorstellen. 1) Aus einem Punkte a grade über dem Mittelpunkte eines Cirkels ziehe eine Linie in die Peripherie desselben, und führe sie darin herum. Diese Linie beschreibt eine krumme Fläche, die den Kegel begrenzt. — 2) Oder bewege einen rechtwinkelichten Tr a c d um die eine feststehende Seite a c, so beschreibt der Punkt d die Peripherie der cirkelförmigen Grundfläche, und die Linie a d die krumme, den Kegel begrenzende, Fläche.

278. Die Schnitte parallel mit der Grundfläche wie der Schnitt durch b und c sind Cirkel. Durch einen solchen Schnitt wird ein ähnlicher kleiner Kegel a b c oben abgeschnitten. Das übrige Stück zwischen d f und b c ist ein abgekürzter oder abgestumpfter Kegel.

279. Senkrechte und schiefe Kegel (fig. 190) von gleichen Grundflächen und Höhe sind dem Inhalte nach gleich. Der Beweis ist wie bey der Pyramide. Denn jeder Kegel ist als eine Pyramide anzusehen, deren Grundfläche unzählig viele Ecken hat.

280. Wenn man daher einen Kegel und einen Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe, und

eine Pyramide und ein Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe gegen einander betrachtet: so muß sich der Kegel zum Cylinder, wie die Pyramide zum Prisma verhalten. Da nun die Pyramide der dritte Theil vom Prisma ist: so ist auch der Kegel der dritte Theil vom Cylinder, der ihm in der Grundfläche und Höhe gleich ist.

281. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Kegels auszurechnen.

Auflösung. Multiplicire die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe (einer senkrechten Linie von der Spitze auf die Grundfläche.) Z. B. die Höhe sey = 10', die Peripherie der Grundfläche = 22'', so ist der Durchmesser = 7'. Grundfläche = $\frac{7 \cdot 22}{4}$ Quadrat-Zoll. Das ist = 38 1/2 Quad. Zoll. Dies mit 10' oder 100'' der Höhe multiplicirt, giebt 3850 Cub. Zolle für den Kegel.

282. Aufgabe. Die krumme Fläche, welche den senkrechten Kegel umgiebt, auszurechnen.

Auflösung. (fig. 190.) Multiplicire die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seitenlinie des Kegels ad.

Beweis. Wenn man von der Spitze a unzählig viele Linien neben einander in die Peripherie der Grundfläche ziehet: so entstehen unzählig viele schmale Triangel, deren Grundlinien so klein sind, daß man sie als grade Linien ansehen kann. Alle diese kleinen Grundlinien zusammen machen die Pe-

riphe-

ripherie der Grundfläche aus. Die krumme Fläche ist anzusehen, als bestünde sie aus allen diesen unzählig vielen schmalen Triangeln zusammengenommen. Da man nun den Flächeninhalt aller dieser Triangel findet, wenn man ihre Grundlinien addiret, und diese Summe mit der halben Höhe (halb a d) multipliciret: so muß auf diese Art auch der Inhalt der krummen Fläche des senkrechten Kegels heraus kommen.

Addirt man dazu den Inhalt der Grundfläche: so hat man die ganze Fläche, welche den Kegel umgiebt.

283. Es giebt mancherley Körper, welche die Form eines abgekürzten Kegels haben, z. B. Eimer, Trinkgläser und andere Gefäße; Stämme von Tannen, Eichen und andern gradgewachsenen Bäumen, wo das obere Holz des Baumes aus Aesten bestehet, und der Stamm selbst einem Kegel gleichet, dessen Spitze fehlet. Daher ist folgende Aufgabe besonders für den Forstverständigen wichtig.

284. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden.

Auflösung. Rechne zuerst den ganzen Kegel aus: hierauf den obern abgeschnittenen, und ziehe den letztern vom ganzen Kegel ab.

Fig. 190 sey der Durchschnitt eines Kegels: d f e b ist der abgekürzte, und a c b der fehlende Kegel. Man messe zuerst

den untern Durchmesser d f = 28″
den obern Durchmesser b c = 14″
die Länge e o = 90″

Nun muß die Höhe des fehlenden Kegels, nämlich oa ausgerechnet werden. Ziehe bn parallel mit aoe, so ist Tr dnb ähnlich den Tr boa. Also

$$dn : nb = bo : oa.$$

Um dn zu finden, ziehe den Halbmesser bo = 7 von dem Halbmesser de = 14 ab, so ist dn = 7''.

Also 7 : 90 = 7 : 90.

oa ist = 90'', und ea = 180''

Nun berechne man die untere Grundfläche. Weil df = 28' so ist die Peripherie = 88''. (Denn 7 : 22 = 28 : 88.)

88 · 7 = 616 Quad. Zolle = Grundfläche des ganzen Kegels. Dies multiplicire mit dem 3ten Theil der Höhe, $\frac{180}{3} = 60$, so kommt für den ganzen Kegel = 36960 Cub. Zolle.

Der obere Durchmesser bc ist = 14'' also die Peripherie = 44''. Daher die Fläche = $\frac{14 \cdot 44}{4}$ = 156 Quad. Zolle.

Dies mit dem dritten Theil von 90 (der Höhe 20), also mit 30 multiplicirt, giebt den Inhalt des obern abgeschnittenen

Kegels = 30 · 156 = 4680 Cub. Zolle.
Dies wird abgezogen von 36960
Inh. des abgek. Keg. = 32280 Cubik-Zolle.

