Johann Jacob Döbel

Joannis Jacobi Döbelii, Med. Dris, Eiusdemq[ue] Professoris Publici, ac Poliatri Rostochiensis. Collegium Geometricum, Aeneis figuris illustratum

Rostochi[i]: Richelius, 1677

JOANNIS JACOBI DÖBELII,
Med. Dris, Ejusdemq; Professoris Publici,
ac Poliatri Rostochiensis.

COLLEGIUM GEOMETRICUM,

Æneis figuris illustratum,

Cum Additamento

De

RADICIS QVADRATÆ & CUBICÆ Extractione.

ROSTOCHI,
Typis JACOBI RICHELII, Sen. Typog. ANNO M DC LXXVII.

UNIVERSO
INCLUTÆ CIVITATIS ROSTO-
CHIENSIS
SENATUI,
VIRIS
NOBILISSIMIS, AMPLISSIMIS,
CONSULTISSIMIS, PRUDEN-
TISSIMIS,
DNIS
CONSULIBUS,
SYNDICIS,
SENATORIBUS,
&
PROTONOTARIO,
Fautoribus & Amicis ſuis
honorandis,
COLLEGIUM HOCCE,
CUM OMNIGENÆ PROSPERITATIS
VOTO,
SACRUM ESSE JUBET
AUCTOR.

DE GEOMETRIA

PROOEMIUM.

AGnoſcit Geometriæ vox æq; ſtrictam ac latam ſignificationem. Stricta eſt, qvâ ſoli tribuitur menſurationi agrorum, & Geodeſiæ nomine in ſpecie venit. Eam Herodotus, *l. 2. p. m. 56. fin.* ob annuam Nili inundationem, ab Ægyptiis, ad Græcos tranſcendiſſe tradit. Qvum autem, Joſepho teſte, *I. Antiqv. 4.* ante diluvium jam Aſtronomiæ fuerit notitia, qvæ ſine qvantitatis continuæ dimenſione, præſuppoſitâqve Geodæticâ cognitione, expediri neqvivit: videtur omninò Geometria altiùs ducenda. *conf. Id. ib. c. 8.*

II. Lata ſignificatio eſt, qvâ adſcribitur Scientiæ, omnis generis qvantū cōtinuū terminatū, ejusq; affectiones menſurāti. Continuum dicitur, ad differentiam Diſcreti, in Arithmeticâ conſiderandi.

III. Illius verò uti genera ſunt tria: Linea, Superficies, Solidum, ſ. Mathematicum corpus; ita Affectiones geminæ: aliæ

Physicæ, aliæ Geometricæ. Illarum potissima est, Facultas occupandi certum locum, & huic similes, qvæ non sunt hujus loci. Geometricæ sunt qvatuor: 1. Contactus, 2. Sectio, aliàs Divisio vel Partitio dicta, 3. Comparatio in æqvalitate vel inæqvalitate, 4. hinc resultans Proportio.

IV. Hoc sensu sumptæ Geometriæ objectum *Principale* est Qvantitas continua: *Repræsentativum* sunt Figuræ, s. Schemata, ab Artificibus, melioris doctrinæ gratiâ, introducta.

V. Dividitur Geometria in Theoreticam & Practicam. Theoretica tractat (1) Definitiones terminorum, (2) Problemata, (3) Theoremata, (4) Trigonometriam, s. resolutionem triangulorum planorum, per Sinus tangentes & secantes. Practica absolvitur mensuratione Linearum, Planorum, Solidorum. Prima dicitur Euthymetria, comprehendens sub se (1) Longimetriam, (2) Altimetriam, (3) Profundimetriam, (4) Aqvarum librationem. Secunda, Embadometria s. Agrimensoria, absolvitur Geodæ-

siâ

ſiâ dictâ, l. arearum inqviſitione & diviſione. Tertia, Stereometria, tractat (1) Solidi inveſtigationem & diviſionem, (2) Cadorum menſurationem.

GEOMETRIÆ THEORETICÆ
SECTIO PRIMA.
Exhibens Definitiones Terminorum.
ARTICULUS PRIMUS, DE LINEIS.

I. PUNCTUM *Phyſicis* qvidem eſt Corpus exiguæ qvantitatis, qvod imbecillitas noſtra ulterius dividere neqvit, ut Atomus: *Opticis* verò eſt omne viſibile. *Aſtronomis*, Corpus cujuscunqve qvantitatis, modò cum alio collatum omnem perdat rationem: qvale Terra eſt, reſpectu Cœli; Mons, reſpectu totius terræ. *Geometris* dicitur Signum individuum, vel, juxta Archimedem, ultimus omnis continuæ qvantitatis terminus: utut etiam citra qvantitatem continuam ſeorſim ponatur.

II. LINEA eſt Longitudo ſine latitudine, cujus extrema ſint puncta. Eſtq; alia *recta*, alia curva, alia mixta.

III. LINEA RECTA eſt breviſſima omnium earum, qvæ duci ab uno puncto ad alterum possunt. ut AB.

IV. CURVA est: qvâ ductâ, intra suos terminos brevior aliqva duci potest, ut ACB, ADB.

V. MIXTA est, qvæ & rectâ & curvâ constat, ut EF.

VI. LINEA IN INIFINITUM DUCI dicitur, qvæ ad lubitum, citra determinatam longitudinem producitur.

VII. LINEÆ PARALLELÆ sunt æqvaliter inter se distantes, neqve, in infinitum licet productæ, unqvam concurrentes, ut GH, IK.

VIII. LINEA PERPENDICULARIS est, qvæ recta super aliam rectam incidens, neutrorsum inclinat; sed facit angulos Deinceps inter se æqvales. ut LM, ad NO.

IX. SECARI duæ lineæ dicuntur, qvæ invicem in aliqvo puncto concurrentes, ulterius versus oppositam partem tendunt. ut PQ & RS in T.

X. QVOD si verò neutra eorum, aut altera tantùm non tendat versus partem oppositam; CONCURRERE tantùm dicuntur. ut .h l. PT cum RS.

XI. CONTINGERE, aut TANGERE linea

linea recta curvam dicitur, qvando illa huic ita concurrit, ut, qvantumvis utraqve earum in infinitum producatur; tamen se non secent. velut UX, & YZ, in A. Propriè tamen loqvendo, ex curvis tantùm circulares se tangere dicuntur. ut BC in D. Recta verò, curvam contingens, TANGENS appellatur.

ARTICULUS SECUNDUS, DE ANGULIS.

I. ANGULUS est inclinatio duarum linearum, se invicem vel tangentium, vel secantium. Priorum exemplum in est LMO, LMN: Posteriorum, in PTS, PTR, STQ, QTR. Notatur scilicet omnis angulus tribus literis: qvarum media ipsum angulum designat.

II. Lineæ, angulum comprehendentes, sunt CRURA. v. g. LM, MO.

III. RECTILINEUS angulus est, qvi comprehenditur lineis rectis. ut PTR. &c. CURVILINEUS, qvi lineis curvis. ut BDC. MIXTILINEUS, qvi rectâ & curvâ. ut UAY. XAZ. Qvilibet horum est duplex: contactûs & sectionis.

IV. CONTACTûs angulus est, qvem facit Tangens cum suâ curvâ. v. g UAY,

v. SECTIONIS angulus eſt, qvem facit recta, ſecans curvam. ut EIG. HIF.

VI. Qvandoqvidẽ verò recta rectam ſecans, qvatuor facit angulos: duo illi, qvi ab unâ communi lineâ conſtituuntur, ut ſint dimidia pars totius; dicuntur ANGULI DEINCEPS, vel VICISSIM, vel ALTERNI, Germanis die Nebenwinckel. Sic angulus STP, eſt ipſi PTR; & angulus PTR, eſt ipſi RTQ DEINCEPS. Contra

VII. VERTICALES, Eck-oder Hauptwinckel ſunt, qvorum vertices ad idem punctum per crucem ſunt oppoſiti. v. gr. RTQ eſt verticalis ipſi PTS. item STQ, eſt verticalis ipſi PTR.

VIII. ANGULUS RECTUS eſt, cui angulus deinceps eſt æqvalis. ut LMO, LMN. Alias dicitur: cujus crura inter ſe ſunt perpendicularia. vel, qvi 90 gradibus conſtat.

IX. OBLIQVUS angulus eſt, cujus crura inter ſe ſunt inclinata, eſtqve vel obtuſus, vel acutus. OBTUSUS eſt recto major, ut *h. l.* PMO: ACUTUS, minor. ut *h. l.* PMN. unde obtuſus nonaginta gradus ſuperat, acutus nondum attingit.

X. AN-

x. ANGULI SIMILITER SITI ſunt, qvi à diverſis parallelis, in tertiam lineam incidentibus ad eandem plagam conſtituuntur. ut *Sch.* * ZBX, & ZAB Qvod ſi in eodem Schemate easdem parallelas in punctis, v. g. E, A, D, B, ſecuerint Rectæ FG, HI, anguli FEQ & UAG, item HDR & XBI, dicuntur externi & oppoſiti: ſed DEY & ZBA, ſunt oppoſiti interni.

ARTICULUS TERTIUS,

DE FIGURIS PLANIS RECTILINEIS.

I. FIGURA, (itē Schema, Superficies &c.) eſt Lineatū undiq; terminatū. Igitur nec angulus nec parallelæ rectilineæ, ſunt figuræ, qvia non undiqve terminantur.

II Eſt verò plana omnis vel rectilinea, vel curvilinea. ILLA breviſſima eſt intra ſuos terminos, neq; ad ullam intra eos partem declinat. Hujus contra latera ſunt partes circuli, unde & deflectit. ut *Fig. I.* A B. Ad Illius terminationem reqviruntur lineæ ad minimum tres: Huic terminandæ una ſufficit, ut Peripheria, circulo. Harum uſus freqventiſſimus eſt in Aſtronomiâ: Illarum, in Geometria.

III. AREA ſuperficiei eſt contentum

cujusvis figuræ, extremis nõ consideratis.

IV. Termini, claudentes superficiẽ, EXTREMA, itemq; LATERA appellantur. In Triangulis verò latus infimum, respectu nostri, BASIS est. ut *Fig. II.* DF. cetera CRURA, dicuntur. ut ED, EF. Qvumq; in omni Triangulo subtendi angulus dicatur, qvando est oppositus certo alicui lateri, ut v. g. angulus *DFE*, lateri DE; vocatur hoc *latus* oppositum, SUBTENDENS. Ceterum Rectilinea figura est vel Triangula, vel Qvadrangula, vel Multangula.

V. Triangulum est figura, tribus lineis comprehensa. ut *Sch. II.* DE, EF, FD,

VI. Itaq; planum Triangulum consideratur ratione vel angulorum, vel laterum.

VII. Angulorum Ratione, est vel rectangulum, vel obliqvangulum.

VIII. RECTANGULUM s. ORTHOGONIUM est, cujus unus angulus est rectus. ut *Sch. III.* H G I.

IX. Infimum hujus Trianguli latus BASIS nomen retinet; cetera proprium sibi vendicant: ut crus, sive linea, angulum

lum rectum subtendens, h. l. H I. HYPOTHENUSA, sive SUBTENSA; basi verò perpendiculariter insistens, h. l. H G, CATHETUS in specie dicatur.

x. Triangulum OBLIQVANGULUM est; cujus omnes anguli sunt obliqvi. Estq; vel obtusangulum, vel acutangulum.

XI. TRIANGULUM OBTUSANGULUM, s. AMBLIGONIUM est, qvod habet unum angulum obtusum, ut *Fig. IV.* K L M.

XII. ACUTANGULUM s. OXYGONIUM TRIANGULUM est, cujus omnes anguli sunt acuti, ut *Sch. V.* NOP, OPN, PNO.

XIII. Ratione laterum, triangulum aut est Æqvilaterum, aut Æqvicrurum, aut Scalenum.

XIV. ÆQVILATERUM seu ἰσόπλευρον Triangulum est, cujus omnia latera inter se sunt æqvalia, ut *citat. Sch.* NO, OP, PN.

XV. ÆQVICRURUM s. ISOSCELES est, cujus duo tantùm latera sunt æqvalia, ut *Schem. VI.* RS, & ST.

XVI. SCALENUM, h. e. planè irregulare, est: cujus omnia latera sunt inæqvalia, ut *Sch. IV.*

XVII. QVADRANGULA SUPERFICIES

A 5 est,

eſt, qvæ clauditur qvatvor extremis. Ejus ſpecies ſunt: Parallelogrammum qvadratũ & oblongũ, Rhombus, Rhomboides, Trapezium rectangulum & obliqvangulum.

XVIII. PARALLELOGRAMMUM QVADRATUM eſt, qvod rectangulum & æqvilaterum. ut *F. VII.* Aliàs omnis qvadrilatera figura, ſive rectos, ſive obliqvos habeat angulos, modò oppoſita latera ſint parallela, ut Rhombus & Rhomboides, in genere Parallelogrammum appellatur.

XIX. OBLONGUM PARALLELOGRAMMUM eſt, cujus omnes qvidem anguli ſunt recti, latera tamen bina oppoſita tantùm inter ſe æqvalia, ut *F. VIII.* AB. & CD, item AC & BD. Alii κατ' ἐξοχὴν hanc figuram parallelogrammum appellant.

XX. Nota heic: in parallelogrammis OPPOSITOS ANGULOS dici, ex qvorum uno ad alterum duci poteſt linea, intra figuram cadens. v. g. *F. IX.* Angulus ad C eſt oppoſitus angulo ad B; angulus ad A, eſt oppoſitus angulo ad D, & vice verſâ.

XXI. Linea ab oppoſito angulo ad oppoſitum ducta, DIAGONALIS vel etiam DIAMETER PARALLELOGRAMMI eſt, ut *F. IX*, GF.

XXII. In ejusmodi Diagonali, si eligatur punctum v. gr. *h. l.* I, perq; illud ducantur duæ rectæ, ad angulos rectos se secantes, v. gr. *h. l.* KL, MN; erunt QVATUOR PARALLELOGRAMMA: qvorum duo, qvæ diagonalis transit, *h. l.* KIGN, & MIFL, CIRCA DIAMETRUM CONSISTERE; reliqva duo, h. l. EMKI, ILNH, SUPPLEMENTA vel COMPLEMENTA dicuntur.

XXIII. GNOMON dicitur unum parallelogrammum, qvod est circa Diametrum, cum duobus Complementis. v. g. h. l. KIGN, est *Gnomon*, cum EMKI, & ILNH, *complementis*.

XXIV. RHOMBUS, die Rauten Vierung / est parallelogrammum obliqvangulum æqvilaterum, *vel*, est figura qvadrilatera, habens qvatvor qvidem latera æqvalia, & bina binis parallela; angulos verò duos oppositos obtusos, sibiq; æqvales; reliqvos duos acutos, sibi etiã æqvales. ut *F.X.*

XXV. Differt ab hoc RHOMBOIDES, qvod sit parallelogrammum obliqvangulum inæqvilaterum. Utut enim etiã duos habeat angulos obtusos, & duos acutos, sibi oppositos; tamen non nisi ea la-

tera

tera sunt æqvalia, qvæ sibi sunt opposita. v. gr. *F. XI.* latus OP tantùm est æqvale lateri QR; & latus OQ, lateri PR.

XXVI. TRAPEZIUM est figura omnis qvadrilatera, cujus latera omnia invicem non sunt parallela & æqvalia. Communiter distingvitur, in rectangulum & obliqvangulum.

XXVII. TRAPEZIUM RECTANGULUM est, cujus duo qvidem latera sibi opposita sunt parallela; sed inæqvalia, ut *F XII.* RS, TU; & tertium RT, ad utrumq; perpendiculare.

XXVIII. TRAPEZIUM OBLINQVANGULUM est, qvod nec latera parallela, nec angulum rectum agnoscit, ut *Fig. XIII.*

XXIX. MULTANGULUM est figura, ex pluribus, ac qvatvor angulis & lateribus.

XXX. Distingvitur in ORDINATUM & INORDINATUM. *Illud* singulos angulos, & omnia latera, inter se habet æqvalia. ut QVINQVANGULUM, SEXANGULUM, SEPTANGULUM, OCTANGULUM. v. Fig XIV. ad XVII. *Hujus* verò latera & anguli inter se sunt inæqvales, ut *Fig. XVIII.*

XXXI. FIGURÆ SIMILES sunt, qvæ, æqviangulæ

gulæ, latera circa æqvales angulos habēt proportionalia. ut *Fig. XIX.* ABC, DEF.

XXXI. ALTITUDO FIGURÆ est linea perpendicularis, à vertice in basin, si opus fuerit, producta. ut *F. XX.* AB, CD.

ARTICULUS QVARTUS, DE PLANIS CURVILINEIS.

I. FIGURA PLANA CURVILINEA distingvitur in simplicem & compositam. *Illam* solus constituit circulus. *Hæc*, qvia inæqvaliter distat à centro, multiformis est: ut ex figuris ovalibus, s. denticularibus & spiralibus, patescit: qvæ, qvò Circulo sunt propriores; eò sunt perfectiores.

II. CIRCULUS est figura plana, uno extremo ita terminata, ut ejus ex puncto medio, ad extremum lineæ ductæ, omnes inter se exurgant æqvales. velut *Fig. XXI.* CA, CB, CD, CE, CF.

III. Punctum medium, h. l. C, non secus, ac in omni figurâ, rectilineâ aut curvilineâ, CENTRUM; Extremum verò, h. l. A E B G, PERIPHERIA, CIRCUMFERENTIA, vel PERIMETRUS appellatur.

IV. Dimidium peripheriæ, h. l. A G B, SEMIPERIMETRUS, itemq; abusivè SEMI-

CIR-

CIRCULUS; aſt hujus rurſus dimidium, h. l. AG, GC, GA, QUADRANS appellatur.

v. Ex centro C, ad peripheriam ducta linea h. l. CA, CB, CD, &c. RADIUS, aliàs SEMIDIAMETER vocatur. In Doctrina Triangulorũ dicitur SINUS TOTUS. Ab uno verò puncto peripheriæ ad alterum, per centrum ducta, DIAMETRUS audit. qvalis h. l. AB.

VI. Ab uno peripheriæ puncto ad alterum, extra centrum ducta, ut *Fig. XXII*. HI, CHORDA eſt. Pars verò peripheriæ, major ac minor, qvã intercipit chorda, HI, ARCUS. Area deniq; à chorda & arcu intercepta, CIRCULI SEGMENTUM.

VII. Hoc commodè diſtingvitur in MAJUS & minus. *Illud* eſt portio major ſemicirculo, ut HLI: *Hoc*, minor. ut HKI.

VIII. Linea, à chordæ medio puncto perpendiculariter ad peripheriam ducta, SAGITTA vocatur. qvalis h. l. KM.

IX. SINUS RECTUS eſt linea, inſiſtens diametro perpendiculariter, extra ejus centrum, ad peripheriam ducta h. l. PQ. Sed ea Diametri portio, qvæ intercipitur centro circuli, & puncto eo, cui inſiſtit cùit ſinus rectus eſt, SINUS VERSUS h. l. NQ.

X. SECANS eſt linea recta, ex Circuli centro, ultrà peripheriam ducta, donec concurrat circuli Tangenti. ut h. l. RS. Secans, ad OS, Tangentem, de qvo ſupra. Locus autem, ubi Tangens radio ſ. ſemidiametro jungitur, eſt PUNCTUM CONTACTûs ut h. l. O, faciens ANGULUM CONTACTUS, h. l. SOR.

XI. SECTOR CIRCULI eſt figura, à Peripheria & rectis, è centro eductis, comprehenſa, ut h. l. KRT, cujus angulus dicitur ANGULUS SECTORIS.

Eſt verò Sector vel MAJOR vel MINOR, ratione portionis peripheriæ & ſemicirculi. Sic, dictus modò Sector KRT, eſt minor: reliqva verò portio, RTIOLNHPK, ſector major.

XII. ANGULI SEGMENTI ſunt, qvos faciunt chorda & arcus. h. l. KIM, it. IM, K.

XIII. ANGULI IN SEGMENTO ſunt qvi à duabus rectis, ex eodem peripheriæ puncto, ad concurſum chordæ & arcûs ductis, intercipiuntur. h. l. HKI.

XIV. Angulus INSISTENS PERIPHERIÆ dicitur, qvem faciunt duæ rectæ, ex peri-

peripheriæ puncto, intra circulum, donec in duobus aliis ejusdem peripheriæ punctis concurrant, productæ. Sive, cujus basis est pars peripheriæ, dum crura cũ intercipiunt, ut *F. XXIV.* ABC, ADC.

