Wilhelm Plitt

Disquisitio analytica sistens quaestionem: A plano quocunque secatur superficies secundi ordinis corporis tornati; invenire naturam sectionis

Rostochii: Adler, 1815
http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn769837875

Disquisitio analytica
sistens quaestionem:
A plano quocunque secatur superficies secundi ordinis corporis tornati; invenire naturam sectionis.

Opus postumum
Wilhelmi Plitt
Philosophiae Doctoris et Berolinensis Gymnasii Friderici Wilhelmi jamjam designati Professoris,
quo se
Amplissimo Ordini Philosophico Rostochiensi
ad capessendos summos in philosophia honores dignum praebuerat.

Nunc
post lugendam ejus mortem
editum, ut placuit propinquis,
ab illius promotore
G. Schadeloock
Mathem. Professore.

Rostochii,
typis Adlerianis, MDCCCXV.

Duplum of Diss.

Sanctae animae

viri juvenis praenobilissimi

W i l h e l m i   P l i t t

philosophiae Doctoris meritissimi

dum inter patriae defensores strenue militabat

praecoci pro patria morte

nobis abrepti

L. L. Q. D.

G. S c h a d e l o o c k.

Quam sint reconditae penitusque nobis abditae divinae rationes, et quam parum Sapientissimi Numinis cogitationes respondeant nostris, mihi quidem etsi non nescirem, denuo tamen ex toto cursu *) vitae et novissima sorte Juvenis ornatissimi manifeste apparuit, nec leviter animum meum tetigit. Etenim hic adolescens animi dotibus ingeniique facultatibus a natura haud parce instructus, atque tempestive iis artibus imbutus, quas, qui tener combiberit, paratiorem dicunt venire ad majora, semper, simulac totus se studiis dare potuit, singulari ad illa incubuit industria; atque ut mathemata maxime illi arriderent, ita omni ratione haec colenda putavit, tanto ardore, ut magis fraena injicienda essent, quam calcaria adhibenda. Unde factum est, ut, quemadmodum agri bene culti sunt frugiferi, sic quoque hic animus tanta cura cultus mature fructus ferret eosque non obscuros. Testis locuples est Specimen analyticum, quod heic nunc fit publici juris, quo exhibito communi consensu Ordinis philosophici amplissimi, me De-

*) Qui, qualis sit, ex adjecto curriculo vitae patet, quod ad consuetudinem Facultatis Philosophicae ipse scribere debuit.

cano, accepit summos in philosophia honores. Quod scriptum nullis adminiculis, sed, ut dicitur, marte suo elaboratum satis abunde nobis indicabat, et quos jam fecerit progressus, et quid in posterum liceret de illo sperare. Neque enim dubium cuiquam esse poterat, quin, si illo tramite pergendi, et in studium, quod sibi sumserat, ulterius incumbendi facultas illi daretur, magno et sibi honori, et rei litterariae foret emolumento. Verum alius eventus fuit, quam quem nos arbitrati sumus. Nam quum in eo esset, ut sibi adsignatum docendi munus ingrederetur, Ciceroni adsentiens, qui, quod, inquit, munus reipublicae afferre majus, meliusve, possumus, quam si docemus atque erudimus juventutem, accidit, ut Germania, omnium nostrum communis patria, cives suos evocaret, ad dejiciendum servitutis jugum, cervicibus nostris vi ac fraude obtrusum. Qua voce sancta quum et seniores et juniores, ad arma ferenda capaces, docti et non docti, nobiles et non nobiles, mariti ac caelebes, quasi uno spiritu afflati atque incitati, cum hoste pro patria decertare properarent, sese his in defendenda patria ejusdem consilii sociis adjunxit. Haerebat enim patria aeque in ejus caritate penitus infixa. Quare relictis reipublicae caussa iis, a quibus non nisi cum dolore aliquo divellebatur, saevi Martis arma sumere non haesitavit; eo tamen consilio, ut feliciter finito certamine, in tutelam castae Minervae rediret. Ast, proh dolor! certamen feliciter finitum est, ille non rediit, cum honore pro patria interiit, certe interiisse dicitur. Nam quod in hoc tristi casu in primis dolendum est, adhibita omni, qua fieri potuit, investigandi cura et diligentia, certi nihil huc usque inventum est. Tantum quidem constat, illum in pugna ad rivum Katzbach vulneratum esse, atque, ut curetur, inde aliquo abiisse, quo vero loco, et utrum ex hoc vulnere mortuus sit, an in novo quodam cum hoste palante concursu interfectus sit, non constat. Interim etsi de morte ejus, mortisque ratione ipsa sumus incerti, illum lugemus, et tanto temporis intervallo non sine caussa mortuum lugemus. Luget tota familia, luget in primis, quem defunctus ut patrem pie venerari, quique defunctum ut filium paterno animo amare consueverat, vir illustris, Collega meus amantissimus, Mathem. Professor P. J. Hecker. Justae sunt lacrimae, justus moeror patrius. Ast omittamus lugere. Aequo animo casus ferre adversos, in nostro eventu aliorum reminisci casus vel graviores, vel eosdem, hoc sapientis esse philosophi docent. Debile solatium! Omnia ad Deum referre sancta nostra religio jubet, Dei mente atque ratione non solum omnem mundum sapienter administrari, sed vitae hominum quoque benigne consuli, aeque in minimis atque in maximis, neque quidquam nobis unquam contingere, nisi quod utile nobis sit, etiamsi acerbum, quod in in illo lateat, sentiamus. Atque in hac divina summa sapientia et immensa benignitate quis non adquiescat!

His praemissis equidem, dum mortuum ad vitam revocandi nulla nobis datur facultas, volui, si non perfecte, at saltem quoad fieri poterat, cum hujus viri caram nobis memoriam consecrare, tum doloris nostri acerbitatem mollire. Quibus peractis, non supervacaneum mihi visum est, brevi ostendere, cur hoc eruditionis Specimen edam, quod ipse Auctor nondum perfectum, atque ut prelo subjiciatur satis dignum judicavit; quippe quum in litteris, ad Amplissimum Ordinem Philosophicum datis, haec non solum fateatur, sed etiam, quae adhuc addenda haberet quominus adjiciat, sese penuria temporis impeditum esse non obscure queratur. Nec vana loquutus est. Scimus enim, ab illo jam plura, antequam abiret, fuisse elaborata, in primis quae pertinent, ad rigide demonstrandam illam, pag. 15 (Coroll. II) leviter modo tactam aequationem. Verum illa, quoniam secum abduxerat, una cum illo interiere. Utique igitur ultima manus deest, ideoque vocari absolutum opus nondum potest. Mihi tamen illud jamjam per se stare, et nihilominus usui esse posse, erat persuasum; atque hinc curare, ut exeat, meum putavi, insuper ut junioribus sit diligentiae et assiduitatis expressa effigies, suoque exemplo etiam mortuus prosit, qui vivus prodesse, gravi casu impeditus nequiverat.

Scribebam Idibus Novembris MDCCCXIV.

Sectio I.
Problemata praeliminaria.

Problema I.

Data curvae cujuscunque NMO (Fig. I) aequatione inter coordinatas $AP=x$, $PM=y$, angulum $APM=\pi$ comprehendentes, ad axem alium quemlibet et abscissarum initium quodcunque, adhibitis coordinatis quibuscunque, invenire aequationem ejusdem lineae.

Solutio.

I. Assumatur axis alius BR, priori AW occurrens in C Fig. I.
sub angulo $ACB=\nu$. Sint novae ad punctum M coordinatae $BQ=t$, $QM=u$, quae inter se angulum $BQM=\varkappa$ constituant. Sit denique $CA=h$, $CB=g$. Eruenda est aequatio inter t et u.

II. Ducantur prioribus coordinatis AP et PM parallelae QS et QW, producta quidem ad S applicata PM.

III. Manifestum est, esse

1) $y = MS - QW$.

Jam ob $MS : QM = \sin MQS : \sin MSQ$

$$\text{erit } MS = \frac{\sin(\varkappa+\nu) \cdot u}{\sin \pi}$$

nec non, ob $QW : CQ = \sin\nu : \sin CWQ$

$$QW = \frac{\sin\nu (g+t)}{\sin\pi}$$

unde fit $y = \dfrac{\sin(\varkappa+\nu)u - \sin\nu(g+t)}{\sin\pi}$.