285. Zwey Prismate, oder 2 Cylinder, oder 2 Pyramiden, oder 2 Kegel von gleichen Grundflächen und verschiedenen Höhen, oder von gleichen Höhen und verschiedenen Grundflächen verhalten sich in

in Ansehung ihres körperlichen Inhalts im ersten Falle wie die verschiedenen Höhen, und im andern Falle wie die verschiedenen Grundflächen.

Wir wollen dieses erst an den Cylindern sehen. Die Cylinder (fig. 191) sollen gleiche Grundflächen, jede 8 Quadratzolle, haben, ihre Höhen sollen seyn 10″ und 20″, also sich verhalten wie 1 : 2. Der Inhalt beyder verhält sich also wie

8. 10 : 8. 20 das ist wie 10 : 20 oder 1 : 2.

Denn die Produkte haben einen Faktor 8 gemeinschaftlich: Daher kann man ihn weglassen, ohne daß das Verhältniß geändert wird. — Fig. 192 seyen zwey Cylinder von gleicher Höhe (jeder sey 8″ hoch). Ihre Grundflächen sollen seyn 5 Quadratzolle und 15 Quadratzolle, die sich also verhalten wie 1 : 3. Die körperlichen Inhalte verhalten sich wie 10. 5 : 10. 15 oder wie 5 : 15 oder wie 1 : 3.

Eben dies gilt also auch von Pyramiden und Kegeln, wo der dritte Theil der Höhe als Faktor in Rechnung kommt, welches an der Sache selbst keinen Unterschied macht.

286. Eine Kugel ist ein runder Körper, wo alle Punkte auf der Oberfläche gleich weit von dem Mittelpunkte abstehen. Dreht sich im Halbcirkel um den feststehenden Durchmesser, so entstehet eine Kugel. — Man mag die Kugel durchschneiden, wo man will so entstehet ein Kreis. Der größte Kreis entstehet, wenn man den Schnitt durch den Mittelpunkt führet.

287. Wenn man folgende drei Körper, einen Cylinder, einen Kegel, und eine Halbkugel (fig. 193) sich

sich vorstellt, die 1) gleiche Höhe haben 2) wo die Grundfläche des Cylinders und Kegels und des größten Kreises der Halbkugel gleich sind: so müssen sich diese Körper in Ansehung ihres körperlichen Inhalts gegen einander verhalten, wie 3, 2, 1, oder der Kegel muß 1/3 und die Halbkugel 2/3 vom Cylinder halten.

Fig. 194. abcd sey der Durchschnitt des Cylinders. In ihm liege der Durchschnitt der Halbkugel cmd, und der Durchschnitt des Kegels afb, (dessen Spitze f unten stehet.) Von dem Kegel ist bekannt, daß er den dritten Theil des Cylinders enthält, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. (§. 280) Nun muß bewiesen werden, daß wenn ich den Inhalt des Kegels von dem Inhalte des Cylinders abziehe, der Inhalt der Halbkugel übrig bleibt, und also die Halbkugel zwey Drittheile vom Cylinder ist.

Würde man diese drey Körper, parallel mit der Grundfläche in unendlich viele Scheibchen schneiden, so müßte die Zahl dieser Scheibchen in allen dreien gleich groß seyn, weil sie gleich hoch sind.

Es muß also gezeigt werden, daß, man mag den Schnitt machen, wo man will, wenn man das Scheibchen des Kegels von dem des Cylinders abziehet, das Scheibchen der Halbkugel übrig bleibet.

Gesetzt, man machte den Schnitt durch noxyz, so wäre ox der Halbmesser des Scheibchens im Kegel.
oy — — — — in der Halbkugel
oz — — — — im Cylinder.

Ziehe

Ziehe fy, so entstehet ein rechtwinkelichter Tr ofy, dessen drei Seiten dem so eben genannten Halbmesser gleich sind. 1) oy ist eine kürzere Seite, 2) ox = of, weil ox parallel mit mb lauft, also bm: mf = ox: of. Nun ist bm = mf, also auch ox = of. 3) oz = fy, weil oz = fd und fd = fy (als Halbmesser der Kugel). Nach dem Pythagorischen Lehrsatze (§. 119) bleibt, wenn man das Quadrat von of von dem Quadrat von fy abziehet, das Quadrat von oy übrig. Die Cirkel verhalten sich aber gegeneinander, wie die Quadrate auf ihren Durchmessern (§. 172), also auch wie die Quadrate auf ihren Halbmessern (weil sich das Quadrat eines Durchmessers zu dem Quadrate des Halbmessers immer wie 4:1 verhält. Weil nun

1) das Quadrat von of das Quadrat des Halbmessers im Scheibchen vom Kegel ist,
2) das Quadrat von fy das Quadrat des Halbmessers im Scheibchen von dem Cylinder,
3) das Quadrat von oy das Quadrat des Halbmessers im Scheibchen von der Halbkugel:

so muß, wenn man das Scheibchen des Kegels vom Scheibchen des Cylinders abziehet, das Scheibchen der Halbkugel übrig bleiben.

Dieser Beweis gilt überall, man mag die Scheibchen schneiden, wo man will. Also müssen alle Scheibchen der Halbkugel übrig bleiben, wenn man den Inhalt aller Scheibchen des Kegels von dem Inhalte aller Scheibchen des Cylinders abziehet.

Es

Es ist daher erwiesen, daß die Halbkugel 2/3 von dem Cylinder ist.

Hieraus folgt, daß eine ganze Kugel auch 2/3 von einem Cylinder ist, dessen Höhe dem Durchmesser, und dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kegel gleich ist.