XV. SIMILIA CIRCULI SEGMENTA sunt, qvæ capiunt angulos æqvales. h. l. ABC & DEF.

XVI. CIRCULI ÆQVALES sunt, qvorum diametri aut radii sunt æqvales. ut *Fig. XXV.*

XVII. LINEÆ æqvaliter à centro DISTANTES sunt, si perpendiculares, à centro ad eas ductæ, sint æqvales. ut *Fig. XXVI.* FG & KD, æqvales à centro erunt AM, AN.

XVIII. FIGURA FIGURÆ INSCRIPTA est, cujus anguli latera tangunt, ut *Fig. XXVIII.* GHI. contrà, FIGURA FIGURÆ CIRCUMSCRIPTA cum latera tangunt angulos, h. l. LM. N. FIGURA CIRCULO INSCRIPTA dicitur, cujus anguli tangunt peripheriam, ut *Fig. XLI.* OPQ, FIGURA CIRCULO CIRCUMSCRIPTA, cum latera peripheriam tangunt. ut *Fig. XXIX.* RSTU.

XIX. Ex curvilineis compositis est

(1) ELLI-

(1) ELLIPSIS, si planum rotundo-oblongum, duobus æqvalium arcuum oppositorum paribus terminatum. *ut Fig. XXX.* (2) OVALE, qvod, tribus vel qvatvor inæqvalibus arcubus constans, figuram ovi repræsentat. *ut Fig. XXXI.* (3) SPIRA, qvæ est revolutio, sive circulus, in seipsum non recurrens. ut *Fig. XXXII.* Ceteras infreqventiores non attingo.

ARTICULUS QVINTUS DE CORPORIBUS.

I. CORPUS, item SOLIDUM, est qvantitas, longitudine, latitudine, & profunditate constans. Eaq; vel est *rectilatera*, cujus latera HEDRÆ i. e. SEDES appellantur; vel *curvilatera*.

II. Utriusq; Diameter dicitur AXIS, ut *Fig. XXXIII.* AE: sūtq; axis termini, Poli; ut A & E. Extremum verò *SUPERFICIES*, qvæ in rectilateribus plana est: in curvilateribus, concava vel convexa.

III. Rectilateri corporis species sunt: (1) Pyramis, (2) Prisma, cujus iterū species sunt (α) Parallelobipedum, (β) Polyëdron mistum.

IV. PYRAMIS est corpus planum, cujus omnes Hedræ, præter eam, qvæ basis est, triangula sunt. Qvantumvis enim ipsa qvoq; basis triangula esse qveat; necessum tamē id adeò non est, ut in reliqvis hedris: unde in definitione negligitur.

v. Habet verò speciale Pyramis nomen, partim à numero angulorum, qvibus basis constat; partim à lateribus hedrarum suarum. Ab *illis*, dicitur Pyramis TRIGONA, cujus basis trilatera fuerit: vel TETRAGONA, cujus qvadrilatera. Ab *his* verò, vel ÆQVITERMINA, qvæ qvatvor trigonis isopleuris comprehenditur, unde TETRAĒDRUM ORDINATUM vocatur, ut *Fig. XXXIV.* ABC; vel INÆQVITERMINA, qvæ trigonis non isopleuris continetur. ut *Fig. XXXV.* DEF.

vi. PRISMA est solidum, cujus ad minimum duæ hedræ sunt parallelæ, similes, æqvales. *Vel*, est columna laterata, æqvalis undiq; crassitiei, cujus bases oppositæ sunt æqvales, similes, parallelæ. ut *Fig. XXXVI.* Qvot angulis itaq; constiterint bases dictæ: tot latera Prisma continebit. Unde distinguitur (1) à basium figurâ, in TRIANGULUM, QVADRANGULUM, & PEN-

PENTAGONUM &c. (2) à multitudine omnium planorum, prismatum, in PARALLELOBIPEDUM & POLYEDRON mistum.

VII. PARALLELOBIPEDUM est, cujus binæ hedræ oppositæ semper sunt parallelogramma: estq; vel qvadratum absolutè dictum, vel oblongum.

IIX. Qvadratum absolutè dictum est CUBUS, describiturq; per parallelobipedũ rectangulũ, cujus sex hedræ sint qvadratæ & æqvales, ut *Fig. XXXVII.* NOPQ.

IX. Oblongum parallelobipedum, totuplex est, qvotuplicia sunt reliqva parallelogramma. Qvod si enim ex sex parallelogrammis qvatuor fuerint oblonga, duo brevia, qvaliter trabes plerumq; asciari solent; erit PARALLELOBIPEDUM OBLONGUM. Sic RHOMBUS est, cujus sex parallelogramma æqvilatera qvidem sunt; sed obliqvangula; RHOMBOIDES, cujus sex parallelogramma neq; rectangula fuerint, neq; omnia æqvilatera; Huc *alii* TRAPEZIũ referũt: etsi ejus opposita plana neq; parallela sint, neq; æqvalia.

X. POLYEDRON MISTUM est, qvod pluribus, qvàm sex hedris æqvalium inter se terminorum constat. Distinguitur in id, qvod est vel triangulæ vel qvinqvangulæ basis. Illius generis sunt, Octaëdron & Icosaëdron. Hujus est Dodecaëdron. OCTAËDRON est Polyedron mistũ, octo; ut *Fig. XXXVIII*. ICOSAËDRON verò, viginti triangulis solidis æqvilateris constans. ut *Fig. XXXIX*. Dodecaëdron deniq; est Polyedron, duodecim qvinqvangulis solidis æqvilateris comprehensum. ut *Fig. XL*.

XI. Curvilaterorum corporum species sunt (1) Sphæra s. globus, (2) Conus, (3) Cylindrus.

XII. SPHÆRA est corpus, unicâ tantûm superficie terminatũ, cujus radii omnes inter se sunt æqvales. ut *Fig. XXXIII*.

XIII. CONUS est solidum, à circulari basi in apicem ascendens. *sive*, est Pyramis rotundæ baseos. ut *Fig. XLI*.

XIV. CYLINDRUS est solidum, duabus circularibus basibus, inter se parallelis & æqvalibus, reliqvâ verò superficie tereti comprehensum, *ut Fig. XXXII*.

XV. Omnia verò adducta corpora distinguuntur in regularia & irregularia. Regularia dicuntur, qvorum omnia plana na, qvibus continentur, ſunt æqvalia, æqvilatera, æqviangula. Talia *ex planis* tantùm ſunt Tetraëdron, Hexaëdron ſeu Cubus, Octaëdron, Dodecaëdron, & Icoſaëdron: *ex gibbis*, Sphæra. Hæc inter, qvatuor dicuntur reciproca: Cubus, Octaëdron, Dodecaëdron, & Icoſaëdron.

CAPUT SECUNDUM, EXHIBENS PROBLEMATA,

Sive Propoſitiones practicas, Figuram Geometricè conſtruere docentes.

ARTICULUS PRIMUS, DE LINEIS.

Probl. I. Regulam examinare, qvâ eſt ducenda linea recta.

Duci rectam communiter ope vel (1) Regulæ, punctis in exiguo plano datis applicatæ; vel (2) amuſſis, in planis longioribus, cretâ, rubricâ, atramento, carbone oblitæ; vel (3) in planis longiſſimis, radio optico, baculisq; erectis, aut dioptrico etiam inſtrumento; illud verò notius eſt noto. Sed ad examinandum *Fig. I.* regulæ A, latus CD, duc ſtylo lineam, juxta idem latus: poſt verſam regulam ita, ut C ſit poſitũ in loco B, Latus a, inferius, ſuperius redditum, applica lineæ ductæ, atq; ad hujus terminos, aliam eodem stylo lineam, forma. Hæc si priori omni ex parte respondeat; erit regulæ DC latus rectum: sin alicubi congruat; erit regula ad normam revocanda. Eodem modo alterum qvoq; probabis regulæ latus.

Probl. II. Rectam, regulâ longiorem, per data puncta dissita ducere.

Sint data puncta *Fig. II.* EF connectenda: ducantur itaq; ex E & F eâdem circini divaricatione, lineæ semissem superante, arcus LM & NO. ex horum porrò punctis intersectionis, describantur ulterius arc' PR & RS *it:* TU & YX, sese secantes in Z & *a*. Jam applicetur regula ex E ad Z: mox, ex Z in *a*: iterum, ex *a* in F. Siq; nondum suffecerit ejus longitudo; repetatur idem labor arcuum ex Z & *a*, vel *a* & F, & sic conseqventer, qvamdiu opus fuerit, producendorum. *Nota:* In Schematibus Mathematicis, melioris perceptionis gratiâ, qvosdam ductus *continuo colore* pingi, qvosdam *punctulis* duntaxat declarari: qvòd *Illi* in structurâ, qvæ vel in Praxi ipsâ adhibenda erit, aut in aliis conce-

conceptibus, privatim enucleandis, ſint neceſſarii: *Hi* verò docendi tantùm & demonſtrandi gratià adhibeantur.

III. *Datam rectam terminatam biſecare.*

E terminis AB, *Fig. III.* velut centris, deſcribantur ad utramq; lineæ plagam, bini arcus occulti, concurrentes in C & D. Tùm ducta per hos concurſus linea CD, biſecabit datam AB in E. *Euclid. l. 1. prop. 3.* Qvod ſi ab altero lineæ latere non detur ſpatium arcuum deſcribendorum; ſufficit, *Fig. IV.* in eodem latere duos arcus parvos, in C & D ſeſe interſecantes, ex iisdem centris AB duxiſſe, lineâq; CE, datam rectam diviſiſſe.

Si etiam data recta fuerit major, qvàm, ut circini divaricatio, ab extremitatibus, ſemiſſem ejus ſuperare qveat; abſcindantur ab extremitatibus *Fig. V.* pro lubitu, ſed rationabiliter, æqvalia ſegmenta AC, BD, & reſiduum intermedium biſecetur modo dicto.

IV. *Datæ lineæ rectæ parallelam ducere, per datum punctum, & ad datum intervallum.*

Sit lineæ datæ AB, *Fig. VI.* parallela ducēda, per punctū C. Ex C itaq; velut centro, describatur arcus occultus DE, lineam datam exactè tangens: tùm eodem radio describatur arcus FG ex centro B; & ducta recta per C, ad arcûs FG contactum, erit ipsi AB parallela. Qvod si, *Fig. VII.* datæ AB, parallela ducenda sit, intervallo CD; describe ex ipsis terminis AB, radio CD, arcus occultos EF, EG, & ducta recta GH, utrumq; arcum exactè tangens, erit parallela Lineæ AB.

V. *Datam rectam in partes imperatas, quotquot eæ fuerint, æqualiter secare.*

Si partes imperatæ numeri fuerint paris, orti ex duplâ ratione, incipiente à 2; secetur tota bifariam, & sectæ partes vicissim bifariam: & nancisceris partes æqvales qvatuor. Hæ, vicissim bifariam sectæ, dant partes æqvales octo. & sic porrò. Verùm, si alia ratione dividenda sit *v. gr. Fig. VIII.* AB, in partes inæqvales septem; ducantur è terminis AB, duæ rectæ, BD, AC, inter se parallelæ, in infinitum. Tum ab A incipiendo, abscindantur ex lineâ AC, æqvalia segmenta, voluntariæ magnitudinis, AE, EF &c. numero ſex, h. e. ſemper uno pauciora, qvàm, in qvot partes ipſa data linea AB eſt dividenda. Similiter totidem, & prioribus æqvalia ſegmenta, abſcindantur ex rectâ BD: ſcil. BL, LM. &c. Deniq; connectantur puncta diviſionum ED, FP, &c. lineis rectis: & erit data AB ſecta in partes æqvales ſeptẽ imperatas. AQ, QR, RS, &c.

VI. *E datæ rectæ puncto, perpendicularem erigere.*

Sit datum, *Fig. IX.* in lineâ AB, punctum D. Ex hoc reſecentur æqvalia ſegmenta DC, & DF. Deinde biſecetur *juxta prop. 3.* ſegmentũ CF, per lineam DE: & habebis perpendicularem qvæſitam. Si verò perpendicularis *Fig. X.* erigenda ſit in ipsâ datæ lineæ extremitate A; eligatur centrum I extra lineam, radioq; IA deſcribatur ſemicirculus occultuâ UAO, ductâq;, ex O, per I, rectâ occultâ OU, peripheriam in U interſecante; erit recta, per U in A demiſſa, perpendicularis. *vel*, producatur data ex A, occultè in AC, & fiat operatio per tertiam propoſitionem.

Si

Si *Fig. XI.* extra lineam datam AB, punctum fuerit, v. g. F, ex qvo ſit perpendicularis demittenda; deſcribatur ex dato puncto arcus occultus, qvi lineam AB interſecet duobus punctis, I & H. Poſt biſecetur I H, per propoſitionem tertiam, ductaq; recta FG, erit perpendicularis qvæſita.

Si punctum C, extra lineam AB, datæ AB extremitati ferè reſpondeat; Figatur alterum circini crus in datæ locum qvemcunq; v. gr. *Fig. XII.* in D, ducaturq; arcus EF per C, item ex oppoſito, arcus GH, mutatoq; circini loco, v. g. in I, deſcribatur denuò arcus KL, per datum C, item ex oppoſito, arcus M N: & erit, per puncta interſectionis O P ducta linea, perpendicularis qvæſita: Aliàs mechanicè erigitur perpendicularis, Gnomonis rectanguli ope.

VII. *Gnomonem rectangulum, num accuratus ſit, examinare.*

Abſolvitur facillimè examen, applicatione gnomonis dubii, ad perpendicularis, accuratè in plano deſcripti, angulum & latera, num eis reſpondeant angulus & latera gnomonis.

Datis

VIII. *Datis tribus rectis, qvartam proportionalem invenire.*

Sint Datæ *Fig. XIII.* AB, BC, AD. Ducantur itaq; duæ rectæ AF, & AG, qvemcunq; angulum A constituentes, in infinitum. Tùm incipiendo ab A, in alterutram ductarum, *h.l.* AF, transferatur prima data AB: mox in eandem, à B incipiendo, secunda data BC. Tertia verò AD, iterum ab A incipiendo, transferatur in AG. Post, B & D connectantur rectâ BD, cui per C ducatur recta parallela EC, & erit segmentum ED qvarta proportionalis.

IX. *Datis duabus rectis, tertiam proportionalem invenire.*

Praxis eadem est: modò ductarũ secunda BC, constituatur & suo loco, & iterato, in lineam alteram, qvasi illa ipsa secunda, foret qvædam tertia. *vid. Fig. XIV.* Itaq; cognitis, hoc modo, tribus lineis; inveniuntur qvarta, qvinta, sexta, &c. per Regulam auream. Ut enim se habet v.g. *Fig. XIII.* AB ad BC, ita se habet AD ad DE qvartam proportionalem.

X. *Datis duabus rectis, mediam proportionalem invenire.* In

In ductam rectam infinitam, *Fig. XV.* transferantur datæ AB & BC, ut fiat qvasi una recta AC. Ea ipsa bisecetur in O, ex qvo describatur, radio OA, super diametrum AC, semicirculus ADC, tandemq; *per propos. 3.* erigatur, ex puncto B contiguitatis, perpendicularis BD usq; ad peripheriam: sic erit BD media proportionalis qvæsita.

XI. *Datam rectam secare proportionaliter, seu, ut Euclides loquitur, extremâ & mediâ ratione: h. e. ut sit, veluti tota ad segmentum majus; ita idem segmentum majus ad segmentum minus.*

Ab utroq; datæ lineæ AC termino A, erigantur *Fig. XVI. per propos. 10.* perpendiculares AE, AF, ipsi AC æqvales. Deinde bisecetur AF in G, rectæq; GC, ponatur æqvalis GE; & rursum, rectæ AE, ponatur æqvalis AI. Tùm radio AE, secetur AC proportionaliter in puncto I: eritq; ut AC ad AI; ita AI ad IC.

ARTICULUS SECUNDUS DE ANGULIS.

I. *Dato angulo ABC, æqvalem construere.*

Qvandoqvidem cujusvis anguli mensura

ſura eſt arcus circularis, ex angulari puncto, tanqvã centro deſcriptus, & cruribus, qvantũ ſufficit, prolongatis interceptus; ſic ducto *F. XVII.* ex centro B, arcu liberæ divaricationis DE; ejusdẽ divaricationis arcum transfer ex Centro F, in rectam FH. Poſt ſumatur interſtitium arcûs prioris DE, idemq; notetur ex I in K. & ducatur, ex F per K, infinita: ſic habebis angulum priori æqvalem.

II. *Datum angulum aut arcum biſecare.*

Ex angulari puncto A, abſcindantur *Fig. XVIII.* à cruribus AG & AI, æqvalia ſegmenta AB & AC. Tùm deſcribantur è terminis B & C duo arcus occulti, concurrentes in F. Per horum puncta ſectionis ducta recta AF, biſecabit angulum datum A.

III. *Angulum rectum aut quadrantem triſecare.*

Sit *Fig. XIX.* Qvadrantis AC centrum D. Tùm radio DA, è termino A, abſcindatur arcus AH; eodemq; radio, è termino C, arcus CI, & qvadrans diſſectus erit ſegmentis æqvalibus AI, IH, & HC.

IV. *Da-*

IV. *Datum angulum rectilineum in plures æquales partes dividere.*

Sit *Fig. XX.* angulus ABC. (1) describatur ex centro B arcus DE, ad contactũ linearũ AB, BC (2) Hic arcus, in tot dividatur partes æqvales, qvot reqviruntur. (3) Per unamqvamq; partem ducatur linea recta: & habebis angulum datum in desideratas partes divisum.

ARTICULUS TERTIUS DE FIGURIS PLANIS.

I. *Ad datam rectam Triangulum Æquilaterum, Isosceles, Scalenum constituere.*

Sit *Fig. XXI.* recta AB. Ex hujus terminis A & B, radio AB, describantur duo arcus occulti, concurrentes in C. Hinc, ductis lineis rectis AC & CB; constructum erit triangulum æqvilaterum. Si ex iisdem punctis AB, radio majore vel minore, describantur arcus, & ducantur rectæ CA CB; habebis *Isosceles*. Si deniq; ex iisdem punctis describantur duo arcus intervallo inæqvali; exurget *Scalenũ*.

II. *E datis tribus rectis inæqualibus triangulum construere.*

Sint *Fig. XXII.* datæ AB, CD, EF. (1) consti-

conſtituatur aliqva harum *h. l.* AB, pro baſi. (2) è centro A, intervallo CD, fiat arcus: & alio è centro B, intervallo EF, interſecans priorem in G. Ex hoc duc(3) rectas AG, GB, & habebis qvæſitum.

III. *Super datâ rectâ quadratum deſcribere.*

Erigatur (1) *per propoſ.* 10. ex alterutro datæ lineæ termino, *h. l.* A, perpendicularis DA, ipſi AC *Fig. XXIII.* æqvalis. (2) ex C & D deſcribantur, eodem radio AC, duo occulti arcus, concurrentes in E: & ductis rectis DE & EC, conſtructum erit qvadratum. Eâdem ratione *Fig. XXIV.* conſtruitur &, qvadratum oblongum, ſ. parallelogrammum, ſi loco æqvalis AD ſumatur inæqvalis, ſ. determinata, ſ. infinita, ipſæq; interſectiones ad E fiant ita, ut arcus DE, divaricatione ipſius AC; arcus verò CE, divaricatione ipſius determinatæ vel infinitæ lineæ, *l. h.* DA, ducantur.

IV. *Ad datam rectam Rhombum conſtituere.*

Sit *Fig. XXV.* data AB: ducatur AC, ipſi AB æqvalis, ut faciat cum ipsâ angulum qvemcunq; acutum. Tùm fiant duo arcus,

arcus, ex centris C & B, radiis AB, secantes se in D,& nectantur rectæCD,DB.

V. *Ad datas duas inæqvales, Rhomboidem describere.*

Sint datæ *Fig. XXVI.* GH, GI: constituant angulum qvemcunq; acutum, & describantur ex centro I, intervallo GH; itẽ, ex centro H, intervallo GI, arcus, se in K secantes; nectanturq;, in sectionis punctis, rectæ KI, KH.