Haud secus

2) $x = CW - SQ - h.$

Quum autem sit

$$CW : CQ = \sin CQW : \sin \pi$$

$$\text{unde } CW = \frac{\sin(\pi - \nu)(g + t)}{\sin \pi}$$

porro $SQ : QM = \sin SMQ : \sin MSQ$

$$\text{unde fit } SQ = \frac{\sin(\pi - \varkappa - \nu)u}{\sin \pi}$$

$$\text{colligitur } x = \frac{\sin(\pi - \nu)(g + t) - \sin(\pi - \varkappa - \nu) \cdot u}{\sin \pi} - h.$$

IV. Qui valores coordinatarum x et y si in aequatione proposita undique substituantur, prodibit, quam quaerimus, aequatio inter coordinatas t et u.

Corollarium.

Via modo proposita quaelibet lineae curvae aequatio inter datas coordinatas in aequationem inter quascunque coordinatas alias mutari potest, licet axis novus plane secus, quam figura docet, positus assumatur. Substituantur modo, qui in quocunque casu requiruntur, singulorum terminorum valores affirmativi aut negativi, mutenturque insuper angulorum, ut figura fert, valores. Cujus vero expositionem uberiorem ad ea, quae sequuntur, non spectantem, ne longum sit, praetereo.

Problema II.

Secta superficie, cujus data est aequatio inter coordinatas orthogonales (Fig. II) $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, a plano quocunque Z, sectionis invenire naturam.

Solutio.

I. Sit plani secantis Z intersectio, cum superficie curva CMR, cum plano W coordinatarum x et y recta CR. Fig. II.

Ducta MS perpendiculari ad CR, junctisque punctis S et Q erit $MSQ = \varphi$ angulus inclinationis, quo planum Z ad planum W inclinatur.

Sint sectionis CMR coordinatae $ES = t$, $SM = u$, sumta CR pro axe, qui cum superiore axe AP angulum constituat $ACE = \theta$.

Sit denique $AI = f$ axi AP normalis, porro $EI = p$, $SQ = w$.

Quaeritur aequatio pro sectione CMR inter t et u.

II. Eruatur primum e data aequatione inter x, y, z aequatio inter t, w, z. Ex eruta facillime ea, quam quaerimus, elicietur.

III. Jam vero exprimentur x et y per t et u, si respexerimus probl. I, propterea quod in utraque figura coordinatae uno eodemque modo sitae sunt. Idcirco ut ibi repertis

$$y = \frac{\sin(\varkappa + \nu)u - \sin\nu(g + t)}{\sin\pi}$$

$$x = \frac{\sin(\pi - \nu)(g + t) - \sin(\pi - \varkappa - \nu)u}{\sin\pi} - h$$

hic utamur, nihil nisi singulorum terminorum requiritur substitutio concinna.

IV. Attamen exprimantur ante CI et CA per f et θ.

Ob $CI : f = 1 : \sin\theta$ erit $CI = \operatorname{cosec}\theta \cdot f$

nec non ob $CA : CI = \cos\theta : 1$ $\quad CA = \cot\theta \cdot f$

V. Quibus quidem valoribus adhibitis, jam

pro	π	ν	$\varkappa$	g	u	h
substituenda erunt	R	θ	R	$cosec\,\theta \cdot f + p$	w	$cot\,\theta \cdot f$

atque reperitur facta substitutione

$$y = cos\,\theta \cdot w - sin\,\theta\,(cosec\,\theta \cdot f + p + t)$$
$$= cos\,\theta \cdot w - sin\,\theta\,(p + t) - f$$

porro

$$x = cos\,\theta\,(cosec\,\theta \cdot f + p + t) + sin\,\theta \cdot w - cot\,\theta \cdot f$$
$$= cos\,\theta\,(p + t) + sin\,\theta \cdot w.$$

VI. E triangulo SMQ constat autem, esse

$$w : u = cos\,\varphi : 1$$
$$w = cos\,\varphi \cdot u.$$

VII. Ex V. VI colligitur tandem

$$y = cos\,\theta \cdot cos\,\varphi \cdot u - sin\,\theta\,(p + t) - f$$
$$x = sin\,\theta \cdot cos\,\varphi \cdot u + cos\,\theta\,(p + t).$$

Quibus addatur e triangulo SMQ

$$z = sin\,\varphi \cdot u.$$

VIII. Substitutis his valoribus coordinatarum x, y, z prodibit aequatio quaesita pro sectione CMR inter coordinatas t et u.

Corollarium.

Fig. III. Quodsi axem ER (Fig. III) axi AP parallelum duxerimus, in valoribus repertis necesse est, ut ponamus angulum $\theta = 0$, nec non, si insuper abscissarum initium cadere voluerimus in E (i. e. in I Fig. II), ut sumamus $p = 0$. Tum vero resultant

$$y = cos\,\varphi \cdot u - f$$
$$x = t$$
$$z = sin\,\varphi \cdot u.$$

Problema III.

Aequationem pro corporibus tornatis *) invenire generalem.

Solutio.

I. Sit (Fig. IV) axis AO corporis normalis plano W, corpus ipsum tangat planum in puncto A. Fig. IV.

Per punctum A, abscissarum initium, transeat axis AR ad lubitum assumtus in plano W.

Sint coordinatae rectangulae $AP = v$, $PQ = w$, atque $QM = z$ perpendicularis ad planum W.

Quaeritur pro corpore tornato aequatio inter v, w et z.

II. Recta ducta AQ, deinde MO ad axem AO perpendiculari, erit $MO = AQ$, ergo $AO = QM = z$.

III. Curvae, cujus torno efformatur corpus tornatum, aequatio data sit inter abscissas $AO = x = z$ et applicatas $MO = y$. Mutetur in aliam inter z, v et w.

IV. Patet autem, esse, ob $MO = AQ = \sqrt{(AP^q + PQ^q)}$

$$y = \sqrt{(v^2 + w^2)}.$$

V. Quae quidem aequatio, quocunque modo axis AR in plano W situs sit, semper eadem resultabit.

His praemissis ad problema propositum progredi licet, cui in sequenti sectione satisfaciendo operam dabimus.

---

*) Confer *Euleri* introd. in analysin infinitor. lib. II. append. §. 39.

Sectio II.

Problema.

Superficies secundi ordinis corpus tornatum terminans a plano quocunque secatur. Invenire naturam sectionis.

Solutio.

Fig. V. I. Corporis tornati axis AO perpendiculariter insistat plano basis W.

Sit plani secantis Z, quod cum plano W angulum inclinationis constituit $MSQ = \varphi$, intersectio cum plano W recta HL, cum corpore tornato curva $CGDF$.

Sint coordinatae lineae curvae, quae corpus tornatum efficit, $AO = x$, $OM = y$, abscissarum initium in vertice A.

Sint porro coordinatae pro corpore $AP = v$, $PQ = w$, $QM = z$, sumto axe AR parallelo rectae HL; qua quidem facta praesumtione non impeditur, quo minus problemati generaliter respondeatur *).

Sint denique coordinatae sectionis $CGDF$, $ES = t$, $SM = u$, posito axe HL, abscissarum initio E, praeterea AE rectae HL perpendicularis ponatur $= f$.

Sint autem coordinatae rectangulae omnes.

II. Inveniatur primum aequatio pro corpore inter v, w, z; ex inventa deinde eliciatur ea, quam quaerimus, pro sectione $CGDF$ inter t et u.

*) Conf. Sect. I. Probl. III. V.

III. Quodsi vero aequationem pro curvis secundi ordinis, abscissis sumtis in diametro orthogonali, abscissarum initio quidem in vertice, generalem esse statuerimus

$$y^2 = \lambda x + \varkappa x^2$$

aequatio pro corporibus, quae harum curvarum ad axem torno efformantur, (coll. Sect. I. Probl. III) prodibit

$$v^2 + w^2 = \lambda x + \varkappa x^2$$

$$\text{seu } v^2 + w^2 = \lambda z + \varkappa z^2$$

IV. Nunc aequationis inventae coordinatae v, w, z exprimendae sunt per sectionis coordinatas t et u; quod quidem facillime fit, respectu habito ad corollarium problematis praelimin. II.

