Einfälle freyer Vernunft bey Aufsuchung näherer Gewißheits-Gründe von Wahrheit und Irrungen

St. 1 : Von der reinen Cirkul-Quadratur

Mühlhausen: Müller, 1781

http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn824414624

28 p

2.10.

2 fig.

Einfälle
freyer Vernunft

bey Aufsuchung näherer Gewißheits-Gründe

von Wahrheit und Irrungen.

Erstes Stück.

Von der

reinen Cirkul-Quadratur.

Mühlhausen,

bey Johann Daniel Müller. 1781.

Einfälle freyer Vernunft,

1. Stück.

Von der Cirkel-Quadratur.

Unter dem Nahmen dieser Quadratur verstehet man die erweißliche Angebung des wahren und reinen Flächen-Inhaltes eines Circuls, in Quadrat Maaßen:

Weil aber Maas-Quadrate und ihre Helften (die Triangul) nur zu Meß- und Berechnung solcher Flächen brauchbar sind, deren Grenz-Umzug in geraden Linien bestehet, welche in ihrer eccentrischen Strecke, bey der Zusammenstossung gonias und Winkel von mancherley Größen machen; der Cirkul aber keine dergleichen Austritte oder Einrückungen hat; sondern alle Puncte seiner Peripherie in concentrischer Lage sich befinden; so war freylich die erste Hauptbemühung dahin zu richten, daß der Cirkul, ohne Veränderung seiner Raum-Größe, in eine solche Form gebracht würde, zu welcher Quadrat-Maaße anwendbar seyn konnten.

Weil nun der Cirkul mit einem regulären Polygone, aus einem und demselbigen Centralpuncte, in gleichen Parallel-Erhebungen zu seiner Flächen-Größe, erwächset; und der Perimeter des Polygons, durch Vervielfältigung und Kleinerung seiner Seiten, dem Grentz-Umzuge eines Cirkuls immer näher gebracht werden kann; und daher letzterer, als ein unendlich kleinseitig reguläres Polygon angesehen, und dessen Peripherie-Länge, in gerader Richtung, eben so, wie die summarische Seiten-Länge des Polygons, pro basi eines Trianguls, angenommen werden zu können schien, welcher, nach der, aus dem gemeinschafftlichen centro darauf fallenden Perpendikul-Höhe, eben

eben so gut, als bey jenem, den richtigen Inhalt seiner Raum-Fläche darlegen würde; so hat man auch diese Trianguls-Figur zur Quadratur-Erfindung, für die convenableste gehalten und mit dem Archimede, die Meß- und Berechnung des Cirkul-Inhaltes, bis auf unsere Zeiten, darnach versuchet; nur über die genaue gerade Länge der Peripherie und deren Verhältniß gegen den Diameter hat man, weder mit demselben, noch mit seinen Nachfolgern, noch mit sich selbst völlig einig werden können.

Denn man sahe gar bald ein: daß des Archimedis Angabe davon, nehmlich wie 22 zu 7. bey der Anwendung zu viel brächte: gab sich daher erstaunliche Mühe, durch Trigonometrische Künste diese Verhältniß in die subtileste Zusammentreffung und nächstmöglichste Zuverlässigkeit zu bringen.

Am berühmtesten ist davon des Ludolphs von Cöln sein Angeben geworden, welcher gefunden: daß, wenn der Durchmesser in $\overset{\text{III}}{100}, 000, \overset{\text{II}}{000}, 000, 000, \overset{\text{I}}{000}, 000.$ getheilet würde, der Cirkul-Umkreis $\overset{\text{III}}{314}, 159, \overset{\text{II}}{265}, 358, \overset{\text{I}}{979}, 323, 846.$ solcher Theile habe.

Wenn man aber hierbey erweget

1) daß der Cirkul-Umkreis, gegen alle geradelinigte Figur-Grenzen, die kürzeste Linie sey, und letztere, nach dem Maaße ihrer eccentrischen Abweichung, zu gleicher Raum-befassung, nothwenig viel oder weniger länger, als jener seyn müssen; mithin eine Cirkul-Peripherie, in gerader Längen-Strecke, nicht mehr die Verhältniß gegen den Inhalt desselben behalte, welchen sie darzu in concentrischer Lage hatte, auch eben darum deren Kenntniß zur Quadratur-Erfindung, noch keinen zuverlässigen Grund darbiethe.

2) Daß ein unendlich kleinseitiges Polygon entweder eine contradictio in adjecto und zur Bildung dergleichen Flächen-Figur eben ein solches Nichts als, zur Cörper-Erwachsung die, Monades des Herrn von Leipnitz, sey; aus welchen nur eine Schöpferische Allmacht, aber kein Menschen Verstand weiter etwas machen kann, weil nemlich das wesentliche Daseyn eines Polygons nur so lange gedenkbar ist, als es zu Formirung der erforderlichen Ecken und Winkel seines Perimeters bestimmte

stimmte Seitenlängen hat; ohne dieselben aber allenfalls nur eine neue Benennung des Cirkels selbst seyn würde.