288. Aufgabe. Den Inhalt einer Kugel zu finden.

Auflösung. Berechne den größten Kreis, und multiplicire ihn mit dem Durchmesser. Von dem Produkt nehme zwei Drittheile.

Z. B. Der Durchmesser der Erde ist ohngefähr 1720 deutsche Meilen. Die Peripherie des größten Kreises = 5400 d. M. Also die Fläche desselben = 430. 5400 = 2322000 deutsche Quadratmeilen. Zwey Drittheile davon sind = 1548000. Dieses mit 1720 multipliciret giebt 2662560,000 Cubikmeilen.

Anderes Beyspiel. Der Durchmesser sey = 100'. Die Peripherie = 314'. Die Fläche des größten Kreises $= \frac{314.\ 100}{4} = 7850$ Quad. schuhe. Dieses mit 100 multipliciret = 785000. Davon 2/3 genommen, macht 523333 1/3 Cubikschuhe.

289. Da die Kugeln sowohl als die Würfel einander ähnlich sind: so steht eine Kugel gegen den Wür-

Würfel ihres Durchmessers in demselben Verhältniß, wie eine andere Kugel zu dem Würfel ihres Durchmessers.

Um dieses Verhältniß zu finden, wollen wir nach dem Beyspiel des vorigen §. vom Durchmesser der Kugel, (deren Inhalt 523333 1/3 Cubikschuhe ist) =100 den Würfel nehmen. Dieser ist=1000000. Also verhält sich jede Kugel zu dem Würfel ihres Durchmessers wie 523333 1/3: 1000000, oder wenn man beyderseits mit 3 multipl. wie 1750000: 3000000, oder wenn man auf beyden 4 Nullen wegstreicht (das ist, mit 10000 dividiret) wie 157: 300.

290. Nach diesem Verhältniß kann man leicht den Inhalt einer Kugel berechnen, wenn man ihren Durchmesser weiß. Man nimmt nämlich den Würfel davon, und sagt nach der Regel de Tri, wie sich verhält 300 zu 157, so verhält sich der Würfel des Durchmessers der Kugel, zu ihrem körperlichen Inhalt.

Z. B. Der Durchmesser sey 12''. Also der Würfel davon =12. 12. 12=1728 Cubikzolle.

300:

```
300 : 157 = 1728
             157
            ------
            12096
            8640
           1728
          --------
300)   271296|904 1/3 Cubikzolle ist der
       2700              Inhalt der Kugel
       ------
         1296
         1200
        ------
           96
```

Anderes Beyspiel. Will man wissen, wie viel Mal mehr Masse die Sonne als die Erde enthält: so nimmt man von III (als der Zahl, welche anzeigt, wie viel Mal der Durchmesser der Erde in dem Durchmesser der Sonne enthalten ist) den Cubus = 1367631. So viele Erdkugeln müßte man zusammenthun, um eine Sonnenkugel daraus zu machen.

294. Eine Kugel wird einer Pyramide gleichen, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche, und deren Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Beweis. Man stelle sich vor, die ganze Oberfläche der Kugel sey in unendlich kleine Quadrate getheilt, und es bewege sich eine im Mittelpunkte bevestigte Linie um diese kleine Quadrate, die von einer graden Fläche nicht merklich mehr unterschieden sind: so sehen wir, wie eine Kugel aus unendlich vielen Pyramiden bestehe. Diese alle zusammen sind einer

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0168
DFG

einer Pyramide von derselben Höhe gleich, wenn auch ihre Grundfläche der Summe aller Grundflächen dieser kleinen Pyramidchen zusammen genommen gleich ist.

292. Da der Inhalt einer Pyramide ein Produkt ist, dessen Faktoren 1) der dritte Theil der Höhe 2) die Grundfläche ist (§. 275) und wenn man im Produkt durch den einen Faktor dividirt, der andere Faktor als Quotient herauskommen muß: so darf man nur den körperlichen Inhalt einer Pyramide mit dem 1/3 der Höhe dividiren, um die Grundfläche zu erfahren. Hieraus folgt nach dem vorigen §. daß man den Inhalt einer Kugel nur mit dem 3ten Theil des Halbmessers, oder 6ten Theil des Durchmessers dividiren darf, wenn man ihre Oberfläche wissen will.

293. Die Oberfläche einer Kugel verhält sich zur Fläche des größten Kreises durch den Mittelpunkt, wie 4 : 1.

Beweis. Wenn der Durchmesser = 100′, die Peripherie = 314′ so ist der Inhalt = 523333 1/3 Cubikschuh (§ 288) Dies mit dem sechsten Theil des Durchmessers $\left(\frac{100}{6}\right)$ dividirt, giebt die Oberfläche der Kugel (§. 292) = 31400 Quadratschuhe. Nun ist die Fläche des größten Kreises = 314 . 25 = 7850 Quadratschuhe. Also das gesuchte Verhältniß 31400 : 7850, beydes mit 7850 dividirt, giebt 4 : 1.

294. Man erhält daher die Oberfläche der Kugel, wenn man den größten Kreis ausrechnet und viermal nimmt, das ist, wenn man die Peripherie nicht mit dem 4ten Theil des Durchmessers, sondern mit dem ganzen Durchmesser multipliciret.

295. Wird nun diese Kugelfläche mit dem sechsten Theil des Durchmessers multiplicirt, so erhält man den Inhalt der Kugel (§. 291).

