Rostocker Dokumentenserver
Dieses Werk wurde Ihnen durch die Universitätsbibliothek Rostock zum Download bereitgestellt.
Für Fragen und Hinweise wenden Sie sich bitte an: digibib.ub@uni-rostock.de

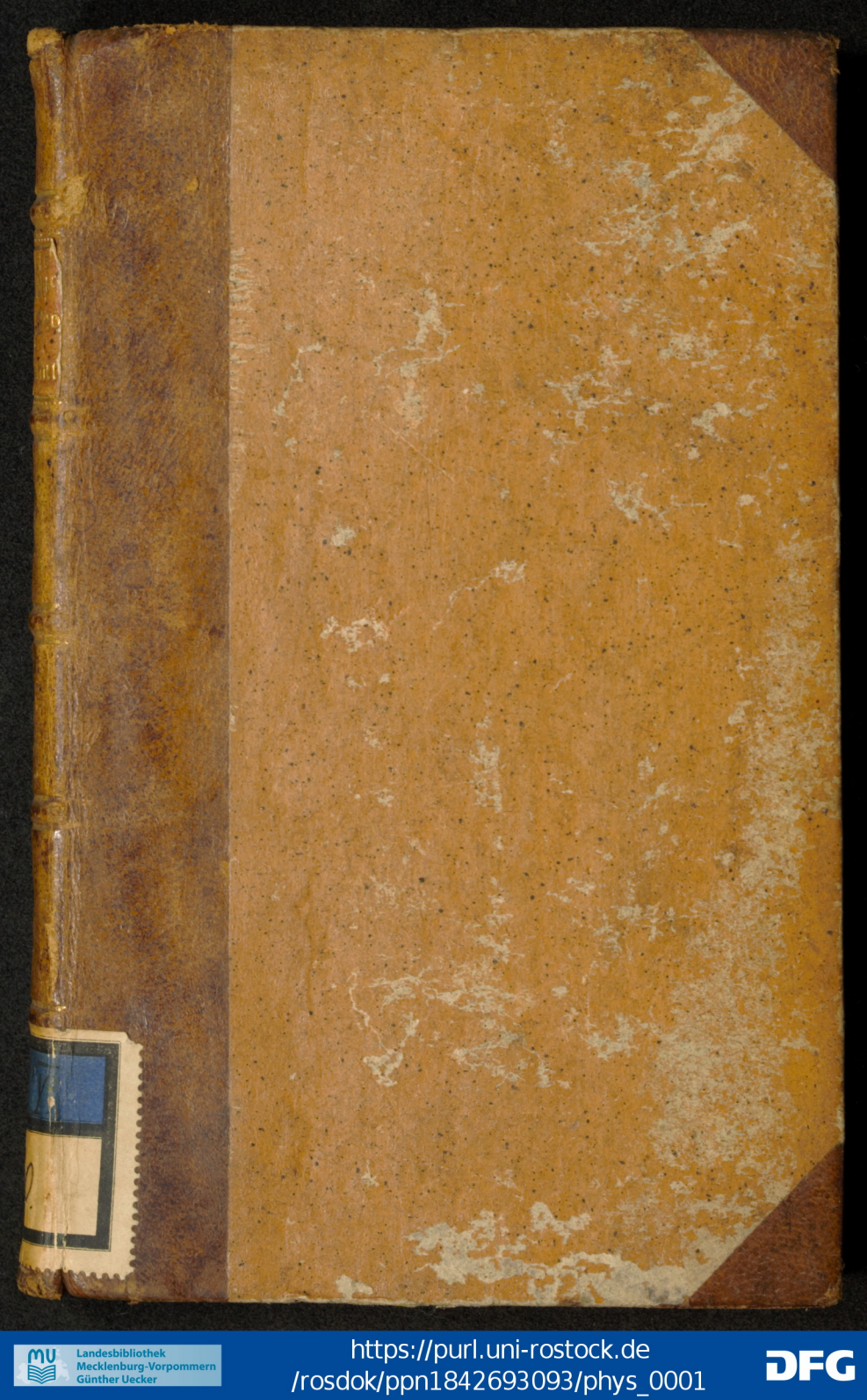
Georg Simon Klügel

Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie : nebst ihrer Anwendung auf praktische Rechnungen, das Feldmessen und die Markscheidekunst : Mit drey Kupfertafeln

Berlin und Stettin: bey Friedrich Nicolai, 1782

https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093

Druck Freier Zugang



Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0001
DFG

Nr 106

Qa V.
250

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0002
DFG

Anfangsgründe
der
Arithmetik, Geometrie
und
Trigonometrie,
nebst
ihrer Anwendung
auf praktische Rechnungen,
das Feldmessen und die Markscheidekunst.

Von
Georg Simon Klügel
Prof. der Mathematik zu Helmstädt.

Mit drey Kupfertafeln.

GROSSH. REGIERUNGSBIBLIOTHEK SCHWERIN

Berlin und Stettin
bey Friedrich Nicolai
1782.

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0005
DFG

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0006
DFG

Vorrede.

Diese Anfangsgründe machen das dritte Hauptstück der von mir ausgearbeiteten Encyklopädie aus, wovon ich einen besondern Abdruck zum Gebrauche meiner Vorlesungen veranstaltet habe. Es fehlt uns gar nicht an guten Lehrbüchern über die Anfangsgründe der reinen Mathematik: sie möchten aber dennoch für die Fassungskraft der meisten zu schwer seyn. Andere, deren Verfasser sich zu den gewöhnlichen Fähigkeiten haben herablassen wollen, fehlen zu oft gegen die Gründlichkeit, die allemahl ein Haupterfoderniß an dem Vortrage mathematischer Wahrheiten ist. Ich habe nach meinen besten Kräften Faßlichkeit und Gründlichkeit mit einander zu vereinigen mich bemüht. In der Stereometrie habe ich freylich die Sätze oft mehr nur begreiflich zu machen gesucht, als sie strenge erweisen

weisen können. Wer diese genauer erlernen will, muß Euklidens Elemente, oder die Lehrbücher der Herrn Kästner und Karstens zur Hand nehmen.

Es wird mir angenehm seyn, über diese kleine Arbeit das Urtheil von Kennern zu erfahren, damit ich von ihren Erinnerungen, es sey in meinen Vorlesungen, oder bey einer neuen Ausgabe Gebrauch machen könne.

Helmstädt den 4. April
1782.

G. S. Klügel.

Anfangs-

Anfangsgründe der Mathematik.

Die Mathematik, oder die Größenlehre, beschäftigt sich mit Vergleichung der Größen, das heißt, sie sucht den Zusammenhang der Größen, die von einander abhangen, auf, und lehrt, wie man aus gewissen bekannten Größen die unbekannten, welche mit ihnen in Verbindung stehen, finden könne.

Eine Größe ist, was in gleichartige Theile getheilt werden kann. Entweder hängen die Theile zusammen, und so ist die Größe eine ausgedehnte, nämlich Körper, Fläche und Linie; oder die Größe ist eine Menge gleichartiger mit einander verbundener Dinge, als ein Haufen Ducaten, Kugeln. Jene sind der Gegenstand der Geometrie, diese der Arithmetik. Man kann auch das Ausgedehnte als eine Menge neben einander liegender Theile betrachten, (so giebt man die Größe eines Feldes durch die Zahl der Morgen, einer Länge durch die Zahl der Fuße an) und hieraus entspringt die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie

Die reine Mathematik beschäftigt sich bloß mit der Größe, an und für sich betrachtet, ohne sich um die Eigenschaften, die sich an den natürlichen Körpern finden und sich messen lassen, zu bekümmern. Sie entwickelt demnach alle ihre Lehren bloß aus dem Begriffe der Größe, und braucht gar keiner fremden Hülfe: Zweifel, Dunkelheiten, Einschränkungen kennt sie nicht. Alles ist sonnenhelle in ihr. Ich werde hier nur ihre allerersten und einfachsten Grundwahrheiten vorlegen. Sie ist aber eine Wissenschaft von gewaltigem Umfange, die besonders seit etwa hundert Jahren große Fortschritte gethan hat, und noch immer erweitert wird. Sie gewährt dem Verstande die vollkommenste Befriedigung. Ihr Genuß reizt und stärkt zum fernern Genusse. Das Talent zur höhern Mathematik ist etwas selten. Freylich gehört viel Muße dazu. Sie belohnt auch mehr durch das Vergnügen der Betrachtung, als durch äusserliche Vortheile.

Die angewandte Mathematik enthält die Anwendung der allgemeinen Lehrsätze von der Verbindung der Größen, sowohl auf die Eigenschaften und Veränderungen der natürlichen Körper, in so ferne sie sich messen lassen, als auf eine Menge von allerhand Geschäften und Bedürfnissen des menschlichen Lebens. Jene nenne man die angewandte physische, diese die bürgerliche Mathematik.

Die physische angewandte Mathematik hat drey große Hauptäste, die mechanischen, die optischen und die astronomischen Wissenschaften. Jeder dieser Theile enthält genug Beschäftigung für ein ganzes Leben. Die reine Mathematik hat hier besonders ihre Anwendung.

Zu der bürgerlichen Mathematik gehören die praktische Mechanik nebst derselben Anwendung in den mechanischen Künsten, die Civilbaukunst, die Wasserbaukunst, die Kriegswissenschaften, welche aber vorzüglich

lich noch eine Menge anderer Kenntnisse enthalten, so wie auch die Wissenschaft des Seewesens, nämlich die Schiffkunst (die Wissenschaft des Schiffers) die Regierung des Schiffes durch die Anwendung der Mechanik, und die Schiffbaukunst, welche bis jetzt fast bloß praktisch getrieben ist; ferner die Feldmeßkunst, das Nivelliren, die mathematische Forstwissenschaft, die Markscheidekunst oder Bergwerksgeometrie, und die politische Arithmetik, in welcher die Berechnung wahrscheinlicher Fälle, sowohl durch ihren Nutzen, als durch ihre Schwierigkeiten, sich auszeichnet.

Ein allgemeiner Vortheil, den das Studium der Mathematik bringt, ohne den großen Nutzen, den sie in der Anwendung giebt, zu rechnen, besteht darinn, daß sie das Nachdenken schärft, die Aufmerksamkeit stärket, den Fleiß übt, den Verstand zur Ordnung, Deutlichkeit und Genauigkeit gewöhnt, daher das beste Vorbereitungsmittel zu andern Wissenschaften ist. Deswegen hatte Plato über der Thüre seines Hörsaals geschrieben: Kein Unkundiger der Geometrie komme herein.

Erster Abschnitt.

Die gemeine Arithmetik.

I. Rechnung mit ganzen Zahlen.

1. Eine Menge, Vielheit, Anzahl, setzt immer Dinge von Einer Art voraus, das ist, solche, woran man bloß das Gemeinsame betrachtet, z. E. eine Anzahl Bücher, wobey man nur auf den Begriff, Buch, nicht auf den Inhalt oder auf das Format sieht. Bey einer Anzahl Folianten ist das Format das Gemeinsame.

2. Der Begriff des Gemeinsamen ist dasjenige, welches wir wiederholen, wenn wir zählen, oder die Einheit. Eine Zahl ist der Begriff, welcher angiebt, wie die Vielheit aus der Einheit durch die Wiederholung derselben entsteht.

3. Der Ersparung der Wörter und der deutlichern Vorstellung willen, zählen wir mit besondern Worten nur bis Zehn (von den zehn Fingern unserer Hände) und drücken alle größere Zahlen durch Einheiten von steigender Größe, durch Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, Hunderttausende, Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quinquillionen u. s. f. aus, wovon jede bis mit auf die Million zehnmahl größer ist, als die vorhergehende, die folgenden aber immer eine Millionmahl größer werden.

Von Billionen u. s. w. macht man sich immer einen zu kleinen Begriff. Eine Billion Secunden, deren doch 3600 auf eine Stunde gehen, macht 31688 Jahre und ein weniges darüber aus, das Jahr zu 365 Tagen 6 Stunden gerechnet — Eine Trillion Gerstenkörner hervorzubringen, müßte die ganze Erde in Ackerland verwandelt werden. (Ich rechne den Himten zu $\frac{1}{2}$ Million Körner, den Morgen zu 30720 Quadratfuß; den Ertrag eines Morgens auf 12 Himten; die geographische Meile 15 auf einen Grad, zu 23641 rheinl. Fuß; die Oberfläche der Erde zu 9281916 Quadratmeilen, oder 168865897788 Morgen.)

4. Die Bezeichnung der Zahlen geschieht auf eine gleichförmige Art. Nur die ersten neun Zahlen bekommen jede ein besonderes Zeichen oder Ziffer. Die Zehner, Hunderte, ꝛc werden durch dieselben Zeichen, wie die Einer, angedeutet, nur daß die Größe der Einheit, durch die Stelle angezeigt wird. Die Einer nehmen den ersten Platz rechter Hand ein, die Zehner den zweyten, die Hunderte

derte den dritten, u. s. w. die Millionen den siebenten, die Billionen den dreyzehnten, die Trillionen den neunzehnten u. s. w. Die Stelle der Millionen kann man oben mit einem Striche, der Billionen mit zwey Strichen u. s. w. bezeichnen. Wenn eine Gattung von Einheiten fehlt, so wird ihre Stelle durch o ausgefüllt.

Exempel:

$18'''\,446744''\,073709'\,551615$

Diese Zahl ist die Summe aller Gerstenkörner, welche man erhält, wenn für das erste Feld eines Schachbrettes eins, für das zweyte zwey, für das dritte vier, und so immer weiter, doppelt gerechnet werden.

5. Addiren heißt eine Zahl finden, die so groß ist als zwey oder mehrere Zahlen zusammen genommen. Man nennt sie die Summe dieser.

6. Bey ganzen Zahlen bewerkstelliget man dieses so, daß man die Einer unter einander, also auch die Zehner, die Hunderte u. s. w. unter einander schreibt, darauf jede Gattung von Einheiten erstlich besonders addirt, und diese hernach mit einander vereiniget, indem man für jeden Zehner einer Gattung eine Einheit der nächst höhern Gattung nimmt.

Exempel.

	7805	
	39426	
	749	
	895394	
	24	Einer
	15	Zehner
	22	Hunderte
	21	Tausende
	12	Zehntausende
	8	Hunderttausende
Summe.	943374	Einer

Die Einer, Zehner ꝛc. werden aber nicht besonders hingeschrieben, sondern die Zehner jeder Gattung oder Ordnung von Einheiten werden gleich als Einheiten zu denen von der nächst höhern Gattung gezählt.

7. Zur Probe, ob man richtig addirt habe, addire man alle Zifern der aufgegebenen Zahlen, ohne auf den Wehrt wegen ihrer Stelle zu sehen, und werfe von der Summe der Zifern so oft Neun weg, als es angeht. In der zu probirenden Summe verfahre man mit den Zifern auf gleiche Art. Der Rest, nach der Wegwerfung aller Neuner, muß beydemahl derselbe seyn. In dem Exempel ist er 3.

8. Subtrahiren heißt, die Zahl finden, um welche eine Zahl kleiner ist, als eine andere größere. Sie heißt der Unterschied oder der Rest.

9. Zu dem Ende zieht man die Einer von den Einern, die Zehner von den Zehnern u. s. f. ab, weswegen die gleichartigen Einheiten auch hier über einander geschrieben werden müssen. Ist in der Zahl, wovon der Abzug geschieht (dem Minuendus) eine Gattung von Einheiten in geringerer Menge da, als in der abzuziehenden (dem Subtrahendus), so nimmt man von der nächst höhern Gattung eine Einheit dazu, die so viel als Zehn derjenigen Gattung beträgt, von welcher der Abzug geschehen soll. Fehlt diese, so geht man zu der um zwey Stufen höhern Gattung, und borgt daselbst eine Einheit, welche so viel als Zehn von der nächst höhern Gattung beträgt. Davon nimmt man Eins, das ist zehn zu derjenigen Gattung, wo die obere Zifer kleiner als die untere ist. Auf eine ähnliche Art verfährt man, wenn auch die um zwey Stufen höhere Gattung fehlt. Man geht zu der um drey Stufen höhern u. s. f.

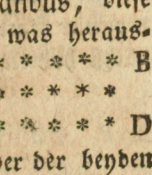
Exem-

Exempel

842796	842796	740238	700028
231574	258728	574896	457271
611222	584068	165342	242757

10. Wenn man den Rest und den Subtrahendus addirt, so kömmt der Minuendus heraus.

11. Multipliciren heißt, eine Zahl so oft zu sich selbst addiren, als die Einheit in einer andern Zahl enthalten ist. Jene Zahl heißt der Multiplicandus, diese der Multiplicator, beyde, Factoren, was herauskömmt, das Product. In dem nebengesetzten Schema ist AB der eine Factor, AC der andere, ABCD das Product. Es erhellt daraus, daß jeder der beyden Factoren in dem Producte so oft steckt, als die Einheit in dem andern enthalten ist. Daher können der Multiplicandus und der Multiplicator mit einander verwechselt werden.



12. Man könnte das Multipliciren dadurch verrichten, daß man den Multiplicandus so oft unter sich selbst setzte, als es der Multiplicator befiehlt, wie in dem Schema, und alle diese gleichen Zahlen addirte. Dieses würde aber oft sehr weitläuftig werden. Darum bedient man sich einer abgekürzten Art der Addition, die darauf beruht daß man das Product erhält, wenn man jeden Theil des einen Factors mit dem andern multiplicirt und die einzelnen Producte addirt. Dazu muß man aber das bekannte Einmahl Eins wohl inne haben.

13. Die Zahl 756429 sey mit 6 zu multipliciren. Dieses geschieht, wie folget

756429		
6		
	54	Einer
	12	Zehner
	24	Hunderte
	36	Tausende
	30	Zehntausende
	42	Hunderttausende
Product	4538574	Einer

Kürzer: man zähle jedesmahl in Gedanken gleich die Zehner einer Gattung als Einheiten zu dem Producte von der nächst höhern Gattung.

756429
6
4538574

14. Mit einzelnen Zehnern als 60, oder Hunderten als 600, u. s. f. zu multipliciren, multiplicirt man mit der Zahl der Einheiten, welche diese Zehnen, Hunderte, u. s. f. enthalten, ferner das Product mit 10, 100 u. s. f. indem man eine, zwey, u. m. Nullen hinzusetzt, wodurch ede Ziser einen 10mahl, 100mahl u. s. f. größern Wehrt bekömmt.

756429	756429
60	600
45385740	453857400

15. Soll man eine Zahl, wie 756429 mit einer andern wie 4358 multipliciren, so multiplicirt man sie nach der abgekürzten Art mit 8; 50; 300; 4000, und addirt die Producte.

```
      756429
        4358
  ----------
     6051432
    37821450
   226928700
  3025716000
  ----------
  3296517582
```

Die Nullen am Ende jedes Partialproducts läßt man weg, rückt aber jedes Partialproduct nach der Reihe um eine Stelle ein, wodurch man jede Zifer des Multiplicators als schlechte Einer zu betrachten befugt wird. Kommen in dem Multiplicator Nullen vor, so muß man für jede Nulle ebenfalls um eine Stelle einrücken.

16. Zu den Hülfsmitteln beym Multipliciren, wenn dieselbe Zahl oft als Factor gebraucht wird, gehören der Rechenknecht und die Neperischen Stäbe. Jener enthält alle Vielfache des Multiplicandus vom 1 bis zum 9 fachen, woraus man also nur die Partialproducte abschreiben darf. Die Neperischen Stäbe sind ein geschwinder Rechenknecht.

17. Eine nützliche Probe der Multiplication ist folgende: Man summire die Zifern jedes Factors, und werfe von jeder Summe so viel Neuner weg, als möglich ist, multiplicire die Reste in einander, und werfe auch von dem Producte alle darinn enthaltenen Neuner weg, und merke sich den Rest. Darauf summire man auch die Zifern des berechneten Products, werfe von der Summe alle darinn steckenden Neuner weg, so muß der Rest jenem Reste gleich seyn. Z. E. die Reste von den beyden Factoren in dem Exempel sind 6 und 2, deren Product 12, der Rest 3. Eben diese 3 ist der Rest von der Summe der Zifern des Products — Diese kaum bekannte

Probe beruht auf denselben Gründen wie die von der Addition.

18. Dividiren heißt eine Zahl in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen. Jene Zahl heißt der Dividendus, diese der Divisor, eins dergleichen Theile der Quotient. Dividiren ist also, eine Zahl finden, die aus dem Dividendus eben so entsteht, wie die Einheit aus dem Divisor. In dem Schema ist ABCD der Dividendus, AC der Divisor, jede der Horizontalreihen wie AB, einer der gleichen Theile, oder der Quotient.

A * * * * * B
* * * * *
C * * * * * D

19. Man ziehe den Divisor AC von dem Dividendus ABCD so oft ab, als es möglich ist, und merke sich die Zahl AB, welche dieses angiebt, so hat man den Quotienten AB. Man bekömmt nämlich offenbar so viel Horizontalreihen, als Einheiten in AC sind, wenn man AC so lange neben sich hinsetzt, bis der Dividendus erschöpft ist. Es ist hier noch bloß von ganzen Quotienten die Rede.

20. Der Quotient giebt also sowohl einen gewissen Theil des Dividendus an, als auch, wie oft sich der Divisor abziehen lasse. Z. E. 15 Rthlr. dividirt durch 3, sind 5 Rthlr. und 15 Rthlr. enthalten 3 Rthlr. 5 mahl.

21. Der Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt den Dividendus — Und der Dividendus durch den Quotienten dividirt giebt wieder den Divisor.

22. Den Quotienten zu finden, bedient man sich der wiederholten Subtraction des Divisors, bis der Dividendus erschöpft ist (19). Man nimmt aber den Divisor nicht einzeln weg, sondern so viel zehn-hundert-tausend- und noch mehr mahl weg, als es sich nur thun läßt.

läßt. Den Anfang macht man mit dem höchsten Vielfachen.

Exempel

Divisor	Dividendus	Quotient	
6	589242	90000	mahl
	540000	8000	=
	49242	200	=
	48000	00	=
	1242	7	=
	1200		
	42		
	42		
	0		

Kürzer

6	589242	98207
	54	
	49	
	48	
	12	
	12	
	042	
	42	
	0	

23. Besteht der Divisor aus mehr Ziffern, so verfährt man auf eine ähnliche Art.

```
728 | 3532256 | 4852
    | 2912    |
    ----------
      6202
      5824
      ----
       3785
       3640
       ----
        1456
        1456
        ----
           0
```

24. Um einen Ueberschlag zu machen, wie groß jedesmahl der gesuchte Theil des Quotienten sey, kann man alle Zifern des Divisors bis auf die höchste, und eben so viel von demjenigen Theile des Dividendus, den man vorgenommen hat, wegwerfen, und darauf die übrigen des letztern mit jener dividiren. Ist die nächste Zifer nach der höchsten im Divisor groß, so thut man besser, die höchste um Eins zu vermehren, um den Ueberschlag sicherer zu machen. Ein wenig Uebung macht die Sache leicht.

25. Die Probe der Multiplication (17) dient auch hier, wenn man Divisor und Quotient als Factoren, den Dividendus als Product ansieht. Sollte ein Rest geblieben seyn, so muß man diesen vorher vom Dividendus wegnehmen. Oder man nimmt den Ueberschuß über die Neuner in dem Reste von dem Ueberschusse der Neuner in dem Dividendus weg, und addirt nöthigenfalls zu jenem 9. Das übrig bleibende beträgt so viel als der Ueberschuß über die Neuner in dem Producte des Divisors und Quotienten. Zu einer vollkommen sichern, aber weitläuftigern Probe dienen sich Division und Multiplication wechselsweise, wegen (21). Der Rechenknecht oder die Neperischen Stäbe thun bey dem Dividiren mit einer

oft

oft vorkommenden Zahl noch mehr Dienste, als bey dem Multipliciren.

26. Dies sind die vier Species der Rechenkunst, wie sie im gemeinen Leben häufig gebraucht werden. In der Mathematik kommen hiezu noch zwey, nämlich die Zerfällung einer Zahl in zwey oder mehr gleiche Factoren (die Ausziehung der Wurzeln) und die logarithmische Rechnungsart. Von beyden in der Folge.

27. Die arithmetischen Operationen deutet man durch gewisse Zeichen an, die Addition durch +, die Subtraction durch —, die Multiplication durch × oder einen Punct zwischen den Factoren, die Division durch einen Strich unter dem Dividendus und über dem Divisor oder auch ein: zwischen dem Dividendus und Divisor. Das Zeichen der Gleichheit ist =

II. Rechnung mit Brüchen.

28. Es ist willkührlich, was man beym Zählen zur Einheit nehmen will. So vielmahl die Einheit größer gemacht wird, so vielmahl wird die Zahl, wodurch dieselbe Größe ausgedrückt wird, kleiner und umgekehrt. Z. E. 24 Fuß sind 12 Ellen oder 4 Klafter.

29. Ein wahrer oder eigentlicher **Bruch** ist ein Theil der Einheit. In den Begriff eines Bruchs kommen zwey Zahlen, eine, die anzeigt, in wie viel gleiche Theile die Einheit getheilt sey, der **Nenner**; die andere, welche angiebt, wie viel dieser gleichen Theile man zu nehmen habe, der **Zähler**. Man schreibt den Zähler oben, den Nenner unter einem Queerstriche, wie $\frac{3}{4}$.

30. Ein uneigentlicher Bruch enthält mehr Theile als die Einheit, z. E. $\frac{12}{7}$. Nimmt man durch die Division den Nenner vom Zähler so oft weg, als es angeht, so hat man die in dem Bruche steckenden Ganzen, hier 3, und

die

die übrigen 4 sind der Zähler des überschiessenden wahren Bruches $\frac{4}{5}$. Nämlich $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{10}{5} = 2$; $\frac{15}{5} = 3$, u. s. f.

Umgekehrt verwandelt man eine ganze Zahl mit anhängendem Bruche in einen uneigentlichen Bruch. So ist $3 + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$.

31. Jeder Quotient ist ein Bruch, dessen Zähler der Dividendus, der Nenner der Divisor ist. Denn es ist einerley, ob man von dem ganzen Dividendus einen gewissen Theil, oder ob man von jeder der Einheiten desselben den eben so vielten Theil nimmt. Ist der Dividendus kleiner als der Divisor, z. E. wenn 3 durch 4 zu dividiren sind, so kann man nicht anders als von jeder Einheit den so vielten Theil, als der Divisor andeutet, nehmen. Ist der Dividendus größer, so kann man dem Quotienten eine doppelte Form geben. Z. E. der Quotient von 19 durch 5 ist $\frac{19}{5}$. Das ist der 5te Theil der Einheit 19 mahl, oder $3\frac{4}{5}$. Denn $\frac{19}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$. Oder 5 läßt sich 3 mahl von 19 wegnehmen, und von den übrigen 4 der 5te Theil des Divisors 4 mahl. So ist der Quotient $3\frac{4}{5}$ zu lesen, wenn man fragt, wie oft 5 von 19 weggenommen werden könne.

32. Multiplicirt man den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl, so wird der Bruch selbst damit multiplicirt. Als $\frac{3}{11} \times 2 = \frac{6}{11}$. Denn 6 ist 2 mahl so viel als 3, der Name, hier $\frac{1}{11}$, mag seyn, welcher er will.

33. Multiplicirt man aber den Nenner durch eine ganze Zahl, so wird der Bruch so vielmahl kleiner als diese Zahl anzeigt. Z. Ex. $\frac{7}{15}$ ist dreymahl so klein als $\frac{7}{5}$. So viel Theile mehr auf dasselbe Ganze gehen, so vielmahl kleiner muß jeder seyn.

34. Folglich wird durch die Division des Zählers der Bruch dividirt; durch die Division des Nenners aber multiplicirt, beydemahl durch den gebrauchten Divisor.

35. Wer-

35. Werden Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt die Größe des Bruchs ungeändert. Z. E. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ ꝛc.

36. Hiedurch kann man zwey oder mehr Brüche auf einerley Benennung bringen, um sie mit einander zu vergleichen. Z. E. $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{7}$ sind jener $\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7}$, dieser $\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5}$, das ist $\frac{21}{35}$ und $\frac{20}{35}$. Man multiplicirt den Zähler und Nenner eines jeden durch den Nenner des andern. Auf diese Art verfährt man auch mit mehrern. Der Zähler und Nenner eines jeden wird durch das Product der Nenner der übrigen multiplicirt. Z. E. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ sind $\frac{280}{420}$, $\frac{240}{420}$, $\frac{84}{420}$, $\frac{315}{420}$.

37. Oft kann man zu dem gemeinschaftlichen Nenner mit einer kleinern Zahl ausreichen, als die nach dieser Regel zu findende ist. Wenn nämlich zwey oder mehrere Nenner einen gemeinschaftlichen Factor haben, so behält man diesen nur bey einem Nenner bey, und läßt ihn bey den übrigen weg. Denn es kömmt hier nur darauf an, eine Zahl zu finden, worinn die Nenner aufgehen. Diese ist gewiß das Product aller Nenner. Wenn aber zwey, z. E. in den Brüchen $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, einen gemeinschaftlichen Factor, hier 2, haben, so gehen sie nicht allein in dem Producte 3 . 2 . 5 . 2, sondern auch in dem 3 . 2 . 5 auf, und die Brüche sind $\frac{25}{30}$, $\frac{21}{30}$. Oder man habe die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{14}$, so gehen die Nenner in dem Producte 2 . 3 . 5 . 7, das ist 210 auf, und die Brüche sind $\frac{175}{210}$; $\frac{147}{210}$; $\frac{165}{210}$.

38. Vorausgesetzt, daß man wisse, welchen gemeinschaftlichen Factor zwey oder mehr Zahlen haben, verfährt man überhaupt, wie folgendes Exempel darstellt. Die Brüche, welche auf einerley Benennung zu bringen sind, seyn

$$\frac{5}{12}, \frac{3}{10}, \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{4}{21}, \frac{1}{14}.$$

Die

Die Nenner schreibe man in eine Reihe, setze den Factor, der einigen derselben gemeinschaftlich ist, daneben, dividire sie dadurch und schreibe die Quotienten darunter, die andern setze man unter sich selbst unverändert, suche darauf wieder einen Factor, der einigen dieser Zahlen gemeinschaftlich ist, verfahre damit wie zuerst, und so fort, bis man keinen gemeinschaftlichen Factor mehr findet. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist das Product aller herausgesetzter Factoren und der übrig bleibenden Zahlen

2) 12 . 10 . 8 . 15 . 21 . 14
2) 6 . 5 . 4 . 15 . 21 . 7
3) 3 . 5 . 2 . 15 . 21 . 7
5) 1 . 5 . 2 . 5 . 7 . 7
7) 1 . 1 . 2 . 1 . 7 . 7
1 . 1 . 2 . 1 . 1 . 1

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 2 = 840 und die Zähler der Brüche sind 350, 252, 735, 616, 160, 60.

39. Das erklärte Verfahren heißt die Reduction der Brüche auf einerley Benennung oder das Einrichten der Brüche. Eine andere nützliche Veränderung ist das Aufheben, indem man einen Bruch in den kleinsten möglichen Zahlen darstellt. Fällt der gemeinschaftliche Factor des Zählers und Nenners in die Augen, so dividirt man beyde sogleich dadurch. Z. E. $\frac{36}{96}$ ist $\frac{3}{8}$. Ist dieses nicht, so dividirt man den größern von beyden durch den kleinern, den kleinern durch den Rest, den Rest durch den zweyten Rest, u. s. f. bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist der größte gemeinschaftliche Theiler. Ist der letzte Divisor Eins, so ist der Bruch unverkleinerlich. Es sey der Bruch $\frac{414}{805}$, so steht die Rechnung folgendergestalt:

Divi-

Divisor	Dividendus	Rest
414	805	391
391	414	23
23	391	0

der Bruch läßt sich also durch 23 verkleinern, und ist $\frac{18}{35}$.

40. Brüche zu addiren, bringe man sie vorher auf einerley Nenner (37. 38) wenn sie nicht schon sie haben, und addire die Zähler. Exemp. $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{11}{14} = \frac{175}{210} + \frac{147}{210} + \frac{165}{210} = \frac{487}{210} = 2\frac{67}{210}$. Weil die Zähler nunmehr einerley Theile des Ganzen bedeuten, so kann man sie als Größen einer Art zusammenzählen.

41. Einen Bruch von einem andern zu subtrahiren, bringe man beyde, wenn es nöthig ist, auf einerley Nenner, und subtrahire den kleinern Zähler von dem größern. Z. E. $\frac{5}{6} - \frac{7}{10} = \frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

42. Die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl ist schon gelehrt (32. 34). Einen Bruch, wie $\frac{6}{7}$ oder auch eine ganze Zahl, mit einem Bruche wie $\frac{1}{5}$, dessen Zähler 1 ist, multipliciren, ist nichts anders als ihn mit 5 dividiren. Eine Größe einfünftheilmahl nehmen, heißt auch nach dem Sprachgebrauche, den fünften Theil von ihr nehmen. Also ist $\frac{6}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{35}$ (33). So auch $8 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$. Soll man nun mit $\frac{3}{5}$ multipliciren, so ist das Product 3 mahl so groß als das durch die Multiplication mit $\frac{1}{5}$ entstandene. Also ist $\frac{6}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{35}$ und $8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$. Daraus erhellet die

Regel: Mit einem Bruche zu multipliciren, muß man mit dem Zähler multipliciren, und mit dem Nenner dividiren.

43. Dieses stimmt auch mit dem Begriffe der Multiplication (11) überein. Der fünfte Theil der Einheit ist in $\frac{3}{5}$ enthalten 3 mahl; also muß auch der fünfte

Theil des Multiplicandus in dem Producte enthalten seyn 3mahl.

44. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren ist vorher gelehrt (33. 34). Soll ein Bruch oder auch eine ganze Zahl durch einen Bruch, als $\frac{3}{5}$ dividirt werden, so ist der Divisor $\frac{3}{5}$ darinn 5mahl so oft als 3 enthalten, weil er der 5te Theil von 3 ist. Folglich muß man mit dem Zähler 3 dividiren, und mit dem Nenner 5 multipliciren. So ist $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21}$. Auch $8 : \frac{3}{5} = \frac{40}{3}$. Oder man multiplicirt mit dem umgekehrten Bruche $\frac{5}{3}$. Es ist demnach

Die Regel: Mit einem Bruche zu dividiren, muß man mit dem Zähler dividiren, und mit dem Nenner desselben multipliciren.

45. Dieses stimmt ebenfalls mit dem Begriffe von der Division für ganze Zahlen überein. Die Einheit entsteht aus dem Divisor $\frac{3}{5}$ durch die Division mit 3 und Multiplication mit 5. Folglich muß der Quotient aus dem Dividendus auf eben die Art herausgebracht werden. Er ist also $\frac{4}{21} : 5 = \frac{20}{21}$.

46. Ein unreiner Bruch ist, dessen Zähler oder Nenner oder beyde Brüche enthalten. Z. E. $\frac{3\frac{1}{5}}{8}$ oder $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{7}}$. Wenn man Zähler und Nenner durch ordentliche Brüche ausgedrückt hat, so dividirt man jenen mit diesem, und giebt dadurch dem Bruche eine ordentliche Form. Jener Bruch ist $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$; Dieser ist $\frac{150}{22} = \frac{72}{161}$.

Von den Decimalbrüchen.

46. Ein Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner 10 oder 100 oder 1000 und so ferner ein Product aus

aus der mehrmahls in sich selbst multiplicirten Zahl 10 ist. Die Decimalbrüche sind von großer Bequemlichkeit, daher in der Mathematik fast keine andere gebraucht werden.

46. So wie man die ganzen Zahlen aus Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. zusammensetzt, so wird man auch die Bruchtheile durch Zehntheilchen, Hunderttheilchen u. s. f. sehr bequem ausdrücken können. Und wie man den Wehrt der Zahlzifern linker Hand hin mit jeder Stelle zehnfach größer werden läßt, so wird man von der Stelle der Einer nach der Rechten hin, nur den Zifern einen mit jeder Stelle zehnmahl kleinern Wehrt beylegen dürfen, um die Nenner ersparen zu können. Aber die Stelle der Einer muß durch ein beliebiges Zeichen, ein Punctum oder lieber ein Komma, bemerkt werden. Solchergestalt wird 354,8703 heissen 354 Einer, 8 Zehntheile, 7 Hundertth. 0 Tausendth. 3 Zehntausendth. Ferner 0,693 heißt 0 Einer, 6 Zehnth. 9 Hundertth. 3 Tausendth. Und 0,0046 sind 4 Tausendth. 6 Zehntausendtheile.

48. Die zur rechten Hand des Einerzeichens stehenden Zifern machen eine Reihe Decimalbrüche aus, die man sehr leicht auf einen gemeinschaftlichen Nenner, den Nenner des kleinsten unter ihnen bringt. So ist $0{,}693 = \frac{693}{1000}$, weil $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{90}{1000} + \frac{3}{1000}$. Eben so ist $354{,}8703 = \frac{3548703}{10000}$. Kurz, man lasse das Komma weg, und nehme zum Nenner eine Eins mit so viel Nullen, als durch das Komma Zifern und Nullen rechter Hand abgeschnitten sind.

49. Man kann einem nach (47) ausgedrückten Decimalbruche so viel Nullen anhängen als man will, ohne daß dadurch der Wehrt desselben verändert würde.

Denn der Wehrt jeder Zifer ist durch das Komma bestimmt.

50. Für jede Stelle, die das Komma rechter Hand fort rückt, wird die Zahl mit 10 multiplicirt und für jede, die es linker Hand hinauf rückt, mit 10 dividirt.

51. Addition. Decimalbrüche addirt man, wie ganze Zahlen, nachdem man sie so geordnet, daß die Kommata über einander stehen.

Exempel.
23,437
4,8027
583,29
0,00248
611,53218

52. Subtraction. Diese geschieht auf die nämliche Art.

57,8042	84,56
13,263	17,0582
44,5412	67,5018

53. Multiplication. Man verfährt, als wenn man ganze Zahlen, mit Weglassung des Komma zu multipliciren hätte, und schneidet von dem Producte so viel Zifern von der rechten nach der linken Hand ab, als in beyden Factoren zusammen abgeschnitten sind.