3) Daß die Darstellung des dem Flächen-Inhalte eines regulären Palygons gleichen Trianguls, blos ein summirtes Ganze derer, in eben der Form schon vorhandenen partialen Triangnls, mithin keine eigentliche Umformung derselben sey; folglich auch ohne vorläufige Kenntniß des Inhaltes, ganz richtig geschehe; die wirkliche Umformung aber einer diversen Flächen-Größe, und deren Verwandlung in einen Triangul von angenommener gewissen Höhe oder Basi, die genaue Bekantheit ihres Inhaltes darum nothwendig voraus setze, weil daraus der andere Haupttheil, und in dessen Hälfte, der Factor erst gefunden werden muß, dessen multiplicirung mit dem Vorhandenen das Product bringe, so der gegenstehenden quadratischen Größe gleich sey: daß man daher bey dieser intendirten Cirkul-Umschaffung, da man die, aus dem Inhalte erst zu suchende Linien zum Grunde der Inhalts-Erfin-

dung annimmt, in einen wirklichen Cirkul-Umlauf ohne Hofnung seiner Enderreichung gerathe.

4) Daß, wann auch letzterer Anmerkung ungeachtet, der Cirkul, gleich einem regulären Polygnone, behandelt, und dessen Peripherie pro basi des demselben gleichen Trianguls angenommen werden könnte, desselben Höhe jedoch nach solcher, von dem innern und äusern Polygone unterschiedenen basis-länge, eben, wie diese proportionirt, kleiner als des obern — und größer als des innern seine Höhe, seyn müßte; und daß man uns daher durch Zusammenbringung der obern Polygon Höhe und ganzen Peripherie, den Inhalt der Cirkul bis daher noch immer größer angegeben habe, als er wirklich ist; endlich

5) Daß, nach solcher bisherigen Methode, durch alles Bemühen so vieler gelehrter Meßkünstler, binnen einem Zeit-Drittheile unseres biblischen Welt-Alters, diese Guadratur zu keiner Gewißheit habe gebracht werden können; So

So kommt man ganz natürlich auf den Vermuthungs-Schluß: daß der Weg, welchen man durch den auf die zur Basi umschaffene Circul-Peripherie aufgebaueten Polygon-Triangul genommen hat, der rechte Weg zur Quadratur-Erreichung, nicht seyn müsse.

Es behält indeß die dabey geschehene Aufsuchung der wahren Verhältniß der Peripherie-Länge, zur Länge des Diameters, in andern Geometrischen Aussichten, ihren ohnstreitigen Nutzen; und es ist deren Kenntniß vielen Mechanischen Künstlern, zu sicherer reciproquen Ausfindung eines aus dem andern, nicht weniger auch Forstleuten, zu richtiger Taxier- und Gebrauchs-Angebung noch stehender Bäume unentbehrlich.

Aber diesen kömmt es auf die von dem Hrn. Ludolff, in so ungeheuer großen Zahlen, noch zweifelhafft angezeigte differential-Kleinigkeit von ohngefehr $\frac{1}{350}$ Theilgen des Diameters, um welches die circumferenz kürzer seyn soll, als sie vom Archimede angegeben worden, nicht an; sondern sie finden diese Längen-Verhältnisse ganz richtig, durch eigene Nachmessungen, und warum sollte auch dieses nicht geschehen können? da es ja dergleichen materielle Fäden und Meßlängen genug giebt, auch nöthigen Falls bereitet werden können: welche bey geringer Biegung, zumal um etwas große Circul oder Cylinder, und bey ihrer Wiedergeradelegung die mindeste Veränderung ihrer Längen nicht erleiden; vielmehr deren vorsichtige Umschlagung das genaue Maas davon, in zuverlässigerer Gewißheit geben wird, als es durch erwähnte weitläuftige Arbeit nicht geschehen kann.

Indeß bedienen sich Rademacher, Schmiede, Böttger, Huthstaffierer und andere Artisten und Fabricanten gemeiniglich darzu der Archimedischen Verhältniß, und verfehlen damit nicht leicht ihren benöthigten Längen-Zuschnitt; welches aber geschiehet, wann sie dieselbe kürzer annehmen.

Wir wollen also diese bloße Linien-Vergleichung, und den daraus, in übereilter Anwen-

dung

dung ihrer Längen-Verhältniß gegen den Circul-Inhalt, vergeblich aufgestelleten Triangul verlassen! und uns bey den Figuren nach einem sichern Richtsteige zur Quadratur umsehen; darzu aber, als Anfänger, vorgängig noch folgende wenige Vorbereitungs-Kenntnüsse in Erinnerung nehmen: und zwar

a) Erklärungen.

