Klaus Markwardt

Eine teilweise geordnete Halbstruktur als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer Analysis : Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor eines Wissenschaftszweiges (doctor rerum naturalium)

Rostock, 1981

http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1817383205

Eine teilweise geordnete Halbstruktur als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer Analysis

Inaugural-Dissertation zur Erlangung
des akademischen Grades

Doktor eines Wissenschaftszweiges
(doctor rerum naturalium)

vorgelegt der Fakultät für Mathematik, Physik
und technische Wissenschaften
des Wissenschaftlichen Rates der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

von
Diplommathematiker Klaus Markwardt
geb. am : 02. 01. 1949 in Parchim

Rostock,
Dezember 1981

Dekan: Prof. Dr. sc. nat. Ulbricht

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. L. Berg

Gutachter: Prof. Dr. sc. nat. K. Beyer

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil S. Brehmer

Tag der Verleihung: 1.10.82

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit geht es um eine Verallgemeinerung von gewissen Aussagen der klassischen Analysis mit Hilfe einer (teilweise) geordneten Halbstruktur. Die Untersuchungen in der vorgelegten "Analysis" sind durch starke algebraische Akzente, einen relativ hohen Abstraktionsgrad und im ersten Teil durch eine elementare Beweisführung gekennzeichnet.
In /3/ wurde die Schaffung einer Theorie gerechtfertigt, die einerseits wesentliche Hauptergebnisse der klassischen Analysis direkt mitliefert und andererseits eine möglichst breite Anwendung auf wichtige funktionalanalytische Beispiele zuläßt. Dieser von L. Berg entwickelte Entwurf zu einer Verbindung zwischen der klassischen Analysis und der Funktionalanalysis stellte den Ausgangspunkt für die hier eingereichte Dissertationsschrift dar. Ursprünglich sollte eine weitgehende Realisierung durch die Anfertigung zweier aufeinander abgestimmter Dissertationen erfolgen. Um verstärkt in die Tiefe und in's Detail vordringen zu können, war die Beschränkung auf gewisse ausgewählte Problemkreise erforderlich.

Die Betrachtungen im ersten Teil der Arbeit sind so zugänglich, daß man sie an den Anfang einer Analysis stellen könnte, wo es z.B. um die Vervollständigung der rationalen Zahlen, die Bildung von Grenzen in Mengensystemen, Zahlenbereichen und Funktionenräumen sowie die Konvergenz von Mengen-, Zahlen-, Vektor- und Funktionenfolgen geht. Darauf aufbauend werden Grundzüge einer abstrakten Maß- und Integrationstheorie entwickelt. Hierbei liegen die Definitions- und Wertebereiche in gewissen (teilweise) geordneten Halbgruppen. Berücksichtigt man die Kompliziertheit anderer sicherlich tiefliegender Arbeiten (vgl./36, S. 223 ff./), so kann diesbezüglich von einer allgemeinen und leicht zugänglichen Fortsetzungstheorie gesprochen werden, deren Anwendung auf die üblichen Spezialfälle kaum Schwierigkeiten bereitet.

Die ersten drei Abschnitte tragen einführenden Charakter. In ihnen werden einige Definitionen zitiert bzw. modifiziert und dem Anliegen der Arbeit angepaßt. Als Vervollständigungsprinzip wird abweichend von /3/ eine methodisch aufbereitete Modifikation der Dedekind- Mac Neilleschen Vervollständigung (vgl. /14/, /19/ oder /38/) benutzt. Der hier definierte L-Raum unterscheidet sich von dem in /3/ benutzten Raumbegriff im wesentlichen dadurch, daß in geeigneter Weise eine Subtraktion eingeführt wird. Aus dem L-Raum gehen der (teilweise) geordnete Vektorraum, der positive Kegel des Rieszschen Raumes und der Boolesche Ring durch unmittelbare Spezialisierung hervor. Der um $-\infty$ und $+\infty$ erweiterte Bereich der reellen Zahlen, wichtige Mengensysteme und Funktionenräume sowie der positive C-Verband (vgl. /7/) lassen sich problemlos als spezielle L-Räume deuten. Die in den Abschnitten vier und fünf bewiesenen Struktureigenschaften des L-Raumes gestatten eine sinnvolle Auslegung bezüglich der verschiedenen Spezialfälle. Im sechsten Abschnitt wird dann gezeigt, daß sich jeder L-Raum grenztreu in eine entsprechende vollständige Struktur einbetten läßt. Die Dedekindvervollständigung der Booleschen Algebra (vgl. /37/) und die des archimedischen Vektorraumes ergeben sich hieraus als unmittelbare Spezialfälle. Damit entsteht z.B. eine Verallgemeinerung der Aussage, daß jeder archimedische Rieszsche Raum sich in eine entsprechende vollständige Struktur grenztreu einbetten läßt (vgl. /19/ oder /38/). Aus der im L-Raum eingeführten τ-Konvergenz, gehen z.B. die mengenalgebraische, die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz sowie in Booleschen Algebren und Rieszschen Räumen erklärte Konvergenzbegriffe hervor. Der Zusammenhang mit der Konvergenz in einem speziell konstruierten pseudometrischen Raum wird kurz herausgearbeitet.

Zum Schwerpunkt wurden die Betrachtungen bezüglich einer allgemeinen Maß- und Integrationstheorie, wobei es insbesondere um die Fortsetzung damit zusammenhängender "Funktionale" geht. Die hier definierte ε-Regularität dient der Übertragung epsilontischer Schlüsse. Sind gewisse Vollständigkeitsbedingungen erfüllt, so können bei ε-regulärem Bildbereich Fortsetzungen mit erforderlichen Abgeschlossenheitseigenschaften konstruiert werden. Die Begriffe Inhalt und Maß wurden hier so weit gefaßt, daß neben der üblichen Deutung, auch bestimmte im positiven Kegel eines Rieszschen Raumes erklärte und mit einem allgemeinen Integralbegriff zusammenhängende "Funktionale" als Spezialfälle ausgelegt werden können. In dieser Richtung liegt auch die in /7/ veröffentlichte Arbeit von S. Brehmer. Hier wie dort spielt die Nutzung eines äußeren Maßes eine zentrale Rolle. Ausgehend von einem recht allgemeinen "Funktional" erfolgt seine Konstruktion dort bei Anwendung einer stärkeren Regularitätsvoraussetzung (dies wird durch Beispiele belegt) in einem Schritt. Die Konstruktion des hier verwendeten äußeren Maßes ist etwas aufwendiger. Sie setzt jedoch auch eine schwächere Vollständigkeitsbedingung voraus, und das äußere Maß besitzt gegenüber dem dortigen eine Abgeschlossenheitseigenschaft, die eine effektive Nutzung im Hinblick auf eine abgewandelte Meßbarkeitsdefinition gestattet. Damit kann gegenüber /7/ z.B. die Fortsetzung Boolescher Homomorphismen (vgl. /34/, /37/ und /38/) als direkter Spezialfall einbezogen werden. Der ε-reguläre L-Raum enthält insbesondere die in /24/ betrachteten normal geordneten linearen Systeme , die in /21, IV/ erklärten α-regulären Booleschen Algebren und entsprechende in /37/ und /38/ angegebene "reguläre" Strukturen als Spezialfälle, so daß dort bewiesene Fortsetzungssätze hier zum Teil durch spezielle Auslegung entstehen. Im Gegensatz zu /21/ wurde hier wie in /7/ auf allgemeine topologische Untersuchungsmethoden vollständig verzichtet, um zügig und in übersichtlicher Weise zu wesentlichen Resultaten zu gelangen. Ein großer Teil der Aussagen ließe sich unter etwas verallgemeinerten Voraussetzungen beweisen. Dies ist jedoch nicht geschehen, um bei Beschränkung auf das Wesentliche eine möglichst zugängliche Darstellung zu erreichen.

Für wertvolle Hinweise bei der Erarbeitung dieser Dissertationsschrift danke ich Herrn Prof. L. Berg.

1. Mengen, Funktionen und Verknüpfungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, einige Vereinbarungen zu treffen, auf die an späterer Stelle zurückgegriffen wird.

Die grundlegenden Begriffe der Mengenlehre und die unmittelbar mit dem Funktionsbegriff zusammenhängenden Definitionen können etwa wie in /26, S. 21-27 und 34-42/ eingeführt werden. Mit $\mathcal{F}(X,Y)$ wird in der vorliegenden Arbeit die Gesamtheit der Funktionen von X in Y gekennzeichnet. Aus dem Funktionsbegriff gehen die Begriffe Familie (z.B. Mengenfamilie), Folge und Vektor (mit n Komponenten) als Spezialfälle hervor. Ist f(x) eine Funktion und A eine Teilmenge ihres Definitionsbereiches X, so soll f(A) wie üblich durch

$$f(A) := \{y: \text{existiert } x \in A \text{ mit } y = f(x)\} \tag{1.1}$$

als das Bild von A bzgl. f erklärt werden.

Sind in einer Menge M eine oder mehrere Verknüpfungen "+", "$\vee$",... erklärt, so wird dies hier durch $M = M(+,\vee,\ldots)$ gekennzeichnet. Mit T als einer Teilmenge von M soll $T = T(\vee,\ldots)$ dann ausdrücken, daß T bzgl. der in der Klammer stehenden Verknüpfungen eine Teilstruktur (vgl./29, S. 73/) von M darstellt.

Sind A und B Teilmengen von $M = M(+)$, so kann in Übereinstimmung mit (1.1) die Vereinbarung

$$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\} \tag{1.2}$$

getroffen werden, da eine Verknüpfung als Funktion von $M \times M$ in M definiert ist.

Im Falle $M = M(+)$ wird in $\mathcal{F}(X,M)$ durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \tag{1.3}$$

ebenfalls eine Verknüpfung, die sogenannte argumentweise Verknüpfung, erklärt. Diesbezüglich wird speziell bei endlichem X auch der Ausdruck komponentenweise Verknüpfung benutzt.

Eine Menge L soll ein Operatorenbereich der Menge M genannt werden, wenn eine Funktion $\varphi: (\alpha, a) \longrightarrow \alpha a$ von $L \times M$ in M vorliegt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer äußeren (auf M erklärten) Multiplikation.
Mit $N \subset M$ bedeutet $LN \subset N$ in analoger Übereinstimmung zu (1.1) speziell, daß N bezüglich der äußeren Multiplikation in M abgeschlossen ist.
Sind X und Y Mengen mit dem Operatorenbereich L, so soll eine Funktion $f: X \longrightarrow Y$ L-homogen heißen, wenn mit $x \in X$ und $l \in L$ stets $f(lx) = lf(x)$ gilt.

2. Relationen in einer Menge M

Ist M eine nichtleere Menge, so verstehen wir unter einer Relation in M bekanntlich eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $M \times M$.
Im Falle $(x,y) \in \mathcal{R}$ schreiben wir auch $x \mathcal{R} y$ und sagen, daß x in Relation zu y steht. Für spezielle Relationen werden spezielle Symbole, wie zum Beispiel "=", "$\leq$", "$\geq$", "$\subset$" und "$\supset$" verwendet.
Als Präordnung "$\prec$" soll hier eine reflexive und transitive Relation bezeichnet werden.
Unter einer Ordnungsrelation "$\leq$" wird eine antisymmetrische Präordnung verstanden und von einer totalen Ordnung in M wird dann gesprochen, wenn zwei beliebige Elemente von M stets vergleichbar sind.
Die zu einer Ordnungsrelation "$\leq$" duale Relation "$\geq$" ist ebenfalls eine Ordnungsrelation.
Mit $Y(\leq)$ als einer beliebigen geordneten Menge wird in der Regel für $f, g \in \mathcal{F}(X,Y)$ durch

$f \leq g$ gekennzeichnet, daß $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ (2.1)

gilt. Die auf diese Weise erklärte argumentweise Ordnung, wird bei endlichem Definitionsbereich auch komponentenweise Ordnung genannt. Diesbezüglich kann keine totale Ordnung vorliegen, wenn X und Y jeweils mindestens zwei Elemente enthalten.

Zu einer beliebigen Menge X kann die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ durch "$\subset$" in der üblichen Weise geordnet werden.

Ist M eine geordnete Menge, so wird in $\mathfrak{P}(M)\setminus\{\emptyset\}$ durch

$A \lhd B$ gekennzeichnet, daß $a \leq b$ für beliebige $a \in A$ und $b \in B$ gilt. (2.2)

Durch diese transitive Relation kann die Darstellung verschiedener Beweise vereinfacht werden. Mit $x \in M$ ist $x \lhd A$[1] bzw. $A \lhd x$ beispielsweise genau dann erfüllt, wenn x eine untere bzw. eine obere Schranke von A darstellt.

Besitzen verschiedene Elemente einer Menge M bezüglich einer Fragestellung wesentliche gemeinsame Eigenschaften, so ist es oft zweckmäßig, von den übrigen Unterschieden abzusehen und sie zu identifizieren. Um derartige Identifizierungen übersichtlich und widerspruchsfrei durchzuführen, wird die Definition der Äquivalenzrelation benötigt. Hierunter verstehen wir eine symmetrische Präordnung in M. Die Vergröberung $\tilde{M}$ von M kann dann als System der Äquivalenzklassen oder als Repräsentantensystem gedeutet werden. In der Mengenlehre werden beispielsweise derartige Äquivalenzklassen in Form der Mächtigkeiten betrachtet. Bei der stufenweisen Konstruktion des Systems der rationalen Zahlen Ω aus dem Bereich der natürlichen Zahlen werden ebenfalls spezielle Äquivalenzrelationen benutzt.

Die folgende Behauptung kann leicht verifiziert werden.

In $M(\prec)$ wird durch
$a \sim b$ genau dann, wenn sowohl $a \prec b$ als auch $b \prec a$ gilt,
eine Äquivalenzrelation erklärt. Das System der Äquivalenzklassen $\tilde{M}$ bildet dabei mit
$\tilde{a} \leq \tilde{b}$ genau dann, wenn $a \prec b$ gilt,
eine geordnete Menge $\tilde{M}$.

[1] eigentlich $\{x\} \lhd A$

3. Die Dedekindvervollständigung geordneter Mengen

Ist $M(\leq)$ eine beliebige geordnete Menge, und existiert zu einer Teilmenge N von M die kleinste obere Schranke in M, so wird diese durch $\sup_M N$ gekennzeichnet. Die Definition von $\inf_M N$ erfolgt auf duale Weise. Besteht Klarheit darüber, in welcher Grundmenge die Grenzen gebildet wurden, so wird zweckmäßigerweise auf die Indizes verzichtet.

Definition 3.1. Es sei $\check{M}(\leq)$ eine beliebige geordnete Menge und M eine bezüglich der induzierten Ordnung betrachtete Teilmenge von $\check{M}$. Dann heißt M grenztreu in $\check{M}$ enthalten, wenn aus der Existenz von $\sup_M N$ stets $\sup_M N = \sup_{\check{M}} N$ und aus der von $\inf_M N$ stets $\inf_M N = \inf_{\check{M}} N$ folgt.

Definition 3.2. Eine Teilmenge M von $\check{M}(\leq)$ heißt o-dicht in $\check{M}$, wenn zu jedem $m \in \check{M}$ Teilmengen S und T von M mit $\sup_{\check{M}} S = m = \inf_{\check{M}} T$ existieren.

Ist X eine nichtleere Menge, so wird das durch die einelementigen Teilmengen von X, die leere Menge sowie deren Komplemente gebildete System beispielsweise o-dicht in der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$.

Satz 3.1. Liegt M o-dicht in $\check{M}(\leq)$, dann ist M grenztreu in $\check{M}$ enthalten.

Beweis. Aus $\sup_M N = a$ folgt, daß jede obere Schranke von N aus M auch obere Schranke von a ist und umgekehrt. Da jedes Element aus $\check{M}$ durch seine oberen Schranken aus M eindeutig bestimmt ist, folgt $\sup_{\check{M}} N = a$. Die Behauptung hinsichtlich der unteren Grenzen ergibt sich auf duale Weise.

Eine geordnete Menge heißt gerichtet, wenn in ihr jede zweielementige Teilmenge (nach oben und nach unten) beschränkt ist. Ein für die Anwendungen wichtiger Spezialfall der gerichteten Menge ist der Verband. Wie üblich wird von einem distributiven Verband gesprochen, wenn die Distributivgesetze

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad (3.1.)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad (3.2.)$$

erfüllt sind. Schon die Gültigkeit einer dieser beiden Eigenschaften ist für die Distributivität des Verbandes hinreichend (vgl./19, Ch. 1, § 3/).
Eine geordnete Menge M wird hier vollständig genannt, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge N von M eine obere Grenze in M besitzt. Bekanntlich ist dann auch jede nach unten beschränkte Teilmenge nach unten begrenzt.
Auf Schwierigkeiten, die sich bei unvollständigen Mengen ergeben, kann schon anhand des Bereiches der rationalen Zahlen hingewiesen werden. Die Vervollständigung einer beliebigen geordneten Menge ist zwar nichts Unbekanntes (vgl./14/, /16/, /19/ und /38/), das folgende Verfahren wird jedoch übersichtlicher.

Ausgehend von einer geordneten Menge M wird hier das System M' aller nach oben beschränkten Teilmengen von M betrachtet, wobei zwei Teilmengen identifiziert werden, wenn sie dieselben oberen Schranken besitzen. Setzt man für die zu P und Q gehörigen Äquivalenzklassen K(P) und K(Q) genau dann $K(P) \leq K(Q)$, wenn jede obere Schranke von Q auch eine obere Schranke von P ist, so wird M' zu einer geordneten Menge. Die derart konstruierte Struktur M' soll dann die Dedekindvervollständigung von M heißen.

Satz 3.2. Die Dedekindvervollständigung $M'(\leq)$ besitzt folgende Eigenschaften:
a) $M(\leq)$ wird nach einer entsprechenden Identifizierung zu einer Teilmenge von $M'(\leq)$ mit der induzierten Ordnung.
b) $M'(\leq)$ ist vollständig, und es gilt $\sup K(T_\alpha) = K(\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha)$, sobald $\{K(T_\alpha)\}$ in M' nach oben beschränkt ist.
c) M liegt o-dicht in $M'(\leq)$.
d) M ist grenztreu in $M'(\leq)$ enthalten.

Beweis. Da die Ordnung transitiv ist, und jedes Element obere Schranke von sich selbst ist, folgt die Gültigkeit von $x \leq y$ in M genau dann, wenn in M' die Relation $K(x) \leq K(y)$ erfüllt ist. Die Identifizierung von x mit $K(x)$ für jedes $x \in M$ liefert die erste Behauptung.

Aus $K(T_\alpha) \leq K(T)$ für alle $\alpha \in A$ folgt unmittelbar $K(T_\alpha) \leq K(\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha) \leq K(T)$ für alle $\alpha \in A$ und eine beliebige obere Schranke $K(T)$, so daß auch der zweite Teil gilt.

Aus der Definition von M' und b) folgt für jedes $K(T)$ sofort $T \subset M$ und $\sup_{M'} T = K(T)$. Mit T^0 als Menge der oberen Schranken von T aus M erhält man $K(T) \leq \inf_{M'} T^0$. Daraus, daß jede obere Schranke von T aus M auch obere Schranke von $\inf_{M'} T^0$ ist, folgt nach Definition von M' $\inf_{M'} T^0 \leq K(T)$. Damit gilt $K(T) = \inf_{M'} T^0$, so daß M o-dicht in M' liegt.

Mit c) und Satz 3.1 folgt die letzte Behauptung.

<u>Folgerung.</u> Die Dedekindvervollständigung einer gerichteten Menge ist ein vollständiger Verband.

<u>Bemerkung 3.1.</u> Ist $M^*(\leq)$ vollständig und M eine in M^* o-dichte Teilmenge, so wird die Dedekindvervollständigung M' von M ordnungsisomorph zu M^*. Dies folgt sofort aus der Definition von M'.

<u>Bemerkung 3.2.</u> Adjungiert man zu M', falls nicht vorhanden, ein größtes und ein kleinstes Element, so erhält man einen vollständigen Verband, der (bis auf Ordnungsisomorphie) mit dem in /19, Satz 32.3/ konstruierten übereinstimmt. Von einer solchen Vervollständigung soll hier jedoch nicht ausgegangen werden, da sie z.B. nicht so direkt bei der Vervollständigung der folgenden algebraischen Strukturen angewandt werden kann.

<u>Satz 3.3.</u> Ist $M(\leq)$ total geordnet, dann gilt dies auch für die Dedekindvervollständigung M'.

<u>Beweis.</u> Wegen Satz 3.2 c) folgt aus $t', s' \in M'$ und $t' \not\leq s'$ die Existenz von Elementen t und s aus M mit $t \leq t'$, $s' \leq s$ und

$t \neq s$, denn t' ist durch seine unteren und s' durch seine oberen Schranken aus M eindeutig bestimmt. Da $M(\leq)$ total geordnet ist, gilt offensichtlich $s' \leq s \leq t \leq t'$ und damit $s' \leq t'$.

Setzt man die Struktur der <u>rationalen Zahlen</u> Ω als bekannt voraus, so kann durch $R = \Omega'$ die Menge der <u>reellen Zahlen</u> definiert werden. Man erhält sofort, daß die reellen Zahlen eine total geordnete und vollständige Menge $R(\leq)$ bilden, wobei Ω unter Beibehaltung der ursprünglichen Ordnung und der ursprünglichen Grenzen o-dicht in ihr enthalten ist. Leicht überzeugt man sich an dieser Stelle davon, daß die echt positiven rationalen Zahlen o-dicht in der vollständigen Menge der echt positiven reellen liegen.

4. Definition und Struktureigenschaften des Fastmoduls

Durch Verallgemeinerung der Begriffe geordneter Modul[1] und Boolescher Ring ergibt sich folgende Definition.

Definition 4.1. Als Fastmodul $M(\leq, +, \ominus)$ soll jede geordnete Menge $M(\leq)$ bezeichnet werden, in der zwei Verknüpfungen "$+$" und "$\ominus$" erklärt sind, sowie ein Element 0 existiert, so daß für beliebige $a, b, c \in M$

$$a + b = b + a, \tag{4.1}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{4.2}$$

$$\text{und} \quad a + 0 = a \tag{4.3}$$

gilt, sowie

$$c \leq a + b \ \text{ äquivalent zu } \ c \ominus a \leq b \ \text{ ist.} \tag{4.4}$$

Bemerkung 4.1. In dem Spezialfall, daß die in (4.4) benutzte Ordnung identisch mit der Gleichheitsrelation ist, erhält man eine Definition des Moduls und damit eine gewisse Motivation der Bezeichnung Fastmodul.

Bemerkung 4.2. Liegt bezüglich "$+$" ein Modul vor und ist bezüglich einer Subtraktion "$\ominus$" die Eigenschaft (4.4) erfüllt, so stimmt diese Substraktion mit der zum Modul gehörigen überein. Dies folgt durch Anwendung von (4.4) auf $b \leq a + (b - a)$ und aus $b \leq a + (b \ominus a)$.

Beispiel 4.1. Jeder geordnete Modul wird bezüglich seiner Ordnung, Addition und Subtraktion zu einem Fastmodul.

[1] Hierunter soll ein Modul verstanden werden, indem die Ordnung mit der Addition verträglich ist.

Axiom (4.4) ist auch bezüglich der dualen Relation "$\geq$" erfüllt. Umgekehrt sieht man sofort, daß ein Fastmodul $M(\leq,+,\ominus)$ in dem (4.4) auch bezüglich der dualen Relation "$\geq$" gilt, ein geordneter Modul ist. Dieses Beispiel enthält so wichtige Spezialfälle, wie Ω, R und $\mathcal{F}(X,R)$ mit argumentweise erklärter Addition und Ordnung. Speziell mit $X = \{1,2,\dots,n\}$ bzw. mit X als Gesamtheit der natürlichen Zahlen erhält man R^n bzw. das System der reellen Zahlenfolgen. Aus der Funktionalanalysis sei als Beispiel noch die Gesamtheit der auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ erklärten beschränkten selbstadjungierten Operatoren $\mathcal{Y}(\mathcal{H})$ angeführt. Diese Menge ist wegen /19, Def. 58.1 und Satz 58.4/ in der Regel nicht verbandsgeordnet, bildet also keinen Rieszschen Raum.

<u>Beispiel 4.2.</u> Der um die uneigentlichen Zahlen $-\infty$ und $+\infty$ erweiterte Bereich der reellen Zahlen soll durch $\bar{R}$ gekennzeichnet werden. $\bar{R}$ wird bezüglich seiner üblichen Ordnung und den durch die folgenden Tafeln erklärten Verknüpfungen zu einem Fastmodul. Mit $r,s \in R$ sollen $r+s$ und $r-s$ dabei die üblichen aus R übernommenen Verknüpfungen sein.

$+$	$-\infty$	s	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
r	$-\infty$	$r+s$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\ominus$	$-\infty$	s	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
r	$+\infty$	$r-s$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Nicht trivial ist nur die Gültigkeit von (4.4), und die erkennt man durch folgende Fallunterscheidung.

1. Jede der Relationen $x \ominus y \leq -\infty$ und $x \leq -\infty + y$ ist genau dann erfüllt, wenn $x = -\infty$ oder $y = +\infty$ gilt.
2. Mit $t \in R$ ist $x \ominus y \leq t$ äquivalent zu $x \leq t + y$ falls auch $x,y \in R$ gilt. Falls jedoch $x \notin R$ oder $y \notin R$ ist, so wird $x \ominus y \leq t$ genau dann erfüllt, wenn $x \leq y$ gilt, also genau dann, wenn $x \leq t + y$ erfüllt ist.

3. Die Relationen $x \ominus y \leq +\infty$ und $x \leq +\infty + y$ sind für beliebige $x, y \in \bar{R}$ trivialerweise erfüllt.

