Joachim Georg Darjes

Ioachim. Georg. Daries D. Commentatio Mathematica Qva Evolvta Arithmetices Theoria Eam Svmmae Scientiae Speciem Esse Breviter Docet

Editio Secvnda, Ienae: Apvd Christ. Henr. Cvno, M. DCC. XLIV.

http://purl.uni-rostock.de/rosdok/ppn863338658

IOACHIM. GEORG. DARIES D.

COMMENTATIO MATHEMATICA QVA EVOLVTA ARITHMETICES THEORIA EAM SVMMAE SCIENTIAE SPECIEM ESSE BREVITER DOCET.

EDITIO SECVNDA.

IENAE
APVD CHRIST. HENR. CVNO
M DCC XLIV.

PRAEFATIO
SECVNDAE EDITIONIS.

MEditationes hasce mathematicas A. cIↄ Iↄcc xxxviii. in Academia Ienensi publice defensas, iam vero, vt desiderium, quo per biennium Auditores mei charissimi flagrauerunt, leniri possit, iterum editas, eo etiam animo, quo primum editae acceptae sunt, velim vt accipiant Lectores. Nihil mutaui, partim ob negotia in me suscepta, partim, quoniam in ea sum sententia, omnia in priori editione satis perspicue esse proposita.

Hic modo praefationis loco Inſtitutiones meas mathematicas, quas, ſi Deus vitam atque vires conceſſerit, proxime prelo ſubiiciam, breuiter delineabo. Matheſin voco ſcientiam, quae docet rationes inueniendi rerum quantitates. Quare, cum quantitates conſiderari queant vel qua tales, vel quatenus determinatis quibusdam obiectis inſunt: duas Matheſeos partes conſtituendas eſſe puto, quarum altera Matheſis pura, altera adplicata ſalutatur. In Matheſi pura partem generalem a ſpeciali diſtinguo. *Illa* explicat praecepta generalia, quorum ope quantitates inueſtigari poſſunt, ſeu, ſi mauis, Matheſin vniuerſalem; *haec* vero praecepta illa generalia magis determinat, & quidem *primo* per naturam calculi, ex quo oritur ſcientia inueſtigandi rerum quantitates per calculum, quae eſt *Arithmetica* tam vniuerſalem, quam vulgarem arithmeticam continens, *deinde* per naturam extenſionis, ex quo *Geometria*

conci-

concipitur, quam definio ſcientiam inueſtigandi rerum quantitates per extenſionem, & *tandem* per naturam intenſionis, & inde vltimam Matheſeos purae partem formo, ſeu ſcientiam inueſtigandi rerum quantitates per intenſionem. Hiſce Matheſeos purae partibus appendicis loco addo meditationes de vſu Arithmeticae tam vniuerſalis quam vulgaris in ceteris Matheſeos purae partibus, ſeu theoriam Algebrae atque Trigonometriae. Matheſin adplicatam iterum in varias diſtribuo partes. Quoniam obiecta, ad quae praecepta Matheſeos purae adcommodari poſſunt, varii ſunt generis. Hac ratione Matheſeos praecepta faciliori negotio poſſe perſpici, elaboratio ſatis docebit. Interim vale Lector beneuole & ſtudiis meis fauere perge. Ienae d. IX. Dec. M DCC XXXXIV.

PRAEFATIO.

QVod, quid inter artem ſignatoriam & characteriſticam, artem combinatoriam & characteriſticam combinatoriam ſit diſcriminis, non aeque omnibus ſit cognitum ac perſpectum ſatis, quotidiana docet experientia. Non nego quidem harum ſimilitudinem, ſed differentiam modo confiteor ſpecialem. Tam ſignatoria quam characteriſtica ſigna, tam combinatoria quam characteriſtica combinatoria methodum ſigna combinandi docet, caue tamen, ne a ſimilitudine, qua plura conueniunt, ad identitatem concludas. Magno diſcernuntur diſcrimine ſigna, quae vocabula dicimus: quae vocabulorum loco ab Aſtronomis, Chymicis, Muſicis reliquisque, quo compendioſius ſcribi poſſent, recepta: quae rebus occulte ſignificandis inſeruiunt, & cryptographica vocantur, quibus hieroglyphicus Alchymiſtarumque ſcribendi mos occultatur: quae tandem ad inueniendum vtilia, quorum tot in Algebra occurrunt exempla, quot dantur

tur problemata algebraice resoluenda. Et haec sunt, quae characteristica exponuntur arte, quatenus receptum spectamus loquendi vsum, caetera vero, quae exposui, varias artis signatoriae porrigunt species. Ex hac signorum diuersitate diuersae etiam signorum combinandi concipiuntur methodi, inter quas ea eminet, quae ad determinationes rerum per calculum inueniendas apta, & ars characteristica combinatoria vocatur. Sed desideratur talis tam pro determinationibus rerum in genere spectatis, quam pro rerum qualitatibus. Pro quantitatibus vero eam inuenimus in Arithmetica tam vulgari quam speciosa. Perplurima ad generalem hanc scientiam pertinentia ex Algebra abstrahi posse principia fateor, sed quo studio, quoque labore, illi intelligent, qui ex specialibus maxime abstracte pertractatis generaliora abstrahere tentarunt. Variis commotus rationibus, sisto TIBI BENEVOLE LECTOR! artem characteristicam combinatoriam, quam in Arithmetica vulgari inuenimus vno capite breuissimis euolutam. Sisto TIBI methodum, huius combinationis vsu quantitates rerum per calculum inueniendi, quatenus eam ſcientia exhibet denominata, pauciſſimis duobus in capitibus poſterioribus explicatam. Videbis etiam in Scholiis, commatibus adiectis, nonnulla, quae generaliorem ſpectant, abſtracta. Ego, dum has in lucem exire publicam patior paginas, magis haberem in promtu, quid non praeſtiterim, nec praeſtare potuerim, ob varias rationes, quam quid praeſtiterim: quaenam illa ſint impedimenta, facillime cognoſces, ſi paginas hasce maxime ad vſum eorum, quibus Lectionibus meis mathematicis primam Matheſeos cognitionem ſibi acquirere placet, accommodatas eſſe, perpendas. Et hoc eſt, quod, vt ab algebraicis altioribusque Matheſeos principiis abſtinerem, iuſſit. Interim velim, vt de his meis laboribus beneuole iudices, vt valeas, & conatibus meis porro fauere pergas.