VI. *Super datâ rectâ Pentagonum constituere, cujus & latera rectæ datæ, & anguli inter se sint æquales.*

Data BA *Fig. XXVII.* secetur *per probl. XVI.* proportionaliter in I, deinde continuetur ab utraq; parte ita, ut continuationes BM & AL singulæ, sint æqvales majori segmento BI. Tùm radio BA, ex B & M, describantur arcus occulti, concurrentes in H; eodemq; radio, ex A & L concurrentes arcus in F; & ultimo, eodẽ radio, ex F & H, concurrentes in G. Ductis tunc rectis AF, FG, GH, HB, pentagonum habebis.

VII. *Datum Circuli vel circularis arcûs centrum invenire.*

Infera-

Inferatur Circulo *Fig. XXVIII.* chorda AB, qvæ ſecta in duas partes æqvales, conſtituet Diametrum CD; diameter verò biſectus, Centrum E.

VIII. *Angulum aut Arcum qvemlibet triſecare.*

Sit *Fig. XXIX.* arcus AB triſecandus. Ducta itaq; recta AB, æqvaliter biſecetur in C, atq; ex cētro A, radio AC, deſcribatur arcus occultus EC: iterū, ex centro B, radio CB, arcus occultus CD: & erit arcus ſegmentis æqvalibus AE, ED, DB, ſectus.

IX. *Per data tria puncta, qvoc. modo, ſaltim non in directum ſita, Circulum deſcribere.*

Sint *Fig. XXX.* puncta ABC. Intervallū AB biſecetur æqvaliter, qvaſi recta foret, biſectrice DE: ſimiliter intervallum AC biſecetur, biſectrice FG: & erit biſectricum concurſus H, Centrū circuli, per data tria puncta ABC deſcribendi.

X. *Dato Circulo Trigonum, vel Hexagonum regulare inſcribere.*

Radius in peripheria *Fig. XXXI.* ſexies circumducatur; & conſtituent connexi termini *a b c d e f* Hexagonum. Hos

 ſi al-ſi alternatim connectas, *v. gr. ac, ce, ea*; erit Trigonum regulare, conſeqventer circulus partim in tres, partim ſex æqvales partes deſcriptus.

XI. *Dato Circulo Quadratum vel Octogonum regulare inſcribere.*

Ducantur *Fig. XXXII.* in dato circulo, duæ ad invicem perpendiculares diametri A B, C D, horumq́; termini connectantur rectis: & habebis Qvadratum. Rectarum vero ſinguli AC, CB, BD, DA, ſi denuò biſecentur; erit Octogonum conſtitutum.

XII. *Datum Circulum in qvinq́, decem, viginti partes æquales ſecare.*

Circuli ABCD diametrum *Fig. XXXIII.* biſeca æqvaliter perpendiculari B E. Idem fac cum radio A E, in puncto F: poſt ſume ductæ rectæ B F æqvalem FG. Hæc eſt chorda, ſubtendens qvintam Circuli partem. Sed recta E G eſt chorda, ſubtendens ejusdem partem decimam. Prior itaq; F G, ſi obtendatur Circulo qvinqvies; erit Circulus in qvinq́; partes æqvales ſectus. Poſterior E G, ſi obtendatur decies; habebis

Deca-

Decagonum. Idem posterior si bisecetur, alterumq; segmentorum circulo obtendatur vicesies; Icosagonum exurget.

XIII. *Datum Circulum in partes æqvales septem vel quatvordecim secare, conseqventer Heptagonum vel Quatvordecagonum construere.*

Radio AB, abscindantur, *Fig. XXXIV.* ex B, utrinq; arcus æqvales CB, BD, ducaturqve subtensa CD occulta, bisecans radium in E. Hujus subtensæ semissis est latus Heptagoni describendi: ejus verò arcum si dividas bifariam; Qvatvordecagonum nancisceris.

XIV. *Datum Circulum in novem æqvales partes dividere, conseqventer Enneagonum ei inscribere.*

Trisecetur *Fig. XXXI.* Arcus AC, *juxta probl. 8.* idemq; fiat cum arcubus CE, EA, punctaq; sectionis jungantur rectis AG, GH, HC, &c. & habebis, qvod voles. *vel:* Inscribatur *Fig. XXXV.* Circulo Triangulum æqvilaterum ABC, *juxta Probl. X.* post, abscindatur à latere AB, radio BD, Segmentum BF; residuoq; FA, constituatur æqvalis FG: tandē, intervallo GD, ponatur æqvalis GH: &erit residuum HA, latus Enneagoni qvæsiti. *Nota heîc*: nec Heptagonum, nec Enneagonum, ab Euclide esse demonstrata.

XV. *Dato Circulo Undecangulum & Tredecangulum inscribere.*

Undecangulo inservit radius, continuâ bisectione in XVI. partes æqvales divisus, qvarum novem, constituunt latus Undecanguli inscribendi. Pro Tredecangulo autem dividas radium in XLVIII partes æqvales. Talium enim viginti tres, sunt Tredecanguli latus. *Huc nota:* posse etiam super datâ rectâ qvamcunq; polygonam regularem figuram, ope angugulorum, vel instrumenti transportatorii describi. Qvum enim Semicirculus 180 gradibus absolvatur; divide eos per numerum, figuræ desideratæ latera denunciantẽ, productumq́, duplicatum subtrahe à 180: & indicabit residuum anguli, ad desideratam figuram necessarii, mensuram. *E. gr.* sit *Fig. XXXVI.* data recta IK, super qvâ sit Triangulum æqvilaterũ formandum: divide itaq; 180 per 3, productum ductumq; 60 duplica, ut fiant 120. Hæc subtrahe à 180; & residuum 60 erit qvantitas anguli desiderati: qvæ, si beneficio Transportorii datæ IK applicetur; habebis qvod voles. Huic fini compendium laboris tabula subjuncta præbet. Qvod si enim *figura* desideretur *laterum trium*; habebunt anguli ejus gradus 60.

Later.	*Angul* o.	*I.*		o.	*I. II.*
III.	60.		XL.	170.	
IV.	90.		L.	172.	48.
V.	108.		LX.	174.	
VI.	120.		LXX.	174.	51. 26.
VII.	128.	34.	LXXX.	175.	30.
VIII.	135.		XC.	176.	
IX.	140.		C.	176.	24.
X.	144.		CC.	178.	12.
XI.	147.	16.	CCC.	178.	48.
XII.	150.		CCC.	179.	6.
XIII.	152.	18.	D.	179.	16. 48
XIV.	154.	17.	DC.	179.	24.
XV.	156.		DCC.	179.	29. 9.
XVI.	157.	30.	DCCC.	179.	33.
XVIII.	160.		DCCCC.	179.	36.
XX.	162.		M.	179.	38. 24
XXX.	168.		MM.	179.	49. 12

XVI. *Dato Circulo Triangulum æqvilaterum inſcribere & circumſcribere.*

De inſcriptione, aliqva jam ſunt notata *propoſit. X.* Qvibus adde: qvòd ſi, *velut Fig. XXXVI.* cujuſvis circuli radio, ex peripheriæ puncto *h. l.* D, arcus *h. l.* BC abſcindatur, lineæq; BC ductæ, æqvales AB, AC, jungantur; triangulum æqvilaterum *inſcriptum iri.* Sed *circumſcribitur* Triangulum æqvilaterum, peripheriam ſingulis lateribus exactè tangens: ſi ex inſcripti centro D ducantur rectæ infinitæ DI, DK, DL, diametro AE æqvales, punctaq; IKL connectantur rectis IK, KL, LI.

XVII. *Dato Circulo circumſcribere polygonum regulare quodcunq;.*

Eidem circulo, *Fig. XXXVII.* ſimile polygonum, *h. l.* Sexangulum, *per propoſ. X.* inſcribe, atq; è centro C produc, per terminos ALMEKI, radios CA, CL, CM, &c, aliqvousq; extra circulum. Tum arcus AL biſecetur æqvaliter in N, ducaturq; per N recta FO, lateri AL parallela. Deniq; huic FO ponantur æqvales OD, DG, GH, HB, BF.

XVIII. *Dato plano regulari cuicunq; Circulum inſcribere & circumſcribere.*

Bisecentur *v. gr. Fig. XXXVIII*: Trianguli A B C, latera A B & B C, ducanturq; per sectionis puncta, lineæ AF, E C. Harum intersectio mutua ostendet circuli cùm inscribendi tùm circũscribendi centrum D. *Nota*: posse eandẽ operationem intersectione duarum linearũ, ex bisectione duorum angulorum ortâ, absolvi.

XIX. *Dato Triangulo scaleno Circulum circumscribere vel inscribere.*

Circumscriptionis praxis eadem est, *Fig. XXXIX.* qvæ propositionis nonæ: assumptis dati trianguli angulis, tanqvã datis tribus punctis. Inscriptio verò instituitur modo proximè præcedenti, centro A ex duorum angulorum *h. l.* BC bisectione investigato. v. *Fig. XL.*

XX. *Ellipticam s: Lenticularem & Ovalem figuram formare.*

Ejus qvidem ratio alibi, *Disp. I. de Ovis*, nobis est demonstrata. Sed ut alios etiã adjiciamus modos: ducãtur *Fig. XLI.* Circuli A B C D & E F G eodem radio, ut se intersecent in punctis H I. Ex his, tanqvam centris, describantur arcus A E & G C. Tùm ductâ rectâ per H I, ad arcus AE, GC, ex H & I; ponatur arcus CK & AK. Poſt ducta recta ex K, ad ſuperioris circuli peripheriã, biſecetur æqvaliter in L, atq; ex hoc, velut centro, ponatur arcus MN: & repræſentabũt MAEFGC NK figuram Ovi, Vultuſve humani. *vel* ducatur *Fig. XLII.* recta occulta AB, aut, ſi fortè latitudo ovalis data fuerit; recta occulta, datæ latitudini dupla. Ex hujus medio C, demittatur perpendicularis CD, datæ vel aſſumptæ latitudini æqvalis. Poſt biſecetur perpendicularis in E, radioq; EC, deſcribatur ex C, Semicirculus FGH, ſuper rectâ AB. Tum biſecetur ED in I, radioq; IE, deſcribatur ex I, arcus KDL; item intervallo BF, ducatur ex B, arcus FK; & ex A, arcus HL.

XXI. *Lineam ſpiralem in dato plano delineare.*

Dividatur Linea occulta, ſive infinita fuerit, ſive imperata, in certas partes æqvales, ut *v. gr.* AB, *Fig. XLIII.* in decem. Biſecetur pars media *h. l.* GH in N, ducaturq; ex centro N ſemicirculus GH; mox, ex centro H, ſemicirculus GI; iterum, ex centro N, ſemicirculus IF, & ſic porrò,

porrò, centra alternando, donec omnia lineæ occultæ ſpatia fuerint occupata.

ARTICULUS QVARTUS.

DE CORPORIBUS ſ. SOLIDIS.

I. *Corpora regularia deſcribere vel fabricare.*

TETRAEDRON deſcribitur in qvolibet triangulo æqvilatero, ſingulis ejus lateribus æqvaliter biſectis, punctisq́; interſectionis per rectas combinatis. ut *Icon. I. Fig. XXXIV.* HEXAEDRON ſ. CUBUS delineatur; ſi rectâ, datâ vel aſsũptâ, *ibid. Fig. XXXVII.* inq́; tres æqvales partes AB, BC, CD diviſâ, perpendicularis prolixior ad B erigatur, ejusq́; beneficio qvadrata ſex æqvilatera deſcribantur. OCTAEDRON, ſive corpus, octo triangulis æqvalibus & æqvilateris conſtans, deſcribitur: trianguli æqvitermini ABC baſin AC producendo in D, eiq́; æqvale triangulũ æqviterminũ DEA ſupponendo, *ut ibid. Fig. XXXVIII.* DODECAEDRI typus formatur: *ibid. Fig. XL.* altitudinem Pentagoni fundamentalis EF, ex aliqvo ejus laterũ *v. gr.* AB, arcubus occultis, ex adverſo deſcribẽdo, atq́; ex pũcto interſectionis G, circino

 ad lonad longitudinem AB divaricato, arcus GH GI; tùm eâdem circini divaricatione, ex centris A & B, arcus occultos AI, BH ducendo, punctaq; intersectionis, ductis rectis AI, IG, GH, HB jungendo, eundemq; laborē, circa qvodvis Pentagoni ejusdem fundamentalis latus, pro necessitate exigente, repetendo. ICOSAEDRI typum obtines: *Fig. XXXIX. ibid.* super lineæ AB utroq; latere, superiore inferiore, triangulum æqvilaterum qvinqvies formādo &, sive superi⁹ sive inferiùs, *ut h. l.* CD, ex intersectionū pūctis, alia qvinq; æqvalia triangula constituēdo. SPHÆRA in plano, cum Circulo coincidit, unde ejus qvidem ductus nemini ignotus. Ceterùm, in materiâ qvâ solidâ, ære, ligno, gypso, chartâ crassiore, simili, commodiùs exhibueris corpora dicta: pro *Tetraëdro* qvatvor triangula æqvilatera; pro *Hexaëdro* s: *Cubo*, sex qvadrata; pro *Octaëdro*, octo triangula æqvilatera; pro *Dodecaëdro*, duodecim qvinqvangula ordinata; pro *Icosaëdro*, vinginti triangula æqvilatera ritè inter se componendo.

II. *Corpora irregularia describere vel fabricare.*

Ex figuris rectilateribus *Pyramidem, inæqviterminam*, & qvidem *trigonam, tetragonam, pentagonam* formabis: super datâ, vel infinitâ rectâ, Triangulum, Qvadratum, vel Qvinqvangulum æqvilaterum describendo, laterumq; singulis Triangulum, Qvadratũ, vel Qvinqvangulum æqvilaterum imponendo. ut *Icon. I. Fig. XLIII, ad XLV. Parallelobipedum oblongum*, conseqvẽter *Pentraëdron* construes; super dati vel assumpti Trianguli ABC lateribus singulis parallelogrammũ, ceteris æqvale, ad arbitriũ inscribẽdo, uniq; ex tribus, triangulũ *b.l.* DEF, priori dato vel assumpto æqvale, imponendo. *ib. Fig. XXXVI. Rhombi* Schema habebis; ex rectæ AB, æqvaliter bisectæ centro C, ad æqvales angulos duos, rectas CD, CE, datæ vel assumptæ rectæ AB æqvales, describendo, hisq; tribus rectis sex qvadrata æqvilatera & æqviangula, *ibid. Fig. XLVI.* imponendo. Ast, si qvatvor Rhombi figuris æqvilateris qvatvor aliæ oblongæ substituantur; *ib. Fig. XLVII, Rhomboides* erit, *Tra-*

Trapezium ſeu *menſulam* delineabis: ex dati vel aſſumpti Trapezii fundamentalis ABCD lateribus ſingulis parallelogrammum, cujus duo latera ceteris æqvalia ſint; duo verò Trapezii fundamentalis latus aſſumptum imitentur, formando, tandemq́; alterutro parallelogrammorum Trapezium, fundamentali æqvale, ut *ibid. Fig. XLVIII.* ſubjicendo. Ex figuris curvilateribus, *Conum rectum* ex revolutione Trianguli rectanguli adumbrabis: *ibid. Fig. XLI.* ſuper rectæ AB centro C, axin DC, circa qvam Triangulum CDB vel CDA vertatur, perpendiculariter erigendo, atq́; ex axis centro E, baſin ſive arcum AFB deſcribendo. *Conus truncatus* ſi reqviratur; apicem abſcinde. *Inclinatus* ſeu *obliqvus* ſi deſideretur; axin inclina, ut ex altero rectangulo acutangulum; altero, obtuſangulum fiat. Pro *Cylindro* deniq́; ſ. *columnâ rotundâ*, revolvatur Parallelogrammum qvodcunq́;, *v. gr.* ABCD, *ibid. Fig. XLII.* ut, axi BC qvieſcente, latus AC veniat in locum EF, exurgantq́; tres ſuperficies: duæ planæ circulaculares AHE & CGF basium, ac una convexa AECF, reliqvæ molis. Describuntur verò in plano bases: dimidium lateris parallelogrammi minoris, *h. l.* BI, in utrâq; axis parte extremâ K & L notando, atq; ex his, tanqvam centris, arcus AHE & CGF; item ex centris HG, arcus AKE & CLF ducendo. Et hâc qvidem ratione corpora irregularia desiderata, ex materiâ qvoq; solidâ confici possunt.

ARTICULUS QVINTUS CONTINENS POSTULATA.

Postuletur
1. ab uno puncto ad alterum duci recta,
2. data recta cõtinuari in infinitũ
3. Ex qvovis puncto, tanqvam centro duci circulus.
4. Qvac. magnitudine datâ, sumi posse aliam vel majorem, vel minorem, vel æqvalem.
concedatur.

SECTIO TERTIA, EXHIBENS THEOREMATA

Sive Propositiones speculativas, qvibus aliqvid evidenter circa Qvantitatem cognoscitur.

ARTICULUS PRIMUS, AXIOMATA s. PRONUNCIATA aut NOTIONES COMMUNES EUCLIDIS comprehendens.

1. Qvæ eidem ſunt æqvalia, ſunt inter ſe æqvalia.
2. Si æqvalibus æqvalia adjecta ſint, tota ſunt æqvalia.
3. Si æqvalibus auſferantur æqvalia, reſidua ſunt æqvalia.
4. Si inæqvalibus æqvalia addantur, tota ſunt inæqvalia.
5. Si ab inæqvalibus æqvalia auſferantur, reliqva ſunt inæqvalia.
6. Qvæ eidem dupla ſunt, inter ſe ſunt æqvalia.
7. Qvæ eidem ſunt dimidia, ſunt inter ſe æqvalia.
8. Qvæ ſibi mutuò congruunt, ſunt inter ſe æqvalia.
9. Totum eſt majus ſuâ parte.
10. Omnes anguli recti ſunt inter ſe æqvales.
11. Duæ lineæ rectæ non includunt ſuperficiem.

ARTICULUS SECUNDUS
DE LINEIS ET ANGULIS.

I. Recta ſuper rectam conſiſtens; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales angulos facit. Euclid. I. 13.

Exem-

Exemplo ſit, *Iconismo I.* (ζ) ubi perpendicularis LM, facit duos rectos, juxta definitionem *8. pag. 6.* Nec minus PM obliqva, duos facit angulos deinceps, PMN & PMO, duobus rectis æqvales. Namq; LMO rectus & PML acutus, componunt obtuſum PMO. Rurſus NMP & PML, faciunt rectum NML. Sumpto ergò recto LMO, & parte recti PML, cum reſiduâ PMN, ad rectum NML; erunt NML & LMO, duo recti.

Conſectarium (1) *Ergò duo anguli deinceps ſimul ſumpti, ſunt tanti, qvanta eſt Semiperipheria, ducta ex concurſu linearum, facientium angulos deinceps.* (2) *Qvoniam Semiperipheria habet 180 gradus; habebit uterq; angulorum deinceps, ſimul ſumptus, 180 gradus. Ergo, altero innoteſcente; cognoſcitur & alter, ſi noti qvantitas à 180. gr. auferatur.* (3) *Qvoniam duo recti, ab eâdem perpendiculari dedependentes, ſunt duo Deinceps anguli, ſibi æqvales; habebit uterq; eorum, ſeorſim ſumptus, 90. gradus.* (4) *Si ad aliqvam rectam lineam, atq; ad idem ejus punctum, duæ rectæ lineæ, non ad eaſdem partes ductæ*

ctæ, angulos Deinceps duobus rectis æqvales fecerint; erunt ipsæ rectæ lineæ inter se in directum positæ. Euclid. I. 14.

Th: II. *Recta, secans rectam, facit angulos ad verticem æqvales. Euclid. I. 15.*

Iconismo I. (η) PT, incidens in R S, facit angulos RTP & PTS, duobus rectis æqvales. Similiter QT, incidens in RS, facit angulos RTQ & QTS, duobus rectis æqvales: conseqventer constituent hi anguli 360 gradus. Ergo, ablato angulo PTS *v.gr.* 132 *gr.* item angulo RTQ 132 *gr*, à 360 gradibus; necessario erunt singuli anguli STQ & PTR, 28 graduum. Similiter, ablatis angulis STQ & PTR, singulatim 28 gradus numerantibus; erunt anguli PTS & RTQ singulatim 132 graduum, conseqventer ad invicem æqvales, *per 3. axioma.*

Consectarium I. Hinc duæ rectæ, se mutuò secantes, faciunt ad punctum sectionis quatvor angulos, æquales quatvor rectis. II. Omnes anguli, circa idem punctum constituti, quotquot fuerint, simul sumpti, tantùm quatvor rectis sunt æquales.