<u>Bemerkung 4.3.</u> Jeder Fastmodul M kann in analoger Weise durch Adjunktion von ein bzw. zwei Elementen zu einem Fastmodul $\bar{M}$ erweitert werden, der ein kleinstes und ein größtes Element besitzt. Geht man wie hier vom geordneten Modul der reellen Zahlen aus, so ist die Fortsetzung dieser Struktur als Fastmodul auf $\bar{R}$ eindeutig bestimmt. Letzteres folgt aus den Beziehungen (4.8), (4.9), (5.8) und (5.9), die erst auf den folgenden Seiten bewiesen werden.

<u>Beispiel 4.3.</u> Der positive Kegel eines Rieszschen Raums wird mit seiner Addition und $a \ominus b := a - (a \wedge b)$ zu einem Fastmodul. Die hier betrachteten Verknüpfungen haben natürlich auch bezüglich des gesamten Raums einen Sinn, doch dann folgt aus $c \leq a + b$ nicht mehr $c \ominus a \leq b$, so daß (4.4) nicht erfüllt ist. Der Rieszsche Raum selbst bildet also bezüglich dieser Verknüpfungen keinen Fastmodul. Wichtige Spezialfälle sind mit $R_+ = [0, \infty)$, $\mathcal{F}(X, R_+)$ und Teilstrukturen davon gegeben (vgl./19, S. 48 - 5o/).

<u>Beispiel 4.4.</u> Die total geordnete Menge $\bar{R}_+ = [0, \infty]$ wird mit der üblichen Addition und

$$a \ominus b := \begin{cases} a - (a \wedge b) & \text{falls} \quad a < \infty \\ 0 & \text{-"-} \quad a = \infty \text{ und } b = \infty \\ \infty & \text{-"-} \quad a = \infty \text{ und } b < \infty \end{cases}$$

zu einem Fastmodul. Damit wird $\mathcal{F}(X, \bar{R}_+)$ bezüglich der argumentweisen Verknüpfungen und Ordnung ebenfalls zu einem Fastmodul. Wegen $\infty \ominus \infty = 0$ kann $\bar{R}_+(\leq, +, \ominus)$ nicht als Teilstruktur von $\bar{R}(\leq, +, \ominus)$ aufgefaßt werden. Jedes Element c aus $\bar{R}$ läßt sich jedoch in der Form $c = a \ominus b$ mit $a, b \in \bar{R}_+$ darstellen und zwar derart, daß a und b in $\bar{R}_+$ minimal sind. Völlig analog ist die Situation bezüglich $\mathcal{F}(X, \bar{R}_+)$ und $\mathcal{F}(X, \bar{R})$.

Beispiel 4.5. Jeder Boolesche Ring (vgl. /19, S. 7/) also speziell jede Boolesche Algebra wird mit $a + b := a \vee b$ und $a \ominus b$ als relativem Komplement von $a \wedge b$ bezüglich a zu einem Fastmodul. Handelt es sich bei dem Booleschen Ring um einen Mengenring, so sind dies die Vereinigung und die mengenalgebraische Differenz.

Beispiel 4.6. In /7/ wird auf der Grundlage des Begriffs C-Verband eine allgemeine Maß- und Integrationstheorie aufgebaut, wobei die Beschränkung der Untersuchungen auf positive C-Verbände gerechtfertigt wird. Da jeder Rieszsche Raum mit seiner Addition und $a \setminus b := a - (a \wedge b)$ ein C-Verband ist (vgl. /7, Def. 1 und 2/), bildet wegen der Bemerkung in Beispiel 4.3 ein C-Verband im allgemeinen keinen Fastmodul. Für jeden positiven C-Verband trifft dies jedoch zu, wie im folgenden Satz gezeigt wird.

Satz 4.1. Jeder positive C-Verband M ist ein Fastmodul $M(\leq, +, \setminus)$.

Beweis. Aus $c \setminus a \leq b$ folgt
$c = (a \wedge c) + (c \setminus a) \leq a + (c \setminus a) \leq a + b$.
Umgekehrt hat $c \leq a + b$ wegen /7, S. 24, (III) u. S. 28, (8)/
$c = c \wedge (a + c) \wedge (a + b) = [(b \wedge c) + (c \setminus b)] \wedge [a + (b \wedge c)] =$
$(b \wedge c) + [(c \setminus b) \wedge a]$ zur Folge, was wegen /7, S. 27, (7)/
$c \setminus b \leq (c \setminus b) \wedge a$ also $c \setminus b \leq a$ bedeutet.

Bemerkung 4.4. Mit Beispiel 4.2 liegt ein verbandsgeordneter Fastmodul vor, der kein C-Verband ist, denn $(a \wedge b) + x = b$ besitzt im Falle $a = -\infty$ und $-\infty < b < +\infty$ keine Lösung.

Satz 4.2. In jedem Fastmodul gilt stets

$$a \ominus a \leq 0, \tag{4.5}$$
$$(a + c) \ominus c \leq a \leq (a \ominus c) + c \tag{4.6}$$
und
$$a \ominus 0 = a. \tag{4.7}$$

Beweis. Die Ungleichungen (4.5) und (4.6) folgen unmittelbar aus (4.3) und (4.4). Aus (4.3) und (4.6) erhält man mit $c = 0$ sofort (4.7).

Satz 4.3. In jedem Fastmodul M folgt aus

$$a \leq b \text{ und } c \leq d \quad \text{stets} \quad a + c \leq b + d \tag{4.8}$$

$$\text{und} \quad a \ominus d \leq b \ominus c . \tag{4.9}$$

Außerdem sind für beliebige $a, b, c \in M$ die Relationen

$$(a + b) \ominus (c + d) \leq (a \ominus c) + (b \ominus d), \tag{4.10}$$

$$a \ominus d \leq (a \ominus c) + (c \ominus d) \tag{4.11}$$

und

$$a \ominus (c + d) = (a \ominus c) \ominus d \tag{4.12}$$

erfüllt.

Beweis. Aus (4.6) und $a \leq b$ folgt
$(a + c) \ominus c \leq a \leq b$, so daß mit (4.4) und (4.1) die Gültigkeit von (4.8) bewiesen ist. Wegen (4.4), (4.6) und (4.8) folgt (4.9) jetzt aus
$a \leq b \leq (b \ominus c) + c \leq (b \ominus c) + d$. Mit (4.6) und (4.8) bekommen wir $a + b \leq [(a \ominus c) + c] + [(b \ominus d) + d]$, woraus mit (4.1), (4.2) und (4.4) sofort (4.10) folgt.
Wegen (4.6) und (4.8) gilt
$a \leq (a \ominus c) + c \leq (a \ominus c) + (c \ominus d) + d$ und damit (4.11).
Aus $a \leq (a \ominus c) + c \leq [(a \ominus c) \ominus d] + d + c$ folgt
$a \ominus (c + d) \leq (a \ominus c) \ominus d$.
Wegen $a \leq [a \ominus (c + d)] + (c + d)$ folgt
$(a \ominus c) \leq [a \ominus (c + d)] + d$ und daraus
$(a \ominus c) \ominus d \leq a \ominus (c + d)$, womit auch (4.12) gezeigt wäre.

Ist M ein beliebiger Fastmodul, so soll unter M_+ die Gesamtheit der Elemente m aus M mit $0 \leq m$ verstanden werden. Im Falle $M = M_+$ wird M ein positiver Fastmodul genannt.

5. Der L-Raum und seine grundlegenden Eigenschaften

Die weitere Untersuchung des Fastmoduls soll mit einer Spezialisierung dieser Struktur verbunden werden.

Definition 5.1. Eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe L sei ein Operatorenbereich des Fastmoduls M. Dann heißt M ein L-Raum, wenn für das Einselement 1 von L, beliebige $\alpha, \beta \in L$ und beliebige $a \in M$ die Gleichungen

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a \tag{5.1}$$
$$1 a = a \tag{5.2}$$

gelten und

aus $a \leq b$ stets $\alpha a \leq \alpha b$ folgt. (5.3)

Bemerkung 5.1. Jeder Fastmodul M wird mit $L = \{I\}$, wobei I den auf M erklärten Einheitsoperator darstellt, zu einem L-Raum. Damit kann jeder Fastmodul als L-Raum aufgefaßt werden.

Ein geordneter linearer Raum, in dem die üblichen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind (vgl./19, S. 48/), soll hier kurz ein Vektorraum genannt werden.

Bemerkung 5.2. Es liegt auf der Hand, daß der Vektorraum und der positive Kegel jedes Rieszschen Raumes mit der auf $L = R_+ \setminus \{0\}$ eingeschränkten skalaren Multiplikation zu L-Räumen werden.

Bemerkung 5.3. Die in den Beispielen 4.2 und 4.4 erklärten Fastmoduln $\bar{R}_+$, $\mathcal{F}(X,\bar{R}_+)$, $\bar{R}$ und $\mathcal{F}(X,\bar{R})$ werden mit $L = R_+ \setminus \{0\}$ und der durch $\alpha(+\infty) := +\infty$ bzw. $\alpha(-\infty) := -\infty$ fortgesetzten skalaren Multiplikation zu L-Räumen.

<u>Bemerkung 5.4.</u> Die Fastmoduln R_+ und $\bar{R}_+$ werden mit $L = R_+ \setminus \{0\}$ und der durch $\alpha r := r^\alpha$ ($\infty^\alpha = \infty$) erklärten äußeren Multiplikation zu L-Räumen. Entsprechendes gilt für $\mathcal{F}(X, R_+)$ und $\mathcal{F}(X, \bar{R}_+)$.

<u>Bemerkung 5.5.</u> Wegen Satz 4.1 wird der in /7, S. 41/ erklärte homogene (positive) C-Verband mit $L = R_+ \setminus \{0\}$ zu einem speziellen L-Raum.

Bei beliebigem L-Raum M und der Dedekindvervollständigung M' von M(≤) gilt das folgende Lemma.

<u>Lemma.</u> Sind A_i, B_i und C_i $(i = 1,2)$ Teilmengen des L-Raumes M, für die jeweils

$\inf_{M'} A_1 = \inf_{M'} A_2$, $\inf_{M'} B_1 = \inf_{M'} B_2$ und
$\sup_{M'} C_1 = \sup_{M'} C_2$

gilt, so folgt stets

$$\inf_{M'}(A_1 + B_1) = \inf_{M'}(A_2 + B_2) \tag{5.4}$$

$$\sup_{M'}(C_1 \ominus A_1) = \sup_{M'}(C_2 \ominus A_2) \tag{5.5}$$

$$\inf_{M'}(\alpha A_1) = \inf_{M'}(\alpha A_2) \tag{5.6}$$

und
$$\sup_{M'}(\alpha C_1) = \sup_{M'}(\alpha C_2) , \tag{5.7}$$

wobei diese Grenzen dann ebenfalls existieren.

<u>Beweis.</u> Da M c-dicht in M' liegt existieren Elemente a, b und c aus M, so daß mit der in (2.2) erklärten Relation $a \lhd A_i$, $b \lhd B_i$ und $C_i \lhd c$ gilt.
Aus $a + b \lhd A_i + B_i$, $C_i \ominus A_i \lhd c \ominus a$, $\alpha a \lhd \alpha A_i$ und $\alpha C_i \lhd \alpha c$ folgt dann wegen der Vollständigkeit von M die Existenz der in (5.4) bis (5.7) angeführten Grenzen.
Mit $x \in M$ gilt $x \lhd A_1 + B_1$ genau dann, wenn $x \ominus A_1 \lhd \inf B_1$ erfüllt ist. Wegen $\inf B_1 = \inf B_2$ besitzen $A_1 + B_1$ und $A_1 + B_2$ also dieselben unteren Schranken aus M, woraus über $\inf(A_1 + B_1) = \inf(A_1 + B_2)$

auf (5.4) geschlossen werden kann.
Mit $x \in M$ gilt $C_1 \ominus A_1 \lhd x$ genau dann, wenn in M' $\sup C_1 \leqq \inf(A_1 + x)$ erfüllt ist. Wegen (5.4) erhält man speziell $\inf(A_1 + x) = \inf(A_2 + x)$, so daß $C_1 \ominus A_1$ und $C_2 \ominus A_2$ dieselben oberen Schranken aus M besitzen, womit (5.5) gezeigt wäre.
Da mit $x \in M$ aus $\inf A_1 \leqq \inf A_2$ und $x \lhd \alpha A_1$ über $\alpha^{-1} x \leqq \inf A_1 \leq \inf A_2$ stets $x \lhd \alpha A_2$ folgt, gilt $\inf \alpha A_1 \leq \inf \alpha A_2$. Über die Vertauschung der Indices entsteht (5.6). Dualerweise erhält man (5.7).

Folgerung. Aus $A_i \subset M$ $(i = 1,2)$ und $\inf_{M'} A_1 \leqq \inf_{M'} A_2$ folgt stets $\inf_{M'}(\alpha A_1) \leqq \inf_{M'}(\alpha A_2)$.

Da M unter Beibehaltung der Grenzen in M' eingebettet ist, entsteht der nächste Satz als unmittelbarer Spezialfall des letzten Lemmas.

Satz 5.1. In jedem L-Raum M gilt

$$\inf A + \inf B = \inf(A + B), \tag{5.8}$$

$$\sup C \ominus \inf A = \sup(C \ominus A), \tag{5.9}$$

$$a + (b_1 \wedge b_2) = (a + b_1) \wedge (a + b_2), \tag{5.10}$$

$$c \ominus (a_1 \wedge a_2) = (c \ominus a_1) \vee (c \ominus a_2), \tag{5.11}$$

$$(c_1 \vee c_2) \ominus a = (c_1 \ominus a) \vee (c_2 \ominus a), \tag{5.12}$$

$$\alpha \inf A = \inf(\alpha A) \tag{5.13}$$

und

$$\alpha \sup C = \sup(\alpha C), \tag{5.14}$$

sobald die Grenzen auf den linken Seiten in $M(\leqq)$ existieren.

Folgerung 1. In jedem Vektorraum sind die Gleichungen (5.8) bis (5.12) und die dazu dualen Gleichungen erfüllt, sobald ihre linken Seiten existieren. Für reelles $\alpha > 0$ gelten die Gleichungen (5.13) und (5.14).

Beweis. Die Eigenschaft (4.4) ist hier sowohl bezüglich "$\leq$" als auch bezüglich der dazu dualen Relation erfüllt.

Folgerung 2. In jedem Booleschen Ring gilt $\inf A \vee \inf B = \inf(A \vee B)$, sobald die links stehenden Grenzen existieren.

Bemerkung 5.6. In einer Booleschen Algebra erhält man hieraus durch Anwendung des dualen Isomorphismus $\varphi: a \longrightarrow \bar{a}$ sofort $\sup A \wedge \sup B = \sup(A \wedge B)$, damit gilt diese Gleichung auch in jedem Booleschen Ring.

Satz 5.2. In jedem Fastmodul folgt aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ stets $a \vee b \leq a + b$, falls $a \vee b$ existiert.

Beweis. Wegen (4.9) und (4.7) gilt $a \ominus b \leq a$. Hieraus folgt mit (5.12) und (4.5) $(a \vee b) \ominus b = (a \ominus b) \vee (b \ominus b)$, also gilt wegen $b \ominus b \leq a$ die Relation $(a \vee b) \ominus b \leq a$. Letzteres ist äquivalent zur Behauptung.

Satz 5.3. In jedem positiven und verbandsgeordneten Fastmodul $M(\leq, +, \ominus)$ gelten die Relationen

$$a \ominus b = a \ominus (a \wedge b), \tag{5.15}$$

$$(a \ominus b) + (a \wedge b) \geq a \tag{5.16}$$

und $$(a \wedge b) + [(a \ominus b) \wedge c] \geq a \wedge (b + c). \tag{5.17}$$

Beweis. Mit 0 als kleinstem Element in M folgt aus (5.11) und (4.5) $a \ominus (a \wedge b) = (a \ominus a) \vee (a \ominus b) = a \ominus b$, also gilt (5.15). Aus (5.15) folgt mit $c = a \wedge b$ und (4.6) die Ungleichung (5.16). Wegen (5.10), (5.16) und $M = M_+$ folgt

$(a \wedge b) + [(a \ominus b) \wedge c] \geq a \wedge [(a \wedge b) + c] \geq a \wedge (a + c) \wedge (b + c)$, also gilt (5.17).

Folgerung. Falls die Gleichung $x + (a \wedge b) = a$ unter den Bedingungen von Satz 5.3 stets lösbar ist, so kann (5.16) zu $(a \ominus b) + (a \wedge b) = a$ verschärft werden, wobei $(a \ominus b)$ die kleinste Lösung dieser Art darstellt. M wird dann zu einem positiven O-Verband.

Beweis. Aus $x + (a \wedge b) = a$ folgt wegen (4.4) und (5.15) $x \geq a \ominus b$, woraus $(a \ominus b) + (a \wedge b) \leq a$ entsteht.

In Beispiel 4.1 wurde eine Bedingung angegeben, unter der ein Fastmodul zu einem geordneten Modul wurde. Jetzt geht es um etwas Derartiges bezüglich des Booleschen Ringes.

Satz 5.4. Falls in dem Fastmodul M für beliebige $a, b \in M$ die Grenze $a \wedge b$ existiert und stets $(a \ominus b) \wedge b = 0$ gilt, so ist M ein Boolescher Ring mit $a + b = a \vee b$ und $a \ominus b$ als relativem Komplement von $a \wedge b$ bezüglich a.

Beweis. Aus $a \ominus 0 = a$ und der Voraussetzung folgt $a \wedge 0 = (a \ominus 0) \wedge 0 = 0$, also gilt stets $a \geq 0$. Mit (5.10), (4.6) und $[(a + a) \ominus a] \wedge a = 0$ für alle a aus M folgt $a = \{a \wedge [(a + a) \ominus a]\} + a = (a + a) \wedge \{[(a + a) \ominus a] + a\} = a + a$. Aus $a_i \in M$ und $a \geq a_i$ $(i = 1,2)$ folgt jetzt $a \geq a + a \geq a_1 + a_2 \geq a_i$, also gilt $a_1 + a_2 = a_1 \vee a_2$. Wegen (5.10) ist der Verband distributiv, und wegen $M = M_+$ geht (5.16) jetzt in $(a \ominus b) \vee (a \wedge b) = a$ über.

Satz 5.5. Ist in einem L-Raum M für beliebige $l \in L$ und beliebige $a, b \in M$ die Gleichung $l(a + b) = la + lb$ erfüllt, so trifft dies auch auf $l(a \ominus b) = la \ominus lb$ zu.

Beweis. Aus $(a \ominus b) + b \geq a$ folgt mit der vorausgesetzten Additivität $l(a \ominus b) + lb \geq la$, woraus $l(a \ominus b) \geq la \ominus lb$ entsteht.
Wegen $l^{-1} \in L$ gilt $l^{-1}(c \ominus d) \geq l^{-1}c \ominus l^{-1}d$ entsprechend, so daß mit $c = la$ und $d = lb$ die behauptete Subtraktivität folgt.

6. Die Vervollständigung von L-Räumen

In Satz 3.2 wurde gezeigt, daß jede geordnete Menge M als o-dichte Teilstruktur einer vollständigen Menge M' aufgefaßt werden kann. Jetzt geht es darum, L-Räume, geordnete Moduln und Vektorräume in entsprechende vollständige Strukturen einzubetten. Dabei wird ein geordneter Modul M archimedisch genannt, wenn in ihm aus $0 \leq a$ und $nx \leq a$ für alle natürlichen n stets $x \leq 0$ folgt. In einem Rieszschen Raum ist diese Definition der Archimedizität zu der ansonsten üblichen (vgl. /38, Def. III. 10.1/) äquivalent.

Satz 6.1. Jeder L-Raum M kann in einen vollständigen L-Raum M' eingebettet werden, wobei M o-dicht in M' liegt. Dabei bleiben die additiven Operatoren von L additiv.
Beweis. Zu beliebigen Elementen a', b' und c' der Dedekindvervollständigung M' existieren Teilmengen A, B, C und D von M, so daß $a' = \inf A$, $b' = \inf B$ und $\sup C = c' = \inf D$ gilt. Das Lemma des vorigen Abschnitts macht die Definitionen

$$a' + b' := \inf(A + B), \tag{6.1}$$

$$c' \ominus a' := \sup(C \ominus A) \tag{6.2}$$

und

$$\alpha a' := \inf \alpha A \tag{6.3}$$

möglich, denn die rechten Seiten sind durch a', b' und c' eindeutig bestimmt. Die Kommutativität der so erklärten Addition folgt aus $\inf(A + B) = \inf(B + A)$, ihre Assoziativität aus $\inf\{(A + B) + D\} = \inf\{A + (B + D)\}$ und wegen $\inf(A + 0) = \inf A$ bleibt 0 das Nullelement. Die Beziehung $c' \leq a' + b'$ entspricht hier der Relation $C \lhd A + B$. Dies ist äquivalent zu $C \ominus A \lhd B$, also äquivalent zu $\sup(C \ominus A) \leq \inf B$. Wegen (6.2) entspricht dies $c' \ominus a' \leq b'$, womit (4.4) gezeigt wäre. Bezüglich der fortgesetzten Operatormultiplikation wird (5.2) trivialerweise übertragen. Wegen $\inf \alpha(\beta A) = \inf(\alpha\beta) A$ gilt (5.1), und aus der Folgerung des schon zitierten Lemmas geht (5.3) hervor.

Die letzte Behauptung erhält man sofort aus
$\inf \alpha(A + B) = \inf(\alpha A + \alpha B)$.

<u>Satz 6.2.</u> Ist $M(\leq, +)$ in Satz 6.1 ein archimedischer Modul, so wird $M'(\leq, +)$ dort ein vollständiger Modul. Bei gerichtetem M entsteht insbesondere ein verbandsgeordneter Modul.

<u>Beweis.</u> Wegen Satz 6.1 gilt bezüglich der fortgesetzten Addition (4.1), (4.2), (4.3) und (4.8), so daß in M' nur die Lösbarkeit der Gleichung $a' + x' = 0$ für jedes $a' \in M$ gezeigt werden muß. Mit $a' = \inf A$, $A \subset M$ und U als Menge der unteren Schranken von A aus M gilt $U \lhd A$ und damit $-A \lhd -U$, so daß speziell $x' := \inf(-U)$ in M' existiert. Man erhält sofort $a' + x' = \inf(A - U) \geq 0$. Aus $r \in M$ und $r \leq a' + x'$, also $r \leq a - u$ für beliebige $a \in A$ und $u \in U$ folgt $r + u \leq a$, so daß mit einem derartigen r aus $u \in U$ stets $(u + r) \in U$ folgt. Deshalb gilt $(u + nr) \in U$ für jedes natürliche n und damit $nr \leq a - u$ mit $a - u \geq 0$. Die Archimedizität in M liefert $r \leq 0$ für jede untere Schranke von $a' + x'$ aus M, woraus die zu beweisende Gleichung $a' + x' = 0$ folgt. Der zweite Teil gilt wegen der Folgerung von Satz 3.2.

<u>Bemerkung 6.1.</u> Geht man z.B. vom System der rationalen Zahlen aus, so kann man ihre Vervollständigung als die total geordnete Menge R erhalten. Satz 6.2 liefert dann die Fortsetzung der Addition. Da $\Omega_+ \setminus \{0\}$ o-dicht in $R_+ \setminus \{0\}$ liegt, liefert Satz 6.2 auch die Fortsetzung der Multiplikation auf $R_+ \setminus \{0\}$. Wegen $\inf A(B + C) = \inf(AB + AC)$ ist diese Verknüpfung dort distributiv. Mit der gemäß den üblichen Vorzeichenregeln fortgesetzten Multiplikation liegt dann die vollständige algebraische Struktur der reellen Zahlen vor.

<u>Satz 6.3.</u> Jeder archimedische Vektorraum kann o-dicht in einen vollständigen Vektorraum eingebettet werden. Speziell bei gerichtetem M wird M' dabei ein vollständiger Rieszscher Raum.

<u>Beweis.</u> Die Anwendung von Satz 6.2 und Satz 6.1 liefert mit $L = R_+ \setminus \{0\}$, daß der Modul $M'(+)$ ein L-Raum wird, in dem die Identität $\alpha(a' + b') = \alpha a' + \alpha b'$ gilt. Die Identität $(\alpha + \beta) a' = \alpha a' + \beta a'$ gilt wegen (6.1) und (6.3) auch in M', wenn aus $A \subset M$, $a' \in M'$ und $a' = \inf A$ stets $\inf(\alpha + \beta) A = \inf(\alpha A + \beta A)$ folgt. Aus $(\alpha + \beta) A \subset \alpha A + \beta A$ entsteht sofort $\inf(\alpha + \beta) A \geq \inf(\alpha A + \beta A)$. Wegen (5.13) und (5.14) folgt aus $\sup C = \inf A$ sofort $\sup(\alpha + \beta) C = \inf(\alpha + \beta) A$. Speziell mit $C \subset M$ erhalten wir dann über $\sup(\alpha + \beta) C \leq \inf\{\alpha a_1 + \beta a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ die entgegengesetzte Ungleichung. Mit $0 a := 0$ und $\alpha a := -(|\alpha| a)$ für $\alpha < 0$ wird M' dann ein Vektorraum.

<u>Bemerkung 6.2.</u> Satz 6.3 stellt eine Verallgemeinerung von /38, S. 109, Satz IV.11.1/ bzw. von /19, S. 191, Satz 32.5/ dar, wo M als Rieszscher Raum vorausgesetzt würde. Die dortigen Beweise sind aufwendiger, und die Fortsetzung der algebraischen Struktur auf die Schnitte bzw. Klassen ist nicht so zugänglich wie das hier gewählte Verfahren. Deutlicher würde dies natürlich noch bei Beschränkung auf den durch $M = M(V, A)$ gegebenen Spezialfall, in dem der Nachweis von $(\alpha + \beta) a' = (\alpha a' + \beta a')$ wesentlich vereinfacht wird. Falls weitere Operationen fortzusetzen sind, so kann man mittels Satz 3.2 ohne Umschweife wieder einhaken.