V. Quum enim ibi reperti sint coordinatarum valores

$$x = t \qquad y = \cos\varphi \cdot u - f \qquad z = \sin\varphi \cdot u$$

hic fore constat

$$v = t \qquad w = \cos\varphi \cdot u - f \qquad z = \sin\varphi \cdot u.$$

Quibus valoribus substitutis in aequatione, quam in III deduximus, evadit aequatio pro sectione quaesita

$$t^2 + \cos^2\varphi \cdot u^2 - 2\cos\varphi \cdot fu + f^2 = \lambda \cdot \sin\varphi \cdot u + \varkappa \cdot \sin^2\varphi \cdot u^2$$

eadem ordinata (⊙)

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)u^2 - (2\cos\varphi \cdot f + \sin\varphi \cdot \lambda)u + t^2 + f^2 = 0. \quad (\odot)$$

Atque ex hac quidem aequatione patebit natura sectionis *CGDF.*

VI. Etenim primum omnium manifestum est, erutam aequationem esse pro curvis secundi ordinis, unde sectionem semper curvam secundi ordinis evasuram esse certum habemus.

Speciatim vero naturam curvae aequationi (⊙) respondentis pendere constat a valore

$$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta$$

collata scilicet aequatione pro curvis secundi ordinis, quae signis Eulerianis exprimitur

(☽) $$\zeta y^2 + \varepsilon xy + \delta x^2 + \gamma y + \beta x + \alpha = 0 \quad (☽)$$

VII. Intelligitur jam, esse in aequatione (⊙)

$$\varepsilon = 0 \qquad \delta = 1 \qquad \zeta = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa$$

ergo $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4(\sin^2\varphi \cdot \varkappa - \cos^2\varphi)$.

Natura curvae pendebit igitur a valore coefficientis $\varkappa$ et anguli inclinationis φ.

VIII. Primum, quod attinet ad coefficientem $\varkappa$, ex eo ipsius corporis tornati figura definitur. Prout enim generatim eum posuerimus vel affirmativum, vel negativum, vel nihilo aequalem, corpus rotundum evadet

vel *conoides hyperbolicum*,
vel *elliptoides*,
vel *conoides parabolicum*.

Pro singulis his corporibus, quibus postea

conum
ac *cylindrum*

adjungemus, contemplaturi sumus mutationes anguli φ.

De elliptoide.

IX. Quodsi elliptoides secatur, natura sectionis patet ex

$$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = -4(\sin^2\varphi \cdot \varkappa + \cos^2\varphi)$$

id quod resultat ex VII, posito quidem coefficiente $\varkappa$ negativo. Ergo sectio erit, (ob $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta$ semper negativum) semper *ellipsis*; scilicet *circulus* quidem, sumto $\varphi = 0$, ob $\zeta = 1 = \delta$ (conf. VII). Ita par est genesi ipsius corporis.

Ex his quoque perspicitur, sectiones *globi* quascunque evasuras *circulos*. Quum enim ex elliptoide nascatur globus, posito $\varkappa = 1$, unde fit $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = -4$, sectiones cognoscuntur circulares ex $\zeta = 1 = \delta$.

De conoide parabolico.

X. Ad conoidis parabolici determinandas sectiones, posito $\varkappa = 0$, reperimus (VII)

$$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = -4\cos^2\varphi.$$

Fit igitur sectio *parabola* pro $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 0$, i. e. pro $\varphi = 90°$, uti corporis genesi respondet; fit vero *ellipsis*, ob $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta$ negativum, pro alio quovis valore anguli φ.

Speciatim sectio elliptica exstat *circularis*, si statuerimus esse $\varphi = 0$, quo scilicet facto prodit $\zeta = 1 = \delta$. Id quod manifestum est, ut in IX.

De conoide hyperbolico.

XI. Supersunt conoidis hyperbolici investigandae sectiones. Earum natura patet ex

$$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4(\sin^2\varphi \cdot \varkappa - \cos^2\varphi)$$

sumto quidem coefficiente $\varkappa$ affirmativo. (VII)

Memores autem, coefficientem $\varkappa$, quo ratio parametri ad diametrum orthogonalem exhibetur (III), exsistere posse unitate vel majorem, vel eidem aequalem, vel unitate minorem, tres hosce casus necesse est, ut distinguamus.

Statuamus igitur

I. esse $\varkappa < 1$.

Ex $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4(sin^2\varphi \cdot \varkappa - cos^2\varphi)$ sequitur, sectionem evadere

1. *ellipsin*, si $sin^2\varphi \cdot \varkappa < cos^2\varphi$, i. e. si $\varkappa < cot^2\varphi$, seu $\varphi < arc.cot\sqrt{\varkappa}$ (licet cotangentes in arcuum sint ratione inversa).

Quum igitur cotangentes ab infinitis, quales sunt pro $\varphi = 0$, pro $\varphi = 45°$ decreverint ad unitatem, sane apparet, sectionem *certe fore* ellipticam, dum $\varphi \overline{\overline{<}}\, 45°$, *fieri posse*, dum $\varphi > 45°$.

2. *parabolam*, si $sin^2\varphi \cdot \varkappa = cos^2\varphi$, i. e. si $\varkappa = cot^2\varphi$, seu $\varphi = arc.cot\sqrt{\varkappa}$. Quod ut fiat, semper necesse est, sit $\varphi > 45°$.

3. *hyperbolam*, si $sin^2\varphi \cdot \varkappa > cos^2\varphi$, i. e. si $\varkappa > cot^2\varphi$, seu $\varphi > arc.cot\sqrt{\varkappa}$. Quod multo magis fieri nequit, nisi sit $\varphi > 45°$.

Speciatim sectio elliptica exstat *circulus* pro $\varphi = 0$, ob $\zeta = 1 = \delta$ (ut supra).

E natura ipsius corporis ceteroquin patet, pro $\varphi = R$ inter alias hyperbolas ipsam exstituram esse genitricem.

Nota. Haud plane negligendum videtur, sectiones facta hypothesi ex ellipticis evadere parabolicas, e parabolicis demum hyperbolicas; scilicet ob similitudinem conoidis hyperbolici cum ipso cono, ubi sectionum varietas plane eundem ordinem sequitur.

Si porro statuerimus

II. esse $\varkappa = 1$, i. e. hyperbolam genitricem exsistere aequilateram, sectio cognoscitur ex

$$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4(sin^2\varphi - cos^2\varphi)$$

1. *ellipsis* pro $cot^2\varphi > 1$; id quidem fieri nequit, nisi sit $\varphi < 45°$

2. *parabola*, pro $cot^2\varphi = 1$, i. e. pro $\varphi = 45°$

3. *hyperbola*, pro $cot^2\varphi < 1$, id quod fiet, posito $\varphi > 45°$.

Ceterum circulus et hyperbola genitrix prodeunt sicut in I. Haud secus tandem

III. posito $\varkappa > 1$ prodit

1. *ellipsis* pro $\varkappa < cot^2\varphi$. Certum vero habemus, fieri id posse, si $\varphi < 45°$, nec unquam, si $\varphi \overline{\overline{>}} 45°$

2. *parabola* pro $\varkappa = cot^2\varphi$. Quod ut fiat, quoque φ esse $45°$ minorem requiritur.

3. *hyperbola* pro $\varkappa > cot^2\varphi$. Id quod *semper fiet*, si $\varphi \overline{\overline{>}} 45°$, *fieri potest*, si $\varphi < 45°$.

Prodeuntque circulus ac hyperbola genitrix, ut supra in I.

De cono.

XII. Ex aequatione ⊙ (V) resultat etiam methodus facilis determinandi sectiones coni. Fingatur videlicet conus ita natus e conoide hyperbolico, ut hyperbolae genitricis crura evaserint lineae rectae, puta asymptotae; quod quidem evenit, positis hyperbolae parametro $= 0$, nec non axe $= 0$.

Etenim erit aequatio duarum rectarum RS, TV (Fig. VI) Fig. VI. se in C invicem secantium, sumta quidem recta DE angulos ad C bissecante pro axe, ipsoque puncto C pro abscissarum initio, positisque abscissis $CP = x$, applicatis $PM = y$, ac tangente anguli $PCM = \eta$

$$\text{ob} \quad x : y = 1 : \eta$$

$$y = \eta x$$

vel quoniam cuivis abscissae x respondeant duae applicatae y

$$y^2 = \eta^2 x^2$$

quae est pro lineis secundi ordinis. Quum vero, respectu habito ad aequationem ☽ (VI)

$$\zeta y^2 + \varepsilon xy + \delta x^2 + \gamma y + \beta x + \alpha = 0$$

hic sit $\zeta = 1 \qquad \varepsilon = 0 \qquad \delta = -\eta^2$

prodit $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4\eta^2$

unde linea aequationi conveniens agnoscitur hyperbola.

Manifestum est igitur, lineas duas rectas sese secantes ad genus hyperbolarum pertinere.