Th, III. *Si in duas rectas incidens recta* ex-

externum angulum interno opposito, & ad easdem partes, æqvalem fecerit; aut internos, ad easdem partes, duobus rectis æqvales; erunt ipsæ duæ rectæ inter se parallelæ. I. 28.

Hoc Theorema cùm sit ipsum proximè subseqvens inversum; demonstratio ejus ex subseqventi demonstratione facilè patescet.

IV. *Recta incidens in duas parallelas, facit angulos alternos æqvales, item internum externo & opposito, ad easdem partes, æqvalem: internos verò, ad easdem partes, duobus rectis æqvales.* I. 29.

Iconismo I. (μ) incidit in QR & ST parallelas duas, recta HB, anguliq; alterni EDX, & TZD, *primò*, inter se sunt æqvales. Si enim non sunt æqvales; sed alteruter, *v. gr.* EDX, major altero TZD; necessariò, si adderetur communi RDZ, exurgerent duo anguli, majores duobus rectis, forentq; YXD, & TZD, minores duobus rectis. At verò hoc adversatur theoremati primo. Tùm etiam concurrerent alicubi rectæ ER & ST, satis productæ, qvod est absurdum: qvum ponantur esse parallelæ. *Secundò*, angulus externus EDH, æqvalis est interno, & ad easdem partes opposito YXD. Qvum enim EDX angulus, æqvalis sit, ut vidimus, alterno TZD; & eidem EDX, æqvalis angulus RDH; *per Theor. 2.* erunt & anguli EDH, YXD, inter se æqvales, *per axiom. I.* *Tertiò*, EDX & YXD æqvantur duob⁹ rectis. Qvia enim externo EDH, æqvalis est internus RDZ; necessariò, si addatur huic communis RDH; erunt duo anguli duobus rectis æqvales. *per Theor. 1.* Ergò & hi propositi EDX & TZD, *per Theor. 2,* sunt inter se æqvales.

V. *Lineæ rectæ, quæ æqvales & parallelas, ad easdem partes, jungunt; sunt & ipsæ invicem æqvales & parallelæ. I. 33.*

Iconismo I. Fig. VIII. sunt AB & CD parallelæ & æqvales. Eas verò jungunt AC & BD: ergò & hæ ipsæ sunt parallelæ & æqvales. Nam BAD æqvatur ipsi ADC; & DC, ipsi AB: AD verò, incidens in parallelas, est communis: ergò & BD æqvatur ipsi AC, *per I. 4. s. arti. 2. th. 1.* & BAD angulus ipsi CDA. Illi verò sunt alterni: *I. 29. s. hujus art. th. 4.* ergò & BD est parallela cum AC. *I. 27.*

VI. *Quæ eidem rectæ sunt parallelæ; etiam inter se sunt parallelæ. I. 30.*

Sint *Icon. I.* (μ) QR, UX, ad rectam ST, parallelæ; & erunt eædem QR, UX, etiam inter se parallelæ. Ductâ namq; rectâ FG, qvia QR ponitur parallela ipsi ST; erit angulus QEY, alterno XYE æqvalis *per I. 29. s. theor. 4.* Nec minus, qvia UX ponitur ipsi ST parallela; erit, *per id. theor.* BAY eidem angulo XYE æqvalis: conseqventer erunt qvoqve anguli QEY & BAY inter se æqvales, adeoq; & rectæ QR, UX, *per alleg. theor.* inter se parallelæ.

ARTICULUS TERTIUS,
DE FIGURIS PLANIS RECTILINEIS.

I. *Si duo Triangula duo latera, duobus lateribus æqvalia habeant, utrumq; utriq; habeant verò & angulum, sub dictis æqvalibus lateribus contentum, angulo æqvalem; tunc & basin basi æqvalem habebunt, & reliqvos angulos reliqvis, utrumq; utriq;, eritq; totum Triangulum toti Trianguló æqvale.* I. 4.

Icon. III. Fig. I. æqvantur DE, EF, ipsis AB, BC: angulus verò DEF æqvatur angulo ABC. Jam cogitetur Triangulum DEF triangulo ABC superponi: & congruent puncta DFE punctis ACB: consequẽter lineæ DE, EF, DF, ipsis AB, BC, AC. Qvod si verò aliqva extra aut intra caderet, ut efficeretur *v. g.* recta FHD, vel FGD; clauderent duæ lineæ superficiem, contra *ax. 11.* Congruente ergò DF ipsi AC; totum Triangulum DEF triangulo ABC congruet, & anguli reliqvi EDF, DFE, ipsi BAC, ACB: qvod erat demonstrandum.

Consectarium I. Si duo Triangula, duo latera duobus lateribus æqvalia habuerint, utrumq; utriq;, angulum verò angulo majorem, sub æqvalibus rectis lineis contentum; & basin basi majorem habebunt. I. 24 II. Si duo triangula duo latera habeant, duobus lateribus, utrumq; utriq;, æqvalia; habuerint verò & basin basi æqvalẽ; ea angulum qvoq;, æqvalibus rectis lineis contentum, angulo æqvalem habebunt. I. 8. Contra III. si habuerint basin basi majorem; etiam angulum, æqvalibus lateribus contentum, angulo majorem habebunt. I. 25. IV. Si duo triangula duos angulos duobus angulis æqvales habuerint, utrumq; utriq;, unumq; latus uni lateri æqvale, sive qvod *æqvalibus adjacet angulis, sive qvod uni æqvalium angulorum subtenditur; & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia, utrumq; utriq;, & reliqvum angulum reliqvo angulo æqvalem habebunt. I. 26.*

Th. II. *Trianguli Isoscelis anguli sunt inter se ad basin æqvales &, si æqvalia latera producantur, æqvales qvoq; erunt anguli infra basin. & contra.* I. 5.

Namq; (I) æqvalia latera æqvales subtendunt angulos. *Atqvi* Trianguli Isoscelis *v.gr. Fig. II. Ic. 3.* latera AB, AC, sunt æqvalia: *Ergò* & anguli ABC, ACB, sunt inter se æqvales. (II) Si æqvalibus æqvalia auferātur; residua sunt æqvalia. *axiom. 3. Atqvi h. l.* æqvales anguli interni ABC, ACB, auferuntur ab æqvalibus duobus paribus angulorū Deinceps CBD & BCE; *Ergò* dicti hi Deinceps externi CBD & BCE, sibi qvoq; sunt æqvales.

Consectarium I. Ergò, cognito uno æqvicruri angulo, cognoscuntur & reliqvi. II. Triangulum æqvilaterum etiam est æqviangulum. III. Si Trianguli duo anguli æqvales inter se fuerint; etiam latera, æqvalibus illis angulis subtensa, erunt æqvalia.

 I. 6.

I. 6. IV. Si Trianguli æqvilateri latera producantur; anguli supra & infra basin qvoq; sunt æqvales. V. Trianguli æqvilateri anguli singuli sunt besses $\frac{2}{3}$ unius recti, h. e. valent 60°. Summa qvippe omnium trium est æqvalis duobus rectis: at *omnes tres sunt inter se æqvales:* ergo *qvilibet est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum, seu $\frac{2}{3}$ unius recti,* h. e. *qvilibet est 60°. VI. Triangulo rectangulo, simul & æqvicruro, uterq; acutorum est semissis recti,* h. e. 45°. *Qvum enim Rectanguli æqvicruri anguli sint ad basin æqvales; ambo verò constituant angulum rectū; singuli sunt semisses unius recti. Si æqvicrurum fuerit obtusangulum; erunt reliqvi ejus anguli semisse minores: si acutangulum; erunt majores.*

Th. III. *Trianguli cujuscunq; latere qvocunq; continuato, angulus externus è continuatione ortus, æqvatur duobus internis oppositis, I. 16. tres verò interni duobus rectis sunt æqvales. I. 16. 32.*

Ducatur *Fig. III. Ic. 3.* ex B, lateri AC parallela BE: & faciet recta CB, incidens in

rectas

rectas AC & BE parallelas, angulos alternos ACB, & CBE æqvales. *per Theor.4.* Eadem faciet etiã æqvales similiter sitos CAB & EBD, atq; ita summa angulorum A & C, æqvabitur summæ angulorũ CBE & EBD. qvod erat demonstrandum.

Secundo: Qvum externus CBD, æqvalis sit duobus internis CAB & ACB; addatur ei communis CBA: & erunt *per axiom.2.* duo anguli CBD & CBA æqvales tribus ACB, BAC, & CBA. *Atqvi* duo CBD & CBA sunt æqvales duobus rectis, *per Theor.I. artic.2.* *Ergò* & Tres dicti A, C, B, duobus rectis sunt æqvales.

Consectarium. *Ergò cujuscunq; Trianguli duo anguli, junctim sumpti, duobus rectis sunt minores.* I. 17.

Th. IV. *Omnis trianguli majus latus subtendit angulum majorem: minus, minorem.* Vice versa: *minor angulus subtenditur à minore latere; major à majori.* I. 18. 19.

Latus BD, *Fig. IV. I.c3.* sit majus latere BC: & erit angulus C major angulo D. Qvoniam enim, dum BE, æqvalis BC, à BD auffertur, latera BC, BE, sunt æqvalia; erunt qvoq; anguli super basin EC æqvales *per I. 5. s. Theor. hujus artic. secundum.* Est autem BEC angulus angulo EDC major. *I. 16. s. theor. 3.* ergo & angulus BGE erit angulo BDC major: conseqventer, qvum angulus totus BCD major sit angulo BCE; erit etiam multò major angulo BDC. Idem demonstratur de altero angulo CBD. Inversi theorematis demonstratio ex dictis sponte patet.

Consectarium I. Ergò omnes Trianguli scaleni anguli sunt inter se inaeqvales: qvia omnia tria latera sunt inaeqvalia. II. *Si ex eodem puncto, ad eandem lineam, ducantur plures rectae; perpendicularis erit omnium minima: qvia angulum minimum subtendit.*

Th. V. *Omnis trianguli duo latera tertio sunt majora, quomodocunq; sumpta. I. 20.*

Namq; duobus *v. g. Ic. 3. Fig. IV.* BC, CD simul, qvasi pro unâ curvâ sumptis, brevius duci inter puncta BD potest: ipso tertio *h. l.* BD duci non potest. *per def. 3. & 4.*

Th. VI. *Super eâdem basi est Triangulum interius breviorum laterum; sed latera continent angulum majorem. I. 21.*

Producatur *Ic. 3. Fig. V.* BD in E; eritq;
BEC,

BEC, exterior angulus trianguli BEA, major interno A. *per Theor. 3. hujus artic.* Idem accidit Triangulo BDC. Nam angulus externus BDC, Trianguli DEC, major est angulo E, *per idem Th. 3.* ac proinde longè major est angulo A, qvod erat demonstrandum.

Th. VII. *Parallelogrammorum & latera opposita, & anguli oppositi, sunt aeqvales: ipsa verò parallelogramma diameter bifariam secat. I. 34.*

Iconism. I. Fig. VIII. est AB ipsi CD; & BD, ipsi AC parallela: AD verò communis. *Ergò per I. 29. s. Th. 4. art. 2.* erit angulus altern⁹ BAD alterno ADC æqvalis: item angulus BDC, ipsi BAC: qvum BD sit parallela ipsi AC. Conseqventer Triangulum ABD, erit triangulo DEA æqvale, atq; *per I. 4, s. Th. 1. ejusd. art.* AB æqvabitur CD, & BD ipsi AC; item, totus angulus A, toti D; & contra, totus angulus B, toti C. Qvia verò triangula ABD & ADC sunt æqvalia; necessariò diameter AD parallelogrammum bifariam secat.

Th. VIII. *Parallelogramma & Triangula, super eâdem aut æqvalibus basibus,*

& in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqvalia. Vice versâ, Parallelogramma & Triangula æqvalia, super eâdem aut æqvalibus basibus, & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis. & contra. I. 35. 36. 37. 38. 39. 40.

Sint *Ic.3. Fig. VI.* parallelogrāma ACBE, BCED, super eâdem basi BE, & eisdem parallelis AD, BE: & erunt anguli ACB, CDE; item BAC, ECD æqvales, *per I. 29. s. artic. 2. th. 4.* Qvum verò AC & CD, nec minus CB, DE, æqventur ex hypothesi; triangula qvoq; BAC & ECD *per I. 4. s. th. 1. art. 3.* æqvabuntur. Addatur jam utriq; communis BCE: & erit parallelogrammum ACBE æqvale alteri BCED. *per 2. Axiom.*

In Triangulis idē procedit. Qvia enim *Fig. VII. ibid.* OXU est dimidium parallelogrammi XNOU; item OUM, dimidium ipsius OUNM; *per I. 34. s. theor. 7. art. 3.* illa verò inter se *per præcedens theor.* æqventur; etiam, qvæ æqvalium sunt dimidia, æqvabuntur. *per 7. axioma.*

Th. IX. *Si parallelogrammum & triangulum eandem habuerint basin, atq; in eisdem*

eisdem parallelis fuerint; erit parallelogrammum duplum trianguli. I.41.

Parallelogrammũ *Fig.VIII. Ic.3.* est duplũ Trianguli ADE, *per I.34.s.theor.7.* & Triangulũ DGE est æqvale triangulo ADE. *per I.37.s.th.8.hujus art,* Ergò Parallelogrammum ACDE, est duplum Trianguli DGE, qvod erat demonstrandum.

Consectarium I. Ergò Triangulum dimidiũ erit suo parallelogrãmo. II. Area ejus ad parallelogrammi aream dimidia. III. Si habuerit basin duplã baseos parallelogrãmi; vel, si æquâ basi, sed altitudine duplâ fuerit; erit parallelogrammo æqvale. IV. Et sic area ejus æqvabitur area parallelogrammi.

Th. X. *Parallelogrammorum complementa sunt inter se æqvalia. I 43.*

Iconism. I. Fig. IX. bisecat GF parallelogrammum GEFH, facitq́; GEF, & FHG, triangula æqvalia, *per I.34.s.theor.7.* Idem obtinet in parallelogrammis KIGN, MFIL, in qvibus triangula KGI & GNI, item MIF & ILF æqvantur. His itaq́; subductis: manebunt complementa EMKI, ILNH, æqvalia. *per 3. axiom.*

Th. XI. *In Triangulo rectangulo,*

anguli

anguli recti basis æqvè potest cruribus, sive, *Hypothenusa æqvè potest lateribus reliqvis.* Sensus est: *trianguli rectanguli Quadratum, è latere, rectum angulum subtendente, descriptum*, (potentiâ namq; alicujus lineæ est □tum,) *æquale esse qvadratis duobus, è lateribus, rectum angulum continentibus, descriptis.*

Sit *Fig. IX. Ic. 3.* BCD Triangulũ rectangulũ ad B, cujus hypothenusæ inducatur qvadratũ CDRP, idq; dividatur, perpendiculari BOQ, in duo parallelogramma CORQ & ODQP. Ducantur etiã ND, CI, BR, BP occultæ: & erit NDC dimidium qvadrati MBCN, *per I. 41. s. theor. 9. art. 3.* it: CBR dimidium CORQ parallelogrammi. Est enim hoc in eâdem basi CR, & in iisdem parallelis CRQB, & sunt æqvalia NCD & BCR, qvia NC & BC; item CD & CR, anguli item NCD & BCR æqvantur, cùm BCN & DCR recti sint, & BDC communis. *Ergò* & Triangulum *NCD* triangulo *BCR, per I. 4.* & ipsorum dupla MBCN & OCQR, *per 6. axioma* æqvantur.

Idem procedit in triangulis BDP & C

DI,

DI. Nam ID & BD, it. CD & DP; anguli deniq; CDI & BDP invicē æqvantur: ergò & qvadratum LIBD parallelogrammo DOPQ æqvatur. COQR verò, & ODPQ componunt qvadratum basis CDPR: ergò & duo qvadrata crurum CB & BD æqvantur qvadrato basis CD, qvod erat demonstrandum.

Consectarium I. Si Quadratum, ex hypothenusâ descriptum, æquale est eis, qvæ à reliqvis trianguli lateribus describuntur; angulus, duobus reliquis lateribus comprehensus, rectus est. I. 48. II. Datis duobus quibuscunq; lateribus, in triangulo rectangulo, non potest ignorari tertium. Nam, si detur utrumq; crus anguli recti; alterum 30, alterum 40 graduum; & desideretur hypothenusa; crura singula qvadrentur, qvadrata 1600 it. 900 addantur, & ex summâ 2500 extrahatur radix qvadrata 50: qvæ erit hypothenusa. Sin detur hypothenusa *v. gr.* 50, cum alterutro laterum reliqvorum, *h. l.* 40; qvadretur itidem tàm hypothenusa, qvàm latus notum, & qvadratum minus subtrahatur à majori: & erit residui radix qvadrata tertium latus.

Th.

Th. XII. *In triangulis obtusangulis est qvadratum lateris, angulum obtusum subtendentis, majus quadratis crurum, duplici rectangulo, ex uno latere & ejus producti parte, inter angulum obtusum & perpendicularem, à vertice intercepto. II. 12.*

Sit *Fig. X. Ic.3.* perpendicularis ad AC: & æqvabitur qvadratũ IC, qvadratis laterum AI & AC (h. e. □tis IALM, & ACGE.) *per I.47. s. theor. 11.* Similiter lateris IB qvadratũ INBO, æqvabitur qvadratis laterum IA&AB, (*h. e.* qvadratis ILMA & HRFG.) Abjiciantur ergò qvadrata BCRD & HRGF: & restabit de duobus qvadratis IA & AC duplex rectangulum ex BC & BA, nempe ABRH & RDEF pro excessu, qvo à qvadrato IC superantur qvadrata crurum IB & BC.

Consectar. Itaq; in triangulo obtusangulo, datis tribus lateribus, non potest ignorari perpendiculum, ex angulo acuto, in oppositam basin, extra continuatam, demissum. Nam si summa □torum basis & lateris, obtuso angulo adjacentis, subtrahatur à □to lateris maximi; semiresiduum basi divisum, indicat basis continuatio nuationem, ipsâ basi & perpendiculo interjectam. Hujus porrò continuationis qvadratum, subtractum à qvadrato lateris adjacentis, relinqvit □tum perpendiculi qvæsiti.

Th. XII. *In Triangulis acutangulis est qvadratum lateris, acuto angulo subtensi, minus qvadratis reliquorum laterum, duplici rectangulo, ex uno latere & ejus segmento, inter angulum acutum & verticis perpendicularem. II. 13.*

Qvadratũ enim *Fig. XI. Ic. 3.* lateris CB, æqvatur □tis ex CE & EB, (h. e. □tis CEOD, & GHKL.) *per theor. 10.* Qvadratum a. lateris AC, æqvatur qvadratis CE & EAC sic, ut □ta laterũ CA & AB nihil aliud sint, qvam tria qvadrata CEOD, ABIL, & IKMN. Si jam ab horum summâ subtrahantur qvadrata CEOD & GHKL, (æqvivalentia □to uni ex CB constructo;) erit duplex rectangulum ABFH & FGMN suprabundans, qvod erat demonstradum.

Consectarium. Igitur in triangulo acutangulo, datis omnibus lateribus, non potest ignorari perpendiculum, ex angulo ali-

qvo

qvo intra triangulum in basin dimissum. Nam si qvadratum lateris alterutrius, præter basin subtrahatur à summâ □torũ basis & lateris reliqvi; semiresiduum, basi divisum, aut residuum totum, basi duplicatâ divisum, indicat basis segmentũ, perpendiculo & latere, cujus □tum □to addebatur, interceptum. Hujus porrò segmenti □tum, subtractum à □to lateris, huic segmento adjacentis, relinqvit qvadratum perpendiculi.

Th. XIII. *Si recta secetur in duas partes æqvales, & duas inæqvales; erit rectangulum, inæqvalibus Totius segmentis comprehensum, unà cum qvadrato, qvod ab intermediâ sectionum fit, æquale qvadrato, qvod à dimidiâ lineâ describitur.* II. 5.