<u>Satz 6.4.</u> Jeder Boolesche Ring M kann als Boolescher Teilring eines vollständigen Booleschen Ringes M' aufgefaßt werden, wobei M o-dicht in M' liegt und demzufolge grenztreu in M' enthalten ist.

<u>Beweis.</u> Nach der Folgerung von Satz 3.2 ist die Dedekindvervollständigung M' eines Verbandes M ein vollständiger Verband. Wegen Satz 6.1 und Satz 5.4 braucht nur $(a' \ominus b') \wedge b' = 0$ für beliebige $a', b' \in M'$ gezeigt zu werden. Aus $x, a \in M$, $x \leq b'$, $x \leq a' \ominus b'$ und $a' \leq a$ folgt sofort $x \leq a' \ominus x \leq a \ominus x$. In M gilt dann $x = x \wedge (a \ominus x) = 0$, d.h. außer 0 besitzt $(a' \ominus b') \wedge b'$ keine untere Schranke aus M.

<u>Folgerung.</u> Die Dedekindvervollständigung einer Booleschen Algebra M wird eine vollständige Boolesche Algebra M'. Jede Gruppe von Ordnungsautomorphismen (vgl. /37, S. 44/) auf M geht dabei in eine derartige auf M' über.

7. Konvergenzbetrachtungen

Da jeder Fastmodul insbesondere eine geordnete Menge darstellt, sind in ihm die folgenden Symbole und Begriffe sinnvoll.
In $M(\leq)$ wird durch $a_n \uparrow a$ gekennzeichnet, daß a_n eine isotone Folge ist, die a als obere Grenze besitzt. Das Symbol $a_n \downarrow a$ soll den entsprechenden dualen Sachverhalt ausdrücken.

Definition 7.1. Existieren zu einer Folge a_n aus $M(\leq)$ Folgen $\underline{a}_n$ und $\overline{a}_n$, für die $\underline{a}_n \uparrow a$, $\overline{a}_n \downarrow a$ sowie $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$ gilt, so wird $a_n \xrightarrow{o} a$ geschrieben und von der Ordnungskonvergenz der Folge a_n gesprochen.

Sind in $M(\leq)$ beschränkte Folgen stets nach oben und unten begrenzt, so entspricht diese Definition z.B. der in /7, S.31/ angegebenen. Speziell in jedem Fastmodul M kann in übersichtlicher Weise ein stärkerer Konvergenzbegriff eingeführt werden, der insbesondere mit dieser Struktur verträglich ist (vgl./3, S. 10/ und /20, S. 58/). Ausgangspunkt wird dabei ein System von Nullfolgen.

Eine Folge p_n aus einem Fastmodul M soll eine Nullfolge heißen, wenn dort $p_n \downarrow 0$ gilt. Mit $\mathcal{T}_o$ als System aller Nullfolgen erhält man wegen (5.8) aus $p_n, q_n \in \mathcal{T}_o$ stets $(p_n + q_n) \in \mathcal{T}_o$.
Allgemein soll $\mathcal{T}$ ein System von Nullfolgen sein, für das aus $p_n, q_n \in \mathcal{T}$ stets $(p_n + q_n) \in \mathcal{T}$ folgt.

Definition 7.2. Eine im Fastmodul gebildete Folge von Intervallen $[\underline{a}_n, \overline{a}_n]$ wird eine $\mathcal{T}$-Schachtelung genannt, wenn für beliebige $n \in N$ und irgendeine zu $\mathcal{T}$ gehörige Nullfolge p_n die Relationen

$$\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n$$

und
$$\overline{a}_n \ominus \underline{a}_n \leq p_n$$

gelten. Falls zu einer Folge a_n und zu einem Element a eine derartige τ-Schachtelung mit

$$\underline{a}_n \leq \overset{a}{a_n} \leq \bar{a}_n$$

existiert, so soll dies durch $a_n \xrightarrow{\tau} a$ gekennzeichnet werden. Die Folge a_n heißt dann τ-konvergent gegen das Grenzelement a.

Satz 7.1. Eine Folge a_n ist genau dann τ-konvergent gegen a, wenn es zwei zu τ gehörige Folgen p_n und q_n mit $a_n \ominus a \leq p_n$ und $a \ominus a_n \leq q_n$ gibt.

Beweis. Aus $a \ominus q_n \leq \overset{a}{a_n} \leq a + p_n$

folgt mit (5.8), (5.9) und $a \ominus 0 = a$ die Behauptung.

Satz 7.2. Mit $a_n \xrightarrow{\tau} a$ und $b_n \xrightarrow{\tau} b$ gelten die folgenden Behauptungen:

a) Der Grenzwert a ist eindeutig bestimmt, und es gilt insbesondere $a_n \xrightarrow{O} a$.
b) Aus $c_n = c$ für alle n folgt $c_n \xrightarrow{\tau} c$.
c) Mit $a_n \leq b_n$ erhält man stets $a \leq b$.
d) Aus $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ folgt $c_n \xrightarrow{\tau} a$.
e) Jede Teilfolge von a_n ist τ-konvergent gegen a.
f) Folgt aus $p_n \in \tau$ stets $\{p_1, \ldots p_1, p_2, \ldots p_2, \ldots\} \in \tau$, sobald jedes Folgenglied hier auftritt, dann wird auch jede Umordnung von a_n τ-konvergent gegen a.
g) Bei beliebigem τ folgt stets

$$a_n + b_n \xrightarrow{\tau} a + b \tag{7.1}$$

und $$a_n \ominus b_n \xrightarrow{\tau} a \ominus b. \tag{7.2}$$

h) Bei verbandsgeordnetem Fastmodul folgt stets

$$a_n \wedge b_n \xrightarrow{\tau} a \wedge b \tag{7.3}$$

und $$a_n \vee b_n \xrightarrow{\tau} a \vee b. \tag{7.4}$$

i) In jedem Vektorraum folgt mit $\alpha \in R$ stets

$$\alpha a_n \xrightarrow{\tau} \alpha a.$$

Beweis. Aus $a_n \leq x$ folgt $a \ominus x \leq \bar{a}_n \ominus \underline{a}_n$ also $a \leq x$ und aus $y \leq \bar{a}_n$ erhält man $y \ominus a \leq \bar{a}_n \ominus \underline{a}_n$ also $y \leq a$, womit a) bewiesen wäre. Die Behauptungen b), c), e) und f) gelten trivialerweise. Wegen $\bar{b}_n \ominus \underline{a}_n \leq (\bar{b}_n \ominus a) + (a \ominus \underline{a}_n)$ folgt unmittelbar d). Aus (4.10) erhält man (7.1). Mit (4.11) folgt $(\bar{a}_n \ominus \underline{b}_n) \leq (\bar{a}_n \ominus \underline{a}_n) + (\underline{a}_n \ominus \bar{b}_n) + (\bar{b}_n \ominus \underline{b}_n)$, so daß $[\underline{a}_n \ominus \bar{b}_n, \bar{a}_n \ominus \underline{b}_n]$ wegen (4.4) und (4.9) eine $a_n \ominus b_n$ und $a \ominus b$ enthaltende τ-Schachtelung ist, womit (7.2) gezeigt wäre. Wegen (5.11), (5.12) und (4.9) ergeben sich die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{a}_n \wedge \bar{b}_n) \ominus (\underline{a}_n \wedge \underline{b}_n)\\ (\bar{a}_n \vee \bar{b}_n) \ominus (\underline{a}_n \vee \underline{b}_n)\end{array}\right\} \leq (\bar{a}_n \ominus \underline{a}_n) \vee (\bar{b}_n \ominus \underline{b}_n) \leq p_n \vee q_n,$$

aus denen wegen Satz 5.2 sofort h) folgt. Die letzte Behauptung erhält man, da sich aus $p_n \in \mathcal{T}$ stets $kp_n \in \mathcal{T}$ für jedes natürliche k ergibt.

Bemerkung 7.1. In den Beispielen 4.2 und 4.4 sind mit $\bar{R}$ und $\bar{R}_+$ Fastmoduln erklärt, in denen es ordnungskonvergente Folgen gibt, die nicht $\mathcal{T}_0$-konvergent sind. Dies erkennt man etwa mit der durch $a_n = n$ gegebenen Folge. Derartige Folgen können als uneigentlich konvergent bezeichnet werden.

Bemerkung 7.2. In jedem Vektorraum und jedem Booleschen Ring stimmen die Ordnungskonvergenz und die $\mathcal{T}_0$-Konvergenz wegen $\inf(\bar{a}_n \ominus \underline{a}_n) = \inf \bar{a}_n \ominus \sup \underline{a}_n$ und Satz 7.2 a) überein.

Bemerkung 7.3. Durch Spezialisierung erhält man aus der τ-Konvergenz die übliche Konvergenz in R und R^n, sowie die argumentweise bzw. gleichmäßige Konvergenz in verschiedensten Funktionen- und Folgenräumen. Die in jedem archimedischen Riesschen Raum definierte relativ gleichmäßige Konvergenz bezüglich eines positiven Elementes e (vgl. /19, S. 79/) kann ebenfalls als Spezialfall ausgelegt werden. Ausgehend von dem Vektorraum der über $[0, \infty)$ reellwertigen und stetigen Funktionen gilt Entsprechendes für die fast gleichmäßige Konvergenz. Wegen Bemerkung 7.2 läßt sich die mengenalgebraische Konvergenz in einer beliebigen Potenzmenge gleichfalls hier einordnen.

Mit Hilfe des Fastmoduls kann ein pseudometrischer Raum erklärt werden, der den in /10, S. 40/ definierten als Spezialfall enthält (vgl. auch /3, S. 15/).

Definition 7.3. Es sei P eine nichtleere Menge und d eine Funktion von $P \times P$ in einen Fastmodul M, für die

$$d(a,b) = 0 \text{ genau dann gilt, wenn } a = b \text{ ist,} \tag{7.5}$$

und die für beliebige $a, b, c \in P$ den Bedingungen

$$0 \leq d(a,b), \tag{7.6}$$

$$d(a,b) = d(b,a), \tag{7.7}$$

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \tag{7.8}$$

genügt. Dann heißt P ein pseudometrischer Raum mit dem Abstand d. Im Falle $M = R$ wird P ein metrischer Raum genannt.

Für beliebige Elemente x, x', y und y' eines verbandsgeordneten Fastmoduls M gilt wegen (4.8) die Ungleichung

$$(x + y) \vee (x' + y') \vee 0 \leq (x \vee x' \vee 0) + (y \vee y' \vee 0), \tag{7.9}$$

die im Beweis des folgenden Satzes mehrfach genutzt wird.

Satz 7.3. Bei verbandsgeordnetem Fastmodul M liegt mit der durch

$$d(a,b) := (a \ominus b) \vee (b \ominus a) \vee 0 = [(a \vee b) \ominus (a \wedge b)] \vee 0$$

erklärten Funktion von $M \times M$ in M ein Abstand vor. Dieser Abstand d erfüllt für beliebige $a, b, a', b' \in M$ die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l} d(a+b,\ a'+b') \\ d(a\ominus b,\ a'\ominus b') \\ d(a\wedge b,\ a'\wedge b') \\ d(a\vee b,\ a'\vee b') \end{array}\right\} \leq d(a,a') + d(b,b'). \qquad (7.10)$$

Ist M insbesondere ein Rieszscher Raum, so gilt für $\alpha \in R$

stets $d(\alpha a, \alpha b) = |\alpha| d(a,b)$. (7.11)

Beweis. Die an die Definitionsgleichung angehängte Gleichung folgt sofort aus (5.11), (5.12) und (4.5). Aus $d(a,b) = [(a \vee b) \ominus (a \wedge b)] \vee 0$ folgen dann wegen der Äquivalenz von $a \vee b \leq a \wedge b$ und $a=b$ die Eigenschaften (7.5) und (7.6). Die Gleichung (7.7) gilt trivialerweise. Wegen (4.11) und (4.1) gilt

$$(a\ominus b)\vee(b\ominus a)\vee 0 \leq [(a\ominus c)+(c\ominus b)]\vee[(c\ominus a)+(b\ominus c)]\vee 0$$

Unter Verwendung von (7.9) entsteht hieraus (7.8). Aus (4.10) folgt

$$[(a+b)\ominus(a'+b')]\vee[(a'+b')\ominus(a+b)]\vee 0$$
$$\leq [(a\ominus a')+(b\ominus b')]\vee[(a'\ominus a)+(b'\ominus b)]\vee 0,$$

so daß über (7.9) die erste Ungleichung in (7.10) entsteht. Aus (4.11) und (4.4) erhält man

$$[(a\ominus b)\ominus(a'\ominus b')]\vee[(a'\ominus b')\ominus(a\ominus b)]\vee 0$$
$$\leq [(a\ominus a')+(b'\ominus b)]\vee[(a'\ominus a)+(b\ominus b')]\vee 0,$$

so daß sich die zweite aus (7.10) ergibt. Die Anwendung von (5.11), (5.12) und (4.9) liefert die linken Ungleichungen in

$$\left.\begin{array}{l} (a\vee b)\ominus(a'\vee b') \\ (a\wedge b)\ominus(a'\wedge b') \end{array}\right\} \leq (a\ominus a')\vee(b\ominus b') \leq [(a\ominus a')\vee 0]+[(b\ominus b')\vee 0],$$

und wegen Satz 5.2 gilt dort die rechte. Indem

$$\{[(a\ominus a')\vee 0]+[(b\ominus b')\vee 0]\}\vee\{[(a'\ominus a)\vee 0]+[(b'\ominus b)\vee 0]\}\vee 0$$

mittels (7.9) nach oben abgeschätzt wird, kann jetzt die Richtigkeit der verbleibenden Ungleichungen gezeigt werden. Die Gleichung (7.11) gilt in dem angegebenen Spezialfall wegen (5.14) für $\alpha > 0$ und folgt für $\alpha \leq 0$ dann trivialerweise.

<u>Bemerkung 7.4.</u> Ist M in Satz 7.3 speziell eine Boolesche Algebra, so stimmt $d(a,b)$ mit der symmetrischen Differenz $|a - b|$ überein (vgl./37, S. 13/). Die in /37, S. 32/ angegebenen Beziehungen 2), 3), 6), 8) und 9) ergeben sich beispielsweise durch Auslegung von Satz 7.3.
Mit M als Rieszschem Raum stimmt $d(a,b)$ in Satz 7.3 mit dem Absolutbetrag von $a - b$, also mit $|a-b|$ überein.
In einem positiven O-Verband M wird $d(a,b) = a \triangle b$ mit der dortigen symmetrischen Differenz (vgl. /7, Lemma 3/).
Aus Satz 7.3 und Satz 4.1 kann die Richtigkeit von /7, Prop.4/ für positive O-Verbände gefolgert werden.

<u>Definition 7.4.</u> Eine Folge aus einem pseudometrischen Raum P heißt konvergent gegen das Grenzelement a aus M, geschrieben $a_n \longrightarrow a$, wenn $d(a_n,a) \xrightarrow{O} 0$ gilt.

<u>Bemerkung 7.5.</u> Für eine konvergente Folge a_n sind die eindeutige Bestimmtheit ihres Grenzelementes, die Konvergenz jeder Teilfolge und jeder Umordnung sowie die Beschränktheit von $d(a_n,b)$ für beliebiges $b \in P$ schnell gezeigt. Der Abstand d wird eine stetige Funktion seiner Argumente (vgl. auch /3, Satz 53/). Wegen (7.5), (7.6) und $a \ominus 0 = a$ sind die Aussagen $d(a,a_n) \xrightarrow{O} 0$ und $d(a,a_n) \xrightarrow{\tau_o} 0$ bei beliebigem Abstand d äquivalent. Der Spielraum von Definition 7.4 kann gegebenenfalls vergrößert werden, wenn dort $d(a_n,a) \xrightarrow{O} 0$ durch $d(a_n,a) \xrightarrow{\tau} 0$ ersetzt wird (vgl./10, 4.1/).

<u>Bemerkung 7.6.</u> Mit dem in Satz 7.3 konstruierten Abstand gilt $a_n \longrightarrow a$ genau dann, wenn dort $a_n \xrightarrow{\tau_o} a$ erfüllt ist.

Die Richtigkeit des folgenden Satzes ist unmittelbar einzusehen.

<u>Satz 7.4.</u> Es seien d ein M-wertiger Abstand und $\mu: M_+ \longrightarrow M^*$ eine isotone und subadditive Funktion in einen Fastmodul M^*, für die $\mu(a) = 0$ genau dann gilt, wenn $a = 0$ erfüllt ist. Dann wird durch $d_\mu(a,b) := \mu(d(a,b))$ ein Abstand erklärt. Handelt es sich bei d speziell um den in Satz 7.3 gebildeten Abstand, so genügt d_μ ebenfalls den in (7.10) angegebenen Ungleichungen. Bei R_+-homogenem μ und Riesszchem Raum M wird (7.11) ebenfalls übertragen.

<u>Bemerkung 7.7.</u> Die Beziehungen in (7.10) für die spezielle Variante von d_μ aus Satz 7.4 haben die Verträglichkeit des Konvergenzbegriffes mit der algebraischen Struktur zur Folge. Falls der Wertebereich von d_μ in einem archimedischen Riesszchen Raum enthalten ist, so folgt aus (7.11), $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ und $a_n \longrightarrow a$ stets $\alpha_n a_n \longrightarrow \alpha a$.

<u>Bemerkung 7.8.</u> Speziell im Falle $M = \mathcal{F}(X, R_+)$ ist Satz 7.4 mit

$$\mu(f) = \sup_{x \in X} \frac{f(x)}{1 + f(x)} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty} := 1\right)$$

anwendbar.

8. Spezielle Vollständigkeits-, Stetigkeits- und Abgeschlossenheitsbegriffe

Mit den Definitionen dieses Abschnitts können die späteren maßtheoretischen Untersuchungen trotz eines relativ hohen Abstraktionsgrades in übersichtlicher Form durchgeführt werden. Die beiden folgenden Vollständigkeitsbegriffe stellen Abschwächungen des in Abschnitt 3 eingeführten Vollständigkeitsbegriffes dar.

Definition 8.1. Eine geordnete Menge G heißt m-vollständig (vollständig bezüglich [m]onotoner Folgen), wenn jede beschränkte, isotone Folge nach oben und jede beschränkte, entitone Folge nach unten begrenzt ist.

Eine Teilmenge T von F(≤) heißt nach oben gerichtet, wenn jede zweielementige Teilmenge von T eine obere Schranke aus T besitzt.

Definition 8.2. Eine geordnete Menge F heißt g-vollständig (vollständig bezüglich [g]erichteter Teilmengen), wenn jede nach oben gerichtete und nach oben beschränkte Teilmenge T von F eine obere Grenze besitzt, sowie der entsprechende duale Sachverhalt erfüllt ist.

Wegen /19, Satz 53.4/ stellt beispielsweise der in Beispiel 4.1 angeführte Vektorraum $\gamma(\mathcal{X})$ eine g-vollständige Struktur dar.

Ausgehend von einer geordneten Struktur G werden H und $\overline{H}$ von jetzt an stets Teilmengen von G sein. Falls Grenzen von in H bzw. $\overline{H}$ enthaltenden Teilmengen gebildet werden, so geschieht dies stets in G.

Definition 8.3. Es seien H und $\overline{H}$ Teilmengen von G(≤). Dann wird H eine (in G) gegen $\overline{H}$ (↑)-dichte Menge genannt, wenn zu jedem $\overline{h} \in \overline{H}$ eine isotone Folge h_n aus H mit $h_n \uparrow \overline{h}$

existiert. Der Begriff ($\downarrow$)-dicht gegen $\bar{H}$ wird dualerweise erklärt. Die Menge H wird als ($\updownarrow$)-dicht gegen $\bar{H}$ bezeichnet, wenn sie sowohl ($\uparrow$)-dicht als auch ($\downarrow$)-dicht gegen $\bar{H}$ ist.

Bemerkung 8.1. Jede nichtleere Teilmenge H von G ist ($\updownarrow$)-dicht gegen sich selbst. Mit $[a,b] \subset R$, $G = \mathcal{F}([a,b], R)$, $\bar{H} = C[a,b]$ [1] und H als Menge der Treppenfunktionen über $[a,b]$ bzw. H als Gesamtheit aller auf $[a,b]$ eingeschränkten Polynome wird H ($\updownarrow$)-dicht gegen $\bar{H}$. $C[a,b]$ ist in $G = \mathcal{F}([a,b], R)$ gegen das System der nach unten halbstetigen Funktionen ($\uparrow$)-dicht. In der Potenzmenge $\mathcal{P}(R^n)$ sind die Elementarbereiche ($\uparrow$)-dicht gegen die Gesamtheit der offenen Mengen.

Definition 8.4. Die Teilmenge H von G heißt schwach ($\uparrow$)-abgeschlossen in G, wenn aus $h, h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ und $h_n \uparrow g \leq h$ stets $g \in H$ folgt.
H soll ($\uparrow$)-abgeschlossen genannt werden, wenn aus $h_n \uparrow g$ und $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ stets $g \in H$ folgt.

Die Begriffe schwach ($\downarrow$)-abgeschlossen bzw. ($\downarrow$)-abgeschlossen werden dualerweise erklärt. Die Teilmenge H wird als schwach ($\updownarrow$)-abgeschlossen bzw. ($\updownarrow$)-abgeschlossen in G bezeichnet, wenn sie jeweils beiden Abgeschlossenheitskriterien genügt.

Bemerkung 8.2. Jede geordnete Menge ist ($\updownarrow$)-abgeschlossen in sich. In $\mathcal{F}(X,\bar{R})$ sind $\mathcal{F}(X,R)$ und die Gesamtheit der beschränkten Funktionen schwach ($\updownarrow$)-abgeschlossen. Mit X als topologischem Raum bilden die nach unten halbstetigen Funktionen eine ($\uparrow$)-abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{F}(X,\bar{R})$. Jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in X ist ($\updownarrow$)-abgeschlossen in $\mathcal{P}(X)$. Gleiches trifft auf jeden σ-Ring $\mathfrak{A}$ in X (vgl./13, S. 24/) zu. In beiden Fällen stellen die $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen eine ($\updownarrow$)-abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{F}(X,\bar{R})$ bzw. $\mathcal{F}(X,R)$ dar.

[1] Gesamtheit der reellwertigen und stetigen Funktionen auf $[a,b]$

Definition 8.5. **Ausgehend von G und F als geordneten** Strukturen sowie $H \subset G$ soll eine isotone Funktion $\mu : H \longrightarrow F$ als (↑)-stetig gekennzeichnet werden, wenn aus $h_n \uparrow h$ und $h_n, h \in H$ $(\forall n \in N)$ stets $\mu(h_n) \uparrow \mu(h)$ folgt. Eine **isotone** Funktion wird (↑)-abgeschlossen heißen, falls aus $g \in G$, $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$, $h_n \uparrow g$ und $\mu(h_n) \uparrow f$ stets $g \in H$ und $\mu(g) = f$ folgt.

Die Begriffe (↓)-stetige und (↓)-abgeschlossene Funktion werden dualerweise gebildet. Von einer (↕)-stetigen bzw. (↕)-abgeschlossenen Funktion wird dann gesprochen, wenn jeweils beide Stetigkeits- bzw. Abgeschlossenheitseigenschaften erfüllt sind.

Bemerkung 8.3. Der Abgeschlossenheitsbegriff in Definition 8.5 wird dadurch motiviert, daß μ genau dann (↑)-abgeschlossen ist, wenn dies für den Graphen von μ in der komponentenweise geordneten Menge $G \times F$ zutrifft.

In Analogie zu Definition 8.5 wird im Falle $G = G(\leq, *)$ von einer (↑)-stetigen Verknüpfung "$*$" gesprochen, wenn aus $a_n \uparrow a$ und $b_n \uparrow b$ stets $a_n * b_n \uparrow a * b$ folgt.

Satz 8.1. Es seien G ein m-vollständiger Verband mit (↑)-stetiger Verknüpfung "$\wedge$", H ein Teilverband von G und $F(\leq)$ lediglich m-vollständig. Dann kann jedes (↑)-stetige $\mu : H \longrightarrow F$ zu einem (↑)-abgeschlossenen $\bar{\mu} : \bar{H} \longrightarrow F$ fortgesetzt werden, wobei H gegen $\bar{H}$ (↑)-dicht liegt. Die Fortsetzung $\bar{\mu}$ ist durch die beiden letzten Forderungen eindeutig bestimmt.