Exempel.

8374	83,74	83,74	0,024
1,26	12,6	0,126	0,026
50244	50244	50244	144
16748	16748	16748	48
8374	8374	8374	0,000624
10551,24	1055,124	10,55124	

Denn so vielmahl als ein Factor kleiner wird, so vielmahl wird auch das Product kleiner.

54. Di-

54. Division. I. Fall, wenn Divisor und Dividendus beyde ganze Zahlen sind. Den Dividendus oder den Rest macht man, sobald es nöthig ist, durch Hinzusetzung einer oder mehrerer Nullen zu Zehntheilen, Hunderttheilen ꝛc. und verfährt mit diesen so, wie man sonst mit den Zehnern, Hunderten ꝛc. verfährt.

Exempel

```
13 | 2880 | 221,538461538461....
   | 26   |
   -------
    28
    26
    --
    20 Einer
    13
    --
     70 Zehnth.
     65
     --
      50 Hundertth.
      39
      --
      110 Tausendth.
      104
      ---
       60 Zehntausendth.
       u. s. w.
```

Der Quotient bricht oft nicht ab; allein man kann ihn bis zu einer beliebigen Genauigkeit fortsetzen. Zuletzt kehren dieselben Zifern von einer gewissen an wieder, wenn man auf einen Rest kommt, der schon einmahl da gewesen ist.

II. Fall, wenn der Dividendus allein Decimaltheile enthält. Die Division wie vorher, nur daß das Komma in dem Quotienten um so viel Stellen nach der linken Hand hin fortrückt, als Zifern in dem Dividendus abgeschnitten sind.

13|2,88|0,22153...

III. Fall, wenn der Divisor Decimaltheile enthält. Man rückt das Komma in demselben bis zu der letzten Ziffer vorwärts, und das Komma in dem Dividendus um eben so viel Stellen, und setzt so viel Nullen zu, als etwa Ziffern fehlen, um die man das Komma fortrücken müßte.

Exempel.

$$\frac{1,3\,|\,2,88}{13\,|\,28,8}\,\Big|\,2,215\ldots$$

das ist

Oder

$$\frac{0\,13\,|\,28,8}{13\,|\,2880}\,\Big|\,221,53\ldots$$

das ist

Oder

$$\frac{0,013\,|\,288}{13\,|\,288000}\,\Big|\,22153,84\ldots$$

das ist

III. Ausziehung der Quadratwurzel.

55. Das Product einer Zahl in sich selbst, heißt ihr Quadrat; das Product aus der Zahl in das Quadrat, der Cubus oder Würfel; aus dem Cubus in die Zahl das Biquadrat. Diese Producte und die auf ähnliche Art fortgesetzten nennt man auch Potenzen, die Zahl selbst die erste, das Quadrat die zweyte, den Cubus die dritte, u. s. w. Z. E. von der Zahl 5 ist das Quadrat 25, der Cubus 125, das Biquadrat 625, u. s. f. Die Zahl, welche auf diese Art in sich selbst multiplicirt wird, heißt die Wurzel, die Quadratwurzel für ein Quadrat, die Cubicwurzel für einen Cubus, ꝛc.

56. Die Wurzel aus einer Potenz ziehen, ist, die Zahl, welche als eine gewisse Potenz angesehen wird, in so viel gleiche Factoren zerfällen, als der Grad der Potenz anzeigt. Die Quadratwurzel aus einer Zahl finden,

ist,

ist, sie in zwey gleiche Factoren zerfällen; die Cubicwurzel, sie in drey gleiche Factoren zerfällen.

57. Die Ausziehung der Quadratwurzel macht einige Schwierigkeit, die der Cubicwurzel mehr, die von höhern Graden erfordert die Hülfe der höhern Mathematik. Da die Ausziehung der Quadratwurzel in mathematischen und physikalischen Berechnungen nicht selten verlangt wird, so will ich sie nicht ganz vorbeygehen.

58. Man muß zuerst die Entstehung des Quadrats aus den Theilen der Wurzel entwickeln. Die Wurzel sey 46 oder 40 + 6. Man multiplicire sie auf folgende Art in sich selbst

```
  46
  46
----
1600
 240
 240
  36
----
2116
```

Es enthält also das Quadrat einer zweytheilichten Zahl, wie 46, erstlich das Quadrat der Zehner, zweytens das Product aus den Zehnern in die Einer zweymahl, drittens das Quadrat der Einer. Man kann die Zehner als schlechte Einer betrachten, nur muß man ihr Quadrat in der Stelle der Hunderte anfangen lassen, und das doppelte Product aus ihnen in die Einer in der Stelle der Zehner.

59. Soll man rückwärts aus 2116 die Quadratwurzel finden, so zieht man jene Theile nach der Ordnung in ihren Stellen ab.

```
      21 | 16 | 46
      16 |    |
     ---- |  -
  8)  5 | 1
      4 | 8
      -- |  --
        | 36
        | 36
        |  --
        |  0
```

Das Quadrat des ersten Theils, oder der Zehner, kann nicht größer seyn als die Menge der Hunderte in der vorgegebenen Zahl. Dasjenige Quadrat, welches unter den Quadraten der Einer, nämlich 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 der vorhandenen Hunderten am nächsten kömmt, ist das Quadrat des ersten Theils, und die Wurzel dieses Quadrats ist folglich der erste Theil, oder die Anzahl der Zehner der gesuchten Wurzel. Hier fällt 2100 zwischen 1600 und 2500, also die Wurzel zwischen 40 und 50. Man ziehe das Quadrat (1600) ab, und nehme zu den übrigen Hunderten die vorhandenen Zehner, hier Einen. In diesen Hunderten und Zehnern (hier 51 Zehnern) steckt das doppelte Product aus den Zehnern in die Einer der Wurzel, oder das Product aus dem doppelten ersten Theil in den zweyten. Dividirt man also die Zehner mit dem doppelten ersten Theile, so erhält man den zweyten Theil. Man ziehe das doppelte Product beyder Theile ab, nehme zu dem Reste die vorhandenen Einer, und ziehe nun auch das Quadrat der Einer davon ab. Bleibt nichts übrig, so ist die Wurzel genau gefunden. Wäre jeder Rest kleiner als das Quadrat der Einer, so müßte man den gefundenen zweyten Theil um 1 vermindern. Bleibt nach Abzug des Quadrats der Einer noch ein Rest, so muß man, wenn es nöthig ist, die Wurzel noch genauer suchen. Hier sind noch ein paar Exempel

14) 54|76|74 — 49 — 5|7 — 1|6 — 16 — 16 — 0

16) 74|32|86 — 64 — 10|3 — 9|6 — 72 — 36 — 36 Rest

60. Wenn man zu einer Zahl, wie 38 eine, zwey oder mehr Nullen fügt, so wird ihr Quadrat um doppelt so viel Nullen vermehrt. Das Quadrat von 38 ist 1444, von 380 ist es 144400, von 3800 ist es 14440000 u. s. w. Soll man nun das Quadrat von einer Zahl wie 386 so machen, daß die Entstehungsart desselben aus der Wurzel sichtbar wird, so verfahre man wieder wie in (58).

386
386
38. 38 = 144400
2. 38. 6 = 4560
6. 6 = 36
148996

oder

386

9|. .|. .
4|8 .|. .
64|. .
45|9 .
36
14|89|96

Eben so, wenn die Wurzel 4 Ziffern hat. Z. E. 3867, sehe man die 386 Zehner als den ersten Theil an, und verfahre wie vorher.

3867
3867
14899600
54040
49
14953689

oder

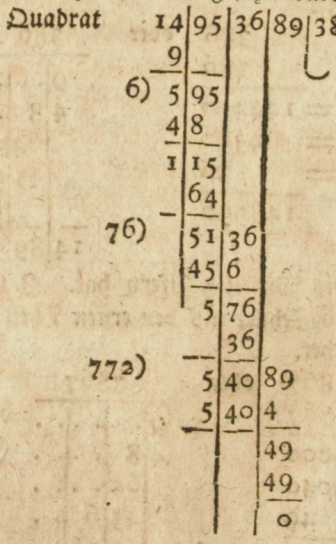
3867

9|. .|. .|. .
4|8 .|. .|. .
64|. .|. .
45|6 .|. .
36|. .
5|40|4 .
49
14|95|36|89

61.

61. Hieraus erhellet, daß das Quadrat enthalte die Quadrate jeder Zahlzifer und die doppelten Producte aus jeder Zifer in alle vorhergehenden als eine Zahl betrachtet. Theilt man das Quadrat in Classen von zwey Zifern von der rechten Hand an, weil die oberste Classe linker Hand auch nur eine Zifer bekommen kann, so steckt in jeder Classe das Quadrat derjenigen Zifer, die mit der Classe einerley Stelle hat. Die doppelten Producte aus jeder Zifer der Wurzel in alle vorhergehenden fangen mit ihrer untersten Zifer linker Hand in derjenigen Classe an, die mit jener Zifer der Wurzel dieselbe Stelle hat.

62. Bey der Ausziehung der Wurzel werden die Theile des Quadrats in eben der Ordnung wieder von dem Quadrat abgezogen, als sie bey der Zusammensetzung desselben zu einander gesetzt wurden.



63. Das Quadrat eines Bruchs, z. E. $\frac{3}{4}$ ist das Quadrat des Zählers dividirt durch das Quadrat des Nen-

Nenners, also $\frac{9}{16}$. Denn $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ (42.) Und aus einem Bruche die Wurzel zu ziehen, muß man sowohl aus dem Zähler als dem Nenner die Wurzel suchen.

64. Ist eine Zahl kein Quadrat einer ganzen Zahl, und man will die Wurzel genauer wissen, so multiplicire man die vorgegebene Zahl mit 100 oder 10000 oder 1000000 u. s. f. und dividire sie durch eben diesen Multiplicator, daß sie die Form eines Bruches bekömmt. Aus dem Zähler und Nenner ziehe man die Wurzel, dadurch erhält man die gesuchte Wurzel auf halb so viel Decimalstellen, als man zu der Zahl Nullen gesetzt hat. Z. E. aus 764, das ist $\frac{7640000}{10000}$ ist die Wurzel $\frac{2764}{100}$ oder 27,64 beynahe.

65. Man muß wissen, daß, wenn eine Wurzel nicht unter den ganzen Zahlen zu finden ist, sie auch nicht durch einen Bruch vollkommen ausgedrückt werden kann, ob es gleich möglich ist, sie so genau, als es nur verlangt wird, anzugeben. Eine Größe, die sich wie die Quadratwurzel aus 5 durch die angenommene Einheit und ihre Theile nicht vollkommen ausdrücken läßt, nennt man eine Irrationalzahl. Sie hat ihre bestimmte Größe (die Geometrie kann nämlich jede Quadratwurzel genau darstellen) aber sie ist durch die angenommene Einheit unaussprechbar.

66. Die Ausziehung der Cubicwurzel zu lehren würde zu weitläuftig fallen. Man trift sie fast in allen Elementarbüchern an. Zur Erleichterung dieser Rechnungen hat man Tafeln der Quadrate und Cuborum berechnet, für alle Wurzeln von 1 bis 1000 oder 10000. Um vor den eingeschlichenen Druckfehlern sicher zu seyn, bediene man sich des folgenden Täfelchens, welches die Summe der Zifern in der Wurzel, dem Quadrate und dem

dem Cubus, enthält, nachdem die darinn etwa enthaltenen Nenner weggeworfen sind.

Für die Wurzel	0.1.2.3.4.5.6.7.8.
Für das Quadrat	0.1.4.0.7.7.0.4.1.
Für den Cubus	0.1.8.0.1.8.0.1.8.

Z. E.

Wurzel	Quadrat	Cubus
472	222784	105154048
473	223729	105823817
474	224676	106496424

In jedem Quadrate ist die Summe der Zifern von dem Vielfachen der Neun um 0 oder 1 oder 4 oder 7 unterschieden; in dem Cubus um 0 oder 8.

IV. Von Verhältnissen und Proportionen.

67. Das Verhältniß zweyer Größen ist die Art wie eine aus der andern entsteht. Es kann also nur zwischen gleichartigen statt finden.

68. Eine Größe entsteht aus der andern entweder durch die Addition und Subtraction, oder durch die Multiplication und Division. Als, 12 entsteht aus 8 durch die Addition von 4, so wie wiederum 8 aus 12 durch die Subtraction der 4 entsteht. Es entstehet aber auch 12 aus 8 durch die Division mit 2 und Multiplication mit 3, oder kurz durch die Multiplication mit $\frac{3}{2}$ oder Division mit $\frac{2}{3}$, so wie 8 aus 12 auf die umgekehrte Art entsteht. Das Verhältniß heißt in dem ersten Falle das arithmethische, in dem andern das geometrische.

69. Der Begriff von Verhältniß liegt bereits in den ersten Operationen der Arithmetik zum Grunde. Schon der Begriff einer Zahl enthält den Begriff eines Verhältnisses, weil er die Vorstellung der Art ist, wie eine Größe durch die Wiederhohlung einer gewissen Einheit entsteht.

steht. Die Addition und Subtraction entwickeln das arithmetische Verhältniß, die Multiplication und Division das geometrische.

70. Das arithmetische Verhältniß bezeichnet man wie im folgenden Beyspiele 8 — 12, das geometrische 8 : 12: Die Größen selbst nennt man Glieder des Verhältnisses, die erste das **vorhergehende**, die zweyte das **nachfolgende**, wiewohl die Ordnung willkührlich ist.

71. Die Zahl (ganze oder gebrochne) womit das vorhergehende Glied eines geometrischen Verhältnisses multiplicirt werden muß, um das folgende zu erhalten, heißt der **Exponent** des Verhältnisses.

Die arithmetische Proportion.

72. Zwey arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die vorhergehenden Glieder um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert, die nachfolgenden Glieder geben. Z. E. 20 — 8 und 16 — 4.

73. Zwey gleiche arithmetische Verhältnisse geben eine **arithmetische Proportion**, welche ihrer Natur zufolge so bezeichnet wird 8 — 20 = 4 — 16. Das erste und vierte Glied heissen die beyden **äussern**, die andern die **mittlern** Glieder.

74. Die Summe der beyden mittlern Glieder in einer arithmetischen Proportion ist so groß als die Summe der beyden äussern.

In der Proportion 8 — 20 = 4 — 16 ist 20 + 4 = 8 + 12 + 4, und 8 + 16 = 8 + 4 + 12, beydemahl dasselbe, nämlich die Summe der vorhergehenden Glieder nebst dem Unterschiede 12. Wäre die Proportion so geschrieben, 20 — 8 = 16 — 4, so hätte man 8 + 16 = 20 — 12 + 16 und 20 + 4 = 20 + 16 — 12, beydemahl wieder die Summe

me der vorhergehenden Glieder um die Differenz 12 vermindert.

75. Aus den drey ersten Gliedern einer arithmetischen Proportion erhält man das vierte, wenn man von der Summe des zweyten und dritten das erste abzieht.

76. Sind die beyden mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion eine zusammenhängende oder stetige, z. E. 6 — 9 = 9 — 12.

77. In einer zusammenhängenden arithmetischen Proportion ist das mittlere Glied die halbe Summe der beyden äussern — Also findet man es gleich durch die Halbirung der Summe der beyden äussern, wenn diese gegeben sind.

78. Das arithmetische Mittel von zwey oder mehrern Zahlen ist die Summe aller dividirt durch die Anzahl derselben. Als, von 110, 104, 116, 98 ist das arithmetische Mittel 428 dividirt durch 4, das ist 107. Dieses kömmt häufig vor, z. E. wenn man die Ertrage eines Gutes aus dem Durchschnitte des Ertrages mehrerer Jahre berechnet, oder die Anzahl der jährlich Gebohrnen, Sterbenden, Getrauten an einem Orte nach der Mittelzahl angiebt.

Die geometrische Proportion.

79. Geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn das folgende Glied jedes Verhältnisses aus dem vorhergehenden durch die Multiplication mit derselben Zahl, ganzen oder gebrochnen (auch irrationalen) entsteht, oder, wenn die Exponenten (71) gleich sind. So sind gleich die Verhältnisse 12 : 4 und 15 : 5; desgleichen 8 : 14 und 12 : 21.

80. Zwey gleiche geometrische Verhältnisse geben eine geometrische Proportion, welche überhaupt bezeichnet

net wird, wie diese, 8 : 14 = 12 : 21. Die vier Grösßen in der Ordnung, wie sie stehen, heissen proportionale. Man spricht die geometrische Proportion gewöhnlich so aus: 8 verhält sich zu 14 wie 12 zu 21. Das erste und vierte Glied heissen auch hier die beyden äussern, das zweyte und dritte die beyden mittlern Glieder.

81. Sind die beyden mittlern Glieder einander gleich, so ist die Proportion eine zusammenhängende oder stetige, wie 8 : 12 = 12 : 18. Die beyden mittlern heissen jedes die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beyden äussern.

82. Hauptsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product der beyden mittlern Glieder gleich dem Producte der beyden äussern.

Denn das zweyte Glied ist ein Product aus dem ersten in den Exponenten; also ist das Product der beyden mittlern Glieder das Product aus dem ersten und dritten Gliede und dem Exponenten. Ferner ist das vierte Glied gleich dem Product aus dem dritten in denselben Exponenten, und daher das Product der beyden äussern Glieder gleich dem Product aus dem ersten und dem dritten und dem gemeinschaftlichen Exponenten beyder Verhältnisse. Folglich ist das Product der mittlern Glieder gleich dem Product der beyden äussern.

83. In einer stetigen Proportion ist das Quadrat des mittlern Gliedes gleich dem Product der beyden äussern. Daher muß man, um die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwey Zahlen zu finden, aus dem Product dieser letztern die Quadratwurzel ziehen. Als zwischen 8 und 18 ist die mittlere Proportionalzahl die Quadratwurzel aus 144, nämlich 12.

84. Das vierte Glied einer geometrischen Proportion aus den drey übrigen zu finden, multiplicirt man das

zwey-

zweyte in das dritte, und dividirt durch das erste. Z. E. zu 8, 14, 12 ist die vierte Proportionalzahl das Product aus 14 mahl 12, nämlich 168 dividirt durch 8. Dieses nennt man die Regel de Tri oder die goldene Regel.

85. Die Glieder desselben Verhältnisses müssen gleichartige Größen seyn. Aber die Größen zweyer Verhältnisse können ungleichartige seyn, und sind es auch oft. Z. E. 8 ℔ und 14 ℔ von derselben Waare verhalten sich wie 12 Rthlr. und 21 Rthlr. wenn die 8 ℔ kosten 12 Rthlr. Zwey ungleichartige Größen können aus zwey ihnen gleichartigen auf einerley Art entstehen.

86. Das Verhältniß zweyer Größen jeder Art z. E. 8 ℔ und 14 ℔ ist dasselbe mit dem Verhältnisse der Zahlen 8 und 14, wodurch sie mittelst einer gemeinschaftlichen Einheit ausgedrückt werden. Auf den Namen der Einheit kömmt es gar nicht an. Die Zahl 14 entsteht aus 8 immer auf dieselbe Art, was auch die Einheit bedeuten mag.

87. Auf eine Proportion, worinn zwey Paar ungleichartige Größen vorkommen, den Satz von der Gleichheit der Producte der äussern und der mittlern oder die Regel de Tri anzuwenden, muß man ein Paar durch bloße Zahlen ausdrücken. Z. E. wenn 8 ℔ : 14 ℔ = 12 Rthlr. : 21 Rthlr. so sind 14 mahl 12 Rthl. gleich 8 mahl 21 Rthl. und 14 mahl 12 Rthlr. dividirt durch 8 sind 21 Rthlr. als das vierte Glied der Proportion. Die Bestimmung der Einheit in 12 und 21 macht keine Veränderung in den Producten und in dem vierten Gliede. Aber nun dürfen 8 und 14 nichts als bloße Zahlen seyn. Denn man kann nicht 12 Rthlr. mit 14 ℔ multipliciren, wohl aber 12 Rthlr. mit der Zahl 14, oder sie 14 mahl nehmen.

88. Ein Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man die Glieder desselben durch einerley Zahl dividirt oder mul-

multiplicirt. Z. E. 8 : 14 ist gleich dem 4 : 7 oder 24 : 42, oder 12 : 21. Die Menge der Theile kann man sich als unverändert vorstellen, sie werden nur so vielmahl größer oder kleiner als der Multiplicator oder Divisor die Einheit enthält. In 4 und 7 sind so viel Theile als respective in 8 und 14 sind, nur sind sie dort 2 mahl kleiner als hier. Darauf beruht ein gewöhnlicher Rechnungsvortheil, daß man die beyden ersten Glieder, wenn sie einen gemeinschaftlichen Factor haben, mit demselben dividirt. Z. E. wenn 8 ℔ : 14 ℔ = 12 Rthlr. : 21 Rthlr. so setzt man dafür 4 : 7 = 12 Rthlr. : 21 Rthl.

89. Die beyden mittlern Glieder einer Proportion darf man, wenn alle vier Größen gleichartig sind, verwechseln. Wenn z. E. 8 : 14 = 12 : 21 so ist auch 8 : 12 = 14 : 21. Denn 14 und 21 sind gleiche Vielfache von 8 und 12, durch denselben Exponenten, $\frac{7}{4}$, folglich ist ihr Verhältniß dasselbe mit dem 8 : 12.

90. Darum darf man auch das erste und dritte Glied mit einerley Zahl dividiren oder auch multipliciren, ohne daß dadurch das vierte geändert wird. Wenn 4 : 7 = 12 : 21, so ist auch 1 : 7 = 3 : 21 hierauf gründet sich ein ähnlicher Rechnungsvortheil wie in (88).

Regel de Tri.

91. Ehe man die Regel de Tri (84) anwenden kann, muß man aus der Beschaffenheit der Größen wissen oder beweisen, daß ein Paar Größen in gleichem Verhältnisse mit einem Paare anderer Größen stehe, sie mögen so groß oder klein seyn, wie sie wollen. Hiebey sind zwey Fälle zu unterscheiden.

92. Erstlich: zwey Gattungen von Größen können so von einander abhängen, daß für jeden gleichen Theil in denen von der einen Gattung ein und derselbe Theil in

denen von der andern genommen werden muß. So ist es mit den Waaren und ihren Preisen, mit den Capitalien und den Interessen, der Anzahl der Arbeiter und der Arbeit oder dem Lohn in einerley Zeit, beschaffen. So hängt die Menge der Waare von der Schwere des Pfundes, oder der Länge der Elle oder der Größe des Gemäßes ab. So wird die Länge des gleichförmig durchlaufenen Raums aus der Zeit oder Geschwindigkeit bestimmt.

Bey einer solchen Beschaffenheit der Größen kommen die zusammengehörigen (als die Waare und ihr Preis) beyde entweder in die vorhergehenden oder nachfolgenden Glieder der Proportion, weil in jeder Proportion die nachfolgenden Glieder jedes gleich vielmahl größer oder kleiner sind, als ihre vorhergehenden. Man drückt diese Beschaffenheit kurz so aus: die Waare verhält sich wie der Preis, die Interesse wie das Capital. Oder man sagt, die Waaren, die Interessen stehen in einem ordentlichen Verhältnisse jene mit den Preisen, diese mit den Capitalien.

93. Sehr oft sind, zweytens, die zusammengehörigen Größen so beschaffen, daß die eine so vielmahl größer oder kleiner wird, als die zu ihr gehörige kleiner oder größer wird. So verhält sich die Zahl der Arbeiter umgekehrt wie die Zeit, worinn sie ein Stück Arbeit fertig liefern; Capitalien umgekehrt wie die Zeit, worinn sie dieselbe Interesse abwerfen; die Ellenzahl umgekehrt wie die Länge der Elle, und überhaupt die Zahl, wodurch dieselbe Größe ausgedrückt wird, umgekehrt wie die Einheit. Je breiter ein Tuch ist, desto weniger Ellen braucht man. Je besser die Münzsorte, desto kleiner ist die Zahl, wodurch derselbe Wehrt am Geld ausgedrückt wird. Diese Beschaffenheit zeigt man allgemein dadurch an, daß man sagt, das Verhältniß zweyer Größen sey das umgekehrte zweyer andern. Die zusammengehörigen Grö-

ßen

ßen kommen in diesem Falle beyde in die mittlern oder in die äussern Glieder zu stehen. Denn das vierte Glied einer Proportion, bey unveränderten mittlern Gliedern, wird so vielmahl größer oder kleiner als das erste, welches dividirt, kleiner oder größer gesetzt wird. Z. E. 3 Arbeiter brauchen 8 Tage, so brauchen 6 Arbeiter 4 Tage, oder 6 Arb. : 3 Arb. = 8 T. : 4 T.

Das arithmetische Verfahren, das vierte Glied zu finden, ist dasselbe wie bey dem ordentlichen Verhältnisse. Nur die Stellung der Größen macht den Unterschied aus.

94. Die Rechenmeister pflegen die mit der gesuchten Größe gleichnahmige in die Mitte zu setzen. Sie müßte richtiger das dritte Glied seyn. Hieran ist inzwischen nichts gelegen, wenn man nur durch das mechanische Ansetzen, nach den Ausdrücken der Frage, sich nicht verführen läßt, ein umgekehrtes Verhältniß als ein ordentliches anzusetzen, oder eine Proportion anzunehmen, wo keine statt findet. Zur Erläuterung der gewöhnlichsten Fälle in Absicht auf die Berechnung mögen folgende drey Beyspiele dienen.

1. Exempel. 5 ℔ 11 Lth. kosten 1 Rthlr. was kosten 25 ℔ 17 Lth.? Der gewöhnliche Ansatz ist

5 ℔ 11 L. — 1 Rthlr. — 25 ℔ 17 Loth.

Hier müssen die beyden gleichnahmigen Glieder auf einerley Benennung 171 Loth und 817 Loth gebracht werden. Darauf multiplicirt man 1 Rthlr. mit 817 und dividirt mit 171, welches 4 Rthlr. 18 Ggr. 8 Pfennige giebt, wenn man die übrigen Rthlr. mit 24 zu Ggr. und die nach der Division derselben übrigen 114 Ggr. mit 12 zu Pfennigen macht, und auch diese durch 171 dividirt.

2. Exempel. 100 ℔ kosten 37 Rthlr. 17 Ggr. was kosten 245 ℔?

Entweder multiplicirt man sowohl die Rthlr. als Ggr. durch 245, macht das Product aus den letztern zu Rthlr. und dividirt darauf durch 100, oder verfährt kürzer so:

100 ℔ — 37 Rthlr. 17 Ggr. — 245 ℔

12 | $\frac{1}{2}$		37
4 | $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$		1715
1 | $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$		735
		9065 Rthl.
$\frac{1}{2}\cdot 245$	=	122 . 12 Ggr.
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 245$	=	40 . 20 .
$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 245$	=	10 . 5 .
100)		9238 . 13 .
		92 Rthl. 9 Ggr. 3 ₰.

Die Zerfällung oder Zerstreuung der 17 Ggr. kann man kurz, wie hiebey gesetzt ist, vornehmen, auch die neben den aus 245 genommenen Theilen gesetzten Producte weglassen.

17 Ggr.	
12	— $\frac{1}{2}$
4	— $\frac{1}{3}$
1	— $\frac{1}{4}$

3. Exempel. 100 ℔ kosten 63 Rthlr. 21 Ggr. 4 Pfenn. was kosten 423 ℔ 12 Lth.

Hier wird der Preis, 63 Rthlr. 21 Ggr. 4 Pfenn. stückweise mit 423 multiplicirt, und darauf mit $\frac{12}{32}$ (nicht mit 12 Loth) das ist mit $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$, wie folget.

100 ℔ — 63 Rthlr 12 Ggr. 4 ₰ — 423 ℔ 12 Lth.

12 − ½	⅕	63	8 − ¼
6 − ½		26649 Rth. 4 − ½	
3 − ½		211 • 12 Gg. − ₰	
		105 • 18 • − •	
		52 • 21 • − •	
		5 • 21 • − •	
		15 • 23 • 4 •	
		7 • 23 • 8 •	
		100) 27048 • 23 • − •	
		270 Rhl. 11 Gg. 9 ₰	

Man erspart sich durch die Zerfällung mit Reduction auf die kleinste Benennung, also große Multiplication und Division.

95. Noch ein Paar Exempel von umgekehrten Verhältnissen.

1. Ein Brodt für 2 Ggr. wiegt 3 ℔ 21 L. 3 Qu. wenn der Himte Rogken kostet 16 Ggr. was muß es wiegen, wenn der Himten 12 Ggr. kostet?

Die Gewichtzahl verhält sich umgekehrt wie der Preis des Himtens, also ist der Ansatz

12 : 16 = 3 ℔ 21 L. 3 Qu. : gesuchten,

oder nach der gemeinen Art,

12 Ggr. — 16 Ggr. — 3 ℔ 21 L. 3 Qu.

Hier ist aber die Ordnung der Glieder ganz anders als in der Frage — Man dividire in jenem Ansatze die beyden ersten Glieder durch 4, das erste und dritte durch 3, so ist

1 : 4 = 1 ℔ 7 L. 1 Qu. : gesuchtem,

welches also 4 ℔ 29 Loth sind.

2. Der Pariser Fuß verhält sich zum Rheinländischen wie 1440 zu 1391, wie viel Rheinländische Fuß sind 384 Pariser? — Die Fußzahl verhält sich umgekehrt

kehrt wie die Größe des Fußes, also steht die Proportion so:

1391 : 1440 = 384 P. F. : gesucht. Rheinl. F. Die gesuchte Zahl ist $397\frac{7}{13}\frac{3}{9}\frac{3}{1}$.

96. Ein Rechnungsvortheil ist, daß man den Unterschied der gesuchten Größe und der ihr gleichartigen sucht. Man nimmt alsdenn zum zweyten Gliede den Unterschied der beyden andern Größen. Die Unterschiede der Glieder entstehen aus den vorhergehenden Gliedern nothwendig auf einerley Art. Z. E. aus der Proportion

12 Gr. : 16 Gr. = 3 ℔ 21 L. 3 Qu. : gesuchten folgt

12 Gr. : 4 Gr. = 3 ℔ 21 L. 3 Qu. : Unterschiede oder 3 Gr. : 1 Gr. = 3 ℔ 21 L. 3 Qu. : 1 ℔ 7 L. 1 Qu. welches mit dem gegebenen Gewichte 4 ℔ 29 L. ausmacht. So auch in dem andern Exempel. Am bequemsten ist dieses Verfahren, wenn die beyden ersten Glieder um 1 unterschieden sind.

Zusammengesetzte Verhältnisse.

97. Oft bestimmt sich eine Größe nicht aus einer allein, sondern aus mehrern zugleich. Alsdenn muß man untersuchen, wie sie sich aus jeder allein bestimmen würde, wenn die andern beyseite gesetzt werden. Z. E. Interessen verhalten sich bey gleichen Zeiten und Procenten wie die Capitalien; bey gleichen Capitalien und Procenten wie die Zeiten; bey gleichen Zeiten und Capitalien wie die Procente. Um die Interessen zweyer verschiedenen Capitalien, bey verschiedenen Zeiten und Procenten mit einander zu vergleichen, müßte man drey Ansätze nach der Regel de Tri machen. Als: 1000 Rthlr. zu 5 P. C. geben in 12 Monaten 50 Rthlr. Interesse; was geben 4000 Rthlr.

Rthl. zu 4 P. C. in 18 Monat? Die drey einzelnen Proportionen sind folgende.

Capital) 1000 : 4000 = 50 Rthlr. : 200 Rthlr.
Procent) 5 : 4 = 200 " : 160 "
Monate) 12 : 18 = 160 " : 240 "

und die gesuchte Interesse ist 240 Rthlr.

Hierinn besteht die Zusammensetzung der Verhältnisse. Das Verhältniß 50 Rthlr. : 240 Rthlr. wird aus den Verhältnissen der Capitalien, Procente und Monate durch die Mittelglieder 200 Rthlr. und 160 Rthlr. zusammengesetzt.

Das letzte Glied in jeder dieser Proportionen wird aus dem letzten Gliede der vorhergehenden durch die Multiplication mit dem folgenden Gliede jedes der componirenden Verhältnisse und Division mit dem vorhergehenden Gliede eben des Verhältnisses hervorgebracht. Das erste ist aber das Product aus der gegebenen, der gesuchten gleichnahmigen Größe 50 Rthlr. in das folgende Glied des ersten componirenden Verhältnisses dividirt durch das vorhergehende eben desselben. Also entsteht das gesuchte Glied aus dem gegebenen durch die Multiplication mit allen folgenden Gliedern der componirenden Verhältnisse und Division mit allen vorhergehenden Gliedern derselben. Daraus erhellt, wie man der Mittelglieder entbehren, und alle Proportionen soviel ihrer auch seyn mögen, in eine einzige vereinigen könne.

98. Regel der Zusammensetzung der Verhältnisse. Man setze alle Verhältnisse, wovon die gesuchte Größe abhängt, unter einander, so daß in den ordentlichen Verhältnissen das vorhergehende Glied zu der gegebenen, mit der gesuchten gleichnahmigen Größe, gehöre, das folgende aber zu der gesuchten Größe selbst, in den umgekehrten aber diese Stellung der Glieder umgekehrt werde. Das Product aller vorhergehenden Glieder giebt

das erste Glied der Proportion, das Product der folgenden das zweyte, die gegebene, mit der gesuchten Größe gleichnahmige, das dritte, und die gesuchte Größe ist das vierte Glied. Jedes der componirenden Verhältnisse muß mit diesen beyden Gliedern eine richtige Proportion machen, wenn alle übrige Verhältnisse auf die Seite gesetzt werden. Nun wird, wie in jeder Proportion, die gegebene Größe mit dem Producte der folgenden Glieder multiplicirt und mit dem Producte der vorhergehenden dividirt.

99. *) Das obige Exempel steht so

Capital } 1000 : 4000 }
Procente } 5 : 4 } = 50 Rthlr. : 240 Rthlr.
Monate } 12 : 18 }

Man kann sich hier des Aufhebens bequem bedienen, wenn man mit den Factoren, die in dem ersten und zweyten oder dritten Gliede enthalten sind, jenes und diese dividirt.

1ø ø ø : 4ø ø ø }
5 : 4 } = 5ø : 240
5x2 : 6x5 } 10

100. Zweytes Exempel. 1000 Rthlr. zu 5 P. C. geben in 12 Monaten 50 Rthl. Interesse; wie groß ist das Capital, das zu 4 P. C. in 18 Monaten 240 Rthlr. Interesse bringt?

Die Capitalien verhalten sich, bey sonst gleichen Umständen, wie die Interessen; aber verkehrt wie die Procente, und auch verkehrt wie die Zeiten. Die Proportion ist demnach folgende:

Inte-

*) Diese Regel heißt die Regula de Quinque, wenn der componirenden Verhältnisse zwey sind, die Regula de Septem, wenn derselben drey sind, und so ferner.

Intereſſe $\left\{\begin{matrix}50 : 240\\ 4 : 5\\ 18 : 12\end{matrix}\right\}$ = 1000 Rthlr. : 4000 Rthlr.
Procente
Monate

101. Drittes Exempel. Es haben 50 Mann in 16 Tagen einen Graben 400 Fuß lang, 10 Fuß tief, 15 Fuß breit, ausgebracht: in wie viel Zeit werden 80 Mann einen Graben 600 Fuß lang, 12 Fuß tief, 20 Fuß breit ausbringen?

$$\left\{\begin{matrix}80 : 50\\ 400 : 600\\ 10 : 12\\ 15 : 20\end{matrix}\right\} = 16 \text{ Tage} : 24 \text{ Tage}$$

102. Viertes Exempel. Es können 30 Quadratfuß Fläche mit 8 Cubicfuß Gyps 1 Zoll dick begoſſen werden: wie viel Quadratfuß können mit $10\frac{2}{3}$ Cub. Fuß $1\frac{3}{4}$ Zoll dick begoſſen werden?

$$\left\{\begin{matrix}8 : 10\frac{2}{3}\\ 1\frac{3}{4} : 1\end{matrix}\right\} = 30 \text{ Qu. F.} : 22\frac{6}{7} \text{ Qu. F.}$$

Die Nenner der Brüche müſſen durch die Multiplication mit denſelben auf beyden Seiten weggeſchaft werden, oder man dividirt, wie es hier angeht, auf derſelben Seite wieder mit dem Nenner.

103. Wenn man das dritte Glied zu dem zweyten als Factor ſetzt, und das geſuchte zu dem erſten, ſo hat man den Anſatz nach des de Rees Methode. Das geſuchte werde durch * bezeichnet, ſo ſteht das zweyte Exempel wie folgt.

*	—	1000 Rthlr.	Capital
50	—	240	Intereſſe
4	—	5	P. C.
18	—	12	Monate

Die geſuchte Größe iſt das Product der Zahlen rechter Hand dividirt durch die linker Hand geſtellten. Man

wird hieraus begreifen, wie die bekannten Größen in den beyden Columnen zu stellen sind, welches man von de Rees nicht lernt, der auch nicht die gleichnahmigen Größen neben einander stellt, wie es doch seyn muß, wenn man den Grund ihrer Stellung begreifen soll.

104. Bey der Vergleichung der Münzsorten und Maaßen braucht man auch die Zusammensetzung der Verhältnisse, die hier den Namen der Kettenregel bekömmt, von der Art wie die Größen zusammengestellt werden. Ein Exempel wird dies gleich deutlich machen. Wie viel Braunschweiger Pfund sind 100 Pfund Amsterdamer, wenn 55 Amsterdamer Pfund 56 Hamburger Pf. und 26 Hamb Pf. 27 Braunschw. Pfund sind?

*Braunschw. Pf. — 100 Amst. Pf.
55 Amsterd. Pf. — 56 Hamb. Pf.
26 Hamb. Pf. — 27 Braunschw. Pf.