Rectâ BC, *Fig. XII. Ic. 3.* sectâ æqvaliter in D, & inæqvaliter in E; fiat rectangulũ EL, inæqvalibus segmentis EC, BE, comprehensum. Sit etiam Qvadratum super B D erectum, ductâ diametro BF. Deniq; ducatur EHM, parallela ipsi B G, secans diametrum in H, & protrahatur L H in K. Qvia jam EK, N M, qvadrata sunt; etiam complementa G H, E N, æ-

qva-

qvalia ſunt, *per I. 43. ſ. theor. 10.* Qvibus ſi addatur commune qvadratum KE; erit parallelogrammũ GE parallelogrammo BN æqvale, *per I. 36.* Igitur DL, GE, æqvalia inter ſe erunt: qvibus ſi commune EN apponatur; erit Gnomon MBN rectangulo EL æqvale. Qvum verò Gnomon MBN & qvadratũ NM, æqvalia ſint qvadrato DG; erit etiam rectangulum EL, unà cum qvadrato MN intermediæ ſectionis, eidem qvadrato CD æqvale.

Nota: *Mathematicis parallelogrammum rectangulum ſimpliciter* RECTANGULI *voce exprimi, omneq́ parallelogrammum, etiam obliqvangulum, ne toties eædem literæ repetantur, duabus duntaxat literis, per diametrum in eo oppoſitis, notari. Sic Fig. XII. vocatur integrum parallelogrammum BF vel GD: qvatvor verò partialia, KE, EN, MN, GH, appellantur.*

Th. XIV. *Si recta linea ſecetur bifariam, & illi recta qvædam in directum adjiciatur; eſt rectangulum, comprehenſum ſub totâ cum adjectâ, & adjectâ, unà cũ qvadrato à dimidiâ, æqvale qvadrato, deſcripto à lineâ, qvæ tùm ex dimidiâ, tùm ex adjectâ componitur, tanqvam ab unâ, II. 6.*

Secetur *Fig. XIII. Ic. 3.* recta EC bifariam in D, eiq; in directum addatur recta EB: & erit rectangulum EM, totâ compositâ (h. e. EC, adjectâ EB, & qvadrato dimidiæ BD) comprehensum, æqvale qvadrato lineæ ED. Sit enim Qvadratum GD, erectum super ED, ducanturq; GH, parallela æqvalis ipsi EG, & diameter EF: qvoniam jam per constructionem BD æqvalis est ipsi KH, aut KN; evidens est, HN qvadratum esse, qvod cum rectangulo EM, qvadrato DG æqvetur. Qvare & rectangulum GK æqvale est rectangulo KD per constructionem, qvod erat ostendendum. *Ceterùm posse & numericâ demonstratione ejusmodi theoremata expediri; colliges ex Schotti Cursu Mathematico l. 3. p. m. 73. &c.*

Th. XV. *Triangula & Parallelogramma, qvorum eadem est altitudo, habent se ut Bases.* h. e. *bases & triangula sunt in eâdem proportione. Itaq; ut se habet Fig. XIV. Ic. 3. basis DL ad NB; ita se habet triangulum DLO, ad triangulum BAN. VI. 1.*

Ponatur enim BN bis in NS & SC, totiesq;

tiesq;DL in LM & MU: & erunt BAN, NAS, SAC, inter se æqvales *per I. 38.* Idem accidit triangulis DOL, LOM, & MOU. Qvotiens enim basis BN est in basi BC; totiens est triangulum BAN in triangulo BAC: & qvotiens DL est in DU; totiens est DOL in DOU. *Item*, si basis BC est minor qvàm DU; erit & BAC minus, qvàm DOU. Sic etiam, si major sit BC qvàm DU; erit BAC majus, qvàm DOU: sin illa æqvalis; erit etiam BAC ipsi DOU æqvale.

In parallelogrammis res est eadem, qvia sunt triangulorum dupla. *per Eucl. I. 41. seu artic. hujus theor. 9.*

Th. XVI. *Linea parallela basi, in triangulo, secat crura proportionaliter. Et contra. VI. 2.*

Sit *Fig. XV. ib.* in Triangulo DAE, recta DE, ipsi CB parallela: & secabit ea proportionaliter latera, ut fiat AC ad CD, qvemadmodum est AB ad BE. Iungantur enim BD & CE: & erunt Triangula DCB & EBC æqvalia, *per I. 37.* & ad CAB eandem habebunt proportionem. *per V. 7.* Est verò, ut DBC ad CBA, ita basis DC ad basin CA: item, ut ECB ad BCA; ita BE ad BA *per VI. 1.* Ergò ex æqvo, ut se habet *AC* ad *CD*; ita *AB* ad *BE*. Contrarium sic ostenditur: sint DBC & EBC, ad CAB, in proportione, ut DC, ad *AC*, & ut BE ad AB: *per VI. 1.* & erunt, *per V. 7.* DBC & EBC æqvalia. Cumq; CB basis sit communis; erunt & in eisdem parallelis. *per I. 39.* Ergò CB est parallela cum DE, qvod erat demonstrandum.

Th. XVII. *Recta bisecans æqvaliter angulum trianguli, bisecat qvoq; basin ratione crurum. Et contra. VI. 3.*

In triãgulo EAC bisecet *Fig. XVI.* recta AD angulum ad A: producatur etiam ex C, CB parallela ipsi AD: deniq; AE producatur, donec lineæ CB concurrat in B: & erit ED ad DC, uti est EA ad AC. Nam cùm AD sit parallela ipsi CB; erit DAC angulus angulo ACB, *per I. 29.* & angulus EAD ipsi EBC æqvalis. Sed cùm EAD æqvetur ipsi DAC, *h. e.* ACB; erit & ABC ipsi ACB æqvalis, & proinde latus AB lateri AC *per I. 6.* Qvoniam etiam DA est parallela ipsi CB; erit *per VI. 2.* ED ad DC, ut EA ad AB, *h. e.* AC, qvod erat oſtendendum. *Contrarium ſic probatur:* qvia eadem eſt ratio rectæ EA ad AB, qvæ eſt ED ad DC, ac latera AB, AC, æqvantur; erunt *per I. 5.* anguli ACB, ABC, nec minus *per I. 29.* anguli EAD & ABC, item DAC & ACB æqvales. Ergò etiam EAD, DAC inter ſe æqvales; AD verò erit biſecans angulum EAC.

Conſectar. Ergò omne triangulum Iſoſceles & æqvilaterum habet duos angulos ad baſin inter ſe æqvales. conf. hujus art. th. 2.

Th. XVIII. *Triangula æqviangula habent latera circa æqvales angulos proportionalia: & qvæ æqvalibus angulis ſubtentenduntur, ſunt Homologa. VI. 4. 5.*

Sint *Fig. XVII. ib.* triangula æqviangula BFA & DEF, ſintq́; in directũ EF, FA. Qvia verò anguli BAF, BFA, ſunt minores duobus rectis; erunt & BAF, DEF, duob⁹ rectis minores, & concurret ED cũ AB in C. *per I. 17.* Qvia etiam anguli DFE & CAF æqvantur; erunt AC, FD parallelæ. Nec minus, qvia anguli DEF & BFA æqvantur; erunt CE, BF, *per I. 28.* parallelæ. Ergò conſtituunt CB, FD, parallelogrammũ, & CD æqvatur ipſi BF: BC verò, irò, ipſi DF. *per I. 34.* Qvia ergò BF parallela eſt cũ CE; erit, ut *AB*, ad *BC*, (*h.e. FD*,) ita AF ad FE: & viceverſâ, ut AB ad BF; ita FD ad FE. Rurſus, qvia FD eſt parallela cum AC; erit, ut AF ad FE, ita CD (*h. e. BF*,) ad DE. Et viceverſâ, ut AF ad FB; ita erit FE ad ED ex æqvo: conſeqventer FD erit ad DE, ut BA ad BF, qvod erat demonſtrandum.

Th. XIX. *Recta, à vertice trianguli rectanguli in baſin perpendicularis, dividit triangulum in duo triangula, ſimilia toti & inter ſe. VI. 8.*

Sit *Fig. XVIII. ibid.* ACD triangulum rectangulum ad C, & CB perpendicularis ad baſin DA: & erunt triangula ACB & CBD, toti ACD, ac inter ſe æqvalia. Eſt enim angulus rectus CBD, æqvalis recto DCA; communis verò D: ergò & BCD reliqvus reliqvo CAB æqvalis. *per I. 32.* Item A eſt communis in ACB & ACD; ergò eſt ACB æqvalis angulo D, conſeqventer ſunt ABC & CBD æqviangula toti, ac *per VI. 4.* lateribus proportionalia. Nempe, ut AC baſis, ad CB latus majus; ita CD baſis, ad DB latus majus.

Hinc

Hinc & toti ſimile, *ex definit. XXX. p. 12.* Similiter, CBD & CBA ſunt anguli recti, DCB verò & CAB æqvales, uti & CDB ac ACB per ante demonſtrata: ergò qvoq́; duo triangula ſunt inter ſe ſimilia.

Conſectarium I. Ergò perpendicularis CB eſt media proportionalis inter ſegmenta baſeos BA & BD: eſt enim, ut AB ad BC; ita BC ad BD. II. crus trianguli rectanguli eſt mediũ proportionale inter baſin & ſegmentum baſeos, ipſi conterminum. Ut enim AD ad DC; ita DC ad DB: item, ut AD ad AC; ita ſe habet AC ad AB.

Th. XX. *Æqvalium, & unum uni angulum æqvalem habentiũ parallelogrammorum & triangulorum latera, circa æqvales angulos, ſunt reciproca. Contra, qvorum parallelogrammorum & triangulorum, unum angulum uni angulo æqvalem habentium latera, circa æqvales angulos ſunt reciproca; illa ſunt æqvalia. VI. 14. 15.*

Sit *Fig. XIX.* parallelogrãmum ABEF, æqvale parallelogrãmo EDHG, cũ æqvali angulo ad E, ſintq́; FE, ED, in directũ: & erunt BE, EG qvoq́; in directũ, qvia FEB, BCD, it. BED, DEG, ſunt duobus rectis æqvales. Compleatur jam EBCD: & habebunt AE, EH, qvia ſunt æqvalia parallelogramma, ad idem BD æqvalem rationem, *per V. 7.* conſeqventer erit, ut AE ad DB, ita qvoq; EH ad DB. Sed *per VI. 1.* eſt AE ad BD, ut baſis EF, ad baſin ED: EH verò ad DB, ut GE ad DB: igitur erit ex æqvo latus GE ad latus EB, ut latus FE, ad latus EB. *Contrà*, ſi ſit GE ad EB, ut FE ad ED; erit parallelogrammum AE, ad parallelogrammum BD, ut EH ad idem EB. Sed *per V. 9.* ſunt inter ſe æqvalia, qvæ ad idem eandem habent rationem: ergò & HE æqvatur ipſi EA.

Idem oſtenditur de triangulis ABC & CDE: qvia parallelogrammorum ſunt dimidia. *Fig. XX. Icon. 3.*

Th. XXI. *Si qvatvor rectæ lineæ ſunt proportionales; æqvatur rectangulum mediarum, rectangulo extremarum. Et contra. VI. 16.*

Sint *Fig. XXI. ibid.* qvatvor rectæ A, B, C, D, proportionales: ſitq; ut A ad B, ita C ad D: & erit rectangulum ex B (*h. e.* GN) & C, (*h. e.* NM.) æqvale rectangulo ex A (*h. e.* TU) & D. (*h. e.* TS.) Qvum enim

nim angulus T æqvetur angulo N, & ſit TS ad NM, ut GN ad UT; erunt rectangula circa æqvalem angulum omninò cruribus reciproca &, *per VI. 14*, æqvalia. *Contrarium per ſe patet.* Qvod ſi enim ponantur rectangula æqvalia & æqvangula; (ob rectum ex hypotheſi;) ſeqvitur: *ex VI. 14.* qvòd habeant latera reciproca. Ergò lineæ ſ. latera ſunt neceſſariò proportionalia.

Th. XXII. *Si tres lineæ rectæ proportionales fuerint; æqvatur qvadratum mediæ, rectangulo extremarum. Et contra. VI. 17.*

Sint *Fig. XXII.* tres lineæ rectæ AB, CD, BE, proportionales; ut CD ſe habeat ad BE, qvemadmodũ ſe habet AB ad CD: fiatq; ſub extremis AB, BE, rectangulum AE, & ex mediâ DC, qvadratum GF. Qvia ergò CD (*vel illi æqvalis DF*) ad BE ſe habet, ut AB ad CD; erunt qvatvor rectæ AB, CD, DF, BE proportionales: rectangulum verò GF, qvod ſub mediis CD, DF continetur, erit æqvale ipſi AE, contento ſub extremis AB, BE, qvod erat demonſtrandum.

Conversum probatur: qvia qvadratum ex æqvalibus duabus rectis constat, alterum verò rectangulum ex hypothesi ipsi est æqvale; ergò habent latera reciproca *per VI. 14.* & proportionalia: conseqventer erit DC, (æqvalis DF,) ad AB, ut BE ad DF: & sic erunt tres proportionales, qvod erat demonstrandum.

Th. XXIII. *Triangula & Polygona similia, sunt inter se in duplicatâ ratione homologorum laterum. VI. 19. 20.*

Sint *Fig. XXIV.* ABC, FDE, triangula similia: & erunt ea etiã inter se duplicatâ ratione: nempe latus AC ad DE. Sit enim AI tertia proportionalis, jungaturq́; BI: qvia ergò per similitudinẽ triangulorum FD ad FE est, ut BA ad BC; erit etiam permutando AC ad DE, ut BA ad FD. Sed qvia DE ad AI, ut AC ad DE; ergò etiam DE ad AI, ut BA ad FD, suntq́; ABI ac FDE triangula, lateribus reciproca, circa æqvalem angulum æqvalia. *per VI. 15.* Qvia verò, in tribus proportionalibus, prima ad tertiam, duplam habet rationem ejus, qvam habet ad secundam; *per Eucl. V. def. 10*: habebit AC ad tertiam AI, duplam rationem ejus, qvam habet ad secundam DE. Ut autem AC ad AI; ita ABC triangulum, ad ABI. *per VI. 1.* Habet ergò ABC duplam rationem ad ABI (*h. e. DFE*) ejus, qvam habet AC basis ad basin DE.

In Polygonis idẽ procedit. Qvia ea *per VI. 20.* dividuntur in triangula similia, numero æqvalia, & homologa totis. Qvod enim de uno NLU, HTS demonstratur; facilè qvoq; intelligitur de omnibus aliis, *i. e.* de omni figurâ compositâ.

Consectarium: si tres rectæ fuerint proportionales; erit ut prima ad tertiã; ita figura, qvæ describitur ad primam, ad figuram similem, descriptam ad secundam. Res patet ex ipso theoremate adducto.

Th. XXIV. *Si qvator rectæ lineæ sint proportionales; erunt rectilinea, ad eas similia, & similiter descripta, proportionalia. Et contra. VI. 22.*

Sint *Fig. XXV. ibid.* qvatvor proportionales, AC, DF, GI, KM, ac ad eas similia descripta rectilinea: & erit ABC ad DEF, uti est GHI ad KLM. Sumatur enim

nim ad A C & D F tertia proportionalis O U, item ad G I & K M, qvæ ſit NT: *per V. 11.* qvia ergò eſt GI ad KM, ut AC ad D F; item K M ad N T, ut A C ad O U; erit qvoq; G I ad NT, uti AC ad O U. Sed ut AC ad O U; ita ſe habet figura A B C ad figuram D EF: item, ut G I ad N T; ita figura G H I ad figuram K LM, *per Conſect. VI. 20.* Ergò etiam rectilineum AB C eſt ad DEF, ut G H I ad KLM. *per V. 11.* qvod erat demonſtrandum.

Th. XXV. *Parallelogramma, qvæ ſunt circa diametrum, ſunt ſimilia toti & inter ſe. Et contra. VI. 24. 26.*

Fig. XXVI. ibid: eſt I C ad A F, item H D ad AB parallela: ergò ſunt *per VI. 2. B* E ad E F, & *BD* ad DI, (*h.e. IG*) ut *BC* ad CA, (*h. e. HE.*) conſeqẽter etiam *per V. 2. BD* ad DI, ut *CB* ad A C, & componendo *BA* ad *CB* aut HE, ut *B I* ad *BD* aut E G. Angulus verò *A B I* æqvatur HEG: item C D E ipſi H F G *per I. 34.* Itaq; in parallelogrammo *A B I F*, ſunt parallelogrammorum *C B D E, HEFG*, latera circa æqvales angulos proportionalia, ipſaq; ſimilia, qvod erat demonſtrandum.

Th.

Th. XXVI. *Figura similis ad basin, æqvè potest in triangulo rectangulo, ac similes ad crura. VI. 31.*

In Triangulo rectangulo F D C *Fig. XXVII. ibid.* sit perpendicularis à vertice in basin D E: & erit DC ad CE, ut C F ad DC: item F D ad F E, ut C F ad E D. *per VI. 8.* Sed *per consectarium VI. 20.* figura CFML est ad sibi similem *A D C B*, ut prima linea FC ad tertiam C E; nec minus figura CLMF ad RDFO, ut CF ad FE: ergò qvoniam C E & E F totam C F constituunt; erit figura F C L M æqvalis duabus *O F D R*, *D A B C*, qvod erat demonstrandum.

ARTICULUS QVARTUS DE FIGURIS PLANIS CURVILINEIS.

Th. I. *In Circulo est angulus ad centrum duplus angulo in peripheriâ. III. 20.*

Sit angulus *Fig. XXVIII. ibid.* in peripheriâ *C E A*, & in centro *C B A*: ducatur *EBI*; fiantq; *EBA*, *EBC*; triangula æqvicrura, & ad basin æqviangula, *per I. 5.* & æqvatur exterior angulus *A B I* internis *B E A*, *A B C*, æqvalibus, *per I. 32.* conseqventer est unius duplus. Idem procedit in

C B I

CBI & *CBE*: ergò & bini *CBI*, *IBA*, erunt binorum *CEI* & *IEA* dupli, & unus *CBA*, unius *CEA*. Idem demonſtratur de anguloD, ſi extra diametrum fuerit. *v.g.* ab angulo *CDA* ducatur *DBG*: & erit angulus externus *GBC*, duobus internis *BDC*, *BCD*, æqvalis, conſeqventer duplus anguli *BDC*. Sic & *GBA* angulus, duobus *BDA* & *BAD* æqvalis, duplus erit anguli *BDA*. Qvòd ſi jam duplus *GBA*, à duplo *GBC* tollatur; & ſimplex *BDA* à ſimplici *BDC*; relinqvetur *ABC* duplus reliqvi *ADC*, qvod erat demonſtrandum.

Th. II. *Anguli, qvi in eodem ſegmento ſunt in circulo, ſunt inter ſe æqvales. III. 21.*

Sit *Fig. XXIX. ibid.* ſegmentum circuli *BDEFGC*, anguli verò in eodem ſint *D*, *E*, *F*, *G*: connectantur *BG*, & è centro *A* ducatur *AB*, *AC*: qvia jam D item E, F, G, anguli dimidii ſunt anguli *A* in in centro, *per III. 20*; erunt D, E, F, G, anguli inter ſe æqvales. *per 7. axiom.* qvod erat demonſtrandum.

Th. III. *Qvadrilaterorum circulo inſcriptorum anguli oppoſiti æqvantur duobus rectis. III. 22.* *Fig.*

Fig. XXX. æqvantur anguli *A* & *C* duobus rectis. Nam in *BAD* triangulo, ſunt tres anguli duobus rectis æqvales. *per I. 32.* Sed angulus *ACB* æqvatur angulo *ADB*; item angulus *ACD* ipſi *ABD*: *per III. 20.* *BCA* autẽ & *ACD*, faciunt totum *BCD*: ergò *A* & *C* æqvantur duobus rectis. Idem de angulis *B* & *D* procedit.