Beweis. Ein Element h aus G soll genau dann zu $\bar{H}$ gehören, wenn eine Folge h_n aus H mit $h_n \uparrow h$ und $\mu(h_n) \uparrow f$ existiert. Damit liegt H gemäß Definition 8.3 (↑)-dicht gegen $\bar{H}$. Aus $\dot{h}, \ddot{h} \in \bar{H}$, $\dot{h} \leq \ddot{h}$, $\dot{h}_n \uparrow \dot{h}$ und $\ddot{h}_n \uparrow \ddot{h}$ für zwei derartige Folgen $\dot{h}_n$, $\ddot{h}_n$ erhält man wegen der (↑)-Stetigkeit von μ und "$\wedge$" sowie der m-Vollständigkeit von F

$\mu(h'_k) \leq \sup_{(n)} \mu(h'_k \wedge h''_n) \leq \sup \mu(h''_n)$. Hieraus folgt sofort

$\sup \mu(h'_n) \leq \sup \mu(h''_n)$, was speziell mit $h' = h''$ für jedes

$h \in \overline{H}$ die Definition $\overline{\mu}(h) := \sup \mu(h'_n)$ möglich macht, mit der $\overline{\mu}$ eine isotone Fortsetzung von μ wird. Mit $g \in G$, $\overline{h}_n \in \overline{H}$ $(\forall\, n \in N)$, $\overline{h}_n \uparrow g$ und $\overline{\mu}(\overline{h}_n) \uparrow f$ muß jetzt die Gültigkeit von $g \in \overline{H}$ und $\overline{\mu}(g) = f$ gezeigt werden. Für jedes feste $k \in N$ gibt es laut Definition von $\overline{\mu}$ eine Folge $h_n^{(k)}$ aus H mit $h_n^{(k)} \uparrow_n \overline{h}_k$ und $\mu(h_n^{(k)}) \uparrow_n \overline{\mu}(\overline{h}_k)$. Da H ein Teilverband von G ist, wird durch

$h_n = \bigvee_{k=1}^{n} h_n^{(k)}$ eine isotone Folge aus H geliefert. Für $k \leq n$

gilt $h_n^{(k)} \leq \overline{h}_k \leq \overline{h}_n$, woraus sofort $h_n \leq \overline{h}_n$ folgt. Hieraus erhält man die Existenz von $\sup h_n \leq \sup \overline{h}_n = g$ und die von $\sup \mu(h_n) \leq \sup \overline{\mu}(\overline{h}_n) = f$. Insbesondere gilt damit $\sup h_n \in \overline{H}$. Wegen $\overline{h}_k = \sup_{(n)} h_n^{(k)} \leq \sup h_n$ folgt jetzt $h_n \uparrow g$, also $g \in \overline{H}$ und damit $\overline{\mu}(\overline{h}_n) \leq \overline{\mu}(g) := \sup \mu(h_n) \leq \sup \overline{\mu}(\overline{h}_n)$.
Letzteres bedeutet offensichtlich $\overline{\mu}(g) = f$, womit die $(\uparrow)$-Abgeschlossenheit von $\overline{\mu}$ gezeigt wäre.
Es sei $\tilde{\mu}: \tilde{H} \longrightarrow F$ eine andere Fortsetzung von μ, die den im Satz gestellten Forderungen genügen möge. Aus der $(\uparrow)$-Abgeschlossenheit von $\tilde{\mu}$ und der Definition von $\overline{\mu}$ folgt sofort, daß $\overline{H} \subset \tilde{H}$ gilt und die Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf $\overline{H}$ mit $\overline{\mu}$ übereinstimmt. Da H $(\uparrow)$-dicht gegen $\tilde{H}$ sein soll, gibt es zu jedem $\tilde{h} \in \tilde{H}$ eine Folge h_n aus H mit $h_n \uparrow \tilde{h}$, für die natürlich auch $\mu(h_n) \uparrow \tilde{\mu}(\tilde{h})$ gilt, womit $\tilde{H} \subset \overline{H}$ und damit $\tilde{\mu} = \overline{\mu}$ gezeigt wäre.

Definition 8.6. Das unter den Bedingungen von Satz 8.1 konstruierte $\overline{\mu}$ soll die $(\uparrow)$-Abschließung von μ genannt werden.

Der folgende Satz kann als Hilfsmittel herangezogen werden, um eine Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue zu beweisen.

Satz 8.2. Es seien G ein m-vollständiger Verband, H ein schwach $(\updownarrow)$-abgeschlossener Teilverband von G, $F(\leq)$ m-vollständig und $\mu : H \longrightarrow F$ eine $(\updownarrow)$-stetige Funktion. Gibt es dann zu einer Folge h_n aus H mit $h_n \xrightarrow{o} g$ Elemente $\dot{h}$, $\ddot{h}$ aus H, für die $\dot{h} \leq h_n \leq \ddot{h}$ gilt, so folgt stets $g \in H$ und $\mu(h_n) \xrightarrow{o} \mu(g)$.

Beweis. Aus

$$\dot{h} \leq \underline{h}_k := \bigwedge_{n=k}^{\infty} h_n \leq \genfrac{}{}{0pt}{}{g}{h_k} \leq \bigvee_{n=k}^{\infty} h_n =: \overline{h}_k \leq \ddot{h}$$

und der Definition der Ordnungskonvergenz folgt $\underline{h}_k \uparrow g$ und $\overline{h}_k \downarrow g$. Da H als schwach $(\updownarrow)$-abgeschlossen vorausgesetzt wurde, gilt $\underline{h}_k, \overline{h}_k \in H$ $(\forall k \in N)$ und damit auch $g \in H$. Wegen $\mu(\underline{h}_k) \leq \mu(h_k) \leq \mu(\overline{h}_k)$ ergibt sich daraus schließlich $\mu(h_n) \xrightarrow{o} \mu(g)$.

Bemerkung 8.4. In dem Spezialfall, daß G ein m-vollständiger Verband ist, H ein Teilverband von G ist und $\mu : H \longrightarrow F$ eine $(\updownarrow)$-abgeschlossene Funktion ist, gilt insbesondere die Aussage von Satz 8.2. Bei m-vollständigem F folgt nämlich aus der $(\updownarrow)$-Abgeschlossenheit von μ, daß μ $(\updownarrow)$-stetig und H schwach $(\updownarrow)$-abgeschlossen ist.

9. $\mathcal{E}$-reguläre Fastmoduln

Bei der Fortsetzung reellwertiger Integrale, reellwertiger Maße und anderer numerischer Mengenfunktionen bedient man sich "epsilontischer" Schlußweisen, wenn Stetigkeits- und Abgeschlossenheitseigenschaften bewiesen werden. Um diese epsilontischen Schlüsse bei recht allgemeinem Bildbereich zu ersetzen, wird hier die Definition des $\mathcal{E}$-regulären Fastmoduls eingeführt. Auf die Beziehungen zu entsprechenden von Brehmer, Matthes, McShane, Vladimirov und Vulich (vgl./7/, /21/, /24/, /37/ und /38/) erklärten "Regularitätsbedingungen" gehe ich an passender Stelle näher ein.

Bei gegebenem Fastmodul F wird in dieser Arbeit jede nach unten gerichtete Teilmenge F_1 von F mit $\inf F_1 = 0$ als eine <u>Nullmenge</u> aus F bezeichnet. Jede Nullfolge ist damit eine spezielle Nullmenge, und aus jeder abzählbaren Nullmenge kann eine Nullfolge ausgesondert werden.

In der folgenden Definition wird M lediglich als eine geordnete Menge vorausgesetzt.

<u>Definition 9.1.</u> Ein Fastmodul F heißt <u>$\mathcal{E}$-regulär</u>, wenn eine isotone Funktion r von F in $M(\leq)$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

E_1) r ist ($\uparrow$)-stetig und bildet jede isotone Folge f_n aus F in eine o-konvergente aus M ab.

E_2) Ist $\{F_\nu\}$ ein beliebiges abzählbares System von Nullmengen aus F und gilt für jedes Element

$$\{f_\nu\} \in \bigtimes_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \text{ stets } r(a) \leq \sup_{(n)} r\Big(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\Big),$$

so folgt $a \leq 0$.

<u>Satz 9.1.</u> Ein Fastmodul F, in dem jede isotone Folge nach oben begrenzt ist, wird genau dann $\mathcal{E}$-regulär, wenn für jedes abzählbare System von Nullmengen F_ν aus F die folgende Bedingung erfüllt ist.

E_3) Falls $a \le \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ für jede Stichprobe $\{f_\nu\}$ aus $\{F_\nu\}$ gilt, so soll stets $a \le 0$ folgen.

Beweis. Mit r als identischer Abbildung liegt trivialerweise ε-Regularität vor, und aus dieser Eigenschaft erhält man hier sofort E_3).

Folgerung 1. Die Fastmoduln $\bar{R}$, $\bar{R}_+$, $\mathcal{F}(X,\bar{R})$ und $\mathcal{F}(X,\bar{R}_+)$ sind ε-regulär.

Folgerung 2. Jede m-vollständige Boolesche Algebra[1] ist genau dann ε-regulär, wenn in ihr aus $a \le \sup\limits_{(\nu)} f_\nu$ für jedes $\{f_\nu\} \in \bigtimes_{\nu=1}^{\infty} R_\nu$ stets $a = 0$ folgt.

Beispiel 9.1. Mit $M = \mathcal{F}(X,\bar{R})$ und r als der auf $\mathcal{F}(X,R)$ erklärten identischen Abbildung wird $\mathcal{F}(X,R)$ ein ε-regulärer Vektorraum.

Beispiel 9.2. Jede Potenzmenge $\mathbb{P}(X)$ ist eine ε-reguläre σ-Algebra.

Beispiel 9.3. Wegen Folgerung 2 von Satz 9.1 wird eine m-vollständige Boolesche Algebra genau dann ε-regulär, wenn sie $\aleph_0$-regulär[2] ist (vgl. /21, IV, S. 331/). Diese $\aleph_0$-Regularität stellt die schwächste in der Schar der dort eingeführten Regularitätsbedingungen dar. Sie spielen bei der Konstruktion abgeschlossener Boolescher Homomorphismen eine grundlegende Rolle (vgl. ebenda, S. 332).

[1] ansonsten als σ-vollständige Boolesche Algebra bezeichnet

[2] mit $\aleph_0$ als Mächtigkeit der natürlichen Zahlen

Beispiel 9.4. Eine reguläre Boolesche Algebra (vgl. /37, S. 167, 156 und 40/) ist wegen Folgerung 2 von Satz 9.1 und dem in /37, S. 172/ angegebenen Lemma 2 $\mathcal{E}$-regulär. Da eine reguläre Algebra insbesondere von abzählbarem Typus ist, kann auf die dortige Forderung, daß die Nullmengen M_i abzählbar sein sollen, verzichtet werden. Die Hinlänglichkeit des dort auf S. 172 angegebenen Satzes kann hier an späterer Stelle durch spezielle Auslegung gewonnen werden.

Beispiel 9.5. In /7, S. 45/ werden "Funktionale" betrachtet, deren Bildbereich in einem positiven und vollständigen[1] C^{σ}-Verband Y liegt. Dabei erfüllt Y insbesondere die folgende Bedingung.

E_4) Gilt mit $Y_k \subset Y$ $(k \in N)$ für beliebig ausgewählte

$$y_k \in Y_k \text{ stets } y \leq \sum_{k=0}^{\infty} y_k, \text{ so folgt } y \leq \sum_{k=0}^{\infty} \inf Y_k.$$

Aus den hier bewiesenen Sätzen 4.1 und 9.1 geht hervor, daß dieser C-Verband Y einen $\mathcal{E}$-regulären Fastmodul darstellt. In einer vollständigen Booleschen Algebra entspricht die Eigenschaft E_4) der $(\aleph_0, \infty)$-Distributivität (vgl. /21, IV, S. 335 l.u./), so daß es sich hier um eine echte Verschärfung der $\mathcal{E}$-Regularität handelt. Mit Hilfe der Eigenschaft E_4), wo keine Einschränkungen bezüglich der Teilmengen Y_k gemacht sind, gelangt Brehmer in /7/ ausgehend von einem recht allgemeinen "Funktional" μ schnell zu einem (σ-subadditiven) äußeren Maß μ^*. Die $\mathcal{E}$-Regularität würde dieses Ergebnis dort nicht liefern.

Satz 9.2. Ein m-vollständiger und verbandsgeordneter Fastmodul F mit ($\uparrow$)-stetiger Verknüpfung "$\wedge$" ist genau dann $\mathcal{E}$-regulär, wenn für jedes $f \in F$ und jedes abzählbare System von Nullmengen $\{F_\nu\}$ die folgende Bedingung erfüllt ist.

1) Dies bedeutet dort, daß jede Teilmenge nach oben und unten begrenzt ist.

E_5) Falls $a \leq \sup\limits_{(n)} \left(f \wedge \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu\right)$ für jedes $\{f_\nu\}$ aus $\bigtimes\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ gilt, so soll stets $a \leq 0$ folgen.

<u>Beweis.</u> Lediglich die Hinlänglichkeit der Bedingung bedarf eines Beweises. Es sei M die argumentweise geordnete Menge $\mathcal{F}(F,F)$. Die Funktion $r: F \longrightarrow M$ soll durch $r(a) = r(a)(f) := f \wedge a$ erklärt werden. Aus $a_1 \leq a_2$ folgt $f \wedge a_1 \leq f \wedge a_2$ für alle $f \in F$ und somit $r(a_1) \leq r(a_2)$. Da die Grenzen in M argumentweise gebildet werden, folgt aus $a_n \uparrow a$ in F laut Voraussetzung $f \wedge a_n \uparrow f \wedge a$ für jedes $f \in F$ und damit $r(a_n) \uparrow r(a)$. Bei beliebiger isotoner Folge a_n aus F existiert wegen der vorausgesetzten m-Vollständigkeit $\varphi(f) = \sup\limits_{(n)} (f \wedge a_n) = \sup r(a_n)$, und es gilt $\varphi \in M$. Es verbleibt der Nachweis von E_2).

Aus $f \wedge a \leq \sup\limits_{(n)} (f \wedge \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu)$ für beliebige $f_\nu \in F_\nu$ folgt wegen E_5) jedoch $f \wedge a \leq 0$ für jedes $f \in F$, also gilt $a \leq 0$.

<u>Folgerung 1.</u> Ein m-vollständiger Boolescher Ring F ist genau dann $\mathcal{E}$-regulär, wenn in ihm für jedes feste $f \in F$ aus $a \leq \sup\limits_{(n)} (f \wedge \bigvee\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu)$ für jede Stichprobe $\{f_\nu\}$ eines beliebigen abzählbaren Systems von Nullmengen stets $a = 0$ folgt.

<u>Folgerung 2.</u> Jeder m-vollständige Rieszsche Raum F ist genau dann $\mathcal{E}$-regulär, wenn in ihm die Eigenschaft E_5) erfüllt ist. In diesem Falle ist natürlich auch sein positiver Kegel $\mathcal{E}$-regulär.

<u>Folgerung 3.</u> Jeder positive σ-Verband (vgl. /7, Def. 3/) ist $\mathcal{E}$-regulär, wenn in ihm die Eigenschaft E_5) erfüllt ist.

Wir wollen jetzt kurz auf $\mathcal{E}$-reguläre Fastmoduln eingehen, die nicht verbandsgeordnet sind.

Beispiel 9.6. Der in der Regel nicht verbandsgeordnete Vektorraum $\Gamma(\mathcal{H})$ ist $\mathcal{E}$-regulär. Mit $M = \mathcal{F}(X,\bar{R})$ entsteht hier durch $r(A)(x) := (Ax,x)$ eine Funktion $r : \Gamma(\mathcal{H}) \longrightarrow M$, die den Forderungen von Definition 9.1 genügt.

Beispiel 9.7. McShane kennzeichnete in /24/ ausgehend von einer geordneten Menge F, das System aller glatt wachsenden Funktionen aus $\mathcal{F}(F,R)$ mit R_F. Dabei wird $t \in R_F$ genau dann, wenn $t \in \mathcal{F}(F,R)$ gilt und die folgende Bedingung erfüllt ist.

E_6) Gilt $\inf_F U \leq \sup_F V$, wobei U eine nach unten gerichtete und V eine nach oben gerichtete Teilmenge von F ist[1], so folgt stets $\inf t(U) \leq \sup t(V)$.

Hierauf aufbauend wurde $F(\leq)$ dort als normal bezeichnet, wenn in F die Relation $f \leq g$ genau dann gilt, sobald $t(f) \leq t(g)$ für alle $t \in R_F$ erfüllt ist. Die im vorigen Beispiel angeführte Struktur ist wegen der Aussagen (28.4) und (28.5) aus /24/ g-vollständig und normal. Der folgende Satz liefert die $\mathcal{E}$-Regularität des normalen Fastmoduls.

Satz 9.3. Jeder normale Fastmodul F ist $\mathcal{E}$-regulär.

Beweis. Mit $t \in R_F$ und $f \in F$ wird durch $r(f)(t) := t(f)$ eine Funktion $r = r(f)$ auf F erklärt, deren Wertebereich in $M = \mathcal{F}(R_F,\bar{R})$ liegt. Die Menge M werde argumentweise geordnet. Wegen E_6) folgt aus $f_n \uparrow f$ für alle $t \in R_F$ $t(f_n) \uparrow t(f)$, so daß r $(\uparrow)$-stetig ist. Für jede isotone Folge f_n aus F wird durch $m(t) = \sup_{(n)} t(f_n)$ ein Element aus M erklärt, so daß E_1) jetzt erfüllt ist. Die Prämisse in E_2) ist bezüglich des hier definierten r genau dann erfüllt, wenn für jedes $t \in R_F$ und beliebige $f,\ell \in F$, stets

[1] Dabei sind einelementige Mengen spezielle gerichtete Mengen.

$$t(a) \leq \sup t\left(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\right) \qquad (*)$$

gilt. Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ und jedem festgehaltenen $t \in R_F$ existiert wegen $t(0) = \inf t(F_1)$ ein f_1 aus F_1, so daß $t(f_1) < t(0) + \varepsilon$ gilt. Durch vollständige Induktion erhält man wegen E_6) die Existenz einer Folge f_ν mit $f_\nu \in F_\nu$, für die bei beliebigem $n \in N$ die Ungleichung

$t\left(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\right) < t(0) + \varepsilon$ erfüllt ist, woraus

$\sup_{(n)} t\left(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\right) \leq t(0) + \varepsilon$ folgt. Hieraus liefert (*)

$t(a) \leq t(0) + \varepsilon$ und somit $t(a) \leq t(0)$. Da man t in beliebiger Weise festhalten kann, gilt die letzte Ungleichung für alle $t \in R_F$. Da F normal ist, folgt $a \leq 0$ und daraus die ε-Regularität von F.

Beispiel 9.8. Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum (vgl. /2/) mit einem endlichen Maße μ. Die Gesamtheit der $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen, die fast überall endlich sind und die in der üblichen Weise identifiziert werden, bildet dann einen vollständigen und ordnungsseparablen Rieszschen Raum (vgl. Beispiel IV in /19, S. 126/). Durch

$r(f) = \int \frac{f_+}{1+f_+} d\mu$ wird eine reellwertige Funktion geliefert,

die die in Definition 9.1 gestellten Forderungen erfüllt. Ein ε-regulärer und vollständiger Rieszcher Raum liegt auch dann vor, wenn das obige Maß μ lediglich σ-endlich ist. Speziell mit μ als dem auf das Intervall $[0, 1]$ eingeschränkten Lebesgueschen Maß entsteht hier ein ε-regulärer Rieszcher Raum. Sein positiver Kegel gestattet keine grenztreue Einbettung in eine durch das Beispiel 9.5 charakterisierte Struktur X. Mit den in /19, S. 127/ angegebenen Beispielen (V) und (VI) liegen ebenfalls Rieszsche Räume vor, die vollständig und ε-regulär sind.

10. Inhalte und Maße in eigentlichen L-Räumen

In diesem Abschnitt werden die Grundbegriffe einer Maßtheorie dargestellt, die eine weitgehende Anwendung auf ansonsten übliche Spezialfälle der Maß- und Integrationstheorie zuläßt. Um Mißverständnissen aus dem Wege zu gehen, sollen die beiden folgenden Begriffe exakt eingeführt werden.

Definition 10.1. Eine Teilmenge H eines L-Raumes G, für die $IH \subset H$ und $H = H(+,\ominus)$ gilt, heißt ein Teilraum von G. Im Falle $G = G_+$ wird ein Teilraum H von G, für den aus $h \in H$, $g \in G$ und $g \leq h$ stets $g \in H$ folgt, ein Ideal[1] in G genannt.

Die anschließende Definition spielt in den weiteren Betrachtungen eine grundlegende Rolle.

Definition 10.2. Ein m-vollständiger L-Raum, in dem
aus $\sup B = \inf A$ stets $\inf(A \ominus B) = 0$ (10.1)
und aus $b \leq a$ stets $a \oplus (a \ominus b) = b$ folgt, (10.2)
wird eigentlich genannt.

Wegen (10.1) gilt in einem eigentlichen L-Raum stets

$$a \ominus a = 0. \tag{10.3}$$

Bemerkung 10.1. Bei m-Vollständigkeit werden der Vektorraum, der positive Kegel eines Rieszschen Raumes und der Boolesche Ring, also auch die Boolesche Algebra, eigentliche L-Räume.

Satz 10.1. In jedem eigentlichen L-Raum gilt

$$\inf A \ominus \sup B = \inf(A \ominus B), \tag{10.4}$$

sobald die Grenzen auf der linken Seite dieser Gleichung existieren.

[1] vgl. /3, S. 7/, /19, S. 5 und 10/ sowie /37, S. 24/

Beweis. Aus $x \lhd (A \ominus B)$ folgt sofort
$x \lhd (A \ominus \inf A) + (\inf A \ominus \sup B) + (\sup B \ominus B)$. Daraus entsteht wegen (10.1) und (5.8) die Ungleichung
$x \leq \inf A \ominus \sup B$, womit $\inf A \ominus \sup B$ die größte untere Schranke von $A \ominus B$ wäre.

Satz 10.2. In einem eigentlichen L-Raum stimmt die Ordnungskonvergenz mit der τ_o-Konvergenz überein, so daß bezüglich der Ordnungskonvergenz die Aussagen von Satz 7.2 gelten. Aus $\alpha \in L$ und $a_n \xrightarrow{o} a$ folgt außerdem stets $\alpha a_n \xrightarrow{o} \alpha a$.

Beweis. Durch Vergleich der Definitionen 7.1 und 7.2 erhält man die erste Behauptung. Aus (5.13) und (5.14) folgt die zweite.

Satz 10.3. Jeder $(\uparrow)$-abgeschlossene Teilraum H eines eigentlichen L-Raumes G ist auch $(\downarrow)$-abgeschlossen. Ein Teilraum H von G wird hier genau dann schwach $(\uparrow)$-abgeschlossen, wenn er schwach $(\downarrow)$-abgeschlossen ist.

Beweis. Aus $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ und $h_n \downarrow g$ folgt
$h_1 \ominus h_n \uparrow h_1 \ominus g$, also gilt $h_1 \ominus g \in H$. Hieraus ergibt sich wegen $g = h_1 \ominus (h_1 \ominus g)$ der erste Teil. Da aus $h_n \downarrow g \geq h$ sofort $h_1 \ominus h_n \uparrow h_1 \ominus g \leq h_1 \ominus h$ und aus $h_n \uparrow g \leq h$ sofort $h \ominus h_n \downarrow h \ominus g \geq h \ominus h_1$ folgt, erhält man ganz analog den zweiten.

Von jetzt ab soll mit F stets ein eigentlicher L-Raum und mit G stets ein positiver, eigentlicher L-Raum gekennzeichnet werden. Die äußere Multiplikation wird also in beiden Fällen durch dieselbe Gruppe L vermittelt. Diese mit F bzw. G verbundenen Minimalforderungen werden gegebenenfalls noch etwas verschärft.

<u>Satz 10.4.</u> Unter den obigen Voraussetzungen wird G eine verbandsgeordnete Struktur, in der stets

$$a \wedge b = a \ominus (a \ominus b) \tag{10.5}$$

gilt. Ein Teilraum H von G ist auch ein Teilverband von G.

<u>Beweis.</u> Aus $x \lhd \{a,b\}$ folgt wegen (10.2), (4.9), (4.4) und $G = G_+$ sofort

$x \leq a \ominus (a \ominus x) \leq a \ominus (a \ominus b) \lhd \{a,b\}$, woraus (10.5) entsteht. Die Menge $\{a,b\}$ ist in G durch $a + b$ nach oben beschränkt, und aus $\{a,b\} \lhd x$ erhält man wegen (5.11) und (10.2) die Gleichungen

$$x \ominus [(x \ominus a) \wedge (x \ominus b)] = [x \ominus (x \ominus a)] \vee [x \ominus (x \ominus b)] = a \vee b.$$

<u>Bemerkung 10.2.</u> Die weiteren Betrachtungen hängen mit der Fortsetzung von Funktionen zusammen, deren Definitionsbereich in G und deren Wertebereich in F liegt. Dabei entsteht eine leichte Verallgemeinerung, wenn man die an G gestellten Forderungen dahingehend abschwächt, daß lediglich ein positiver, verbandsgeordneter, m-vollständiger L-Raum mit ($\uparrow$)-stetigen Verknüpfungen "+" und "$\wedge$" vorausgesetzt wird. Auf Grund der Sätze 10.2 und 10.4 erkennt man dies, da $\bar{R}_+$ bzw. $\mathcal{F}(X,\bar{R}_+)$ beispielsweise nicht eigentlich sind, aber die hier angesetzten Forderungen erfüllen. Ausgehend von einer derartigen Verallgemeinerung könnte dann auch der in /7, IV/ erklärte homogene (positive) C^{σ}-Verband bzgl. G hier eingeordnet werden. Gegenüber einer vorherigen Variante habe ich mich jedoch nicht für diese Verallgemeinerung entschieden, um die Betrachtungen etwas übersichtlicher zu gestalten. An F werden in beiden Fällen die gleichen Forderungen gestellt. Hinsichtlich der Anwendungen geht bei dieser spezielleren Variante nichts Wesentliches verloren.

<u>Definition 10.3.</u> Mit $H \subset G$, $H = H(+)$, $0 \in H$ und $LH \subset H$ soll $\mu: H \longrightarrow F$ ein <u>Prämaß</u> heißen, wenn $\mu(0) = 0$ gilt, μ isoton, subadditiv und L-homogen ist.
Ein Prämaß, dessen Definitionsbereich H ein Ideal in G ist, wird als <u>äußerer Inhalt</u> gekennzeichnet.
Ein $(\uparrow)$-abgeschlossener äußerer Inhalt heißt ein <u>äußeres Maß</u>.

<u>Definition 10.4.</u> Ist H ein Teilraum von G, so wird eine L-homogene Funktion $\mu: H \longrightarrow F$ ein <u>Inhalt</u> genannt, wenn für beliebige $a, b \in H$ stets

$$\mu(a) \geq 0 \tag{10.6}$$

und

$$\mu(a \wedge b) = \mu(a) \ominus \mu(a \ominus b) \tag{10.7}$$

gilt. Ein $(\downarrow)$-abgeschlossener Inhalt heißt ein <u>schwaches Maß</u>. Jeder $(\uparrow)$-abgeschlossene Inhalt wird ein <u>Maß</u> genannt.