Man multiplicire die Zahlen rechter Hand in einander, und dividire das Product durch das Product der beyden Zahlen linker Hand, so hat man das Facit $105\frac{105}{143}$ Pf. Auf diese Art verfährt man in jedem Falle, es mag die Reihe so lang seyn, wie sie wolle. Die Gattung rechter Hand macht wieder den Anfang linker Hand, bis daß man auf die Gattung kömmt, in welcher das Facit gesucht wird.

Denn 1 Amst. Pf. $= \frac{56}{55}$ Hamb. Pf. $= \frac{56}{55} \cdot \frac{27}{26}$ Braunsch. Pf. also 100 Amst. Pf. $= 100 \cdot \frac{56}{55} \cdot \frac{27}{26}$ Braunschw. Pf. Die Zahlen linker Hand, oder die auf derselben Seite mit der gesuchten Größe befindlichen, kommen also in den Divisor, die rechter Hand in den Dividendus.

105. Es soll einer 1000 Rubel von Petersburg nach Berlin übermachen, und will wissen, wie viel diese Summe in Berlin an Ducaten betrage. Der Petersburger Cours sey $47\frac{1}{2}$ Stüber; 20 Stüber machen einen

Gul-

Gulden Holl.; $2\frac{1}{2}$ Fl. einen Spec. Thaler. Der Cours von Holland nach Berlin sey 142; endlich gilt ein Ducaten in Berlin 3 Rthlr. Nach der Kettenregel steht der Ansatz so;

* Ducaten	—	1000 Rbl.
2 Rubel	—	95 Stüber
20 Stüber	—	1 Fl.
5 Fl.	—	2 Spec. Thlr.
100 Spec. Thl.	—	142 Thlr. Pr.
3 Thlr. Pr.	—	1 Duc.

$449\frac{2}{3}$ Duc. gleich 1000 Rubel

106. Die Mark (16 Loth) fein Silber gelte in Hamburger Banco 27 ℳ 12 ß, was gilt die Mark 13 löthiges Silber in Hamburger Courant, wenn dieses $21\frac{1}{2}$ P. C. schlechter ist als Banco?

* ℳ Hamb. Cour.	—	1 Mark 13 löth. S.
16 Mark 13 löth. S.	—	13 Mark fein (16 löth.)
1 Mark fein	—	27 ℳ 12 ß Bco.
100 ℳ Bco.	—	$121\frac{1}{2}$ ℳ Cour.

1 Mark 13 löth. Silb. ist wehrt 27 ℳ 6 ß 4 ₰ Hamb. Cour.

Die Gesellschafts- und Allegationsrechnung.

107. Eine Zahl in eben dem Verhältnisse in mehrere Theile zu theilen, in welchem eine andere gegebene eingetheilt ist, ist eine Aufgabe, welche von der Anwendung, die man im gemeinen Leben oft von ihr macht, die Gesellschaftsrechnung genannt wird.

Z. E. drey Kaufleute haben zusammengeschossen A, 1000 Rthlr.; B, 600 Rthlr.; C, 500 Rthlr. in Summa 2100 Rthlr. Sie haben damit 420 Rthlr. gewonnen. Dieser Gewinn muß nach dem Verhältnisse ihres Zuschusses unter sie getheilt werden. Man theile also

das

das eingeschossene Capital so wie eines jeden Zuschuß in gleich große Theile, hier 21 jeder zu 100 Rthlr.; desgleichen den Gewinnst in eben so viel Theile, so fällt auf jeden dergleichen Theile des Zuschusses ein Theil des Gewinnstes. Also bekommt A $\frac{10}{21}$, B $\frac{6}{21}$, C $\frac{5}{21}$ von 420 Rthlr. oder die drey Theile sind 200, 120, 100 Rthlr.

Oder: Wenn zu gutem Schießpulver auf 1 Pf. Salpeter, 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel gehören, wie viel gehören von jedem zu 1000 Pf.? — Jene Masse wiegt 42 Loth, theilt man also 1000 in 42 Theile, und nimmt davon 32 für den Salpeter, 6 für die Kohlen, 4 für den Schwefel, so hat man 761 $\frac{19}{21}$ Pf. Salpeter, 142 $\frac{5}{7}$ Pf. Kohlen, 95 $\frac{5}{21}$ Pf. Schwefel. Kürzer theilt man mit 21, und nimmt nach der Ordnung 16, 3, 2 Theile.

108. In der **Allegationsrechnung** sucht man das Verhältniß der Theile einer aus mehrern Materien zu machenden Mischung, so daß die Mischung selbst einen bestimmten Wehrt bekomme.

Z. E. Es soll 14 löthiges Silber mit 9 löthigem vermischt werden, daß die Mischung 12 löthig werde, wie viel muß man von jeder Sorte nehmen? Man sage wie 12 — 9 zu 14 — 12 oder wie 3 : 2, so die Menge des 14 löthigen zu der Menge des 9 löthigen.

Oder: es will ein Weinhändler Wein zu 25 Rthlr. das Oxhoft mit Wein zu 32 Rhlr. vermischen, daß die Mischung 28 Rthlr. wehrt sey, wie viel muß er von jeder Sorte nehmen? Er sage: wie 28 — 25 zu 32 — 28 oder wie 3 zu 4, so die Menge des bessern Weines zu der Menge des schlechtern. Das ist, er muß $\frac{3}{7}$ Oxhoft von jenem und $\frac{4}{7}$ Oxhoft von diesem zu 1 Oxhoft nehmen.

V. Arithmetische und geometrische Progression.

109. Eine Progression ist eine Reihe von Größen, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze aus einander entstehen. Es sind unzählig vielerley Progressionen möglich. In der arithmetischen hat jedes Glied zu dem vorhergehenden dasselbe arithmetische Verhältniß, in der geometrischen dasselbe geometrische Verhältniß. Z. E. arithmetische Reihe,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ꝛc.

geometrische Reihe,

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187 ꝛc.

110. Die Reihe ist eine steigende, wenn die Glieder so wie sie auf einander folgen, zunehmen; eine fallende, wenn sie abnehmen. Jede steigende ist eine fallende, oder diese jene, wenn man sie rückwärts lieset — Jede Reihe besteht ihrer Natur nach aus unzählig viel Gliedern, wovon man oft nur eine Anzahl herausnimmt. Wenn man die angeführte arithmetische rückwärts lieset, so kommt man nach der 1 auf verneinte Glieder, wie man es zu nennen pflegt, d. i. solche, die einen Defect anzeigen, z. E

7, 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, — ꝛc.

Man kann sich die positiven Glieder als ein Steigen über einen gewissen Punct, die negativen als ein Fallen darunter vorstellen, oder jene als Vermögen, diese als Schuld. In der geometrischen fallenden Reihe kommt man auf Brüche, die immer kleiner, aber nie o werden.

27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, ꝛc.

111. In der arithmetischen Reihe, oder vielmehr in einem Stücke derselben, werden aus dem ersten Gliede, dem letzten Gliede, dem Unterschiede zweyer nächsten Glieder, der Anzahl, und der Summe aller, wenn drey be-

bekannt sind, die übrigen bestimmt. In der geometrischen desgleichen, wenn man statt Unterschied Exponent setzt. Dadurch kann man über jede Reihe 10 Aufgaben machen.

112. In der arithmetischen Reihe ist der Unterschied des ersten und letzten Gliedes so vielmahl der Unterschied zweyer nächster Glieder als die Zahl der Glieder nach dem ersten die Einheit enthält — In der geometrischen ist der Exponent des Verhältnisses zwischen dem ersten und letzten Gliede die so vielte Potenz des Exponenten der Reihe, als die Zahl der Glieder nach dem ersten anzeigt.

113. Die Summe eines Stücks einer arithmetischen Reihe zu finden, schreibe man sie rückwärts unter sich selbst, z. E.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.
19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1.

Die Summe je zweyer über einanderstehender ist dieselbe, nämlich 20. Multiplicirt man diese mit der Anzahl der Glieder, 10, und dividirt das Product durch 2, so hat man die verlangte Summe 100. In jedem Falle ist die Hälfte des Products aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die Zahl der Glieder die Summe der Reihe. Als: die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 ist 500500. Die Summe aller ungeraden von 1 bis 999, welche das 500ste Glied der Reihe sind, ist 250000. Die Summe aller geraden von 2 bis 1000, ist 250500.

114. Die Summe einer geometrischen Reihe, in welcher man das erste Glied, das letzte und den Exponenten weiß, zu finden, multiplicire man das letzte Glied mit dem Exponenten, ziehe von dem Producte das erste Glied ab, oder wenn es eine fallende Reihe ist, das gedachte Product von dem ersten Gliede, und dividire den Unterschied durch den um 1 verminderten Exponenten oder

in

in dem andern Falle durch Eins vermindert um den Exponenten.

Der Beweis dieser Regel wird aus dem Verfahren für einen einzelnen Fall erhellen. Es sey

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = S$$

wo S die noch unbekannte Summe vorläufig bezeichnet. Also ist, wenn man mit dem Exponenten multiplicirt,

$$3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 = 3S.$$

Man ziehe gleiches von gleichem ab, so ist

$$2187 - 1 = 3S - S = 2S$$

und $\frac{3 \cdot 729 - 1}{3 - 1} = S$, oder $1093 = S$.

In praktischen Rechnungen wird oft eine arithmetische und geometrische zu summiren aufgegeben.

115. In einer arithmetischen Reihe haben je zwey Glieder, die gleich weit von einander abstehen, einerley arithmetisches Verhältniß. Denn sie sind alsdenn um gleiche Vielfache des Unterschiedes zweyer nächster Glieder unterschieden. Z. E. in der obigen Reihe 7 und 15; 11 und 19.

Umgekehrt: wenn zwey Glieder denselben Unterschied haben, wie zwey andere Glieder, so stehen jene so weit von einander als diese.

116. In einer geometrischen Reihe haben je zwey Glieder, die gleich weit von einander abstehen, einerley geometrisches Verhältniß. Der Exponent ist nämlich dieselbe Potenz des Exponenten der Reihe. Z. E. in der obigen Reihe 9 und 243; 81 und 2187. Umgekehrt gilt der Satz auch.

117. Wenn man also eine arithmetische und eine geometrische Reihe zusammenstellt, so daß die Glieder, welche einerley Stelle in jeder haben, als zusammengehörige betrachtet werden, so sind die Glieder der geometrischen

Rei-

Reihe, geometrisch proportional, wenn die zu ihnen gehörgen Glieder der arithmetischen Reihe arithmetisch proportional sind; so wie umgekehrt die in der arithmetischen Reihe arithmetisch proportional sind, wenn die zu ihnen gehörigen aus der geometrischen Reihe geometrisch proportional sind.

Dies wird uns den Weg zu der ziemlich schweren Theorie der Logarithmen bahnen.

VI. Die Logarithmen.

118. Man nehme die arithmetische Reihe,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ꝛc.

und verbinde damit eine beliebige geometrische Reihe, als

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ꝛc.

so giebt jede Zahl der arithmetischen Reihe die Potenz an, auf welche der Exponent der Reihe erhoben werden muß, um den Exponenten des Verhältnisses zwischen 1 und des zu jener Zahl gehörigen Gliedes in der geometrischen Reihe zu haben. Z. E. 4 zeigt an, daß das Verhältniß 1 : 16 die vierte Potenz des Exponenten 2 zum Exponenten habe.

Auch zeigt der Unterschied zweyer Zahlen der arithmetischen Reihe die Potenz des Exponenten der geometrischen Reihe an, welche der Exponent des Verhältnisses der zu jenen Zahlen gehörigen Glieder in der geometrischen Reihe ist; z. E. 4 als der Unterschied der Zahlen 3 und 7 zeigt an, daß das Verhältniß 8 : 128 zum Exponenten die vierte Potenz von 2 habe, oder einerley mit dem 1 : 16 ist.

119. Die Zahlen der arithmetischen Reihe heissen die Logarithmen der zu ihnen gehörigen Glieder der geometrischen Reihe, auf deutsch Verhältnißzähler.

120.

120. Die Logarithmen sind also arithmetisch proportional, wenn die zu ihnen gehörigen Zahlen es geometrisch sind (117). Z. Ex. 4 : 64 = 16 : 256, und daher 2 — 6 = 4 — 8.

121. In der arithmetischen Proportion ist das vierte Glied die um das erste Glied verminderte Summe der beyden mittlern (75). Man findet also den Logarithmen des vierten Gliedes einer geometrischen Proportion, wenn man die Logarithmen des zweyten und dritten addirt und davon den Logarithmen des ersten Gliedes abzieht. Sucht man den gefundenen Logarithmen in der arithmetischen Reihe auf, so hat man daneben in der geometrischen Reihe das vierte Glied der geometrischen Proportion. Daraus erhellt, wie die Logarithmen das Multipliciren in ein Addiren, und das Dividiren in ein Subtrahiren verwandeln.

122. Ein Product kann man als die vierte Proportionalzahl zu 1 und den beyden Factoren ansehen; also ist der Logarithmus eines Productes die Summe der Logarithmen der Factoren. Denn der Logarithme von 1 wird allemahl 0 gesetzt. Besteht ein Product aus mehr Factoren, so ist der Logarithme des Products die Summe der Logarithmen der Factoren.

123. Einen Quotienten kann man als die vierte Proportionalzahl zu dem Divisor, dem Dividendus und der Einheit ansehen; also ist der Logarithme eines Quotienten der Unterschied der Logarithmen des Divisors und des Dividendus. Man nehme zuerst noch den letztern als den größern an.

Hieraus erhellt, warum 1 zum Logarithmen 0 hat. Die Einheit verändert ein Product und einen Quotienten nicht, die 0 auch nicht die Summe und den Unterschied der Logarithmen.

124. Die Logarithmen würden noch keinen Nutzen haben, wenn man die Reihen so wie sie (118) befind-

lich sind, lassen wollte. Es würden gar zu viel Zahlen fehlen. Aber man gedenke sich in beyden Reihen zwischen je zwey Gliedern eine mittlere Proportionalzahl (77 und 83) so hat man eine aus den Hauptreihen durchs Einschalten (Interpoliren) entstandene neue sowohl arithmetische als geometrische Reihe. In jener ist der Unterschied halb so groß als in der ursprünglichen. In dieser ist der Exponent die Quadratwurzel aus dem Exponenten der Hauptreihe. Hierauf schalte man wieder zwischen je zwey Gliedern die mittlern proportionalen ein, und so immer weiter, bis daß man alle ganze Zahlen von 1 bis 10000 oder noch weiter bis auf einen gewissen Grad der Genauigkeit in der geometrischen Reihe bekömmt. Zieht man aus den berechneten Gliedern der geometrischen Reihe die ganzen und beynahe ganzen Zahlen heraus, und verzeichnet neben ihnen ihre Logarithmen, so hat man einen Logarithmischen Canon, der in vielen Fällen zur Abkürzung der Rechnungen vortrefliche Dienste thut. Was von der Hauptreihe erwiesen ist (121 bis 123), gilt auch von der interpolirten.

125. Die Verbindung einer geometrischen und arithmetischen Reihe, in welcher man aber zwischen je zwey Gliedern eine unbestimmt große Anzahl Mittelglieder gedenken muß, heißt ein Logarithmisches System. Allemahl fängt die geometrische Reihe mit 1 und die arithmetische mit 0 an (122). Das zweyte Glied der geometrischen Hauptreihe bekömmt zum Logarithmen 1. Da dieses Glied willkührlich ist, so kann man unzählich viel logarithmische Systeme bilden. Unter allen diesen ist zum praktischen Gebrauch am bequemsten folgendes:

0, 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc.
1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc.

Man hat mit unsäglicher Mühe so viel Glieder in beyden eingeschoben, daß die Logarithmen der ganzen Zahlen bis

auf

auf die zehnte Decimalstelle gefunden sind, wiewohl sie in den gewöhnlichen Tafeln, die auch nur bis 10000 gehen, nur bis auf die 7te Decimalstelle angegeben sind, welches in den meisten Fällen eine überflüssige Genauigkeit gewährt.

Zum Beyspiel des Einschiebens dient folgende Tafel.

Zahl	Logarithme	Zahl	Logarithme	Zahl	Logarithme
1000,0	3,000	2371,3	3,375	5623,3	3,750
1333,5	3,125	3162,2	3,500	7498,8	3,875
1778,3	3,250	4216,9	3,625	10000,0	4,000

Die Zahlen der interpolirten geometrischen Reihe sind nur bis auf die Zehntheilchen berechnet; die Logarithmen sind völlig richtig. Fährt man mit dem Interpoliren fort, wozu man aber die angegebenen Glieder viel genauer berechnen muß, so erhält man endlich Zahlen, die von den ganzen wenig verschieden sind, und deswegen für die ganzen selbst genommen werden.

So ist z. E. berechnet von der

Zahl	Logarithme	Zahl	Logarithme
1333	3,1248301	3162	3,4999619
1778	3,2499318	4217	3,6250036
2371	3,3749316	5623	3,7499681

126. Die ganze Zahl oder 0 in jedem Logarithmen heißt die Charakteristik oder Kennzifer. Sie giebt an, zwischen welche Glieder der Hauptreihe die Zahl zu dem Logarithmen fällt, und ist immer so groß als die Anzahl der Zifern vor den Einern. Die Decimalbrüche führen den Namen Mantisse oder Zugabe. Sie zeigen an, das wie vielste Glied in der interpolirten Reihe die Zahl nach dem nächsten Gliede der Hauptreihe ist. Z. E. wenn man zwischen 1000 und 10000 einschiebt 999 Glieder, so ist 4217 das 625ste unter denselben beynahe. Genauer

aber ist diese Zahl, wenn man von 1000 bis mit 10000 folgen läßt 10000000 Glieder, das 6250036ste Glied unter denselben.

127. Aus den gewöhnlichen Tafeln, die bis 10000 gehen, findet man auch die Logarithmen der ganzen Zahlen mit anhängenden Decimaltheilen, wenn in allem nicht mehr als 4 Zifern da sind. Z. E.

log. 1333 = 3,1248301
log. 133,3 = 2,1248301
log. 13,33 = 1,1248301
log. 1,333 = 0,1248301

Dieses gründet sich darauf, daß log. 10 = 1; log. 100 = 2; log. 1000 = 3 ist, also bey der Division der Zahl durch 10; 100; 1000 der Logarithme um 1; 2; 3 vermindert wird.

128. Den Logarithmus einer Zahl wie 7298,4 findet man meistens ziemlich genau durch Proportionaltheile: Wie 1 zu $\frac{4}{10}$ oder wie 10 zu 4, so der Unterschied der beyden nächsten Logarithmen, nämlich 595 Zehnmillionentheilchen, zu dem Unterschiede des gesuchten Logarithmen von dem nächstvorhergehenden, das ist zu 238. Addirt man diese zu demselben, so erhält man log. 7298,4 = 3,8632277. Daraus wird logarithm. 72984 = 4,8632277; oder log. 729,84 = 2,8632277. Hieraus erhellt, wie man die gewöhnlichen Tafeln erweitern könne.

129. Zu einem Logarithmen die Zahl zu finden, schlägt man ihn in den Tafeln nach. Findet man ihn nicht genau in denselben, so nimmt man entweder den nächsten Logarithmen, und die dazu gehörige Zahl, oder man sucht diese Zahl durch Proportionaltheile genauer. Z. E. Man habe den Logar. 3,8632277, so ist der nächste 3,8632039, und die dazu gehörige Zahl 7298. Genauer

nauer ist sie, nach der in (128) angegebenen Proportion 7298/4.

130. Hat der Logarithme zur Kennzifer eine kleinere Zahl als 3, so sucht man ihn doch mit der Kennzifer 3 auf, und schneidet von der Zahl so viel Zifern ab, als der Kennzifer Einer zur 3 fehlen. Z. E. Es ist gegeben der Logarithme 1,1248301. Man giebt ihm die Kennzifer 3, so findet man neben ihm die Zahl 1333. Von dieser schneidet man zwey Zifern ab, und die gesuchte Zahl ist 13,33.

131. Die Logarithmen der eigentlichen Brüche kommen in der rückwärts fortgesetzten arithmetischen Reihe vor, und sind darum negativ (110). Nämlich mit einem eigentlichen Bruche als $\frac{3}{4}$ multipliciren, ist so viel als mit $\frac{4}{3}$ dividiren. Nun ist log. $\frac{4}{3}$ = log. 4 — log. 3 (123). Also muß man, wenn mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden soll, den Unterschied der Logarithmen des Zählers und Nenners subtrahiren. Desgleichen, wenn mit einem eigentlichen Bruche, wie $\frac{3}{4}$ dividirt wird, da dieses so viel ist, als mit $\frac{4}{3}$ multipliciren, muß man den Unterschied der Logarithmen des Zählers und Nenners addiren. Da man nun sonst den Logarithmen des Multiplicators addirt, denjenigen des Divisors subtrahirt, hier aber das Gegentheil thut, so werden deswegen die Logarithmen der eigentlichen Brüche als negativ, oder als das entgegengesetzte von den Logarithmen der umgekehrten, uneigentlichen Brüche angesehen.

132. So wie man bey der Division einer kleinern Zahl durch eine größere jener eine oder mehr Nullen anhängt, und den Quotienten in Decimaltheilen sucht, so ist es auch hier am bequemsten, dem Logarithmen des Dividendus einige Einer zu leihen, den Logarithmen des Divisors abzuziehen, und bey dem Reste die geliehenen Einer mit — zu bemerken. Z. E.

l. 3 = 0,4771212 (addirt 4)
abgez. l. 4 = 0,6020600

l. $\frac{3}{4}$ = 3,8750612 — 4

Dieser Logarithme gehört, ohne die geborgten 4, zu 7500, welche Zahl mit 10000, als deren Logarithme = 4 ist, dividirt, $\frac{3}{4}$ giebt.

133. So verfährt man auch, wenn der größere Logarithme von dem kleinern in logarithmischen Rechnungen zu subtrahiren ist.

134. Gewöhnlich pflegt man die bestimmte Zahl 10 zu leihen, und, wenn man es nöthig findet, es hinter dem Logarithmen anzumerken. Z. E.

log. 5667 = 3,7533532
log. 0,5667 = 9,7533532 — 10
log. 0,05667 = 8,7533532 — 10
u. s. w.

Die Mantissa sucht man, wenn zu einem Logarithmen, dem 10 geliehen sind, die Zahl gesucht wird, mit der Kennzifer 3 auf, und schneidet für die Charakteristik 9 vier Decimalstellen ab, für die Charakteristik 8 fünf, u. s. w.

Gebrauch der Logarithmen.

135. Man soll zu 9443: 3763: 3857 die vierte Proportionalzahl finden.

log. 3763 = 3,5755342
log. 3857 = 3,5862496
7,1617838
log. 9443 = 3,9751100
3,1866738

Gesuchte Zahl, 1537.

136.

136. Der Logarithmus eines Quadrats ist das doppelte des Logarithmen der Wurzel, weil das Quadrat ein Product aus zwey gleichen Factoren ist. Umgekehrt ist also der Logarithme der Wurzel die Hälfte des Logarithmen des Quadrats.

Ex. Aus 7301 mittelst der Logarithmen die Quadratwurzel zu finden.

log. 7301 = 3,8633823
Hälfte = 1,9316911
Gesuchte Wurzel = 85,45 —

Das Zeichen — bedeutet, daß die gefundene Zahl etwas, doch unter $\frac{1}{100}$, zu groß ist.

Aus 0,7301 die Quadratwurzel zu ziehen.

log. 0,7301 = 19,8633823 — 20
Hälfte = 9,9316911 — 10
Gesuchte Wurzel = 0,8545.

Es sind dem Logar. des Quadrats 20 geliehen, damit, wenn das geliehene mit 2 dividirt wird, der Logarithme der Wurzel 10 geliehen bekomme.

137. Auf eine ähnliche Art ist der Logarithme der Cubicwurzel ein Drittheil des Logarithmen des Cubus.

Ex. Aus 7301 die Cubicwurzel zu ziehen

log. 7301 = 3,8633823
Drittheil = 1,2877941
gesuchte Wurzel = 19,40 —

Aus 0,7301 die Cubicwurzel zu ziehen

log. 0,7301 = 29,8633823 — 30
Drittheil = 9,9544607 — 10
gesuchte Wurzel = 0,9005 +

138. Die zwölfte Wurzel aus 2 zu finden

log. 2 = 0,3010300
Zwölfth. = 0,0250858
Zahl = 1,059 +

139. Wenn von einem Capital die jährlichen Interessen allemahl wieder zum Capital geschlagen werden, zu finden, wie hoch dieses nach einer beliebigen Anzahl Jahre anwachse.

Das Capital sey 10000 Rthlr. der Zins 5 von Hundert, so wird das Capital jedes Jahrs mit $\frac{105}{100}$ oder $\frac{21}{20}$ multiplicirt, um das Capital in dem folgenden Jahre zu haben. Die Capitalien machen daher, nach der Folge der Jahre, eine geometrische Reihe aus, deren Exponent $\frac{105}{100}$ ist, oder sie sind das anfängliche Capital, nach der Reihe, in die Potenzen von $\frac{105}{100}$ multiplicirt. Hier folgen die Logarithmen dieser Potenzen und sie selbst

Logarithmen der Potenzen		Potenzen
log. 1,05	= 0,0211893	1,0500
zweyfach	0,0423786	1,1025
dreyfach	0,0635679	1,1576
vierfach	0,0847572	1,2155
fünffach	0,1059465	1,2763
sechsfach	0,1271358	1,3401
	. . . . .	. . . .
20fach	0,4237860	2,6533
30fach	0,6356790	4,3219
40fach	0,8475720	7,0400

Mit diesen Zahlen multiplicire man das Capital 10000, so bekommt man dessen Wehrt nach Ablauf jedes Jahrs, wie folget

1	10500	4	12155	20	26533
2	11025	5	12763	30	43219
3	11576	6	13401	40	70400

140. Man will wissen, nach wie viel Jahren sich das Capital verdoppelt hat. Antw. Man dividire den Logarithmen von 2 durch den Logar. von 1,05. Der Quotient fällt zwischen 14 und 15, also ist das Capital nach

nach 15 Jahren schon über das doppelte angewachsen. Das doppelte fällt zwischen das 14te und 15 Glied nach dem ersten nämlich 10000.

Oder, wenn ist das Capital dreymahl so groß als das anfängliche? Man dividire den Logarithmen von 3 mit log. 1,05. Der Quotient fällt zwischen 22 und 23. Also ist das Capital nach 23 Jahren schon mehr denn dreymahl so groß als anfangs.

141. Ein gewisses Capital (10000 Rthlr.) soll nach einer gewissen Anzahl Jahre (6 J.) bezahlt werden, ohne inzwischen Zinse zu tragen. Wie viel ist es gegenwärtig wehrt, die Interesse zu 5 von Hundert gerechnet?

Ein gegenwärtiges Capital von 10000 Rthlr. erwächst nach 6 Jahren zu 13401 Rthlr. Also sind 13401 Rthlr. die nach 6 Jahren, ohne Interesse, fällig sind, gegenwärtig 10000 Rthlr. wehrt; darum sage man, wie 13401 zu 10000, oder wie 1,3401 zu 1, so 10000 Rthlr, zu dem gesuchten gegenwärtigen Wehrt. Man subtrahirt demnach den log. 1,3401 (oder den sechsfachen log. 1,05) von log. 10000.

log. 10000 = 4,0000000
l. 1,3401 = 0,1271358
3,8728642
gesuchte Zahl 7462

Ueberhaupt multiplicirt man den log. 1,05 mit der Anzahl der Jahre, und subtrahirt ihn alsdenn von dem Log. des Capitals, so hat man den Logarithmen des gegenwärtigen Wehrts. Hier ist eine Tafel der gegenwärtigen Wehrte eines Capitals von 10000 Rthlr. nach der Anzahl der Jahre, in welchen es fällig ist. Sie machen eine geometrische Reihe aus, wo der Exponent $\frac{100}{105}$ ist

1	9524	4	8227	20	3769
1	9070	5	7835	30	2314
1	8638	6	7462	40	1420

142. Eine Wittwe bekommt alle Jahre aus einer Wittwencasse 100 Rthlr. ausgezahlt; wie viel sind alle ihre künftigen Pensionen gegenwärtig wehrt, wenn sie wahrscheinlich 15 Jahre leben wird? Man muß hier von der geometrischen Reihe in (141), nachdem sie mit 100 dividirt ist, die ersten 15 Glieder summiren. Das 15te Glied ist 48,10. Das 16te ist 45,81. Dies subtrahire man, (§. 114) von dem ersten 95,24, und dividire den Rest mit dem Unterschiede zwischen 1 und $\frac{100}{105}$, den Exponenten, das ist mit $\frac{5}{105}$ oder $\frac{1}{21}$, welches so viel ist, als jenen Rest mit 21 multipliciren. So erhält man 1038 Rthlr. für den gegenwärtigen Wehrt aller 15 Pensionen.

143. Ein Ehepaar zahlt 20 Jahr an eine Wittwencasse jährlich 25 Rthlr. wie viel sind diese zusammen am Anfange der 20 Jahre wehrt, die Interesse zu 5 von Hundert gerechnet?

Aufl. Man dividire die Reihe (141) durch 400, weil 25 der so vielte Theil von 10000 ist. So sind die gegenwärtige Wehrte jedes Beytrages 23,81; 22,68; 21,59 u. s. w. bis 9 42, von welchen allen die Summe zu nehmen ist. Diese zu finden, wird erstlich, wenn man das erste Glied als das letzte betrachtet, dasselbe mit dem Exponenten der rückwärts gelesenen Reihe, oder mit $\frac{105}{100}$ multiplicirt, welches 25 giebt, davon das erste Glied 9,42 abgezogen bleibt 15,58. Dieses dividirt durch den Unterschied zwischen dem Exponenten 1,05 und 1, oder durch $\frac{5}{100}$ oder $\frac{1}{20}$, giebt 311,60 Rthlr. als den gegenwärtigen Wehrt der 20 Beyträge. Eben dieses Capital auf das Ende der 20 Jahre, in welchem die

Ehe

Ehe durch den Todt des Mannes getrennt werde, reducirt, ist 826,8 Rthlr.

Würden von 7 Ehen mit dem 20sten Jahre 4 durch den Tod des Mannes getrennt, so wäre der gesammelte Vorrath der Casse von je 7 Ehen 5788 Rthlr., wovon für jede Wittwe 1447 Rthlr. zum Fond kämen, woraus sie demnach auf 15 Jahre eine Pension von 139 Rthlr. 10 Ggr. erhalten könnte, weil von 1038 Rthlr. auf so viele Jahre 100 Rthlr. gezahlt werden können. Da aber viele Pensionen viel früher ausgezahlt werden, wiewohl einige auch später, so wird für einen jährlichen Beytrag von 25 Rthlr. selbst zu 5 P. C. Interesse, noch keine Pension von 139 Rthlr. versichert werden können.

144. Die Barometerhöhen nehmen in geometrischer Progression ab, wenn die Höhen von der Fläche der Erde an arithmetisch zunehmen, in so ferne man auf die Temperatur und übrige Beschaffenheit der Luft nicht sieht. Weiß man nun, wie hoch man steigen müsse, damit das Barometer um eine Linie oder einen Zoll falle, so kann man daraus für jede Barometerhöhe die Höhe des Standortes berechnen. Z. E. An der Oberfläche des Meers stehe das Queckfilber 28 Zoll oder 336 Linien hoch; in einer Höhe von 80 Fuß über dem Meere stehe es 335 Linien hoch, so machen die Barometerhöhen für jede Zunahme von 80 Fuß Höhe des Standorts eine geometrische Progression aus, deren Exponent $\frac{335}{336}$ ist.

Wie hoch steht daher das Barometer in der Höhe von 8000 Fuß über der Meeresfläche? Da 8000 $=$ 80 . 100, so ist die dazu gehörige Barometerhöhe das 100ste Glied in der geometrischen Reihe nach 336 Linien. Also muß man 336 mit der 100sten Potenz von $\frac{335}{336}$ multipliciren.

log. 335

log. 335 = 2,5250448
log. 336 = 2,5263393 hundertste Potenz von
9 9987055 — 10 $\frac{335}{336}$ = 0,7423
Hundertm. 9,87055 — 10
log. 336 = 2,52634
2,39689
gesuchte Zahl = 249,4 Lin. = 20 Zoll 9 Lin. $\frac{4}{10}$.

Oder: wie groß ist die Höhe über der Meeresfläche, wenn das Queckſilber 20 Zoll d. i. 240 Lin. hoch steht? Diese 240 sind das Product von 336 in eine gewisse Potenz von dem Exponenten $\frac{335}{336}$; also ist diese Potenz = $\frac{240}{336}$; der Exponens der Potenz ergiebt sich durch die Division der Logarithmen der Potenz und ihrer Wurzel. Weil beyde eigentliche Brüche sind, so kehre man sie um, und suche von den umgekehrten Brüchen die Logarithmen. Diese sind Logar. $\frac{336}{335}$ = 0,0012945; und Logar. $\frac{336}{240}$ = 0,1461281. Letzterer dividirt durch erstern giebt 113,3, folglich ist $\frac{336}{240}$ etwas über die 113te Potenz von $\frac{336}{335}$, und ebenfalls der umgekehrte Bruch von jenem die so vielte Potenz von diesem. Folglich ist 240 etwas mehr als das 113te Glied in der Reihe. Für jedes Glied haben wir 80 Fuß Höhe gerechnet, also haben wir 9040 Fuß bis zum 113ten Gliede, und $\frac{3}{10}$ von 80 oder 24 noch bis zu dem gegebenen Gliede. Also gehört zu einer Barometerhöhe von 20 Zoll, nach den gemachten Annahmen, 9064 Fuß Höhe über der Meeresfläche.

145. In der theoretischen Musik werden die Töne durch Zahlen ausgedrückt, welche sich umgekehrt wie die Längen gleich dicker und gleich stark gespannter Saiten, oder directe wie die Geschwindigkeiten der Schwingungen verhalten. Der Grundton heißt 1, die Oberoctave 2, zwischen welchen 11 Töne fallen. Sollen die Intervalle der Töne gleich seyn, so muß man zwischen 1 und 2 eilf

Zah-

Zahlen in geometrischer Progression einschieben. Die erste derselben ist die 12te Wurzel aus 2, die zweyte das Quadrat dieses ersten Gliedes, die dritte der Cubus, die 12 ist die 12te Potenz oder 2, die Oberoctave. Die 12te Wurzel aus 2 ist schon in (138) gefunden, nämlich 1,059 +. Die übrigen findet man, wenn man den 12ten Theil des Log. 2 nach der Reihe mit 2; 3; 4; u. s. w. multiplicirt. Die Reihe selbst, und die dazu gehörigen Töne, sind in folgender Tafel verzeichnet

C	1,000	E	1,260	Gis	1,587
Cis	1,059	F	1,335	A	1,682
D	1,122	Fis	2,414	B	1,782
Dis	1,189	G	1,498	H	1,888
				C	2,000

Alle die eingeschobenen Zahlen sind irrationale, deren Wehrte nur bis in den Tausendtheilchen richtig angegeben sind. Man nimmt aber statt dieser Wehrte andere nahe kommende, deren Verhältniß zur Einheit sich in kleinen Zahlen ausdrücken läßt, weil dieses Wohlklang verursacht. Hievon in der Physik mehreres.

Zweyter Abschnitt.

Die Elementar-Geometrie.

I. Erklärungen.

1. Man nehme dem physikalischen Körper alle seine Eigenschaften, bis auf die Ausdehnung, und lasse jeden Theil unmittelbar an den andern sich anschliessen, um ein zusammenhängendes Ganze zu erhalten, so hat man den Begriff von dem geometrischen Körper.

2. Die

2. Die Grenze des Körpers, oder die Einschränkung seiner Ausdehnung, ist die Oberfläche desselben. Man trenne diese in Gedanken von dem Körper, so hat man den Begriff von einer Fläche.

3. Die Grenze der Fläche heißt ihre Umfangslinie. Man trenne sie in Gedanken von der Fläche, so hat man den Begriff von einer Linie.

4. Die Grenze der Linie ist ein Punct, den man sich auch absolute für sich, in einem Körper oder auf einer Fläche muß gedenken können.

5. Jeder Körper hat eine Länge, Breite und Dicke, oder drey Dimensionen, die man nach drey Linien in zwey verschiedenen Durchschnitten des Körpers mißt. Die Fläche hat nur zwey Dimensionen, Länge und Breite, weil sie kein Theil des Körpers ist; die Linie nur eine Dimension, die Länge. Der Punct hat weder Länge, Breite noch Dicke.

6. Die gerade Linie ist diejenige, welche man nur auf eine einzige Art zwischen zwey Puncten sich gedenken kann; wie AB (Fig. 1) zwischen den Puncten A, B; die krumme ist eine Linie, welche ohne Veränderung ihrer Gestalt, auf unzählig viel Arten, durch die Umdrehung um die gerade Linie AB, zwischen zwey Puncten sich legen läßt, wie ACB, ADB.

7. Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige, auf welcher zwischen je zwey Puncten eine gerade Linie, die ganz in die Fläche fällt, gezogen werden kann. Eine krumme Fläche ist diejenige, von welcher kein Theil eben ist. Die Flächen, wovon ein Theil eben, ein Theil krumm ist, sind nicht eine Fläche, sondern mehrere.

Die krummen Flächen laufen entweder ganz in sich herum, und haben keine Grenze, ob sie gleich eine bestimmte Größe haben, z. E. die Kugelfläche, oder sie sind durch

Ge-

gewisse Linien begrenzt, als eine Halbkugel, die Abschnitte einer Walze, eines Kegels.

8. Zwey gerade Linien schneiden sich entweder oder treffen einander gar nicht, so weit sie auch verlängert werden. Wenn sie sich schneiden, so geschieht es in einem einzigen Puncte, weil zwey gerade Linien nicht mehrere Puncte gemein haben können, ohne in eins zu fallen (6). Wenn sie sich nicht schneiden, so liegen sie entweder in zwey verschiedenen Ebenen, ein Fall, den wir ganz bey Seite setzen, oder sie liegen in derselben Ebene. In diesem Falle heissen sie parallele, oder gleichlaufende Linien, wie AB und CD (Fig. 2).