Ienae MDCCXXXVIII.

MEDITATIONIS MATHEMATICAE
QVA
EVOLVTA ARITHMETICES THEORIA
EAM SVMMAE SCIENTIAE SPECIEM ESSE OSTENDITVR.

CAP. I.
DE ARTE CHARACTERISTICA EAQVE COMBINATORIA ARITHMETICORVM.

§. I.

QUae ſibi mutuo poſ- Quid aequiualentia?
ſunt ſubſtitui, vt poſt
ſubſtitutionem cuncta
maneant, prout antea
fuerunt, *aequiualentium*
nomine nominantur.
Sed A & B hoc ſibi mutuo poſſunt

 ſub-

ſubſtitui modo, quando nihil detegi in A poteſt, quin etiam reperiatur in B. Comprehenditur igitur hoc principio fundamentum, quo ſolo probatur, A poſſe pro B ſubſtitui.

§. II.

Quid ſigna aequiualentia.

Signa arbitraria in ſenſu diuiſo nullum habent ſignificatum. Quid enim eſt, quod in illis diſtincte cogites, ſi a ſignatis cogitando disceſſeris? Si ergo in ſignato ſigni A nihil detegi poteſt, quin etiam reperiatur in ſignato ſigni B, A & B ſibi mutuo poſſunt ſubſtitui (§. 1.), conſequenter aequiualentia ſunt. (§. cit.).

Schol. Maximi eſt momenti haec obſeruatio, ex qua intelligitur, quomodo ſigna deriuatiua pro primitiuis, & primitiua pro deriuatiuis poſſint ſubſtitui. Sumitur terminus cum illis determinationibus, cum quibus illo vſus ſum §. 1.

§. III.

Inde notio calculi.

Ex datis ergo ſignis alia inueniri poſſunt per aequiualentium ſubſtitutiotutionem. Eiusmodi inuentio appellatur *calculus*. Habemus ergo notionis calculi veritatem.

SCHOL. Reflectas velim ad tabulas Algorithmi, in quibus ea, quae hic proponuntur, applicata deprehendes.

§. IV.

Scientia inueniendi rerum quantitates per calculum dicitur *Arithmetica*. Inueniuntur igitur in Arithmetica rerum quantitates per continuam aequiualentium ſignorum ſubſtitutionem (§. III.). Item notio Arithmeticae formatur.

SCHOL. 1. Hac definitione occurritur dubio illorum, qui a partibus Matheſeos Arithmeticam diſtincte poſſe diſtingui negarunt, ad amplum numeri ſignificatum prouocantes, qui etiam lineis exhiberi poteſt, quod non ſolum ex Geometriae ſed & ex Logiſticae ſpecioſae principiis intelligitur. Sed ex his noſtris cogitatis difficilis non eſt reſponſio.

SCHOL. 2. Vis forſan L. B. definitionis veritatem & vſum loquendi, priorem habes §. III. poſteriorem vero ex infra demonſtrandis abſtrahere velis.

SCHOL. 3. Interim permittas, vt quaedam non minoris momenti, & pro ſcopo noſtro neceſſaria vtiliaque apponam. Omnes, quae in re cogitari poſſunt determinationes intrinſecae, ab omni Philoſophorum choro vel quantitatibus vel qualitatibas annumerantur. In Arithmeticae definitione vnam tantummodo harum determinationum ſpeciem determinatam videmus, ergo & ſcientiam inueniendi rerum qualitates per calculum cogitare licet, quae a LEIBNITIO artis characteriſticae combinatoriae nomen accepit.

SCHOL. 4. E. quantitas eſt ſpecies determinationum intrinſecarum (Schol. 3.), conſequenter ex Arithmeticae pertractatione, pro definitione §. IV. data, abſtrahi (ſumitur terminus metaphyſice) poteſt ſcientia inueniendi rerum determinationes intrinſecas per calculum, quam *artem inueniendi generalem* vocare licebit.

SCHOL. 5. Si iam iam profundo acumine inſtructus ea applicare vellet, quae in Logicae lectionibus de inventione ſpecierum ex genericis determinationibus dicuntur, ea forſan cogitabit, quae a plurimis deſiderantur. Sed in praeſenti ſpecimina atque principia quaedam dare ſufficiat, quorum ſyſtematicam evolutionem iis commendo temporibus, quibus ea, quae

in

in Philosophiae rationalis praefatione promisi eruditissimorum examini exponere possum. Hic arctabo cogitationes, & non nisi necessaria percurram breuiter. Fateor tamen, me assensum expectare Lectorum.

§. V.

In Arimethica quantitates primo signis exprimendae sunt, quae inuentioni inseruire possunt (§. IV.). Quoniam autem hoc fieri nequit, nisi ex illorum intuitu characteres quanti possint cognosci, signa, quibus quanta (sc. in Arithmetica, de qua hic sermo est) exprimuntur, huius esse debent tenoris, vt ex illis quanti obuii characteres colligere possimus. In qua signa.

§. VI.

Signa, quibus rei characteres colligere possumus, pertinent ad *signa deriuatiua*, quae ab aliis signis, notas rerum denotantibus, & quae *primitiua* vocantur, ortum trahunt. In Arithmetica igitur signa deriuatiua de rerum quantitatibus necessaria sunt. Consequenter etiam Primitiua & deriuatiua necessaria sunt.

in ea ſigna primitiua, quorum combinatione deriuatiua oriuntur, explicari debent.

SCHOL. Habemus hic veritatem particularem certis determinationibus ad particulare obiectum reſtrictam. Omiſſis igitur cogitando illis determinationibus, ad hoc particulare obiectum reſtrictis, principium, quod ad artem inueniendi generalem pertinet, Schol. 4. §. IV. & mutatis determinationibus denominatis, principium, quod artem characteriſticam combinatoriam ſpectat, Schol. 3. §. cit. euadet.