1) Ein reguläres Polygon heißt die am Cirkul-Umkreise, unter oder über demselben, nach gleichen Winkeln, in gleich langen geraden Seitenlinien herumgezeichnete 4. und mehrseitige Figur.

Es wird also unter dem Nahmen Polygon, der Triangel allhier nicht mit begriffen.

2) Concentrisch sind davon diejenigen Grenz-Linien, welche, nach allen ihren Längen-Puncten, in gleicher Ferne um das Centrum sich befinden; und dieß läßt sich nur vom Cirkul-Umkreise und seinen Theilen, den Cirkul-Bogens, sagen.

3) Eccentrisch hingegen ist die Lage aller geradelinigten, Polygon-Seiten, insoweit sie, aus den Berührungs-Puncten, ihre Richtung unter oder über die Cirkul-Bogen entfernet.

4) Diejenigen Raum-Theile, welche das innere Polygon, unter denen Bogen, von dem Circul unbefasset lässet, und um welche seine Fläche kleiner, als die Cirkuls-Fläche ist, heißen Segmenta,

Die über denen Bogen erscheinenden Theile aber, nach welchen sich das obere Polygon, bey Umfassung des ganzen Cirkuls, erweitert, und seinen flachen Raum vergrößert, nennet man Holstücke, oder Hollriangul.

Die-

Dieses beyderley plus und minus zusammen wollen wir den eccentrischen Abweichungs-Raum und die darzwischen durchgehenden Bogen-Linien die Scheidelinien derselben nennen.

b) *Axiomata.*

5) Die Theile und Linien der eccentrischen Räume haben unter sich, in allen regulären Polygonen, einerley Größen-Verhältnisse; behalten auch selbige, man mag sie so viel und kleinseitig machen, als man will.

6) In zwey ungleich großen Flächen-Figuren, verhalten sich die integral-Theile der einen, gegen die in der andern (nach welchen ihre ähnliche Auszeichnung geschehen ist;) eben so, als die ganzen, gegen einander.

7) Ein Segment hat, seiner Raum-Größe nach, gegen ein ander Segment, eben die Verhältniß, als die über der Chorda, nach größter Bogenhöhe, darein gezeichneten Triangul, gegen einander haben.

8) Wer-

8) Werden aus zwey ungleichen Flächen-Größen zwey andere gleich große dadurch gemachet, daß man der größern einen gewissen Theil abnimmt; und der andern so viel als die Gleichheit erfordert, zulegt; ist alsdann die Inhalts-Summe der gemachten dem summarischen Betrage derer, woraus sie gemacht worden, gleich; so ist auch das — der andern zugefügte dem — von der einen abgenommenen gleich, und eins, wie das andere die genaue Helfte der Differenz gewest.

Weil in wenigseitigen Polygonen die Figur-Theile augenfälliger, und was davon zu sagen begreiflicher, als in viel- und kleinseitigen ist, so wollen wir uns zuerst in dem Tetragono, nach dem suchenden nähern Richtstiege zu unserer Quadratur, umsehen.

Die Seite eines obern Vierecks ist, ihrer Länge nach, dem Diametro circuli, und der Diagonal-Linie des innern Viereckes gleich, auch in letzterem Betrachte, als Hypothenusa eines rechtwinklichten Trianguls anzusehen, wovon zwey Quadratsdrats-Grundlinien die den rechten Winkel befassenden Schenkel ausmachen.

Zugleich ergiebt sich daraus die Folgerung, in klarer Gewißheit, daß das Quadrat der obern Tetragonischen Seite sowol, als das Quadrat des Cirkul-Diametri zwey innern Quadraten gleich seyn; der eccentrische Abweichungs-Raum aber, als differential-Größe zwischen dem obern und innern Quadrate, ein solches inneres Quadrat ausmache, überhaupt ist hierbey nicht außer Acht zu lassen: daß bey Tetragonis, die inneren und äußeren Figuren einander reciproce ad duplum kleinern und erheben: nemlich: daß ein inneres Viereck, sowol im Ganzen, als nach seinen integral-Stücken, halb so gros, als das über dem Circul, und ein Circul über dem □ doppelt so gros werde, als der innerhalb dem □

. Man hat aber den ermeldeten eccentrischen Raum, entweder bey paralleler Uebereinanderlage der Seiten in Tapezüs; oder in Trianguln gleiches Inhaltes; wenn man, das innere Quadrat, oder ein ander Polygon, mit seinen Seiten, nicht parallel gegen die obern, sondern dergestalt

ein,

einzeichnet, daß erstere, mit ihren Ecken, genau auf die mittlere Längen-Puncte der letztern stossen: Die Schenkel dieser Triangul sind die beyden Helften der obern Polygon Seite, und eben das, was zwey Tangenten sind, welche, in dem Puncte ihrer Durchschneidung über dem Segmente, denselben, zu gleicher Raumbefassung mit den Trapeziis, die richtige Höhe geben, v. Fig. 1.