9. Die Lage zweyer gerader sich schneidender Linien ist der Winkel derselben. Man erklärt den Winkel auch durch die Neigung zweyer gerader Linien gegen einander. Durch zwey sich schneidende gerade Linien kann allemahl eine Ebene gelegt werden. Denn durch eine derselben sind unzählig viel möglich, unter welchen mittelst eines beliebigen Puncts der andern Linie diejenige bestimmt wird, in welcher auch diese Linie liegt.

10. Die Linien, welche einen Winkel einschliessen, heissen seine Schenkel, wie AB, AC (Fig 3) der Durchschnittspunct A, heißt der Scheitel. Man benennt einen Winkel durch die Buchstaben an seinen Schenkeln, wie BAC, den Buchstaben am Scheitel in der Mitte; oder deutet ihn auch durch einen eingeschriebenen kleinen Buchstaben an. Ein Winkel wird durch ∠ bezeichnet.

11. Nebenwinkel sind BAC, BAD, die einen gemeinschaftlichen Schenkel AB, und die beyden andern AC, AD, in einer geraden Linie, nach entgegengesetzter Richtung liegend haben. Die Winkel, deren Schenkel die verlängerten des andern sind, nennt man Verticalwinkel als BAC, DAE.

12.

12. Wenn die Nebenwinkel einander gleich sind, so sind sie Rechte Winkel, wie BAC, BAD (Fig. 4) und BA heißt eine auf DC senkrechte, lothrechte, perpendiculare Linie. Sind die Nebenwinkel ungleich, so heißt der kleinere x (Fig. 3) ein spitziger, der größere y ein stumpfer Winkel, beyde schiefe Winkel. Ein rechter Winkel wird durch R bezeichnet.

13. Eine mit Linien begrenzte Ebene heißt eine Figur. Figuren sind entweder geradlinichte, oder krummlinichte oder gemischte, d. i. von geraden und krummen Linien eingeschlossene.

14. Die geradlinichten Figuren werden nach der Anzahl der Seiten in Dreyecke, Vierecke, Fünfecke.... Vielecke eingetheilt.

15. Ein Dreyeck, dessen Seiten alle drey gleich sind, ist ein gleichseitiges Dreyeck; ein Dreyeck mit zwey gleichen Seiten ist ein gleichschenklichtes. Die dritte Seite desselben heißt die Grundlinie. Wenn keine Seite einer der andern gleich ist, so ist das Dreyeck ungleichseitig.

Rechtwinklicht heißt ein Dreyeck, worinn ein Winkel ein Rechter ist; stumpfwinklicht, worinn ein Winkel stumpf ist; spitzwinklicht, worinn alle Winkel spitzig sind. In den rechtwinklichten Dreyecke heißt die dem rechten Winkel gegen über stehende Seite die Hypothenuse, die anliegenden Seiten die Katheten.

16. Eine viereckte Figur, worinn jede zwey gegeneinander über liegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Sind alle Winkel einer viereckten Figur rechte Winkel, so ist sie ein Rechteck (Rectangel), und wenn ausser den vier rechten Winkeln alle vier Seiten gleich sind, ein Quadrat. Sind die Seiten gleich, aber die Winkel schief, so ist die Figur eine Raute oder Rhombus.

bus. Sind zwey Seiten parallel, zwey nicht, so ist die Figur ein Trapezium.

17. Ein ordentliches (reguläres) Vieleck hat lauter gleiche Seiten und Winkel.

18. Ein Kreis entsteht, wenn sich eine gerade Linie C A (Fig. 5), in derselben Ebene, um den festen Punct C bewegt, bis sie wieder in dieselbe Lage kömmt; oder sie ist eine Figur, deren Puncte im Umfange von einem Puncte innerhalb gleichen Abstand haben.

Der Punct C heißt der Mittelpunct; die Linie CA heißt der Halbmesser oder Radius des Kreises; das doppelte desselben AB der Durchmesser; des Punctes A Weg ist der Umfang oder die Peripherie. Eine gerade Linie von einem Puncte der Peripherie F bis zu einem andern G, die nicht durch den Mittelpunct geht, heißt eine Sehne oder Chorde. Das Stück FDG oder FEG der Kreisfläche heißt ein Abschnitt oder Segment; das Stück ACE zwischen zwey Halbmessern und ihrem Bogen heißt ein Ausschnitt oder Sector.

19. Man muß sich zwischen zwey Puncten eine gerade Linie vorstellen können; man muß sie in Gedanken auf beyden Seiten verlängern können; man muß die Entstehungsart des Kreises begreifen können. Sonst kann man von der Geometrie nichts begreifen.

20. Eine gerade Linie muß man sich immer als ins Unendliche ausgedehnt nach beyden Enden gedenken. — Alle gezeichnete geometrische Figuren sind nur Bilder von den immateriellen Figuren, die man sich mittelst des Verstandes zeichnen muß. Wir können keine Puncte und Linien zeichnen, keine vollkommen ebene Fläche darstellen.

21. Die allgemeinen mathematischen Grundsätze, als: Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich; Gleiches zu gleichem addirt, giebt gleiches, u. dgl. führe ich nicht besonders an — Geometrische Grundsätze

sind: durch zwey Puncte geht nur eine gerade Linie (zufolge der Erklärung); zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein, und können sich in nicht mehr als in einem Puncte schneiden; alle rechte Winkel sind gleich. Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich.

II. Lage der geraden Linien gegen einander.

22. Die Nebenwinkel sind allemahl zwey Rechten gleich. Es seyn nämlich (Fig. 4.) EAC, EAD zwey Nebenwinkel, und BA sey eine senkrechte auf CD, so ist EAC um den Winkel EAB kleiner als ein Rechter, und EAD um eben denselben größer als ein Rechter. Beyde sind also zwey Rechten gleich. Auf der andern Seite von DC sind DAF und FAC auch zwey Rechten gleich, also sind alle vier Winkel rings um den Punct (auch wenn ihrer so viel sind als man will) vier Rechten gleich.

Alle Winkel, die an einer Spitze auf einer Seite einer geraden Linie liegen, sind zwey Rechten gleich.

23. Die Verticalwinkel sind einander gleich. In Fig. 3 sind x und z Verticalwinkel, y ist jedes derselben Nebenwinkel. Folglich $x + y = 2R$, und $y + z = 2R$, also $x + y = y + z$, und, wenn man von den gleichen Summen denselben Winkel y wegnimmt, $x = z$.

24. Wenn zwey in C sich schneidende Linien AC, BC (Fig. 6) (ich verstehe hier und in der Folge immer gerade) von einer dritten DE in A, B geschnitten werden, so ist in dem Dreyecke CAB der innere Winkel CAB kleiner als der äussere CBE.

Man schiebe den Winkel CBE mit dem Schenkel BE auf der Linie AE nach A hin, so rückt der Durchschnitt

schnitt des Schenkels CB mit AC auch nach A hin, und zugleich näher nach dem Scheitelpuncte des fortgeschobenen Winkels. Er sey in c, wenn B in b ist, so ist cbE = CBE, und cb kleiner als CB. Wenn B in A anlangt, so fällt C auch in A, und der ganze Schenkel des Winkels FAB = CBE fällt über CA hinaus. Folglich ist CAB kleiner als CBE.

25, Es sey der Winkel FAE größer als CAE (Fig. 6); man schiebe den Winkel FAE mit dem Schenkel AE auf eben dieser Linie AE fort, so müssen, da AF ganz jenseits AC in Absicht auf AE liegt, immer größere Theile von AF sich durch AC durchgeschoben haben, in der Maaße, daß der Scheitelpunct des Winkels auf AE fortrückt, als in b das Stück bc, in B das Stück BC. Wäre es möglich, daß sich die ganze unbegrenzte Linie FA durchschieben könnte, so daß irgendwo in G die unbegrenzte Linie GH, welche mit AE denselben Winkel wie FA macht, die gleichfalls unbegrenzte AC nicht schnitte, so müßte zwischen B und G ein Punct seyn, in welchem der Uebergang vom Schneiden zum nicht Schneiden geschähe. Hier müßte man also beyde gerade Linien als zusammen vermischt sich gedenken, welches der Natur der geraden Linie widerspricht.

Folglich erhellt, daß zwey Linien, wie AC und GH die mit einer dritten AE nach derselben Seite ungleiche Winkel machen, sich nothwendig schneiden.

Ist der äussere Winkel HGE größer als der innere entgegengesetzte CAE, so schneiden sie sich auf eben der Seite von AE; ist aber DAa kleiner als AGg, so schneiden sie sich auf der entgegengesetzten Seite von AE wo der innere Winkel CAB, der Verticalwinkel von DAa kleiner ist als der äussere HGE, der Verticalwinkel von AGg.

Man kann den Satz auch so ausdrücken: Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der beyden innern Winkel kleiner oder größer ist, als zwey Rechte, so schneiden sich die beyden Linien auf derjenigen Seite, wo die Summe kleiner als zwey Rechte ist.

26. Es werden die beyden Linien AB, CD, (Fig. 7) von einer Linie EF unter gleichen Winkeln geschnitten, so daß der äussere Winkel EGB gleich ist dem innern entgegengesetzten EHD, so schneiden sich AB und CD nicht, oder sind parallel.

Denn wenn sie sich schnitten, so wären jene Winkel ungleich (24).

27. Eben diese Linien sind parallel, wenn die Wechselwinkel AGH, GHD gleich sind. Denn wegen der gleichen Verticalwinkel AGH, EGB sind EGB und EHD gleich, also sind die Linien parallel (26).

28. Auch sind sie parallel, wenn die beyden innern entgegengesetzten zusammen zwey Rechte ausmachen. Denn wenn HGB + GHD = 2R, so ist, weil HGB + EGB = 2R sind, GHD = EGB, also, wie in (26).

29. Die Linien AB, CD (Fig. 7) seyn parallel; eine dritte EF schneide sie in G und H, so sind 1) der äussere und innere entgegengesetzten Winkel sich gleich; 2) die Wechselswinkel ebenfalls, und 3) die beyden innern entgegengesetzten Winkel machen zwey Rechte aus.

Denn wenn der äussere und innere Winkel sich ungleich sind, so schneiden sich die beyden Linien (25). Sind aber diese Winkel gleich, so folgt das zweyte und dritte gleich daraus, umgekehrt wie in (27 und 28).

30. Sind zwey Linien BC, bc (Fig. 6) einer dritten FA parallel, so sind sie einander selbst parallel. Denn sie werden alsdenn alle drey von einer schneidenden

Li-

Linie DE unter demselben Winkel geschnitten, so daß DAF = Dbc = DBC, folglich sind bc und BC parallel (28).

31. Die Linie FA (Fig. 6) bewege sich längst AE unter demselben Winkel, so schneidet sie eine andere AC in jeder Lage gleichfalls unter demselben Winkel. Nämlich, wenn FA in die Lage CB kömmt, so sind, wegen CBE = FAE, die Linien CB, FA parallel, folglich ist FAC = ACB.

Auf der geraden Linie AC haben alle Theile dieselbe Richtung gegen AE, auf AF gleichfalls. Die Richtung auf der letztern verändert sich nicht, weil die Linie bey ihrem Fortrücken dieselbe Lage gegen AE behalten soll; folglich behalten die Theile auf AC und BC immer gleiche Lage gegen einander.

32. In jedem Dreyecke ACB (Fig. 6) ist die Summe der drey Winkel zwey Rechten gleich. Denn man schreibt eine Seite CB parallel mit sich nach A in AF, so ist DAF = ABC (29 nr. 1); FAC = ACB (29 nr. 2); CAB = CAB. Aber DAF + FAC + CAB = 2 R (22) also ABC + ACB + CAB = 2 R.

III. Gleichheit der Dreyecke und Folgerungen.

33. In den beyden Dreyecken ABC, abc (Fig. 8) seyn die Seiten AB = ab: AC = ac, und der eingeschlossene Winkel A = a, so ist die dritte Seite in beyden dieselbe, BC = bc, und die den gleichen Seiten gegen über liegenden Winkel sind gleich, B = b; C = c.

So wie man materielle Figuren durch die Uebereinanderlegung mit einander vergleicht; so lege man auch

hier im Verstande die beyden Dreyecke auf einander, daß a auf A und ab auf AB falle; folglich fällt wegen der gleichen Winkel, ac auf AC, und wegen der gleichen Größe der Linien, b auf B, c auf C, daher cb auf CB, weil zwischen den zwey Puncten B, C, nur eine einzige gerade Linie statt findet; daher deckt das Dreyeck abc das ABC, und es ist b = B; c = C.

Oder, in einem Dreyecke ABC wird aus AB, AC und A die Lage der Puncte, B, C, mithin BC nebst den Winkeln B und C bestimmt; folglich sind alle Dreyecke, worinn AB, AC, A die gegebene Größe haben, ganz dieselben.

34. In den Dreyecken ABC, abc (Fig. 8) sey AB = ab; A = a; B = b, so sind die den gleichen Winkeln gegen über liegende Seiten gleich, AC = ac, BC = bc, und C = c.

Man lege wiederum die Dreyecke auf einander, daß a auf A; b auf B falle, so fällt ac auf AC, bc auf BC, und der Durchschnittpunct c auf C (21); daher decken sich die Dreyecke einander, und es ist AC = ac; Bc = bc; C = c.

Oder: in einem Dreyecke ABC wird aus einer Seite und den anliegenden Winkeln die Lage und der Durchschnittspunct der beyden andern Seiten, folglich ihre Größe und der von ihnen eingeschlossene Winkel bestimmt.

35. Weil der Winkel B, als die Ergänzung von A und C zu zwey Rechten, durch diese gegeben oder bestimmt wird (32), so folgt die Gleichheit der Dreyecke ABC, abc auch aus der Gleichheit der Seiten AB und ab; der Winkel A und a; C und c.

36. Sind zwey Seiten AC, BC eines Dreyecks ABC (Fig. 9), sich gleich, so sind es auch die gegenüberliegenden Winkel — Denn man gedenke sich dasselbe Dreyeck mit der Seite AC auf BC gelegt, so fällt BC

auf

auf AC, A auf B, B auf A, AB auf sich selbst, und der Winkel A deckt den Winkel B oder ist ihm gleich.

37. Sind die beyden Winkel A und B gleich, so sind die gegenüberstehenden Seiten AC, BC gleich — Denn man gedenke sich dasselbe Dreyeck mit der Seite AB auf AB, die Winkel A und B aber verwechselt, gelegt, so fällt AC auf BC und BC auf AC, dadurch C auf C, weil zwey gerade Linien sich nicht in zwey Puncten schneiden können. Daher ist AC = BC.

38. In einem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich, nämlich jeder $\frac{2}{3}$ R.

39. Ist in dem Dreyecke ABC (Fig. 10) die Seite AB größer als AC, so ist der jener gegen über liegende Winkel Ç größer als der AC gegen über liegende B. — Denn man nehme AD = AC, indem man aus A mit dem Halbmesser AC einen Kreisbogen beschreibt, und ziehe CD, so ist < ACD = ADC; aber ACB ist größer als ACD oder ADC, und ADC ist größer als B (24), folglich ist noch vielmehr ACB größer als B.

40. Umgekehrt: dem größern Winkel ACB steht die größere Seite AB gegenüber. Denn wäre B größer als ACB, so müßte auch AC größer als AB seyn (39).

41. Daher ist in jedem Dreyecke ACB (Fig. 11) die Summe zweyer Seiten AC, CB größer als die dritte AB. — Denn man nehme auf der verlängerten AC das Stück CD = CB und ziehe DB, so ist in dem gleichschenklichten Dreyecke BCD der Winkel D = CBD, daher D kleiner als ABD, und in dem Dreyecke ABD ist AB kleiner als AD, oder als AC + CB (40).

42. Wenn die drey Seiten eines Dreyecks ACB (Fig. 8) den drey Seiten eines andern acb gleich sind, so sind die Dreyecke gleich, und die den gleichen Seiten in jedem gegen über liegenden Winkel sind dieselben. — Denn man lege sie an einander, wie in (Fig. 12) geschehen

ist, die eine Seite ab auf die ihr gleiche AB, ac neben AC auf der andern Seite von AB und bc neben BC; ziehe hierauf Cc. Fällt diese innerhalb beyder Dreyecke, so ist in dem gleichschenklichten Dreyecke CAc der Winkel CAc = ACc, und in dem gleichschenklichten Dreyecke CBc der Winkel BCc = BcC; daher die Summe ACB = AcB, folglich sind die Dreyecke ACB und AcB gleich (33). In dem Falle, daß Cc ausserhalb der Dreyecke fällt, ist der Unterschied der gleichen Winkel bey C und c derselbe. Geht Cc durch B, so sind die Winkel bey B Rechte. Dieser Fall verdient eine besondere Anführung.

43. Wenn in den bey A rechtwinklichten Dreyecken ABC, ABD (Fig. 13) die Hypothenuse BC = BD und die eine Kathete AB = AB, so sind die Dreyecke gleich. — Denn man lege sie mit der gemeinschaftlichen Kathete AB an einander, so machen die beyden andern Katheten AC, AD eine gerade Linie aus, wegen der rechten Winkel bey A. Dadurch entsteht aus beyden das gleichschenklichte Dreyeck BCD, in welchem ∠ C = D. Also ist auch der dritte Winkel ABC = ABD als das Complement zu zwey Rechten, jener von A und C, dieser von A und D derselbe. Folglich sind die Dreyecke ABC und ABD gleich (33).

44. Aufg. Ueber CD durch den Punct A (Fig. 13) ein Perpendikel aufzurichten — Man nehme CA = AD, und beschreibe über CD ein gleichseitiges oder gleichschenklichtes Dreyeck, indem man mit CD, oder einer andern Linie, die nur größer als AD seyn muß, aus C und D Kreisbogen beschreibt, die sich in B schneiden. Die Dreyecke BAC, BAD sind wegen (42) gleich, also ∠ BAC = BAD, folglich beyde Rechte (12).

45. Aufg. Aus dem Puncte B ausserhalb der Linie CD auf diese ein Perpendikel zu fällen (Fig. 14). —

Man

Man beschreibe aus B mit einem hinlänglich großen Halbmesser einen Kreis, der CD in C und D schneide. Ueber CD beschreibe man auf der andern Seite das gleichseitige oder gleichschenklichte Dreyeck CED, ziehe BE, welche CD in A schneide, so ist BA das verlangte Perpendikel.

Man ziehe noch BC, BD, so sind die Dreyecke BCE, BDE gleich (42), folglich auch die Winkel bey B, daher die Dreyecke BAC, BAD (33) und daher die Winkel bey A.

46. Das Perpendikel aus der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks auf die Grundlinie, theilt das Dreyeck, die Grundlinie und den dieser gegen über stehenden Winkel in zwey gleiche Theile.

47. Aufg. Eine gegebene Linie CD (Fig. 14) in zwey gleiche Theile zu theilen — Man beschreibe über CD die gleichschenklichten Dreyecke BCD, ECD, und ziehe BE, so theilt diese die CD in zwey gleiche Theile.

Der Beweis wie in (45).

48. Aufg. Einen Winkel CBD (Fig. 14) in zwey gleiche Theile zu theilen. — Man nehme auf dessen Schenkeln BC = BD, ziehe CD, beschreibe über CD das gleichschenklichte Dreyeck CED, ziehe BE, so theilt diese den Winkel B in zwey gleiche Theile.

Der Beweis wie in (45).

49. Aufg. Ein Dreyeck abc (Fig. 8) zu zeichnen, das einem gegebenen ABC gleich sey — Man nehme ab = AB, und beschreibe aus a mit dem Halbmesser AC, aus b mit dem Halbmesser BC Kreisbogen, die sich in c schneiden, ziehe ca, cb, so ist das △ acb = ACB. Aus (42).

50. Auf eben die Art verzeichnet man mit drey gegebenen Seiten ein Dreyeck; nur müssen zwey Seiten größer seyn als die dritte (41).

51. Aufg. Einen Winkel a zu zeichnen, der einem gegebenen A gleich sey (Fig. 8). — Auf den Schenkeln des Winkels A nehme man die Puncte c, B, C, beliebig, ziehe BC, und verzeichne das dem Dreyecke ACB gleiche Dreyeck acb, so ist der Winkel, welcher der Seite bc = BC gegen über liegt, dem A gleich (42).

52. Aufg. Einer Linie AB durch einen gegebenen Punct C ausser ihr eine Parallele zu ziehen (Fig. 15). — Man ziehe die willkührlichen CB, CA, verzeichne über CA das dem Dreyecke ABC gleiche Dreyeck ACD, worinn CD = AB und AD = BC, so ist CD mit AB parallel — Denn die Winkel CAB, ACD sind gleich (42); also sind AB, CD parallel (27).

53. Aufg. Aus zwey Seiten AB, BC mit dem Winkel B ein Parallelogramm zu zeichnen. (Fig. 15). — Man ziehe AC, und verzeichne das Dreyeck ACD = ABC wie in (52), so ist erstlich CD parallel mit AB; zweytens wegen der gleichen Winkel ACB, CAD (42) sind auch BC, AD parallel (27).

54. In jedem Parallelogramm ABCD (Fig. 15) sind

I. die gegen über stehenden Seiten AB und CD, BC und AD gleich, oder Parallelen zwischen Parallelen sind gleich. — Denn man ziehe die Diagonale AC, so ist, wegen der gleichen Wechselswinkel CAB = ACD und ACB = DAC (29, nr. 2), das Dreyeck ACB = ACD (34), folglich AB = CD und BC = AD.

II. Die nach der Diagonale entgegengesetzten Winkel eines Parallelogramms A und C, oder B und D sind gleich.

55. Die Diagonale (durch die Ecken gezogene Linie) theilt ein Parallelogramm in zwey gleiche Theile.

56. Wenn in einem Viereck ABCD (Fig. 15) die zwey gegen über stehenden Seiten AB, CD gleich und parallel

rallel sind, so ist die Figur ein Parallelogramm — Denn man ziehe die Diagonale AC, so sind die Wechselswinkel CAB, ACD gleich, folglich das Dreyeck ABC = CDA (33), und also < ACB = CAD, daher CB parallel mit AD.

57. Aufg. Ein Rechteck zu zeichnen (Fig. 16) — Man ziehe auf AB die senkrechte CB, nehme darauf die willkührlichen oder gegebenen Linien AB, CB, ziehe CD parallel mit AB, und AD parallel mit CB (52), so ist das Rechteck gezeichnet. In diesem sind alle vier Winkel Rechte (29. nr. 3).

58. Man nehme AE = AD, ziehe EF parallel mit AD, so hat man ein Quadrat AEFD, in welchem alle Seiten gleich, und alle vier Winkel Rechte sind.

59. Das Perpendikel FE von einem Puncte F auf eine Linie AB, mißt den Abstand des Punctes F von dieser Linie — Der Abstand einer Linie DC von der mit ihr parallelen AB wird gemessen durch das Perpendikel FE von einem Puncte der ersten auf die letztere — Solche Perpendikel sind Parallelen (27), also sich gleich (55). Darum heissen Parallelen auch gleichlaufende. Wenn man auf AB zwey gleiche Perpendikel AD, BC setzt, und die gerade DC zieht, so ist DC parallel mit AB. Auf solche Art zieht man auf dem Felde Parallelen.

60. Eine vieleckigte Figur, wie Fig. 17, abzuzeichnen, zerfälle man sie durch Diagonalen in Dreyecke, und verzeichne jedes Dreyeck neben dem andern in der gehörigen Lage. Nimmt man die Seiten und Winkel nach Belieben an, so bestimmen sich immer drey Stücke aus den übrigen. Nämlich, wenn man alle Seiten annimmt, so ergeben sich die drey letzten Winkel bey der Zusammensetzung der Figur von selbst; oder 2) wenn man alle Winkel bis auf einen, und alle Seiten bis auf zwey annimmt,

die-

dieser übrige Winkel und die zwey anliegenden Seiten; oder 3) wenn man alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwey annimmt, diese Seite und die beyden anliegenden Winkel.

Bey Feldvermessungen, wenn man alle Seiten und Winkel eines Feldes aufnimmt, und sie, jene nach einem verkleinerten Maaßstabe, aufs Papier trägt, hat man hiedurch eine Probe von der Richtigkeit der Messungen. Denn die drey Stücke, welche sich bey der Zeichnung auf eine jener drey Arten aus den übrigen bestimmen, müssen mit den gemessenen übereinstimmen.

61. Die Summe aller Winkel einer jeden geradlinichten Figur ist zweymahl so viel Rechten gleich, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechten. — Denn die Summe aller Winkel ist so groß als die Summe der Winkel in allen den Dreyecken, worinn die Figur zerfällt, also zweymahl so viel Rechten gleich. Nun ist die Anzahl dieser Dreyecke so groß als die um zwey verminderte Anzahl der Seiten, weil den beyden äussersten Dreyecken zwey Seiten, jedem der andern eine Seite zugehören.

62. Wenn man die Seiten der Figur jede nach derselben Seite hin verlängert, so ist die Summe der äussern Winkel vier Rechten gleich — Denn diese äussern machen mit den innern zweymahl so viel Rechte aus als Seiten da sind. Da nun die innern so viel Rechte weniger vier sind, so machen die äussern diese vier Rechte aus.

63. Perpendikel und Parallelen zu ziehen, bedient man sich bey Zeichnungen am bequemsten eines rechtwinklichten Dreyecks und eines Linials, an welchem man jenes beliebig verschiebt. Das Anschlaglinial dient auf einem Reißbrette sehr geschwinde Parallelen zu ziehen. Dreyecke, oder je drey Puncte einer Karte, trägt man durch einen dreyfüßigten Zirkel über. Man kann sie durch paralleles Abschieben übertragen, wenn man Vorzeichnung

nung und Nachzeichnung auf eine Tafel legen kann. Oder man schließt beyde in ein Rechteck ein, und mißt die Entfernung jedes überzutragenden Puncts von zwey nebeneinander liegenden Seiten des Rechtecks.

IV. Aehnlichkeit der Figuren.

64. Man trage auf eine Linie AM (Fig. 18) eine beliebige Anzahl gleicher Theile AB = BC = CD u. s. f. ziehe durch die Theilungspuncte die Parallelen Bb, Cc, Dd &c. an eine Linie AN, welche jene in A schneidet, so werden auf dieser eben so viele, unter sich gleiche Theile abgeschnitten, als auf jener.

Denn man ziehe durch die Puncte b, c, d &c. die Parallelen bb′, cc′, dd′ &c. mit AM, so sind diese den Theilen BC, CD, DE &c. gleich (54). In den Dreyecken ABb, bb′c, cc′d, &c. sind die Winkel bey A, b, c, &c. gleich (29, nr. 1) so auch die Winkel AbB, bcb′, cdc′ &c. also auch die Winkel bey B, b′, c′ &c. folglich sind die Dreyecke gleich (34) und die Seiten Ab, bc, cd &c. sind alle einander gleich.

65. Hieraus erhellt, wie man eine gegebene Linie Af in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. E. 5, theilen könne. Man zieht eine andere beliebige AF, trägt darauf die gegebene Anzahl Theile von beliebiger Größe, zieht Ff, und mit dieser die Parallelen Bb, Cc u. s. f. welche auf Af die verlangte Anzahl gleicher Theile abschneiden.

66. Man nehme irgend einen Theilungspunct D auf AM und den dazu gehörigen d auf AN, so ist AD : AF = Ad : Af. — Da die vorhergehenden Glieder AD, Ad gleich viel Theile enthalten, die nachfolgenden AF, Af ebenfalls, und die Theile in AD und AF, so wie in Ad und Af gleich groß sind, so entsteht AF aus AD

auf

auf eben die Art durch die Division und Multiplication wie Af aus Ad. Also sind die vier Größen proportional (Arithm. 79 und 80).

67. Ueberhaupt verhalten sich zwey Abschnitte der einen Linie wie zwey Abschnitte der andern, die mit jenen zwischen denselben Parallelen fallen. Als: BD : CF = bd : cf. Auch ist AD : DF = Ad : df.

68. Man ziehe in dem Dreyecke ABC (Fig. 19) mit der Seite BC die Parallele DE, so ist AB : AD = AC : AE — Denn man theile AB in irgend eine Anzahl gleicher Theile (65). Fällt ein Theilungspunct in D, so werden durch die Parallelen DE und BC, auf AC gleich viel Theile abgeschnitten, und es ist AB : AD = AC : AE. Fällt in D kein Theilungspunct, oder sollte es gar nicht möglich seyn, durch eine veränderte Eintheilung in D einen Theilungspunct fallen zu lassen, so ist es doch möglich, durch die immer mehr vergrößerte Anzahl der Theile zwey Theilungspuncte d und d′ so nahe an D zu bringen als man will. Zieht man nun die Parallelen de, d′é mit BC, so ist AB : Ad = AC : Ae und AB : Ad′ = AC : Aé. Da die nachfolgenden Glieder Ad und Ad′; Ae und Aé, jene der AD, diese der AE von beyden Seiten so nahe kommen können, als man will, so kann die Proportion AB : AD = AC : AE nicht falsch seyn, es müßten denn jene beyden zuletzt falsch werden können.

Wir wollen inzwischen setzen, sie sey falsch, und es sey AB : AD = AC : AP. Man nehme die Anzahl der gleichen Theile auf AB so groß, daß eine Theilungslinie de zwischen E und P falle, so ist AB : Ad = AC : Ae. Da Ad größer ist als AD, so muß auch Ae größer seyn als AP in der gegenseitig angenommenen Proportion, weil ein größerer Exponent zu demselben vorhergehenden Gliede AC nothwendig ein größeres folgendes

Glied

Glied giebt. Der Exponent ist aber größer, weil Ad größer als AD ist. Nun fällt e zwischen E und P, also ist Ae kleiner als AP. Folglich kann die gegenseitig angenommene Proportion nicht bestehen. — Eben so wird der Beweis geführt, wenn P auf der andern Seite von E fallen soll. Es ist daher die Proportion AB : AD = AC : AE richtig.

69. Ist DE parallel mit BC, so ist auch AB : BD = AC : CE, und AD : BD = AE : CE. Wenn man zu AB, AD, BD ein gemeinschaftliches Maaß finden kann, so haben AC, AE, EC eben so viel Theile wie jene nach der Ordnung. Ueberhaupt aber wenn ein Theil AD aus dem Ganzen AB auf dieselbe Art entsteht, wie der Theil AE aus dem Ganzen AC, so muß auch der andere Theil BD und CE, jener aus AB, dieser aus AC auf dieselbe Art entstehen; desgleichen auch der Theil AD aus dem Theil BD wie AE aus CE.

70. Es seyn nämlich vier proportionale Größen allgemein durch A, B, C, D bezeichnet, so daß A : B = C : D; der Exponens sey e, so daß B = e. A und D = e. C, so ist A — B = A — e. A = (1 — e) A, wo die Klammern bedeuten, daß die Differenz 1 — e in A soll multiplicirt werden. Desgleichen ist C — D = (1 — e) C. Folglich ist A : A — B = C : C — D, in dem der Exponent von beyden Verhältnissen 1 — e ist.

Desgleichen ist auch A — B : B = C — D : D, die vorhergehenden Glieder sind (1 — e) A und (1 — e) C die nachfolgenden e. A und e. C. Diese entstehen also aus jenen durch die Division mit 1 — e und Multiplication mit e.

Z. E. 16 : 12 = 24 : 18, also 16 : 4 = 24 : 6 und 4 : 12 = 6 : 18.

71. Es sey wiederum in dem Dreyecke ABC (Fig. 20) DE parallel mit BC, so ist AB : AD = BC : DE. —

Denn

Denn man ziehe DF parallel mit AC, so sind DE und FC gleich (54). Nun ist AB : AD = BC : FC, also AB : AD = BC : DE.

72. Weil in allen diesen Proportionen alle Glieder gleichartig sind, so kann man die mittlern Glieder verwechseln (Arithm. 89), und so ist

AB : AC = AD : AE
AB : AC = BD : CE
AD : AE = BD : CE
AB : BC = AD : DE.

73. Zu drey Linien, wie AB, AC, AD, die vierte Proportionallinie zu finden, trage man auf die Schenkel eines beliebigen Winkels diese Linie, wie in Fig. 20, ziehe BC, und mit dieser die Parallele DE, so schneidet diese die verlangte Linie AE ab.

Die Arithmetik findet ihr Facit stückweise, die Geometrie ihre Größen auf einmahl durch Durchschnitte gewisser Linien.

74. Ebene und geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, gleich, und die Verhältnisse der zwischen diesen gleichen Winkeln liegenden Seiten dieselben sind. Z. E. in den beyden Figuren (17 und 17*) ist A = a; B = b; C = c; D = d; E = e; und AB : BC = ab : bc; BC : CD = bc : cd; CD : DE = cd : de; DE : EA = de : ea. Darum sind diese Figuren ähnlich — Wie solche ähnliche Figuren zu verzeichnen sind, wird bald gelehrt werden.

75. Wenn man in einem Dreyecke ABC (Fig. 20) mit der einen Seite BC die parallele DE zieht, so ist das Dreyeck ADE dem ABC ähnlich. — Denn es ist A = A, und wegen der Parallelen BC, DE ist B = D, C = E, ferner ist AB : AC = AD : AE; AB :

BC

BC = AD : DE (72) und so auch AC : BC = AE : DE also sind die Dreyecke ähnlich (74).

76. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks ABC zwey Winkeln eines andern abc (Fig. 20 und 20*) gleich sind, A = a; B = b; so sind die Dreyecke ähnlich — Denn man nehme auf der Seite AB das Stück AD = ab, und ziehe die Parallele DE mit BC, so ist D = B also D = b. Da nun A = a gesetzt ist, so ist △abc = ADE (34). Dieses △ADE ist dem ABC ähnlich (75), also ist auch △abc diesem ähnlich.

77. Wenn in den beyden Dreyecken ABC, abc (Fig. 20 und 20*) A = a und AB : AC = ab : ac, so sind die Dreyecke ähnlich — Denn man nehme auf AB das Stück AD = ab, und ziehe DE parallel mit BC, so ist AB : AC = AD : AE (72). Vergleicht man diese Proportion mit der angenommenen, so findet man, daß die drey ersten Glieder in beyden dieselben sind, daher das vierte nicht verschieden seyn kann, oder es ist AE = ac. Folglich ist das Dreyeck abc = ADE (33) und daher, wie dieses, dem ABC ähnlich.

78. Wenn in den beyden Dreyecken ABC, abc (Fig. 20 und 20*) AB : AC = ab : ac, und AB : BC = ab : bc, so sind sie ähnlich — Denn man nehme auf AB das Stück AD = ab, und ziehe DE parallel mit BC, so ist AB : AC = AD : AE, und AB : BC = AD : DE. Vergleicht man diese Proportionen mit den angenommenen, so erhellt, daß AE = ac und BC = bc. Da nun AD = ab, so ist △ ADE = abc (42), und daher △abc ähnlich dem △ABC.

69. In den bey B und b rechtwinklichten Dreyecken ABC, abc (Fig. 20. 20*) sey AB : AC = ab : ac, so sind diese Dreyecke ähnlich — Denn man nehme auf AB das Stück AD = ab, und ziehe DE paral-

lel mit BC, so ist AB : AC = AD : AE, folglich AE = ac; daher △ ADE = abc (43), also ist △ abc dem ABC ähnlich — Von schiefwinklichten Dreyecken gilt dieser Satz nicht ohne nähere Bestimmung.

80. In allen ähnlichen Dreyecken stehen die gleichen Winkel den gleichnahmigen Seiten, und diese jenen gegen über. Gleichnahmige Seiten sind diejenigen, welche entweder die vorhergehenden oder nachfolgenden Glieder der Proportionen ausmachen, wenn die Glieder des einen Verhältnisses aus dem einen Dreyecke, und die Glieder des andern Verhältnisses aus dem andern Dreyecke genommen werden.

81. Aufg. Einem Dreyecke ABC ein ähnliches abc (Fig. 20. 20*) zu verzeichnen — Man nehme eine Seite ab nach Belieben, und mache entweder zwey Winkel a und b den Winkeln A, B gleich; oder mache zweytens den Winkel a = A und suche zu AB, AC, ab die vierte Proportionallinie ac, worauf mit ab, ac und dem Winkel a das Dreyeck verzeichnet wird; oder suche drittens zu AB, AC, ab, desgleichen zu AB, BC, ab die vierte Proportionallinie, und verzeichne mit diesen beyden und ab das Dreyeck.

82. In dem bey A rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 21) werde von A das Perpendikel AD auf BC gelassen, so zerfällt das △ ABC in zwey diesem Dreyecke ABC und sich selbst ähnliche Dreyecke — Denn das Dreyeck ABD hat mit dem ABC den Winkel B gemein. Da nun D wie BAC = R, so sind die Dreyecke ähnlich (76). Eben so ist wegen des gemeinschaftlichen Winkels C das △ ACD dem BAC ähnlich. Daher sind die beyden Dreyecke ABD, ACD auch einander ähnlich. Es ist nämlich < C so wie < BAD die Ergänzung von B zum rechten Winkel, also ist C = BAD.

Des-

Desgleichen ist B so wie CAD die Ergänzung von C zum Rechten, also B = CAD.

83. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreyecke folgt (80)

BD : BA = BA : BC
DC : CA = CA : BC
BD : DA = DA : DC

Die Seiten BA, AC werden einmahl als Hypothenuse und das anderemahl als Katheten betrachtet. Die Seite DA ist in BAD die dem Winkel B, in CAD die dem Winkel C gegen überstehende Kathete.

84. Wenn man zwey Proportionen hat, wie folgende:

A : B = C : D
B : E = D : F

so ist A : E = C : F

Da D aus C wie B aus A entsteht, und F wieder aus D wie E aus B, so muß allerdings F aus C wie E aus A entstehen. Oder: man verwechsele die mittlern Glieder, so ist A : C = B : D und B : D = E : F, also A : C = E : F, folglich A : E = C : F. Nach dieser Beweisart aber müssen alle sechs Größen gleichartig seyn. Die erstere ist allgemein. Wenn der Exponent in der ersten Proportion ist m, in der zweyten n, so ist er in der aus beyden hergeleiteten m mahl n. Um sich dieses noch deutlicher zu machen, setze man statt der Buchstaben beliebige Zahlen, mit Beobachtung der Proportionalität.