<u>Satz 10.5.</u> Ein Prämaß $\mu: H \longrightarrow F$, für das aus $h \in H$ und $g \leq h$ stets $g \in H$ folgt, ist bereits ein äußerer Inhalt. Für den Definitionsbereich H jedes äußeren Inhalts gilt $H = H(+, \ominus, \vee, \wedge)$.

<u>Beweis.</u> Da in G stets $h \ominus h' \leq h$ gilt, folgen aus Definition 10.1 und Satz 10.4 sofort die Behauptungen.

<u>Satz 10.6.</u> Ist $\mu: H \longrightarrow F$ ein Inhalt, so gelten die folgenden Behauptungen:

a) μ ist ein Prämaß.
b) Für beliebige $a, b \in H$ folgt $\mu(a \ominus b) = \mu(a) \ominus \mu(a \wedge b)$.
c) Ein $(\uparrow)$-stetiger Inhalt ist auch $(\downarrow)$-stetig.
d) Wenn aus $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ und $h_n \downarrow 0$ stets $\mu(h_n) \downarrow 0$ folgt, so ist μ bereits $(\updownarrow)$-stetig.
e) Mit $h_i, g_i \in H$ $(i = 1, 2)$ folgt stets

$$\mu(h_1 \vee h_2) \ominus \mu(g_1 \vee g_2) \leq \sum_{i=1}^{2} \mu(h_i) \ominus \mu(g_i \wedge h_i).$$

<u>Beweis.</u>

<u>zu a):</u> Wegen $h \ominus h = 0$ gehört 0 zu H. Mit $b = 0$ in (10.7) folgt $\mu(0) = 0$. Aus (10.7) geht speziell mit $b \leq a$ die Isotonie von μ hervor. Aus der Isotonie folgt wegen (4.6) $\mu(a) \geq \mu\big((a + b) \ominus b\big)$, und indem man in (10.7) a durch $(a + b)$ ersetzt, folgt $\mu(b) \geq \mu(a + b) \ominus \mu\big((a + b) \ominus b\big)$. Die Addition dieser Ungleichungen liefert die Subadditivität von μ.

<u>zu b):</u> Wegen der Isotonie von μ und $a \ominus b \leq a$ in G gilt $\mu(a) \ominus \mu(a \wedge b) = \mu(a) \ominus \big[\mu(a) \ominus \mu(a \ominus b)\big] = \mu(a \ominus b)$.

<u>zu c):</u> Aus der $(\uparrow)$-Stetigkeit von μ folgt mit $h_n \downarrow h$ und $h_n, h \in H$ $(\forall n \in N)$ stets $\mu(h_1 \ominus h_n) \uparrow \mu(h_1 \ominus h)$. Wegen b) erhält man $\mu(h_1) \ominus \inf \mu(h_n) = \mu(h_1) \ominus \mu(h)$. Mit (10.2) entsteht $\mu(h_n) \downarrow \mu(h)$.

<u>zu d):</u> Aus $h'_n \uparrow h$ und $h'_n, h \in H$ $(\forall n \in N)$ folgt $h \ominus h'_n \downarrow 0$ und damit $\mu(h'_n \ominus h) \downarrow 0$. Die Gleichung (10.7) liefert deshalb $\sup \mu(h'_n) = \mu(h) \ominus \inf \mu(h \ominus h'_n) = \mu(h)$.

<u>zu e):</u> Da μ subadditiv ist, gilt für $f := \mu(h_1 \vee h_2) \ominus \mu(g_1 \vee g_2)$ die Relation $f \leq \mu\big((h_1 \vee h_2) \ominus (g_1 \vee g_2)\big)$. Aus der Isotonie von μ, (5.12) und Satz 5.2 folgt jetzt über $f \leq \mu\big([h_1 \ominus (g_1 \vee g_2)] \vee [h_2 \ominus (g_1 \vee g_2)]\big)$ die zu beweisende Ungleichung.

<u>Satz 10.7.</u> Jedes Maß ist ein schwaches Maß. Der Definitionsbereich eines schwachen Maßes ist schwach $(\updownarrow)$-abgeschlossen in G.

<u>Beweis.</u> Wegen der m-Vollständigkeit von F ist jedes Maß eine $(\uparrow)$-stetige Funktion mit schwach $(\uparrow)$-abgeschlossenem Definitionsbereich. Aus $0 \lhd G$, Satz 10.3 und Satz 10.6 c) folgt dann der erste Teil. Der zweite entsteht unmittelbar aus Satz 10.3.

Beispiel 10.1. Es seien G und F m-vollständige Boolesche Ringe. Im Falle $L = \{I\}$ (vgl. Bemerkung 5.1) wird H genau dann ein Teilraum von G, wenn H ein Boolescher Teilring von G ist (vgl. Satz 10.4). Wegen Satz 10.6 a) ist ein Inhalt isoton und subadditiv, so daß
$\mu(a) \vee \mu(b) \leq \mu(a \vee b) \leq \mu(a) \vee \mu(b)$, also
$\mu(a \vee b) = \mu(a) \vee \mu(b)$ gilt. Aus Satz 10.6 b) folgt hier
$\mu(a \ominus b) = \mu((a \vee b) \ominus b) = (\mu(a) \vee \mu(b)) \ominus \mu(b) =$
$\mu(a) \ominus \mu(b)$ und damit auch $\mu(a \wedge b) = \mu(a \ominus (a \ominus b)) =$
$\mu(a) \ominus (\mu(a) \ominus \mu(b)) = \mu(a) \wedge \mu(b)$. Der Begriff Inhalt fällt hier also mit dem des auf einem Teilring H von G erklärten Homomorphismus in F zusammen.

Beispiel 10.2. Sind G und F m-vollständige Boolesche Algebren und gilt für die entsprechenden Einselemente $\mu(1) = 1$, so wird $\mu : H \to F$ genau dann ein Inhalt, wenn H eine Teilalgebra von G ist und μ einen Homomorphismus von H in F darstellt. Die Begriffe Maß und schwaches Maß stimmen in diesem Falle überein. Mit μ liegt genau dann ein Maß vor, wenn μ einen auf einer σ-regulär eingebetteten Teilalgebra H von G (vgl. /37, S. 78/) erklärten und σ-stetigen Homomorphismus in F (vgl. ebenda S. 120, Satz 3) darstellt. Mit $G = \mathfrak{P}(X)$ wird H hier die übliche σ-Algebra in X.

Bemerkung 10.3. Derartige Inhalte und Maße werden etwa in /37, S. 144-46/, /38, S. 312-23/ und /34, S. 23-26/ betrachtet. In /37/ wird beispielsweise mit $G = \mathfrak{P}(R)$, H als der in G von der Menge aller Intervalle der Form $(-\infty, \alpha]$ und $(-\infty, \alpha)$ erzeugten Unteralgebra und F als einer beliebigen Booleschen Algebra ein "Spektralmaß" $\varphi : H \to F$ erklärt. Dieses "Spektralmaß" φ stellt wegen /37, S. 146, Satz 4/ einen σ-stetigen Homomorphismus und damit einen ($\updownarrow$)-stetigen Inhalt dar. Falls F eine reguläre Boolesche Algebra ist (vgl. Beispiel 9.4 in dieser Arbeit), so kann φ nach /37, S. 172, Satz 10/ zu einem auf einer σ-Algebra in R erklärten und σ-stetigen Homomorphismus

$\tilde{\varphi}$, also zu einem Maß mit $\tilde{\varphi}(1) = 1$ fortgesetzt werden. In Beispiel 9.4 wurde jede im Sinne von Kantorovic reguläre Boolesche Algebra als spezielle ε-reguläre Algebra charakterisiert. Deshalb entsteht diese Aussage hier an späterer Stelle durch spezielle Auslegung von Beispiel 12.1. Für die Funktionalanalysis erhält man mit F als der Booleschen Algebra der invarianten Unterräume eines beschränkten selbstadjungierten Operators A, die ja bekanntlich mit den entsprechenden Projektionsoperatoren identifiziert werden können, ein relevantes Beispiel.

<u>Definition 10.5.</u> Die Elemente $a, b \in G$ heißen <u>disjunkt</u>, wenn $a \wedge b = 0$ ist. Es sei $\mathfrak{J}$ eine nichtleere Teilmenge von G. Dann wird eine Funktion $\lambda : \mathfrak{J} \longrightarrow F$ <u>σ-additiv</u> genannt, wenn für jede Folge a_n von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathfrak{J}$ mit

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathfrak{J} \quad \text{stets} \quad \lambda\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a_n) \quad \text{gilt.}$$

<u>Beispiel 10.3.</u> Es seien G ein m-vollständiger Boolescher Ring und F ein m-vollständiger geordneter Modul. Wegen Bemerkung 5.1 kann F trivialerweise als ein eigentlicher L-Raum aufgefaßt werden. Mit $\mu : H \longrightarrow F$ liegt jetzt genau dann ein Inhalt vor, wenn μ eine auf einem Booleschen Teilring H von G erklärte, positive und disjunkt additive Funktion ist. Die Gleichung (10.7) wird dann üblicherweise in der Form $\mu(a \wedge b) + \mu(a \ominus b) = \mu(a)$ geschrieben. Wegen Satz 10.6 c) wird dieser Inhalt genau dann $(\updownarrow)$-stetig, wenn er σ-additiv ist. Die Auslegung der übrigen Begriffe von Definition 10.4 bereitet ebenfalls keinerlei Schwierigkeiten. Speziell das in /8, S. 184/ erklärte Spektralmaß wird ein Maß im Sinne von Definition 10.4.

<u>Bemerkung 10.4.</u> Falls $\mu : \mathfrak{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ein im üblichen Sinne auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ erklärtes Maß ist, so wird die Einschränkung von μ auf die Mengen endlichen Maßes ein Maß gemäß Definition 10.4. Gleiches trifft zu, wenn μ ein auf

einem σ-Ring $\mathfrak{O}$ definiertes Maß darstellt (vgl. /13, S. 24 u. 30/).

<u>Definition 10.6.</u> Es sei $\mathfrak{J}^{(n)}$ die Gesamtheit der im R^n liegenden halboffenen Intervalle der Gestalt $[a,b)$ und F ein eigentlicher L-Raum. Eine positive, disjunkt additive Funktion $\lambda : \mathfrak{J}^{(n)} \longrightarrow F$ wird dann kurz eine <u>Intervallfunktion</u> genannt. Ist F speziell ein geordneter Modul, so heißt λ eine <u>gewöhnliche Intervallfunktion</u>. Mit F als Booleschem Ring wird von einer <u>Booleschen Intervallfunktion</u> gesprochen, wenn aus

$I_1, I_2 \in \mathfrak{J}^{(n)}$ und $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ stets $\lambda(I_1) \wedge \lambda(I_2) = 0$

folgt.

Die Intervallfunktion λ kann eindeutig auf den <u>durch $\mathfrak{J}^{(n)}$ erzeugten Mengenring $\mathcal{E}^{(n)}$</u> zu einer isotonen und disjunkt additiven Funktion μ fortgesetzt werden. Eine gewöhnliche Intervallfunktion erzeugt dabei einen Inhalt im Sinne von Beispiel 10.3 und eine Boolesche Intervallfunktion einen Inhalt im Sinne von Beispiel 10.1, also einen Booleschen Homomorphismus. Letzteres erkennt man, da dann zu den Elementarbereichen $E_1 \supset E_2$ in dem nichttrivialen Fall $E_1 \neq E_2$ paarweise disjunkte I_ν aus $\mathfrak{J}^{(n)}$ $(\nu = 1,\dots,k)$ existieren, so daß mit $l < k$

$$\mu(E_1) \ominus \mu(E_2) = \bigvee_{\nu=1}^{k} \lambda(I_\nu) \ominus \bigvee_{\nu=1}^{l} \lambda(I_\nu) = \bigvee_{\nu=l+1}^{k} \lambda(I_\nu) =$$

$\mu(E_1 - E_2)$ gilt.

Formal analog zu /25, S. 40/ kann gezeigt werden, daß $\mu : \mathcal{E}^{(n)} \longrightarrow F$ σ-additiv wird, sobald λ diese Eigenschaft besitzt. Wegen Satz 10.6 c) ergibt sich daraus die Gültigkeit der folgenden Behauptung.

<u>Satz 10.8.</u> Mit $\lambda : \mathfrak{J}^{(n)} \longrightarrow F$ als gewöhnlicher oder Boolescher Intervallfunktion wird der eindeutig bestimmte Inhalt $\mu : \mathcal{E}^{(n)} \longrightarrow F$ genau dann ($\updownarrow$)-stetig, wenn λ σ-additiv ist.

Durch direkte Verallgemeinerung einer in /38, S. 313/ formulierten Aussage, wo F speziell eine vollständige Boolesche Algebra ist, erhält man den folgenden Satz.

Satz 10.9. Jede ($\downarrow$)-stetige Intervallfunktion des speziellen Typs $\lambda : \mathcal{J}^{(1)} \longrightarrow F$ ist σ-additiv.

Beweis. Mit $I = [a,b)$ und einer Folge I_ν von paarweise disjunkten Intervallen aus $\mathcal{J}^{(1)}$ gelte $I = \bigcup I_\nu$. Weiter sei T die Gesamtheit der reellen t mit $a < t \leq b$, für die das Intervall $[a,t)$ als Vereinigung eines Teilsystems Z_t von $Z := \{I_\nu\}$ darstellbar ist und die Gleichung

$$\lambda([a,t)) = \sum_{(Z_t)} \lambda(I_\nu)$$

erfüllt ist. Da es in Z ein Intervall der Gestalt $[a,c)$ geben muß, kann T nicht leer sein. Vorerst wird gezeigt, daß $s := \sup T$ zu T gehört. Gibt es dabei in Z ein nichtleeres Intervall der Gestalt $[r,s)$, so ist dies trivialerweise der Fall. Wir können uns also auf den Fall beschränken, in dem es kein zu Z gehöriges Intervall der Gestalt $[r,s)$ gibt. Offensichtlich gilt erst einmal

$$[a,s) = \bigcup_{t \in T} [a,t) = \bigcup_{t \in T} \Big(\bigcup_{(Z_t)} I_\nu \Big) = \bigcup_{(Z_s)} I_\nu ,$$

womit die erste Bedingung bezüglich der Zugehörigkeit zu T erfüllt wäre. Wegen der ($\downarrow$)-Stetigkeit von λ erhält man jetzt

$$\lambda([a,s)) = \sup_{t \in T} \lambda([a,t)) = \sup_{t \in T} \Big(\sum_{(Z_t)} \lambda(I_\nu) \Big) = \sum_{(Z_s)} \lambda(I_\nu),$$

denn aus $I_\nu \subset [a,s)$ folgt hier schon $I_\nu \subset [a,t)$ für ein $t \in T$ mit $t < s$. Es gilt also $s \in T$. Der Nachweis von $[a,b) = [a,s)$ vervollständigt den Beweis. Im Falle $s < b$ würde in Z ein nichtleeres Intervall der Gestalt $[s,s')$ existieren, was den Widerspruch zwischen $s' \in T$ und $s' > \sup T$ zur Folge hätte.

Eine Intervallfunktion λ ist bereits ($\uparrow$)-stetig, wenn aus $[a,b_n) \uparrow [a,b)$ stets $\lambda([a,b_n)) \uparrow \lambda([a,b))$ folgt. Deshalb können die folgenden Beispiele in der angegebenen Weise hier eingeordnet werden.

Beispiel 10.4. Mit F als m-vollständigem Modul und $f : R \longrightarrow F$ als einer ($\uparrow$)-stetigen Funktion wird durch $\lambda([a,b)) := f(b) - f(a)$ eine ($\uparrow$)-stetige Intervallfunktion $\lambda : \mathcal{J}^{(1)} \longrightarrow F$ erklärt. Ihre Fortsetzung $\mu : \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow F$ wird also ein ($\updownarrow$)-stetiger Inhalt.

Beispiel 10.5. In /38/ wird mit F als einer vollständigen Booleschen Algebra jede Familie von Elementen $e_\alpha \in F$ $(-\infty < \alpha < +\infty)$ als eine Zerlegung der Einheit bezeichnet, wenn

$$e_\alpha \leq e_\beta \text{ für } \alpha \leq \beta ,$$

$$\sup_{\alpha \in R} e_\alpha = 1 \text{ und } \inf_{\alpha \in R} e_\alpha = 0$$

sowie

$$\sup_{\alpha < \beta} e_\alpha = e_\beta \text{ gilt.}$$

Durch $\lambda([\alpha,\beta)) := e_\beta \ominus e_\alpha = e_\beta \wedge \bar{e}_\alpha$ wird dann eine ($\uparrow$)-stetige Boolesche Intervallfunktion definiert, deren Fortsetzung $\mu : \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow F$ einen ($\updownarrow$)-stetigen Inhalt darstellt.

Bemerkung 10.5. Für jede gewöhnliche und jede Boolesche Intervallfunktion $\lambda : \mathcal{J}^{(n)} \longrightarrow F$ folgt bei $\mathcal{E}$-regulärem F aus der ($\uparrow$)-Stetigkeit bereits die σ-Additivität. Unter Benutzung des Überdeckungssatzes von Heine-Borel kann nämlich gezeigt werden, daß mit jeder disjunkten

Vereinigung $[c,d) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_k,d_k)$ und $[e_k,d_k) \subset (e_k,d_k)$

stets

$$\sup_{(\ell)} r\left(\sum_{k=1}^{\ell} \lambda[e_k,d_k) \ominus \lambda[c_k,d_k)\right) \geq r\left(\lambda[c,d) \ominus \sum_{k=1}^{\infty} \lambda[c_k,d_k)\right)$$

gilt. Über den Nachweis der ($\downarrow$)-Stetigkeit von λ wird die Behauptung dann verifizierbar.

Definition 10.7. Ist $\tilde{G}$ ein m-vollständiger Rieszscher Raum, $\tilde{H}$ ein Rieszscher Teilraum von $\tilde{G}$ und F ein m-vollständiger Vektorraum, dann soll jede isotone und lineare Funktion $\tilde{\mu} : \tilde{H} \longrightarrow F$ hier eine Linearform genannt werden.

Satz 10.10. Jeder Linearform $(\tilde{G}, \tilde{\mu} : \tilde{H} \longrightarrow F)$ entspricht eineindeutig ein Inhalt $(G, \mu : H \longrightarrow F)$ mit $G = \tilde{G}_+$, $H = \tilde{H}_+$, $\tilde{H} = H - H$, $L = R_+ \setminus \{0\}$ und $\tilde{\mu}(h) = \mu(h_+) - \mu(h_-)$. Bezüglich dieser umkehrbar eindeutigen Zuordnung wird $\tilde{\mu}$ genau dann $(\updownarrow)$-stetig bzw. $(\updownarrow)$-abgeschlossen, wenn μ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Beweis. Die Richtigkeit der Behauptungen folgt routinemäßig aus der Definition des Inhalts μ und dem als L-Raum aufgefaßten positiven Kegel G von $\tilde{G}$.

Beispiel 10.6. Mit $\tilde{G} = \mathcal{F}(X,R)$, $\mathcal{L}$ als einer reellen Verbandsalgebra (vgl./8, S. 163 u. 172/) und F als dem Vektorraum $\mathcal{Y}(\mathcal{H})$ wird das in /8/ erklärte Spektralintegral $J : \mathcal{L} \longrightarrow F$ eine spezielle Linearform. Die dort auf Seite 165 angegebene σ-Positivität entspricht bei verbandsgeordnetem $\mathcal{L}$ der $(\updownarrow)$-Stetigkeit von J.

Beispiel 10.7. Jede Linearform $\tilde{\mu} : \tilde{H} \longrightarrow F$ mit $\tilde{\mu}(h \vee h') = \tilde{\mu}(h) \vee \tilde{\mu}(h')$ $(\forall\, h,h' \in \tilde{H})$ stellt einen auf $\tilde{H}$ erklärten Rieszhomomorphismus dar. Dieser Homomorphismus hängt nach Satz 10.10 in eineindeutiger Weise mit einem Inhalt $\mu : H \longrightarrow F$ zusammen. Ein zu einer Linearform gehöriger Inhalt μ, für den stets $\mu(h \vee h') = \mu(h) \vee \mu(h')$ gilt, erzeugt dabei bereits einen Rieszhomomorphismus von $\tilde{H}$ in F.

11. Eine Meßbarkeitsdefinition und ihre Auslegung

Die hier gewählte Meßbarkeitsdefinition bezüglich eines äußeren Inhalts stellt gegenüber der ansonsten üblichen eine gewisse Einschränkung dar, denn sie ist nur sinnvoll bei Beschränkung auf "endliche" äußere Inhalte. Andererseits wird sie beispielsweise jedoch bei der Fortsetzung von Booleschen Homomorphismen (vgl. Beispiel 10.2 und Bemerkung 10.3) direkt anwendbar. Entsprechendes gilt bezüglich des Vergleiches mit der in /7, II/ gegebenen μ-Meßbarkeit in C-Verbänden.

<u>Definition 11.1.</u> Ist $(G, \mu^*: H^* \longrightarrow F)$ ein äußerer Inhalt, dann heißt $g \in G$ <u>meßbar (bezüglich μ^*)</u>, wenn für beliebige h^* aus H^*

$$\mu^*(h^* \ominus g) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g) \tag{11.1}$$

gilt. Ein meßbares Element g mit $g \in H^*$ wird als <u>summierbar</u> bezeichnet. Die Gesamtheit der meßbaren Elemente wird durch H^*_m, die der summierbaren durch H^*_s und die Einschränkung von μ^* auf H^*_s durch μ^*_s gekennzeichnet.

Da μ^* insbesondere isoton und subadditiv ist, wird $g \in G$ genau dann meßbar, wenn für alle $h^* \in H^*$ eine der folgenden Relationen erfüllt ist.

$$\mu^*(h^* \wedge g) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \ominus g) \tag{11.2}$$

$$\mu^*(h^* \ominus g) = \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g) \tag{11.3}$$

$$\mu^*(h^* \wedge g) = \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \ominus g) \tag{11.4}$$

<u>Satz 11.1.</u> Für einen beliebigen äußeren Inhalt sind die folgenden Eigenschaften erfüllt.

a) Es gilt $0 \in H^*_s$, $H^*_m = H^*_m(+,\wedge)$ und $H^*_s = H^*_s(+,\wedge)$.

b) Aus $\mu^*(g) = 0$ folgt stets $g \in H^*_s$.

c) Mit $h', h'' \in H^*_m$, $h' \leq g \leq h''$ und $\mu^*(h'' \ominus h') = 0$ gilt auch $g \in H^*_m$.

d) Aus h', $h'' \in H_s^*$, $h' \leq g \leq h''$ und $\mu^*(h') = \mu^*(h'')$ folgt stets $g \in H_s^*$.

e) Sind sämtliche $\alpha \in L$ additiv, so gilt $\alpha H_m^* = H_m^*$ und $\alpha H_s^* = H_s$. μ_H^* wird dann ebenfalls L-homogen und damit ein Prämaß.

Beweis.

zu a): Hier gilt die erste Behauptung trivialerweise und aus der zweiten folgt die dritte, so daß lediglich $H_m^* = H_m^*(+,\wedge)$ gezeigt werden muß. Aus $g, h \in H_m^*$ und $h^* \in H^*$ folgt mit (11.4) und (4.12) sofort

$\mu^*(h^* \wedge g \wedge h) = \mu^*(h^* \wedge g) \ominus \mu^*((h^* \wedge g) \ominus h) =$
$[\mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \ominus g)] \ominus \mu^*((h^* \wedge g) \ominus h) =$
$\mu^*(h^*) \ominus [\mu^*(h^* \ominus g) + \mu^*((h^* \wedge g) \ominus h)]$, woraus man mit der Subadditivität von μ^*, (5.15) und (4.11) die Relationen

$\mu^*(h^* \wedge g \wedge h) \leq$
$\mu^*(h^*) \ominus \mu^*([h^* \ominus (h^* \wedge g)] + [(h^* \wedge g) \ominus (h^* \wedge g \wedge h)]) \leq$
$\mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \ominus (h^* \wedge g \wedge h)) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \ominus (g \wedge h))$

erhält. Hiermit wäre die Meßbarkeit von $g \wedge h$ gezeigt und die von $g + h$ folgt, da wegen (4.12) und (11.3)

$\mu^*(h^* \ominus (g + h)) = \mu^*((h^* \ominus g) \ominus h) = \mu^*(h^* \ominus g) \ominus \mu^*((h^* \ominus g) \wedge h) =$
$\mu^*(h^*) \ominus [\mu^*(h^* \wedge g) + \mu^*((h^* \ominus g) \wedge h)]$ gilt, woraus man mit der Subadditivität von μ^* und (5.17) sofort

$\mu^*(h^* \ominus (g + h)) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge (g + h))$ erhält.

zu b): Diese Behauptung gilt trivialerweise.

zu c): Mit $\mu^*(h^* \ominus g) \leq \mu^*(h^* \ominus h'') + \mu^*(h'' \ominus h') \leq$
$\mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge h'') \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g)$ ist hier alles gezeigt.

zu d): Diese Aussage erhält man als unmittelbare Folgerung von c).

<u>zu e):</u> Aus $g \in H_m^*$ und der vorausgesetzten Additivität folgt wegen Satz 5.5, (5.13) und $\alpha H^* = H^*$ ($\forall \alpha \in L$) über $\mu^*(\alpha h^* \ominus \alpha g) = \alpha\mu^*(h^* \ominus g) = \alpha[\mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g)] = \alpha\mu^*(h^*) \ominus \alpha\mu^*(h^* \wedge g) = \mu^*(\alpha h^*) \ominus \mu^*(\alpha h^* \wedge \alpha g)$ die Beziehung $\alpha g \in H_m^*$.

<u>Satz 11.2.</u> Zu einem ($\uparrow$)-stetigen Prämaß $\mu : H \longrightarrow F$ existiert die ($\uparrow$)-Abschließung $\bar{\mu} : \bar{H} \longrightarrow F$, wenn H ein Teilverband von G ist. Dabei wird $\bar{\mu}$ insbesondere ein ($\uparrow$)-abgeschlossenes Prämaß mit verbandsgeordnetem Definitionsbereich $\bar{H}$.