Diese Triangul und ihre Helften (welche man als rein aufgehende Maas Triangul unserer Figuren annehmen kann) sind also der Unterschied der obern und innern Polygon-Flächen-Größen; und machen beym Tetragono ein zweytes inneres Quadrat aus um welches das obere größer, als das innere ist.

Da nun aus Zusetzung der 4 Segmenten solcher Triangul zu dem einfachen innern Quadrate, eben der Cirkul entsteht, welchen die Abnahme der 4 Holzstücke derselben von dem obern doppelten Quadrate zurück lässet: so käme es nur noch auf die richtige und erweisliche Beantwortung der Frage an; Ob die beyden Integral-Stücke dieser Triangul, nemlich

lich Segment und Holstück ihrem quadratischen Inhalte nach, gleich gros seyn, und daher eins, wie das andere, einen halben solchen Triangul ausmache?

Fände sich dieses mit Gewißheit, so wären drey innere Quadrate der reine Flächen-Inhalt zweyer Cirkul: dann der eine wäre aus Zusammensetzung eines ganzen und halben (in den 4 Segmenten) und der andere aus Subtrahirung eines halben, (in den 4 Holstücken) von zwey gantzen entstanden; mithin wäre deren Summe drey solcher □, und die Quadratur eines Cirkuls $1\frac{1}{2}$ innern Quadraten gleich.

Wir müssen uns also nach gültigen Gründen zu deßen Erweisung umsehen:

Ein paar Experimente könnten dieser nöthigen Sorge abhelfen; wenn man accurat gemachte Parallelepipedal-Gefäße, oder dergleichen dünne Scheiben und Platten von gleichschwehrer und dichter Materie hätte: dann man dürfte alsdann in ersteren nur eine beliebige Höhe abzeichnen, das Gefäs bis dahin mit einem schicklichen Liquore anfüllen, darein eine etwas schwehrere Kugel oder Sphäre sencken; so würde selbige von dem Liquore einen eben so großen cubischen Theil über die Abschnitts-Zeichnung, erheben, als die Kugel ausmachet; und man hätte alsdann nur deßen Inhalt zu berechnen und davon durch Extrahirung der Wurtzel, das Quadrat zu suchen;

In dem andern Falle dürften nur das innere einfache, mit dem obern doppelten Quadrate, und daneben, die zwey Cirkul-Scheiben, in und über welche jene gezeichnet worden, ausgeschnitten und in zwey Wageschalen gegen einander gelegt werden: zeigte sich alsdann dadurch, in richtiger Balance, deren gleiche Schwehre; so wäre auch die Gleichheit ihrer beyderseitigen Flächen-Größen außer Zweifel gebracht: und eo ipso, nach dem letzteren axiomate sub n. 8. erwiesen: daß die, zu der Cirkul-Formirung, vom obern doppelten Quadrate abgenommenen 4 Holstücke denen 4 Segmentis so dem innern einfachen Quadrate in solcher Absicht zugelegt worden, einander vollkommen gleich gewest.

Aber es sind dergleichen Hülfsstücke, in der zuverläßigen Genauigkeit, als diese Experimente erfordern, schwehrlich zu haben; auch selbst die allzuleichte Verfehlung reiner Ausschneidung der Figuren nach ihren Grenz-Linien, läßt Bezweiflungs-Gründe solcher Genauigkeit übrig; folglich bringen uns dergleichen Versuche zwar zu einer nahen Wahrscheinlichkeit; geben aber von der Sache noch keine völlige Geometrische Gewißheit; ob ich gleich nicht leugne, daß mich die — auf einer Gold-Wage mit feinem und starckem Holländischen Pappiere, auf erwehnte letztere Art gemachten Proben, von deren Glaubwürdigkeit, gar sehr bestärket haben.

Vielleicht hilft uns die Algebra aus dem kleinen Reste der dabey noch obwaltenden Verlegenheit? wir wollens versuchen;

Bestehet ein Cirkul aus einem innern Quadrate und 4 Segmenten, und ein zweyter gleicher Cirkul aus zwey innern Quadraten weniger 4 Holstücken.

so sind $2 \odot = 3 \square + 4 S - 4 \mathfrak{H}.$

und $2 \odot - 3 \square = 4 S - 4 \mathfrak{H}.$

oder $3 \square - 2 \odot = 4 \mathfrak{H} - 4 S.$

Eben so siehet es mit Comparirung des Cronen-Stückes, vom obern doppelt großen Cirkul gegen den ihm gleichen Sector des untern Circuls aus; denn da sind!

$$2 \triangle + S = 2 S + \mathfrak{H}.$$

mithin

$$2 \triangle - 2 S = \mathfrak{H} - S.$$

Niemand aber wird, bey dieser Gegeneinanderhaltung so sehr diuerser Größen Quantorum in einem wirklich vorhandenen gleichem Reste, die Gleichheit derselben suchen; sondern die Subtrahirung præsentiret uns zu deren Kennbarmachung an beyden Seiten Nullen und wir werden, durch die damit characterisirte Aufgebung gegen einander überzeuget, daß 3 $\square$ und 2 $\odot$ eben so wohl als 4 Segmenta und 4 Holstücke gegen einander gleiche Flächen-Größen haben; mithin der Cirkul-Umkreis zwischen letzteren die genaue Scheide-Linie, und ein Segment oder Holstück, von dem eccentrischen Abweichungs-Triangul die richtige Helfte ausmache!