Th. IV. *Angulus, qvi in circuli ſemicirculo; rectus eſt: qvi in ſegmento majori; recto minor: qvi in minore; recto major. III. 31.*

Sit *Fig. XXXI. ibid.* *SCI* in ſemicirculo, & demittatur *CO* perpendicularis ad *SI*, producaturq́; *SC* in *B*. Qvia jam *OC* & *OS* æqvantur: erunt *SCO*, *CSO*; item *OCI* & *CIO* *per I. 5.* æqvales, & *SCI* æqvabitur S & I. Sed *BCI* externus, æqvatur S & I interioribus: *per I. 32.* ergò *BCI* & *SCI* æqvantur, ſuntq́; recti. *per defin. 8. p. 9.* Angulus verò S in majori ſegmento, eſt recto C minor, qvia cum I ei demum æqvatur. *A* verò, angulus in minori ſegmento, eſt recto major, qvia cum *S* minore æqvatur duobus rectis. *per III. 22.*

Th. V. *Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint; erit rectangulum, comprehensum sub segmentis unius, æqvale rectangulo, qvod sub segmentis alterius comprehenditur. III. 35.*

Secent *Fig. XXXII. ibid.* se mutuò *BL, CG*, in F: & erit rectangulum sub *BF, FL*, æqvale rectangulo sub *CF, FG*. Ducantur enim *AF, AB, AC*, & demittantur perpendiculares *AD, AE*: istæ bisecabunt inscriptas *BL* & *CG per III. 3.* Sunt autem inæqvaliter sectæ in F: ergò, *per II. 5.* æqvabitur rectangulum sub inæqvalibus segmentis *BF, FL*, cum qvadrato DF, qvadrato *DB*. Sic etiam erit rectangulum sub *FC, FG*, cum qvadrato EF, æqvale qvadrato *CE*. Assumatur qvadratum *AD* ad istud rectangulum *BF, FL*, cum qvadrato *DF* & *DA*, (*h. e. AF*,) ob rectum ad *D, per I. 47.* æqvale qvadrato *DB* & *DA*. (*h.e. qvadrato AB, per I. 47.*) Eodem modo æqvabitur rectangulum *CF, FG*, cum qvadrato *FE, EA*, (*h. e. AF*,) qvadrato *CE, EA*: (*h. e. CA*:) atqvi qvadrata *AB* & *AC* sunt æqvalia: ergò & rectangula ista, cum qvadrato

drato communi *AF*. Hoc verò abjecto; manebunt ipſa rectangula *BF*, *FL*, & *CF*, *FG*, æqvalia, qvod erat demonſtrandum.

Th. VI. *Si à puncto extra circulum ducantur duæ rectæ, una ſecans, altera tangens circulum; æqvatur rectangulum ſub totâ ſecante, & exteriori ſegmento, qvadrato tangentis.* III. 36.

(α) Si *Fig. XXXIII*, tranſeat DE per centrum *B*; erit rectangulum ſub *DE*, *DC*, æqvale qvadrato tangentis *DA*. Nam *CE* biſecta eſt in *B*, & continuata in *D*: unde *per II. 6.* rectangulum ſub *DE* & *CD*, cum qvadrato *BC*, (*h. e. BA*) æqvale eſt qvadrato *BD*. Sed *per I. 47.* eſt qvadratum *BD* æqvale qvadrato *BA* & *AD*, qvia *A* eſt rectus: abjecto ergò utrinq; qvadrato *BA*; manet æqvale rectangulum *ED*, *DC*, qvadrato *DA*. *per 3. axiom.*

(β) Si verò non tranſeat *DC* centrum *E*; ducantur *ED*, *EF*, & *EA* perpendicularis, qvæ biſecet *CF*, *per III. 3.* itẽ *DB* tangens, cum perpendiculari *EB*: & erit rectangulum *CD*, *DF*, cum qvadrato *AF*, æqvale qvadrato *AD*. *per II. 6.* Aſſumatur qvadratum *EA*; & erit rectangulum

CD, DF, cũ qvadrato *AF* & *AE*, (*h.e. per I. 47. cum qvadrato EF aut EB*) æqvale qvadrato *DA* & *AE*. (*h.e. qvadrato ED.*) Jam verò qvadratum *ED* æqvatur qvadratis *EB*, *BD*: *per I. 47.* ergò abjecto qvadrato *EF* à rectangulo *CD*, *DF*, cum qvadrato *EF*; item abjecto qvadrato *EB*, (*h. e. EF*) à qvadrato *ED*; erit rectangulum CD, *DF*, æqvale qvadrato *DB*. *Consectarium. Hinc, si e.g. Fig. 34. à puncto qvovis, extra circulum assumpto, plurimæ lineæ rectæ, circulum secantes, ducantur; erunt rectangula, sub totis lineis comprehensa, partibus exterioribus inter se æqvalia. Ut, si ex A ducantur AC, AD, AE, AM, AK, secantes circulum in L, F, G, H, I; erunt rectangula sub AM, AL; item AC, AF, & sub AD, AG; etiam AE, AH; deniq; & HK, AI, omnia inter se æqvalia. Nam ductâ AB, tangente circulum; erunt qvadrato AB æqvalia singula rectangula. Quare & inter se omnia erunt æqvalia.*

SECTIO QVARTA
TRADENS TRIGONOMETRIAM.
ARTICULUS PRIMUS,
exhibens
Præcognita TRIGONOMETRIÆ.

I. Tri-

1. Trigonometria est doctrina, Triangula plana, tàm curvilinea qvàm rectilinea, resolvendi.

2. Resolutio absolvitur demonstratione vel numericâ vel mechanicâ. Illa Canonē s. tabulas sinuum, tangentium, & secantium; Regulam deniq; proportionis præsupponit: Hæc, instrumenta, operationi necessaria, Transportorium, Scalam proportionalē, (Einen verjüngten Maaß-Stab) Circinum, & Circinū proportionalem reqvirit. Illa rectilineis & curvilineis triangulis est communis: Hæc rectilineis tantùm apta, à curvilineis verò aliena.

3. Sinuum tabulæ considerantur vel secundum fundamenta sua & structuram; vel secundum usum. Hoc respectu, Trigonometria in Theoreticam ac Practicā dividi solet: qvarum Illa fundamentum & structuram; Hæc usum tabularum dictarum tractet.

4, Hâc tamen vice Nos Theoreticâ supersedemus: non, qvòd à Nemine tabulæ dari qveant exactæ; *v. Schott. curs. Math. p. m. 159. a. 161.* sed qvod aliis satis jam sint agitatæ. Hos inter, ob typorum elegantiã, molis parvitatem, nũmeriq; pro ſinu toto aſſumpti magnitudinem, uſus hacten⁹ creberrimi celeberrimiq; fecit Scotan⁹, à ſe reviſas, maximeq; à typothetarum mendis emendatas.

5. Eæ qvadruplices exhibent numeros: (1) *frontales*, alterutrius paginæ frontiſpicium; (2) *laterales*, dextrum & ſiniſtrum utriusq; latus; (3) *areales*, aream utriusq;; (4) alterutrius calcem occupantes. *Frontales*, incipientes à primo gradûs minuto, progrediuntur ordine naturali, per alterna pagellarum latera, ad 45 gradus, *h.e.* ſemiſſem qvadrãtis, ubi *in calce collocati* à 45 gr. incipiunt, ordineq; pagellarũ retrogrado, in nonageſimo gradu, ſ: integro qvadrante, vel angulo recto ſubſiſtunt. *Laterales ſiniſtimi* exhibent graduum, in frontiſpicio proſtantium; *dextimi* verò, in calce poſitorum minuta. Illi, à primo ad 60mũ deſcendendo: Hi, aſcendendo. *Areales* deniq; ſunt proportiones, qvas habet ſinus ad tangentem, & tangens ad ſecantem. Mutatâ ergò unius qvantitate; mutatur qvoq; qvantitas vel alterutrius tantùm, vel utriusq;, & ipſorum etiam angulorum.

6. Dextimi arealium termini ſunt punctulo, accuratioris tantùm inveſtigationis gratiâ, ſecreti. Hinc alii eos negligunt: alii contra, qvo propiùs ad verum accedant, puncta planè omittunt. Nos mediâ procedentes viâ, utiliter terminos admittimus: ſi (1) numerum 45 ſeu qvadrantis ſemiſſem ſuperent, (2) menſura trianguli reſolvendi grandioris ſit molis, *v. gr.* milliarium, ſtadiorum &, in Aſtronomicis, ſemidiametrorum terræ. Contra eos omittimus, ſi (1) inferiores ſint numero 45, (2) menſura fuerit minor, *v. gr.* perticarũ, paſſuum, ulnarum.

7. Uſus tabularum ſeqventibus articulis duobus continetur.

ARTICULUS SECUNDUS
Proponens Tabularum ſinuum uſum, Et in ſpecie Numericam Triangulorum rectilineorum reſolutionem.

Probl. 1. Dati arcûs ſinum, tangentem, ſecantem reperire.

Si datus fuerit arc⁹ prioris ſemiqvadrãtis, (*ſ. infra 45 gradus;*) qværatur numerus graduum datorũ in pagellarũ fronte; minutorum, in latere ſiniſt ro. Sin fuerit arcus posterioris semiqvadrantis, *h. e.* 45 & plurium graduum; qværatur numerus graduum in calce; minutorũ verò in latere dextro: & erit tertius qvæsitus numerus, sub titulo suo, inter areales, ex adverso minutorum datorum. Sic *v. gr.* desideraturus sinum, tangentẽ, & secantem, 47 graduum & 9 minutorum; qværo gradus in calce, minuta verò in latere dextro tabularum, qvia arcus est semiqvadrantis posterioris: & offendo ex adverso minutorum, inter areales numeros, sub suis titulis, sinum 73313.67, tangentem verò, 107801. 32, secantem deniq; 147041. 23.

Nota 1. *Si arcus fuerit qvadrante h. e. 90 gradibus major, sed minor semicirculo; subtrahe eum à semicirculo, & erit residui arcûs sinus, tangens, secans, etiam sinus, tangens, secans, arcûs qvadrante majoris, qvia duo arcus, semicirculum complentes, eundem sinum, eandemq; tangentem & secantem habent. Sic* v.g. *arcus* 101. *gr.* 21 *min. subtractus* à 179 g. 60. m. *relinqvit arcum* 78 g. 39. m: *cujus sinus, tangens, secans, coincidunt cum arcu* 101. gr. 12. minutorum. Nota 2.

Nota 2. *Si arcus non tantùm gradibus & minutis; verùm etiam secundis consitent; negligi aliqvando secunda, aliqvando assumi. Negliguntur, si fuerint pauciora, vel etiam plura, qvàm triginta: hâc differentiâ, ut priori casu assumatur ex sinuum tabulis arcus graduum & minutorum prostans: posteriori, arcus dato proximè major. Assumuntur verò aliis, accuratioris investigationis gratiâ, & tùm subtrahitur numerus arealis arcûs proximè minoris, ab eo, qvi est arcûs proximè majoris, ac differentia ponitur, secundum proportionis regulam, medio loco, qvemadmodum primo collocantur 60, tertio verò, dati arcus nominata secundâ. V. gr. sit arcus datus 64. g. 5.* m. 37. sec: *reperio in tabulâ arcum proximè majorem 64.g.6.m. cujus sinus est 89955.78; arcum verò proximè minorem 64. g. 5. m. cujus sinus 89943.07. Differentia sinuum horum est 12.71. respondens uni minuto primo, s. 60 secundis. Qvemadmodum itaq; 60 se habent ad 1271, ita se habent 37 ad numerũ qvartum desideratum. Peractâ operatione exurgit hic sub 767, qvem areali pauciorum minutorum excerpto h. l. 89943.07 ad-*

jicio, eritq́; summa 89950. 74 sinus dati arcûs. Atq́; eodem modo in tangentibus & secantibus procedo.

Nota 3. *Numerum ex divisione fortè residuum negligi, ob rationem, probl. 2. Notâ 2. subjunctam.*

Probl. 2. *Dati sinûs, tangentis, secantis arcum debitum invenire.*

Qvære sinûs, tangentis, &c. numerum inter areales, sub suis titulis: & respondebit huic, ex adverso, inter laterales, numerus minutorum; in fronte verò vel calce, numerus graduum. v. gr. datus sinus 73609. 71. exhibet arcum *47 gr.* 24 min: data tangens verò 9243905, arcum 42 gr. 45. min.

Nota 1. *Si qvid datorū sinuum, tangentium aut secantiū non exactè reperiatur in tabulâ; respondere datum sinum vel tangentem aut secantē non gradibus tantùm & minutis primis; verùm etiam secundis. Assume itaq́; ex tabulâ numerum proximè majorem, cumq́; hoc confer proximè minorem, & pone, juxta proportionis regulam, differentiam primo; & 60 secunda secundo loco. Post confer datum sinum vel tangentem*

tem &c. cum eo, qvi est proximè minor: & differentiam colloca tertio loco. Operatione peractâ, adjice qvartum numerum repertum minutis primis, proxime minori excerpto numero adhærentibus: & habebis arcûs dati gradus, minuta prima, & secunda.

Nota 2. In operationis divisione remanentes numeros, fractionem juxta doctrinam arithmeticam suppeditantes, negligi communiter, sicubi minores fuerint dimidio divisoris: sin majores; addi qvotienti, loco ipsorum, unum: sin æqvales dimidio; liberum esse, num negligere eos, vel ipsorum loco unũ addere velis. E. gr. datus est sin⁹ 94080. 12, qvẽ cùm exactè in tabulis non reperiam; confero numeros, qvos inter proximè cadit, scil. sinum 94088. 80, proximè majorẽ, sub arcu 70 gr. 12. minutorum; & proximè minorem 94078. 22, sub arcu 70 gr. 11. m. prostantẽ. Productum s. differentiã colloco juxta auream regulam primo; mox 60 secundo loco. Post hæc confero datum, neq; in tabulis exactè contentum sinum, cum excerpto proximè minori, & differentiam 7. 56 collocco tertio loco. Peractâ operatione, prodit qvartus numerus 48. Hunc minutis primis *proximè excerpti arcûs minoris adjicio, ut sit sinus datus 70 gr. 11 min. 48 secundorum. Residuum verò ex divisione numerũ 162 negligo, qvod sit dimidio divisoris longè minor: qvo si major foret; apponerem ipsis 48 Unum, ut exurgerent secunda 49.*

Nota 3. *Si obtusus reqviratur angulus, e.g. Icon. 4. Fig. II. 127 gr. 12. minutorũ, & detur in tabulis sinus 79652.99, respondens arcui s: angulo acuto 52. gr. 48 minutorum; subtrahe angulum inventum,* h. l. *52 gr. 48 m. ab 180 gradibus, & erit ejus complementum s: subtractionis residuum, demum angulus qvæsitus.*

Probl. 3. *Ope assumptorum arcuum s. angulorũ, sinuum, tangentium, secantium, cetera cujuslibet trianguli ignota invenire.*

Heîc præter ea, qvæ superioris sectionis *artic. 2. theor. 1. & art. 3. theor. 2.* sunt adducta, in genere scito: (1) in omni triangulo septem esse consideranda: tria latera, tres angulos, & aream. (2) Ad inveniendam aream sufficere, in triangulis rectangulis, notitiam solorum cathetorum; in obliqvangulis verò, omnium trium laterum cognitionem reqviri. (3)

Pro

Pro investigandis ceteris Trianguli partibus, tria data s. dedomena *ordinariè* præsupponi, sive illa sint tria latera, sive duo latera & unus angulus, sive unum latus & duo anguli. (4) Ex solis tamen tribus angulis nullam reliqvarum partium qvantitatem, in triangulis rectilineis innotescere; qvod parvum triangulum magno esse æqviangulum possit. (5) Ad triangulorum rectangulorum resolutionem vulgò duo tantùm data exprimi: qvòd rectus angulus per se sit notus. Hinc datis trianguli rectanguli angulis; laterũ qvoq; proportiones dantur. (6) Pro sinu toto rectanguli curatissimè ex adductis tabulis assumi 10000000. (7) Rectangulorum triangulorum latus qvodvis posse pro oppositi anguli sinu toto vel radio; reliqvorum autem alterum pro tangente, alterum pro secante sumi. (8) In iisdem rectangulis se habere alterum cathetum ad alterum, ut radius ad tangentem anguli oppositi; ad hypothenusam verò, ut ad secantem ejusdem anguli. Contra, si assumatur hypothenusa pro radio; esse cathetum utrumq; si-
num

nũ anguli ſibi oppoſiti. (9) In triangulis qvibuſvis ſe habere latus notũ ad ſinum anguli ſibi oppoſiti ignoti, ut ſe habet alterum latus notum ad ſinum anguli ſibi oppoſiti notiq;. Vice versâ, ſinum anguli noti ſe habere ad latus oppoſitum ignotum, qvemadmodum ſe alter ſinus anguli noti habet ad latus oppoſitum notum. (10) melioris perceptionis gratia adſcribi lateri noto vel aſſumto radium 100000.00; reliqvis verò, prout occaſio tulerit, ex tabulis, numerum ſinûs, tangentis, vel ſecantis, qvem dat arcus ſeu angulus oppoſitus. (11) Adſcriptionem inſtitui, ut primo ſtatim intuitu proportio laterum pateat. *v. g.* ſi *Icon. 4. Fig. I.* radius H I dividatur in 100000.00 partes; habebit cathetus H G 47058.82 cathetus verò GI 88235.28 partes. Qvum autem *h. l.* 100000.00 partibus proportionaliter tantùm 34 reſpondeant; reſpondebunt neceſſariò partibus 47058.82, in eâdem proportione, 30. ipſis verò 88235.28; 16 partes. His præmonitis, inveniuntur

IN TRIANGULO RECTANGULO

I. *Hypothenuſa* (a) qvadrata cathetorum

torum addendo, atq; ex summâ radicem qvadratã extrahendo, *v.g. Icon.4.fig.* 1. sit cathetus GH 16: cathetus verò GI, 30 perticarum: exurgunt qvadrata eorũ 256 & 900, qvæ addita reddunt summam 1156; atq; hujus radix est hypothenusa 34 perticarũ. (β) ex alterutro latere, hujusq; angulo invento: uti sinus alterutrius acutorum, *h.l.* HIG, 47058.82 ad 16; ita se habet sinus totus 100000.00 ad hypothenusam. Peractâ operatione, reperio 34.

II. *Latus angulo recto adjacens* (α) ex reliqvo latere *e.g.* GH & hypothenusa: qvadratum illius, *h.l.* 256, ab hujus qvadrato 1156 subtrahendo. Sic dabit residui 900 radix qvadrata, latus qvæsitum GI, 30 perticarum. Similiter, si subtrahas qvadratum lateris GI 900, ab hypothenusæ qvadrato; dabit residui radix qvadrata latus GH 16. (β) Ex hypothenusâ & sinu inventi anguli, qværendo lateri oppositi: ut sinus totus 100000.00 ad hypothenusam 34; ita anguli GHI sinus 88235.28 se habet ad latus oppositum GI. Peractâ operatione reperio 30. (γ) Ex angulis & alterutro latere: uti se habet anguli GHI sinus 88235.28

ad

ad ipſum latus 30; ita anguli GIH ſinus 47058.82 ad latus ſibi oppoſitũ GH. Peractâ operatione reperio 16, reſiduo diviſionis neglecto.