§. VII.

Quid quantitas mathematica.

In quantitate, quatenus mathematica eſt, nil diſtincte cogitari poteſt, niſi multitudo partium.

SCHOL. Velim tamen, vt ad diſtinctionem Scholaſticorum inter partes quantitatiuas & perfectionales reflectas, quo etiam definitio ad operationes ſimplicium poſſit applicari.

§. VIII.

Eiusque notae primitiuae & deriuatiuae.

Notae ergo quantitatis mathematicae ſunt partes, quarum multitudo dat characterem diſcretiuum huius vel illius quanti. Quaelibet pars con-

concipitur vt vnum. Vnitas igitur est quanti mathematici nota primitiua, & vnitatum multitudo exhibet quanti notam deriuatiuam.

Schol. Videmus inde magnum, quem notionum analysis in arte chracteristica combinatoria præstat, vsum (Schol. ad §. VII.).

§. IX.

Quibus signis illae notae exprimendae.

Prioris generis notae signis primitiuis, posterioris vero deriuatiuis exprimuntur. Deriuatiua ex combinatione primitiuorum oriuntur (§. VI.), primo igitur loco in Arithmetica methodus combinandi signa quanti primitiua euoluenda est.

§. X.

Signum vnitatis quale?

Signum vnitatis Mathematici constituerunt 1. Est igitur 1 signum primitivum (§. IX.). Sed iam quaeramus modum combinandi, qua ex combinatione vnitatum multitudinem colligere possimus.

§. XI.

Est combinandum.

Ex combinatione, quae hic spectanda, multitudo vnitatum & consequenſequenter vnitatis quotuplum concipiendum eſt, (§. X.), id, ex quo res altera colligitur, eius ſignum eſt. Neceſſitatem ergo ſigni de vnitatum combinatione ex euolutis accipe principiis.

§. XII.

Combinationis huius ſignum quale.

Sit ſignum illud †, erit vnitatis duplum 1†1, triplum 1†1†1, quadruplum 1†1†1†1, & ſic in infinitum.

§. XIII.

Eſt imperfectum.

Quo facilius ex ſignis ſignatorum ideae poſſunt concipi, eo maior eſt perfectio, quam in ſignis cogitare licet. Ergo ſigna deriuatiua, de quibus §. XII, non perfectiſſima ſunt (§. VI.): Hac ex ratione etiam Mathematici alium combinandi modum excogitare debuerunt.

§. XIV.

Ideo cum loco nota quotupli vnitatis combinatur.

Signa ergo neceſſaria ſunt, ex quibus vnitatis quotuplum faciliori negotio colligi poteſt, quam ex ſigno §. XII. conſtituto (§. XIII.), & hoc alio non fieri poteſt modo, quam vt cum loco, quem vnitatis ſignum occupat, quotupli vnitatis notam combinemus. Erit hac ex ratione 1 primo locum vnum, ſecundo duplum, tertio triplum, & ſic porro.

§. XV.

Si ex loco vnitatis quotuplum cognoſcamus, loca etiam a ſe inuicem diſtinguenda ſunt, ne vacua pro valentibus poſſint haberi, quod ſi hoc fiat modo Et loca ſunt diſtinguenda.

		1	=	1	= eſt ſignum aequalitatis.
	1		=	1†1	
	1	1	=	1†1†1	
1			=	1†1†1†1	
1		1	=	1†1†1†1†1	
1	1		=	1†1†1†1†1†1	
1	1	1	=	1†1†1†1†1†1†1	

combinatio quidem erit maxime naturalis, ſed ob magna, quae ex hoc ſignandi modo ortum habere poſſunt, incommoda, aliud, quod vacua indicat loca, excogitandi ſignum praebet occaſionem. Et hāc ex ratione vtimur ſigno 0, quod Nullitatis nota vocatur.

§. XVI.

Inde signum o, seu nota nullitatis.

His ergo ex principiis naturali deducitur methodo hic combinandi modus:

1 = 1
10 = 1+1
11 = 1+1+1
100 = 1+1+1+1
101 = 1+1+1+1+1
110 = 1+1+1+1+1+1
111 = 1+1+1+1+1+1+1

SCHOL. Et ita iusto naturalique ordine incidimus in calculum dyadicum, quem debemus LEIBNITIO: & cuius praestantiam in magni academiae nonostrae Mathematici, VIRI MAGNIFICI & SVMME REVERENDI WIDEBVRGII dissertatione, *de Praestantia Arithmeticae binariae prae decimali*, satis euolutam deprehendes L. B.

§. XVII.

Sed calculus inde ortus iterum habet incommoda.

Sed quae §. XIII. admonui, ea etiam in calculo hoc dyadico, licet maxime naturaliter signa combinet, inuenimus incommoda. Vt signa illa deriuatiua, quatenus eorum spectamus scopum, adhuc colligantur, necessarium esse iudico.

§. XVIII.

§. XVIII.

Si de perfectiore combinandi methodo quaeris, facilis est responsio. Maior est signorum perfectio, si ex illis signatorum conceptus facile possunt colligi. Si negas, finge contrarium, & applica tam signi quam perfectionis notiones. Ex signo signati conceptus facile possunt colligi, si illud huius exhibeat characteres proximos. Sunt vero *characteres proximi*, quorum cogitationes ad obiectum ab omnibus aliis distinguendum summe necessariae. Ergo eiusmodi signa debent adhiberi, quibus quotupli vnitatis characterem proximum possimus cognoscere. (§. XVII.).

Fit vero perfectior, si signum signati characteres proximos exhibet.

SCHOL. Principia, quibus hoc in paragrapho vsus sum, summe abstracta esse fateor, ergo & illustrationis caussa dabo exemplum, cui vt attendas, quia facilius est, velim. Examina scilicet quaeso, quid in ratione, cur Triangulum per figuram tribus lineis terminatam, & non per characteres terminorum definitionem ingredientium explices, distincte cogites, si a principio §. XVIII.