Inde jam vero elucet, e conoide hyperbolico evadere posse ipsum conum.

Sicut enim hyperbola, quae data aequatione

$$y^2 = bx + \frac{b}{a} \cdot x^2$$

definitur, mutatur in duas rectas sese secantes, posito $b = 0$, $a = 0$ *), insuper $\frac{b}{a} = \frac{0}{0} = \eta$; sic conoides hyperbolicum mutatur quoque in conum, si in aequatione

$$y^2 = \lambda x + \varkappa x^2$$

quae, si coefficiens $\varkappa$ fuerit affirmativus, conoidis hyperbolici hyperbolam genitricem definit, posuerimus $\lambda = 0$; fit tum quidem

$$y^2 = \varkappa x^2$$

ubi $\varkappa$ tangentem denotat anguli, qui est ad verticem coni, ad quadratum elevatam.

---

*) Quod, facta hypothesi $b = 0$, necessario fiat et $a = 0$, latius patet, si generatim lineas secundi ordinis tamquam sectiones conicas contemplemur.

Sumto igitur coefficiente $\varkappa$ positivo (scilicet pro laudata tangente) sumtoque $\lambda = 0$, ex aequatione ⊙ in V

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi . \varkappa)u^2 - (2\cos\varphi . f + \sin\varphi . \lambda)u + t^2 + f^2 = 0$$

prodibit aequatio, quam quaerimus, pro sectione coni

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi . \varkappa)u^2 - 2\cos\varphi . fu + t^2 + f^2 = 0.$$

Jam vero collata aequatione ☽ (VI) quum sit

$$\varepsilon = 0 \qquad \delta = 1 \qquad \zeta = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi . \varkappa$$

reperitur

$$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4(\sin^2\varphi . \varkappa - \cos^2\varphi)$$

idem ut in XI, ubi de conoide hyperbolico. Discrimen positum est quidem in eo, ut coefficiens $\varkappa$ ibi rationem parametri ad axem majorem, hic tangentem anguli denotet, qui est ad verticem coni, ad quadratum elevatam.

Atque exhibetur sectio

1. *ellipsis*, si $\varkappa < \cot^2\varphi$
2. *parabola*, si $\varkappa = \cot^2\varphi$
3. *hyperbola*, si $\varkappa > \cot^2\varphi$

Ex his igitur patet, secto vel conoide hyperbolico vel ipso cono, pro uno eodemque valore anguli φ ac coefficientis $\varkappa$ sectiones ad eandem quoque speciem curvarum secundi ordinis spectaturas esse, licet ipsarum specierum sit varietas.

Ceterum posito angulo $CMP = \beta$ erit

$$\varkappa (= \eta^2 = \operatorname{tang}^2 PCM) = \cot^2\beta$$

inde resultat $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 4(\cot^2\beta . \sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$

$$= \frac{4\cos^2\varphi}{\operatorname{tang}^2\beta}(\operatorname{tang}^2\varphi - \operatorname{tang}^2\beta)$$

id quod respondet deductioni Kaestnerianae. (Conf. Kaestneri analys. finitor. §. 552.) Etenim angulus, quem ille vocat φ aequalis est nostro angulo φ, ob basin coni parallelam plano W.

De cylindro.

XIII. Tandem ex aequatione pro corporibus tornatis in probl. III praelimin. (pag. 5) reperta

$$v^2 + w^2 = y^2$$

facillime aequatio pro cylindro, dummodo posuerimus applicatam y constantem $= r$, prodibit

$$v^2 + w^2 = r^2.$$

Atque substitutis coordinatarum v et w valoribus (V)

$$w = \cos\varphi . u - f \qquad v = t$$

aequatio pro sectione quacunque cylindri resultat

(⛢) $$\cos^2\varphi . u^2 - 2\cos\varphi . fu + t^2 + f^2 - r^2 = 0 \qquad (⛢)$$

Quumque sit, collata aequatione ☽ (VI)

$$\varepsilon = 0 \qquad \delta = 1 \qquad \zeta = \cos^2\varphi$$

ergo $$\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = - 4\cos^2\varphi$$

elucet, ob cosinus quadratum semper affirmativum, sectiones cylindri evasuras esse *ellipses*, exceptis sectionibus, quae prodeunt sumto $\varphi = R$.

Tum enim invenimus $\zeta = 0 \quad \gamma = 0$ proditque aequatio pro his sectionibus

$$t^2 + f^2 - r^2 = 0$$

quam pro duabus esse parallelis constat. Quod idem Cylindri docet natura. Proprie quidem, ob $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 0$ sectiones exstant *parabolae*, quarum vero vertices infinite distant.

Ceterum sumto $\varphi = 0$ ob $\zeta = 1 = \delta$ sectio evadit *circulus*, quod ut in IX perspicitur.

Corollarium I.

Quamquam e solutione praecedente satis mihi patere videatur natura sectionis, si superficies secundi ordinis corpus tornatum terminans a plano quocunque secetur; verumtamen rei esse arbitror, eruere ex aequatione ⊙ sectionum generali, quam in problemate invenimus (V), aliam pro axe diametro orthogonali, atque determinare utramque diametrum ac parametrum. Ita enim curvarum affectiones, quae singulis sectionibus conveniunt, clarius manifestari, aut facilius saltem investigari poterunt.

Corollarium II.

Sin igitur compertum habemus, aequationem istam pro curvis secundi ordinis generalem (☽)

$$\zeta y^2 + \varepsilon xy + \delta x^2 + \gamma y + \beta x + \alpha = 0$$

variatam pro axe diametro orthogonali inter coordinatas rectangulas X et Y exstare: *)

$$Y^2 - \frac{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}{4\sin^2\pi \cdot A^2} \cdot X^2 \mp \frac{\sqrt{(A \cdot G)}}{\sin\pi \cdot A^2} \cdot X = 0 \quad (♁)$$

ubi

$$A = \frac{\zeta + \cos\pi \cdot \varepsilon + \delta \mp \sqrt{((\zeta + \cos\pi \cdot \varepsilon + \delta)^2 + \sin^2\pi(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))}}{2\sin^2\pi}$$

$$G = \alpha(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) + \beta(\beta\zeta - \gamma\varepsilon) + \gamma^2\delta$$

et π angulum denotat, quem aequationis ☽ coordinatae x et y inter se constituunt;

---

*) Licebit, hac aequatione uti, quae mihi e magistri et Professoris *Hecker* pristinis lectionibus suppeditatur, etsi eam deducendi hic locus non sit.

jam admodum facile et aequationem ⊙, de qua agitur, in aliam pro axe diametro orthogonali inter coordinatas X et Y mutare poterimus.

Corollarium III.

Scilicet substituantur quidem coefficientes aequationis ⊙ concinne pro iis aequationis ☽ in aequatione ♄. Eliminetur ante tamen ex aequatione ⊙ constans f, quae, si certe sectionem sine respectu ad planum basis W exhiberi velimus, ad variatam aequationem ⊙ pro axe diam. orthogon. plane non pertinet.

Assumatur igitur, planum Z secare axem corporis tornati AO (Fig. V) in puncto O, ponaturque $AO = h$, erit

$$f : h = \cos\varphi : \sin\varphi$$

$$\text{ergo } f = \cot\varphi \cdot h.$$

Corollarium IV.

I. Substitutis itaque

pro	ex aequatione ⊙
ζ	$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa$
ε	0
δ	1
γ	$-(2\cos\varphi \cdot f + \sin\varphi \cdot \lambda) = -(2\cot\varphi \cdot \cos\varphi \cdot h + \sin\varphi \cdot \lambda)$
β	0
α	$f^2 = \cot^2\varphi \cdot h^2$
π	R

prodit in aequatione ♄ (Coroll. II)

1. $A\left(=\dfrac{\zeta+\delta\mp\sqrt{(\zeta-\delta)^2}}{2}=\left\{\begin{matrix}\delta\\ \zeta\end{matrix}\right.\right)=\left\{\begin{matrix}1\\ \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa\end{matrix}\right.$

2. $G(=-4\alpha\zeta+\gamma^2)=4\cos^2\varphi(\varkappa h^2+\lambda h)+\sin^2\varphi\cdot\lambda^2.$

Quum vero, posito circuli FTG ad corporis axem AO perpendiculariter per O transeuntis radio $=r$, sit

$$\varkappa h^2+\lambda h=r^2$$

id quod memores, esse $\varkappa x^2+\lambda x=y^2$ (pag. 7. III), plane intelligimus, prodit

$$G=4\cos^2\varphi\cdot r^2+\sin^2\varphi\cdot\lambda^2.$$

Ceterum cum circulo laudato planum secans Z angulum constituit inclinationis φ.