296. Anmerk. Man kan also eine Kugel auf dreyerley Art ausrechnen. 1) Nach §. 288, wenn man sie als 2/3 von einem Cylinder von gleicher Höhe und Dicke betrachtet, 2) nach §. 250. wenn man des Durchmessers Würfel ausrechnet, und zu 300, 157, und diesem Würfel die 4te Proportionalzahl ausrechnet, 3) nach §. 295. Wenn sie einer Pyramide gleich gesetzt wird, deren Grundfläche und Höhe der Kugelfläche und dem Halbmesser gleich sind.

297. Anmerk. Außer dem Würfel giebt es noch 4 reguläre Körper,

1) Das Tetraedrum, welches von 4 gleichseitigen Triangeln begrenzt wird.
2) Das Oktaedrum, welches von 8 gleichseitigen Triangeln begrenzt wird.
3) Das Ikosaedrum, welches von 20 gleichseitigen Triangeln begrenzt wird.
4) Das Dodekardrum, welches von 12 regulären Fünfecken begrenzt wird.

Diese Körper kommen im gemeinen Leben wenig vor; wie man sie aus Papier zusammensetzen könne, wird §. 300 gelehrt.

298. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Fasses zu finden.

Auf-

Auflösung. Da das Faß in der Mitte dicker, als an beyden Enden ist: so ist ein Faß grösser, als ein Cylinder von gleicher Länge, wenn seine Grundfläche der Grundfläche des Faßbodens gleich wäre — und kleiner, als ein Cylinder, der den mittlern Durchschnitt, oder Bauchschnitt, zur Grundfläche hätte. Der mittlere Cylinder, welcher dem Fasse an Inhalt nahe kömmt, wird gefunden, wenn man die Kreisflächen des Bodens und Bauchschnitts ausrechnet, addiret, davon das Mittel nimmt, und dies mit der Länge des Fasses multipliciret.

Eigentlich sind die gewöhnlichen Fässer etwas größer. Um den Fehler zu verbessern hat Herr Professor Busse folgende leichte Regel vorgeschlagen:

1) Rechne den mittlern Cylinder auf die so eben beschriebene Art aus. — 2) Nehme den Unterschied zwischen Bauchdurchmesser und Bodendurchmesser, multiplicire damit den mittlern Cylinder, und dividire, was herauskommt, mit dem dreifachen Bauchdurchmesser. — 3) Die so gefundene Zahl addire zu dem mittleren Cylinder: so hat man hinlänglich genau den Inhalt des Fasses.

Exempel, (aus Herrn Vieths Mathematik für Bürgerschulen). Das große Faß auf dem Königstein in Sachsen hat folgende Abmessungen:

Länge	—	—	34′
Bauchdurchmesser	—	—	24′
Bodendurchmesser	—	—	22′

Also:

Also: Peripherie am Bauche — 78 2/7'
Peripherie am Boden — 69 1/7'
Ferner: Bauchschnitt — 452 4/7 Quad. Sch.
Bodenschnitt — 380 (ohngefähr) —
452
832 die Hälfte ist 416
416
mit der Länge multipl. 34
1664
1248
Mittlerer Cylinder = 14144 Cubikschuhe.
Dies mult. mit dem Unterschied des Durchm. 2
div. mit d. 3fach. Bauchdurchm. 72) 28288|392 8/9 Cubikschuhe.
216
668
648
208
144
64
14144
392 8/9
Inh. d Fass. = 14536 8/9 Cub. Schuhe.

299. **Aufgabe.** Eines irregulären Körpers Inhalt zu finden, wenn er nicht groß ist.

Auflösung. Lege ihn in einen Kasten (fig. 196) der die Gestalt eines Parallelopipedums hat. Uebergieße ihn mit Wasser, oder wenn er dieses nicht vertra-

vertragen kann, mit feinen Sand. Merke die Höhe an, wo das Wasser oder der Sand stehet. Nehme hierauf den Körper heraus, und merke nun die Höhe ac. Weil nun der Inhalt des Körpers dem Parallelopipedum bcdmno gleich ist: so berechne dieses nach §. 253.

Z. B. Es sey bc = 8′, cd = 4′, bm = 2′, so ist der Körper = 64 Cubikschuhe.

300. Wenn man die geometrischen Körper aus Papier oder Pappe zusammenlegen will: so entwirft man zuerst Zeichnungen, welche die Netze derselben heißen, aus denen man sie hernach zusammenlegt. Die punktirten Linien in den Figuren bedeuten die Ränder, welche man bey dem Ausschneiden stehen läßt, um die Körper hernach bequem zusammen bringen zu können.

1) Fig. 196 ist das Netz des Tetraedrums. Zeichne einen gleichseitigen Tr abc, theile die Seiten in def, ziehe die Linien de, ef, fd.
2) Fig. 197 ist das Netz des Oktaedrums. Zeichne zwey dergleichen Tr acb und dlg, so, daß sie mit dc zusammen liegen.
3) Fig. 198 ist das Netz des Würfels. Zeichne 6 gleiche Quadrate, 4 in eine Reihe, und noch zwei auf beiden Seiten des 2ten Quadrats ilkm.
4) Fig. 199. ist das Netz des Dodekaedrums. Zeichne ein reguläres Fünfeck abcde, lege das Lineal an d und b, und ziehe bl = ab. lege es hernach an d und a, und ziehe ag = ab. Mache auch gq und lq = ab. Nun

sind die Fünfecke abcde und ablqg gleich. Auf eben die Art zeichne die andern Fünfecke, und an fk hänge eine gleiche Figur, die aus Fünfecken besteht, daran.