XVIII. euoluto cogitando discesseris, profecto nihil aliud, quam un Je ne scai quoi.

§. XIX.

Fundamentum diuersorum calculorum indicatur.

Characteres obiecti proximi notae deriuatiuae esse possunt, consequenter signis deriuatiuis naturaliter exprimendi sunt (§. IX.). Quoniam vero in quantitate mathematica nullus cogitari potest character, nisi vnitas (§. VIII.), hinc Mathematici perfectionem signorum amantes, fixam quandam vnitatum multitudinem etiam signis expresserunt primitiuis. (§. XVIII.).

§. XX.

Hinc WEIGELII calculus quaternarius (*a*), CAROLI XII. REGIS SVECIAE calculus sexagenarius (*b*), WEIDLERI calculus dodecadicus (*c*) &c., & tandem calculus ille decadicus, vel potius nouenarius, vbiuis gentium receptus, vid. III. WOLFII Arithmeticam §. 45. sqq., qua ex ratione et-

iam

iam illum hic tantummodo exponam, ortum trahunt.

SCHOL. Facillimi igitur eſt negotii, nouum excogitare calculum, arithmeticum ſcilicet, de quo hic loquor, ſed quo vſu, Lectores Beneuoli iudicabunt. Velim tamen, vt ex his, quae poſui principiis, diiudices, cur LEIBNITIVS in Memoir de l' Acad. R. 1703. praeſtantiam computi dodecadici &c. prae decadico laudauerit.

(*a*) vid. Eius Arithmeticam Tetracycam.

(*b*) vid. EMANVELIS SVEDENBORGII obſeruat. miſcellan. part. 4. p. 1. ſeqq.

(*c*) conf. eius diſſ. de praeſtantia Arithmeticae decadicae.

§. XXI.

Certa ergo vnitatum multitudo hoc in computo recepto, vsque ad nouem ſcilicet, ſignis exprimenda eſt primitiuis (§. XIX.). Qua ex ratione litterae Indicae introductae ſunt, ita vt In ſpecie calculi nouenarii.

1 = 1

$$1=1$$
$$1+1=2$$
$$1+1+1=3=2+1$$
$$1+1+1+1=4=2+2=3+1$$
$$1+1+1+1+1=5=3+2=4+1.$$
$$1+1+1+1+1+1=6=3+3=4+2=5+1$$
$$1+1+1+1+1+1+1=7=6+1=5+2=4+3.$$
$$1+1+1+1+1+1+1+1=8=4+4=7+1=6+2=5+3$$
$$1+1+1+1+1+1+1+1+1=9=8+1=7+2=6+3=5+4.$$

(§. XVIII.).

SCHOL. En horum ſignorum definitiones characteriſticas, eorum naturam exprimentes.

§. XXII.

Si igitur ſigna determinata iuſto combinentur ordine, ex illis quodlibet quantum mathematicum intelligi poteſt (§. VII. XIX.). Eruamus igitur methodum combinandi.

§. XXIII.

Quomodo ſigna in illo combinanda.

Signa §. XXI. expoſita ſunt tantummodo ſigna primitiua, & exprimunt characteres quantorum mathematicorum, quae nouenarium partium numerum non ſuperant, (§. XXI. VII.). Maiores igitur quantitates ex data hypotheſi non niſi combinatione horum ſignorum exprimi

primi possunt (§. IX.), erit ergo nouem & vnum 9†1, nouem & duo 9†2, octo & octo & nouem 8†8†9 &c. (§. XII.).

§. XXIV.

Sed & hoc combinandi modo in magnis numeris non omnis euitari potest confusio (XIII.). Quomodo igitur illa euitari potest? Et quidem in magis numeris.

§. XXV.

Inferiora distincte cogitantur ex superioribus (per princ. Log.), superiora oriuntur, quatenus inferiora commune accipiunt nomen. Hinc constituerunt Mathematici certas quantorum classes, vnitates, decades & centenarios. *Vnitates* sunt quanta, quae signis primitiuis §. XXI. expositis exprimi possunt, quanta vero quae nouem vnitate superant, appellarunt *decades*, & quae nouem decades decade superant, *centenarii* vocantur.

§. XXVI.

Et ex ratione §. XXV. adiecta etiam his quantitatum classibus communia Continuatio.

munia impoſuerunt nomina. Inde quantitates ſimplices, Millenariae, Milliones, Millenariarum Milliones, Billiones, & ita in infinitum originem ducunt, ita vt decem centenariae vocentur *Millenariae*, mille millenariae *Milliones*, mille millenariae Millionum *Billiones* &c. Quantitates vero, quae millenariarum collectionem non aſcendunt, *ſimplicium* acceperunt nomen.

§. XXVII.

Quid numerator & denominator.

Si hunc ſignandi characterem perſpiciamus, facile intelligemus, quod in quolibet quanto mathematico diſtincte cogitato duo cogitemus, tam numeratorem quam denominatorem. *Hic* enim indicat, quale ſit quantum, quod enuntiandum, *ille* vero partes quanti obuii exhibet.

SCHOL. I. Veritatem principii, licet communiter neglecti, hic tantummodo a poſteriori indicare, neceſſarium eſſe iudico. Sunt quidem, quos ſumma cum pietate veneror, qui hanc theoriam tantummodo ad numeros fractos appli-

applicant. Sed permittatis, enixe quaeso, vt cogitationum mearum rationem eruditissimorum tradam iudicio.

SCHOL. 2. Quantitates mathematicae sunt vel numerantes vel numeratae. In illis tantummodo quantorum classes §. XXV. seqq. spectantur, in his simul ens quoddam, cui inest quantitas, cogitatur, & hoc vel determinate, e. g. 3 lineae seu superficies &c. vel indeterminate, e. g. 3 a seu 4 x &c. In omni ergo quanto aliquid numeratur. Ergo & quodlibet quantum suum accipit nomen, seu denominatorem.