Nascuntur ergo e data aequatione ⊙, ob duplicem quanti A valorem, aequationes duae: (♃)

1. $\Upsilon^2+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa)X^2\mp\sqrt{(4\cos^2\varphi\cdot r^2+\sin^2\varphi\cdot\lambda^2)}\cdot X=0$ (♃. 1.)

2. $\Upsilon^2+\dfrac{X^2}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa}\mp\dfrac{\sqrt{(4\cos^2\varphi\cdot r^2+\sin^2\varphi\cdot\lambda^2)}\cdot X}{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa)\sqrt{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa)}}=0$ (♃. 2.)

quarum alteram pertinere ad axem majorem, alteram ad minorem constat *).

II. Sin autem (id quod postea non sine fructu erit) retinere velimus constantem f; invenitur

$$G=4\sin^2\varphi\cdot\varkappa f^2+4\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\lambda f+\sin^2\varphi\cdot\lambda^2.$$

Resultant inde duae istae aequationes: (♄)

1. $\Upsilon^2+(\cos^2\varphi-\int^2\varphi\cdot\varkappa)X^2\mp\sqrt{(4\int^2\varphi\cdot\varkappa f^2+4\cos\varphi\cdot\int\varphi\cdot\lambda f+\int^2\varphi\cdot\lambda^2)}\cdot X=0$ (♄. 1.)

2. $\Upsilon^2+\dfrac{X^2}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa}\mp\dfrac{\sqrt{(4\int^2\varphi\cdot\varkappa f^2+4\cos\varphi\cdot\int\varphi\cdot\lambda f+\int^2\varphi\cdot\lambda^2)}}{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa)\sqrt{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cdot\varkappa)}}\cdot X=0.$ (♄. 2.)

*) Radicibus antepositum signum + denotat, parametrum exsistere posse negativam; id vero e sectionum conicarum genesi e cono latius patet.

Corollarium V.

I. Primum autem enucleetur, utri axi quaevis aequatio conveniat.

1. Exstat quidem aequationis *primae* (♃)

parameter $\Pi = \sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}$

ideoque *diameter orthogonalis* $\Delta = \dfrac{\sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}$

secundae autem

parameter $\Pi' = \sqrt{\left(\dfrac{4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)^3}\right)}$

inde *diam. orthogon.* $\Delta' = \sqrt{\left(\dfrac{4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}\right)}$

2. Vel ex aequatione *prima* (♄)

parameter $\Pi = \sqrt{(4\sin^2\varphi \cdot \varkappa f^2 + 4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}$

diam. orthog. $\Delta = \dfrac{\sqrt{(4\sin^2\varphi \cdot \varkappa f^2 + 4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}$

e *secunda* autem

parameter $\Pi' = \dfrac{\sqrt{(4\sin^2\varphi \cdot \varkappa f^2 + 4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \varkappa)\sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)}}$

diam. orthog. $\Delta' = \sqrt{\left(\dfrac{4\sin^2\varphi \cdot \varkappa f^2 + 4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}\right)}$

3. Resultat igitur ex aequationum (♃) et (♄)

prima $\Delta = \dfrac{\Pi}{\zeta}$

secunda $\Delta' = \dfrac{\Pi}{\sqrt{\zeta}}$

patetque, fore

$$\triangle : \triangle' = \frac{1}{\zeta} : \frac{1}{\sqrt{\zeta}}$$
$$= 1 : \sqrt{\zeta}$$
$$= 1 : \sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)}$$

II. Jam si exsistit

1. $\cos^2\varphi < \sin^2\varphi \cdot \varkappa$

erit $\sqrt{\zeta}$ imaginaria, ideoque $\triangle' = \frac{\Pi}{\sqrt{\zeta}}$ axis *minor*, propterea quod major imaginarius exsistere nunquam potest.

Sin exstat

2. $\cos^2\varphi = \sin^2\varphi \cdot \varkappa$

erit $\sqrt{\zeta} = 0$; ideoque ob $0 < 1$ erit $\triangle' < \triangle$, licet uterque infinitus; ergo iterum habemus $\triangle'$ pro axe minore.

Sin tandem

3. $\cos^2\varphi > \sin^2\varphi \cdot \varkappa$

erit $\sqrt{\zeta}$, quum $\cos\varphi$, hinc et $\cos^2\varphi$, unitatem nunquam excedat, vel unitate minor, vel eidem aequalis.

Jam, si $\sqrt{\zeta} < 1$ erit $\triangle' < \triangle$

et si $\sqrt{\zeta} = 1$ erit et $\triangle' = \triangle$.

III. Respondebit igitur aequatio *prior* axi *majori*, *secunda minori*,

1. si $\cos^2\varphi < \sin^2\varphi \cdot \varkappa$
2. si $\cos^2\varphi = \sin^2\varphi \cdot \varkappa$
3. si $\cos^2\varphi > \sin^2\varphi \cdot \varkappa$ et $\sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)} < 1$

Colligetur porro utraque aequatio in unam, si

$$\sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)} = 1.$$

Nunquam denique aequatio *prior* axi *minori*, *secunda majori* respondebit, nisi sit

$$cos^2\varphi > sin^2\varphi \cdot \varkappa$$

et insuper $\sqrt{(cos^2\varphi - sin^2\varphi \cdot \varkappa)} > 1$

quod autem esse nequit.

Corollarium VI.

At jam doceatur, quomodo axes sectionum siti sint.

Posito $t = 0$ in aequatione $\odot$ (pag. 7. V), resultat aequatio

$$(cos^2\varphi - sin^2\varphi \cdot \varkappa)u^2 - (2cos\varphi \cdot f + sin\varphi \cdot \lambda)u = -f^2$$

vel, substituto $f = cot\varphi \cdot h$ (Coroll. III.)

$$(cos^2\varphi - sin^2\varphi \cdot \varkappa)u^2 - (2cos\varphi \cdot cot\varphi \cdot h + sin\varphi \cdot \lambda)u = -cot^2\varphi \cdot h^2$$

unde reperitur

$$u = \frac{2cos\varphi \cdot cot\varphi \cdot h + sin\varphi \cdot \lambda \pm \sqrt{(4cos^2\varphi(\lambda h + \varkappa h^2) + sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{2(cos^2\varphi - sin^2\varphi \cdot \varkappa)}$$

vel substituto $\lambda h + \varkappa h^2 = r^2$ (Coroll. IV)

$$u = \frac{2cos\varphi \cdot cot\varphi \cdot h + sin\varphi \cdot \lambda \pm \sqrt{(4cos^2\varphi \cdot r^2 + sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{2(cos^2\varphi - sin^2\varphi \cdot \varkappa)}$$

Differentia jam utriusque valoris applicatae u, qua quidem designatur chorda CD *) (Fig. V) exstat

---

*) Si sectio evadit parabola, fit applicata $u (= ED) = \infty$ ergo et $CD = \infty$; sin evadit hyperbola, fit ED negativa, ergo $CD = EC + ED$, cujus quidem pars ED subibit planum basis W.

$$CD = \frac{\sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}$$

Quum vero hic chordae CD repertus valor plane idem sit, ac axis majoris (conf. Coroll. V. I. 1), imo chordam CD ipsum fore axem majorem, clarum est. Deinde facile perspicitur, chordam aliam perpendiculariter ad CD hanc bissecantem exhibituram esse axem minorem.

Nota. Proprie quidem e dictis solummodo sequitur, chordam CD axi majori esse aequalem. Jam itaque dubium videri potest, an ipse sit axis, propterea quod saltem hyperbolae chordae plurimae esse possunt axi aequales. At chorda CD est *diameter*. Id quidem jam ex eo colligitur, quod in aequatione ⊙ abscissae t modo quoad quadratum ratio habeatur; inde scilicet manifestum est, cuivis applicatae u duas respondere abscissas *aequales*, licet contrarias. Bissecat igitur chordas parallelas et ad CD perpendiculares ipsa CD.

Corollarium VII.

Reliquum est, ut pro singulorum corporum tornatorum singulis supra enumeratis sectionibus determinemus utramque diametrum orthogonalem ac parametrum.

Corollarium VIII.