5) Fig. 200 ist das Netz des Ikosaedrums. Ziehe eine Linie ad, theile sie in 5 gleiche Theile, und zeichne auf jede Seite der Linie ad 5 gleichseitige Tr. Ziehe die Linie ce, und zeichne darauf auch 5 gleichseitige Triangel.

6) Fig. 201 ist das Netz des Parallelopipedums. Zeichne ein Rechteck efih. Verlängere die 4 Linien auf beyden Seiten. Zeichne auf die 4 Seiten noch 4 Rechtecke, so daß die gegenüberstehenden gleich sind, und daß die Linien ae, el, mf, fg, ik, io, nh, hb gleich sind. An gk zeichne noch ein Rechteck gcdk = fihe.

7) Fig. 202 ist das Netz eines dreyeckichten Prisma's. Zeichne drey länglichte Rechtecke nebeneinander. An das mittelste setze oben und unten gleichseitige Triangel.

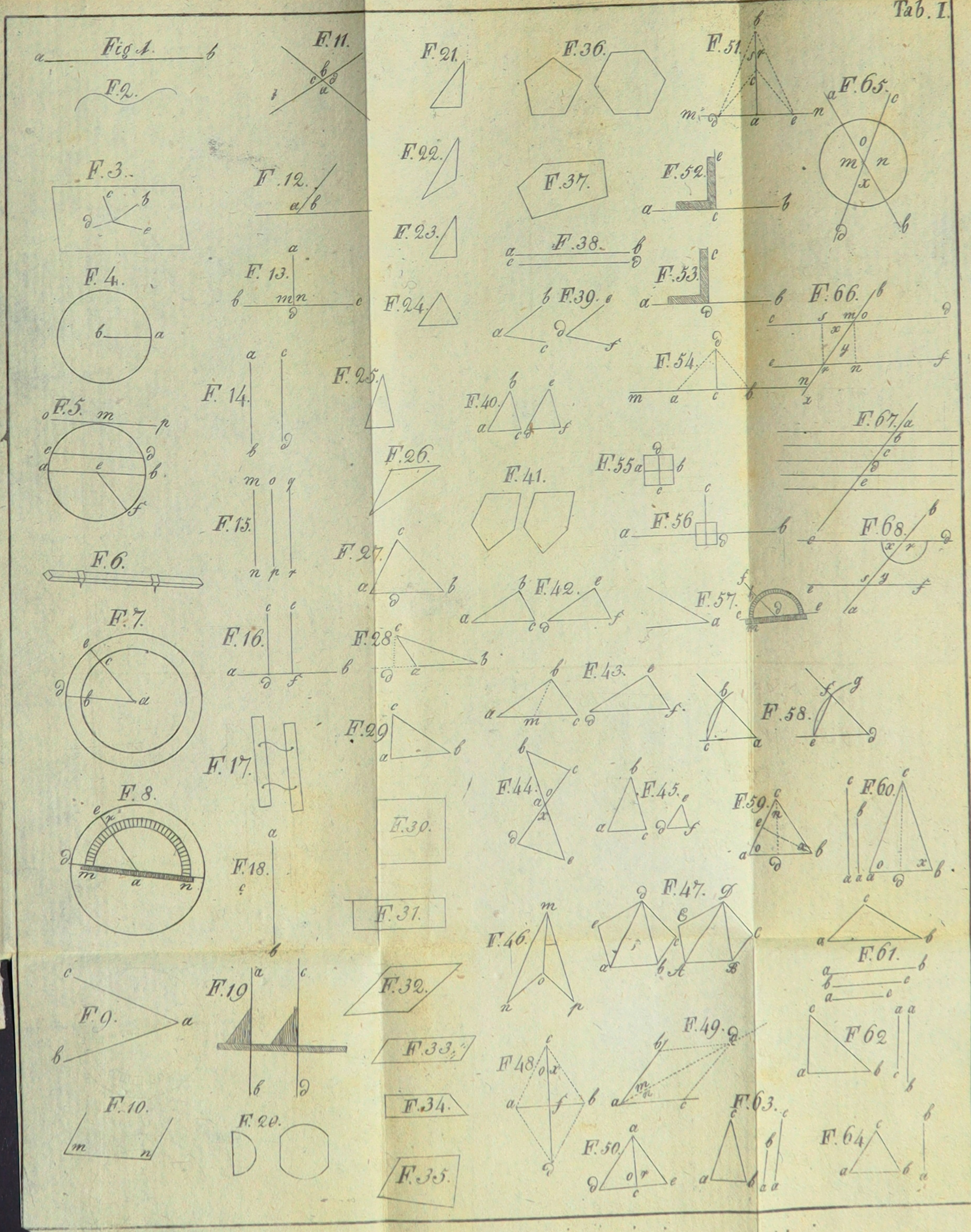
8) Fig. 203 ist das Netz der Pyramide. Zeichne 3 gleichschenkelichte Tr nebeneinander, so daß ihre Spitzen in a zusammen fallen. An den mittelsten setze unten einen gleichseitigen Triangel.

9) Fig. 204 ist das Netz des Cylinders. Zeichne ein länglichtes Rechteck abcd, und oben an a und b zwey gleich große Cirkel, deren Peripherie = bc.

Inhalt.

Vier

Tab. I.