<u>Beweis.</u> Wegen Satz 10.2 sind die Voraussetzungen von Satz 8.1 erfüllt, so daß der erste Teil gilt. Dabei wird $\bar{\mu}$ offenbar L-homogen. Da H gegen $\bar{H}$ ($\uparrow$)-dicht liegt, gibt es zu beliebigen $h', h'' \in \bar{H}$ Folgen h_n' und h_n'' aus H mit $h_n' \uparrow h'$ und $h_n'' \uparrow h''$. Aus Satz 5.2 folgt $h_n' \wedge h_n'' \leq h_n' \vee h_n'' \leq h_n' + h_n''$, so daß wegen $\sup\mu(h_n' + h_n'') \leq \sup\mu(h_n') + \sup\mu(h_n'')$, der m-Vollständigkeit, (7.1), (7.3) und (7.4) auch der Rest folgt.

<u>Satz 11.3.</u> Jeder ($\uparrow$)-stetige äußere Inhalt $\mu' : H' \longrightarrow F$ kann im Sinne von Satz 8.1 zu einem äußeren Maß $\mu^* : H^* \longrightarrow F$ fortgesetzt werden. Dabei gilt $H_m' = H_m^*$ und $H_s' \subset H_s^*$.

<u>Beweis.</u> Wegen Satz 11.2 braucht nur gezeigt zu werden, daß aus $h^* \in H^*$, $g \in G$ und $g \leq h^*$ stets $g \in H^*$ folgt. Es sei h_n' eine in H' liegende Folge mit $h_n' \uparrow h^*$. Da H' ein Ideal in G ist, folgt $h_n' \wedge g \in H'$ ($\forall n \in N$), so daß über $h_n' \wedge g \uparrow g$ und $\mu'(h_n' \wedge g) \leq \mu^*(h^*)$ sofort $g \in H^*$ entsteht. Aus der μ'-Meßbarkeit folgt durch Grenzübergang in $\mu'(h_n' \ominus g) \leq \mu'(h_n') \ominus \mu'(h_n' \wedge g)$ die μ^*-Meßbarkeit.

<u>Satz 11.4.</u> Bei $(\uparrow)$-stetigem äußeren Inhalt μ^* wird H^*_m $(\updownarrow)$-abgeschlossen in G und H^*_s schwach $(\updownarrow)$-abgeschlossen in G. Die Einschränkung μ^*_s wird $(\updownarrow)$-stetig und bei äußeren Maß μ^* sogar $(\updownarrow)$-abgeschlossen.

<u>Beweis.</u> Aus $\mu^*(h^* \ominus g_n) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g_n)$ und $g_n \uparrow g$ folgt $\mu^*(h^* \ominus g) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g_n)$. Mit der $(\uparrow)$-Stetigkeit von μ^* entsteht durch Grenzübergang $g \in H^*_m$, womit die $(\uparrow)$-Abgeschlossenheit von H^*_m gezeigt wäre. Im Falle $g_n \downarrow g$ erhält man wegen $h^* \ominus g_n \uparrow h^* \ominus g$ die Relationenkette
$\mu^*(h^* \ominus g) \leq \sup \mu^*(h^* \ominus g_n) \leq \mu^*(h^*) \ominus \inf \mu^*(h^* \wedge g_n) \leq$
$\mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g)$, aus der $g \in H^*_m$, also die $(\downarrow)$-Abgeschlossenheit von H^*_m, und
$\inf \mu^*(h^* \wedge g_n) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \ominus g) \leq \mu^*(h^* \wedge g)$ entnommen werden können. Mit $g_n \in H^*_s$ $(\forall\ n \in N)$ und $h^* = g_1$ liefert letzteres die $(\updownarrow)$- Stetigkeit von μ^*_s.

<u>Satz 11.5.</u> Ist G in Definition 11.1 speziell eine Boolesche Algebra, so wird H^*_m eine Teilalgebra von G und H^*_s ein Teilring von G. Im Falle $L = \{I\}$ wird $\mu^*_s : H^*_s \longrightarrow F$ dann ein Inhalt.

<u>Beweis.</u> Das Einselement von G ist trivialerweise meßbar. Wegen (11.2) wird mit g auch das Komplement g^c meßbar, so daß Satz 11.1 a) die Behauptung liefert.

<u>Satz 11.6.</u> Ist G der positive Kegel eines m-vollständigen Rieszschen Raumes, F ein Vektorraum und $(G, \mu^* : H^* \longrightarrow F)$ ein R_+-homogener äußerer Inhalt, so folgt aus $g \in H^*_m$ und $g' \in H^*_s$ stets $g \ominus g' \in H^*_m$. Die Einschränkung μ^*_s wird ein R_+-homogener Inhalt.

<u>Beweis.</u> Wegen Satz 11.1 a) gehört $g'' = g \wedge g'$ zu H^*_s. Somit folgt $\mu^*(h^* \wedge (g \ominus g')) \leq \mu^*(h^* \wedge (g - g'')) \leq$
$\mu^*((h^* + g'') \wedge g) - \mu^*(g'') \leq$

$$\mu^*(h^* + g'') - \mu^*\big((h^* + g'') - g \wedge (h^* + g'')\big) - \mu^*(g'') \leq$$
$$\mu^*(h^*) - \mu^*\big(h^* - (g - g'') \wedge h^*\big) \leq \mu^*(h^*) - \mu^*\big(h^* \ominus (g \ominus g')\big),$$

so daß $g \ominus g' \in H_m^*$ gilt. Hieraus folgt insbesondere, daß H_s^* ein Teilraum von G ist, wenn man Satz 11.1 a) und e) heranzieht. Die Homogenität von μ_s^* folgt mit $L = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ebenfalls aus Satz 11.1 e).

<u>Satz 11.7.</u> Es sei $G = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}_+)$, F ein m-vollständiger Vektorraum, $L = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $(G, \mu^* : H^* \longrightarrow F)$ ein $(\uparrow)$-stetiger äußerer Inhalt. Existiert dann eine Folge f_n aus H_s^* mit $f_n \uparrow 1_X$, so gelten die folgenden Behauptungen.

a) H_m^* wird ein Teilraum von G.

b) Die Gesamtheit der μ^*-meßbaren charakteristischen Funktionen bildet eine σ-Algebra $\mathfrak{A}^*$.

c) Die μ^*-Meßbarkeit einer Funktion $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}_+)$ stimmt jetzt mit der üblichen $\mathfrak{A}^*$-Meßbarkeit überein.

<u>Beweis.</u>

<u>zu a):</u> Aus $g, h \in H_m^*$ folgt mit $h_n = (n \cdot f_n) \wedge h$ sofort $h_n \in H_s^*$ und hieraus wegen Satz 11.6 und Satz 11.4 $g \ominus h_n \downarrow g \ominus h \in H_m^*$.

<u>zu b):</u> Diese Behauptung folgt aus a) und $1_X \in H_m^*$.

<u>zu c):</u> Da jede $\mathfrak{A}^*$-meßbare Funktion, die zu $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}_+)$ gehört, sich als Grenzwert einer isotonen Folge von Treppenfunktionen über $\mathfrak{A}^*$ darstellen läßt, folgt wegen Satz 11.4 aus der $\mathfrak{A}^*$-Meßbarkeit die μ^*-Meßbarkeit. Umgekehrt gilt mit $f \in H_m^*$ wegen $1_X \in H_m^*$ und a) auch $f_n = 1_X \wedge n(f \ominus \alpha 1_X) \in H_m^*$. Daraus folgt über $f_n \uparrow \{f > \alpha\} \in H_m^*$ die $\mathfrak{A}^*$-Meßbarkeit von f.

12. Die Fortsetzung von Prämaßen und Inhalten

Um Inhalte fortzusetzen, werden jetzt äußere Inhalte bzw. Maße konstruiert und deren summierbare Einschränkungen betrachtet. Der folgende Satz stellt ein wesentliches Hilfsmittel bei der Konstruktion von äußeren Maßen dar.

Satz 12.1. Ist $\mu : H \longrightarrow F$ ein $(\uparrow)$-stetiger Inhalt, so gelten die folgenden Behauptungen.

a) Die $(\uparrow)$-Abschließung von μ stellt ein $(\uparrow)$-abgeschlossenes Prämaß $\bar{\mu} : \bar{H} \longrightarrow F$ mit $\bar{H} = \bar{H}(+,\wedge,\vee)$ dar.

b) Aus $\bar{h} \in \bar{H}$ und $h \in H$ folgt dabei stets $(\bar{h} \ominus h) \in \bar{H}$ und $\bar{\mu}(\bar{h} \ominus h) \leq \bar{\mu}(\bar{h}) \ominus \bar{\mu}(\bar{h} \wedge h)$.

c) Für beliebige $\bar{g}_i, \bar{h}_i \in \bar{H}$ $(i = 1,2)$ gilt

$$\bar{\mu}(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2) \ominus \bar{\mu}(\bar{g}_1 \vee \bar{g}_2) \leq \sum_{i=1}^{2} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \bar{\mu}(\bar{h}_i \wedge \bar{g}_i). \tag{12.1}$$

d) Ist bei verbandsgeordnetem F der Inhalt μ insbesondere $(\vee)$-treu[1], so trifft dies auch auf das Prämaß $\bar{\mu}$ zu.

Beweis. Mit den Sätzen 11.2, 10.4 und 10.6 a) folgt die in a) aufgestellte Behauptung. Aus $h_n \uparrow \bar{h}$, $\mu(h_n) \uparrow f$ und $h_n \in H$ $(\forall\, n \in N)$ folgt $h_n \ominus h \uparrow \bar{h} \ominus h$ und $\mu(h_n \ominus h) \leq f$, so daß wegen der m-Vollständigkeit auch b) gilt.
Mit (7.2), (7.3), (7.4) und Satz 10.6 c) erhält man durch Grenzübergang die Richtigkeit von c).
Die letzte Behauptung folgt sofort aus (7.4).

[1] Für beliebige a,b aus dem Definitionsbereich von μ gilt $\mu(a \vee b) = \mu(a) \vee \mu(b)$.

<u>Satz 12.2.</u>

a) Jedes Prämaß $(G, \bar{\mu}: \bar{H} \longrightarrow F)$ kann bei g-vollständigem F auf das durch $\bar{H}$ in G erzeugte Ideal $\bar{H}^*$ zu einem äußeren Inhalt μ^* fortgesetzt werden, wenn $\bar{H} = \bar{H}(+, \vee, \wedge)$ gilt. Diese Fortsetzung erfolgt durch

$$\mu^*(g) := \inf \bar{\mu}(\bar{H}_g) \tag{12.2}$$

mit $\bar{H}_g$ als Menge der oberen Schranken von g aus $\bar{H}$.

b) Ein Element g aus G ist dann bereits μ^*-meßbar, wenn (11.1) lediglich für alle $h^* \in \bar{H}$ gilt.

c) Ist $\bar{\mu}: \bar{H} \longrightarrow F$ ein $(\uparrow)$-abgeschlossenes Prämaß mit $\bar{H} = \bar{H}(+, \vee, \wedge)$, das der Ungleichung (12.1) genügt, so wird diese Fortsetzung μ^* bei $\mathcal{E}$-regulärem F ein $(\uparrow)$-stetiger äußerer Inhalt.

d) Speziell bei vollständigem Rieszschem Raum F und $(\vee)$-treuem $\bar{\mu}$ wird der gemäß (12.2) erzeugte äußere Inhalt μ^* ebenfalls $(\vee)$-treu.

<u>Beweis.</u>

<u>zu a):</u> $\bar{H}_g$ ist für jedes $g \in \bar{H}^*$ ein Teilverband von G, so daß $\bar{\mu}(\bar{H}_g)$ eine nach unten gerichtete und durch 0 nach unten beschränkte Teilmenge von F ist. Deshalb existiert ihre untere Grenze in F. μ^* wird trivialerweise eine isotone Fortsetzung von $\bar{\mu}$, die wegen

$$\mu^*(g_1 + g_2) \leq \inf \bar{\mu}(\bar{H}_{g_1} + \bar{H}_{g_2}) \leq \inf \{\bar{\mu}(\bar{H}_{g_1}) + \bar{\mu}(\bar{H}_{g_2})\}$$

und (5.8) subadditiv ist. Mit $\alpha \in L$ und $h = \alpha h'$ gilt $h \geq \alpha g$ genau dann, wenn $h' \geq g$ erfüllt ist. Hieraus folgt $\bar{H}_{\alpha g} = \alpha \bar{H}_g$, so daß sich wegen (5.13) und der L-Homogenität von $\bar{\mu}$ über

$$\alpha \mu^*(g) = \alpha \inf \bar{\mu}(\bar{H}_g) = \inf \alpha \bar{\mu}(\bar{H}_g) = \inf \bar{\mu}(\alpha \bar{H}_g) = \mu^*(\alpha g)$$

die L-Homogenität von μ^* ergibt.

<u>zu b):</u> Aus $g^* \in \bar{H}^*$ und $h^* \in \bar{H}_{g^*}$ folgt laut Voraussetzung

$$\mu^*(g^* \ominus g) \leq \mu^*(h^* \ominus g) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(h^* \wedge g) \leq \mu^*(h^*) \ominus \mu^*(g^* \wedge g).$$

Wegen Satz 10.1 gilt

$\mu^*(g^*) \ominus \mu^*(g^* \wedge g) = \inf\{\bar{\mu}(\bar{H}_{g^*}) \ominus \mu^*(g^* \wedge g)\}$, womit die μ^*-Meßbarkeit von g bewiesen wäre.

<u>zu c):</u> Für $i = 1,2$ folgt mit $g_i \in \bar{H}^*$ und beliebigen $\bar{h}_i, \bar{g}_i \in \bar{H}_{g_i}$ aus (12.1) sofort

$$\bar{\mu}(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2) \ominus \bar{\mu}(\bar{g}_1 \vee \bar{g}_2) \leq \sum_{i=1}^{2} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \mu^*(g_i) .$$

Wegen $\bar{H}_{g_1 \vee g_2} = \bar{H}_{g_1} \vee \bar{H}_{g_2}$ und (5.9) entsteht

$$\bar{\mu}(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2) \ominus \mu^*(g_1 \vee g_2) \leq \sum_{i=1}^{2} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \mu^*(g_i) .$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir daraus für beliebige $\bar{h}_i \in \bar{H}_{g_i}$

$$\bar{\mu}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bar{h}_i\right) \ominus \mu^*\left(\bigvee_{i=1}^{n} g_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \mu^*(g_i). \qquad (*)$$

Jetzt wird gezeigt, daß aus $g \in \bar{H}^*$ und $g_n \uparrow g$ stets $\mu^*(g_n) \uparrow \mu^*(g)$ folgt. Es sei $h'_n \in \bar{H}_{g_n}$ und h' ein festgehaltenes Element aus $\bar{H}_g$. Dann gilt mit $\bar{h}_n = h' \wedge h'_n$ stets $\bigvee_{i=1}^{n} \bar{h}_i \in \bar{H}_{g_n}$, $\bigvee_{i=1}^{\infty} \bar{h}_i \in \bar{H}_g$ und $\bar{\mu}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bar{h}_i\right) \uparrow \bar{\mu}\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bar{h}_i\right)$, denn $\bar{\mu}$ wurde als $(\uparrow)$-abgeschlossenes Prämaß mit $\bar{H} = \bar{H}(+, \vee, \wedge)$ vorausgesetzt. Wegen $(*)$ erhalten wir für die so vereinbarten Elemente und beliebiges $n \in N$

$$\bar{\mu}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bar{h}_i\right) \ominus \sup \mu^*(g_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \mu^*(g_i).$$

Da F als ε-regulär vorausgesetzt wurde, folgt

$$r\left(\bar{\mu}\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \bar{h}_i\right) \ominus \sup \mu^*(g_n)\right) \leq \sup_{(n)} r\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \mu^*(g_i)\right)$$

für beliebige $\bar{h}_i \in h' \wedge \bar{H}_{g_i}$. Hieraus entsteht

$$r\left(\mu^*(g) \ominus \sup \mu^*(g_n)\right) \leq \sup_{(n)} r\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(\bar{h}_i) \ominus \mu^*(g_i)\right).$$

Wegen (10.1) bilden die $F_i = \{\bar{\mu}(h' \wedge \bar{H}_{g_i}) \ominus \mu^*(g_i)\}$ ein

abzählbares System von Nullmengen aus F, so daß man
$\mu^{\nu}(g) \ominus \sup \mu^{*}(g_n) \leq 0$ und damit $\mu^{*}(g_n) \uparrow \mu^{*}(g)$ erhält.
zu d): Wegen $\bar{H}_{g_1 \vee g_2} = \bar{H}_{g_1} \vee \bar{H}_{g_2}$ erhalten wir mit F als Rieszschem Raum

$$\mu^{*}(g_1 \vee g_2) = \inf \bar{\mu}(\bar{H}_{g_1} \vee \bar{H}_{g_2}) = \inf\{\bar{\mu}(\bar{H}_{g_1}) \vee \bar{\mu}(\bar{H}_{g_2})\} =$$
$$\mu^{*}(g_1) \vee \mu^{*}(g_2).$$

Folgerung. Ist $\bar{\mu}$ in Satz 12.2 a) speziell ein Inhalt, so wird μ^{*}_s eine Fortsetzung von $\bar{\mu}$.

Beweis. Dies geht direkt aus b) hervor.

Bemerkung 12.1. Diese Folgerung gewährleistet jetzt wegen Satz 11.5 bzw. Satz 11.6 die Fortsetzung der in den Beispielen 10.1, 10.2 und 10.3 angegebenen Inhalte und die Fortsetzung des in Satz 10.10 angegebenen R_+-homogenen Inhaltes. Diese Inhalte μ^{*}_s besitzen insbesondere die in Satz 11.1 formulierten Eigenschaften b) und d).

Bemerkung 12.2. Ist F insbesondere vollständig, so bleiben die Behauptungen a) und b) von Satz 12.2 gültig, wenn die Bedingung $\bar{H} = \bar{H}(+,\vee,\wedge)$ durch $\bar{H} = \bar{H}(+)$ abgeschwächt wird.

Satz 12.3.

a) Jeder $(\uparrow)$-stetige Inhalt $\mu : H \longrightarrow F$ kann bei g-vollständigem F gemäß

$$\mu^{*}(g) := \inf_{U_g}(\sup \mu(h_n)) \tag{12.3}$$

zu einem äußeren Inhalt μ^{*} fortgesetzt werden, wobei U_g die Gesamtheit der isotonen Folgen h_n aus H darstellt, für die $\sup h_n$ und $\sup \mu(h_n)$ existieren sowie $g \leq \sup h_n$ gilt. Aus $g \in G$ folgt insbesondere genau dann $g \in \bar{H}^{\nu}$, wenn eine derartige Folge existiert.

b) Dabei wird μ^{*}_s zu einer Fortsetzung von μ.

c) Speziell bei $\mathcal{E}$-regulärem F wird μ^* hier ein ($\uparrow$)-stetiger äußerer Inhalt.

d) Falls F ein vollständiger Rieszscher Raum und der Inhalt μ (V)-treu ist, so wird μ^* ein (V)-treuer äußerer Inhalt.

<u>Beweis.</u> Die Behauptungen a) bis d) erhält man sofort durch aufeinanderfolgende Anwendung der in den Sätzen 12.1 und 12.2 entsprechend gekennzeichneten Aussagen.

<u>Folgerung.</u> Unter den in c) gegebenen zusätzlichen Voraussetzungen wird $g \in G$ genau dann μ^*-meßbar, wenn (11.1) lediglich für alle $\mathring{h} \in H$ gilt.

<u>Beweis.</u> Da μ^* ($\uparrow$)-stetig ist und $\mathring{H} \subset \mathring{H}^*$ gilt, folgt durch Grenzübergang unter Berücksichtigung von 12.2 b) diese Behauptung.

<u>Satz 12.4.</u> Bei $\mathcal{E}$-regulärem und g-vollständigem F sei $\mu : H \longrightarrow F$ ein ($\uparrow$)-stetiger Inhalt. Dann liegt mit der ($\updownarrow$)-Abschließung des durch (12.3) erklärten äußeren Inhalts ein äußeres Maß $\mu^* : H^* \longrightarrow F$ vor. Die zu diesem äußeren Maß gehörige Einschränkung μ^*_s wird eine ($\updownarrow$)-abgeschlossene Fortsetzung von μ.

<u>Beweis.</u> Die wegen Satz 12.3 c) existierende ($\uparrow$)-Abschließung wird nach Satz 11.3 ein äußeres Maß μ^*. Aus Satz 12.3 b) und dem zweiten Teil von Satz 11.3 erhält man dann, daß μ^*_s eine Fortsetzung von μ ist. Mit Satz 11.4 folgt schließlich die ($\updownarrow$)-Abgeschlossenheit von μ^*_s.

<u>Folgerung 1.</u> Ein Element g aus G wird bezüglich des in Satz 12.4 konstruierten äußeren Maßes bereits dann μ^*-meßbar, wenn (11.1) lediglich für alle $\mathring{h}$ aus H gilt.

<u>Beweis.</u> Aus der Folgerung von Satz 12.3 und aus Satz 11.3 ergibt sich die Richtigkeit dieser Behauptung.

Folgerung 2. Speziell mit F als Rieszschem Raum und μ als (V)-treuem Inhalt, wird das hier konstruierte äußere Maß ebenfalls (V)-treu.

Beweis. Ausgehend von Satz 12.3 d) folgt dies unmittelbar durch Grenzübergang.

Bemerkung 12.3. Wird bei ε-regulärem F auf eine nochmalige Fortsetzung wie in Satz 12.4 verzichtet und zur Behandlung der folgenden Beispiele lediglich der Satz 12.3 herangezogen, so entstehen ($\frac{\uparrow}{\downarrow}$)-stetige Inhalte mit schwach ($\frac{\uparrow}{\downarrow}$)-abgeschlossenem Definitionsbereich. Der durch Satz 12.3 c) gegebene ($\uparrow$)-stetige äußere Inhalt könnte bereits als Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen dienen. Die Verwendung von Satz 12.4 liefert jedoch insbesondere mit F als Rieszschem Raum bessere Abgeschlossenheitseigenschaften von fortgesetzten Inhalten und Linearformen. In /24/ ist im Zusammenhang mit der dortigen Fortsetzungstheorie ein Beispiel angegeben, aus dem hervorgeht, daß die dort konstruierten Fortsetzungen im allgemeinen nur ($\frac{\uparrow}{\downarrow}$)-stetig und auf einem schwach ($\frac{\uparrow}{\downarrow}$)-abgeschlossenen Definitionsbereich erklärt sind.

Beispiel 12.1. Ist G eine m-vollständige und F eine vollständige Boolesche Algebra sowie $\mu : H \longrightarrow F$ ein auf einem Booleschen Teilring H von G erklärter σ-stetiger Homomorphismus, so kann dieser gemäß Satz 12.3 a) zu einem äußeren Inhalt $\mu^* : \bar{H}^* \longrightarrow F$ fortgesetzt werden. Wegen Satz 11.5 und Satz 12.3 b) wird $\mu^*_s : \bar{H}^*_s \longrightarrow F$ dann ein auf dem Teilring $\bar{H}^*_s$ erklärter Homomorphismus in F, der μ fortsetzt. Falls F ε-regulär ist und $1 \in \bar{H}^*_s$ gilt, dann stellt μ^*_s einen auf einer σ-regulär eingebetteten Teilalgebra $\bar{H}^*_s$ von G erklärten und σ-stetigen Homomorphismus dar (vgl. Beispiel 10.2). Dies folgt unmittelbar aus Satz 12.3 c) und Satz 11.4.

<u>Beispiel 12.2.</u> Mit G als m-vollständiger Boolescher Algebra, F als g-vollständigem Modul und $\mu : H \longrightarrow F$ als (†)-stetigem Inhalt können Satz 12.3 und Satz 11.5 ebenfalls angewandt werden, so daß mit μ_s^* ein Inhalt entsteht, der μ fortsetzt. Bei ε-regulärem F kann μ dann nach Satz 12.4 zu einem Maß μ_s^* fortgesetzt werden.

<u>Beispiel 12.3.</u> Falls μ der einer (†)-stetigen Linearform $\tilde{\mu}$ zugeordnete R_+-homogene Inhalt ist, erhält man mit Satz 12.3 und Satz 11.6, daß μ_s^* ein R_+-homogener Inhalt wird, der μ fortsetzt. Satz 10.10 liefert dann über

$$\tilde{\mu}_s(h) := \mu_s^*(h_+) - \mu_s^*(h_-)$$

eine Fortsetzung der Linearform $\tilde{\mu}$. Bei ε-regulärem F kann μ dann gemäß Satz 12.4 zu einem R_+-homogenen Maß μ_s^* fortgesetzt werden. Damit existiert eine (†)-abgeschlossene Linearform, die $\tilde{\mu}$ fortsetzt.

<u>Beispiel 12.4.</u> Mit G als m-vollständigem und F als vollständigem Rieszschem Raum lassen sich wegen Satz 12.3 d) bzw. der Folgerung 2 von Satz 12.4 bezüglich eines σ-stetigen Rieszschen Homomorphismus $\tilde{\mu} : \tilde{H} \longrightarrow F$ völlig analoge Aussagen formulieren.

13. Eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen Integrals

Es sei $\vartheta : \mathcal{R} \to F$ ein Inhalt mit $\mathcal{R}$ als Teilring von $\mathcal{P}(X)$ und F als m-vollständigem Vektorraum. Mit $\alpha \in R$ und $A \in \mathcal{R}$ soll durch αA stets die zu $\mathcal{F}(X,R)$ gehörige Funktion $\alpha 1_A$ bezeichnet werden. Jede Funktion der Gestalt

$$h = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i \tag{13.1}$$

heißt dann eine Treppenfunktion über $\mathcal{R}$. Die Gesamtheit T der Treppenfunktionen über $\mathcal{R}$ bildet einen Rieszschen Teilraum von $\mathcal{F}(X,R)$ und durch

$$\tilde{\mu}(h) = \int h \, d\vartheta := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vartheta(A_i) \tag{13.2}$$

wird eine spezielle Linearform, das zu ϑ gehörige Elementarintegral, erklärt. Dieses Elementarintegral kann bei g-vollständigem F im Sinne der Bemerkung 12.1 zum Riemannschen Integral der Gestalt $\int h \, d\vartheta$ fortgesetzt werden. Der Schwerpunkt soll hier jedoch auf das Lebesguesche Integral gelegt werden.