Und letzteres wird aus folgender, darnach formirten Gleichung ihrer Integral-Theile, noch deutlicher: dann da zwey $\odot$ aus 16 Segmenten und 8 Holst. und drey $\square$ aus 12 solcher beschriebenen Segmenten und 12 Holst. bestehen;

mithin 16 S + 8 H, = 12 S + 12 H sind,
so sind 4 S = 4 H.
und S = H.

Außer diesem Algebraischen Erhellungs-Troste aber, gewehret uns auch folgende problematische Darstellung, zur Gewißmachung solcher Sätze noch einen klaren Hauptbeweis: nemlich: Man zeichne in das Segment des Tetragoni, oder eines andern Polygons, auf die Chorde, nach der größten Höhe des Bogens, einen gleichschencklichten Triangul; so erhält man darinnen die Abschnitte zweyer kleinern Segmenten von einem Octogono oder dergleichen doppelt so vielseitigem Polygone: man setze, mit den Tangenten die beyden Holstücke darüber so hat man daran zwey, mit dem größern Haupt-Triangul ähnlich ausgezeichnete, kleinere Triangul; man suche von beyden den quadratischen Flächen-Inhalt auf; so wird man finden, daß derselbe von den beyden kleineren zusammen $\frac{1}{4}$ von dem Inhalte des Haupt-Triangulս, ausmachen:

Da nun, nach dem axiomate sub n. 6. pag. die Integral-Stücke einer Figur, gegen diese Stücke einer andern ähnlich ausgezeichneten, aber ungleich größern Figur sich in ihrer besondern Größe eben so verhalten, als ihre Ganzen; so muß das Segment derer in beyde halben Haupt-Triangul gezeichneten kleinen Triangul ebenfalls $\frac{1}{4}$ von beyden Helften des Haupt-Segmentes und folglich die darinnen aufgestelleten Unter-Triangul den Ueber-

rest

rest davon, nemlich $\frac{3}{4}$ ihres Flächen-Inhaltes ausmachen: Haben wir aber durch richtige Ausmeß- und Berechnung dieses Triangulus den Betrag der drey Viertel unseres Segment-Inhaltes; so dürfen wir nur noch ein dergleichen viertes Viertheil (so $\frac{1}{3}$ des Triangulus ist) darzu addiren, oder nach der Ketten-Regul zu der Maaszahl solcher $\frac{3}{4}$ die Maaszahl des Ganzen aufsuchen; so ist vom reinen quadratischen Segment-Inhalte und dessen Helfte vom Haupt-Triangul die gesuchte zuverläßige Bekanntwerdung erreichet.

Die Gewisheit des Satzes: Daß die Raum-Verfehlung eines innern regulären Polygons, unter den Cirkul-Bögen, viermal so groß sey, als die — eines doppelt so vielseitigen; mithin die Segmente des letzteren, von ersterem, wann sie darein gezeichnet werden nur $\frac{1}{4}$ ausmachen, wird auch aus folgender Betrachtung begreiflich und augenfällig; nämlich: Ist ein solch kleines Segment wirklich nicht mehr und nicht weniger als ein Viertel des halben Haupt-Segments; so muß das Duplum davon die eine — und das — durch Einzeichnung dieses Dupli, darunter erscheinende Holstück dessen andere Helfte seyn: dies wird aber letzteres seyn, wenn es von dem — über dem Haupt-Segmento befindlichem Holstücke genau die halbe Flächen-Größe hat; und solches ergiebt sich, wenn man auf die — über und unter der Chorde eingezeichneten kleinen Segmente, mit den Tangenten die gleichen Hol-Triangul setzet; denn man erhält dadurch von beyden ein gleiches

Subtrahendum, und das übrige bestehet in geradeseitigen Trianguln, welche gegen einander die vorige Verhältniß der ganzen behalten: theilet man nun den obern Rest-Triangul durch die perpendiculäre Höhen-Linie, so hat man zwey halbe Triangul, deren jeder nach Seiten-Linien und Winkeln, dem damit verglichenen gleich, folglich letzterer davon die wahre Helfte ist: ist aber dieses richtig; so ist auch das duplirte Segment das halbe Haupt-Segment, oder Segment-Stück worein es gezeichnet; folglich sein Simplum ein Viertel davon; dann Segmente und Holstücke, als Integral-Stücke ihrer Triangul, vergrößern und kleinern sich mit denselben, in gleicher Proportion.