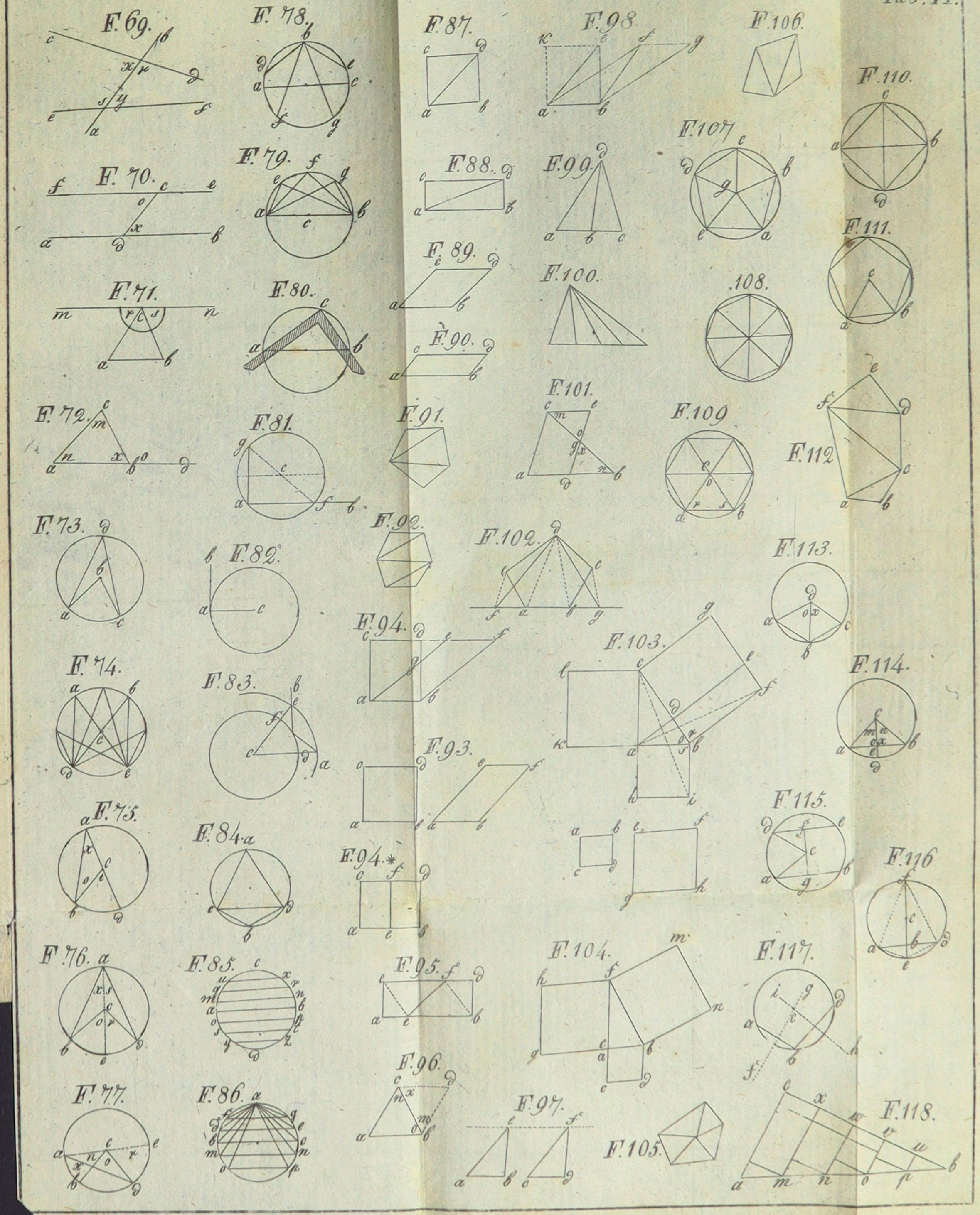
Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0177
DFG

Landesbibliothek
Mecklenburg-Vorpommern
Günther Uecker

https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1772388769/phys_0178

DFG

Tab. II.