SCHOL. 3. Haec dum perpendo, miror, quod nonnulli Metageometriam seu Mathesin vniuersalem expectent, dum Arithmetica solide euoluta nil est, nisi Mathesis vniuersalis, cuius diuersa applicatio diuersas producit Matheseos partes, quatenus enim applicatur ad lineas, superficies & solida qua talia, oritur Geometria &c. Quod vero principia vel mediate vel immediate applicari possint, notare velis. Et idem illud facillime intelliges, si Metageometriae notionem, quae est scientia inueniendi rerum quantitates qua tales, ad ea applicare velis, quae iam exposita sunt, & infra exponuntur.

§. XXVIII.

Hi debent colligi ex signis mathematicis.

Quae in obiecto diuersa spectari possunt, etiam in cognitione symbolica diuersis exprimenda sunt signis (§. XIII.), signa igitur, quibus quantum mathematicum exprimitur, ita comparata esse debent, vt ex illis tam numerator, quam denominator quanti possit colligi (§. XXVII.).

§. XXIX.

Methodus signandi denominatores.

Numeratores quantorum mathematicorum cognoscuntur ex signis §. XXI. determinatis (XXIII. seqq.). Quaeramus ergo methodum signandi denominatores, quam inuenimus §. XVI. Si igitur signa hoc combinentur modo, cuilibet quanto scripto suum tribuere possumus valorem.

Schol. I. Quoniam haec dissertatio solam Arithmeticae theoriam spectat, placet ad solas quantitates numerantes attendere, quod quilibet ad numeratos applicare potest, quibus nomen specificum adscribitur, e. g. in determinatis $25^{\text{thal.}}$, $17^{\text{gros.}}$ vel $14^{\circ}\ 37'\ 13''$ &c.

&c. & in indeterminatis 3a, 5x, 24y &c. & in fractionibus 34tel seu $\frac{3}{4}$. Primum fractiones signandi modum attente spectare velis, quo principia, quibus in Arithmetica numeri integri mutantur, etiam ad numeros fractos adplicari possint.

SCHOL. 2. Attigit discursus, quem hucusque continuaui, methodum inueniendi signa, quibus rerum quantitates apte exprimi possunt, eaque ita combinandi, vt quantitates distincte cogitare valeamus. Altera determinationum rei intrinsecarum species absoluitur qualitatibus, (Schol. 3. §. IV.). Si ergo principia breuissimis euoluta ad has applicare pro instituti ratione possemus, non nulla tam artem characteristicam, quam characteristicam combinatoriam, quatenus methodus inueniendi definitiones per signorum combinationem consideratur, spectantia detegi possent, vid Schol. 5. §. IV. Et ita videmus, quod amplus hic dicendi campus aperiri posset digressionem ab institutis facturis, sed me iustam harum scientiarum cognoscere notionem, lectoribus philosophis ostendisse, hic sufficiat. Ne ergo ambages fiant molestae, ordinem ingrediamur, qui postulat, vt non nulla de methodo inueniendi rerum quantitates per calculum dicamus.

Cap. II.

DE METHODO INVENIENDI RERVM QVANTITATES VNICO MODO DETERMINATAS PER CALCVLVM.

§. XXX.

Quid in quanto quaeratur.

OMnis multitudo terminata eſt. Qui ergo quantum diſtincte cogitandum, i. e. multitudinem vnitatum (§. VII.) vult exquirere, vel tantummodo huius multitudinis terminos, vel numerum, quem multitudo illa exhibet, vult determinare.

Schol. In omni ſpatio concipimus vnitatum multitudinem, ergo & quantitatem (§. VII.), eandem ergo cogitationem habemus in linearum conſideratione. Quamobrem & ille, qui inuenire vult lineam, certam excogitat quantitatem, conſequenter & multitudinem partium. Nunc ex Geometriae principiis notum eſt, quod, determinatis baſi AB, & crure BC, & angulo B, totum determinetur Triangulum.

C

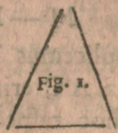

Fig. 1.

A B

Datis igitur linea AB & BC & angulo B, inueniri poteſt quantitas vel vnitatum multitudo lineae CA, ſed tantummodo quoad extenſionis terminos. Applicatione vero menſurae etiam numerus, quem multitudo illa vnitatum, quae lineam AC conſtituunt, exhibet, indicari poteſt.

§. XXXI.

Quatenus in quantitate tantummodo multitudinis vnitatum termini ſpectantur, illam poſt haec breuitatis gratia vocabo *quantitatem vnico modo determinatam*. Quatenus vero ſimul huius multitudinis numerum in quantitate ſpectamus, illam *quantitatem duplici modo determinatam* appellabo.

Quid quantitas vnico & duplici modo determinata?

SCHOL. v. g. Quatenus datis linea AB & BC & angulo B inuenimus lineam AC, linea illa eſt quantitas vnico modo determinata. Sit vero linea MN vnitas.

Fig. 2.

M — N

Si hanc applicemus ad lineam AC fig. 1., linea AC erit lineae MN triplum, & hoc reſpectu excogitauimus quantitatem duplici modo determinatam.

§. XXXII.

Hinc capita Arithmeticae duo,

Hinc in Arithmetica duo detegenda ſunt capita, quorum *primum* methodum per calculum inueniendi rerum quantitates vnico modo determinatas, *alterum* vero methodum per calculum inueniendi rerum quantitates duplici modo determinatas exponet (§. III.) vid. Schol. 3. §. XXVII.

Schol. Primum enodabit hoc caput ſecundum, alterum vero in ſequenti capite tertio explicabitur breuiſſimis, ita tamen, vt inſtituti ratio poſtulat. Vides tamen, lector Amice, quod in illorum incidam cenſuram, qui Matheſin tantummodo circa rerum menſuras verſari, affirmant. Sed quo fundamento? quia forſan Matheſis eſt ſcientia de rerum quantitatibus. Concedo, ſed non reciproce. Euoluas enim omnes Matheſeos partes, & oſten-

oſtendas vnicam, cui principia mea ex rei natura deducta, repugnant.