III. *Anguli:* (α) ex hypothenuſa & latere, qvæſito angulo oppoſito. *E. g.* ut ſe habet *h. l.* 34. ad 16; ita ſinus totus ad ſinum anguli qvæſiti. Peractâ operatione, proſtat ſinus 47058.82, qvi modo proximè præcedenti, *ſeu ſecundũ probl: 2.* ad ſecunda redactus, dat arcũ 28 gr. 4. m. 21 ſec. Vice verſa: ut 34 ad 30; ita ſe habet ſinus totus ad ſinum anguli, lateri aſſumpto oppoſiti. (β) E lateribus, angulum rectum continentibus: ut *e. g. h. l.* latus GI 30, qvæſito angulo GIH adjacens, ad latus GH 16; ita ſinus totus 100000.00 ſe habet ad tangentem anguli qvæſiti. Peractâ operatione proſtat tangens 53333.33. Qvem cùm denuò haud reperiam; repeto proceſſum *probl: 2.* notatum: & proſtant, peractâ operatione, 20 ſecunda; qvibus, qvia reſiduum diviſionis ſemiſſem diviſoris longè ſuperat, unum adjungo, totumq; numerum 21, tangentis proximè præcedentis gradibus & minu-

tis

tis adijcio, ut constituant arcum tangentis dati 28 gr. 4 m. 21 secundorum. Pro angulo GHI, offendo simili operatione (ut se habet 16 ad 30, ita sinus totus ad tangentem anguli qvæsiti) productum, 61 g. 55 m. 39 secundorum. (γ) E latere, qvæsito angulo adjacente, & hypothenusâ: ut latus GI 30 se habet ad hypothenusã HI 34; ita sinus totus 100000.00, ad secantem anguli qvæsiti. Peractâ operatione reperio secantẽ 113333.33. Qvum verò neq; hic in tabulis exactè legatur; procedo secundum problema 2dum allegatum: & prodeunt qvidẽ 20; sed qvia residuum divisionis 1660 parùm abest à divisore 1759; addo ipsis 20 unum, ut exurgant 21 secunda: qvæ si jungantur gradibus & minutis numeri proximè minoris; prodit arcus anguli HIC 28 gr. 4 min. 21 secundorum. (δ) subtractione anguli inventi *h.l.* 28 gr. 4 m. 21 secundorum â 90, (sive, qvod idẽ est, â 89. gr. 59. m. 60 secundis:) & remanent 61 g. 55 m. 39 sec. pro angulo GHI. Hoc ut planum fiat: probo effatũ modo proximè præcedenti; ut se habet 16 ad 34; ita 100000.00

ad se-ad ſecantem anguli qværendi IHG. Peractâ operatione prodit ſecans 212500 00: qvi cum neq; in tabulis exactè proſtet; repeto proceſſum *probl. 2.* inculcatum, & prodeunt 39, qvæ, (reſiduũ diviſionis, ad ſemiſſem diviſoris non accedens negligẽdo,) appono gradib⁹ & minutis ſecantis proximè minoris, ut exurgant 61 g. 55 m, 39 ſ. pro angulo IHG. (6) Inſpectione tabularum ſinuum: Trianguli enim rectanguli angulo altero in tabulis pateſcente; proſtat alter è diametro datorum minutorum, in adjacente paginâ. E. g. ſit alter acutorum, 20 gr. 8 minutorum: & erit alter 69 gr. 52 minutorum, in adjacente paginâ poſitus. Qvod ſi verò minutis primis ſecunda fuerint addita; e. g. in angulo 23 g. 41 m. 4 ſecundorum; ſume minutum unum minus, vel ſubtrahe minutũ unum è diametro reſpondentibus *h. l.* 19, aut aſſume minuta proximè minora, ipſisq; adde ſecunda reſidua, *h. l.* 56: & habebis angulũ qvæſitũ.

IV. *Area:* cathetum *h. l.* 16 per alterum *h. l.* 30 multiplicando, productumq; 480 dividendo per 2: & erit qvotiens 240 area, in menſurâ qvadratâ.

In

IN TRIANGULO OBLIQVANGULO inveniuntur

I. LATERA: datis duobus angulis & uno latere. Ut *Icon. IV. fig. 2.* anguli KLM 127 gr. 12 m. (*ejusve complementi 52 g. 48 m.*) sinus 79652.99. (vel, *quia puncto discretus numerus 99, semissem qvadrantis 45 superat, abbreviandæ operationis gratiâ,* sinus 79653.) ad datum latus oppositum KM 48. perticarum; ita anguli LKM 25 g. 8 m. sinus 42472. 62. (vel *ob allegatam rationem,* 42473) ad oppositum sibi qværendumq; latus LM. Peractâ operatione reperio $25\frac{47779}{79653}$. Sed qvia numerator f: residuum divisionis majus est divisoris f: denominatoris semisse; addunt communiter unum, ipsi producto 25 ut sit latus qvæsitum 26 perticarum. Lateris verò tertii investigandi gratiâ, adduntur anguli patefacti, summaq; *h. l.* 152 g. 20 m. subtrahitur ab 180 gr. pro angulo tertio KML 27 g. 40 min: cujus sinus est 46432. 69. (vel 46433) Prout jam anguli LKM sinus 4247 ad latus inventum LM; ita anguli LMK sinus

46433 ad qværendum latus KL. Illud verò reperio $28\frac{18014}{42473}$ perticarum.

II. ANGULI: (α) *ex omnibus lateribus*. Trianguli namqve *æqvilateri* anguli ut semper sunt 60 graduum; ita sunt *æqvicruri* ad basin æqvales. *conf. p. 53. 54. vel*, (absq; inqvisitione perpẽdiculi,) ut æqvicruri aut æqvilateri semibasis 15. (*vid. Ic. IV. Fig. 3.*) ad crus alterum *b. l.* 60; sic sinus totus ad 400000,00, secantem alterutrius angulorum, ad basin æqvalium, respondentem 75 gr. 31. m. 21 secundis. In triangulo verò *scaleno*, raro ceteroqvin hoc modo in praxi occurrẽte, ponatur (1) *E. g. Icon. IV. Fig.* 4. trianguli BAC *latus* maximum BC 234, latus BA 123, latus AC 190 perticarum. (2) Demittatur ex angulo obtuso BAC, in lat⁹ maximum, perpendiculum AD, ut fiant duo rectangula BAD & ADC. (3) Procedatur juxta regulam auream: ut se habet latus maximum 234 ad reliqvorum laterum BA & AC summam 313; ita se habet laterum horum differentia 67, ad lateris maximi segmentum CE 89 perticarum. Hoc à latere maximo subtracto, est residui BE

145 semissis $72\frac{1}{2}$, punctum incidentiæ perpendiculi AD, manetq; major maximi lateris pars $161\frac{1}{2}$ perticarum. Jam, ut residui semissis BD $72\frac{1}{2}$ se habet ad radium totum 100000; ita latus minus BA 123, ad secantem anguli ABD, lateri minori adjacentis. Ea verò est, peractâ operatione, 169655: respondens gradibus 53, totidemq; minutis. Hinc complementum manet pro angulo BAD *36 gr. 7 m.* Similiter, ut residui semissis DE $72\frac{1}{2}$ & subtracti segmenti EC 89 summa addita $161\frac{1}{2}$ se habet ad radium totum; ita latus majus 190, ad secantem anguli ACD, majori lateri adjacentis: quæ est, peractâ operatione, 117647: respondens *31 gr. 47 m. 17 secundis*, cujus complementum pro angulo CAD est *58 gr. 12 m. 43 secund. Conf. p. 95.* Veritas calculi patescit additione angulorum inventorum. Qui si adæquent gradus 180; erit opera ritè collocata: sin min⁹; quærendus est error & corrigẽdus.

(β) *E duobus lateribus, & angulo eis intercepto.* Ut summa datorum laterum KL, LM, 258, *Icon. IV. Fig. 5.* ad eorundem differentiam *h. l.* 32; sic tangens dimidiæ ignotorum angulorum summæ, ad tangentem *arcûs*, usurpatæ dimidiæ summæ *addendi*, ut prodeat angulus qværendus major, lateri majori oppositus; aut *subtrahendi*, ut prodeat angulus minor, oppositus lateri minori. Hoc ut expedias promptiùs; colloca (1) duorum datorum laterum summam, *h. l. 258*, loco aureæ regulæ primo, & (2) differentiam eorundem laterum, *h. l. 32*, loco secundo. (3) Subtrahe angulum comprehensum *h. l. 126 g. 15 m, ab 180*. (4) Divide residuum, *h. l. 53 g. 45 m*, per 2, ut prodeat ejus dimidium *26 g. 52 m. 30. sec.* (5) Hujus dimidii tangentem *50683. 05.* pone tertio regulæ loco: & reperies, peractâ operatione, tangentem 6286. 27, respondentem arcui 3 *g. 53 m. 49 secundorum*. Qvi arcus, additus dimidiæ angulorum reliqvorum summæ, *h. l. 26 g. 52 m. 30 sec.* dat angulum majorem K *30 gr. 28 m. 19. sec.*: sublractus verò, relinqvit angulum minorem *23 gr. 16 m. 41 secundorum*.

(γ) *E duobus lateribus & angulo illis non intercepto*: Sint E. g. *Icon. IV. fig. 6.* data trianguli G H K latera G H, H K, cum angulo

gulo non intercepto HKG *53 gr.* & erit reliqvos angulos facilè invenire. Ut enim latus GH *114 perticarum*, angulo dato GKH oppositum, se habet ad ejusdem anguli sinum 57357; sic latus HK *174 pertic.* angulo qværendo HIK oppositum, ad ejusdem qværendi anguli sinum: qvi peractâ operatione 87544, respondet *61 g. 6 m.* Unde inventis duobus angulis, *96 gr. 6 m.* junctim continentibus; remanent necessariò *83 g.* 54 *m.* angulo tertio GHK. *Nota: si reqviratur angulus obtusus, calculus verò acutum exhibeat, (ut Ic. IV. fig. 7. ubi sinus anguli ABC 99219 exhibet tantùm 82 g. 50 m. qvum ipse angulus sit obtusus;) subtrahe exhibitum 82 g. 50 m. angulum à duobus rectis s. 180: & erit ejus complementum 97. gr. 10 m. demum angulus qvæsitus B.*

III. Area: (α) resolvendo obliqvangulum triangulum in duo rectangula, horumq; areas, modo *p. 96.* indicato, inveniendo. (β) Omnia tria latera, *(E. g. Icon. IV. fig. 2.)* 48, 28, 26, addendo, summamq; *h. l.* 102 dividendo per 2, atq; à qvotiente 51 subtrahendo seorsim singula latera 26, 28, 48: qvota verò 25, 23, 3,

 con-

confeqventer (*h. e.* 25, per 23, & horum fummam per 3) multiplicando, ultimum verò qvotum *h. l.* 1725 multiplicando per repertum alterum dimidium 51, atq; ex hujus fummâ 87975 radicem qvadratam extrahendo, qvæ eft area qvæfita, *h. l.* $296\frac{359}{593}$ perticarum.

ARTICULUS TERTIUS,

RECTILINEAS FIGURAS RELIQVAS ET CIRCULUM RESOLVENS.

I. Eqvidem Trigonometriam diximus Doctrinam Triangula refolvendi; nihilo tamen minus eis fubjungimus tàm ceterarum Figurarum rectilinearum, qvam Circuli refolutionem: qvòd omnes figuræ rectilineæ in triangula qveant refolvi; curvilineæ verò, qvantumvis in Circulum haud refolvantur, analogiam tamen cum eodem agnofcant.

Doceat itaq; Problema I. *Dati Qvadrati cujuscunq; aream invenire.*

Sint *Icon. I. fig.* 7. Qvadrati æqvilateri DFGH latera fingula 15 perticarum: multiplica latus aliqvod in feipfum, vel proximè adjacens, *h. l.* 15 *in* 15, & erit qvotũ 225 area qvadrati qvæfita. Sic etiam multi-

multiplica *ib. fig. 8.* Qvadrati oblongi A BCD alterutrum latus minus CA, 5, cum alterutro laterum majorum CD, 20 perticarum; & dabit qvotum *h. l. 100.* aream qvadrati oblongi.

II. *Dati Rhombi Diagonales invenire.*

Sit *ibid. fig. X.* Rhombi IKLM qvodvis latus 10 perticarum; singuli verò angulorum KLM & MIK *65 g. 12 min:* & erunt singuli residuorum angulorum IKL & IML *114 gr. 48 minutorum.* Patefactis jam Triangulorum IKL & LMI lateribus æqvalibus, horumq; angulis IKL & LMI interceptis; erunt singulatim anguli reliqvi, KIN & KLN *32 g. 36 m.* Horum sinus qvum sit 53877. 08; erit basis IL, *juxta methodum p. 97. præscriptam,* perticarum $16\frac{2787211}{2893854}$+ pro qvibus communiter 17 sumunt. Similiter, qvum anguli LKN & LMN, item IKN & IMN singulatim sint *57 g. 24 m;* horum verò sinus 84245. 24, atq; angulorũ *KLM, KIM* sinus 90777.75; erit basis s: diagonalis *KM, juxta eandem methodum* perticarum $10\frac{3260255}{4212262}$+ qvarum loco alii *11* ponunt.

III. *Dati Rhombi aream invenire.*

Multiplicetur Diagonalis in ſemidiagonalem alteram, *h. l. 8. in 11*; productum 88 erit area qværſita. Idem obtinebis: integras diagonales invicem multiplicando, qvotumq; 176 per 2 dividendo. Sicubi verò utraq; diagonalis fractioni eſt ſubjecta; ſumitur commodè circa areæ inqviſitionem, ex alterâ qvidem, numerus proximè major; ex alterâ, proximè minor. Qvod ſi enim utriusq; numerus ſumatur proximè major, *h. l. 17 & 11*; productum 93 erit juſto majus: ſi proximè minor 16 & 10; erit 80 productum juſto minus.

IV. Dati Rhomboidis aream inveſtigare

Multiplicetur longitudo *E. g. ibid. fig. XI.* in perpendicularem latitudinem *h. l. 6.* ex alterutro obtuſorum angulorum O, in S demiſſam. *vel* Diagonalis QP, ex uno angulo acuto in alterum ducta, multiplicetur in perpendiculum RT, ex angulo obtuſo R in diagonalem demiſſam: & erit productum *h.* l. *108* area qværſita. Invenitur verò perpendicularis: ſubtracto qvadrato catheti SQ *vel* TQ, à qvadrato hypothenuſæ QO *vel* RT.

V. Trapezÿ rectanguli aream invenire.

Sit *ibid. Fig. XII.* trapezii latus RS 16; TU verò 18; deniq; perpendiculum RT 12 perticarum, ac multiplicetur laterum parallelorum summa *h. l. 34*, cum dimidio perpendiculi 6: & erit productũ 204 area qvæsita. Idem conseqveris: dimidium parallelorum *h. l.* 17. cum perpendiculi, parallela connectentis, toto 12, multiplicando.

VI. Trapezÿ scaleni aream invenire.

Ducta *ibid. Fig. XIII.* Diagonalis ex externo angulo Y, in oppositum X, sit 30 perticarum, inq; eam demittantur perpendiculares ZA 9 & WB 6 perticarum, ex angulis oppositis W & Z: & erit dimidiatum perpendiculorum *h.l.* 7. *pert.* 5 *pedum*, cum diagonalis toto 30; vel etiam dimidium diagonalis 15, cum toto perpendiculorum 15 multiplicatum, *h. l.* 225, area qvæsita.

VII. Dati multilateri regularis angulos investigare.

Cujusvis multilateræ figuræ anguli simul sumpti sunt, minus qvatvor rectis f: 360, toties æqvales binis rectis *h.e.* 180, qvoties ipsa figura suos numeraverit angulos.

Ita Hexanguli anguli simul sumpti, sunt sexies binis rectis (*h.e. duodecies, rectiangulis s: 1080 gradibus*) æqvales, minus 360. Qvibus ab 1080 detractis; manet summa angulorum omnium cujusvis hexagoni 720 graduum. Hanc verò si dividas per angulorum numerum, *h. l. 6*; erit qvotiens 120 qvantitas anguli cujusvis, qvalem *p. 37*. de omnibus Regularibus figuris compendii ergo habes descriptam.

Nota: Si figuræ (e. g. *Heptangulæ*) *anguli non gradibus tantùm; sed & minutis primis secundisq́; gaudeant; restare, post gradus*, h. l. 174, *ex divisione fractionem* h. l. $\frac{6}{7}$. *Ea verò resolvitur in minuta prima: numeratorem*, h. l. 6, *multiplicando per 60, productumq́; 360 dividendo per denominatorem* h. l. 7. *& exurgunt* $51\frac{3}{7}$ *minuta prima. Fractio verò* $\frac{3}{7}$ *iterum resolvitur in secunda: numeratorem 3 per 60 multiplicando, productumq́; 180 dividendo per 7. Et proveniunt qvidem* $25\frac{5}{7}$; *sed qvia residuum divisionis 5, semissem divisoris 7 superat; additur unum, ut fiant 26 secunda.*

VIII.

VIII. Dati multilateri regularis perpendicularem investigare.

Sit (1) latus qvodc. figuræ datæ notum *h. l.* 12. (*v. Icon. I. Fig. XIV.*) (2) ducantur ex centro F duæ rectæ, ad duos angulos proximè sibi adjacentes A & E: & exurget triangulum Isosceles, cujus anguli ad basin non tantùm sibi sunt æqvales; verùm qvia pentagoni cujuscunq; anguli toti sunt 108 graduum, manebit angulis his, æqvaliter bisectis, dimidium hujus qvantitatis, constituens 54. (3) Demittatur ex eodem centro perpendicularis F G, bisecans æqvaliter triangulum AFE, in idem datæ figuræ latus AE: & erit latus AG 6 perticarum. Cognitis ergò angulis & alterutro latere, erit perpendicularis, (juxta ultimum modum, latus angulo recto adjacens eliciendi, *p. 93.* 94 propositum,) perticarum 8.

IX. Dati multilateri regularis aream invenire.

Multiplicetur perpendicularis inventa, *h. l.* 8, cum summâ omnium laterum, *h. l.* 60: post dividatur qvotũ 480 per 2. *Vel* multiplicetur eadem perpendicularis 8, cũ dimidiâ omnium laterũ summâ, sive cum perimetro *h. l. 30:* & erit qvotiens 240 *h. l.* area qvæsita.

IX. Multilateri irregularis aream invenire.

Inqviratur (1) in omnes angulos & latera externa. (2) Resolvatur totũ multilaterum in triangula, ductis, pro necessitate rei, intra figuram lineis, ab uno angulorum puncto ad alterum. (*vid. Icon. I. Fig. XVIII.*) (3) Areæ triangulorum, *modo p. 101. dicto* singulatim inventæ, addantur: & erit aggregatum area dati multilateri irregularis.

X. Datâ Circuli diametro, ejusdem perimetrum invenire.

Ratio omnis diametri ad suam perimetrum est tripla sesqviseptima, habetq; se, ut 7 ad 22. Ea utut, ipso fatente Archimede, *de dimensione Circuli*, sit justo minor, veroq; propriorem exhibere conatus sit Ludolphus à Ceulen; communiter tamen tanqvam usitatissima retinetur. Ergò, uti se habet 7 ad 22, ita etiam diameter ad suam perimetrum. E. g. sit *Icon. I. Fig. XXI.* diameter 21 perticarum: & erit perimetrus perticarum 66.

XI. Datâ

XI. Datâ perimetro diametrũ invenire.

Qvia heic est ratio prioris inversa, *h.e.* subtripla subsesqviseptima, *sive*, ut se habet 21 ad 7, ita perimetrus *h.l. 66.* ad suum diametrum; operatio etiam invertatur: & erit Diametrus 21 perticarum.

XII. Dati circuli aream invenire.

Multiplicetur semidiameter s: radius *h.l.* $10\frac{1}{2}$ in semiperipheriã *h.l. 33 pert*; *vel* semiradiꝰ *h.l.* $5.2\frac{1}{2}$ in peripheriã 66; *vel* diameter 21 ad peripheriæ qvadrantẽ $16\frac{1}{2}$ *vel*, si diametrus tantùm fuerit nota, *) qvum omnis diametri qvadratum se habeat ad aream, uti 14 ad 11,)* juxta auream regulam: uti 14 ad 11, ita se habet qvadratum diametri *h. l.* 441; & erit qvotum $346\frac{1}{2}$ area qvæsita. Sic aream *semicirculi* conseqveris, multiplicando semidiametrum cum peripheriæ qvadrante. *Qvadrantis* aream investigabis: multiplicando eundem semidiametrum cum octavâ parte: *octavæ partis:* eundem semidiametrum in 16 peripheriæ partem ducendo.

XIII. Qvadraturam s: Tetragonismum Circuli invenire.

Eqvi-

Eqvidem tantùm creditur problema propositum difficultatis habere, qvantum apud Chymicos lapis habet Philosophorum. Si tamen ratio, *probl. 10.* proposita, foret exactâ; foret qvoq; radix qvadrata, ex inventa circuli dati areâ extracta, latus qvadrati, circulo dato æqvalis. Illâ verò aliqvantulum aberrante; omnis *arithmetica* investigatio qvoq; aberrat. Et licet apud Aristotelem jam I. *de Reprehens. Sophist. c.* 10. alii *Geometricam* sint inventionem neqvicqvam gloriati; nihilo tamen minus suam Neoterici operam ulteriori non desponderunt inqvisitioni: qvòd qvocunq; datur in aliqvo genere majus vel minus, qveat in eodem & æqvale dari. Itaq; Orontius, inter alios, *tract. de Qvadrat. Circ.* Circulum *E. g. Icon. 4. Fig. IV.* AMDE ducit, eidemq; inscribit qvadratum BULC, atq; aliud FGIH circumscribit, post verò ex F ducit rectam ad C, eandemq; diametro ME bisecat in puncto N, perq; hoc punctum ducit qvadratum OPQR, cujus latera qvadrato BL parallela, eam habeant distantiam, qvam habet linea OP ad BC vel FG.