Satz 13.1. Bei $(\frac{s}{s})$-stetigem Inhalt ϑ wird das durch (13.2) gegebene Elementarintegral ebenfalls $(\frac{s}{s})$-stetig.

Beweis. Aus $h_n \in T$, $h_1 \neq 0$ und $h_n \downarrow 0$ folgt für beliebiges reelles $\delta > 0$, daß durch

$$A_n(\delta) = \{ x \in X : h_n(x) > \delta h_1(x) \}$$

eine Folge $A_n(\delta)$ aus $\mathcal{R}$ mit $A_n(\delta) \downarrow 0$ und

$h_n(x) \leq (\operatorname{Max} h_1(x)) A_n(\delta) + \delta h_1(x)$ vorliegt. Wegen $\vartheta(A_n(\delta)) \downarrow^{n} 0$ gilt $\inf \tilde{\mu}(h_n) \leq \delta \tilde{\mu}(h_1)$. Da in jedem m-vollständigen Vektorraum F aus $f \in F_+$ stets $\frac{1}{k} f \downarrow^{k} 0$ folgt, erhält man $\tilde{\mu}(h_n) \downarrow 0$.

Satz 13.2. Es sei $\mathfrak{R}$ ein schwach ($\uparrow$)-abgeschlossener Teilring von $\mathfrak{P}(X)$. Sind f und g zwei zu $\mathfrak{F}(X,R_+)$ gehörige Funktionen, für die bei beliebigem reellen $\alpha > 0$ stets $\{\alpha < f\} \in \mathfrak{R}$ und $\{\alpha < g\} \in \mathfrak{R}$ gilt, so wird auch $\{\alpha < f \ominus g\} \in \mathfrak{R}$. Jede derartige Funktion läßt sich als Grenzwert einer isotonen Folge nichtnegativer Treppenfunktionen über $\mathfrak{R}$ darstellen.

Beweis. Mit $\Omega_\alpha = \{\omega \in \Omega : \alpha < \omega\}$ gilt

$$\{f \ominus g > \alpha\} = \{f - g > \alpha\} = \{f > g + \alpha\} =$$

$$\bigcup_{(\Omega_\alpha)} \left(\{f > \omega\} \cap \{\omega \geq \alpha + g\}\right) =$$

$$\bigcup_{(\Omega_\alpha)} \{f > \omega\} \setminus \{g > \omega - \alpha\} \subseteq \{f > \alpha\}$$, so daß wegen $\omega - \alpha > 0$ und der Abzählbarkeit von Ω die Behauptung bezüglich $f \ominus g$ erfüllt ist. Jedem derartigen f wird wegen

$\{\alpha < f \leq \beta\} = \{\alpha < f\} \setminus \{\beta < f\}$ durch

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \left\{\frac{k}{2^n} < f \leq \frac{k+1}{2^n}\right\} \tag{13.3}$$

solch eine Folge zugeordnet.

Satz 13.3. Es sei $\nu : \mathfrak{R} \longrightarrow F$ ein auf einem Teilring von $\mathfrak{P}(X)$ erklärtes Maß[1] und $\mu : T_+ \longrightarrow F$ die Einschränkung von (13.2) auf den positiven Kegel von T. Dann wird die ($\uparrow$)-Abschließung $\bar{\mu} : \bar{T}_+ \longrightarrow F$ ein Maß mit $L = R_+ \setminus \{0\}$ und $G = \mathfrak{F}(X,R_+)$. Für reelles $\alpha > 0$ folgt aus $g \in \bar{T}_+$ stets $\{\alpha < g\} \in \mathfrak{R}$.

[1] im Sinne von Definition 10.4

Beweis. Wegen Satz 13.1 ist μ ein ($\uparrow$)-stetiger Inhalt, so daß die ($\uparrow$)-Abschließung $\bar{\mu}$ existiert. Daß $\bar{T}_+ = \bar{T}_+(+,\vee,\wedge)$ gilt, $\bar{\mu}$ additiv, R_+-homogen und ($\uparrow$)-abgeschlossen ist, liegt auf der Hand. Aus $g_n \in T_+$, $\alpha > 0$, $g_n \uparrow g$ und $\mu(g_n) \uparrow c$ folgt $\{g_n > \alpha\} \uparrow \{g > \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \cdot g$, so daß sich $\vartheta(\{g_n > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \bar{\mu}(g)$ ergibt. Da ϑ ein Maß ist, gilt somit $\{g > \alpha\} \in \mathfrak{R}$, also die letzte Behauptung. Aus $f,g \in \bar{T}_+$ erhält man mit Satz 13.2, daß $f \ominus g$ als Grenzwert einer isotonen Folge von Treppenfunktionen über $\mathfrak{R}$ darstellbar ist, deren Elementarintegrale hier durch $\bar{\mu}(f)$ beschränkt sind.

Folgerung. Aus $f,g \in \bar{T}_+$, $h \in \bar{T}_+$ und $f \cdot g \leq h$ folgt stets $f \cdot g \in \bar{T}_+$.

Definition 13.1. Die unter den Bedingungen von Satz 13.3 zu $\bar{\mu}$ gehörige ($\uparrow$)-abgeschlossene Linearform heißt hier das Lebesguesche Integral der Gestalt $\int f \, d\vartheta$.

Bemerkung 13.1. Für jede nichtnegative integrierbare Funktion f folgt aus $\int f \, d\vartheta = 0$, daß $\{f \neq 0\}$ eine Menge vom ϑ-Maße Null ist. Integrale von Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom ϑ-Maße Null unterscheiden, stimmen überein. Falls f auf einer Menge A vom Maße Null nicht erklärt ist bzw. die uneigentlichen Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annimmt, aber $f \cdot 1_{X \setminus A}$ integrierbar ist, so kann das Integral von f wie üblich erklärt werden.

Bemerkung 13.2. Bei "vollständigem" Maß ϑ, d.h. wenn aus $A \subset B$, $B \in \mathfrak{R}$ und $\vartheta(B) = 0$ stets $A \in \mathfrak{R}$ folgt, wird auch das zugehörige Lebesguesche Integral "vollständig". Mit $0 \leq g \leq f$, $\int f \, d\vartheta = 0$ und $\alpha > 0$ gilt nämlich $\{\alpha < g\} \leq \{\alpha < f\} \leq \frac{1}{\alpha} f$, woraus über $\{\alpha < g\} \in \mathfrak{R}$ und Satz 13.2 die Integrierbarkeit von g beweisbar ist.

<u>Satz 13.4.</u> Mit $\tilde{H} \subset \mathcal{F}(X,R)$ wird jede ($\uparrow$)-abgeschlossene Linearform $\tilde{\mu}: \tilde{H} \longrightarrow F$, für die aus $f \in \tilde{H}_+$ stets $f \wedge 1_X \in \tilde{H}_+$ folgt (Stonesche Bedingung), ein Lebesguesches Integral.

<u>Beweis.</u> Mit $H = \tilde{H}_+$ folgt für reelles $\alpha > 0$ aus $f \in H$

$f \ominus \alpha 1_X = \alpha\left(\frac{f}{\alpha} \ominus 1_X\right) \in H$ und deshalb auch $1 \wedge n(f \ominus \alpha 1) \in H$ für jedes natürliche n. Da $1 \wedge n(f \ominus \alpha 1) \uparrow \{f > \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} f$ gilt, gehört die charakteristische Funktion $\{f > \alpha\}$ für jedes $f \in H$ und jedes reelle $\alpha > 0$ ebenfalls zu H. Die Einschränkung von μ auf die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen aus H kann als ein Maß $\nu: \mathcal{R} \longrightarrow F$ mit $\mathcal{R}$ als Teilring von $\mathcal{P}(X)$ gedeutet werden. Wegen Satz 13.2 kann jedes $f \in H$ als Grenzwert einer isotonen Folge von Treppenfunktionen über $\mathcal{R}$ dargestellt werden. Man erhält also $\mu(f) = \sup \mu(f_n) = \sup \int f_n d\nu = \int f\, d\nu$. Da μ ($\uparrow$)-abgeschlossen ist, stimmt $\tilde{\mu}$ auf $\tilde{H}_+$ mit dem Lebesgueschen Integral überein, woraus sofort die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

<u>Bemerkung 13.3.</u> Bei vollständigem und $\mathfrak{C}$-regulärem F sei $\tilde{\mu}: \tilde{H} \longrightarrow F$ eine ($\uparrow$)-stetige Linearform mit $\tilde{H} \subset \mathcal{F}(X,R)$, die der Stoneschen Bedingung genügt. Nach Beispiel 12.3 existiert dann eine ($\uparrow$)-abgeschlossene, $\tilde{\mu}$ fortsetzende Linearform $\tilde{\mu}_s$. Wegen der ersten Folgerung von Satz 12.4 erhalten wir die μ^*-Meßbarkeit von 1_X bezüglich des zur Fortsetzung benutzten äußeren Maßes. Aus $f \in H_s^*$ folgt hier also $f \wedge 1_X \in H_s^*$, so daß auch $\tilde{\mu}_s$ die Stonesche Bedingung erfüllt. Damit wird $\tilde{\mu}_s$ ein Lebesguesches Integral.

14. Boolesche Maße und Spektralintegrale

Die beiden folgenden Beispiele hängen mit der Spektraltheorie in Rieszschen Räumen zusammen.

Beispiel 14.1. Auf Sobolev (vgl./34/) geht die Konstruktion von abstrakten Maßen zurück, die auf einer Teilalgebra von $\mathcal{P}(R)$ definiert sind und deren Werte in einer Booleschen Algebra liegen. Diese "Booleschen Maße" werden ausgehend von einer Zerlegung der Einheit in mehreren Schritten erzeugt (vgl./37, S. 67 u. S. 143 ff./ und /38, S. 312 ff./). In /38/ heißt mit $\mathcal{E}$ als vollständiger Boolescher Algebra eine Familie e_α $(-\infty < \alpha < +\infty)$ eine Zerlegung der Einheit (vgl. Beispiel 10.5), wenn stets $e_\alpha \in \mathcal{E}$,

$$e_\alpha \leq e_\beta \quad \text{für } \alpha \leq \beta \text{ ,} \tag{14.1}$$

$$\sup_{(\alpha)} e_\alpha = 1 \text{ , } \inf_{(\alpha)} e_\alpha = 0 \tag{14.2}$$

und

$$\sup_{\alpha < \beta} e_\alpha = e_\beta \tag{14.3}$$

gilt. Mit $\lambda([\alpha,\beta)) := e_\beta \ominus e_\alpha = e_\beta \wedge \bar{e}_\alpha$ liegt dann eine Boolesche Intervallfunktion $\lambda : \mathcal{J}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}$ vor, die wegen Satz 10.9 σ-additiv ist und deshalb nach Satz 10.8 eindeutig zu einem $(\downarrow)$-stetigen Inhalt $\mu : \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}$ fortgesetzt werden kann, wobei $\mathcal{E}^{(1)}$ die Gesamtheit der zugehörigen Elementarbereiche darstellt. Der gemäß Satz 12.3 (vgl. auch Beispiel 12.1) zugehörige äußere Inhalt $\mu^*: \bar{H}^* \longrightarrow \mathcal{E}$ $(H = \mathcal{E}^{(1)})$ mit $R \in \bar{H}^*$ und $\mu^*(R) = 1$ liefert einen Booleschen Homomorphismus μ^*_s von $\bar{H}^*_s$ in $\mathcal{E}$. Dabei gilt $R \in \bar{H}^*_s$ und $\mu^*_s(R) = 1$, so daß $\bar{H}^*_s$ insbesondere zu einer Teilalgebra von $\mathcal{P}(R)$ wird. Der äußere Inhalt stimmt mit dem in /38, S. 317/ benutzten μ^* überein, wenn man davon absieht, daß dort aus beweistechnischen Gründen die uneigentliche Zahl $-\infty$ in die Betrachtungen eingeführt wurde. Dies ist wegen $\mu^*(\{-\infty\}) = 0$ jedoch un-

wesentlich. Ebenda auf S. 318 wird noch ein inneres Maß μ_* definiert und von Meßbarkeit gesprochen, wenn $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ gilt. Wegen Gleichung (12) auf S. 318 wird die dortige Einschränkung von μ^* mit dem hier gebildeten μ^*_S identisch. Damit erhält man Satz XI.5.1 aus /38/ als Spezialfall von Beispiel 12.1 in dieser Arbeit. In /38, S. 320 ff./ wird anschließend gezeigt, daß H^*_S eine σ-Algebra darstellt und daß das "Boolesche Maß" μ^*_S σ-additiv ist[1], wenn eine "hinreichende Menge von vollstetigen, additiven Funktionen" auf der Booleschen Algebra $\mathcal{E}$ existiert. Letzteres bedeutet, daß es zu jedem $e_0 \in \mathcal{E}$ mit $e_0 > 0$ eine disjunkt additive und vollstetige Funktion $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow R_+$ gibt, für die $\varphi(e_0) > 0$ gilt. Da φ insbesondere isoton ist, liegt Vollstetigkeit genau dann vor, wenn für jede nach unten gerichtete Teilmenge $\{c_\alpha\}$ bzw. jede nach oben gerichtete Teilmenge $\{d_\alpha\}$ von $\mathcal{E}$ stets $\inf \varphi(c_\alpha) = \varphi(\inf c_\alpha)$ bzw. $\sup \varphi(d_\alpha) = \varphi(\sup d_\alpha)$ gilt (vgl. /38, S. 237/).
Eine derartige Boolesche Algebra ist also im Sinne von Beispiel 9.7 normal und damit wegen Satz 9.3 auch $\mathcal{E}$-regulär. Aus diesem Grunde ergibt sich der Satz XI.6.1 in /38/ hier mit dem zweiten Teil von Beispiel 12.1.

Beispiel 14.2. Es sei X ein vollständiger Rieszscher Raum, in dem ein schwaches Einselement 1 existiert. Gemäß /38, S. 69/ bzw. /37, S. 137/ bedeutet dies, daß aus $f \in X$ und $|f| \wedge 1 = 0$ stets $f = 0$ folgt. Die Gesamtheit der Einheiten bezüglich 1 (man spricht auch von Quasieinselementen oder Komponenten), d.h. der Elemente e aus X mit $e \wedge (1 - e) = 0$, bildet eine vollständige Boolesche Algebra $\mathcal{E}(X)$, wenn sie bezüglich der aus X induzierten

[1] ansonsten ist ein Boolesches Maß nicht unbedingt ein Maß im Sinne der Definition 10.4.

Ordnung betrachtet wird. Für beliebige $e \in \mathcal{E}(X)$ gilt $0 \leq e \leq 1$, und die in X gebildete Differenz $1 - e$ liefert das zu e gehörige Komplement. Aus $e_1, e_2 \in \mathcal{E}(X)$ folgt stets $e_1 - (e_1 \wedge e_2) \in \mathcal{E}(X)$ (vgl. /38, S. 69 ff./).

In X existiert für jedes $u \geq 0$ die auf X_+ durch

$$(u)x := \sup_{(n)}(x \wedge nu)$$

erklärte Funktion, und für beliebige $x \in X$ stellt

$$(u)x := (u)x_+ - (u)x_-$$

den mit der prinzipiellen Komponente B_u von X verbundenen Projektionsoperator P_u (vgl./38, S. 82 ff./) dar. Dieser Projektionsoperator ist linear, isoton und bezüglich der Ordnungskonvergenz stetig. Insbesondere gilt für alle $x \in X$

$$(u_1)(u_2)x = (u_1 \wedge u_2)x$$

und damit speziell $(u)^2 = (u)$. Aus $u_1 \wedge u_2 = 0$ folgt stets

$$(u_1 + u_2)x = (u_1)x + (u_2)x.$$

Als Charakteristik eines Elementes x oder als Spektralschar von x wird die durch

$$e^x_\alpha := ((\alpha 1 - x)_+)1$$

auf R erklärte Funktion bezeichnet, deren Werte in $\mathcal{E}(X)$ liegen. Für die Charakteristik gelten nach /38, S. 103/ die Relationen (14.1), (14.2) und (14.3) des vorigen Beispiels. Damit stellt e^x_α für jedes $x \in X$ eine Zerlegung des Einselementes von $\mathcal{E}(X)$ dar, aus der bei $\mathcal{E}$-regulärem X ein σ-additives Boolesches Maß $\vartheta : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ im Sinne des vorigen Beispiels ($\vartheta = \mu^x_s$) erzeugt werden kann. $\mathfrak{A}$ wird dabei eine σ-Algebra in R. Wegen $\mathcal{E}(X) \subset X_+$ gilt auch $\vartheta : \mathfrak{A} \longrightarrow X$, und das derart betrachtete ϑ wird ebenfalls ein Maß (vgl. Beispiel 10.3),

denn in X_+ erhält man für disjunkte x,y stets
$x \vee y = x + y$. Das gemäß Definition 13.1 erklärte Lebesguesche Integral der Gestalt $\int f \, d\vartheta$ wird dann eine Fortsetzung des in /38, S. 324/ durch (23) erklärten Integrals.
In /38/ wurde für jedes $x \in X$ und für jede $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion $f(\alpha)$, die bei möglicher Ausnahme einer Menge vom ϑ-Maße [1] Null beschränkt ist, der Ausdruck

$$f(x) := \int f(\alpha) d\vartheta$$

definiert. Dieses Integral entsteht hier unter allgemeineren Voraussetzungen sogar mit einer etwas umfassenderen Funktionenklasse als Definitionsbereich, d.h. wir haben es mit der "($\ddagger$)-Abschließung" des dort gegebenen Integrals zu tun.
Für zwei integrierbare Funktionen f und g folgt aus
$f \wedge g = 0$ stets $\int f \, d\vartheta \wedge \int g \, d\vartheta = 0$. Mit den gemäß (13.3) zugeordneten Folgen von Treppenfunktionen über $\mathfrak{A}$ gilt nämlich

$$\int f_n \, d\vartheta \wedge \int g_n \, d\vartheta =$$
$$\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \vartheta\left(\left\{\frac{k}{2^n} < f \leq \frac{k+1}{2^n}\right\}\right) \wedge \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \vartheta\left(\left\{\frac{k}{2^n} < g \leq \frac{k+1}{2^n}\right\}\right) .$$

Hieraus erhält man wegen $f \wedge g = 0$ und $\vartheta(A \cap B) = \vartheta(A) \wedge \vartheta(B)$, daß die beiden Summen zueinander disjunkt sind. Durch Grenzübergang folgt die Behauptung. Das Lebesguesche Integral wird in diesem Falle also ein Rieszscher Homomorphismus, d.h. es genügt den Gleichungen

$$\int (f \vee g) d\vartheta = \int f \, d\vartheta \vee \int g \, d\vartheta$$

und

$$\int (f \wedge g) d\vartheta = \int f \, d\vartheta \wedge \int g \, d\vartheta \quad .$$

Nach /38, S. 104/ folgt aus $\alpha \leq \beta$ stets
$\alpha(e^x_\beta - e^x_\alpha) \leq (e^x_\beta - e^x_\alpha)x \leq \beta(e^x_\beta - e^x_\alpha)$.

[1] geänderte Bezeichnungen

Mit Hilfe dieser Ungleichungen kann schnell gezeigt werden, daß $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \, [\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ eine integrierbare Funktion wird, wenn $\alpha_{n-1} \leq \gamma_n \leq \alpha_n$, $0 < \alpha_n - \alpha_{n-1} \leq \delta$ und $\bigcup_{(n)} [\alpha_{n-1}, \alpha_n) = R$ gilt. Aus

$$\int \varphi \, d\nu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \, (e^x_{\alpha_n} - e^x_{\alpha_{n-1}}) \tag{14.4}$$

folgt dann

$$x = \int \alpha \, de^x_\alpha = \int \alpha \, d\nu \, , \tag{14.5}$$

wobei die Summen der Gestalt (14.4) mit $\delta \to 0$ sogar 1-gleichmäßig gegen x streben. Hier handelt es sich um einen Spezialfall des Satzes von Freudenthal, der natürlich unter allgemeineren Voraussetzungen beweisbar ist (vgl. etwa /38/ und /19/). Wenn der vollständige Rieszsche Raum nicht ε-regulär ist, also $\mathcal{E}(X)$ nicht als ε-regulär vorausgesetzt werden kann, so wird $\nu = \mu^*_s$ lediglich ein Inhalt. Die Formel (14.5) bleibt dann mit einem uneigentlichen "Riemannschen Integral" gültig.

Das nächste Beispiel hängt zwar mit dem letzten zusammen, es soll jedoch als Standardbeispiel (vgl. /7/ und /24/) unabhängig davon einer eigenständigen Behandlung im Rahmen dieser Arbeit unterzogen werden.

<u>Beispiel 14.3.</u> Es sei T ein beschränkter selbstadjungierter Operator eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Jedem reellen Polynom P(t) wird dann wie üblich das Operatorpolynom P(T) zugeordnet. Dabei gilt stets $P(T) \in \gamma(\mathcal{H})$. Falls P(t) auf dem Spektralintervall von T nicht negativ wird, so folgt stets $P(T) \geq 0$. Diese Zuordnung kann mit $\tilde{H}$ als Gesamtheit der auf dem Spektralintervall erklärten und stetigen Funktionen zu einer ($\updownarrow$)-stetigen Linearform $\tilde{\mu}: \tilde{H} \to \gamma(\mathcal{H})$ fortgesetzt

werden. Dabei gilt

$$\tilde{\mu}(f\cdot g) = \tilde{\mu}(f)\,\tilde{\mu}(g), \tag{14.6}$$

und jeder mit T vertauschbare Operator $S \in \mathcal{Y}(\mathcal{H})$ ist bei beliebigem $f \in \tilde{H}$ auch mit $f(T) = \tilde{\mu}(f)$ vertauschbar (vgl. etwa Satz 2 in /8, S. 106/). Damit gehört der Wertebereich von $\tilde{\mu}$ insbesondere dem zweiten Kommutanten von $\{T\}$ an (vgl. /19, S. 369/)[1]. Ausgehend von einem System paarweise vertauschbarer Operatoren $\mathfrak{M} \subset \mathcal{Y}(\mathcal{H})$, also speziell bei $\mathfrak{M} = \{T\}$, entsteht mit dem hier durch $\mathfrak{M}''$ gekennzeichneten zweiten Kommutanten stets ein ε-regulärer und vollständiger Rieszscher Raum (vgl. ebenda Satz 53.4 (i) und Satz 55.2)[2].

[1] Dort wird der Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit H, die Menge $\mathcal{Y}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{H}$ und der zweite Kommutant von $\mathfrak{D}$ mit $\mathcal{C}''(\mathfrak{D})$ gekennzeichnet.

[2] Für eine nach oben gerichtete Teilmenge $\{A_\tau\}$ von $\mathfrak{M}''$, die in $\mathcal{Y}(\mathcal{H})$ beschränkt ist, stimmt die in $\mathfrak{M}''$ gebildete Grenze $\sup\limits_{(\tau)} A_\tau = A$ mit der in $\mathcal{Y}(\mathcal{H})$ gebildeten oberen Grenze überein, so daß dann (vgl. /19, S. 375 u./) $\sup(A_\tau x,x) = (Ax,x)$ für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt. Die entsprechende duale Aussage bezüglich nach unten gerichteter Mengen liefert speziell für jede Nullmenge $\{B_\tau\}$ des Raumes $\mathfrak{M}''$ bei beliebigem $x \in \mathcal{H}$ die Beziehung $\inf(B_\tau x,x) = 0$. Damit kann wie in Beispiel 9.6 auf die ε-Regularität von $\mathfrak{M}''$ geschlossen werden. Diese Struktureigenschaften des zweiten Kommutanten $\mathfrak{M}''$ können auch direkt aus dem in /38, S. 298/ angegebenen Lemma XI.2.1 bzw. dem in /24, S. 108/ angegebenen Lemma 28.2 abgeleitet werden.

Außerdem wird $\mathcal{W}''$ dann stets ein Operatorenring, der den Einheitsoperator I enthält.

Jetzt soll gezeigt werden, daß durch $q: A \longrightarrow A^2$ ein Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{W}''_+$ auf $\mathcal{W}''_+$ erklärt ist, so daß der positive Kegel $\mathcal{W}''_+$ mit der durch q erzeugten Gruppe von Transformationen $L = \{q^n\}$ $(q^{-1}: A \longrightarrow \sqrt{A})$ zu einem L-Raum wird.

Da beliebige $A, B \in \mathcal{W}''_+$ miteinander vertauschbar sind, folgt in $\mathcal{W}''_+$ aus $A \leq B$ offensichtlich $A^2 \leq B^2$. Gilt mit $A, B \in \mathcal{W}''_+$ umgekehrt $A^2 \leq B^2$, so erhalten wir für reelles $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon = \varepsilon I + B$ sofort $A^2 \leq B_\varepsilon^2$. Hieraus folgt bei beliebigem $x \in \mathcal{H}$ $((B_\varepsilon - A)\sqrt{B_\varepsilon + A}\, x, \sqrt{B_\varepsilon + A}\, x) \geq 0$.