85. Aufg. Einer Figur wie ABCDE (Fig. 17) eine ähnliche abcde (Fig. 17*) zu verzeichnen.

Man zerfälle jene durch Diagonalen in Dreyecke und verzeichne diesen die ähnlichen und ähnlich gelegten Dreyecke, so ist das verlangte geschehen. Denn wegen der gleichen Winkel in den Dreyecken beyder Figuren ist erstlich a = A; b = B; c = C; d = D; e = E. Zweytens ist AB : BC = ab : bc, ferner BC : AC = bc

bc:ac; und AC:CD = ac:cd, folglich BC:CD = bc:cd (84). Weiter ist CD:AD = cd:ad, und AD:DE = ad:de, also CD:DE = cd:de. Auf diese Art wird, so viel die Figur auch Seiten haben mag, bewiesen, daß zwey an einander stossende Seiten der einen Figur dasselbe Verhältniß haben, welches die zwey zwischen denselben Winkeln der andern Figur liegenden haben. Aber auch zwey nicht neben einander liegende Seiten, wenn sie nur zwischen denselben Winkeln liegen, haben solchergestalt gleiche Verhältnisse. Als AB:DE = ab:de. Denn da

AB : BC = ab : bc und
BC : CD = bc : cd, so ist
AB : CD = ab : cd (84), und da
CD : DE = cd : de, so ist
AB : DE = ab : de, u. s. f.

Also sind die Figuren, nach dem (74) gegebenen Begriffe ähnlich, und es ist zugleich die Möglichkeit dieses Begriffs dargethan.

86. Eine andere Art ist folgende. Man nehme in der Figur ABCD (Fig. 22) einen Punct M nach Belieben, theile von diesem aus die Figur in Dreyecke, und zeichne diesen Dreyecken die ähnlichen auf gleiche Art neben einander gelegten (Fig. 22*) so ist die Figur abcd der ABCD ähnlich.

87. Ist abcd der Figur ABCD ähnlich, so verzeichne man über der mit AB gleichnahmigen Seite, d. i. derjenigen, die zwischen denselben Winkeln liegt, wie AB, das dem △ AMB ähnliche amb. Der dadurch bestimmte Punct m ist in abcd ein ähnlich liegender Punct, wie der Punct M in ABCD, und die Figur abcd wird von m aus in ähnliche Dreyecke wie ABCD von M aus getheilt. Nämlich wegen der gleichen Winkel ABC und abc und der in den beyden ähnlichen Dreyecken AMB,

amb

amb gleichen Winkel MBA, mba ist < MBC = mbc. Ferner ist MB : AB = mb : ab wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, und AB : BC = ab : bc, folglich (84) ist MB : BC = mb : bc, also sind die Dreyecke MBC, mbc ähnlich (77). Auf eben die Art wird die Aehnlichkeit der Dreyecke CMD, cmd und aller etwa übrigen erwiesen.

88. In den ähnlichen Figuren ABCD, abcd (Fig. 23 und 23*) seyn M, N und m, n zwey Paare ähnlich liegender Puncte, so ist das Verhältniß der Entfernung dieser Puncte zu einer der gleichnahmigen Seiten dasselbe, als MN : AB = mn : ab — Denn wegen der ähnlichen Dreyecke MAB, mab, und NAB, nab, ist dort < MAB = mab, hier < NAB = nab, also < MAN = man. Ferner ist MA : AB = ma : ab, und AB : AN = ab : an. Folglich MA : AN = ma : an; also ist △ MAN nämlich dem man (77). Daher ist MN : AM = mn : am. Weil aber auch AM : AB = am : ab, so ist MN : AB = mn : ab.

Dieser Beweis kann für jede der andern Seiten eben so geführt werden.

89. Die Linie mn macht mit den Linien ma, mb &c. wie auch mit na, nb &c. dieselben Winkel, welche MN mit den gleichnahmigen Linien macht. Denn die Dreyecke MAN, MBN &c. sind den Dreyecken man, mbn, ähnlich (88).

90. Dieses giebt ein, besonders auf dem Felde, bequemes Mittel, eine Figur zu verzeichnen, die einer vorgegebenen ähnlich ist. Man nehme in der letztern wie ABCD, zwey Puncte M, N, nach Belieben, ziehe nach allen Ecken der Figur Linien, wie MA, Na; nehme ein paar Puncte m, n in beliebiger Entfernung mn, und lege an m die Linie ma, mb &c. an n die Linien na,

nb, &c. unter denselben Winkeln wie in der Figur ABCD. Die Durchschnittspuncte der Linien wie ma und na; mb und nb u. s. f. geben die Winkelpuncte der zu zeichnenden Figur. Denn die Dreyecke man, mbn &c. sind den Dreyecken MAN, MBN &c. ähnlich; folglich verhalten sich die Linien ma, mb u. s. f. nach der Reihe zu mn wie MA, MB &c. zu MN, daher auch ma, mb &c. zu MA, MB u. s. f. nach der Ordnung paarweise einerley Verhältniß haben. Also sind die Figuren ähnlich wie in (86).

V. Vergleichung der geradlinichten Figuren.

91. Parallelogramme von einerley Grundlinie, die zwischen denselben Parallelen enthalten sind, sind gleich, wie ABCD und ABEF (Fig. 24), die auf derselben Grundlinie AB stehen, und zwischen denselben Parallelen AB und DF enthalten sind — Denn in den Dreyecken ADF, BCE ist $AD = BC$; $AF = BE$, und $< DAF = CBE$, weil jeder derselben dem Winkel AGB, bey dem Durchschnitt der Linien AF, BC gleich ist. Folglich ist $\triangle DAF = CBE$ (33). Man nehme von beyden das Dreyeck CGF ab, und setze das Dreyeck AGB hinzu, so behält man gleiches, und zwar die Parallelogrammen ABCD, ABEF.

92. Dreyecke, die wie ABC, ABE (Fig. 24) einerley Grundlinie AB haben, und deren der Grundlinie gegen über liegende Spitzen in dieselbe Parallele CE mit der Grundlinie fallen, sind gleich — Denn man vollende aus ihnen die Parallelogramme ABCD, ABEF, indem man mit zwey Seiten derselben Parallelen durch die Endpuncte der dritten Seite zieht. Diese Parallelogram-

grammen sind doppelt so groß als die Dreyecke, also sind diese gleich, wie die Parallelogrammen.

93. Den Abstand der parallelen Seiten eines Parallelogramms nennt man dessen Höhe. Dieser Abstand ist nach (59) das Perpendikel von einem Puncte der einen von diesen Seiten auf die gegen über stehende, welche, wenn es nöthig ist, verlängert wird. So ist EH in der Fig. 24. die Höhe des Parallelogramms, ABEF. Die Grundlinie ist AB. Es ist gleichgültig, welche von beyden Seiten man zur Grundlinie nimmt.

In einem Dreyecke ist eine der Seiten die Grundlinie, und das Perpendikel von der gegen über liegenden Spitze auf die, nöthigen Falls verlängerte Grundlinie ist die Höhe, wie EH von dem Dreyecke ABE die Höhe ist.

94. Die beyden Sätze (91. 92) pflegen so ausgedrückt zu werden: Parallelogrammen und Dreyecke, die einerley Grundlinie und Höhe haben, sind gleich.

95. Parallelogrammen (Fig. 25) die einerley Höhe haben, wie ABCD und AEFD, verhalten sich wie ihre Grundlinien AB, AE — Man theile AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte die Parallelen mit den Seiten BC, AD. Durch diese zerfällt das Parallelogramm in so viel gleiche Theile als AB enthält. Fällt ein Theilungspunct in E, so fallen auf AEFD so viel Theile als auf AE, also ist AB : AE = Pgr. AC : Pgr. AF. Fällt in E kein Theilungspunct, oder ist es gar nicht möglich durch eine Veränderung der Eintheilung einen genau messenden Theil von AE zu finden, so wird, wie in (68) erwiesen, daß dennoch jene Proportion gelte. Es können nämlich auf das Pgr. AF weder mehr noch weniger Theile fallen, als auf AE.

96. Eben dieser Satz gilt auch von Dreyecken als den Hälften der Parallelogrammen, die mit ihnen einerley Grundlinie und Höhe haben.

97. Parallelogrammen und Dreyecke, die einerley Grundlinie haben, verhalten sich wie ihre Höhen. — Bey Rechtecken ist es gleichgültig, welche Seite man als die Grundlinie und welche man als die Höhe ansehen will. Sie verhalten sich also, wenn eine Seite dieselbe ist, wie die ungleichen Seiten, man mag diese die Grundlinie oder die Höhe zu nennen veranlaßt werden. Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, dessen Seiten die Grundlinie und Höhe des Parallelogramms sind. Sie verhalten sich also wie die Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind. Eben dieses gilt von den Dreyecken, als den Hälften der Parallelogrammen, die mit ihnen einerley Grundlinie und Höhe haben.

98. Wenn man zwey Proportionen hat, wie folgende,

$$m : n = A : B$$
$$p : q = B : C$$

so sagt man, daß das Verhältniß A : C aus den Verhältnissen m : n und p : q zusammengesetzt werde. Werden die durch m, n, p, q allgemein bezeichneten Größen durch Zahlen ausgedrückt, so verhält sich A zu C wie das Product m mahl p zu dem Producte n mahl q. Denn B entsteht aus A durch die Multiplication mit n und Division mit m; aus B entsteht C durch die Multiplication mit q und Division mit p; also C aus A durch die Multiplication mit n mahl q und Division mit m mahl p, das ist, es verhält sich m mahl p, als der Divisor, zu n mahl q, als dem Multiplicator, wie A zu C, oder es ist $m.p : n.q = A : C$, (vergl. Arithm. 97).

99. Das Verhältniß zweyer Parallelogrammen von ungleichen Grundlinien und Höhen, wie ABCD und BEFG (Fig. 26) wird aus dem Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen zusammengesetzt. Oder sie verhalten sich wie die Producte der Zahlen, wodurch ihre Grundlinien und Höhen ausgedrückt werden.

Man verwandle das Parallelogramm ABCD in das Rechteck ABHI, das BEFG in das Rechteck BEKL, und zeichne über BE das Rechteck BEMH, dessen Höhe der Höhe des Rechtecks AH gleich ist. Nun ist

AB : BE = Rechteck AH : Rechteck BM
BH : BL = Rechteck BM : Rechteck BK

Also wird das Verhältniß der Rechtecke AH und BK zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Grundlinien AB : BE und der Höhen BH : BL (98) oder sie verhalten sich wie die Producte der Zahlen, wodurch die Grundlinien und Höhen ausgedrückt werden (98). So verhalten sich daher auch die ihnen gleichen Parallelogrammen ABCD und BEGF.

100. Von den Dreyecken gilt dasselbe, was in (99) von den Parallelogrammen erwiesen ist.

101. Zur Berechnung der Parallelogrammen und Dreyecke nimmt man das Quadrat der Einheit für die Längen, durch welche die Grundlinien und Höhen ausgedrückt werden, zur Einheit an. So vielmahl das Product aus der Grundlinie in die Höhe Eins enthält, so oft ist dieses Quadrat in dem Parallelogramm enthalten. Das Quadrat verhält sich zu dem Parallelogramm wie das Product aus den beyden gleichen Seiten jenes zu dem Product aus der Grundlinie in die Höhe dieses. Jenes Product ist Eins. Nimmt man nun das Quadrat als Einheit für die Flächen an, so wird das Parallelogramm schlechtweg durch das Product aus der Grundlinie in die

Höhe ausgedrückt. Ein Quadrat wird ausgedrückt durch das Quadrat der Zahl der Theile, welche in der Seite enthalten sind, und diese Seite durch die Wurzel aus der Zahl der Theile in dem Quadrate.

102. Zur mehrern Erläuterung betrachte man das Rechteck ABCD (Fig. 27) worinn die Grundlinie 9 Theile, die Höhe 4 Theile hat. Das Quadrat Abcd von einem solchen Theile ist die Einheit zur Ausmessung des Rechtecks. Der Streifen ABed enthält 9 Quadrate. Dieser Streifen ist 4 mahl in dem Rechtecke enthalten, also enthält das Rechteck 4 mahl 9 oder 36 Quadrate wie Abcd.

103. Ein Dreyeck, als die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat, wird ausgedrückt durch das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe.

104. Ein Trapezium ABCD (Fig. 28) zerfällt durch die Diagonale CB in zwey Dreyecke, die gleiche Höhe CE, BF haben, weil die Abstände der parallelen Seiten AB, CD oder die Perpendikel CE, BF gleich sind (59). Daher wird ein Trapezium ausgedrückt durch das halbe Product aus der Summe der Grundlinien AB und CD in die gemeinschaftliche Höhe CE.

105. Eine vielseitige Figur wie das Fünfeck (Fig. 17) auszurechnen, zerfälle man sie in Dreyecke, rechne jedes Dreyeck aus, und addire die einzelnen Producte.

Oder man zerfälle sie, wie (Fig. 29) in Trapezia, indem man durch jede Ecke mit einer der Seiten, AB, Parallelen zieht, und berechne jedes Trapezium nach (104). Hiebey ist die Bequemlichkeit, daß man nur ein Perpendikel EG ziehen darf; noch mehr aber, daß man sich der berechneten Stücke bedienen kann, um die Figur, wenn sie z. E. ein Stück Land ist, in gewisse vorgeschrie-

geschriebene Theile zu theilen, die durch zwey parallele Linien begrenzt werden.

106. Die Längen mißt man durch Fuße, Zolle, Linien und Zehntheile von Linien, und durch Klafter, Ruthen, Meilen. Ein Fuß pflegt die gewöhnliche Länge eines menschlichen Fußes etwas zu übertreffen. Jedes Land hat seine eigene Fußmaaße. Ein Fuß enthält 12 Zoll (oder Daumenbreiten), ein Zoll 12 Linien. Bequemer ist es, dem Fuße 10 Zoll, dem Zoll 10 Linien zu geben. Ein Klafter ist 6 Fuß, etwa die Länge eines gutgewachsenen Menschen; eine Ruthe gewöhnlich 12 Fuß, auch wohl 16 Fuß, am bequemsten 10 Fuß. Eine Meile ist von sehr verschiedener Größe; eine geographische oder deutsche Meile, deren 15 auf einen Grad des Meridians gehen, enthält 23641 rheinländische Fuß. (Astron. 85).

107. Das Quadrat eines Fußes ist ein Quadratfuß, eines Zolles ein Quadratzoll, einer Meile eine Quadratmeile. Nach dem Decimalmaaße hält ein Quadratfuß 100 Quadratzolle oder 10000 Quadratlinien; eine Quadratruthe 100 Quadratfuß. Nach dem Duodecimalmaaße enthält ein Quadratfuß 144 Quadratzoll oder 20736 (d. i. 144 mahl 144) Quadratlinien.

Man bezeichnet die Fuße durch $(')$, die Zolle durch $('')$, die Linien durch $(''')$, die Ruthen durch $(^{\circ})$, z. E. $53^{\circ}\ 7'\ 8''\ 3'''$. Bey dem Flächenmaaße setzt man ein $\square$ hinzu; z. E. $53^{\circ}\ 67'\ 128''\ \square$.

108. Ein Dreyeck ABC (Fig. 30) in ein Parallelogramm zu verwandeln, ziehe man AD parallel mit BC, und CD parallel mit AB, theile AB in E in zwey gleiche Theile (47), ziehe EF parallel mit BC, so ist das Parallelogramm AEFD gleich dem Dreyecke ABC (55 und 96).

109. Ein Parallelogramm ABEF (Fig. 24) in ein anderes ihm gleiches ABCD zu verwandeln, das einen

nen gegebenen Winkel DAB aber noch dieselbe Grundlinie AB hat, ziehe man BC parallel mit AD, und verlängere EF bis an AD, so ist das Parallelogramm ABCD dem ABEF gleich (91).

Ist < DAB ein Rechter, so ist das Parallelogramm in ein Rechteck verwandelt.

110. In dem Parallelogramm ABCD (Fig. 31) ziehe man die Diagonale AC, und durch irgend einen Punct F derselben die Parallelen EH, IG mit den Seiten, so sind die Parallelogrammen EG, IH, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich — Denn es sind gleich die Dreyecke ACD, ACB; ferner FGC, FHC, wie auch AEF, AIF. Man ziehe FGC und AEF von ACD, so wie FHC und AIF von ACB ab, so bleibt gleiches übrig, nämlich die Parallelogrammen EG, IH.

111. Wegen der ähnlichen Dreyecke AIF, ABC ist AI : IF = FH : CH (76) oder AI : FH = IF : CH. Es ist aber AI = EF und CH = FG, also EF : FH = IF : GF; folglich sind von gleichwinklichten und gleichen Parallelogrammen die Seiten des einen die mittlern Proportionallinien zwischen den Seiten des andern. Und, sind die Seiten eines Parallelogramms die mittlern Proportionallinien zwischen den Seiten eines andern ihm gleichwinklichten, so sind die Parallelogrammen gleich.

Sind EG und IH Rechtecke, so verhalten sich in diesen gleichen Rechtecken die Grundlinien AI und FH umgekehrt wie die Höhen CH und IF.

Die Producte aus den Grundlinien in die Höhen sind nämlich gleich, wenn die Grundlinie des einen Parallelogramms so vielmahl kleiner ist als die Grundlinie des andern, so vielmahl des erstern Höhe größer ist, als

die

die Höhe des andern, oder wenn sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen verhalten.

112. Ueberhaupt, wenn die beyden Verhältnisse, woraus das Verhältniß zweyer Größen zusammengesetzt wird, einander umgekehrt genommen gleich sind, so entspringt daraus das Verhältniß der Gleichheit.

113. Ein Parallelogramm EFGD (Fig. 31) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite FH hat, verlängere man DG, bis GC=FH; ziehe durch F die Linie CFA bis an die verlängerte DE in A, darauf CB und AB jene mit AD, diese mit DC parallel, und endlich FI und FH als Verlängerungen von FG und FE. So ist das Parallelogramm IBHF dem EFGD gleich.

Diesem Parallelogramm kann man darauf jeden beliebigen Winkel geben (109), z. E. einen Rechten, und es in ein Rechteck verwandeln.

114. Dreyecke verwandelt man auf dieselbe Art in andere, die eine gegebene Seite haben.

115. Das Quadrat BCML der Hypothenuse BC eines rechtwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 32) ist so groß als die Summe der Quadrate BAED und ACGF von den Katheten BA CA.

Man verlängere die Seiten DE und GF der Quadrate von den Katheten, bis sie sich in H schneiden, ziehe in dem dadurch entstandenen Rechtecke AEHF die Diagonale HA, und verlängere sie bis an BC in K; ziehe mit dieser die Parallelen BL, CM, deren jene die Linie DH in L, diese die GH in M schneide, und ziehe noch LM. Zuerst ist zu beweisen, daß die Figur BCML ein Quadrat sey; zweytens daß es der Summe der Quadrate BAED, ACGF gleich ist.

I. Die Parallelen BL und AH zwischen den Parallelen LH und BA sind gleich (54), eben so die Paralle-

len

len CM und AH zwischen den Parallelen AC, HM. Es sind also BL und CM sich gleich, auch parallel (30), daher ist BCML ein Parallelogramm (56). Ferner ist das rechtwinklichte Dreyeck AEH oder AFH = △ BAC, weil AE = AB, und EH = AF = AC. Folglich ist LB oder CM = AH = BC = LM, und das Parallelogramm BCML ist gleichseitig. Weiter ist ∠ LBA = LHA (54. II); aber ∠ LHA oder EHA = BCA, also LBA = BCA. Da nun ABC + BCA = R, so ist LBC = R, und das gleichseitige Parallelogramm BCML ist rechtwinklicht (29. nr. 3) also ein Quadrat.

II. Das Quadrat BAED = Parallgrm BAHL (96), und dieses ist gleich dem Rechtecke BLKI, welches dieselbe Grundlinie BL und Höhe BK hat. Eben so ist das Quadrat ACGF = Parallgrm ACMH = Rechtecke CMIK. Die Summe der beyden Rechtecke ist das Quadrat BCML der Hypothenuse, welches also der Summe der Quadrate von den Katheten gleich ist.

116. Die Erfindung dieses wichtigen Satzes schreibt man dem Pythagoras zu, davon er auch der pythagoräische Lehrsatz heißt. Man hat mancherley Beweise desselben. Der, den Euklides gegeben hat, wird in den meisten Lehrbüchern angetroffen, weswegen ich ihn hier nicht wiederholen wollte. Nach der Methode des hier mitgetheilten Beweises kann der Satz noch viel allgemeiner gemacht werden.

117. Durch Hülfe dieses Lehrsatzes kann man Quadrate zu einander addiren und von einander subtrahiren. Setzt man die Seiten zweyer Quadrate, wie AB, AC rechtwinklicht zusammen, so giebt die Hypothenuse BC die Seite des Quadrats, welche so groß ist als die Summe jener beyden; zu diesem Quadrate kann man ein drittes u. s. f. addiren. Dadurch erhält man die Seiten der

Qua-

Quadrate, welche 1, 2, 3, 4 mahl u. s. f. so groß sind als ein gegebenes Quadrat. Dieses sey ABCD (Fig. 33). Man ziehe AM senkrecht auf AB, und nehme A1 = AB, ziehe B1 und mache A2 = B1; ferner A3 = B2; darauf A4 = B3; weiter A5 = B4 u. s. f. Der Maaßstab AM ist in der Visirkunst, oder in der Ausmessung der Fässer, von Nutzen.

Will man ein Quadrat von dem andern subtrahiren, so nehme man auf dem einen Schenkel des rechten Winkels BAC (Fig. 32) die Seite AC des kleinern Quadrats, beschreibe aus C mit der Seite des größern BC, einen Bogen, welcher auf dem andern Schenkel AB, die gesuchte Seite abschneidet.

118. In der Verzeichnung (Fig 33) ist B1 gleich der Wurzel aus 2; B2 der Wurzel aus 3; B3 der Wurzel aus 4; B4 der Wurzel aus 5 (102), u. s. w. für die Einheit AB. Die Geometrie stellt also Irrationalgrößen ohne Fehler, mit einemmahl dar, welche die Arithmetik nicht völlig genau angeben kann.

Zuweilen sind die Seiten und die Quadrate zugleich rational. Z. E. es sey (Fig. 32) AC = 3; AB = 4, so ist BC = 5. Denn 9 + 16 = 25, woraus die Wurzel 5 ist. Dieses giebt ein Mittel, auf dem Felde einen rechten Winkel geschwind und richtig zu zeichnen, oder auf der Zulage eines Zimmerwerkes einen Ständer senkrecht auf seinen Balken zu stellen.

119 Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten.

Es seyn (Fig. 34) die Dreyecke ABC, ADE ähnlich, indem DE parallel mit BC ist. Die Linie AFG sey senkrecht auf BC und daher auch auf DE (29), so ist BC : DE = AB : AD (71), wie auch AB : AD = AG : AF (68), folglich BC : DE = AG : AF, das ist, die Grundlinien verhalten sich wie die Höhen.

Nun

Nun verhalten sich die Dreyecke wie die Producte aus den Zahlen, wodurch ihre Grundlinien und Höhen ausgedrückt werden (100), also $\triangle ABC : \triangle ADE = BC \times AG : DE \times AF$. Das Verhältniß dieser Producte wird nicht geändert, wenn man statt der Factoren AG, AF die ihnen proportionalen BC, DE setzt, weil BC und DE jene aus AG, diese aus AF auf dieselbe Art durch die Multiplication und Division entstehen, folglich durch diese Vertauschung die beyden Producte mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt werden. Demnach ist $\triangle ABC : \triangle ADE = BC \times BC : DE \times DE$. Die Quadrate der Linien BC und DE verhalten sich auch wie $BC \times BC : DE \times DE$ (99), also die Dreyecke wie die Quadrate von BC und DE.

Statt BC und DE kann man aus eben dem Grunde die ihnen proportionalen AB und AD oder AC und AE setzen. Demnach verhalten sich die Dreyecke auch wie die Quadrate von AB und AD, oder von AC und AE.

120. Ueberhaupt, wenn

$$m : n = A : B$$
$$p : q = B : C$$

und zugleich $m : n = p : q$, so wird das Verhältniß A : C aus den gleichen Verhältnissen m : n und m : n (oder auch p : q und p : q) zusammengesetzt, oder ist das zweyfache, das duplicirte, von m : n (oder p : q). Oder: das Verhältniß A : C ist das Verhältniß der Quadrate von den Zahlen m und n (oder p und q) (98). Dieses ist der Fall bey ähnlichen Dreyecken und Parallelogrammen, in welchen die Verhältnisse der Höhen und Grundlinien, woraus das Verhältniß derselben zusammengesetzt wird (99. 101) gleich sind.

II. Wenn vier Zahlen m, n, p, q, proportional sind, so sind auch ihre Quadrate proportional. Das

Ver-

Verhältniß der Quadrate von m und n, oder p und q ist dasjenige, welches aus den Verhältnissen dieser Zahlen zusammengesetzt wird, folglich dasselbe. Daher ist es gleichgültig, welches Paar gleichnahmiger Seiten man in ähnlichen Dreyecken nimmt, um die Dreyecke mittelst derselben zu vergleichen.

121. Aehnliche geradlinichte Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten (der zwischen denselben Winkeln liegenden). — Die Figuren ABCDE, abcde (Fig. 17 und 17*) seyn ähnlich, so zerfallen sie in ähnliche Dreyecke (85). Diese Dreyecke, wenn man je zwey in der gehörigen Ordnung nimmt, wie ADC, adc, verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten DC : dc, oder auch wie die Quadrate von AB und ab, welche jenen proportional sind. Daher verhalten sich auch die ganzen Figuren wie die Quadrate von einem Paar gleichnahmiger Seiten wie AB und ab.

Nimmt man also eine Seite einer Figur 2, 3, 4 mahl größer, und verzeichnet über derselben eine ähnliche, so wird diese 4, 9, 16 mahl größer.

IV. Vom Kreise.

122. I) Ein Perpendikel CD (Fig. 35) aus eines Kreises Mittelpuncte C auf die Sehne AB halbirt sie. II) Eben dieses Perpendikel halbirt auch den Winkel ACB. III) Eine Linie, die aus dem Mittelpuncte durch die Mitte D der Sehne gezogen wird, steht auf sie senkrecht. IV) Eine Linie, die auf die Sehne durch ihre Mitte senkrecht gezogen wird, geht durch den Mittelpunct.

Der erste und zweyte Satz folgt aus (43), der dritte aus (42), der vierte erhellet daher, daß durch denselben

den Punct D einer Linie nicht zwey Perpendikel auf diese Linie gesetzt werden können.

123. Durch drey Puncte A, B, F, (Fig. 35) die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen, halbire man die Linien AB, BF, als Chorden des zu zeichnenden Kreises, jene in D, diese in G, und ziehe durch D und G die senkrechten DC, CG, (47, deren Durchschnitt C der gesuchte Mittelpunct ist — Den Grund dieses Verfahrens giebt (122. IV).

124. I. Gleiche Chorden AE, BE, (Fig. 35) gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte, und umgekehrt. II. Zu gleichen Chorden oder Winkeln am Mittelpuncte gehören gleiche Bogen und Sectoren, und umgekehrt.

Der erste Satz erhellt aus (43 und 33); der zweyte folgendergestalt. Man lege die gleichen Dreyecke ACE, BCE auf einander, den Punct A auf B, und E auf E, so müssen auch die Bogen AE, EB auf einander fallen, weil ihre Puncte alle gleichweit von C entfernt sind; folglich auch die Sectoren. Sind aber die Bogen gleich, so können die Winkel nicht ungleich seyn, weil sonst gleichen Winkeln ungleiche Bogen zugehören würden.

125. Einen Bogen AEB (Fig. 35) zu halbiren, theile man den Winkel desselben ACB in zwey gleiche Theile nach (48), oder fälle das Perpendikel CDE auf die Chorde AB.

126. Zwey Bogen eines Kreises wie AB, AD (Fig. 36) verhalten sich wie die dazu gehörigen Winkel ACB, ACD. — Denn man theile den Bogen AB durch die fortgesetzte Halbirung in eine Anzahl gleicher Theile, so wird dadurch der Winkel ACB in eben so viel gleiche Winkel getheilt. Fällt nun ein Theilungspunct in D, so enthält der Winkel ACD eben so viel gleiche Winkel als der Bogen AD Theile faßt. Folglich

ist

ist AB : AD = ∠ACB : ∠ACD — Fällt aber kein Theilungspunct in D, so kann man doch durch fortgesetzte Halbirung dem Puncte D so nahe kommen als man will, und es bleibt die Zahl, wodurch AD sowohl als ACD jene mittelst AB, diese mittelst ACB ausgedrückt wird, immer zwischen denselben Grenzen eingeschlossen, also muß sie dieselbe für beyde seyn, das ist, es entsteht AD aus AB wie ACD aus ACB.

Der Beweis in (68) kann hier auch angewendet werden.

127. Darum bedient man sich der Kreisbogen um Winkel dadurch auszudrücken. Der Umfang des Kreises wird in 360 Theile oder Grade eingetheilt, weil man in der ältesten Astronomie die Sonnenbahn am Himmel in so viel Theile getheilt hat, nach den 360 Tagen des ältesten Jahres, 30 Tage auf jeden der 12 Monate gerechnet. Ein rechter Winkel hält also 90 Grad. Ein Grad wird in 60 Minuten, eine Minute in 60 Secunden, eine Secunde in 60 Tertien eingetheilt. Die Grade bezeichnet man durch (°), die Minuten durch (′), die Secunden durch (″), die Tertien durch (‴). Z. Ex. 57° 17′ 44″ 48‴, die Größe eines Bogens, der so groß als der Halbmesser ist.

Es ist gleichgültig, wie groß man den Halbmesser nimmt. In einem größern Kreise sind die Grade größer, in einem kleinern kleiner, die Winkel zu derselben Anzahl von Graden, Minuten ꝛc. sind immer gleich. Der Transporteur ist ein in 180 Grade eingetheilter Halbkreis, der zur Messung und Absteckung der Winkel dient.

128. Eine Linie TAt (Fig. 37), welche auf dem Durchmesser AB durch desselben Endpunct A senkrecht steht, berührt den Kreis, d. i. sie hat ausser dem Puncte A keinen mit ihm gemein, und liegt ganz ausserhalb desselben — Denn man ziehe eine beliebige CD aus dem

Mittelpuncte an AT, so ist CD gröſser als CA, weil jene dem rechten Winkel A, diese dem spitzen D gegen über steht (40); also liegt D ausserhalb des Kreises.

129. Eine jede andere Linie AE durch A schneidet den Kreis noch einmahl in E, aber in nicht mehr Puncten als den beyden A, E. — Denn, da sie auf AC nicht senkrecht steht, so lasse man das Perpendikel CF auf AE, nehme FE = AF, so ist CE = AC (33), also ist E im Umfang des Kreises. Noch eine, dem Halbmesser gleiche Linie kann nicht an AE gezogen werden, weil auf jeder Seite von CF dasselbe rechtwinklichte Dreyeck nur einmahl möglich ist (43) — Daher steht eine berührende Linie nothwendig auf das Ende des Halbmessers senkrecht.

130. Ein **Winkel am Mittelpuncte** ist derjenige, dessen Spitze oder Scheitel in den Mittelpunct fällt; ein **Winkel an der Peripherie** ist derjenige, dessen Spitze in der Peripherie liegt.

131. Ein Winkel an der Peripherie ist halb so groß als der Winkel am Mittelpuncte, der mit ihm auf demselben Bogen steht. Es giebt hier drey Fälle (Fig. 38).

I. Der Mittelpunct C liege auf einem der Schenkel des Winkels an der Peripherie wie bey dem Winkel BAE. Man ziehe CB, so ist $\angle BCE = BAC + B = 2\,BAC$.

II. Der Mittelpunct falle zwischen die Schenkel des Winkels, wie bey BAD. Man ziehe BC, CD und durch C die Linie AE, so ist $\angle BCE = 2\,BAE$ und $DCE = 2\,EAD$, also $BCE + DCE = 2\,BAE + 2\,EAD$, das ist $BCD = 2\,BAD$.

III. Der Mittelpunct falle ausserhalb der Schenkel des Winkels wie bey FAB. Man ziehe die Halbmesser BC und FC ferner AE durch C, so ist $FCE = 2$

FAE

FAE; BCE = 2 BAE, also FCE — BCE = 2 FAE — 2 BAE das ist FCB = 2 FAB.

132. Wenn der Winkel an der Peripherie BAD (Fig. 39) auf dem Halbkreise BED steht, so ist er ein Rechter. — Denn man ziehe den Durchmesser ACE, so ist BCE = 2 BAE, und ECD = 2 EAD, also BCE + ECD = 2 BAE + 2 EAD; aber BCE + ECD = 2 R, also BAE + EAD = R.

133. Ein Winkel an der Peripherie, der in dem kleinern Abschnitte des Kreises enthalten ist, oder auf dem größern Theile des Umfanges steht, ist ein stumpfer; wenn er in dem größern Abschnitte enthalten ist; oder auf dem kleinern Theile des Umfanges steht, ein spitzer.

134. Ueber einer gegebenen Linie BD, als Hypothenuse (Fig. 39), ein rechtwinklichtes Dreyeck zu verzeichnen, beschreibe man über BD den Halbkreis BAD, so thut jeder Punct A des Umfanges der Aufgabe ein Genüge.

135. Zwischen zwey Linien BF, FD (Fig. 39) die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden, beschreibe man über der Summe beyder BD den Halbkreis BAD, setze durch F auf BD das Perpendikel AF, so ist AF die gesuchte Linie — Denn BAD ist ein bey A rechtwinklichtes Dreyeck, also BF : FA = FA : FD (83).

Oder wenn die beyden gegebenen Linien BD und BF sind, so beschreibe man über der größern BD den Halbkreis BAD, setze auf BD durch F die senkrechte AF, ziehe BA, so ist diese die gesuchte mittlere Proportionallinie zwischen BD und BF.

136. Das Quadrat von AF ist daher dem Rechtecke von den beyden Linien BF, FD gleich (111). Daraus erhellt, wie man ein Rechteck in ein Quadrat verwandeln könne.

137. Wenn zwey Chorden AB, CD (Fig. 40) sich innerhalb des Kreises in E schneiden, so sind die Segmente der einen die mittleren Proportionallinien zwischen den Segmenten der andern EA : EC = ED : EB.

Man ziehe CA, DB, so ist < ACD = ABD (131), und < AEC = BED, also die Dreyecke AEC, BED ähnlich, folglich EA : EC = ED : EB (80).

138. Schneiden sich die Chorden ausserhalb des Kreises (Fig. 41), so ist ebenfalls EA : EC = ED : EB — Denn man ziehe CA und DB, so sind in den Dreyecken EAC, EDB die Winkel C und B gleich, und E ist beyden gemein, also sind die Dreyecke ähnlich, woraus die Proportion folgt.

139. Wenn EC von EB weiter abwärts rücket, so wird zuletzt aus einer schneidenden Linie eine berührende EF, und die beyden Segmente werden sich gleich, daher EA : EF = EF : EB, welches sich auch unabhängig von (138) erweisen läßt.

140. Die Peripherie eines Kreises (Fig. 42) sey in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt, so sind die Chorden dieser gleichen Bogen gleich (124) und die Winkel dieser Chorden sind gleich, weil sie alle auf denselben Bogen stehen. Daraus entsteht ein regulaires Vieleck, das lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Zieht man nach dem Mittelpunkt O hin die Halbmesser AO, BO &c. so zerfällt dadurch das Vieleck in lauter gleichschenklichte und gleiche Dreyecke; die Halbmesser halbiren die Winkel der Chorden, und schliessen am Mittelpuncte gleiche Winkel ein.

Ist ABCDEF eine regulaire Figur, so läßt sie sich durch die Halbirung der gleichen Winkel A, B, &c. in so viel gleiche gleichschenklichte Dreyecke AOB, BOC &c. zerfällen, als Seiten da sind. Daher läßt sich aus

der

der gemeinschaftlichen Spitze O ein Kreis um das regulaire Vieleck beschreiben.

141. Der Winkel ABC oder BCD &c. heißt der Polygonwinkel, der Winkel AOB oder BOC &c. der Centriwinkel.

242. Der Polygonwinkel wird gefunden, wenn man die Zahl von zweymahl so viel rechten Winkeln, als Seiten da sind, um 4 vermindert, und den Rest durch die Zahl der Seiten dividirt (61); der Centriwinkel, wenn man vier Rechte durch die Zahl der Seiten dividirt.

143. Die Seite des Sechsecks (Fig. 42) ist dem Halbmesser des Kreises gleich. Denn der Polygonwinkel ABC ist 8 Rechten dividirt durch 6 gleich, das ist 120 Grad, die Hälfte desselben ABO ist 60 Gr. So groß ist auch der Centriwinkel AOB, daher ist das Dreyeck AOB, in welchem auch OAB = OBA ist, gleichseitig.

Hieraus läßt sich ein Sechseck sehr leicht in einem Kreise verzeichnen.

144. Ein gleichseitiges Dreyeck BDF (Fig. 42) in einem Kreise zu beschreiben, zeichne man zuerst das Sechseck ABCDEF, und verbinde darauf die Eckpuncte B und D, D und F, F und B durch gerade Linien.

Die Seite DB halbirt den Halbmesser OC und steht senkrecht auf demselben (45 und 47).

145. Ein regulaires Viereck in einem Kreise zu verzeichnen, setze man zwey Durchmesser senkrecht auf einander, und verbinde die Endpuncte derselben durch gerade Linien.