Aus diesen Wahrheiten, und ihren nächsten Schluß-Folgen ergiebt sich nun auch die nähere Bestimmung der Quadratur-Größe eines Cirkuls; welche das daraus erweißliche Haupt-Theorema ausmachet; nemlich

Die Cirkul-Fläche ist die mittlere Arithmethische Proportional-Größe, zwischen dem innern- und obern regulären Polygone, welches viere und mehr Seiten hat.

Warum aber durch die – solcher Beschreibung angehängte Bedingung, das Trigonon davon ausgeschloßen werde; davon liegt der Grund nicht so wohl in der Etymologie der ihm nicht zukommenden Polygon-Benennung; als vielmehr darinnen; weil seine Fläche sowol gegen den Cir-

Cirkul, und das obere Trigonon, als auch die dabey vorkommenden Integral Stücke, gegen denselben und unter sich, eine gantz andere Größen-Verhältniß haben, als sich bey den mehrseitigen regulären Polygonen findet: dann (wie man, aus der Zahl der kleinen Maas-Triangul Fig. 11. ersehen kann) so ist

erstlich, der von eccentrischer Abweichung seiner langen Seiten, unter den Cirkul-Bogens, unbefaßt bleibende Raum, um $\frac{1}{5}$ größer, als die Fläche des gantzen innern Trigoni.

fürs zweyte, ist der obere Triangul 4 mal so gros, als der innere:

Drittens, sind die — mit den Seiten des letztern oder den Tangenten, über die Segmente gezogenen Holstücke, nicht, wie bey den andern, mit denselben von einerley Größe; sondern übersteigen sie mit $\frac{2}{18}$ es gehen also,

Viertens, die concentrischen Cirkul-Bogen, nicht, wie bey den übrigen, durch die Mitte des eccentrischen zweyfachen Abweichungs-Raumes; folglich ist auch

Fünftens, der Cirkul, in Arithmetischer Progression, nicht die mittlere Proportional-Größe des inneren und obern Trigons, sondern um $\frac{1}{15}$ kleiner, als zu dieser Verhältniß erfordert wird: dann der innere Triangul enthält 18. und der obere 72 kleine Maas-Triangul: dies sind zusammen 90. und so wäre die Helfte, als mittlere proportional-Größe, für den Cirkul, 45. sein Inhalt aber ist, wie die Nachzählung ergiebt, nur 42. dagegen haben alhier.

Sechstens, blos die Segmente solche Proportion, zwischen dem Inhalte der Holstücke und des innern Trigons, und die Progression davon ist:

18 -- 24 — 30

Bringt man aber, statt des Dreyecks eine doppeltseitige Figur, nemlich ein reguläres Sechseck, unter den Cirkul-Umkreis; so kommen die Gantzen wieder in die Verhältniß der Gantzen; welche allen übrigen Polygonen gemein ist. Dann es erhält alsdenn das innere Hexagonum, von den Maaß-Trianguln, 36. das obere 48. und des Cirkuls seine 42. treten wieder mit beyden Gantzen, in die angezeigte Proportional-Verhältniß,

Nächst dem giebt uns noch die Vergleichung der Seiten-Länge dieses Trigoni regularis welche zugleich die Chorda des ⅓ der Peripherie ist: mit den Seiten-Längen des Tetragoni, die zur Quadratur-Berechnung j den Cirkuls sehr nutzbare Anzeige an die Hand: daß sie zwischen denselben, eben die mittlere Arithmetische Proportional-Linie sey, welche man darzu zu suchen hat; und durch deren Quadrirung der Flächen-Inhalt des Cirkuls, worein sie gezeichnet wird, auf die kürzeste Weise erlanget wird. Sie enthält $\frac{5}{7}$ von der Diameter-Länge; äqual dem Resta derselben, wann die

die Höhe eines tetragonal Segments davon subtrahirt wird.

Eine ähnliche nahe Auffindung dieser Grund-Linie des Cirkul-Quadrates hat man indeß auch an der Perpendiculair-Höhe eines mit dem Diametro gleichseitigen Trianguls; und zu einem jeden andern, dem Cirkul-Inhalte gleichem Polygone, an der — durch den eccentrischen Abweichungs-Raum, oder Trapezium, von einem End-Puncte der Obern - bis zum andern Endpuncte der untern - oder inneren Seite, durchgezogenen Transversal-Linie; welche die Diagonal Linie eines Rectanguli in der Höhe des Segmentes ist; so durch Abnahm der halben Ueberschuß Länge von einem Ende der obern und deßen, Ansetzung an das andere der untern Parallel entstehet. v. Fig. 1.