1. Ut igitur *elliptoides* rursus priore loco contemplemur, e Coroll. V invenimus, posito coefficiente $\varkappa$ negativo,

$$\Pi = \sqrt{(4\cos^2\varphi . r^2 + \sin^2\varphi . \lambda^2)} = \sqrt{(4\cos\varphi . \sin\varphi . \lambda f - 4\sin^2\varphi \varkappa f^2 + \sin^2\varphi . \lambda^2)}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{(4\cos^2\varphi . r^2 + \sin^2\varphi . \lambda^2)}}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi . \varkappa} = \frac{\sqrt{(4\cos\varphi . \sin\varphi . \lambda f - 4\sin^2\varphi . \varkappa f^2 + \sin^2\varphi . \lambda^2)}}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi . \varkappa}$$

$$\Delta' = \sqrt{\left(\frac{4\cos^2\varphi . r^2 + \sin^2\varphi . \lambda^2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi . \varkappa}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4\cos\varphi . \sin\varphi . \lambda f - 4\sin^2\varphi . \varkappa f^2 + \sin^2\varphi . \lambda^2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi . \varkappa}\right)}$$

Parametrum Π' axi minori respondentem in sequentibus plane omittere licebit.

2. Posito $\varphi = 0$, ubi sectionem evadere circularem comperimus, resultat

$$\Pi = \Delta = \Delta' = \pm 2r$$

Id quidem patet e valoribus antepositis; e postpositis sequitur $\Pi = \Delta = \Delta' = \sqrt{(4 . 0 . \lambda f - 4 . 0^2 . \varkappa f^2)}$ vel si substituerimus $\cot\varphi . h = f$ (Coroll. III)

$$\Pi = \Delta = \Delta' = \sqrt{(4\lambda . 0 . \infty - 4\varkappa . 0^2 . \infty^2)}$$

Determinantur igitur valores postpositi indefiniti definitis antepositis. Ceterum e coroll. IV facile patet, hic esse $0 . \infty = h$.

Sumto quidem $r = 0$ prodit

$$\Pi = \Delta = \Delta' = 0$$

scilicet circulus tum per corporis verticem transit.

3. Deinde posito $\varphi = R$ prodeunt

$$\Pi = \sqrt{(\lambda^2 - 4\varkappa f^2)} \quad \Delta = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4\varkappa f^2)}}{\varkappa} \quad \Delta' = \sqrt{\left(\frac{\lambda^2 - 4\varkappa f^2}{\varkappa}\right)}$$

Id quidem patet e valoribus postpositis; ex antepositis sequitur

$$\Pi = \sqrt{(4 . 0^2 . r^2 + \lambda^2)} \quad \Delta = \frac{\sqrt{(4 . 0^2 . r^2 + \lambda^2)}}{\varkappa} \quad \Delta' = \sqrt{\left(\frac{4 . 0^2 . r^2 + \lambda^2}{\varkappa}\right)}$$

vel si substituerimus $r^2 = \lambda h - \varkappa h^2$, cum posito $\varphi = R$ evadat $h = \infty$

$$\Pi = \sqrt{(\lambda^2 - 4.o^2.\varkappa.\infty^2)}\ \Delta = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - 4.o^2.\varkappa.\infty^2)}}{\varkappa}\ \Delta' = \sqrt{\left(\frac{\lambda^2 - 4.o^2.\varkappa.\infty^2}{\varkappa}\right)}$$

Determinantur hic igitur valores antepositi indefiniti definitis postpositis. Patet vero, esse hic $o.\infty = f$.

Sumto quidem $f = o$, i. e. si ponamus, axem sectionis transire per axem corporis, exstat

$$\Pi = \pm \lambda \qquad \Delta = \pm \frac{\lambda}{\varkappa} \qquad \Delta' = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\varkappa}}$$

quae sunt *ellipsis genitricis*, ut fieri necesse est.

Omitto determinare parametrum, axesque reliquarum sectionum, quae sunt omnes ellipses.

4. Pro sectionibus *globi*, sumto $\varkappa = -1$ e coroll. V prodeunt:

$$\Pi = \Delta = \Delta' = \sqrt{(4\cos^2\varphi.r^2 + \sin^2\varphi.\lambda^2)} = \sqrt{(4\cos\varphi.\sin\varphi.\lambda f - 4\sin^2\varphi.f^2 + \sin^2\varphi.\lambda^2)}$$

atque exstant

$$\text{posito } \varphi = o \qquad \Pi = \Delta = \Delta' = \pm 2r$$

$$\varphi = R \qquad = \sqrt{(\lambda^2 - 4f^2)}$$

$$= \pm \lambda, \text{ pro } f = o.$$

Corollarium IX.

Porro quoad *conoides parabolicum* posito $\varkappa = o$ invenimus e coroll. V

$$\Pi = \sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)} = \sqrt{(4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{(4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos^2\varphi}$$

$$\Delta' = \frac{\sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{(4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos\varphi}$$

Posito $\varphi = 0$ reperiuntur (ut in Coroll. VIII. 2.)

$$\Pi = \Delta = \Delta' = \pm 2r$$

Posito $\varphi = R$, prodeunt

$$\Pi = \pm \lambda \qquad \Delta = \infty \qquad \Delta' = \infty$$

scilicet e valoribus postpositis. Similia hic, ut in Coroll. VIII. 5.

Reperta vero sunt *parabolae genitricis.* (pag. 9. X.)

Quumque in valore parametri Π constans f hic evanescat, ipsam parabolam ab eo plane non pendere colligitur.

Exsistent itaque omnes sectiones, quarum axes sunt paralleli axi corporis, etsi per hunc non transeant, parabolae genitrices.

Affectio quidem conoidis parabolici, quae mihi notatu haud indigna visa est.

Corollarium X.

Quod attinet ad *conoides hyperbolicum*, sumto coefficiente $\varkappa$ positivo, e coroll. V. obtinetur

$$\Pi = \sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)} = \sqrt{(4\sin^2\varphi \cdot \varkappa f^2 + 4\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \lambda f + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{(4\cos^2\varphi.r^2+\sin^2\varphi.\lambda^2)}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi.\varkappa} = \frac{\sqrt{(4\sin^2\varphi.\varkappa f^2+4\sin\varphi.\cos\varphi.\lambda f+\sin^2\varphi.\lambda^2)}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi.\varkappa}$$

$$\Delta' = \sqrt{\left(\frac{4\cos^2\varphi.r^2+\int^2\varphi.\lambda^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi.\varkappa}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4\int^2\varphi.\varkappa f^2+4\int\varphi.\cos\varphi.\lambda f+\int^2\varphi.\lambda^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi.\varkappa}\right)}$$

Posito $\varphi = 0$ reperiuntur omnia ut in Coroll. VIII. 2.

$$\Pi = \Delta = \Delta' = \pm\, 2r$$

Posito $\varphi = R$, prodeunt

$$\Pi = \pm\sqrt{(4\varkappa f^2+\lambda^2)} \quad \Delta = \mp\, \frac{\sqrt{(4\varkappa f^2+\lambda^2)}}{\varkappa} \quad \Delta' \text{ imaginar.}$$

scilicet e valoribus postpositis. Similia hic, ut in Coroll. VIII. 3.

Posito simul $f=0$, i. e. si axem sectionis per axem corporis transire velimus, resultant

$$\Pi = \pm\,\lambda \qquad \Delta = \mp\,\frac{\lambda}{\varkappa} \qquad \Delta' \text{ imagin.}$$

quae sunt *hyperbolae genitricis*.

Omitto definire axes ac parametrum pro singulis supra (pag. 9. sqq. XI.) enumeratis sectionibus, quum e datis facile definiri possint. Modo definiam, propterea quod haud sane supervacuum videtur, pro ista parabola, quae posito $\varphi = 45°$ e conoide hyperbolico aequilatero nascitur. (l. c. XI. II. 2.)

Reperitur autem, sumto $\varphi = 45°$ $\varkappa = 1$, ob $\sin\varphi = \cos\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$$\Pi = \sqrt{(2r^2+\tfrac{1}{2}\lambda^2)} = \sqrt{(2f(\varkappa f+\lambda)+\tfrac{1}{2}\lambda^2)}$$

$$\Delta = \infty \qquad \Delta' = \infty$$

Sin igitur assumatur $r = \frac{1}{2}\lambda$, prodit eadem parabolae parameter $\Pi = \pm \lambda$.

Corollarium XI.