Tan-

Tandem terminum H connectit rectâ H K, eandemq; vicissim bisecat in puncto S, eodem diametro ME, similiq; ratione ducit, per punctum S, Qvadratum TUXZ. Et hoc pronunciat dato Circulo AMDE æqvale: cui tamen Bilanzius repugnat. *Alia vide in Actis Philosoph Anglicanis & ap. Schott. c. l. p. m. 524. 608. 743. 816.*

XIV. Ovalis s. Ellipticæ aream invenire.

Qvære diametri tàm majoris qvàm minoris mediam proportionalem, *juxta probl. 10. pag. 27.* atq; ad hujus medietatem describe circulum: & æqvabitur ejus area inventa areæ ellipticæ datæ.

ARTICULUS QVARTUS, Mechanicam figurarum rectilinearum resolutionem tradens.

I. Mechanica analysis est figurarum rectilinearum, proportionato linearum angulorumve ductu, exceptis areis, repræsentatio: *vel* ad proportionaliter delineandam figuram, mente conceptam, aut ex mensuratione geodæticâ ortam, atq; ab Architectis tàm civilibus qvàm militaribus adhibendam; *vel* ad superficialiter inqvirendum in ignota, atq; examinandum calculo subducta.

II. Abſolvitur verò dicta repræſentatio, debitâ inſtrumentorum, *p 83.* enumeratorum applicatione. Sed qvoniam Circinus proportionalis cariùs venit, qvàm qvi à qvolibet comparari poſſit, & præterea peculiarem reqvirit tractatum; ideoq; reliqvis adductis tribus inſtrumentis hâc vice acqvieſcentes, ad Graupium, *de Circino proportionali* & Ferdinandeam Schotti Amuſſim remittimus, plura deſiderantem.

III. Applicatio ceterorum *generalis eſt:* ſi ex ſcalâ proportionali qvantitatem datarum linearum, Circino ſumptam, ſuper ductas infinitas transferas; Transportorio verò angulorum qvantitatem notes. *Vel etiam*, ſi datæ figuræ lineas ſcalâ proportionali & circino; angulos verò, Transportorio ſumas.

IV. Inſpecie: ſi dentur Icon. 4. Fig. IX. Trianguli rectanguli catheti: altera 34, altera 39 perticarum, & deſideretur hypothenuſa: duc duas perpendiculares infinitas, inq; alteram earum transfer, circini divaricatione, ex ſcalâ proportionali, cathetũ AB; in alterã verò, ex pun-

ctoB,

cto *B*, cathetum *BC*; & erit intervallum, in scalam translatum, hypothenusa 52 perticarum. Idem de ceteris lateribus judicium esto.

V. Si verò detur E. g. Cathetus BC, 39 perticarum, cum angulo A B C 42 gr, ad cathetum alteram *AB*, & hypothenusam *AC* investigandam; induc puncto *B* perpendicularem infinitam, & protrahe anguli dati *42 gr.* lineam infinitam AC, ut lineam AB attingat in A, atq; hypothenusam formet. Sic erit, centro transportorii ad punctum B applicato, angulus A BC *90 gr*; eodem verò centro ad A admoto, angulus BAC *48 gr*; hypothenusa item in scalâ proportionali *52*, cathetus deniq; AB *34* perticarum, ulnarum, pedum: prout loco spatii mensuram assumpseris ex dictâ scalâ.

VI. Si Dentur, in eodem Triangulo, *cathet⁹ BC 39, & hypothenusa AC 52 perticarum*; ut altera cathetus A C inveniatur: cõstrue vicissim perpẽdiculares infinitas AB, BC, & transfer ex scalâ proportionali *39*, in infinitam BC. Postea pone hypothenusæ datæ qvantitatẽ *52*, ex eâdem scalâ, (alterum circini invariati pedem in C, alterum in infinitam BA collocando,) ut fiat interſectio in A: ſic reſpondebit qvantitas catheti, in Scalâ proportionali, 34 perticis, menſuræ loco aſſumptis.

VII. Si deniq; *datis duabus cathetis*, qværantur anguli acuti; admove, ductâ hypothenusâ, tranſportorii centrum puncto C, & invento angulo ACB *42 gr.* pronum eſt angulum BAC, *48* graduum pronunciare. Sic etiam, *datâ catheto BC, cum hypothenusâ CA*, forma cathetum AB, & procede, ratione angulorum, cum transportorio, dicto modo.

VIII. In triangulis obliqvangulis eadem eſt ratio procedendi. Sed in æqvilateris & æqvicruris adhuc facilior redditur: qvòd horum latere uno, unoq; tantùm angulo cognitis, reliqva invenienda ſpontè pateſcant.

IX. Haud min⁹, *dato figuræ multilateræ, cujus ſinguli anguli ſint 120 pedũ, latere uno, qvod ſit e. g. 12 pedum*; transfer hos 12 pedes, ex ſcalâ aſſumptos, in lineã infinitã, admotoq; extremitati ej⁹ tranſportorio, nota diſtantiam *120 gr.* Porrò eidem inferens

rens extremitati lineam 12 pedum, operationem repete, donec ipsâ conseqventiâ sese offerat Hexagonum regulare.

X. Qvod si tandem certa figura regularis desideretur, uno tantum illius latere dato; consule Articuli tertii *probl. 7. p. 105*, & tabulam *p. 37* communicatam.

ADDITAMENTUM DE RADICIS QVADRATÆ ET CUBICÆ EXTRACTIONE.

Et primò, DE RADICE QVADRATA.

I. Dantur eqvidem plures, pro figurarum Geometricarum diversitate, radicum extractiones, Qvadrata, Cubica, Biqvadrata, Cubiqvadrata &c: de qvibus, inter alios, Schottus: *c. l. lib. 26. c. 5. p. m. 541.* hoc tamen loco sufficiat duas tantùm priores, tanqvam ceterarum fundamentum explicasse.

II. RADIX QVADRATA est numerus, qvi in se ductus i: multiplicatus, producit numerum qvadratum.

III. MULTIPLICARI IN SE dicitur numerus: cujus & multiplicans & multiplicandus sunt iidem. *E. g. 6 per 6 dicuntur in se multiplicari.*

IV. Qvotum ex ejusmodi multiplicatione resultans, *h. l.* 36, est NUMERUS QVADRATUS, s: QVADRATUM absolutè dictum: ipsum verò 6, RADIX QVADRATA: qvia ex eo, ceu radice, oritur numerus qvadratus. Aliàs etiam LATUS QVADRATUM dicitur: qvia, qvadrato numero, *h. l.* 36, in figuram qvadratam per unitates collocato, prostant in qvolibet latere sex unitates.

V. EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ s: LATERIS QVADRATI, est investigatio numeri, ex cujus multiplicatione in se, qvadratus numerus vel qvadrata figura exurgat. *E. g.* si Chiliarcha agmen suum 1024 capitum, in qvadratum extemplo redacturus, cuilibet articulo 32 corpora designet; facit hoc extractione radicis qvadratæ: qvia 32 in se ducta, seu *per* 32 multiplicata, exhibent 1024.

VI. Qvod si datus numerus radicem qvadratam haud exactè præbeat, sed *justo* major sit vel minor, adeoq; *nec* in qvadratā qveat, nec cubicam abire: non qvadratus sed SURDUS ac IRRATIONALIS audit.

VII. Circa extractionem verò Radicis

qvadratæ attende: utrum datus numerus centenario minor ſit vel major? *Priori caſu*, ſola Pythagorica ſufficit menſa, in ſubſidium vocata. *E. gr.* Qvadratum 81 habet pro radice 9: qvia novies novem ſunt 81. Nec minus 89 eandem agnoſcunt radicem: utut eis, qvia numerus ſunt ſurdus, 8 ſuperſtent.

VIII. *Poſterior caſus* expeditur (1) punctatione, (2) inveſtigatione radicis primæ, (3) ſubtractione primâ, (4) inveſtigatione radicum reliqvarum, (5) multiplicatione, & ſubtractione earundem.

IX. Punctum apponitur dextimo cuivis datæ qvadratæ ac ſurdæ ſummæ numero, ſupernè vel infernè, perq; alternos qvoslibet continuatur. *E. g.* qvadrati 104976 puncta ponuntur ſub 6, 9, 0. Cumq; tot terminorum ſemper ſit futura radix, qvot puncta reqviruntur; patet: tribus qvadrati hujus radicem terminis abſolutum iri.

X. Primæ radicis inveniendæ gratiâ, excerpe inexercitatus, ex appoſitæ tabulæ areâ mediâ numerum, ad datæ ſummæ punctum ſiniſtimum, vel exactè proſtan-

R.	Q.	C.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

tem, vel proximè minorem. Huic versùs ſiniſtrã in areâ, ipſi R ſubjectâ, directè oppoſitus, eſt RADIX PRIMA. *E. g.* dati qvadrati 104976 numerus, ſiniſtimo puncto adſtans, eſt *10*. Qvi qvum in tabulæ areâ haud proſtet; ſume proximè minorem *9*: cui oppoſitus numerus 3 prima dati eſt qvadrati radix, & poſt diſcerniculum, ut in ſimplici fieri diviſione ſvevit, & ad primum punctum ſiniſtimum ponenda. Hanc in ſe multiplicatam, ut 9 exurgant, ſubtrahe à ſuprapoſitis 10, ac reſiduum ſupraſcribe.

XI. Pro reliqvis radicibus inveniendis, multiplica ſemper numerum poſt diſcerniculum proſtantem, qvantus qvantus ille fuerit, per 2, (qvia in qvadrati generatione bini numeri inæqvales, interdum & æqvales, inter ſe ducuntur) qvotumq; ſubſcribe, loco diviſoris, numero, illi qvidem puncto, circa qvod eſt operatio

tio peractâ, proximè adjacenti. *E.g. h. l.* bis 3 sunt 6. Numerum 6 itaq; subscribe ipsi 4, moreq; divisionis explora, qvoties subscriptus supracollocato, & reliqvo etiam, si datur, versus sinistram posito, contineatur. Hoc modo reperies 6, sub ipsis 14, bis contineri. Itaq; repertum hunc qvotientem 2 appone, tàm primæ post discerniculum radici 3, qvàm puncto secundo, *h. l.* ipsis 9 subjecto.

125 164976 3 2 4 64	324	644 4 2576

Qvòd si qvotiens, conjecturâ repertus, sit ob subseqventes numeros justo major futurus; assumatur proximè minor.

XII. Per assumptum hunc, primæq; radici appositum qvotientem *h. l. 2*, multiplica & numerum 2, puncto secundo adscriptum, & divisoris loco assumptum 6: qvotumq; 124 subtrahe à numeris *149*, puncto secundo, circa qvod versaris, interceptis, ac residuum 25 superscribe ipsis 49.

XIII. Qvum verò hoc modo, radicum

qvadratarum ceteræ, qvotqvot fuerint, inveniantur; multiplica post discerniculum prostãtes radices 32 per 2, qvotumq; 64 subscribe, divisoris vice, numero, secundo puncto, circa qvod operatio est peracta, proximè adjacenti, (*ut 4 ipsum 7; 6 verò, ipsum 5 directè respiciant*) atq; posthâc, qvoties 6 sub 25 contineantur, inqvire. Itaq; 4 conjecturâ indicante, oppone 4 & radicibus inventis 32, & puncto dextimo sub 6, ac multiplica 644 per radicem novam 4, tùm qvotum 2576 subtrahe à numeris suprascriptis: & erit, peractâ operatione, radix qvadrata 324.

XIV. Qvod si post radicis extractionem aliqvid summæ remaneat; est *qvadratum surdum*, ex qvo nunqvam est exacta; sed vel major, vel minor aliqvantum justo, radix speranda.

XV. Aliqvantum justo majorem desiderans, multiplica radicem inventam per 2, qvotoq; adde unum, & hoc aggregatum adscribe radicibus instar denominatoris, residuum verò summæ superscribe Denominatori, loco Numeratoris. *E.g.* qvadrati 104992 radix etiam qvidem est

324; ſed remanent ei 16. Itaq; multiplica radicem per 2, qvotoq; adde unum, ut ſit univerſa ſumma 649. Huic ſi reſiduũ 16 ſuperſcribas; erit radix veræ proxima, ſed aliqvantò major, $324\frac{16}{649}$.

XVI. Si contra deſideres radicem juſto minorem; ſubnecte dato numero ſurdo, qvot libuerit nullarum paria, (qvo a. plura fuerint, hoc propiùs acceſſeris ad verũ,) & operare ſimpliciter modo dicto. *E. g.* dato numero ſurdo ſubnecte nullarum paria qvatvor 10499200000000; & reperies peractâ operatione radicem 3240246. Ceterùm, hôc operationis modo, conſtituunt tot dextimi radicum inventarum termini Numeratorem, qvot nullarum paria numero fuerint ſurdo adjecta. Huic ergò Numeratori ſuppone 1 cum tot nullis, qvot nullarum paria adjeciſti ſurdo; & conſeqveris denominatorem, radicemq; exactâ aliqvantò minorem $324\frac{246}{10000}$. *Conf. ad Euclid. II. prop. 4. Bökelÿ Arithm. milit. p.m. 369. 485. 623. 678.*

Nota: Si reſiduo, *ut E. g. ſuperioribus* 6, tantùm velis addere, qvantùm ad exactum latus qvadratum 325 pedum □torum reqviritur; multiplica inventam radicem *b. l.* 324 per 2, in 648, qvotoq; adde unum, ut sit 649, atq; ab hac summâ subtrahe residuum qvadrati *b. l.* 16, & exurgent 633: qvæ addita numero □to *b. l.* 104992, ut sit summa 105625, dant exactè latus qvadratum 325 pedum □torum aut capitum, &c. exempli loco assumptorum.

DE RADICE CUBICA.

Radicis cubicæ extractio est inqvisitio in eam dati numeri cubici radicem, ex cujus multiplicatione in seipsam, & vicissim Qvoti in radicem, oritur Cubus. Hinc qvemadmodum qvadratur numerus, qvi idem in seipsum multiplicatur; sic cubicè multiplicatur, qvando qvadratum ducitur in radicem.

Ut ergò hoc expedias; (I) signetur dati numeri *b. l.* 333813812 dextimus *b. l.* 2 puncto; ab hinc porrò tertius *b. l.* 3, atq; hinc iterum tertius *b. l.* 3. Hæc puncta idem, qvod *p.* 117. in qvadratæ radicis extractione, officium præstant.

II. Extrahe ex tabellæ *p.* 118. communicatæ

nicatæ areâ dextimâ ſub C, numeri cubici, vel exacti, vel, ut *h.l.* proximè minoris 216, radicem cubicam 6, qvam poſt diſcerniculum, *diviſoris more*, pone: ejus verò numerum cubicum 216, ſubſcribe numeris puncti primi ſiniſtimi, *h. l.* 333, atq; ab iisdem ſubtrahe, reſiduo deſuper notato.

117
E. g. 333813812 | 6
216

III. Radicem inventam triplica, ac orietur Triplum dictum, cujus notam *h. l.* 18. ſubſcribe numero, ſeqvens punctum proximè antecedenti 1: ut, ſi plures adfuerint Triplo numeri, verſus ſiniſtrum ſeſe ordine conſeqvantur. *E. g.*

117
333813812 | 6
216, 18,

IV. Idem Triplum repertum, qvantum qvantũ fuerit, multiplica ſemper per radices, poſt diſcerniculum proſtantes, *h. l.* 18 *per* 6, qvotumq; 108 ſubſcribe versùs ſiniſtram notæ, (*h. l.* 8) primum ſiniſtimum punctum proximè ſeqventi.

```
     5                  9            9
117304                  9           |9 Radix
3338138 12 | 69        ---          ---
                        81           81 □tum
216,18,9                 9           18 Triplum
 108,0                 ---         ----
1125                   729 Cub9    1458 □tum
                   1458 □t: Triplat. (Tripl.
                   972   Diviſor multipl:
                   ------
                   112509
```

V. Productum hoc eſt qvaſi novus diviſor. Itaq; perſiniſtimum ejus terminum *1* vide, qvoties ſub ſupraſcriptis *11* contineatur, habitâ tamen numerorum, versùs dextrã freqvẽter expectandorum ratione, ne, qvi nondum adſunt, nimis excreſcant. *E.g. h.l.* cõtinetur *1* ſub *11* novies.

VI. Hic qvotiens, tanqvam nova radix, adſcribatur radici priori poſt diſcernicu- lum, ſimulq; multiplicetur cubicè, & Cubus *h. l. 729* ſervetur in abaco ſeorſim. Porrò eadem radix 9 ſeorſim qvadretur, qvadratumq; *h. l. 81*, multiplicetur per inventum Triplum *h. l. 18*, ut exurgat qvotum 1458.

VII. Hoc qvotum ſubſcribe jamjam reperto cubo ſic, ut ultimus illius terminus ſub hujus penultimo proſtet,

VIII. Jam verò multiplica diviſorem *108* per inventam modò radicem 9, qvotumq́; 972 ſubſcribe uno gradu remotiùs, versùs ſiniſtram, numeris modò ſuppoſitis *1458*.

VI. Tandem adde hos tres numerorum ſeorſim poſitorum ſeries, in ſummam *112509*, qvam ſubtrahe à numeris *117813*, puncto ſecundo interceptis, ac reſiduum *5304* ſuperſcribe: ſic erit ſecunda qvoq́; radix extracta.

V. Reſtantium radicum omnium eadem eſt ratio. Itaq́; pro tertiâ *h.l.* inveniendâ, triplicentur radices duæ priores *69*, triplumq́; novum *207* multiplicetur iisdē radicibus *69*, ac ſubſcribatur denuò, *dicto modo*, qvotum 14283, tanqvam novus diviſor. Cujus ſiniſtimus terminus 1, ter ſub 5 comprehenſus, dat tertiam radicem 3.

XI. Eam verò ceteris poſt diſcerniculum adſcriptā, multiplica ſeorſim cubicè in 27, eandemq́; ſeorſim qvadra in 9, perq́; triplum 207, noviſſimè inventum, multiplica: ſic habes qvotum *1873*, cubo jamjam reperto debitè ſubſcribendum. Tùm verò diviſorem 14283 multiplica per radicem 3,& qvotum *42849* ſubſcribe debitè Triplo multiplicato, ſummamq; omnium additam *4303557* ſubtrahe à *5304812*.

XII. Sed qvia datus numerus eſt ſurdus ſive irrationalis; offendis reſiduum, ſ: ſupernumerarium numerum, peractâ operatione, 1001255. Hoc reſiduum præbet fractionis numeratorem: cujus denominator erit, ſi & tota radix inventa *693* in *2079*, & ejuſdem qvadratum *480249* ſeorſim in *1440747* triplicentur, atq; utriusq; ſummæ, triplicatione acqviſitæ addatur unum, ut tota radix cubica ſit *h. l.* $693\frac{1001255}{1442827}$

XIII. Qvòd ſi Cubus veniat duplicandus, qvemadmodum Apollinis aram refert Plutarchus, *de Genio Socratis p. m. 579.* ad profligandam peſtem, duplicatam: multiplica datum numerum Cubicum per 2, & operare dicto modo.

XIV. Si radix Qvadrata in ſe; Cubica, cubicè multiplicata, (addito utrobiq;, ſi adſit, reſiduo,) ipſum numerum qvadratum vel cubicum reddat; aderit optatus operationis

FINIS.

nicatæ areâ dextimâ ſ [illegible] i cubi-
ci, vel exacti, vel, ut *b.* [illegible] ainoris
216, radicem cubicam [illegible] diſcer-
niculum, *diviſoris mo* [illegible] s verò
numerum cubicum 2 [illegible] nume-
ris puncti primi ſiniſt [illegible] atq; ab
iisdem ſubtrahe, reſid [illegible] notato.

117

E. g. 333813812 |

216

III. Radicem inv [illegible] ica, ac
orietur Triplum dic [illegible] notam
b. l. 18. ſubſcribe nu [illegible] ns pun-
ctum proximè antec [illegible] ſi plu-
res adfuerint Triplo [illegible] ſus ſini-
ſtrum ſeſe ordine c [illegible] *E. g.*

117

333813812 | 6

216, 18,

IV. Idem Triplu [illegible], qvan-
tum qvantũ fuerit, m [illegible] per per
radices, poſt diſcern [illegible] tantes,
b. l. 18 per 6, qvotum [illegible] be ver-
sùs ſiniſtram notæ, [illegible] num ſi-
niſtimum punctum [illegible] venti.