§. XXXIII.

Inuenimus aliquid, ſi ex principiis iam cognitis ratiocinando colligimus veritatem adhuc incognitam. Inuenire quid.

SCHOL. Scio quidem, quod etiam aliquid inuenire poſſimus ſine ratiociniis. Quod vero de eiusmodi inueniendi modo hic non dicam, ii lubenter concedent, qui ſcientifica a vulgaribus diſtinguere valent.

§. XXXIV.

Qui ratiocinando ex principiis principium colligit, neceſſario principiorum intelligat conuenientiam, conſequenter relationem quandam termini maioris ad terminum minorem perſpicere tenetur. Terminus maior cum termino minore, quatenus combinantur, conſtituunt concluſionem. Ergo & veritatem incognitam. Inuentoris igitur requiſitum eſt Quaenam inuentoris requiſita.

1. vt principia quaedam ſibi familiaria reddat.

2. vt relationem incogniti ad cognitum cognoſcat.

3. vt ſibi cognitionem methodi ex datis principiis & data relatione incogniti ad cognitum incognita deducendi acquirat.

§. XXXV.

Data & inuenienda in Arithmetica.

In Arithmetica quae inueniuntur, ſunt quanta (§. IV.), quae, quatenus cognita ſunt, *data*, quatenus vero incognita, *inuenienda* vocantur. Ex datis igitur inuenienda deduci nequeunt, niſi relatio horum ad illa cognoſcatur (§. XXXIV.). Quaeramus rationes, quas ad ſe inuicem habere poſſunt.

Schol. Qui algebram callent, hoc principium ſumme neceſſarium eſſe, primo intuitu concedent, ſi modo huius ſcientiae problematum reſolutiones ex ſuis deducere velint principiis generalioribus, quod in pertractatione mathematica optimum eſſe iudico.

§. XXXVI.

Relatio hinc

In quantitate nil niſi multitudinem

nem vnitatum cogitamus. Ergo relatio, quam quantum ad quantum immediate habet, non nisi ex multitudine vnitatum cogitari potest. Consequenter vel ex identitate, vel ex diuersitate huius multitudinis concipitur.

quanti ad quantum explicatur.

§. XXXVII.

Identitas in vnitatum multitudine dat *aequalitatis* characterem discretiuum, & diuersitas in hac multitudine exhibet *inaequalitatis* notionem. vid. Schol. ad §. VII.

Quid sit aequalitas & inaequalitas.

§. XXXVIII.

Ergo quanta inuenienda datis vel aequalia, vel inaequalia sunt (§. XXXVI.), & si hoc, quantitas inueniendorum vel maior, vel minor est quantitate datorum.

SCHOL. Quod vero ea, quae hic euoluta sunt, non nisi de quantitatibus immediate ad se inuicem relatis valeant, non solum inscriptio capitis sed & principiorum extensio docebit.

§. XXXIX.

Inuenire quantum datis aequale idem

Addere, subtrahere

multiplicare quid. idem est ac *addere.* Inuenire quantum dato minus vocatur *subtrahere.* Inuenire tandem quantum dato maius, est quod *multiplicare* dicitur.

SCHOL. Ita non est periculum amplius, ne vitiosam in definiendo admittamus fundamenti priuationem & notarum relatiuam positionem, quae aegre deuitatur per definitiones ab Ill. WOLFIO receptas. Quaerenti enim, cur quatuor sint Arithmeticae operationes? Resp. quantitas potest augeri vel minui, & hoc vel immediate vel per compendium. Instanti: Ergo duae tantummodo sunt species verae & in additione quantitas nec augetur nec minuitur, regerunt, operationes illas a vulgo esse receptas.

§. XL.

Relatio dati ad inueniendum in qualibet arithmetica operatione. Ex datis ergo definitionibus cognoscitur, quam in qualibet operatione arithmetica quantum inueniendum ad data habeat relationem (§. XXXIX.), huius igitur relationis characteres principia exhibent, ex quibus quantum incognitum deducendum (§. XXXV.). Hoc dum fieri debet per calculum (§. IV.), me-

methodi huius theoriam profundius euoluemus.

SCHOL. Ex his, quae proponuntur, methodum resoluendi problemata in arte characteristica combinatoria, si placet, collige (Schol. 5. §. IV.). Caue tamen, ne principia sine nouis determinationibus applices. Quod enim qualitatum & quantitatum diuersa sit natura, quilibet, nisi qui maxima fingit, concedet.

§. XLI.

Paucis hanc habe primo in additione, secundo in subtractione & tandem in multiplicatione. Qui addit, inuenit quantum datis aequale (§. XXXIX.), pro datis ergo quantorum signis ea tenetur substituere, quae eandem vnitatum multitudinem exprimunt (§. XXXVII. & III.). Data igitur signa ita ponenda sunt, vt eorum cognoscere possimus valorem (§. II.).

Natura calculi in additione hinc traditur.

§. XLII.

Valor ille vsque ad nouem cognoscitur ex signis primitiuis (§. XXI.), eiusmodi autem valoris cogita-

Continuatur, aggregatum, perpendiculae

homogeneorum definiuntur. gitatio, qui nouem ſuperat, excitatur ex loco (§. XXIX.). Quoniam vero quantum hoc inueniendum, quod *aggregatum* audit, omnes vnitates, decades, centenarios &c. quantorum datorum exprimere debet (§. XLI. XXV.), quanta homogenea ſub homogeneis ſcribenda ſunt (XXIX.), vnde *perpendiculas homogeneorum* arripimus. Tunc vt ab aggregato linea diſtinguatur, neceſſarium eſt (§. XXVIII.).

Schol. En praeparationem datorum, quo ex illis inuenienda poſſint deduci. Pro determinationibus a quantitate deſumtis ſubſtitue eas, quas qualitates porrigunt, (Schol. 3. §. IV.), & ex illis principium generale, ſi placet, abſtrahe (Schol. 4. §. IV.).

§. XLIII.