146. Ein regulaires Fünfeck ABCDE (Fig. 43) in einem Kreise zu beschreiben, setze man auf den Durchmesser AI den Halbmesser OG senkrecht, halbire AO in F, ziehe FG, und nehme FG = FH, ziehe hierauf GH,

GH, so ist GH die Seite des Fünfecks — Der Beweis läßt sich hier nicht geben.

147. Der Centriwinkel des Funfzehnecks ist 24 Grad, dessen gedoppeltes, 48 Grad, der Unterschied der Centriwinkel des Dreyecks und des Fünfecks ist, woraus sich also, wenn man diesen Unterschied halbirt, das Funfzehneck verzeichnen läßt.

148. Durch die fortgesetzte Halbirung des Centriwinkels erhält man aus der Seite des Sechsecks die des Zwölfecks, des Vierundzwanzigecks, u. s. f. aus der Seite des Vierecks die des Achtecks, des Sechszehnecks u. s. f. aus der Seite des Fünfecks die des Zehnecks, des Zwanzigecks, u. s. f. aus der Seite des Funfzehnecks die des Dreyssigecks, des Sechszigecks u. s. f. Ausser diesen Vielecken kann man keine geometrisch verzeichnen, sondern nur mechanisch.

149. Ueber einer gegebenen Seite ein Vieleck von einer gewissen Anzahl Seiten zu beschreiben, verzeichne man erst in einem beliebigen Kreise ein solches Vieleck, trage aus diesem den halben Polygonwinkel an die Endpuncte der gegebenen Seite, so entsteht ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Schenkel der Halbmesser des Kreises sind, in welchem die gegebene Seite sich so oft herumtragen läßt, als das Vieleck Seiten haben soll.

150. Man kann eben dieses mit dem Transporteur oder irgend einem Winkelmesser praktisch verrichten, oder man berechnet auch die Größe der Seite aus dem Halbmesser, und diesen aus jener, um dadurch die Vielecke mittelst eines Maaßstabes verzeichnen zu können. Dazu dient folgende Tafel.

Zahl

Zahl der Seiten	Centriwinkel	Polygonwinkel	Seite für den Halbmesser 10000	Halbmesser für die Seite 10000	Chorde des doppelten Bogens für die Polygonseite 10000
III	120°	60°	17320	5774	10000
IV	90	90	14142	7071	14142
V	72	108	11756	8507	16180
VI	60	120	10000	10000	17320
VII	$51\frac{3}{7}$	$128\frac{4}{7}$	8678	11524	18019
VIII	45	135	7654	13066	18477
IX	40	140	6840	14619	18794
X	36	144	6180	16180	19021
XI	$32\frac{8}{11}$	$147\frac{3}{11}$	5635	17747	19190
XII	30	150	5176	19318	19318

Z. E. Man wollte in einem Kreise ein Siebeneck zeichnen, so sage man, wie 10000 zu 8678, so der gegebene Halbmesser zu der Seite des Siebenecks. Sie ist sehr nahe der Hälfte der Seite des Dreyecks. Oder sucht man den Halbmesser, so sage man, wie 10000 zu 11524, so die gegebene Seite zu dem Halbmesser. Oder man zeichnet ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Schenkel und Grundlinie das Verhältniß 10000 zu 18019 (oder abgekürzt, 100 zu 180) haben, so hat man den Polygonwinkel zwischen den Schenkeln des Dreyecks. Diese letztere Methode ist insbesondere auf dem Felde bey Anlegung von Schanzen brauchbar.

151. Regulaire Figuren von gleicher Anzahl Seiten sind ähnliche Figuren (74). Die Seiten verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise, in welche sie eingeschrieben sind, wegen der ähnlichen Dreyecke, worinn sie zerfallen. Also verhalten sich auch die Umfänge, als gleiche Vielfa-

che dieser Seiten, wie die Halbmesser oder Durchmesser der umschriebenen Kreise — Die Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Seiten oder der Halbmesser (121).

152. Je größer die Anzahl der Seiten, desto mehr nähert sich der Umfang des Vielecks dem umschriebenen Kreise. Das Verhältniß der Umfänge der Vielecke nähert sich also immer mehr dem Verhältnisse der Umfänge der Kreise, daher verhalten sich die Umfänge der Kreise wie die Halbmesser oder Durchmesser.

153. Der Inhalt eines der Dreyecke, worinn ein regulaires Vieleck aus dem Mittelpunkt getheilt wird, wird ausgedrückt durch das halbe Product aus der Grundfläche oder der Seite des Vielecks in die Höhe, oder in das Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seite des Vielecks (103), wie in Fig. 42 das Dreyeck AOB durch das halbe Product aus AB in OK; das ganze Vieleck folglich durch das halbe Product aus dem Umfange in das gedachte Perpendikel. Je größer die Anzahl der Seiten wird, desto mehr nähert sich der Umfang des Vielecks dem Umfange des Kreises und das Perpendikel dem Halbmesser; also nähert sich der Inhalt des Vielecks immer mehr dem halben Product aus dem Umfange des Kreises in den Halbmesser. Es nähert sich aber auch immer mehr dem umschriebenen Kreise. Also muß die Kreisfläche durch jene Grenze, das halbe Product aus dem Umfange in den Halbmesser, ausgedrückt werden.

Oder: der Kreis ist gleich einem Dreyecke, dessen Grundfläche der Umfang, die Höhe der Halbmesser ist.

153. a. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser, eben so wie die eingeschriebenen regulairen Vielecke, wovon sie die Grenzen sind.

154. Könnte man den Umfang des Kreises in eine gerade Linie geometrisch genau verwandeln, so könnte man

man die Kreisfläche in ein Dreyeck, das Dreyeck in ein Parallelogramm (108), und dieses in ein Quadrat (136) verwandeln. Solchergestalt hätte man die Quadratur des Kreises, ein Problem, worüber viele zu Narren geworden sind. Aber geometrisch genau läßt sich der Kreiß nicht rectificiren; arithmetisch inzwischen so genau als man es nur je verlangen mag. Der erste, welcher den Umfang des Kreises berechnet hat, der scharfsinnige Archimedes, verfuhr so, daß er den Umfang sowohl eines in den Kreis eingeschriebenen Sechsundneunzigecks, als eines um den Kreis beschriebenen, das mit seinen Seiten den Kreis berührt, berechnete. Dieses ist durch Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes möglich. Nun ist jener Umfang kleiner als der Umfang des Kreises, dieser ist größer. Er fand also zwey, aber noch ziemlich entfernte Grenzen für den Umfang des Kreises, nämlich $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$, wenn der Durchmesser Eins ist, das ist, 1561 und 1562, wenn der Durchmesser 497 Theile hat. Die erste liegt dem Kreise näher. Man nimmt in gemeinen Rechnungen das Verhältniß 7 : 22 oder das etwas genauere 100 : 314. Will man es noch genauer haben, so nehme man das 113 : 355, wobey der Fehler nur etwa $\frac{1}{4}$ eines Milliontheilchens des Durchmessers zuviel beträgt. Noch genauer ist es 1 : 3,141592653589, oder auch, 0,318309886183 : 1, welches nützlich ist, wenn man den Durchmesser aus dem Umfange sehr genau sucht. In beyden nimmt man so viel Zifern, als nach dem Maaße der Genauigkeit nöthig sind.

Man hat die Berechnung des Umfanges unglaublich weit getrieben, bis auf 127 Decimalstellen für den Halbmesser Eins, das ist, bis auf einen Bruch, dessen Zähler eine einzelne Zifer, der Nenner eine Eins mit 127 Nullen ist, dieses würde gewiß zureichen, einen Kreis, auf dessen Durchmesser eine abgeschossene Kanonenkugel mit unverän-

veränderter Geschwindigkeit mehrere Jahrtausende zubrächte, ohne einen Fehler eines Zolles zu berechnen. Die einfältigen Quadraturkrämer wissen es gar nicht, wie genau der Umfang des Kreises berechnet ist.

155. Nimmt man den Durchmesser zur Einheit, so wird die Kreisfläche ausgedrückt durch das Product aus dem vierten Theil desselben in den Umfang (153), das Quadrat des Durchmessers aber durch Eins. Daher verhält sich dieses zu jenem wie 1 zu 0,785 oder 1000 : 785, wenn man sich mit dem Verhältniß 100 : 314 für den Durchmesser und den Umfang begnügt. Genauer aber 452 : 355. Das Verhältniß 9 : 7 oder 14 : 11 kann man in gemeinen Rechnungen auch gebrauchen. Z. E. der Durchmesser halte 274 Fuß, so ist die Peripherie 860 F. 8 Zoll decim. als die vierte Proportionalzahl zu 113, 355 und 274; die Kreisfläche 58964 Quadratfuß, als die vierte Proportionalzahl zu 452, 355 und 75076, dem Quadrat von 274.

VI. Die Stereometrie, oder Ausmessung der Körper.

156. Durch eine gerade Linie AB (Fig. 44) kann man unzählig viel Ebenen, wie ABDC, ABFE legen. Nimmt man einen dritten Punct C ausser der unbegrenzten Linie AB an, so ist dadurch die Lage der Ebene ABCD bestimmt.

157. Zwey Ebenen, die einander schneiden, schneiden sich in einer geraden Linie. Denn geschähe es ja in einer krummen, so könnte man auf derselben drey Puncte nehmen, die nicht in gerader Linie sind, und durch diese drey Puncte würden zwey verschiedene Ebenen gehen, wider (156).

158.

158. Der Winkel, den zwey Ebenen ABCD, ABEF (Fig. 44) mit einander machen, wird gemessen durch den Winkel EAC zweyer Linien CA, EA, die auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt AB senkrecht gezogen sind. Es ist einerley, wo man diese Perpendikel zieht. Die in B auf AB senkrecht gezogenen DB, FB machen denselben Winkel wie die in A. Eine Ebene ist so gleichförmig ausgedehnt, daß parallele Streifen auf derselben einerley Lage gegen einander haben.

159. Ist der Winkel der beyden auf den Durchschnitt zweyer Ebenen gefällten Perpendikel ein Rechter, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander.

160. Eine Linie ist gegen eine Ebene geneigt, wenn sie mit irgend einer Linie in dieser Ebene einen schiefen Winkel macht. So ist (Fig. 44) EA gegen ABCD geneigt, weil sie mit CA einen spitzen Winkel EAC macht — Den Neigungswinkel mißt man auf folgende Art. Es sey in der Ebene die Linie BA senkrecht auf AE, und CA senkrecht auf BA, so ist EAC der Neigungswinkel.

161. Ist dieser Neigungswinkel EAC (Fig. 45) ein Rechter, so steht EA senkrecht auf die Ebene ABCD, das ist, sie macht mit jeder Linie AD, die auf dieser Ebene durch A gezogen wird, einen rechten Winkel EAD. Wäre sie gegen AD geneigt, so müßte sie entweder gegen AB oder AC oder gegen beyde auch geneigt seyn — Nicht allein aber, wenn eine Linie auf zwey in einer Ebene sich senkrecht schneidende Linien senkrecht ist, steht dieselbe auf diese Ebene senkrecht, sondern auch, wenn sie auf irgend zwey Linien, wie AC, AD in einer Ebene senkrecht steht.

162. Jede Ebene, die durch AE, eine auf ABCD senkrechte Linie geht (Fig. 45), steht senkrecht auf diese Ebene (159). Und, wenn zwey auf eine dritte Ebene

ABCD

ABCD senkrechte Ebenen ABEF, AEDG sich in AE schneiden, so steht diese AE auf jene ABCD senkrecht. Sie hat alsdenn keine Neigung weder gegen die auf AB senkrechte AC, noch gegen die auf AD senkrechte AH.

163. Eine Linie ist parallel mit einer Ebene, wenn sie, so weit sie auch verlängert wird, diese Ebene nicht trift. Sie kann sie nicht treffen, wenn sie mit irgend einer Linie in derselben parallel ist.

164. Eine Linie AB (Fig. 46) ist parallel mit der Ebene CDEF. Man lege durch sie zwey Ebenen ABGH, ABIK, welche jene in GH, IK schneiden, so sind GH und IK unter sich und mit AB parallel — Denn da AB mit der Ebene CDEF parallel ist, so schneidet sie die Linien GH, IK nicht, und liegt mit jener in derselben Ebene AH, mit dieser in der Ebene AK, ist also beyden parallel. Daher ist GH der Ebene AK parallel (163), schneidet also auch nicht die Linie IK, die zugleich in der Ebene CDEF liegt; folglich sind GH und IK parallel.

165. Wenn zwey Linien GH, IK (Fig. 46) einer dritten AB parallel sind, so sind sie einander selbst parallel. — Denn man lege durch GH und durch einen Punct I der andern IK eine Ebene CDEF. In diese mit AB parallele Ebene muß die Linie IK fallen, weil sonst zwey Parallelen durch I mit AB statt finden müßten. Folglich ist GH mit der Ebene AK, also auch mit der Linie IK parallel.

166. Zwey Linien EA, FB (Fig. 45) die auf dieselbe Ebene ABCD senkrecht stehen, sind einander parallel. Denn die Ebene, welche durch jede derselben und durch AB gelegt wird, steht senkrecht auf ABCD (162). Es kann aber nicht mehr als eine Ebene durch AB auf ABCD senkrecht stehen; da also AE, BF in derselben Ebene auf AB senkrecht stehen, so sind sie

paral-

parallel — Daher, wenn von zwey Parallelen eine senkrecht auf eine Ebene steht, so steht die andere auch darauf senkrecht.

167. Wenn zwey Ebenen, wie ABCD, ABEF (Fig. 47) einander schneiden, so steht eine Linie, die auf eine derselben senkrecht ist, nicht auf die andere zugleich senkrecht — Denn es sey von irgend einem Puncte E der letztern auf die erstere das Perpendikel EG herabgelassen. In dem Durchschnitte der Ebenen AB nehme man irgend einen Punct H, ziehe EH und GH, so ist das Dreyeck EGH bey G rechtwinklicht, weil EG senkrecht auf die Ebene ABCD ist, folglich ist EG gegen HE unter einem spitzen Winkel geneigt, also auch gegen die Ebene ABFE.

168. Steht eine Linie auf zwey Ebenen senkrecht, so sind diese parallel oder schneiden sich nicht.

169. Wenn die Linien DE, DF (Fig. 48) jene der AB, diese der AC in einer andern Ebene parallel sind, und diese letztern sich in A schneiden, so sind die Ebenen EDF, BAC parallel. — Denn wenn sie sich schneiden sollten, so müßte es in einer Linie geschehen, die sowohl mit BA als mit CA parallel wäre (164), welches unmöglich ist.

170. Der Winkel EDF jener Linien ist dem BAC gleich — Man nehme DE = AB und DF = AC, ziehe auch BC und EF: so ist BADE ein Parallelogramm, wegen der gleichen Parallelen AB, ED, desgleichen DACF. Folglich sind EB, CF gleich, weil sie der DA gleich sind, auch parallel, weil sie dieser DA parallel sind (165); also ist EBCF ein Parallelogramm, daher EF = BC, folglich das Dreyeck BAC = EDF (42) und der Winkel BAC = FDF.

171. Der Körper ABCFDE ist ein dreyecktes Prisma, das zwischen zwey gleichen und parallelen Dreyecken

ecken als Grundflächen, und drey Parallelogrammen als Seitenflächen eingeschlossen ist. Die Seiten der Parallelogrammen heißen die Seitenlinien des Prisma.

172. Ein Prisma ist ein Körper, der zwischen zwey gleichen und ähnlichen geradlinichten sich parallelen Figuren als Grundflächen, und so viel Parallelogrammen, als die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen ist. Nach der Anzahl der Seitenflächen benennt man die Prismen — Die Höhe eines Prisma ist das Perpendikel, welches von einer Grundfläche auf die andere gelassen wird.

173. Die Entstehungsart dieser Körper ist wie die eines dreyeckten Prisma. Nämlich durch eine Ecke der Grundfläche A setzt man eine Linie AD von beliebiger Größe unter einem beliebigen Winkel, zieht durch die andern Eckpuncte B, C mit AD die gleichen Parallelen BE, CF, so sind diese auch unter sich parallel (165). Die Seiten der obern Grundfläche sind denen in der untern, die zu demselben Parallelogramm gehören, gleich, und schliessen dieselben Winkel ein — Wo man also auch ein Prisma parallel mit der Grundfläche durchschneidet, da wird der Schnitt den Grundflächen gleich und ähnlich. Er ist die eine Grundfläche eines neuen Prisma.

174. Ein senkrechtes Prisma ist, wenn die Seitenlinien senkrecht auf die Grundflächen stehen. Wenn eine der Seitenlinien diese Lage hat, so haben sie alle dieselbe (166).

175. Wenn die Grundflächen Parallelogrammen sind, so ist das Prisma ein Parallelepipedum. Sind die Grundflächen sowohl als die Seitenflächen Quadrate, so ist der Körper ein Cubus oder Würfel. Seine Seitenlinien stehen auf die Grundflächen senkrecht (161). Der Würfel dient gewöhnlich zur Ausrechnung des körperlichen Inhalts. Zur Seite desselben wird die Länge ge-

genommen, welche zur Ausmessung der Linien gebraucht ist. Ist diese Länge ein Zoll, so heißt der Würfel, der zur Einheit für die Körper dient, ein Cubiczoll; ist jene ein Fuß, eine Ruthe, eine Meile, so heißt dieser ein Cubicfuß, eine Cubicruthe, eine Cubicmeile.

176. Es sey ABCDEFG (Fig. 29) ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grundflächen Rechtecke sind. Man theile die Höhe CA, und die Seiten CD, DF der einen Grundfläche in gleiche Theile, und führe durch die Theilungspuncte der Höhe parallele Schnitte mit den Grundflächen. Diese Schnitte sind sich alle gleich und ähnlich. Die Grundfläche wird durch die Parallelen, welche mit den Seitenlinien gezogen werden, in so viel Quadrate getheilt, als das Product der Zahlen, die die Seitenlinien ausdrücken, Eins enthält. Folglich sind eben so viel Würfel, deren Seite die angenommene Einheit für die Länge ist, in diesem Schnitte enthalten, und in allen Schnitten, oder in dem Parallelepipedum, so viel als das Product aus der Höhe in die beyden Seitenlinien der Grundfläche Eins enthält.

Z. E. die Seitenlinien der Grundfläche seyn 6 und 5 Zoll, die Höhe 5 Zoll, so ist der Inhalt des Körpers 150 Cubiczoll.

177. Man lasse die Grundfläche des Parallelepipedum (Fig. 49) und die Höhe unverändert, neige aber die Seitenlinien als AC, BD, GF gegen die Grundfläche, daß der Körper ABCDEFG (Fig. 50) entsteht, so ist dieser jenem dem Inhalte nach gleich. — Denn man verschiebe die Schnitte, worinn man jenes Parallelepipedum eingetheilt hat, alle auf gleiche Art, so entsteht daraus ein Körper mit Absätzen wie an einer Treppe, der dem Parallelepipedum gleich bleibt. Den Linien durch die Ecken der Stufen gebe man dieselbe Lage, wie den Seitenlinien des Parallelepipedum (Fig. 50). Vermehrt

man die Anzahl der Schnitte, so werden die Stufen immer schmäler und zuletzt verliert sich dieser treppenförmige Körper, der immer denselben Inhalt behält, in das Parallelepipedum (Fig. 50), welches daher dem rechtwinklichten (Fig. 49) gleich ist.

178. Man verwandle das Rechteck ABG, das dem Parallelepipedum (Fig. 50) zur Grundfläche dient, in jede andere beliebige geradlinichte Figur ABCDE (Fig. 51), errichte darüber ein Prisma von gleicher Höhe, dessen Seitenlinien dieselbe Lage gegen die Grundfläche haben, wie in (Fig. 50), so ist dieses Prisma dem Parallelepipedum gleich. Denn es enthält eben so viel gleich hohe Schnitte wie dieses, und auf der Grundfläche jedes Schnittes haben eben so viel gleiche Quadrate, wie in den Schnitten des Parallelepipedum Platz, folglich in den Schnitten beyder Körper gleich viel Würfel.

179. Also sind Prismen, die gleiche Grundflächen, (wenn sie auch krummlinicht sind) und gleiche Höhe haben, gleichen körperlichen Inhalts.

180. Jedes Prisma wird daher ausgedrückt durch das Product aus der Grundfläche in die Höhe, weil jedes senkrechte Parallelepipedum, dessen Grundflächen Rechtecke sind, durch dieses Product ausgedrückt wird (176), jedes Prisma aber in ein solches verwandelt werden kann, wenn man die Grundfläche in ein Rechteck verwandelt, und die Seitenlinien senkrecht auf die Grundfläche setzt, ohne die Höhe zu verändern. Man erinnere sich aber, daß bey dieser Multiplication einer Fläche in eine Linie die Fläche durch eine Zahl dargestellt wird, welche die darinn enthaltenen Quadrate angiebt, daß die Höhe ebenfalls eine bloße Zahl ist, und daß das Product also auch eine Zahl ist, welche anzeigt, wie vielmahl der zur Einheit angenommene Würfel in dem Körper stecke.

Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0122
DFG

181. Zwey Prismen, die einerley Grundfläche haben, verhalten sich wie ihre Höhen, nämlich wie die Anzahl der gleichen Schnitte. Haben sie einerley Höhe, so verhalten sie sich wie die Grundflächen, nämlich wie die Anzahl der gleichen Theile dieser Grundfläche. Sind Höhen und Flächen ungleich, so wird ihr Verhältniß zusammengesetzt aus dem Verhältnisse der Grundflächen und der Höhen wie in (99). Man bezeichne die Prismen durch P und p, ihre Grundflächen durch G, g, ihre Höhen durch H, h, und drücke G, g, H, h durch Zahlen aus, so ist $P : p = G \times H : g \times h$ (98). Ist nun p der angenommene Würfel, so ist $g = 1$ für die Flächen, $h = 1$ für die Längen, und $p = 1$ für die Körper, also $g \times h = 1$, und $P = G \times H$, wie in (180).

182. Aehnliche Prismen sind solche, deren Grundflächen ähnliche Figuren sind, deren Höhen sich wie die gleichnahmigen Seiten der Grundflächen verhalten, und deren Seitenlinien einerley Lage gegen die Grundfläche haben. So ist das rechtwinklichte Parallelepipedum abcdefg (Fig. 52) dem (Fig. 49) ähnlich. Die Seitenlinien sind hier zugleich die Höhen. Die Grundflächen, als ähnliche Figuren, verhalten sich wie die Quadrate der gleichnahmigen Seiten AB : ab (121) diese wie die Höhen AC : ac, also die Grundflächen auch wie die Quadrate der Höhen (120). Daher ist das zusammengesetzte Verhältniß der Grundflächen G : g und der Höhen H : h, das aus den Quadraten der Höhen H. H : h. h und den Höhen selbst H : h zusammengesetzte, oder das Verhältniß der Würfel von H und h (98). Z. E. wenn $AC = 2\,ac$, so ist das Parallelepipedum $AF = 8$ Parallelepipedum af. Wäre $AC = 3\,ac$, so wäre jenes 27 mahl so groß als dieses.

183. Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Körper wie die Würfel der an ihnen auf eine ähnliche Art gezogenen

Linien, als der gleichnahmigen Seiten ihrer Grundflächen oder der Höhen. Oder, sie stehen in dem triplicirten Verhältnisse dieser Linien (vergl. 120).

184. Würfel, als rechtwinklichte Parallelepipeda, deren Seiten gleich sind, verhalten sich wie die Cubi der Zahlen, wodurch die Seiten ausgedrückt werden. Z. E. Ein Fuß sey 10 Zoll, so ist 1 Cubicfuß = 1000 Cubiczoll. Hält jener 12 Zoll, so ist 1 Cubicfuß = 1728 Cub. Zoll. Eine Cubicruthe ist 4096 Cub. Fuß, wenn die Ruthe 16 Fuß hält. Eine Cubicmeile enthält 8 Billionen Cubicfuß, die Meile zu 20000 Fuß gerechnet. Alle Würfel sind ähnliche Körper.

185. Ein Cylinder oder eine Walze ist ein Körper, der zwischen zwey gleichen und parallelen Kreisen DEH, CFG (Fig. 53) und einer krummen an diese Kreise gelegten Fläche enthalten ist. Die Linie AB von dem Mittelpuncte des einen zu dem des andern heißt die Axe. Steht diese senkrecht auf die Grundflächen, so ist der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer. Die Linien DC, EF, welche durch einen Punct des Umfanges der Grundflächen parallel mit dieser Axe gezogen werden, fallen ganz in die krumme Oberfläche. Ist der Cylinder ein senkrechter, so kann man ihn durch die Umdrehung eines Rechtecks um eine Seitenlinie entstehen lassen.

186. Der Cylinder macht mit den Prismen ein Geschlecht aus. Die Grundflächen sind gleich und parallel. Die Seitenlinien, wie DC, EF, sind unzählig, alle sich parallel. Wenn man über einem regulairen Vielecke ein Prisma errichtet, und die Anzahl der Seiten immer fort vermehrt, so nähert es sich immer mehr einem Cylinder.

187. Ein Cylinder wird daher auch durch das Product aus der Basis oder Grundfläche in die Höhe ausgedrückt.

Z. E.

Z. E. Der Durchmesser der Grundfläche sey 8 Zoll, die Höhe 100 Zoll. So ist die Grundfläche 50,24 Quadratzoll (155), diese mit der Höhe multiplicirt giebt zum Inhalt 5024 Cubiczoll, das ist 5 Cub. Fuß, 24 Cub. Zoll Decimalmaaß.

188. Zum Ausmessen der Fässer (zum Visiren) auch bey Wasserkünsten bedient man sich eines Cylinders von bestimmtem Inhalte zur Einheit. Die Höhe wird auch zum Durchmesser genommen. Ein Berliner Quart oder Maaß halte 64,3 Cubiczoll Rheinl. Duodec. Maaß. Wie groß muß der Durchmesser eines gleich hohen und dicken Cylinders dieses Inhalts seyn? — Ich nenne diesen Durchmesser d, so ist 0,785 dd × d der Inhalt des Cylinders = 64,3. Folglich muß man 64,3 mit 0,785 dividiren, und aus dem Quotienten die Cubicwurzel ziehen. Der Quotient ist 81,91, und die Cubicwurzel 4,343 Zoll, der gesuchte Durchmesser oder die Höhe des Cylinders.

In so ferne man ein Faß als einen Cylinder betrachtet, messe man mit dieser Länge den Durchmesser des Bodens. Quadrirt man die Zahl, welche diesen Durchmesser ausdrückt, so hat man die Fläche des Bodens durch die Grundfläche des Cylinders ausgedrückt. Oder man bedient sich noch lieber des quadrirten Maaßstabes (117) wo man AB (Fig. 33) = 4,343 Zoll nimmt. Die gefundene Größe des Bodens multiplicirt man mit der Höhe des Fasses, so ist der Inhalt ohne die Ausbauchung, in Quartieren gefunden.

189. Wenn man von einem Puncte A ausser der Ebene einer Figur, wie BCDE (Fig. 54) an die Ecken derselben die geraden Linien AB, AC, &c. zieht, so entsteht dadurch eine **Pyramide** ein Körper, der zwischen den Dreyecken ABC, ACD &c. und der Grundfläche BCDE eingeschlossen ist. Die Pyramiden werden nach

der Anzahl der Seitenflächen benahmt, deren so viele sind als Seitenlinien in der Grundfläche — Das Perpendikel von der Spitze A auf die Grundfläche heißt die Höhe.

190. Wenn eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Schnitt der Grundfläche ähnlich — Der Schnitt sey bcde, so ist bc parallel mit BC, weil beyde in einer Ebene ABC liegen, und nicht zusammenstoßen, da die beyden Ebenen es nicht thun. Eben so ist cd parallel mit CD, und so ringsherum. Der Winkel bcd ist gleich dem BCD (170), und so die übrigen nach der Reihe. Es verhält sich ferner BC : bc = AC : ac (71), und CD : cd = AC : ac, also BC : bc = CD : cd oder BC : CD = bc : cd, und so rings herum. Folglich sind die Figuren BCDE, bcde ähnlich (74).

191. Es seyn AF, Af die Höhen beyder Pyramiden ABCD, abcd. Man ziehe FC, fc, so sind die Dreyecke AFC, Afc ähnlich, und AF : Af = AC : Ac = BC : bc, oder die Höhen verhalten sich wie zwey gleichnahmige Seiten der ähnlichen Grundflächen BCDE, bcdc.

192. Die ähnlichen Grundflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten (121), also auch wie die Quadrate der Höhen, da diese sich wie die gleichnahmigen Seiten der Schnitte verhalten (120. II.)

193. Man verwandle die Pyramide ABCDE (Fig. 54) in eine andere ABCDEF (Fig. 55), deren Grundfläche der Grundfläche jener in Absicht auf den Inhalt gleich ist, und gebe dieser dieselbe Höhe mit jener, so sind die Pyramiden gleich. — Denn man führe in beyden Pyramiden, in gleicher Entfernung Af, Ag von der Spitze, die mit der Grundfläche parallelen Schnitte, bcde, bcdef. Beyde sind den Grundflächen ähnlich,

und

und verhalten sich zu ihnen wie die Quadrate von Af und AF oder Ag und AG. Es ist daher BCDE : bcde = BCDEF : bcdef. Da die vorhergehenden Glieder gleich sind, so sind die nachfolgenden Glieder auch gleich, oder die Schnitte in derselben Höhe sind gleich. Nun zerfälle man durch solche Schnitte beyde Pyramiden in eine gleiche Menge Segmente. Die Grundflächen dieser Segmente sind gleich. Sie selbst nähern sich immer mehr der prismatischen Figur, also immer mehr der Gleichheit, wenn sie auch nicht wirklich gleich wären, je größer ihre Anzahl, d. i. je kleiner ihre Höhe ist, weil alsdenn der Unterschied beyder parallelen Flächen immer kleiner wird. Also sind die Pyramiden, als die Summen dieser ohne Ende vervielfältigten Segmente gleich.

Die Segmente, von welcher Höhe sie auch seyn mögen, wenn sie nur in derselben Entfernung von der Spitze genommen werden, sind gleich, weil sie die Unterschiede gleicher abgeschnittener Pyramiden sind.

194. In dem dreyeckten Prisma ABCDEF (Fig. 56) führe man einen Schnitt von der Ecke A nach der gegen über liegenden Seite CD der Grundfläche BCD, und sondere dadurch die dreyeckte Pyramide ABCD ab. Die übrig bleibende viereckte Pyramide ACDEF theile man durch den Schnitt ACE, der durch die Diagonale CE der Grundfläche geht, in zwey Pyramiden ACFE, ACDE. Diese beyden sind gleich (193). An der Pyramide ACFE kann statt CFE zur Basis genommen werden, wodurch C die Spitze wird. Nun haben CAFE und ABCD einerley Grundflächen und Höhen, sind daher gleich. Folglich zerfällt das dreyeckte Prisma in drey gleiche Pyramiden.

195. Jede dreyeckte Pyramide ist also der dritte Theil eines Prisma, das einerley Grundfläche und Höhe mit ihr hat — Jede vieleckte läßt sich in eine ihr glei-

che Dreyeckte verwandeln, wenn man ihre Grundfläche in ein Dreyeck verwandelt, und die Höhe ungeändert läßt. Daher ist auch jede vieleckte Pyramide der dritte Theil eines Prisma, das gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.

196. Der Inhalt einer Pyramide ist daher der dritte Theil von dem Producte aus der Grundfläche in die Höhe (vergl. 180). Z. E. die Grundfläche sey ein Rechteck, dessen Seiten 8 und 10 Zoll sind, die Höhe sey 12 Zoll, so ist der Inhalt 320 Cubiczoll.

197. Es sey BCDE (Fig. 57) ein Kreis, ausser dessen Ebene ein Punct A; man lasse durch A eine Linie AB an dem Kreise sich herum bewegen, so beschreibt diese Linie die krumme Oberfläche eines Kegels, dessen Grundfläche der Kreis ist. Die Linie von A nach dem Mittelpuncte F ist die Axe des Kegels. Steht sie senkrecht auf die Kreisfläche, so ist der Kegel ein senkrechter, sonst ein schiefer. Die Linie von A nach einem Puncte des Anfanges, AB, AC, AD, AE sind Seitenlinien. Der Kegel macht mit den Pyramiden ein Geschlecht aus, als die Grenze der vielseitigen mit regulairen Grundflächen.

198. Wenn ein Kegel mit der Grundfläche parallel durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt bcde ein Kreis, dessen Mittelpunct der Punct f ist, wo die Axe AF den Schnitt trift — Denn man nehme, wie man will, in dem Kegel die Dreyecke AFB, AFC, AFD, welche von dem Schnitte in bf, cf, df getroffen werden. Es verhält sich, wegen des Parallelismus, AF : Af = FB : fb = FC : fc = FD : fd. Da nun die vorhergehenden Glieder FB, FC, FD gleich sind, so sind es auch die folgenden, fb, fc, fd. Also liegen die Puncte b, c, d in einem Kreise um f, und so auch jede andere Puncte des Schnittes.

199.

199. Diese Schnitte verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser (153. a) das ist, weil die Halbmesser sich wie die Entfernungen von der Spitze verhalten, wie die Quadrate dieser Entfernungen. Ein Kegel und eine Pyramide, die bey einerley Höhe gleiche Grundflächen haben, sind sich gleich, weil ihre mit der Grundfläche parallelen Schnitte in gleichen Entfernungen von der Spitze gleich sind, wie die Pyramiden (193).

200. Ein Kegel wird also auch durch den dritten Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe ausgedrückt. Oder: er ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

201. Eine **Kugel** (Fig. 58.) wird beschrieben, indem ein Halbkreis ADB sich um den Durchmesser AB herum bewegt, bis er wieder in dieselbe Lage kömmt.

Daher haben alle Puncte der Oberfläche gleichen Abstand vom Mittelpuncte C — Daher ist jeder Schnitt der Kugel durch den Mittelpunct, wie AGBF ein Kreis, dessen Durchmesser AB ist. — Auch halbiren sich zwey solche Kreise, wie AGBF, DFEG einander, weil der Mittelpunct C in beyden, also in ihrem Durchschnitte GF liegt, welcher daher ein Durchmesser ist, der sowohl den einen als den andern Kreis halbirt.

202. Man ziehe die Chorde HI auf AB senkrecht, so beschreibt diese, indem ADB sich um AB dreht, einen kleinern Kreis HLI, dessen Durchmesser HI. Kreise wie HLI nennt man **Parallelkreise**, in Beziehung auf den großen Kreis DFEG durch den Mittelpunct, dessen Durchmesser DE auf AB auch senkrecht ist. Die Puncte A, B sind die **Pole** aller dieser Kreise. Sie sind von allen Puncten des Umfanges eines jeden gleich weit entfernt. Auf der Kugel überhaupt kann man je zwey dem Durchmesser nach entgegengesetzte Puncte als Pole ansehen. Auf der Erde sind es zwey bestimmte, die End-

puncte des Durchmessers, um welche sie sich dreht. Hier heißt der große Kreis DFEG der Aequator; der Halbkreis ALFB der Meridian des Punctes L; der Bogen LF die Breite des Ortes L, und der Bogen DF die Länge von einem angenommenen Meridian ADB. Dieser Bogen mißt den Winkel DCF, welchen die beyden Meridiane machen (158).

203. Jeder Schnitt durch die Kugel ist ein Kreis. — Es sey HLI der Schnitt. Man ziehe den Durchmesser AKB senkrecht auf des Schnittes Ebene, und lasse die Kugel durch die Umdrehung um AB entstehen, so beschreibt die Linie HKI in dem Schnitte einen Kreis, den Durchschnitt der Kugel mit der schneidenden Ebene.

204. Ein Kreis durch den Mittelpunct heißt ein größter Kreis, jeder andrer ein kleinerer Kreis. Die Bogen dreyer größten Kreise auf der Kugelfläche bilden allemahl ein sphärisches Dreyeck, worinn eben so, wie in den ebenen Dreyecken, aus drey Stücken, Winkeln oder Seiten, das übrige bestimmt wird.

205. Eine Kugel ist Zweydrittel eines Cylinders, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich sind.

206. Die Oberfläche einer Kugel ist viermahl so groß als die Fläche eines ihrer größten Kreise.

Oder: sie ist so groß als die krumme Oberfläche des Cylinders (205), wovon sie Zweydrittheil ist.

Die Beweise dieser beyden sehr wichtigen und schönen Sätze gehören eigentlich in die höhere Mathematik. Man trift sie in den meisten Handbüchern mit mehrerer oder geringerer Schärfe an.

207. Den Inhalt und die Oberfläche der Erde zu finden, wenn ihr Umfang 15 mahl 360 Meilen gesetzt wird — Man suche zuerst den Durchmesser aus dem Umfange (154). Er ist 1718,87338 Meilen. Zu

der

der folgenden Rechnung braucht man die Decimaltheile. Multiplicirt man denselben mit dem vierten Theile des Umfanges, so hat man die Fläche eines größten Kreises (155), und dieser viermahl genommen ist die Oberfläche der Erde, nämlich 9281916 geographische Quadratmeilen.

Die Fläche eines großen Kreises ist 2320479 Quadratmeilen; also, durch die Multiplication dieser Fläche mit dem Diameter, der Inhalt eines der Kugel an Höhe und Dicke gleichen Cylinders 3988609714 Cubicmeilen, wovon $\frac{2}{3}$ der Inhalt der Erde sind, nämlich 2659 Millionen Cubicmeilen.

208. Kugeln verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser. Die Cylinder, wovon sie $\frac{2}{3}$ sind, verhalten sich so (183). Z. E. Es sey der Durchmesser der Sonne 110 mahl größer als derselbe der Erde, so ist die Sonne dem körperlichen Raume nach 1331000 größer als die Erde. Es verhalten sich der Durchmesser der Erde und des Mondes wie 2000 : 545, so verhalten sich ihre körperlichen Räume wie 8000 Milion zu 161878625, oder nahe wie 50 : 1.

209. Die Oberflächen aber verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser. Die Oberfläche der Sonne ist 12100 mahl größer als die der Erde, und diese letztere ist $13\frac{1}{2}$ mahl größer als die des Mondes.