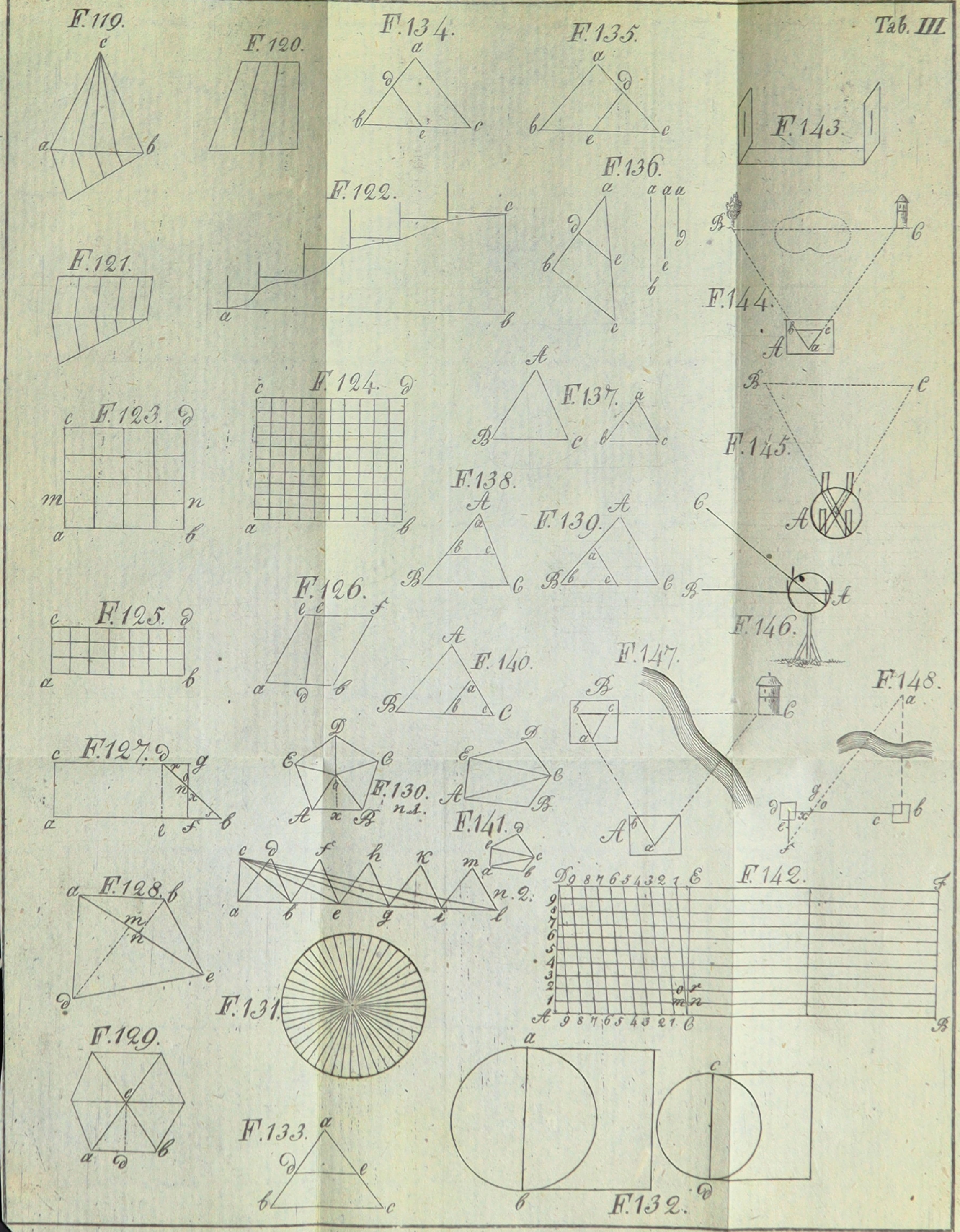


Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0179
DFG

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0180
DFG

zu Schells Lehrbuch

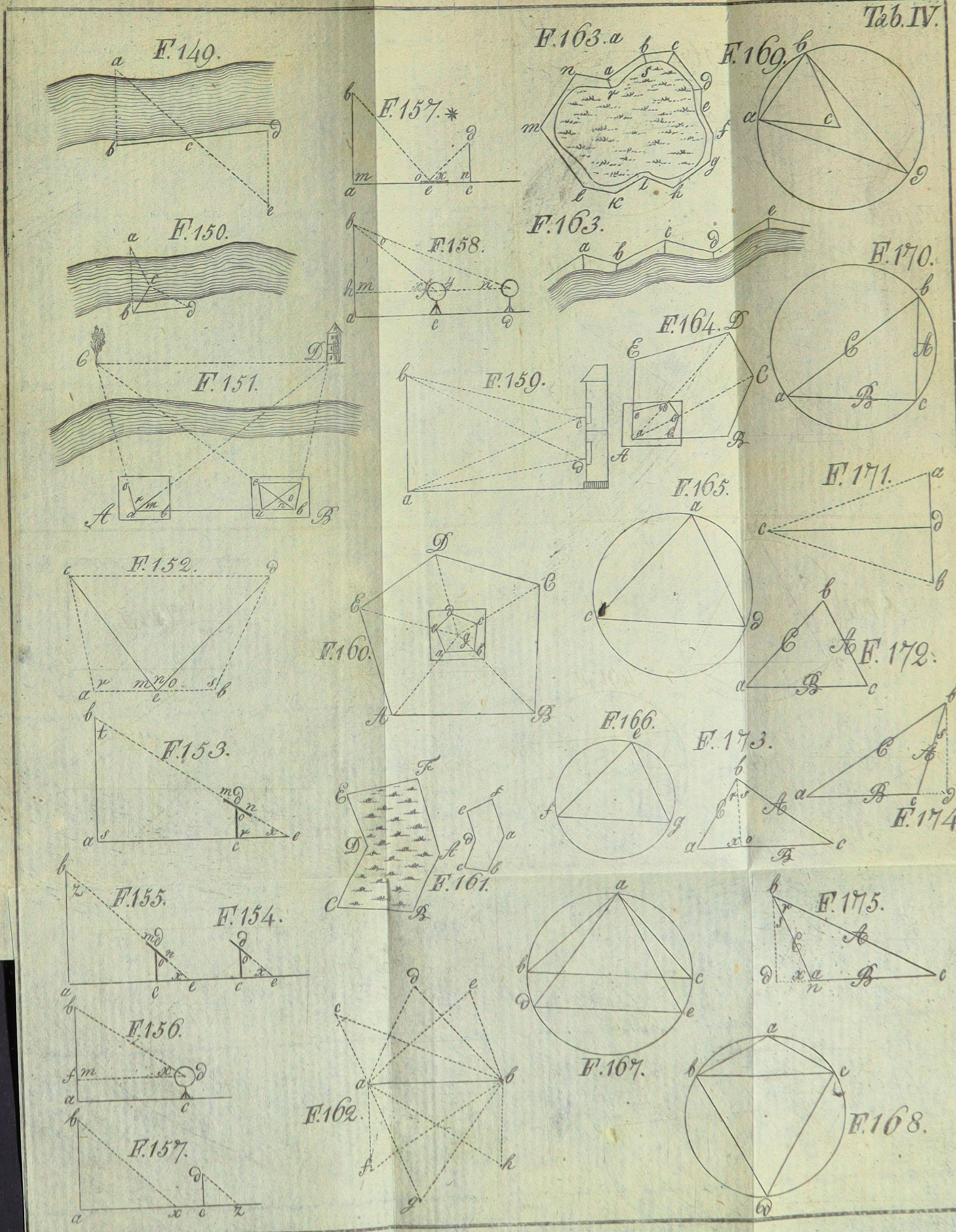
Tab. III



https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0181
Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
DFG