Continuatur. Aggregatum excitat cogitationem omnium vnitatum, decadum &c. quas data exhibent (§. XLII.). Ergo in additione tam de ſumma vnitatum, quam decadum &c. inquiramus per calculum (§. XL.).

Quo-

Quoniam vero vnitates, quae numerum nouenarium ſuperant, ad ſequentem pertinent claſſem (§. XXIX.), primo vnitatum, deinde decadum & ſic porro calculus abſoluendus eſt.

§. XLIV.

Denominatores ex loco, numeratores vero ex ſignis §. XXI. determinatis cognoſcuntur (§. XXXIX). In calculo ergo ſine ratione denominatores cogitamus, operatione enim abſoluta per ſe cognoſci poſſunt (§. XLIII.), ergo abſtineamus. Adplicantur dicta ad numeros fractos.

SCHOL. I. Ex his omnia, quae horum principiorum applicationem ad quanta numerata, tam determinata, quam indeterminata, vt & ad numeros fractos ſpectant, quilibet facillime cognoſcere poteſt (§. XXIX. Sch. I.).

SCHOL. 2. Et ſimul ex principiis §. XLIII. ſ. propoſitis grauida argumenta fluunt, ad difficultatem in meditando minuendam neceſſaria.

§. XLV.

Iam conſtruamus calculum. Exemplum additionis.

Ad ſexcenta quadraginta & duo ad-

addantur trecenta quinquaginta & quatuor, item triginta tria.

Erit, si signum, quod additionis operationem indicat, †, in arte characteristica combinatoria.

642†354†33 (§. XXIX.) Ergo

642

354

33 (§. XLII.)

a — b (§. XLII. in fine.)

Iam quaeramus aggregatum ex perpendicula vnitatum (§. XLIII.). Est 4†2=6. ergo 6†3=9 (§. XXI.). In perpendicula decadum, si spectetur §. XLIV, est 4†5=9 (§. XXI.) 9†3=12 (§. XXIX.). In perpendicula centenariorum erit 6†3=9 (§. XXI.), si hic vnum illud, quod in aggregato decadum ponitur, addatur (§. XXIX.), erit 9†1=10 (§. cit.), erit aggregatum 1029 (§. XLIV.), quod sub linea a b ponendum (§. XLII.).

Schol. 1. Ex iisdem principiis eodem modo quantorum numeratorum, vt & fractionum additio deduci potest, v. g. ad 4a & 5b addantur 3a & 4b. erit

erit enim $4 + 3 = 7$ (§. XXI.) ergo $3a + 4a = 7a$ (§. II.) item $5 + 4 = 9$. ergo $5b + 4b = 9b$ (§. XLIV.).

SCHOL. 2. Quod in arte characteristica combinatoria etiam signa operationem indicantia necessaria sint, notare velis. Iam methodus requirit, vt subtractionem exponam.

§. XLVI.

Subtrahimus, si quantum dato minus inuenimus (§. XXXIX.). *Minus* est, quod parti alterius aequale. Subtrahimus igitur, si a quanto dato partem alteri quanto aequalem subducimus. Theoria calculi in subtractione.

§. XLVII.

Si ergo subtrahimus, quod a dato subducendum, in casu obuio debet determinari (§. XLVI.), quod *subtrahendum* dicitur, & quantum, a quo subtrahitur, *minuendi* nomen accepit. Subtrahendum & minuendum quid.

SCHOL. Quae ergo in operationis definitione indeterminata relinquuntur, in casu obuio determinanda sunt. (Schol. 4. §. IV.).

§. XLVIII.

Quantum priuatiuum & positiuum quid.

Quantum subtrahendum, quod signo — notantur (Schol. 2. §. XLV.) *priuatiuum*, & quae in quanto minuendo inueniuntur, *positiua* audiunt. Quantum igitur priuatiuum positiuum priuatiuo aequale destruit. (§. XLVI.).

SCHOL. 1. Ponamus e. g. $5 - 2$, quoniam $5 = 2 + 3$ (§. XXI.) erit $5 - 2 = 3$.

SCHOL. 2. Quae ergo sibi mutuo repugnant, in eodem subiecto poni nequeunt (Schol. 4. §. IV.).

§. XLIX.

Continuatur theoria subtractionis.

Quantitas ergo subtrahenda minuenda maior esse nequit (§. XLVI). Ponamus iamiam, quod in homogeneorum perpendicula quantitas priuatiua maior sit positiua, id quod deest ex sequente supplendum esse classe, facillime cognoscitur, quod facillimo fit modo, si vnum ex hac illi annumeretur (§. XXIX.).

§. L.

Exemplum subtractionis.

Si iam ea, quae §. XLII, XLIII & XLIV. generaliter posita, hic applicenplicentur, calculus in ſubtractione facillime conſtruendus erit, v. g. a ſexcentis quadraginta & quatuor ſubtrahantur trecenta quinquaginta & duo,

Erit in arte characteriſtica combinatoria

$644 - 352$ (§. XXIX.) Ergo
644
352 (§. XLII.)
c — d (§. XLII. fin.)

Iam quaeramus quantum, quod dicitur differentia, ex perpendicula vnitatum (§. XLIII.). Eſt $4 = 2 + 2$ (§. XXI.). Ergo $4 - 2 = 2$ (§. XLVIII.). Si porro decadum perpendiculam ſpectemus, erit $4 - 5$ propoſitio impoſſibilis (§. XLIX.), ergo quaeratur $14 - 5$ (§. cit.). Quoniam igitur $14 = 4 + 9 + 1$ (§. XXIII.) & $4 + 1 = 5$ (§. XXI.) eſt $4 + 9 + 1 = 5 + 9$ (§. II.) conſequenter $14 - 5 = 9$ (§ XLVIII.) Dum igitur a centenario minuendo vnum ſubductum eſt, habemus adhuc hac in perpendicula $5 - 3$, quod, quia $5 = 3 + 2$ (§. XXI.) aequiualet 2. (§. XLVIII.). Ergo differentia eſt 292 (§. XLIV.), quae ſub linea CD ſcribi poteſt (XLII.).