Wegen $\varepsilon I \leq B_\varepsilon + A$ und der in /8, S. 106/angegebenen Abschätzung (12) gehört 0 nicht zum Spektrum von $\sqrt{B_\varepsilon + A}$, so daß $(\varepsilon y, y) + ((B - A)y, y) \geq 0$ für beliebige $y \in \mathcal{H}$ gilt. Mit $\varepsilon \longrightarrow 0$ entsteht $A \leq B$. Da für jedes $A \in \mathcal{W}''_+$ auch $\sqrt{A} \in \mathcal{W}''_+$ gilt (vgl. Satz 2 in /8, S. 106/), handelt es sich wegen $(\sqrt{A})^2 = A$ bei q also um einen Ordnungsisomorphismus.[1]

Mit $[m, M]$ als dem Spektralintervall des Operators T; $G = \mathcal{F}([m, M], R_+)$, $H = \tilde{H}_+$ und $F = \mathcal{W}''_+$ wird die zu $\tilde{\mu}$ gehörige Einschränkung $\mu: H \longrightarrow F$ sowohl bezüglich $L = R_+ \setminus \{0\}$ als auch bezüglich $L = \{q^n\}$ $(n \in \Gamma)$ zu einem $(\frac{o}{o})$-stetigen Inhalt.

[1] In ähnlicher Weise könnte gezeigt werden, daß für jedes natürliche n durch $q_n: A \longrightarrow A^n$ ein Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{W}''_+$ auf $\mathcal{W}''_+$ erklärt wird.

Der Fastmodul G wird mit der letztgenannten Gruppe L, die durch $q : g \longrightarrow g^2$ erzeugt wird, gleichfalls zu einem L-Raum. Da aus $h \in H$ stets $h^2, \sqrt{h} \in H$ folgt, ist H auch bezüglich dieser Gruppe L ein Teilraum von G.
Aus $\mu(h^2) = [\mu(h)]^2$, also $\mu(qh) = q\mu(h)$ folgt dann über $q\mu(q^{-1}h) = \mu((qq^{-1})h) = \mu(h)$ die Gleichung

$\mu(q^{-1}h) = q^{-1}\mu(h)$. Damit gilt für beliebige ganze n
$\mu(q^n h) = q^n \mu(h)$, so daß μ L-homogen wird. Insbesondere erhalten wir für beliebige $h \in H$ $\mu(\sqrt{h}) = \sqrt{\mu(h)}$.
Das gemäß Satz 12.4 gebildete äußere Maß $\mu^{*} : H^{*} \longrightarrow F$ ist L-homogen. Damit gilt speziell

$\mu^{*}(g^2) = [\mu^{*}(g)]^2$ und $\mu^{*}(\sqrt{g}) = \sqrt{\mu^{*}(g)}$, wobei g genau dann zum Definitionsbereich von μ^{*} gehört, wenn dies für $\sqrt{g}$ oder g^2 der Fall ist. Da die Funktion $1_{[m,M]}$ μ^{*}-summierbar ist, folgt mit Satz 11.7 c) aus der μ^{*}-Summierbarkeit von g auch die von g^2 und $\sqrt{g}$.
Aus den Betrachtungen in Beispiel 12.3 können wir entnehmen, daß μ^{*}_s ein R_+-homogenes Maß darstellt. Für beliebige $f, g \in H^{*}_s$ folgt dann über $fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 \ominus \frac{1}{2}(f^2+g^2)$ auch $fg \in H^{*}_s$ und $\mu^{*}_s(fg) = \mu^{*}_s(f)\, \mu^{*}_s(g)$.
Die μ^{*}_s zugeordnete ($\updownarrow$)-abgeschlossene Linearform $\tilde{\mu}_s$, die $\tilde{\mu}$ fortsetzt, wird demzufolge ebenfalls multiplikativ.
Für positive $f \in \tilde{H}_s$ gilt dabei stets $\tilde{\mu}_s(\sqrt{f}) = \sqrt{\tilde{\mu}_s(f)}$.
Die Einschränkung von $\tilde{\mu}_s$ auf die zu $\tilde{H}_s$ gehörigen charakteristischen Funktionen wird dann ein auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}_s$ erklärtes Maß ν. Nach Satz 13.4 gilt

$\tilde{\mu}_s(f) = \int f\, d\nu$. Dieses Spektralmaß ν erfüllt für beliebige $P, Q \in \mathfrak{A}_s$ stets die Gleichung

$\vartheta(P \cap Q) = \vartheta(P) \cdot \vartheta(Q)$. Die Funktionen der Gestalt

$$e_\alpha(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t < \alpha \\ 0 & \text{für } t \geq \alpha \end{cases}$$

gehören offensichtlich zu $\tilde{H}_s$. Durch $E_\alpha = e_\alpha(T)$ ist dann eine $(\uparrow)$-stetige Spektralschar erklärt, die (mit $T = A$) die in /8, S. 110 ff./ angegebenen Bedingungen (2) bis (7) erfüllt.

<u>Beispiel 14.4.</u> Es sei $\mathcal{W}''$ wiederum der zweite Kommutant eines Systems paarweise vertauschbarer Operatoren aus $\mathcal{Y}(\mathcal{H})$. Mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{W}'')$ werde die Gesamtheit der zu $\mathcal{W}''$ gehörigen Projektoren bezeichnet. Da für alle Projektoren P die Beziehung $0 \leq P \leq I$ gilt und durch $q: A \longrightarrow A^2$ ein Ordnungsisomorphismus von $\mathcal{W}''_+$ auf $\mathcal{W}''_+$ erklärt ist, folgt für jede Teilmenge

$\{P_\tau\}$ von $\mathcal{E}$ $\quad \sup\limits_{(\tau)} P_\tau = \sup\limits_{(\tau)} P_\tau^2 = (\sup\limits_{(\tau)} P_\tau)^2$ und

$$\inf_{(\tau)} P_\tau = \inf_{(\tau)} P_\tau^2 = (\inf_{(\tau)} P_\tau)^2,$$

wenn diese Grenzen in $\mathcal{W}''_+$ gebildet werden. Die Teilmenge $\mathcal{E}$ ist also grenztreu in $\mathcal{W}''$ enthalten und vollständig bezüglich der aus $\mathcal{W}''$ induzierten Ordnung. Aus $P_1, P_2 \in \mathcal{E}$ folgt offensichtlich $P_1 \wedge P_2 = P_1 P_2$. Da für jedes $P \in \mathcal{E}$ die Gleichungen

$$(I - P)\,P = 0 \text{ und } (I - P) \vee P = [(I - P) \vee P] + [(I - P) \wedge P] = I$$

gelten, liegt mit $\mathcal{E}$ eine vollständige und $\mathcal{E}$-reguläre Boolesche Algebra vor, die grenztreu in $\mathcal{W}''$ eingebettet ist. Mit $\mathcal{R}$ als einem Mengenring wird ein Inhalt $\vartheta: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{W}''$ also genau dann multiplikativ, wenn ϑ ein Boolescher Homomorphismus von $\mathcal{R}$ in $\mathcal{E}$ ist (vgl. Beispiel 10.1). Das Spektralmaß des vorigen Beispiels stellt demzufolge einen auf einer σ-Algebra $\mathcal{O}_s$ erklärten und $(\downarrow)$-stetigen

Homomorphismus in die Boolesche Algebra $\mathcal{E}(\{T\}'')$ dar. Jedes beliebige Spektralmaß (vgl./8, S. 184/) kann in dieser Weise als Boolescher Homomorphismus gedeutet werden, wenn ausgehend von $\mathcal{M}$ als seinem Werteberelch der zweite Kommutant gebildet wird.

Beispiel 14.5. Es seien $T_1, T_2 \in \gamma(\mathcal{H})$ zwei miteinander vertauschbare Operatoren. Da mit $\mathcal{M} = \{T_1, T_2\}$ stets $\mathcal{M}'' \supset \{T_1\}'' \cup \{T_2\}''$ gilt, erhalten wir für beliebige $f \in \tilde{H}_s(T_1)$ und $g \in \tilde{H}_s(T_2)$ sofort $f(T_1), g(T_2) \in \mathcal{M}''$ (vgl. Beispiel 14.3), also auch $f(T_1) \circ g(T_2) \in \mathcal{M}''$. Der Wertebereich der zugehörigen Spektralmaße ϑ_1 und ϑ_2 liegt damit ebenfalls in $\mathcal{M}''$. Ausgehend von beliebigen halboffenen Intervallen $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}^{(1)}$ wird dann durch

$$\lambda(I_1 \times I_2) := \vartheta_1(I_1)\,\vartheta_2(I_2) \tag{14.7}$$

eine (↑)-stetige und multiplikative Intervallfunktion geliefert. Nach Beispiel 14.4 läßt sich diese mit $\lambda: \mathfrak{J}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{M}'')$ als Boolesche Intervallfunktion auffassen. Wegen Bemerkung 10.5 handelt es sich bei λ sogar um eine σ-additive Intervallfunktion, die gemäß Satz 10.8 eindeutig zu einem (↕)-stetigen Homomorphismus $\mu: \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{E}$ fortgesetzt werden kann. Unter Benutzung von Beispiel 12.1 erhalten wir einen auf einer σ-Algebra erklärten und (↕)-stetigen Homomorphismus $\vartheta = \mu_s''$, der λ fortsetzt. Mit ϑ liegt also ein vollständiges (vgl. Bemerkung 13.2) Spektralmaß vor. Die Gesamtheit der $A_1 \subset R$, für die bei beliebigem $I_2 \in \mathfrak{J}^{(1)}$ die Gleichung

$$\vartheta(A_1 \times I_2) = \vartheta_1(A_1)\,\vartheta_2(I_2)$$

erfüllt ist (also die dort auftretenden Ausdrücke insbesondere sinnvoll sind), bildet eine $\mathfrak{J}^{(1)}$ umfassende σ-Algebra $\mathfrak{A}_1$ in R. Diese σ-Algebra enthält alle Borelschen Mengen der reellen Achse. In analoger Weise erkennt man jetzt, daß die Gesamtheit der $A_2 \subset R$, für die bei beliebigem $A_1 \in \mathfrak{A}_1$

$$\nu(A_1 \times A_2) = \nu_1(A_1)\, \nu_2(A_2) \tag{14.8}$$

gilt, eine $\mathfrak{J}^{(1)}$ umfassende σ-Algebra $\mathfrak{A}_2$ darstellt. Die Gleichung (14.8) ist also für beliebige Borel- meßbare Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(R)$ erfüllt. Demzufolge erhalten wir für beliebige Borel- meßbare Funktionen $f, g \in \mathcal{F}(R,R)$, die mit Ausnahme einer Menge vom ν_1-Maße bzw. ν_2-Maße 0 beschränkt sind, die Beziehung

$$\int f(t_1)\, g(t_2)\, d\nu = \int f(t_1)\, d\nu \int g(t_2)\, d\nu. \tag{14.9}$$

Aus (14.9) folgen sofort die Gleichungen

$$\int t_1 d\nu = T_1 \quad \text{und} \quad \int t_2 d\nu = T_2 . \tag{14.10}$$

Beispielsweise in /8, S. 201 ff./ wurden derartige Resultate für (unbeschränkte) selbstadjungierte Operatoren angegeben. Unter Benutzung der zu T_1 und T_2 gehörigen Spektralscharen $E_\alpha^{(1)}$ und $E_\alpha^{(2)}$ (vgl. Satz 7 in /8, S. 159/) können dann über die entsprechenden Intervallfunktionen Spektralmaße ν_1 und ν_2 konstruiert werden, wobei $\mathcal{M}$ jetzt als Vereinigung der Wertebereiche von $E_\alpha^{(1)}$ und $E_\alpha^{(2)}$ vorausgesetzt werden kann. Bezüglich des in gleicher Weise gebildeten Spektralmaßes ν bleiben dann alle Aussagen gültig. Die in (14.10) angegebenen Integrale existieren natürlich nicht mehr im Sinne unserer Integraldefinition. Durch Grenzübergang (vgl./8, S. 150 und S. 189 ff./) ergeben sich jedoch diese Integraldarstellungen der unbeschränkten Operatoren T_1 und T_2.

Literaturverzeichnis

/1/ Achieser, N. I. und I. M. Glasmann,
Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum,
Berlin 1975

/2/ Bauer, H.,
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie,
Berlin (West) 1964

/3/ Berg, L.,
Analysis in geordneten kommutativen Halbgruppen mit Nullelement,
Nova Acta Leopoldina Nr. 219, Bd. 43,
Halle 1975

/4/ Berg, L.,
Introduction of Integrals in Orderd Abelian Semigroups with Zero Element,
Proceedings of the Conference Topology and Measure I.
Greifswald 1978

/5/ Berg, L.,
Elementare Aspekte der Maßtheorie,
Wiss. u. Fortschr. 25 (1975) H. 8, S. 363-65

/6/ Bögel, K. und M. Tasche,
Analysis in normierten Räumen,
Berlin 1974

/7/ Brehmer, S.,
Algebraic Characterisation of Measure and Integral by the Method of Caratheodory,
Proceedings of the Conference Topology and Measure I
Greifswald 1978

/8/ Brehmer, S.,
Hilbert-Räume und Spektralmaße,
Berlin 1979

/9/ Brehmer, S.,
Einführung in die Maßtheorie,
Berlin 1975

/10/ Collatz, L.,
Funktionalanalysis und numerische Mathematik,
Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964

/11/ Dieudonne, J.,
Grundzüge der modernen Analysis, Teil I und II,
Berlin 1971 und 1975

/12/ Fuchs,
Teilweise geordnete algebraische Systeme
(Übersetzung aus dem Englischen),
Moskau 1965

/13/ Halmos, P. R.,
Measure Theory,
New York 1950

/14/ Hermes, H.,
Einführung in die Verbandstheorie,
Berlin-Heidelberg-New York 1967

/15/ Jameson, G.,
Orderd Linear Spaces,
Berlin-Heidelberg-New York 1970

/16/ Kantorovitch, L. V., B. Z. Vulich und A. G. Pinsker,
Funktionalanalysis in halbgeordneten Räumen (russ.),
Moskau 1950

/17/ Kolmogorow, A. N. und S. V. Fomin;
Reelle Funktionen und Funktionalanalysis,
Berlin 1975

/18/ Lew, J. S.,
Preorder Relations and Pseudokonvex Metrics on
Psychological Spaces,
New York 1972

/19/ Luxemburg, W. A. and A. C. Zaanen;
Riesz Spaces I,
Amsterdam-London 1971

/20/ Markwardt, K.,
Analysis in relativ invertierbaren Halbgruppen,
Wiss. Z. der Hochschule für Architektur und Bauwesen
Weimar, 26. Jg. (1979) Heft 1, S. 55-58

/21/ Matthes, K.,
Über eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen
Integralbegriffs, I. - IV. Mitteilung
Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Nat. Reihe
5(1955/56) S. 287-295, 6(1956/57) S. 221-236,
7(1957/58) S. 329-344, 8(1958/59) S. 331-338

/22/ Matthes, K.,
Über eine Schar von Regularitätsbedingungen für
Verbände, Teil I und II,
Math. Nachr. 22 (1960) S. 93-128 und 23 (1961)
S. 149-159

/23/ Matthes, K.,
Über die Ausdehnung positiver und linearer Abbildungen,
Math. Nachr. 23 (1961) S. 223-257

/24/ McShane, E. J.;
Order-preserving Maps and Integrationprocesses,
Princeton 1953

/25/ Michel, H.,
Maß- und Integrationstheorie I,
Berlin 1978.

/26/ Müller, P. H.,
Höhere Analysis I,
Berlin 1972

/27/ Natanson, I. P.,
Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen,
Berlin 1954

/28/ Niepage, H.-D.,
Ein Einschließungssatz in pseudonormierten Räumen
Wiss. Z. d. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt,
Jg. XIII (1971), Heft 1

/29/ Rédei, L.,
Algebra I,
Leipzig 1959

/30/ Riesz, F. und Bela Sz.-Nagy,
Vorlesungen über Funktionalanalysis,
Berlin 1956

/31/ Sikorski, R.,
Boolean Algebras,
Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960

/32/ Skornjakow,
Elemente der Verbandstheorie,
Berlin 1973

/33/ Smirnow, W. I.,
Lehrgang der höheren Mathematik V,
Berlin 1962

/34/ Sobolev, V. I.,
ber das halbgeordnete Maß von Mengen, meßbare unktionen und einige abstrakte Integrale (russ.),
AN SSSR, Bd. XCI, Nr. 1 (1953) S. 23-26

/35/ Terpe, F.,
Über Abgeschlossenheitseigenschaften allgemeiner Integrale,
Math. Nachr. 38 (1968) S. 267-297

/36/ Terpe, F.,
in: Entwicklung der Mathematik in der DDR (herausgegeben von H. Sachs) S. 219-237,
Berlin 1974

/37/ Vladimirov, D. A.,
Boolesche Algebren,
Berlin 1972

/38/ Vulich, B. S.,
Introduction to the Theory of Partially Orderd Spaces (Übersetzung aus dem Russischen),
Groningen 1967

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben.

Weimar, im November 1981

Unterschrift

Thesen zur Dissertationsschrift

" Eine teilweise geordnete Halbstruktur als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer Analysis "

vorgelegt von Diplommathematiker Klaus Markwardt

Ausgehend von der durch L. Berg veröffentlichten Abhandlung "Analysis in geordneten, kommutativen Halbgruppen mit Nullelement" entstand die vorliegende Arbeit, wobei im Zuge einer modifizierten und detaillierteren Ausarbeitung die Beschränkung auf ausgewählte Problemkreise erforderlich wurde. Die Zielstellung besteht in einer Verallgemeinerung von gewissen Grundlagen der (klassischen) Analysis. Dabei bleibt trotz des erhöhten Abstraktionsgrades der elementare Charakter weitgehend erhalten.
Mit dem L-Raum wird hier eine Struktur vorgelegt, aus der solche für die Analysis wichtigen Strukturen, wie der (teilweise) geordnete Vektorraum, der positve Kegel des Rieszschen Raumes, der Boolesche Ring und die Boolesche Algebra durch unmittelbare Spezialisierung hervorgehen. Der um $+\infty$ und $-\infty$ erweiterte Bereich der reellen Zahlen, grundlegende Mengensysteme und Funktionenräume sowie der durch S. Brehmer eingeführte homogene (positive) C-Verband lassen sich problemlos als spezielle L-Räume deuten. Die Strukturuntersuchung des L-Raumes gestattet eine sinnvolle Auslegung bezüglich der verschiedenen Spezialfälle. Der L-Raum ist insbesondere so beschaffen, daß seine Dedekindvervollständigung schnell als eine entsprechende Struktur erkennbar ist. Durch unmittelbare Spezialisierung gewinnt man daraus die Dedekindvervollständigung der Booleschen Algebra und die des archimedisch geordneten Vektorraumes.
Aus der im L-Raum eingeführten γ-Konvergenz gehen z.B. die mengenalgebraische, die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz sowie allgemeinere in Booleschen Algebren und Rieszschen Räumen erklärte Konvergenzbegriffe hervor. Der Zusammenhang mit der Konvergenz in einem pseudometrischen Raum wird kurz herausgearbeitet. Bis hier sind die Betrach-

tungen so zugänglich, daß man sie an den Anfang einer Analysis stellen könnte. Die folgenden Untersuchungen bezüglich einer allgemeinen Maß- und Integrationstheorie gehen mehr in die Tiefe. Wesentlich für die Fortsetzung damit zusammenhängender "Funktionale" wird die hier eingeführte ε-Regularität, mit deren Hilfe sich epsilontische Schlußweisen übertragen lassen. Wenn gewisse Vollständigkeitsbedingungen erfüllt sind und der Bildbereich in einem ε-regulären L-Raum liegt, dann können Fortsetzungen mit erforderlichen Abgeschlossenheitseigenschaften konstruiert werden. Die Begriffe Inhalt und Maß wurden so weit gefaßt, daß neben der üblichen Deutung auch bestimmte im positiven Kegel des Rieszschen Raumes erklärte und mit einem allgemeinen Integralbegriff zusammenhängende "Funktionale" als Spezialfälle ausgelegt werden können. Mit der Einschränkung des Lebesgueschen Integrals auf die Gesamtheit der nichtnegativen integrierbaren Funktionen liegt beispielsweise ein derartiges Maß vor. Entsprechende weitere Verallgemeinerungen gestatten auf einheitlicher Grundlage die voneinander unabhängige Fortsetzung von Maßen und Integralen. Ein derartiges Anliegen wurde in einer 1979 durch S. Brehmer veröffentlichten Arbeit bereits realisiert. Wesentliche Grundbegriffe, wie Inhalt, Maß, äußerer Inhalt und äußeres Maß sind dort jedoch anders definiert. Die Konstruktion des äußeren Maßes wird bei mir etwas aufwendiger. Sie ist auch an stärkere algebraische Voraussetzungen gebunden, gestattet jedoch sowohl mit einer schwächeren Vollständigkeits- als auch einer schwächeren Regularitätsbedingung zu arbeiten. Dies wird z.B. mit dem Rieszschen Raum der in üblicher Weise identifizierten Lebesgue- integrierbaren Funktionen (als Bildbereich) belegt. Außerdem besitzt das äußere Maß hier eine Abgeschlossenheitseigenschaft, die eine effektive Nutzung im Hinblick auf eine abgewandelte Meßbarkeitsdefinition möglich macht. Damit kann z.B. die Fortsetzung Boolescher Homomorphismen, die mit den Spektralmaßen zusammenhängen, direkt einbezogen werden. Auf die Nutzung allgemeiner topologischer Untersuchungsmethoden wurde wie bei S. Brehmer vollständig verzichtet, um zügig und in übersichtlicher Weise zu wesentlichen Resultaten zu gelangen. Die hier angestellten Betrachtungen bezüglich einer abstrakten Maß- und Integrationstheorie stellen natürlich keinen Entwurf für eine Grundlagenvorlesung dar. Im Vergleich zu entsprechenden sicherlich tiefliegenden Arbeiten von K. Matthes und E. J. McShane, wo es ebenfalls um die Fortsetzung von "Funktionalen" mit (teilweise) geordnetem Bildbereich geht, kann jedoch von einem leicht zugänglichen Konstruktionsprinzip gesprochen werden. Dabei können z.B. wesentliche durch K. Matthes, E. J. McShane, D. A. Vladimirov und B. S. Vulich betrachtete "reguläre" Strukturen als Spezialfälle einbezogen werden. Im letzten Abschnitt geht es um die Anwendung auf die Theorie der Spektralmaße und Spektralintegrale.

Lebenslauf

Ich wurde am 2. 1. 1949 in Parchim geboren. Dort besuchte ich von 1955 bis 1963 die Goetheoberschule und von 1963 bis 1967 die Erweiterte Oberschule. 1967 legte ich das Abitur ab und absolvierte gleichzeitig eine Lehre als Landmaschinen- und Traktorenschlosser in der MTS Tessenow. Im September 1967 begann ich ein Mathematikstudium an der Universität Rostock. Hier entschied ich mich 1969 für die Hauptausbildungsrichtung Analysis. Nach absolvierter Hauptprüfung folgte im Sommer 1971 ein Forschungsstudium im Wissenschaftsbereich Analysis bei Prof. L. Berg. Im Rahmen eines Studentenaustausches wurde ich in der Zeit vom 1. 9. bis 20. 12. 71 an die Universität Debrecen in Ungarn delegiert. Auf Anregung unseres dortigen Betreuers Prof. Gestely fertigten Uwe Lehnhardt und ich unter seiner Leitung eine 25 Schreibmaschinenseiten umfassende Gemeinschaftsarbeit mit dem Titel "Partielle algebraische Ableitungen und Integrale im zweidimensionalen Operatorenkörper" an. Nach Rostock zurückgekehrt wandte ich mich im Januar 1972 meiner eigentlichen Aufgabenstellung, der Schaffung von algebraischen Grundlagen für eine nichtlineare Operatorenrechnung, zu. Da ich keine geeigneten Ansatzpunkte für den Aufbau einer entsprechenden Theorie fand, schloß ich diese Thematik im Oktober 1973 mit der Verteidigung einer Diplomarbeit ab. Prof. Berg legte Herrn Reincke und mir 1973 ein weitgestecktes Programm vor, das wir gemeinsam bearbeiten sollten, und aus dem die hier eingereichte Dissertation hervorging. Mein Forschungsstudium wurde um ein Jahr verlängert und endete im August 1975. Ich hatte mich in die neue Thematik recht gut eingearbeitet, nahm jedoch das Angebot einer weiteren Verlängerung aus familiären Gründen nicht an. Im September 1975 begann ich meine jetzige Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Rechentechnik und Datenverarbeitung der HAB Weimar. Von November 1975 bis Mai 1977 absolvierte ich meinen Grundwehrdienst bei der NVA in Rostock. Auf Grund meiner umfangreichen dienstlichen Verpflichtungen, meiner

Tätigkeit als FDJ-Sekretär und meiner Arbeit innerhalb der Parteileitung konnte ich die Tätigkeit an meinem Dissertationsthema erst 1979 mit Unterbrechungen wieder aufnehmen.

Unterschrift

/23/ Matthes, K.,
Über die Ausdehnung positiver und linearer
Abbildungen ,
Math. Nachr. 23 (1961) S. 22

/24/ McShane, E. J.;
Order-preserving Maps and onprocesses ,
Princeton 1953

/25/ Michel, H.,
Maß- und Integrationsth
Berlin 1978.

/26/ Müller, P. H.,
Höhere Analysis I ,
Berlin 1972

/27/ Natanson, I. P.,
Theorie der Funkt er reellen Veränderlichen ,
Berlin 1954

/28/ Niepage, H.-D.
Ein Einschließ in pseudonormierten Räumen
Wiss. Z. d. T hschule Karl-Marx-Stadt,
Jg. XIII (19 1

/29/ Rédei, L.,
Algebra I
Leipzig 1

/30/ Riesz, a Sz.-Nagy ,
Verlesu Funktionalanalysis,
Berlin

/31/ Siko
Bool bras ,
Ber ngen-Heidelberg 1960

/32/ S
der Verbandstheorie ,
73

/33/ , W. I.,
ng der höheren Mathematik V,
1962

/34/ Sobolev, V. I.,
ber das halbgeordnete Maß von Mengen, meßbare
unktionen und einige abstrakte Integrale (russ.),
AN SSSR, Bd. XCI, Nr. 1 (1953) S. 23-26