VIII. Die Trigonometrie.

210. Die Trigonometrie lehrt aus den bekannten Größen an einem Dreyecke die unbekannten, welche durch jene bestimmt werden, durch Rechnung zu finden. Die ebene beschäftigt sich mit ebenen geradlinichten Dreyecken die sphärische mit Kugeldreyecken (204). Sonst enthält

hält sie noch eine Menge Lehren über die Verbindung der Winkel und der davon abhängenden Linien.

211. In dem Kreise AGBF (Fig. 59) lasse man von einem Puncte des Umfanges E auf den Durchmesser AB das Perpendikel ED; dieses heißt der Sinus des Bogens AE oder des Winkels ACE am Mittelpuncte C, für den angenommenen Halbmesser AC. — Das Segment DC heißt der Cosinus eben dieses Bogens oder Winkels. Es ist der Sinus des Complements EG zum Quadranten, oder des Winkels ECG zum Rechten, wenn man GC senkrecht auf AB, und auf diese EH senkrecht zieht. — Zieht man durch den Endpunct des Durchmessers A auf AC die senkrechte AI, d. i. eine Tangente in A (128), welche von EC in I geschnitten wird, so heißt AI die Tangente von AE oder ACE. — Das Perpendikel KG auf CG in G, zwischen G und der Linie CEK, ist die Cotangente von AE oder ACE. — Die Linie CI heißt die Secante, CK die Cosecante.

Weil die Bogen oder Winkel nicht wohl unmittelbar mit den Linien in Verbindung gebracht werden können, so bedient man sich dieser trigonometrischen Linien, um dadurch mittelbar aus den Winkeln einer Figur die davon abhängenden Linien, und aus diesen jene zu bestimmen.

212. Die Größe dieser Linien, bey demselben Winkel ACE hängt von der Größe des Halbmessers ab. Aber das Verhältniß derselben zum Halbmesser bleibt, für denselben Halbmesser ungeändert, der Halbmesser mag groß oder klein seyn, durch eine große oder kleine Zahl ausgedrückt werden. Das Dreyeck CDE oder ACI bleibt sich ähnlich, wie man auch CE oder AC verändern mag, wenn nur der Winkel C derselbe bleibt.

213. Der Sinus wächst mit dem Bogen, aber nicht gleichmäßig, immer langsamer, bis dieser ein Quadrant wird. Alsdenn ist der Sinus GC dem Halbmes-

ser

ser gleich, und heißt daher auch der Sinus totus. Für größere Bogen nimmt der Sinus wieder ab, und wird Null, wenn der Bogen der Halbkreis, oder der Winkel zwey Rechten gleich ist. Der Winkel ACL, der das Complement des ACE zu zwey Rechten ist, hat denselben Sinus LM, wie ACE. Es ist alsdenn nämlich LCM = ECD. Ein und derselbe Sinus gehört also immer zu zwey Bogen, die zusammen den Halbkreis ausmachen, oder zu zwey Winkeln, deren Summe zwey Rechte ist, so wie man den Winkel zweyer Linien durch welchen der Nebenwinkel man will, angeben kann.

214. Der Cosinus ist dem Halbmesser gleich, wenn der Winkel null ist; er nimmt ab, so wie der Winkel wächst, ist null, wenn dieser ein Rechter ist, und nimmt wieder zu, wenn der Winkel stumpf wird. Aber die entgegengesetzte Lage unterscheidet die in Absicht auf die Größe gleichen Cosinus der Nebenwinkel.

215. Die Tangente wächst mit dem Winkel, aber immer schneller, und ist für den rechten Winkel größer als jede Größe, die sich angeben läßt, oder unendlich groß, weil die Berührungslinie in A mit GC parallel ist. Die Tangente eines stumpfen Winkels fällt unterhalb AB, und schneidet den Schenkel CL auf der rückwärts genommenen Verlängerung Ci in i. Die Tangenten der Nebenwinkel sind gleich, aber entgegengesetzt.

216. Ein Sinus ED ist die Hälfte der Chorde EI des Winkels ECF, der doppelt so groß ist als der Winkel des Sinus. Hieraus siehet man, wie einige Sinus haben berechnet werden können, nämlich aus den Seiten der regulairen Vielecke, die sich geometrisch zeichnen, und daher auch berechnen lassen (148). Aus diesen kann man die Sinus derjenigen Winkel berechnen, welche die Summe oder Differenz je zweyer aus jenen sind. Auf diese Art erhält man immer mehrere, freylich noch auf ei-

eine mühsame Art. Die neuere Mathematik hat Abkürzungen der Rechnung gefunden, aber lange nachher nachdem der Canon der Sinus und Tangenten auf die mühsamste Art berechnet war.

217. Aus dem Sinus berechnet man mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes den Cosinus — Der Cosinus (DC) verhält sich zum Sinus (ED) wie der Radius (AC) zur Tangente AI, und die Tangente (AI) zum Radius (AC) wie der Radius (CG) zur Cotangente GK. Denn die Dreyecke ACI, GKC sind ähnlich. Solchergestalt braucht man nur die Sinus bis 45 Grad zu wissen, um die Sinus bis zum 90sten und alle Tangenten zu erfahren.

218. In den gewöhnlichen Tafeln enthält der Radius 10 Millionen Theile, und die Sinus und Tangenten sind in diesen Theilen angegeben. Z. E. Der Sinus von 53° 10′ enthält 8003827 solcher Theile, der Cosinus 5994893, die Tangente 13351075, die Cotangente 7490033. Die Cosinus stehen den Sinus, so wie die Cotangenten den Tangenten gegen über. Auch sind die Logarithmen dieser Zahlen beygefügt, deren Kennzifer man aber durchgehends um 3 vergrößert hat, daß der Logarithmus des Radius 10 würde, weil dieser sehr oft addirt und subtrahirt wird. Man kann den Halbmesser auch zehn, hundertmahl u. s. f. kleiner nehmen, und hat alsdenn nur eben so viel Zifern von den Sinus und Tangenten abzuschneiden, als dort Nullen. Man kann den Halbmesser auch zur Einheit nehmen, so sind die Sinus alle und die Tangenten der Winkel unter 45 Grad eigentliche Brüche. Dieses pflegt in mathematischen Rechnungen häufig zu geschehen.

219. Durch Hülfe dieser Tafeln kann man in einem rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 60) aus zwey Größen in demselben das übrige berechnen. Wir haben nem-

nämlich folgende Proportionen, wo r den Radius oder Sinus totus bedeutet,

BC : AC = r : sin B
BC : AB = r : sin C = r : cos. B.
AB : AC = r : tang B.
AC : AB = r : tang C = r : cot. B.

Z. E. Es sey BC = 324; AC = 295, man sucht B. Hier muß das Verhältniß 324 : 295 in ein andres verwandelt werden, dessen erstes Glied 10 Millionen ist. Folglich muß man 295 mit 10 Millionen multipliciren, und durch 324 dividiren, welches 9104938 für den sin. B giebt, daher B = 65° 34′ + ist. Die beyden letzten Zifern wenigstens braucht man nicht zu suchen, wenn der Winkel nur in Minuten gesucht wird. Will man sich der Logarithmen bedienen, so steht die Rechnung wie folget.

l r + l 295 = 12,4698220
l 324 = 2,5105450
9,9592770

Dieser Logarithme unter der Rubrik Log. Sin. aufgesucht findet sich nächstens bey 65° 34′.

Es sey AB = 527; AC = 1234, man sucht B. Hier wird die Zahl 1234 mit 10 Mill. multiplicirt und durch 527 dividirt, um die Tangente von B zu erhalten. Mittelst der Logarithmen folgendermaaßen.

l r + l 1234 = 13,0913152
l 527 = 2,7218106
10,3695046

Dieser findet sich unter den Log. Tang. nächstens bey 66° 53′.

Wenn das Verhältniß der Hypothenuse zur Kathete gegeben oder gesucht wird, so braucht man die Sinus;

ist

ist das Verhältniß der Katheten das gegebene oder gesuchte, die Tangenten.

220. In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegen über liegenden Winkel.

Es werde um das Dreyeck ABC (Fig. 61) ein Kreis aus dem Mittelpuncte D beschrieben, so ist AB doppelt so groß als der Sinus des halben Centriwinkels ADB (216), das ist des Winkels ACB (131) für den Radius AD oder BD. Eben so ist BC doppelt so groß als der Sinus des halben Centriwinkels BDC, das ist CAB; folglich ist $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ BC = sin C : sin A, oder

$$AB : BC = \sin C : \sin A.$$

desgleichen

$$BC : AC = \sin A : \sin B, \text{ und}$$
$$AB : AC = \sin C : \sin B$$

Auf diesem Satze beruht die ganze Trigonometrie, und die Ausmessung des Himmels und der Erde.

221. Exempel. Es sey in dem Dreyecke ABC (Fig. 64) AB = 738; A = 72° 51′; B = 57° 24′ man soll AC finden — Zuerst C = 180° — A — B = 49° 45′. Ferner sin C : sin B = AB : AC. Entweder verfährt man nach der Regel de Tri mit wirklicher Multiplication und Division, oder bedient sich bequemer der Logarithmen.

log. 738	= 2,8680564
log. sin 57° 24′	= 9,9255454
	12,7936018
log. sin 72° 51′	9,9802471
log. AC	= 2,8133547

Diesen Logarithmen findet man unter den Log. der Zahlen nächstens bey 651; wenn man der Kennzifer 1 borgt, nächstens bey 650,7.

222. Sind A und B zwey Oerter auf der Erde, deren Entfernung man weiß, und man mißt die Winkel, welchen die Linien nach einem dritten Orte C mit AB machen, so findet man hiedurch die Entfernung dieses Orts von jedem der beyden andern — Oder es seyn A und B zwey möglichst entlegene Oerter auf der Erde, deren Entfernung AB nach der geraden Linie zwischen beyden man wisse; man habe Mittel gefunden, die Winkel A, B der Linien nach dem Monde oder einem nicht zu sehr entfernten Himmelskörper mit der Linie AB zu messen, so hat man die Entfernung des Himmelskörpers — Oder es sey A die Sonne, B die Erde, C ein Planet; man wisse aus der Beobachtung des Laufs der Sonne und Planeten den Winkel A. ferner aus Beobachtung den Winkel B, so berechnet man daraus AC und BC, in so ferne AB entweder bekannt ist, oder doch zum Maaßstabe genommen wird.

223. Aus zwey Seiten AB, AC und dem eingeschlossenen Winkel A die übrigen Winkel zu berechnen, sage man: wie die Summe AB + AC zu ihrer Differenz AB — AC, so die Tangente der halben Summe der beyden Winkel zu der Tangente ihrer halben Differenz. Diese halbe Differenz zu der halben Summe addirt giebt den größern Winkel, abgezogen den kleinern.

Exempel. Es sey AB = 738; AC = 651; A = 72° 52′.

AB =	738		179° 60′
AC =	651		72 52
AB + AC =	1389	B + C =	107° 8′
AB — AC =	87	½(B+C) =	53 34

log. tang. 53° 34′ = 10,1318483
log. 87 = 1,9395192
12,0713675
log. 1389 = 3,1427022
log. tg ½ (B—C) = 8,8286653
½ (B—C) = 3° 51′ 21″
½ (B+C) = 53° 34′
B = 57° 25′ 21″
C = 49 42 39

Hieraus findet man ferner die Seite BC durch die Proportion (220). Den Beweis dieses Verfahrens findet man fast in jedem Lehrbuche.

224. Oder man lasse in dem Dreyecke ABC (Fig. 63) auf die eine der bekannten Seiten das Perpendikel CD, und berechne in dem rechtwinklichten Dreyecke ACB die Seiten CD und AD durch die Proportionen r : sin A = AC : CD, und r : cos A = AC : AD (219); ziehe AD von AB ab, und suche den Winkel B durch die Proportion, BD : DC = r : tang. B (219), desgleichen die Seite BC durch die Proportion sin B : r = CD : CB. Solchergestalt werden alle Größen in dem Dreyecke bekannt. — Wenn das Perpendikel ausserhalb des Dreyecks fällt, so wird, wenn B stumpf ist, AB von AD abgezogen, und, wenn A stumpf ist, AD zu AB addirt.

225. Diese Rechnung kömmt auf dem Felde vor, wenn man die Entfernung zweyer Oerter berechnen will, deren Entfernung von einem Standpuncte man durch die Rechnung in (221) gefunden hat; oder am Himmel, wenn man die Entfernungen der Erde, AB, und eines Planeten, CA, von der Sonne A, nebst dem eingeschlossenen Winkel, berechnet hat, und daraus den Winkel B,

oder

oder den Abstand des Planeten von der Sonne nach dem Winkel angeben will.

226. Aus drey Seiten eines Dreyecks die Winkel zu berechnen, wird man in jedem Lehrbuche Anleitung finden. Da der Fall selten vorkömmt, so übergehe ich ihn.

IX. Das Feldmessen.

227. Auf dem Felde hat man theils Linien, theils Winkel zu messen.

Eine Linie abzustecken, setzt man in ihre Endpuncte ein Paar 5 bis 6 Fuß hohe Absteckestäbe, die deswegen mit einer eisernen Spitze versehen sind. Diese Linie zu verlängern, steckt man einen Stab jenseits des einen dieser beyden Stäbe so ein, daß, wenn man das Auge hinter den andern bringt, man den dritten Stab vor jenem nicht so sehen könne. Man muß zu dem Ende die Absteckestäbe zum Durchsehen durchbohren lassen. Eben dieser Probe bedient man sich, wenn man zwischen beyden Stäben einen oder mehrere eingesteckt hat, um bey dem Messen desto leichter die gerade Linie halten zu können. Daß die Stäbe senkrecht stehen müssen, versteht sich.

Ausser diesen Stäben hat man noch Meßfahnen nöthig, um die Puncte auf dem Felde in der Ferne sichtbar machen zu können; auch kleine Zeichenstäbe, um die Puncte, wohin das Ende der Kette oder Schnur fällt, bezeichnen zu können.

228. Zur Messung der Linien bedient man sich der Meßstangen, der Meßketten, der Meßschnüre. Die erstern (10, 12 oder 15 Fuß lang) geben viel Genauigkeit, aber fördern die Arbeit nicht. Man muß neben ihnen die Schnur gebrauchen, um in der geraden Linie zu bleiben. — Die Meßkette ist aus Gliedern von starkem Eisendrat, die durch Ringe von geschlagenem Messing

verbunden werden, zusammengesetzt. Durch den Gebrauch werden die Ringe ausgeschliffen, und die Glieder verbiegen sich leicht. Bey unebenem Boden krümmt sie sich — Die Meßschnur verändert ihre Länge durch Feuchtigkeit und Trockniß, dem man aber doch durch Kochen in Oel und durch Bestreichen mit Wachs ziemlich abhelfen kann. Sie kann ohne Unbequemlichkeit sehr lang gemacht werden, und ist bequemer im Gebrauche als die Meßkette, die aber doch vorgezogen zu werden pfleget. Auf der Meßschnur müssen die Fuße und Ruthen kenntlich gemacht werden.

229. Eine Linie zu messen, spannt man die Kette oder Schnur in derselben so oft aus, als es angeht. Zwey Personen haben das Ende über einen Stab, den Kettenstab, mittelst eines Ringes, gesteckt. Der vordere steckt da, wo sein Stab gesteckt hat, bey dem Fortziehen der Kette, einen Zeichenstab ein, welchen der nachfolgende zu sich nimmt, wodurch die Zahl der ganzen Ketten ohne Irrthum bekannt wird.

230. Die Längen auf das Papier zu tragen bedient man sich gerne des verjüngten Maaßstabes. Man theilt eine Linie AB (Fig. 64) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, die in der Figur rheinländische Zolle sind; den ersten dieser Theile (linker Hand) in zehn gleiche Theile. Hiemit kann man schon oft zufrieden seyn. Um diese Theile wieder ohne Verwirrung einzutheilen, zieht man eine parallele CD mit AB, und theilt den Abstand AC in zehn gleiche Theile, zieht durch die Theilungspuncte die parallelen mit AB, und durch die Endpuncte der großen Abtheilungen Perpendikel auf AB, wovon eines EF ist. Den Theil CF = AE theilt man auch in 10 gleiche Theile, und zieht durch jeden Theilungspunct an einen auf AE um eine Stelle weiter nach A liegenden

Punct

Punct Parallelen oder Transversalen. Die Theile der mit AB parallel gezogenen zwischen der ersten Transversale GF und EF sind von oben herunter 10 9, 8, 7, ꝛc. wegen der mit FGE ähnlichen Dreyecken. Auf diese Art kann man, wenn AE eine Ruthe bedeutet, Fuße und Zolle Decimalmaaß auftragen, oder wenn AE zehn Ruthen sind, einzelne Fuße; umgekehrt auch jede Linie auf dem Papiere genau messen, und die durch sie vorgestellte auf dem Felde angeben.

Man kann die Eintheilung auch für zwölftheiliges oder sechszigtheiliges Maaß machen.

231. Die Winkel auf dem Felde zu messen, hat man mancherley Werkzeuge. Zu kleinen Messungen ist der Meßtisch (Mensel) sehr bequem, ein Reißbrett, das sich auf einem Stativ horizontal stellen läßt. Denn die Flächen aller Werkzeuge müssen horizontal seyn, weil wir jeden Abriß einer Gegend als eine Projection durch Perpendikel von allen Puncten auf eine horizontale Ebene uns vorstellen. Zu dem Meßtische gehört ein Diopternlinial, (Fig. 65), ein messingenes Linial, an dessen Enden die Dioptern oder Absehen sind, senkrecht gestellte messingene Platten, deren die eine AB eine feine auf das Linial senkrechte Ritze zum Durchsehen enthält, die andere einen Faden in einer hinlänglichen Oeffnung, den Gegenstand dadurch ins Auge zu fassen. Beyde, Ritze und Faden müssen in einer auf die Fläche des Linials senkrechten, und mit der Schärfe DB parallelen Ebene liegen. Legt man nun auf dem horizontal gestellten Meßtische das Linial so, daß beym Durchsehen der Faden das Object oder eine gewisse Linie auf demselben deckt, und zieht DB, so geht diese DB nach dem Objecte ohne einen nothwendigen größern Fehler als die halbe Breite des Linials. Man könnte auch die Ritze und den Faden der Dioptern über DB stellen, aber jene Stellung ist sicherer. Der Fehler ist nie

merklich, und die Winkel bleiben unverändert. Visirt man nach einem zweyten Objecte, so hat man den Winkel der Linien von dem Standpuncte nach den Objecten unmittelbar auf dem Papiere, welches ein eigenthümlicher Vorzug des Meßtisches ist — Man thut wohl in dem Rande des Meßtisches eine Magnetnadel einzulassen, damit man ihm in jedem Standpuncte dieselbe Lage bequem geben könne. Zu diesem Ende kann man die Magnetnadel auch auf dem Liniale anbringen.

232. Ein gewöhnliches Instrument ist das **Astrolabium**, ein auf seinem Rande in Grade und kleinere Theile eingetheilter Halbkreis mit einem um den Mittelpunct beweglichen Diopternlinial und einem Paar Dioptern an den Enden des Halbmessers. Man bringt auf dem Rande wohl auf eine ähnliche Art wie an dem verjüngten Maaßstabe Transversalen an, um jeden Grad dadurch von 5 zu 5 oder 6 zu 6 Minuten einzutheilen. Der Gebrauch dieses Instruments ist mühsam, weil man die Winkel mittelst des Transporteurs übertragen muß. Zur trigonometrischen Berechnung kann man die Winkel nicht genau genug durchaus erhalten, und wenn es auch wäre, gienge die Genauigkeit beym Uebertragen verlohren. Auch entbehrt man einiger wichtigen Vortheile, die der Meßtisch zur Berichtigung der Messung an die Hand giebt.

233. Weit vorzüglicher ist eine Gattung von **Winkelmesser**, der aus einem ganzen Kreise besteht, über dessen Mittelpuncte ein Fernrohr sich herum bewegen läßt, womit zugleich eine Regel herum geführt wird, das auf dem Rande des Werkzeuges den Grad bemerkt, über welchem die Gesichtslinie nach dem Objecte hinstreicht. In dem Fernrohre sind an der gehörigen Stelle zwey Fäden senkrecht übereinander gespannt, deren Durchschnitt die Mitte des Gesichtfeldes, oder des Raums angiebt, den man durch dasselbe übersieht. Eine genaue Beschreibung

die-

dieses Werkzeuges findet man in Hrn. Meyers praktischer Geometrie 1. Th. S. 318—349, (Göttingen 1777). Eben daselbst S. 361 ff. auch eine sehr gute Einrichtung des Meßtisches.

234. Die Theile eines Grades anzugeben, wenn die Regel, welche den Winkel bemerkt, zwischen zwey Theilungspuncte fällt, ist eine sehr bequeme und einfache Vorrichtung der sogenannten Nonius oder Vernier, ein Kreissector, der mit der beweglichen Regel des Werkzeuges ein Stück ausmacht. Man nimmt (Fig. 66), auf dem Rande des Werkzeuges ADB einen Bogen DE von 11 Graden, (die Theile der Figur sind der Deutlichkeit wegen viel größer genommen), und macht den Bogen des Verniers FCG so groß wie den Bogen FG des innern Randes FG, giebt ihm aber 10 Theile, deren jeder folglich 1° 6′ ist. Die Linie FC sey mit der Gesichtslinie parallel, und falle beym Visiren zwischen zwey Theilungspuncte des Randes. Man sucht alsdenn, wo zwey Theilungsstriche des Randes DEFG und des Nonius FGIH zusammentreffen. Von diesem Puncte zählt man auf dem Nonius die Theilungsstriche bis an FH, so ist der Theil des Grades, den man sucht, so vielmahl 6 Minuten als man Striche oder Theile auf dem Nonius gezählt hat. Kann man nicht zwey genau zusammentreffende Theilungsstriche finden, so muß man durch das Augenmaaß schätzen, wie weit zwey nächste Theilungsstriche des Nonius von den zwischen ihnen fallenden Theilungsstrichen des Randes jeder abstehen, und darnach die 6 Minuten Unterschied eintheilen.

235. Die einfachste und vielleicht beste Art von Winkelmesser ist der Mayerische Recipiangel. Zwey Liniale AB, CD (Fig. 67), lassen sich mittelst eines Zapfens, der in dem einen bevestigt ist, um einen Punct E drehen. Von E aus steckt man auf beyden Linialen die Puncte

a, b, c, d, in gleichen Entfernungen von E ab. Ueber dem beweglichen Liniale AB befestige man ein Fernrohr, lege AB auf CD, und visire nach dem einen Gegenstande M; darauf drehe man es nach dem andern Gegenstande N, messe die Entfernung b, d nach einem verjüngten Maaßstabe, nach welchem der Halbmesser Eb 500 Theile hat, so giebt die Weite bd in den Sinustafeln aufgesucht, mit Wegwerfung der vier letzten daselbst befindlichen Ziffern, den halben Winkel MEN. Nämlich, wenn der Halbmesser EC (Fig. 59) 1000 Theile hat, so geben die Sinustafeln die Größe des Sinus ED von ECD unmittelbar, nach weggeworfenen 4 letzten Ziffern; das doppelte von ED ist die Chorde EF des doppelten Winkels. Giebt man daher EC 500 Theile, so wird die Chorde EF durch eben so viel Theile ausgedrückt, als ED enthält, wenn EC = 1000 ist.

Man kann auch einen geradlinichten Transporteur sich verfertigen, auf welchem die Weiten sogleich die Winkel angeben.

Die Liniale (Fig. 67) lassen sich auch mit Dioptern versehen, wobey es bequem seyn wird, durch ein Gewinde, wie etwa an einem Proportionalzirkel, beyde in derselben Ebene sich bewegen zu lassen.

236. Man pflegt sich auch wohl der Bousole zum Winkelmessen zu bedienen. Das Diopternlinial, welches sich auf einem Stative bewegen läßt, bekommt neben der Mitte einen Ansatz, auf welchem ein rundes Gehäuse mit der Magnetnadel befestigt ist. Inwendig ist ein in Grade getheilter Ring, auf welchem die Magnetnadel den Winkel anzeigt, welchen die Mittellinie des Linials mit der Richtung der Magnetnadel macht. Man kann mit diesem Instrumente nicht genau, aber geschwinde messen. In Holzungen möchte es einigen Vorzug haben.

237. Einzelne Felder in Grund zu legen, oder eine ihnen ähnliche Figur auf dem Papiere zu verzeichnen, ist auf mehrere Arten möglich. I. Man zerfälle sie in Dreyecke, messe die Seiten jedes Dreyecks, und zeichne mit diesen Seiten, nach dem verjüngten Maaßstabe, ähnliche Dreyecke, in derselben Lage neben einander wie auf dem Felde (85). Es ist der Vortheil bey dieser Methode, daß der Flächeninhalt der Dreyecke aus ihren Seiten sich ziemlich leicht berechnen läßt.

II. Man messe alle Seiten und Winkel des Umfanges. Nur übel, daß die kleinen begangenen Fehler auf die folgenden Bestimmungen der Lage einen Einfluß haben, sich häufen, und die Figur sich oft nicht schliessen lassen (60).

III. Man nehme zwey Standpuncte in der Figur, und visire nach allen Eckpuncten, so geben die Durchschnitte der zusammengehörigen Visirlinien eine der auf dem Felde ähnliche Figur (90).

IV. Man verbindet alle diese Methoden zusammen, wenn eine derselben bey einzelnen Puncten Schwierigkeiten hat.

238. Bey der Methode (237. II.) hat der Meßtisch den wichtigen Vorzug vor dem Astrolabium, daß man jede Bestimmung durch Vergleichung mit den schon gemachten prüfen kann. Es sey (Fig. 68) ABCDE die Figur auf dem Felde und abcde eine ihre ähnliche auf dem Papiere. Legt man die Seiten ab, ae auf die gleichnahmigen AB, AE, so fallen auch die gleichnahmigen Diagonallinien, wie Ad, ad auf einander. Hat man z. E. die Puncte d, e, a bestimmt, und bringt den Meßtisch in A, so muß, wenn a über A, ae über AE gelegt wird, die Linie ad in die Visirlinie nach D fallen. Man kann dadurch selbst den Punct a bestimmen, wenn

man verhindert ist EA zu messen, oder sich diese Mühe ersparen will.

Auch bey der Methode (III 237.) ist der Meßtisch bequemer. Ueberhaupt erspart er die Mühe, einen vorläufigen Entwurf zu machen, und ein Memorial zu halten.

239. Kann man das Feld nicht aus zwey Standpuncten übersehen, so verbindet man mehrere Standlinien zusammen, die man entweder unmittelbar nebst ihren Winkeln mißt, oder auch durch Durchschnitte der Visirlinien bestimmt.

240. Bey weitläuftigen Messungen würden am Ende die Fehler sich häufen. Darum muß man mit tüchtigen Winkelmessern, selbst mit astronomischen, die Lage einer Anzahl merkwürdiger Puncte bestimmen, und zwar durch trigonometrische Rechnung, wozu vorher eine hinlänglich große Standlinie zu messen ist. Aus der Standlinie AB und den Winkeln bey A und B (Fig. 69) berechnet man die Entfernungen AC, BC des Punctes C, und die AD, BD des Punctes D. Aus AC und den Winkeln bey A und C berechnet man in dem Dreyecke ACE die Seiten AE und EC, aus EC und den Winkeln bey E und C die Seiten EF, FC. So berechnet man ein Dreyeck nach dem andern, als CBG, CGF, ADH, BDI, und zerfällt die ganze Gegend in Dreyecke, über deren Richtigkeit man mancherley Proben anstellen kann.

Jedes Dreyeck kann man mittelst des Meßtisches mit dem was es enthält, besonders in Grund legen, und aus allen Dreyecken eine Charte zusammensetzen.

241. Eine Höhe BC (Fig. 70) zu messen, wenn man zu dem Puncte B, wohin die lothrechte CB von der Spitze C fällt, kommen kann, messe man von einem beliebigen Puncte A aus die Weite AB, und mit einem Winkel-

kelmesser in D über A den Winkel CDE der Linie CD mit der wasserrechten DE. Hieraus läßt sich CE trigonometrisch berechnen (219); oder man nimmt De nach dem verjüngten Maaßstabe so groß wie DE, macht cDE = CDE, und zieht ce senkrecht auf De durch e, so enthält wegen der ähnlichen Dreyecke DCE, dce die Linie ce so viel kleine Theile des Maaßstabes als CE große. Zu CE addire man die Höhe des Stativs AD, so hat man die verlangte Höhe BC.

242. Kann man zu dem Puncte B, der senkrecht unter der Spitze C liegt, nicht kommen, wie bey einem Berge, so nimmt man eine Standlinie AD, (Fig. 71) und mißt die Winkel A, D, berechnet daraus AC oder DC, und daraus in den rechtwinklichten Dreyecken ACB oder DCB die Seite BC.

Oder man zeichnet ein dem Dreyecke ACD ähnliches Acd, zieht cb senkrecht auf die verlängerte Ad, so ist auch das Dreyeck cdb dem CDB ähnlich, und cb enthält so viel Theile als CB, wenn Ad so viel Theile als AD bekommen hat.

243. Die Messung der Höhen hat ihre eigene Schwierigkeiten, besonders der Berge, wegen der Standlinie und der Strahlenbrechung. Von den Messungen durchs Barometer in der physischen Geographie.

X. Das Nivelliren.

244. Nivelliren oder Wasserwägen heißt, finden, wie viel ein Ort über oder unter der Horizontalfläche eines andern Ortes liegt. In dem letztern Falle heißt der Unterschied das Gefälle des Ortes. Die Horizontalfläche ist diejenige, worauf die Richtung der Schwere senkrecht steht. Sie ist hier nicht sowohl eine Ebene, als ein

Stück

Stück einer Kugelfläche, in welche sich die Oberfläche eines stillstehenden Wassers setzen würde.

245. Die Erde sey eine Kugel, A (Fig. 72) ein Ort auf ihrer Oberfläche, aAa ein Bogen eines großen Kreises durch A, dessen Mittelpunct in C; AE eine Berührungslinie oder Horizontallinie durch A. Die Wasserfläche durch A wird sich nach dem Bogen AD stellen, und ein Punct derselben D ist mit A wasserrecht, ob er gleich unter der Horizontallinie AE um die Länge DE vertieft liegt. Es sey B ein Punct auf der Erdfläche zwischen D und E, so liegt B wirklich höher als A, und es könnte kein Wasser von A nach B geleitet werden. Darum muß man immer den Unterschied der wahren und scheinbaren Horizontalfläche in Rechnung bringen. Ist AD eine deutsche Meile oder ein Bogen von 4′, so ist $DE = 14\frac{22}{100}$ Rheinl. Fuß. Auf eine halbe Meile ist DE nur den vierten Theil so groß, auf eine Viertelmeile nur den sechszehnten u. s. f. nach den Quadraten der Entfernungen.

246. Zum Nivelliren ist ein Werkzeug nöthig, wodurch man eine horizontale Gesichtslinie von dem Auge nach einem Objecte sehr genau erhalten kann, eine Wasserwage. Man hat es auf mancherley Art eingerichtet. Eins der vollkommensten ist die Brandersche Wasserwage, welche Lambert in seinen Zusätzen zu Picards Abh. vom Wasserwägen, Berlin 1772, beschreibt. Es ist ein Fernrohr verbunden mit einer Glasröhre, welche bis auf den Raum für eine kleine Luftblase mit Wasser angefüllt ist. Diese begiebt sich immer nach dem obern Ende der Glasröhre, wenn diese noch so wenig von der horizontalen Lage abweicht. In der horizontalen Lage der Röhre schwimmt sie in der Mitte derselben über dem Wasser. Das Fernrohr kann durch eine Schraube gegen den Horizont ein weniges geneigt werden; eine sehr feine Scale auf einer Glasplatte in dem Fernrohre dient den Neigungs-

gungswinkel zu messen; die Schraube ebenfalls. In der horizontalen Lage des Fernrohrs deckt der Mittelstrich der Scale an dem Gegenstande, nach welchem man das Fernrohr richtet, die Puncte, welche mit dem Auge in derselben Horizontalfläche sich befinden.

247. Bey dem Nivelliren verfährt man folgendergestalt. Ist das Werkzeug ganz zuverlässig, so richtet man es an dem einen Orte A (Fig. 73) auf, und steckt an dem andern B einen Stab BE senkrecht ein. An dem Stabe muß sich eine bewegliche, halb schwarze, halb weisse Tafel befinden, auf welcher der horizontale Grenzstrich zwischen beyden Farben zum Ziele dient. Man visirt von D nach der horizontalen DE, und läßt die Tafel auf BE so lange verschieben, bis man den Grenzstrich in der Mitte des Fernrohrs gefaßt hat. Man mißt darauf mit einem eingetheilten Stabe die Höhe BE, und zieht davon die Höhe des Werkzeugs AD oder EC ab, so ist CB das Gefälle von B. Wäre BE kleiner als AD, so läge B um den Unterschied von BE und AD höher als A.

248. Will man auf eine große Weite nivelliren, so steckt man auf beyden Seiten von A, der Station für das Instrument (Fig. 74), in B und C, die Stäbe BE, CF, visirt von D aus nach E und F, mißt BE und CF, der Unterschied beyder CG ist das Gefälle von C gegen B. Darauf geht man jenseits C, und sucht das Gefälle des dritten Orts gegen C, u. s. f. dadurch erhält man das Gefälle des letzten Orts gegen B. Ausser der Geschwindigkeit der Operation hat diese Methode noch den Vorzug, daß ein fehlerhaftes Instrument nicht schadet, wenn nur A die Mitte von BC ist. Denn so viel BC unrichtig bestimmt wird, so viel wird CF auch, daher CG dennoch richtig gefunden wird.

XI. Die

XI. Die Markscheidekunst.

249. Die Markscheidekunst ist eine Anwendung der Geometrie auf das Bergwerkswesen. Sie lehrt die unterirrdischen Wege, welche sich der Bergmann gräbt, zu verzeichnen, zu jedem Puncte unter der Erde den senkrecht darüber liegenden anzugeben, die Lage der Gänge, worinn die Erze liegen, zu bestimmen, und überhaupt alles, was bey diesem Geschäfte von der Geometrie abhängt — **Marken** sind gewisse auf der Oberfläche der Erde ausgesteckte Grenzpuncte, und **Markscheiden** sind lothrechte Ebenen durch diese Grenzen, zwischen welchen eine Gewerkschaft bauen darf. Von der Bestimmung dieser Grenzen führt die ganze Kunst den Namen.

250. Die Geschäfte des Markscheidens zerfallen in vier Hauptarbeiten. Diese sind

1) Eine genaue Messung und Aufnehmung der Linien, ihrer Winkel, des Steigens und Fallens derselben nach Graden, der Lage der großen und kleinen Klüfte in den Gebirgen. Diese Arbeit heißt das **Observiren.**

2) Die Eintragung aller dieser Bemerkungen in eine Tabelle, die genaue Berechnung des Steigens und Fallens aller Linien und Flächen nach dem Lachtermaaße, in Absicht auf die wahre Horizontalebene, die Reduction der geneigten Längen auf den Horizont, und die Anzeichnung jedes bemerkungswerthen Umstandes. In diesem besteht die Verfertigung der **Observationstabelle.**

3) Die Ausarbeitung der nöthigen Risse von der aufgenommenen Gegend, nach der Observationstabelle; dieses heißt das **Zulegen.**

4) Die Bestimmung der Richtungen und Puncte, nach welcher die vorhabenden Arbeiten zutreffend gewiß fortzusetzen sind, und dieses nennt man das **Anweisen.**

251. Zur Messung der Längen bedient der Markscheider sich einer messingenen Meßkette, die eine Länge von sechs Lachtern zu haben pflegt. Ein Lachter ist etwas mehr als sechs Rheinländische Fuß, nicht allenthalben gleich (das Clausthalische $73\frac{6}{10}$ Rheinl. Zoll, das Freyberg'sche 75 Zoll $10\frac{3}{4}$ Lin.) wird aber allgemein in 80 Zoll eingetheilt. Ausser der Meßkette braucht man noch eine Schnur von feinem Messingdrat (auch eine seidene), um die mit der Kette zu messenden Linien damit zu ziehen, und die gleich zu erwähnenden Werkzeuge daran zu henken. Sie wird an ein Paar kupfernen (auch eisernen) Pfriemen befestiget, die man an den Endpuncten der zu messenden Linie einschraubt, es sey in feststehendem Holze oder in ein Paar eingeschlagenen Spreizen.

252. Die Neigung der gemessenen Linie gegen den Horizont mißt man mit dem Gradbogen oder der Hängewage, einem in Grade eingetheilten Halbkreise von Messingbleche, den man an die straff ausgespannte Schnur mittelst ein Paar Haken henket. Die Abweichung des aus dem Mittelpuncte herabhängenden Lothes von der Mitte des Halbkreises giebt die Neigung der Linie gegen den Horizont an.

253. In dem bey C rechtwinklichten Dreyecke ACB (Fig. 75), sey AB die gemessene Länge, AC eine lothrechte, CB eine horizontale Linie. Den Winkel ABC nennt der Bergmann die Donlege, AB eine donlegige Fläche, AC die Seigerteufe, CB die Sohle. Aus der Donlege und der Länge der donlegigen Fläche lassen sich die Teufe und die Sohle trigonometrisch berechnen (219); auch hat man besondere Tafeln, dem Markscheider dieses Geschäfte zu erleichtern.