Mit den übrigen, aus obigen Gründen sich ergebenden Berechnungs-Arten unserer Quadratur, kann es nun eben so wenig, als mit der Umformung des Cirkuls in eine beliebige andere geradeseitige und gleich große Figur, weiter einige Schwierigkeit haben. Zum Exempel;

Man giebt uns die Länge der Peripherie an; oder wir erlangen dieselbe durch Umschlagung einer Cylindrischen Seule, oder eines noch stehenden Baumes, mit einer Meß-Schnur; und man verlangt den quadratischen Inhalt der Durchschnitts-Fläche zu wißen;

So sucht man, nach des Herrn Ludolfs von Cöln, oder nach der = durch eigene Nachmeßung, gefundenen richtigen Verhältniß, zuförderst den Diameter des Cirkuls auf: (dann diese bloße Längen=Verhältniß der beyden Linien ist präparatorisch, und immer von derjenigen wohl zu unterscheiden, welcher die Bekanntheit des Figur = Inhaltes ihre Abmeßung zur Umformung geben muß) Hat man nun diesen Diameter, so hat man daran die Basin eines Trianguls, welcher, in der Höhe des radii, $\frac{1}{2}$. und deren dreye die 1 $\frac{1}{2}$ inneren Quadrate ausmachen, aus welchen die Cirkul=Fläche bestehet; und man darf also nur den Inhalt eines dieser Triangul ausrechnen, und 3 mahl nehmen; oder die 3 mahliche Länge des Diameters mit $\frac{1}{2}$ radio, oder 3 radios mit 1 radio, als der Basis-Helfte, multiplieiren; so hat man an dem producte die richtige Cirkul=Quadratur, und in der letzteren Längen= und Höhen = oder Breiten=Verhältniß; auch ein dem Cirkul gleiches Rectangulum

oder:

da, nach dem Inhalte solcher Triangul, unsere drey Flächen = Größen in der Arithmetischen Progression gegen einander stehen, wie 2 — 3 — 4. und ein Schenckel davon radix quadrati interni, die basis aber, oder der Diameter radix quadrati superioris ist; so dürfen wir nur die eine, oder die andere quadriren, und nach bemeldeter Verhältniß, aus den gefundenen zweyer ley Quadrat=Größen, die Proportional=Zahl für den Cirkul, gegen 2. der erstern, und gegen 4. der andern, aufsuchen.

oder:

Man verlangt die Ausrechnung, nach einem Segmento Tetragonali; so hat man nur, durch Hülfe des darein zu zeichnenden Trianguls, den Inhalt eines solchen Segments zu suchen, und denselben mit 12. zu multipliciren: dann da ein solch Segment dem eccentrischen halben Raum-Triangul gleich ist; das innere Quadrat aber davon 8. und das obere 16 derselben enthält; so machen deren 12. den richtigen Cirkul-Raum aus:

Ja, wir haben denselben, auch bey irregulären Polygonen, durch die angezeigte Meß- und Berechnung willkührlicher Abschnitte; wann wir leztere zu dem Flächen-Inhalte der ersteren addiren, eben so richtig.

Es wäre nun noch übrig, den Nutzen anzuzeigen, welcher aus Berichtigung dieser Quadratur auf die übrigen Theile der Mathematik so wol als auf andere Wissenschaften und Künste redundiret; aber eine ausführliche Darstellung davon, hat erweitertere Aussichten nöthig, als von einem, der diese Nebenbeschäftigung damit blos jetzo zu einer Geduldstärckenden Zeitverkürzung in dienstloser Muße hervorsuchet, gefordert werden kann: derselbe wünschet daher vielmehr: daß ein Mann von erleuchteterer Einsicht in diesen Wissenschafften, durch gegenwärtige Einfälle, bewogen werden möge, eine vollkommenere Ausführung

davon

davon zu liefern, das Mangelhafte zu ergäntzen, die noch etwa dagegen übrigen Bezweiflungs-Gründe aufzulösen, und endlich den vorzüglichen Gewißheits Ruhm Mathematischer Lehren, gegen den ferneren Vorwurf schwanckender Unzuverläßigkeit bisheriger Cirkul-Meßung, vollens zu retten und sicher zu stellen; schon der letztere Nutzen allein wird dafür, bey wahren Gelehrten, die rühmlichste Danckerkennung verdienen.

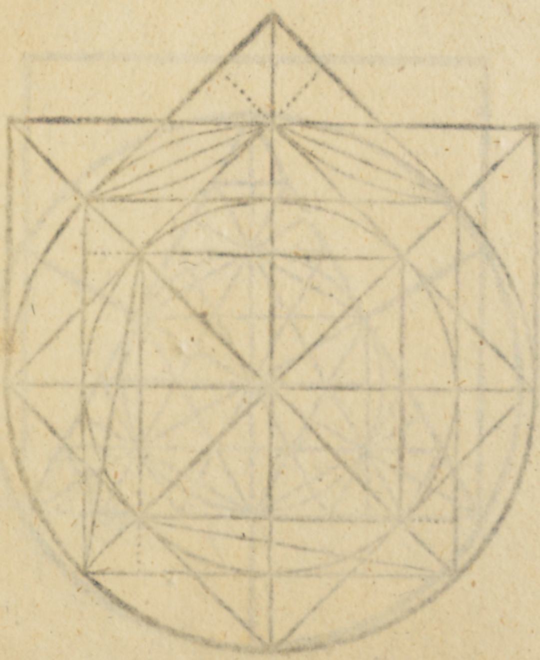


Fig I.