Quoad sectiones *coni*, sumto coefficiente $\lambda = 0$ obtinetur e coroll. X

$$\Pi = \pm\ 2\cos\varphi \cdot r = \pm\ 2\sin\varphi \cdot f\sqrt{\varkappa}$$

$$\triangle = \pm \frac{2\cos\varphi \cdot r}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa} = \pm \frac{2\sin\varphi \cdot f\sqrt{\varkappa}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}$$

$$\triangle' = \pm \frac{2\cos\varphi \cdot r}{\sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)}} = \pm \frac{2\sin\varphi \cdot f\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa)}}$$

Posito $\varphi = 0$ reperitur $\Pi = \triangle = \triangle' = \pm\ 2r$ (coroll. VIII 2.)

Posito $\varphi = R$ resultant

$$\Pi = \pm\ 2f\sqrt{\varkappa} \quad \triangle = \mp \frac{2f}{\sqrt{\varkappa}} \quad \triangle' \text{ imaginar. (cor. VIII. 5.)}$$

Sumto quidem $f = 0$ prodeunt

$$\Pi = \triangle = 0$$

quae sunt *trianguli genitricis*; hoc enim vel hyperbolam exstare comperimus (pag. 12), cujus axis ac parameter sint $= 0$.

Corollarium XII.

Pro *cylindri* denique sectionibus (conf. pag. 14. XIII.) invenimus aequationem (⛢)

$$\cos^2\varphi \cdot u^2 - 2\cos\varphi \cdot fu + t^2 + f^2 - r^2 = 0$$

Varietur pro diametro orthogonali ope aequationis ♁ (coroll. II)

Invenitur $A = \begin{cases} 1 \\ \cos^2\varphi \end{cases}$

$$G = 4\cos^2\varphi \, . \, r^2$$

Prodeunt ergo duae istae aequationes:

1. $Y^2 + \cos^2\varphi \, . \, X^2 \mp 2\cos\varphi \, . \, r \, . \, X = 0$
2. $Y^2 + \sec^2\varphi \, . \, X^2 \mp 2\sec^2\varphi \, . \, r \, . \, X = 0$

Inde resultant

$$\Pi = 2\cos\varphi \, . \, r \qquad \triangle = 2\sec\varphi \, . \, r$$

$$\Pi' = 2\sec^2\varphi \, . \, r \qquad \triangle' = 2r$$

Erit igitur $\triangle$ axis major, dum secantes sint vel > 1, vel $= 1$. Si $\sec\varphi = 1$, colligitur aequatio utraque in unam. Id quidem evenit posito $\varphi = 0$, proditque

$$\Pi = \triangle = \triangle' = 2r$$

Posito $\varphi = R$, resultant

$$\Pi = 0 \qquad \triangle = \infty \qquad \triangle' = 2r$$

quae sunt parallelogrammi per axem cylindri transeuntis cujusvis, vel proprie talis parabolae in problemate ad XIII (pag. 14) denotatae, qualis crura parallela a se invicem distant diametro baseos cylindri.

Emendanda.

Pag. V. lin. 3. lege: *mihi quidem, etsi*
— — lin. 7. — *quas qui*
— 6. I. lin. 7. — $OT = y$ loco: $OM = y$.
— 24. lin. 11. — *ea* loco: *eo*

Curriculum vitae.

Ego, *Wilhelmus Plitt*, calendis Januarii anni 1790 natus sum *Suerini*, patre usus *Joanne Christiano Plitt*, causarum patrono. Aetatem primam usque ad annum quartum egi in domo patria, quam tum ita tulerunt tempora ut relinquerem. Avus ex parte patris, *Joannes Herbold Plitt*, Pastor ecclesiae *Neuenkirchensis*, sibi parvuli educandi adscivit munus, adscito autem paullo post abstinuit, cum gener ejus, *Petrus Joannes Hecker*, Professor matheseos Rostochiensis, qui erat sine liberis, me sibi alumnum se adjuncturum profiteretur. Haud jure sed re ab hoc adoptatus *Rostochium* veni, brevique oblitus patriae domus amitam cum marito velut parentes colere coepi. Quo quidem novis parentibus gratias certe minimas egi de innumeris erga me amoris sui ac benevolentiae argumentis, quae me postea nunquam defecerunt.

Ipse parens usque ad annum aetatis octavum me instituit solus, edocuitque quae aetatulae conveniebant. Equidem indoli, qua excelluit, doctrinae mihi reddendae quam suavissimae plurima debeo, cujus quidem, ut utar exemplis, exhibebantur fructus, quod patriam linguam recte loquerer, latinae rudimenta facile caperem, orbem terrarum satis cognoscerem, numeros expeditius ac paratius tractarem.

Ab anno aetatis octavo ad haec domestica studia accessit foris frequentatio lectionum latinarum ac historicarum, in quibus gaudebam praeceptore viro erudito M. *Dahl*, cel. postea theologiae Professore Rostochiensi. Praeterea abhinc ad annum sedecimum magna praeceptorum privatorum usus sum varietate. Instituebar in iis omnibus, quae juveni literis addicto necessaria sunt, non neglecta anglica ac francogallica lingua. Ediscebam geometriae elementa, praecipiente clar. Professore *Beck*, qui pro summa sua erga me benevolentia se ultro ad me instituendum offerebat, et scholis arithmeticis operam dabam duce ipso parente. Jam e ceterorum praeceptorum numero memorem modo virum eruditissimum, M. *Siemssen*, cujus disciplina praeter linguam latinam, anglicam et francogallicam (ad quas et suecica per breve tempus accedebat) amplexa est historias, historiam naturalem, physicas ceterasque scientias, quae adolescentibus tradi solent.

Annum agens decimum quartum subito et concitatus commilitonum exemplis, et prospiciens mercatoriarum rerum tum in Germania septentrionali prosperrimam conditionem, inprimis vero avi mei optatis satisfacturus ordini mercatorum animum adjeci. Non ad hunc quidem propensus, tamen haud aversabar, nunquam ante de eligendo vitae genere cogitaveram. Jam igitur abstinebam omnino scholis latinis, summamque operam dabam addiscendis linguis recentioribus; at reliquis lectionibus, ut solitus, intereram, summe quidem curans ea, quae in posterum inprimis profutura videbantur. Quum vero per unum annum his similibusque tractandis indulsissem, serioque, quae vellem, cogitare coepissem, me ad istud vitae genus omnino non inclinare sensi, quumque mox ipsius fastidium sentirem, consilium propositum abjeci.

Jamque redintegrabam pristina studia non sine faustissimis auspiciis, propterea quod suppeditante avo ad cineres usque colendo tum inveniebantur, unde, ut in externo gymnasio excolerer, sumtus sustineri possent. Incumbebam prae ceteris latinae linguae satis neglectae, nec non lectionibus mathematicis duce ipso parente, delectatus inprimis tractatione problematum algebraicorum.

Ad autumnum anni 1805 parentes *Berolinum* me deducebant in illustri *Gymnasio Friderico-Wilhelmino* erudiendum. Jungebar ibi omnium lectionum secundis classibus, exceptis graecis, quibus auctore parente meo plane abstinebam, ut integras vires adjicere possem latinis. Mansi Berolini per annos tres et dimidium, quorum duos degi in ipso gymnasio, partem alteram in aede Consiliarii in Consistorio Borussico supremo ecclesiastico, viri summe venerandi *A. J. Hecker*, parentis mei fratris, qui simul gymnasio praeest director. Praetereo, ne longum sit, in quae studia ibi incubuerim, modo memorem, me per duos annos primae classis socium fuisse, atque inprimis mathematicis studiis vel captum esse, quae in illo gymnasio acrius, atque alias fieri solet, colebantur.

Abii gymnasio vere anni 1809 cum testimonio ad academiam maturitatis, adiique literarum *universitatem Rostochiensem*, jurisprudentiae me dicaturus; id minus quidem, quod ejus praedilectione caperer, sed quod theologiae ac artis medicae studium aversarer. Rostochii praeter scholas juridicas, quae habebantur a viris doctissimis *Eschenbach*, *Weber*, *Konopack*, magna cum voluptate interfui philosophicis, quas habuit vir acutissimus *Beck*, logicam tradens ac jus naturae; mathematicis, quas tradebat ipse parens. Audivi et virum celeberrimum *Link*, nunc Vratislaviensem, physicam experimentalem ac chemiam docentem, virum clarissimum *Karsten* de arte aedificandi aedificia oeconomica et rustica disserentem. Interfui denique et scholis graecis privatissimis duce viro clarissimo *Wiggers*. Tenebar inprimis scholis mathematicis, ad quas jam multae privatissimae accedebant. Atque, quod jam pridem mihi nonnunquam in mentem venerat, me totum mathesi dicandi proposito jam multo acrius indulgere coepi; cogitans vero, dare in Megalopoli Justinianum et honores et opes, jurisprudentiae studium plane abjicere non ausus sum.