254. Zur Bestimmung der Lage der gemessenen Linie muß man noch die Abweichung der lothrechten Ebene, worinn sie befindlich ist, von der wahren Mittagsfläche angeben.

geben. Dieses geschieht, nur nicht in Eisenbergwerken, mittelst des Hängecompasses, der an die vorhergedachte Schnur gleichfalls mittelst ein Paar Haken angehenket wird. Das runde Kästchen mit der Magnetnadel ist in einem Ringe durch ein Paar Zäpfchen beweglich, um horizontal gestellt werden zu können. Der Ring wird an einem andern Ringe befestiget, welcher mittelst ein Paar Haken an der Meßschnur aufgehenket wird. Die Mittagslinie des Compasses fällt immer in die lothrechte Ebene durch die Schnur, und die Magnetnadel zeigt auf dem eingetheilten Rande des Kästchens den Winkel jener Ebene mit der Mittagsfläche an. Der Umfang des Randes ist in zweymahl 12 Stunden eingetheilt, deren jede wieder in 8 Theile getheilt wird. Diese Eintheilung in Stunden rührt vermuthlich daher, daß man in den ältern Zeiten, vor Erfindung des Compasses, die Lage der Linien in Absicht auf die Mittagsfläche nach dem Stande der Sonne, den sie zu dieser oder jener Stunde des Tages hat, angab. Die Stunden werden von Mitternacht gegen Morgen, und von Mittag gegen Abend gezählt. Die Weltgegenden sind auf dem Compasse in entgegengesetzter Ordnung als am Himmel eingeschrieben. Denn wenn eine Linie z. E. um 2 Stunden oder 30 Grad von Mitternacht gegen Morgen abweicht, so weicht die Magnetnadel um so viel Grad linker Hand von der Mittagslinie des Compasses ab. Darum muß Morgen linker Hand von Mitternacht auf dem Compasse stehen, das Gesicht gegen Mitternacht gewandt.

255 Es sey in A (Fig. 76) die Einfahrt eines Seigerschachtes (einer viereckten senkrechten Grube) AB; in B gehe die Strecke BC hinunterwärts. Man setze durch BC die senkrechte Ebene ADCS, in welcher AD und SC horizontal oder söhlig, AS, DC lothrecht oder seiger sind. Hier ist BS die Seigerteufe, um welche die

Strecke

Strecke BC fällt, SC die Sohle, der Winkel BCS die Donlege. In A sey AM die Mittagslinie, in B sey sie BM und Bb horizontal, so ist der Winkel MBb der Winkel unserer Ebene mit der Mittagsfläche. Alles dieses erfährt man durch die vorher beschriebenen Werkzeuge. Man gedenke sich durch A eine wasserrechte Ebene, auf welcher AM die Mittagslinie, MAD = MBb, und AD = SC ist, so ist D der senkrecht über C befindliche Punct, und DC = AB + BS, die Seigerteufe des Punctes C unter D.

256. Die zweyte Strecke CE senke sich aufs neue unter C in einer andern senkrechten Ebene CGET unter dem Winkel CET, und diese Ebene mache mit der Mittagslinie CM den Winkel MCG, indem CG eine horizontale Linie ist. Es seyn CT und GE lothrecht, CG und TE horizontal, so ist die Seigerteufe CT und die Sohle TE durch die Messung der Donlege CET bekannt, und MCG durch Hülfe des Compasses. Zieht man in dem vorher zu Tage (auf der Erdfläche) in dem Horizonte durch A bestimmten Puncte D die Mittagslinie DM und macht den Winkel MDF = MCG, und DF = TE, so ist F senkrecht über E, und der senkrechte Abstand beyder ist FE = AB + BS + CT.

257. So kann man durch alle Wendungen des unterirrdischen Weges fortfahren, und den Ort eines jeden Punctes angeben. Es sind dazu gewöhnlich zweyerley Risse nöthig, ein söhliger und ein Seigerriß. Der erste giebt die Durchschnitte der lothrechten Ebenen, worinn die Strecken liegen, mit einer horizontalen Ebene, und die Länge ihrer Sohlen nach einem verjüngten Maaßstabe an, oder er ist die verjüngte Projection des unterirrdischen Weges auf eine horizontale Ebene, so wie es AD, DF von BC, CE sind. Der Seigerriß giebt die Tiefe jedes Punctes unter dem Horizonte der Einfahrt, oder ist

die Projection auf eine gewisse senkrechte Ebene. Es sind bisweilen zwey Seigerrisse nöthig, deren Projectionsebenen sich senkrecht schneiden.

Z. E. Es stellt der Zug BCDEF (Fig. 77) die Lage und Länge der auf einen gemeinschaftlichen Horizont übergetragenen Sohlen vor; die Linien Ab, Ac, Ad, Ae, Af, die Tiefen der Puncte B, C, D, E, F unter dem Horizonte der Einfahrt A. Die Linien bc, cd, &c. sind nicht die Strecken selbst, es müßte denn die Ebene des Seigerrisses durch eine Strecke selbst gehen oder damit parallel seyn. Die Linie AA auf dem Risse bekommt gegen die Mittagslinie AM dieselbe Lage, welche die lothrechte Ebene, worauf die Puncte übergetragen worden, mit der Mittagslinie macht.

258. Diese Arbeit oder das Zulegen geschieht, was die Winkel betrift, am genauesten mit demselben Compasse, womit die Stunden der Strecken in der Grube aufgenommen sind. Er wird auf einer Platte, welche die Gestalt eines Rechtecks hat, befestigt. Die längern Seiten desselben sind mit der Mittagslinie des Compasses parallel, und dienen zur Ziehung der Linien. Man legt eine solche Seite z. E. in B (Fig. 77) an, und läßt die Magnetnadel auf die Stunde einspielen, welche sie in der Grube bey B zeigte, zieht BC an dem Instrumente, steckt darauf die Länge der Sohlen ab, so ist das erste Stück des unterirrdischen Weges zugelegt. Mit den folgenden verfährt man auf dieselbe Art.

259. Die Messung in der Erde nennt man einen **Grubenzug**, die über der Erde, einen **Tagezug**. Soll man den Punct über der Erde finden, der lothrecht über einem gegebenen Puncte in der Erde ist, so verfährt man folgendergestalt. Es sey ABCDE (Fig. 78) der schlige Riß, und der zu E gehörige Punct am Tage sey anzugeben. Man ziehe auf dem Risse die Linie AE, messe

sie

sie nach dem verjüngten Maaßstabe, und den Winkel MAE mit der Mittagslinie AM. Kann man zu Tage die Linie AE nach ihrer Länge und Richtung ohne Hinderniß ausstecken, so ist der gesuchte Punct dadurch unmittelbar bestimmt. Wo nicht, so bestimme man den Punct E vorläufig, nach dem Augenmaaße, und suche sich einige Puncte P, Q, aus, über welche man von A nach E messen kann. Man messe die Länge von AP, PQ, desgleichen ihre Winkel mit der Mittagslinie MAP MPQ, so kann man P und Q auf den Riß tragen. Hieraus erfährt man die Lage und Länge von QE; trägt man beyde auf das Feld, so ist dadurch der verlangte Punct E gefunden.

260. Eben so verfährt man, wenn ein Stollen, d. i. ein fast horizontaler unterirrdischer Weg, in einer bekannten Lage bis auf eine gewisse Länge getrieben ist, und man zu Tage die Stelle angeben will, wo er aus dem Gebirge hervortreten würde, wenn man ihn bis zu Ende verlängerte, in der Absicht, von dieser Seite her dem Stollen entgegen zu kommen.

261. In den Gebirgen finden sich sowohl Klüfte, d. i. schmale Spaltungen, als Gänge, d. i. weit ausgestreckte Trennungen, die mit einem von dem Gebirge unterschiedenen Gestein angefüllet sind. Die Wände eines Ganges, eine von den übrigen Theilen desselben, sich unterscheidende kennbare Einfassung, heissen die Saalbänder. Das Gestein, worauf der Gang ruht, heißt das Liegende des Ganges; dasjenige, was ihn von oben deckt, das Hangende. Diese Gänge sind die Geburtsörter der Metalle, daher die Bestimmung ihrer Lage ein wichtiges Stück der Markscheidekunst ist.

262. Die beyden parallelen Ebenen ADHE und BCFG (Fig. 79), stellen die beyden Seitenflächen eines Ganges, die Saalbänder, vor, obgleich diese nicht im-

immer mathematisch parallel und eben sind. Zuerst wird man das Streichen des Ganges auszumachen haben, nämlich den Winkel EAM, welchen der Durchschnitt AE dieser Seitenflächen und einer horizontalen Ebene PAE mit der Mittagslinie AM macht; zweytens den Winkel der Seitenflächen mit dem Horizont, nämlich den spitzen Winkel DAB, den zwey auf den Durchschnitt AE gefällte Perpendikel, DA in der Seitenfläche, und AB auf einer horizontalen Ebene mit einander machen (158), das Fallen des Ganges. Jenes erfährt man wie in (254) durch den Compaß; zu dem andern braucht man die Hängewage, die man an der in einer lothrechten Ebene parallel mit der Seitenfläche des Ganges ausgespannten Schnur aufhenket. Man könnte das Fallen auch durch zwey Schnüre messen, eine lothrechte, und eine horizontale, welche dem Streichen des Ganges das rechte Winkelkreuz giebt.

263. Will man das Ausstreichen eines Ganges zu Tage angeben, oder die Linie CF, in welcher die eine Seitenfläche den Horizont eines Ortes auf der Erdfläche HDCF schneidet, so muß zuvörderst die Tiefe der Puncte A oder B unter diesem Horizonte bekannt seyn. Diese sey CQ. In dem rechtwinklichten Dreyecke CQB findet man, aus CQ und dem Winkel CBQ die Grundlinie BQ. Die senkrechte Ebene FCQ durch FC und CQ schneide den Horizont von AB in Qq, so ist diese mit FC parallel. Die Linie FC ist parallel mit BG, dem Durchschnitte der Seitenfläche FCB mit dem Horizonte von AB, also ist auch Qq mit BG parallel (165), folglich auch mit AE, dem Durchschnitte der andern Seitenfläche des Ganges mit dem Horizonte von AB. Zieht man also in der Zeichnung, welche den Durchschnitt des Ganges mit der Ebene ABE darstellt, in der Entfernung BQ, als der Sohle des Ganges, eine parallele Qq mit

BG,

BG, oder in der Entfernung AQ mit AE, so hat man in dieser Qq die Projection der Linie FC, in welcher die Seitenfläche BCF des Ganges zu Tage ausgeht.

Man braucht dieses, wenn man die Grenzen, wie weit eine Gewerkschaft, nach dem Streichen des Ganges in die Länge bauen dürfe, zu Tage ausstecken will, also ganz eigentlich zum Markscheiden. Die Markscheiden (249) werden auf das Hauptstreichen des Ganges unter einem rechten Winkel gesetzt.

Die Ebenen der Seigerrisse werden theils parallel mit dem Hauptstreichen des Ganges, theils unter einem rechten Winkel gegen dasselbe gelegt.

264. Es sey ADBC (Fig. 80) eine der Seitenflächen eines Ganges, deren Durchschnitt mit dem Horizonte durch A die Linie AC, und mit dem durch B die BD ist. Der Horizont durch BD sey die Ebene EDBF. Der Winkel dieser Linien mit der Mittagslinie ist das Streichen des Ganges. Man ziehe in der Seitenfläche des Ganges AD und BC senkrecht auf DB, und in der Ebene EDBF die senkrechten ED, FB gleichfalls senkrecht auf DB, so ist der Winkel ADE oder CBF das Fallen des Ganges. Zieht man AE und CF lothrecht auf EDBF, so ist AE oder CF die Tiefe von B unter dem Horizonte von A. Durch die Messung des Weges, auf welchem man von A bis B gekommen ist, weiß man diese Tiefe. Aus derselben und dem Fallen des Ganges, dem Winkel CBF, wird die Sohle FB = ED berechnet. Beschreibt man nun über EB in der Ebene EDBF den Halbkreis EDB, und legt in diesem die Sohle ED als Chorde, so ist die Chorde des Complements DB die Linie, nach welcher der Gang streicht, oder wenn man nach dem Streichen des Ganges die Chorde BD zieht, so ist ED die Sohle des Ganges.

265. Auf dem söhligen Risse des Weges von A nach B hat man den Punct E als die Projection von A, so wie auch B. Zieht man nun von jenem zu diesem, über alle etwanige Krümmungen des söhligen Weges die gerade Linie, welche die Projection von EB vorstellt, beschreibt über derselben einen Halbkreis, und zieht darinn die Chorde BD dem Streichen des Ganges gemäß, so ist die Chorde des Complements ED die Sohle. Diese muß mit der aus der gemessenen Tiefe des Punctes B unter dem Horizonte von A und dem Fallen des Ganges berechneten Sohle völlig übereinstimmen, wenn Messung und Zeichnung richtig sind — Die mit BD parallele EF ist das Ausstreichen des Ganges zu Tage, wenn A auf der Erdfläche ist.

266 Aendert der Gang sein Streichen hin und wieder etwas, behält aber sein Fallen, so kann man hiernach das Hauptstreichen des Ganges angeben, das ist die mittlere Richtung desselben. Man legt nämlich in dem Halbkreise über EB die Sohle ED als Chorde, so ist DB das Hauptstreichen *).

267. Aendert er beydes, das Streichen und Fallen, doch nur mässig, so nehme man das Mittel zwischen den verschiedenen Neigungen, und verfahre damit wie mit der beständigen in (265).

268. Hat man an zwey Stellen einer Grube A und B einerley Streichen und Fallen eines Ganges gefunden, und will entscheiden, ob es derselbe oder vielmehr zwey parallele Gänge sind, so beschreibe man über der söhligen Linie EB zwischen A und B einen Halbkreis und lege darinn die Sohle des Ganges für die Teufe AE als Chorde. Hat nun die Chorde des Complements DB eine mit dem Strei-

*) In dem Anhange von der Markscheidekunst, den Herr Böhm seiner Meßkunst auf dem Felde beygefügt hat, ist §. 151, die Bestimmung des Hauptstreichens ganz falsch gelehrt.

Streichen der Gänge übereinstimmende Lage, so sind sie ein und derselbe Gang, es sey denn, daß eine parallele Verrückung eines Ganges in die Fläche des andern geschehen wäre, welches man aus bergmännischen Kennzeichen entscheiden muß.

269 Trift BD nicht in das Streichen des Ganges durch B, so sind die Gänge verschieden aber doch parallel. Man ziehe nun (Fig. 81), aus E die Linie Ed unter dem Winkel dEb, welcher das Complement des Streichens mit EB ist, nehme darauf Ed gleich der Sohle für AE (Fig. 80), und setze auf Ed in d das Perpendikel db, so ist db die Linie, in welcher der zu A gehörige Gang den Horizont von B schneidet. Zieht man durch B mit bd die Parallele BD, so ist diese der Durchschnitt des zu B gehörigen Ganges mit dem Horizonte von B, und ED ist die Sohle desselben, woraus man die Tiefe von E, also auch die des Punctes A, unter der Ebene dieses Ganges, findet. Der letztere Gang kann auch unter dem erstern liegen; alsdenn fällt b über B hinaus.

270. Die Lage eines Ganges ADBC (Fig. 80) (sein Verhalten) kann man bequem und kurz durch das Fallen desselben längst der Linie FB (Fig. 80), welche in der horizontalen Ebene senkrecht auf den Durchschnitt BD des Ganges mit dem Horizonte gezogen wird, angeben. Z. E. Ein Gang fällt 70 Grad in der Stunde Meridies, 3, dieses heißt, der Gang streicht in der Stunde, 9. und kehrt gegen Mitternacht den spitzen Winkel von 70 Grad.

XII. Einige Begriffe von den Kegelschnitten.

271. Wenn man einen Kegel schief (nicht parallel mit der Grundfläche) schneidet, so entstehen nach der Lage des Schnittes gewisse Figuren daraus, die Kegelschnitte, welche mancherley merkwürdige Eigenschaften haben.

ben. Man setze in dem Kegel ABCEA (Fig. 57) das Dreyeck ABE senkrecht auf die Grundfläche, wenn etwa die Axe AF nicht senkrecht darauf steht, und verlängere die Seitenlinien AB, AE unbestimmt über B und E hinaus, zugleich auch auf der andern Seite von A, so fügt sich zu dem Kegel ABEA noch ein umgekehrter Kegel mit gemeinschaftlicher Axe und Spitze. Der schiefe Schnitt werde in e eingesetzt. Trift er die Seite AB, so ist der Schnitt eine Ellipse (in einem besondern Falle auch ein Kreis); ist er mit AB parallel, so ist er eine Parabel; trift er die jenseitige Verlängerung von BA überhalb A, also den entgegengesetzten Kegel, so machen beyde Schnitte eine Hyperbel aus.

272. Die Ellipse ist eine mehr oder weniger ablang gerundete Figur (Fig. 82). Zwey Linien AB, DE, die sich in ihrem Mittelpuncte C schneiden, theilen sie in vier gleiche und ähnliche Quadranten. Diese Linien heissen die Axen, AB die große, DE die kleine. Auf der großen Axe sind in gleicher Entfernung von dem Mittelpuncte C zwey merkwürdige Puncte F, f, die Brennpuncte. Zieht man von denselben an irgend einen Punct des Umfanges G die Linien FG, fG, so ist die Summe FG + fG = AB, der großen Axe. Daraus erhellt eine leichte Methode die Ellipse zu beschreiben. Ferner machen diese Linien mit der Berührungslinie Tt in G gleiche Winkel, TGF = tGf, so daß wenn eine spiegelnde Ebene nach der Figur der Ellipse gekrümmt und senkrecht auf die Fläche derselben gesetzt würde, die Lichtstrahlen in der Fläche der Ellipse, welche von einem leuchtenden Puncte in F ausführen, nach f hin zurück geworfen werden würden. Alle perspectivische Entwerfungen von Kreisen sind Ellipsen. Das Auge ist in der Spitze des dazu gehörigen Kegels, die Fläche des Schnittes ist die Tafel, worauf die Zeichnung geschieht. In Ellipsen bewegen sich Planeten und Kometen um die in dem einen Brennpuncte befindliche Son-

Sonne. Das Verhältniß der Axe zu der Entfernung der Brennpuncte bestimmt die Ellipse der Art nach. Je näher die Brennpuncte bey einander liegen, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise, in welchem beyde Brennpuncte mit dem Mittelpuncte zusammen fallen. Je weiter sie von einander abgehen, desto schmäler wird die Ellipse in Vergleichung mit der Länge.

273. Die **Parabel** ist eine Figur mit zwey ins Unendliche fortlaufenden Schenkeln, wie (Fig. 83). Eine Linie AX, die Axe, theilt sie in zwey gleiche Hälften. Auf derselben liegt ein Punct F, dessen Entfernung von dem Scheitel A die Figur der ganzen Parabel bestimmt. Er heißt ebenfalls der **Brennpunct**. Wenn man nämlich an einen Punct des Umfanges M aus F die Linie FM, und durch M die Parallele MN mit der Axe zieht, so machen beyde mit der Berührungslinie in M gleiche Winkel, so daß Lichtstrahlen, die parallel mit der Axe auf einen paraboliſchen Spiegel fallen, alle nach F hin zurückgeworfen werden, und umgekehrt. — Läßt man von M ein Perpendikel MP auf die Axe, so ist FM = AP + AF, woraus eine bequeme Verzeichnung der Parabel fliesset — Ferner ist das Quadrat von PM so groß als das Rechteck von AP in das vierfache von AF, so daß sich die Linien wie PM und die dazu gehörigen AP wie Wurzeln und Quadrate verhalten. In einer Parabel würden sich alle geworfene Körper (den senkrechten Wurf ausgenommen) bewegen, wenn nicht der Widerstand der Luft eine Abweichung verursachte.

274. Die **Hyperbel** besteht aus zwey zusammengehörigen, ins Unendliche fortlaufenden gleichen und ähnlichen Linien NAM, nBm, jede mit zwey Schenkeln, wie (Fig. 85). Die Linie durch die Scheitelpuncte AB, die Axe, wenn sie auf beyden Seiten nach X und Z unbestimmt verlängert wird, theilt jede dieser Linien in zwey gleiche und ähnliche Theile. Die Hyperbel hat zwey

Brenn-

Brennpuncte F, f, welche die Eigenschaft haben, daß der Unterschied zweyer Linien MF, Mf, die von irgend einem Puncte des Umfanges M an F und f gezogen werden, der Axe AB gleich ist. Wenn einer derselben ein leuchtender Punct ist, so werden die von ihm an die Hyperbel auffallenden Strahlen zurückgeworfen und zerstreut, daß ihre Verlängerungen rückwärts durch den andern Brennpunct gehen. Die Berührungslinie in jedem Puncte M macht nämlich mit FM und fM gleiche Winkel auf jeder Seite.

Durch den Mittelpunct der Hyperbel C lassen sich zwey gerade Linien DCE, HCG ziehen, denen sich die Schenkel dieser krummen Linie immer mehr nähern, ohne sie je, in einer bestimmten, noch so großen Entfernung zu erreichen. Wenn man nämlich durch irgend einen Punct der Hyperbel M die Parallele MD mit der einen Asymptote bis an die andere zieht, und durch den Scheitel A die Parallelen AI, AK mit jeder der Asymptoten, woraus das gleichseitige Parallelogramm AICK entsteht, so ist DM so vielmahl in AI enthalten, als AI oder CI in CD. Ist z. E. CD = 4CI, so ist DM = $\frac{1}{4}$CI = $\frac{1}{4}$AI. Daher ist jedes Parallelogramm wie CDML dem AICK gleich (111).

Die hyperbolischen Räume, wie AIDM, zwischen den beyden Parallelen AI und MD, dem Stücke ID auf der Asymptote und dem Bogen AM verhalten sich wie die Logarithmen von CD, wenn CD durch CI als die Einheit ausgedrückt wird, oder wachsen in demselben Verhältnisse, in welchem die Logarithmen von den Zahlen, wodurch die Linien CD mittelst CI ausgedrückt werden, zunehmen.

Zieht man durch den Scheitel auf die Axe eine senkrechte AD bis an die eine Asymptote, so ist CD = CF = Cf, der Entfernung der Brennpuncte vom Mittelpuncte.

275. Diese krummen Linien haben die Geometern sehr früh beschäftigt. Der Scharfsinn der alten griechi-

schen

schen Mathematiker in der Untersuchung ihrer Eigenschaften hat den Neuern nicht viel überlassen. Die zuletzt angeführte wichtige Eigenschaft der Hyperbel ist inzwischen eine Entdeckung der neuern Zeiten. Wer seinen geometrischen Fleiß den Kegelschnitten widmen will, wird ihn vollkommen belohnt finden.

* *

Verzeichniß

einiger Bücher zur Arithmetik und Geometrie.

C. von Clausberg demonstrative Rechenkunst. 4 Th. in 8. Erste Auflage. Leipz. 1732. In den beyden ersten Theilen die theoretische allgemeine Rechenkunst, in den beyden andern die angewandte besondere.

Reimers Anweisung zur Rechenkunst. Zweyte Aufl. Hamburg 1776 8. Sehr brauchbar, zunächst für den Kaufmann, zugleich theoretisch. Die ausführliche und genaue Vergleichung der Gold- und Silbermünzen, des Handelsgewichts, der Ellen-Fuß- und Kornmaaßen und der Maaßen flüssiger Dinge ist angenehm.

Euklidens Elemente der Geometrie bleiben immer wegen ihrer Gründlichkeit und Nettigkeit die vorzüglichsten. Nur seine Lehre von der Proportion macht dem Anfänger zu schaffen. Wer ihn, diese Lehre ausgenommen, ohne fremde Hülfe verstehen gelernt hat, ist der Geheimnisse der höhern Mathematik fähig. Hr. Lorenz hat eine deutsche Uebersetzung dieser Elemente geliefert. Halle 1781. 8. auch die sechs ersten Bücher nebst dem eilften und zwölften (die Stereometrie) noch besonders für Schüler; eben daselbst.

Kästners Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie. Dritte Aufl. Göttingen 1774. Sehr brauchbar, den neuern Zustand dieser Wissenschaften kennen zu lernen. Der Verf. bleibt nahe beym Euklides.

Seg-

Segners Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie. Zweyte Aufl. Halle 1773. Die Arithmetik sehr gelehrt. Die Geometrie faßlich, nicht ohne einigen Verstoß gegen die Strenge. Desselben Vorlesungen über die Arithmetik und Geometrie, zu eigenem Unterrichte dienlich. Dazu sind auch zu empfehlen Häselers Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie, 2 Th. Lemgo 1776. 1777. Es ist darinn zugleich ein kurzer Unterricht von der Algebra enthalten.

Eulers vollständige Anleitung zur Algebra, 2 Theile, Petersb. u. Leipz. 1771. Sehr deutlich.

Von der Feldmeßkunst hat man viele Schriften, als Penthers praktische Geometrie, die man bey den Bilderhändlern antrift; Böhms Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, erste Aufl. Frkft. u. Leipz. 1759. 4. nicht hinlänglich; Hogrevens Anweisung zur Vermessung eines ganzen Landes. Hannover u. Leipz. 1773. 8, kurz aber brauchbar. Mayers Unterricht zur praktischen Geometrie, bisher 2 Theile. Götting. 1777. 79. Sehr gründlich und vollständig, fast zu umständlich, bey weitem das Beste.

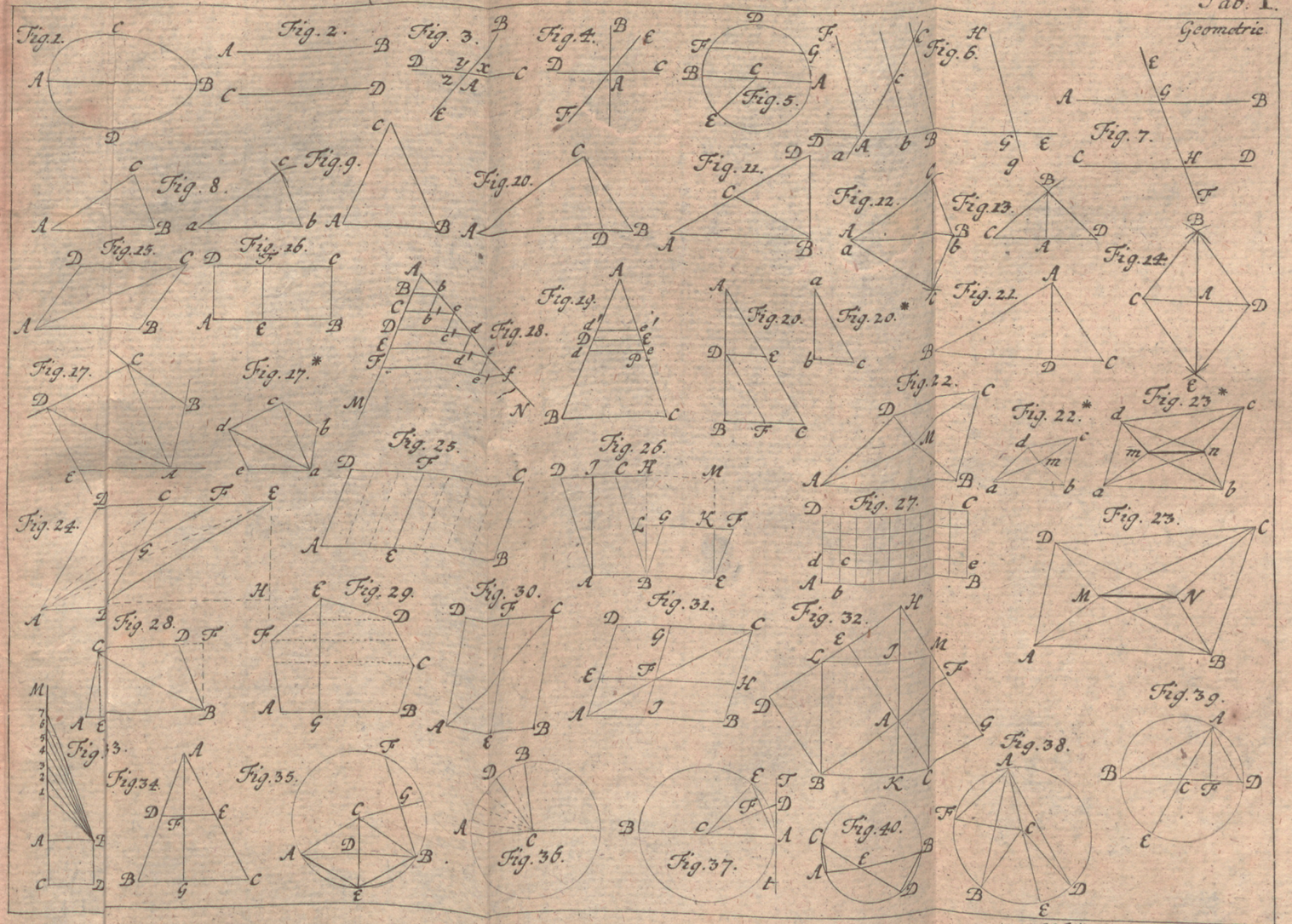
Picards Abhandlung vom Wasserwägen mit neuen Beyträgen von Lambert. Berl. 1770. 8.

(von Oppeln) Anleitung zur Markscheidekunst, Dresden 1749. 4. ein Hauptbuch. Kurz ist

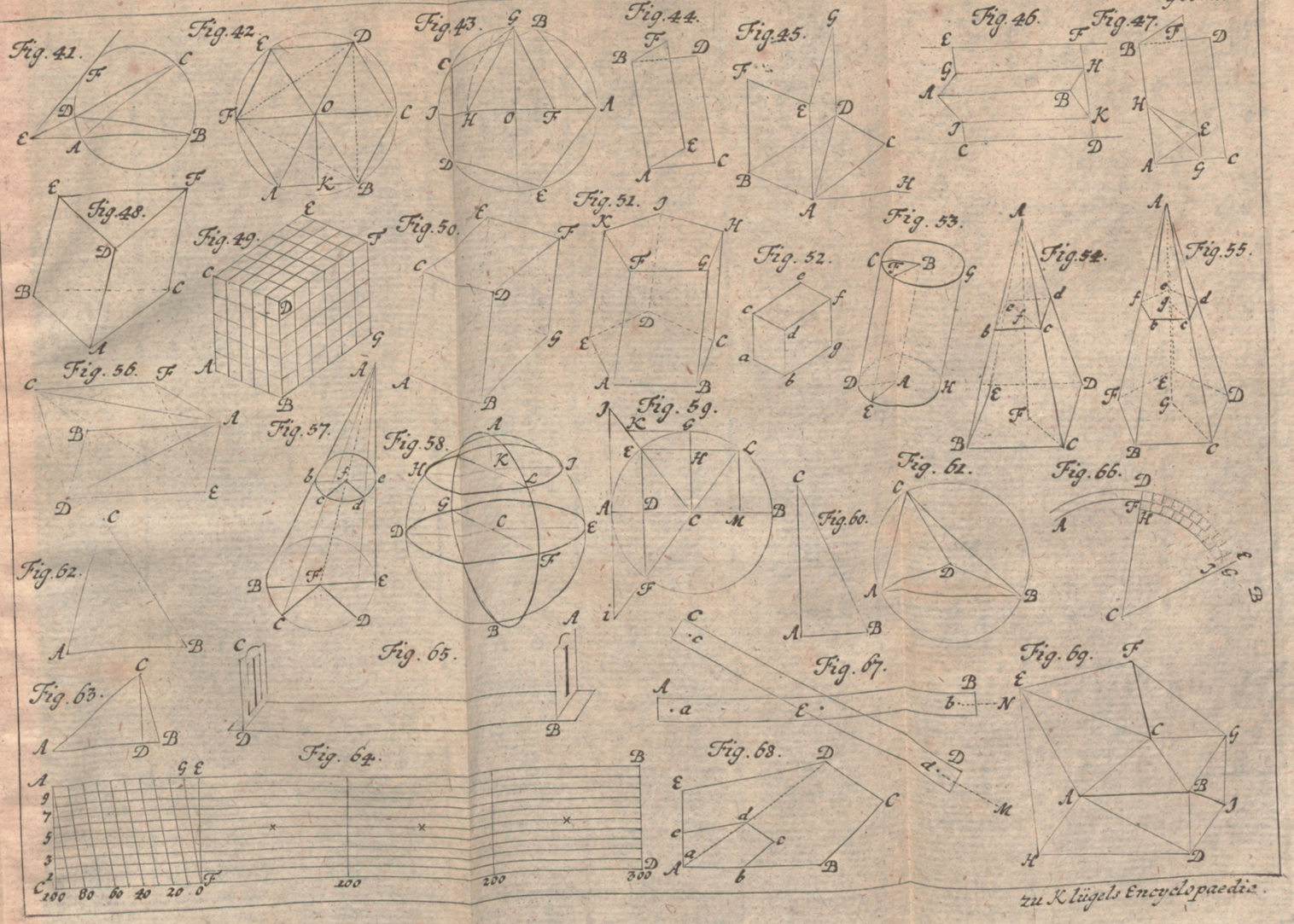
Weidlers Anleitung zur unterirrdischen Meß- oder Markscheidekunst, übersetzt. Wien 1765. 8. wozu

Kästners Anmerkungen über die Markscheidekunst, Göttingen 1775, gelehrte Erläuterungen liefern.

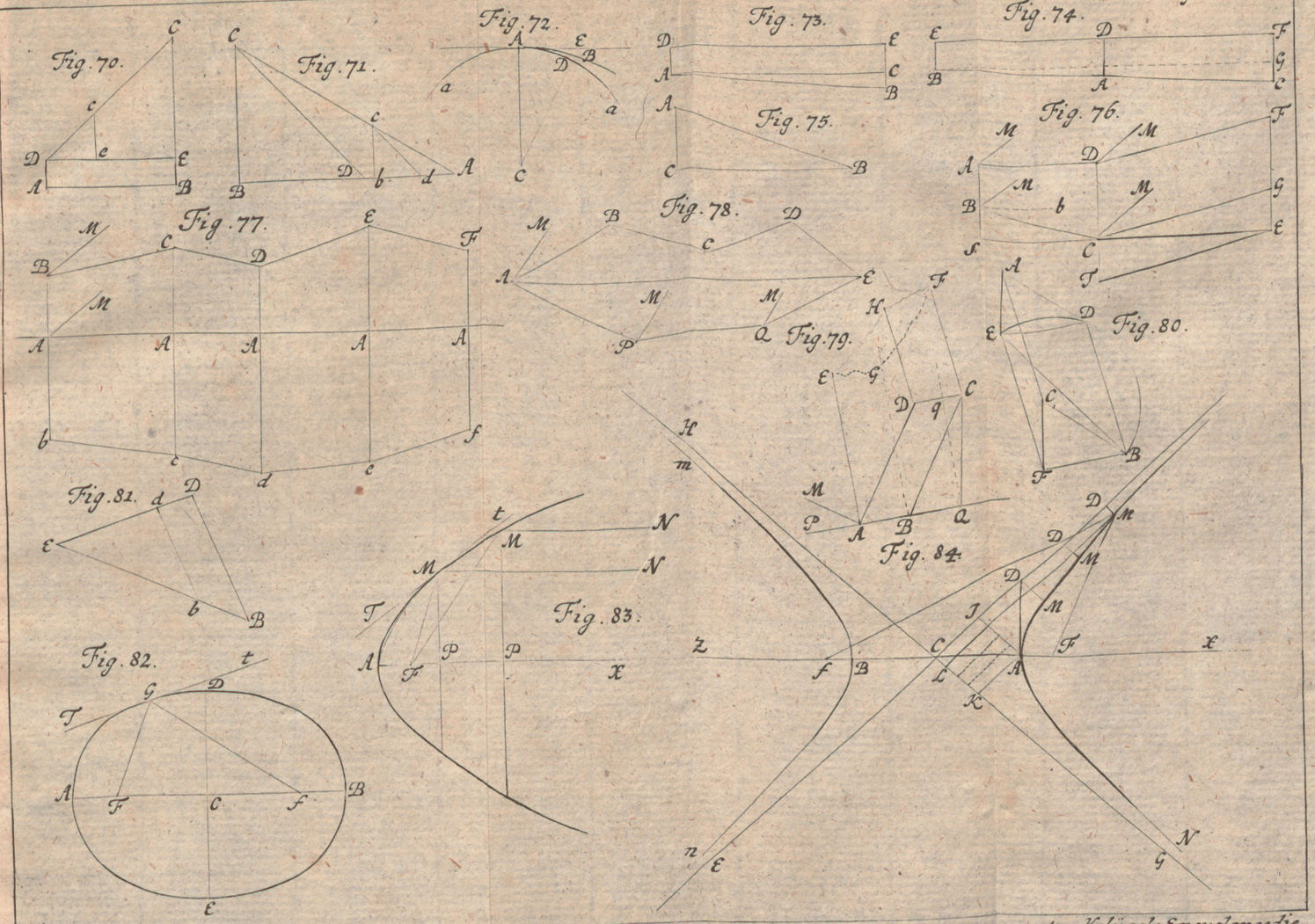
Zur Einleitung in die Mathematik überhaupt dient vortreflich die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, die ein Theil der von Hr. Büsch herausgegebenen allgemeinen Encyklopädie ist. Hamburg 1775.



Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0165
DFG



Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0167
DFG



Landesbibliothek Mecklenburg-Vorpommern Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn1842693093/phys_0169
DFG

Landesbibliothek
Mecklenburg-Vorpommern
Günther Uecker
https://purl.uni-rostock.de
/rosdok/ppn1842693093/phys_0176
DFG

Winkel geschnitten, so daß
folglich sind bc und BC

Fig. 6) bewege sich längst
l, so schneidet sie eine andere
falls unter demselben Winkel.
Lage CB kömmt, so sind, we-
nien CB, FA parallel, folg-

AC haben alle Theile dieselbe
AF gleichfalls. Die Rich-
dert sich nicht, weil die Linie
elbe Lage gegen AE behalten
Theile auf AC und BC immer

ke ACB (Fig. 6) ist die Sum-
Rechten gleich. Denn man
llel mit sich nach A in AF, so
nr. 1); FAC = ACB (29
Aber DAF + FAC +
ABC + ACB + CAB

Dreyecke und Folge-
ngen.

Dreyecken ABC, abc (Fig.
= ab: AC = ac, und der
= a, so ist die dritte Seite in
c, und die den gleichen Sei-
Winkel sind gleich, B = b;

le Figuren durch die Uebereins
vergleicht; so lege man auch