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de /rosdok/ppn1772388769/phys_0182
DFG

zu Snells Lehrbuch



Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0183
DFG

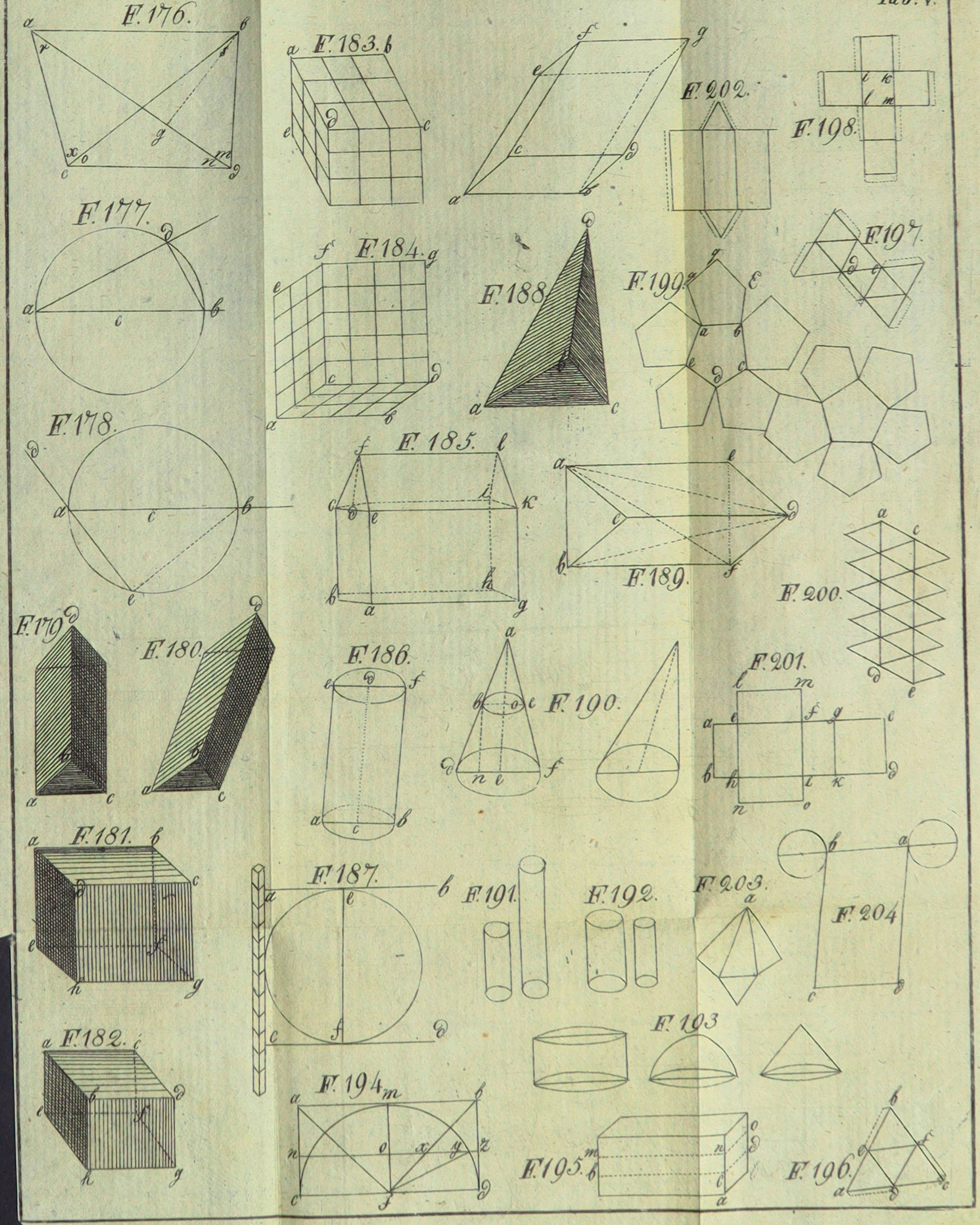
Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker

https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1772388769/phys_0184

DFG

zu Snells Lehrbuch.

Tab. V.



Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0185
DFG

Landesbibliothek
Mecklenburg-Vorpommern
Günther Uecker

https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1772388769/phys_0186

DFG

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0187
DFG

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0188
DFG

LBMV Schwerin
000 327 999
33

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0189
DFG

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1772388769/phys_0190
DFG

ſxe ſenkrecht
ſenkrechter;
ſchiefer Ke-

Kegels kann
1) Aus ei-
punkte eines
ie deſſelben,
ie beſchreibt
nzt. — 2)
a c d um die
der Punkt d
fläche, und
begrenzende,

Grundfläche
kel. Durch
kleiner Kegel
tück zwiſchen
oder abge-

(fig. 190)
nd dem In-
bey der Py-
e Pyramide
viele Ecken

el und einen
Höhe, und
eine