Duobus exactis annis petii *Friderico-Alexandrinam*, quae *Erlangae* floret, studia mea prosecuturus. Hic vero, examinibus juridicis non amplius, ut Rostochii, impeditus, omne meum tempus, quod a scholis juridicis, quas habuit vir clarissimus *Posse*, vacuum erat, adjeci repetendis studiis mathematicis, quae Rostochii colueram. Praelectionibus mathematicis quidem primo semestri aestivo carui. Verum semestri hiberno, cum privatissime audirem analysin combinatoriam a viro ingeniosissimo *Rothe*, ac insuper jam longius in privatis meis studiis mathematicis progrederer, subito; postquam prope universo cursui juridico interfuissem, consilium cepi, plane jurisprudentiae valedicendi, id vel non reprehendente meo parente. Non est quidem, ut vitae genere ita mutato ea pariter ac ante sperare auderem, si certe res pecuniariae spectentur; at Deo favente haec accommodentur, si assiduo literarum studio modo efficiam, ne mihi ipse deesse videar.

Jamque annum, quem degi in academia ultimum, neglectis rebus ceteris, totum matheseos eorumque, quae ad hanc pertinent, esse volui. Auditor fui per omne id tempus praeceptoris celeberrimi *Rothe* uberius tradentis analysin combinatoriam, ejusque partem novam ab ipso inventam, quam quidem vocat calculum combinatorio-integralem, typis vero exprimendum nondum curavit. Neque satis praedicem magistrum dilectissimum, qui adeo sui commodi studio non abreptus erat, quin meum solummodo prospiciens plures quotidie horas sibi labore vacuas esse passus sit. Praeterea sedi a pedibus viri doctissimi celeberrimi *Hildebrandt*, physicam egregie tradentis, multisque experimentis illustrantis.

Ad autumnum anni 1812 absolutis studiis academicis domum redii, ut, quod mihi ante provinciam aliquam suscipiendam superesset, tempus consumerem exercitandis iis, quae spectant ad docendi munus *Berolini*, liberata patria, a me subeundum.

Scripsi Rostochii, d. IX Martii, MDCCCXIII.

Fig. I.

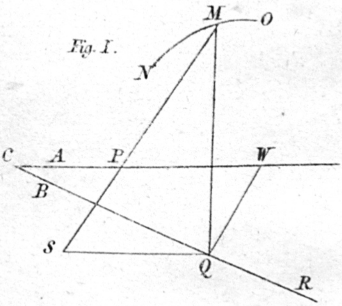


Fig. III.

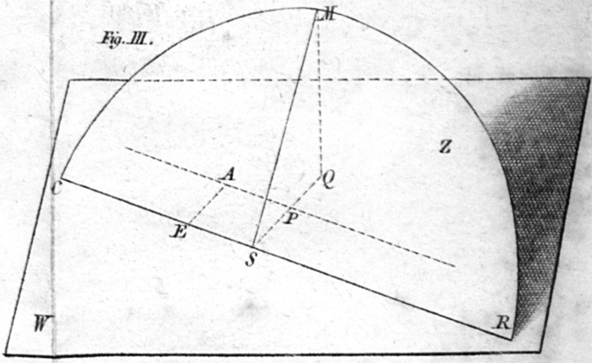


Fig. II.

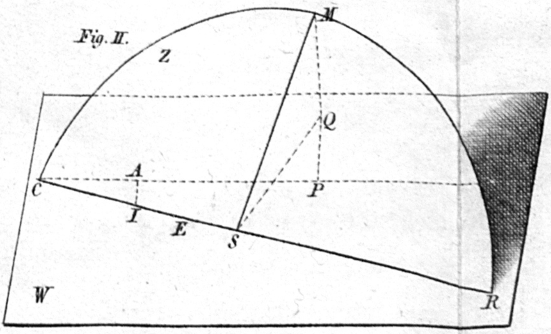


Fig. VI.

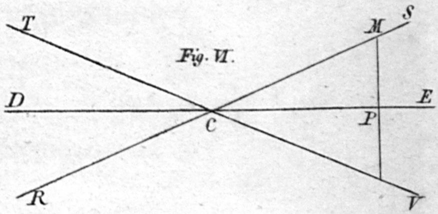


Fig. IV.

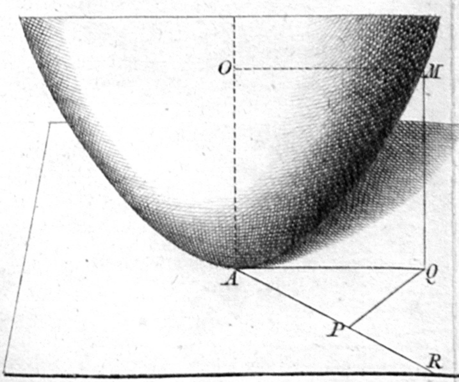
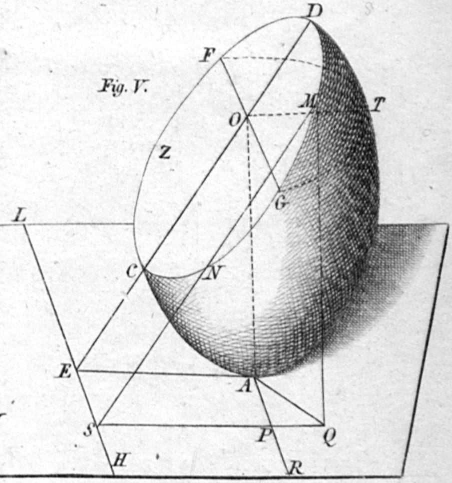


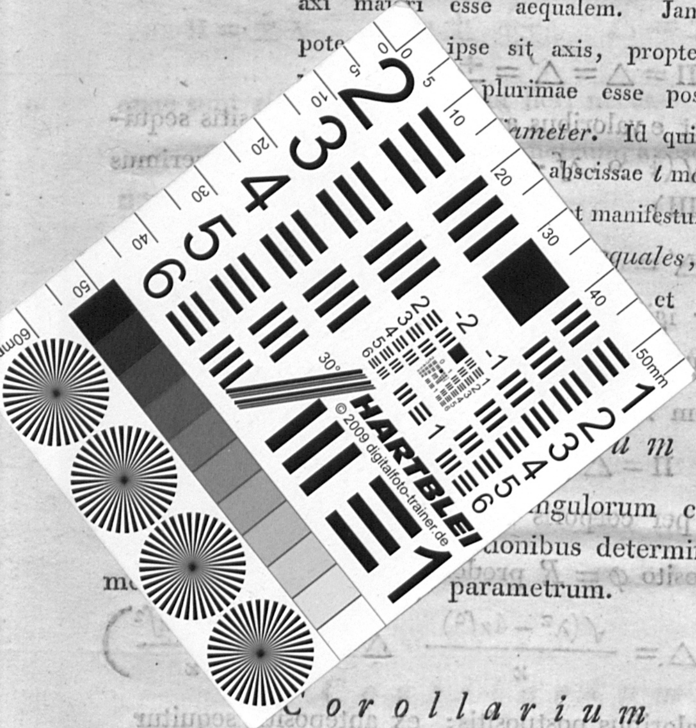
Fig. V.



$$CD = \frac{\sqrt{(4\cos^2\varphi \cdot r^2 + \sin^2\varphi \cdot \lambda^2)}}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \varkappa}$$

Quum vero hic chordae CD repertus valor plane idem sit, ac axis majoris (conf. Coroll. V. I. 1), imo chordam CD ipsum fore axem majorem, clarum est. Deinde facile perspicitur, chordam aliam perpendiculariter ad CD hanc bissecantem exhibituram esse axem minorem.

Nota. Proprie quidem e dictis solummodo sequitur, chordam CD axi maj ri esse aequalem. Jam itaque dubium videri pote ipse sit axis, propterea quod saltem hyper- plurimae esse possunt axi aequales. At *ameter.* Id quidem jam ex eo colligitur, abscissae t modo quoad quadratum ra- t manifestum est, cuivis applicatae u *quales*, licet contrarias. Bisse- et ad CD perpendiculares



m VII.

ngulorum corporum tornatorum ionibus determinemus utramque dia- me parametrum.

Corollarium VIII.

1. Ut igitur *elliptoides* rursus priore loco contemplemur, e Coroll. V invenimus, posito coefficiente $\varkappa$ negativo,