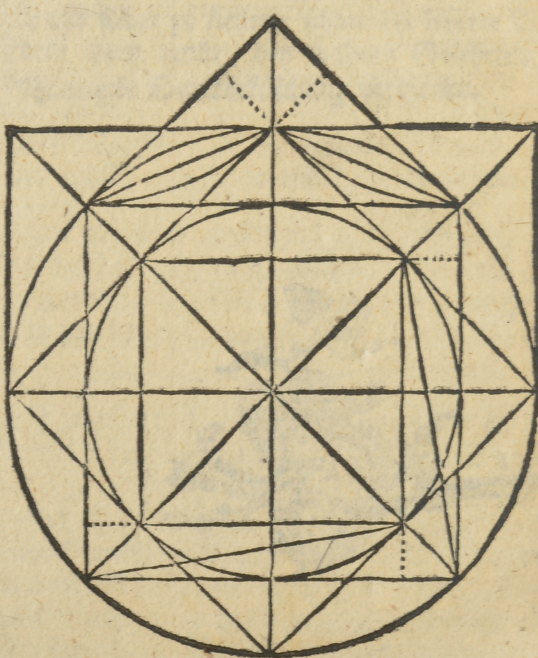
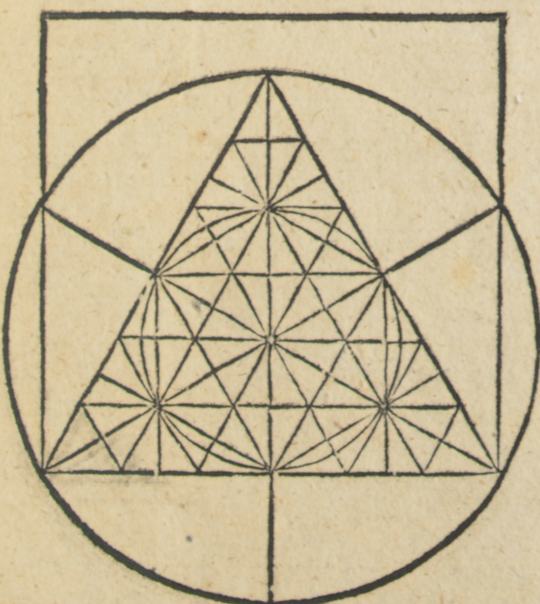
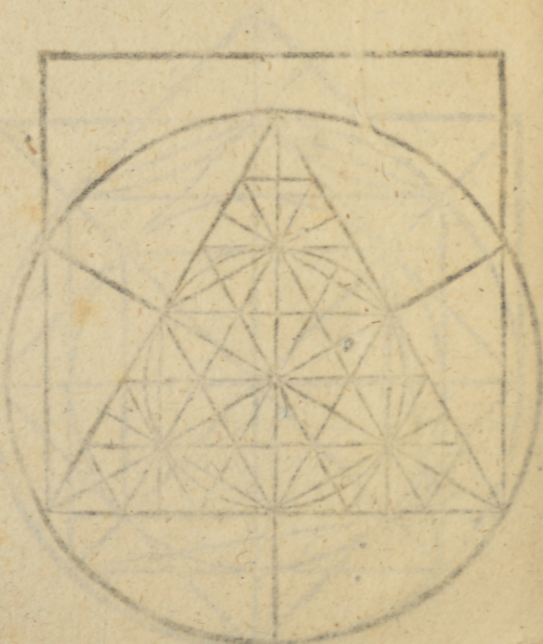


Fig. II.





ere Trigonon, als auch die
Integral Stücke, gegen den-
, eine gantz andere Größen-
als sich bey den mehrseitigen
findet: dann (wie man, aus
Maas-Triangul Fig. 11. er-

centrischer Abweichung seiner
r den Cirkul-Bogens, unbe-
, um $\frac{1}{5}$ größer, als die Flä-
n Trigoni.

er obere Triangul 4 mal so

— mit den Seiten des letz-
nten, über die Segmente ge-
cht, wie bey den andern, mit
Größe; sondern übersteig-
en also,

ntrischen Cirkul-Bogen, nicht,
durch die Mitte des eccen-
bweichungs-Raumes; folg-

kul, in Arithmetischer Pro-
ttlere Proportional-Größe
n Trigons, sondern um $\frac{1}{15}$
Verhältniß erfordert wird:
gul enthält 18. und der obe-
riangul: dies sind zusammen
Helfte, als mittlere propor-

 tio.