Schol. 1. Eodem calculo in numeris numeratis & fractionibus vtimur, v. g. $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$. Quoniam $3 = 2 + 1$ (§.XXI.) erit differentia $\frac{1}{5}$ (§. XLVIII. XLIV.). Intuitu horum principiorum aggrediamur iamiam breuiſſimis, vti inſtituti ratio poſtulat, multiplicationis operationem.

Schol. 2. En methodum ea, quae in obiecto relatiue impoſſibilia ponuntur, ad poſſibilia reducendi praedicata.

§. LI.

Explicatur calculi natura in multiplicatione, maius & factum definitur.

In multiplicatione quantitatem data maiorem inuenimus (§. XXXIX.). *Maius* eſt quantum, ſi pars ipſius alteri toti aequalis. Quanti igitur, quod in multiplicatione inuenimus, & quod *factum* vocatur, pars dato aequalis eſſe debet.

§. LII.

Quantum quando augeatur.

Augetur quantum, ſi efficitur maius, conſequenter ſi nouum adiicitur quantum (§. LI.). Multiplicamus

mus ergo, quando quanto dato nouum adiicimus (§. cit.).

Schol. E. g. si numero quaternario binarius adiicitur, numerus quaternarius augetur. Caue tamen, ne ea, quae hoc in commate posita, reciproces.

§. LIII.

Si quantum quanto adiicitur, id quod adiicitur, vel refertur ad data, vel ex datis in problemate determinationibus ratiocinando colligitur. Si prius, habemus operationem, quae dicitur additio (§. XXXIX.), ex posteriori ergo determinatam multiplicationis ideam eruere possumus. Continuatur multiplicationis theoria.

Schol. Et ita habemus methodum determinationes eorum, quae in definitione indeterminata ponuntur, inueniendi.

§. LIV.

Omnia, si placet, cogita iam membra possibilia, & cogitabis, augmentum illud fieri non posse, nisi quantum datum aliquoties sumatur. In casu ergo obuio, quo multiplica- Continuatur multiplicandum quid?

 mus,

mus, determinandum eſt, quoties quantum, quod datur, in ſe ipſum ſit ducendum (Schol. §. XLVII. XXXV.). Qua ex determinatione *multiplicationis* ideam arripimus, cui ſignum, multiplicationem indicans praeſcribitur (§. XLV. Schol. 2.). Quo intuitu quantum, quod datur, dicitur *multiplicandum*.

Schol. Vides ergo multiplicationis fundamentum eſſe propoſitionem: *vti ſe habet vnum ad multiplicatorem, ita ſe habet multiplicandum ad factum.*

§. LV.

Continuatur porro. Totum eſt aequale omnibus ſuis partibus ſimul ſumtis. Si ergo multiplicator eſſet terminus compoſitus, ex additione factorum partialium totum deduci poteſt factum (§. XXXIX.). Quod etiam vt fiat, neceſſarium eſſe iudico. (Ex Schol. 2. §. XLIV.).

§. LVI.

Exemplum multiplicationis. Quae generaliter ponuntur, ad ſpecialiora applicari poſſunt. Ex his igitur, quae de multiplicatione demon-

demonſtrata ſunt, principiis, ſi ea, quae §. XLII. XLIII. & XLIV. generaliter euoluta, applicentur, faciamus multiplicationis calculum.

Sumantur ſexcenta quinquaginta & duo trecenties quinquagies & bis.

Erit in arte characteriſtica combinatoria

652
352 (§. XLII.)
——(§. XLII. in fin.)

Iam quaeramus primo multiplicandi duplum (§. LV). Eſt $2+2 = 4$ (§. XXI). Ergo $2.2 = 4$ (§. LIV.) It. $5+5 = 4+1+5 = 9+1$. (§. XXI. XXIII.) $= 10$. (§. XXIX.), ergo $5\ 2 = 10$. (§. LIV.) & $6+6$ ex eadem ratione $= 12$, ergo $6.2 = 12$. Conſequenter $652.2 = 1304$. Eodem modo, ſi ſpectemus §. XLIV, iuuenitur $652.5 = 3260$ & $652.3 = 1956$. Addantur facta partialia (§. LV.) habito reſpectu ad §. XXIX. erit.

1304
3260
1956

229504 (§. XLV.) factum totum.

SCHOL. 1. Video quidem, te oppositurum calculum litteralem atque fractionum. Si vero velis perpendere, quod $a.\, a = aa = a^2$, & $\frac{6}{7}.\, \frac{2}{3}$ sit $1 : \frac{2}{3} = \frac{6}{7} : x$ (Schol. §. LIV.), omnia euanescent, quae dubie cogitata sunt.

SCHOL. 2. Plura quidem superessent dicenda, tam illustrationem quam extensionem principiorum spectantia. Si vero ea, quae in Scholiis, commatibus huius capitis adiectis, enodata videmus, Lector Amicus attente velit perspicere, me officio meo hic satisfecisse beneuole iudicabit. Restat igitur vt examinem, quomodo quantitates rerum duplici modo determinatae per calculum possint inueniri, quod breuissimis verbis in capite sequente exponam.

Cap. III.

DE METHODO INVENIENDI RERVM QVANTITATES DVPLICI MODO DETERMINATAS PER CALCVLVM.

§. LVII.

IN quantitate, duplici modo determinata, determinatum cogitamus vnitatum numerum (§. XXXI.), hanc igitur inuenimus quantitatem, si vnitatum multitudinem exquirimus. In quocunque vnitatum multitudinem exquirimus, illud dicimur *metiri*. Inuenimus ergo quantum duplici modo determinatum, quando quantum, quod datur, metimur.

Metiri quantum quid.

§. LVIII.

Qui ergo quantum, quod datur, metitur, exquirit, quoties vnum in dato contineatur quanto (§. LVII.); quamobrem, cum vnum sit pars quanti (§. VII.), partem magnitudinis pro vnitate assumit, & eius multiplum, quod in dato continetur quanto, determinat. Et hac ex ratione pars, quae pro vnitate assu-

Mensura, mensurandum, quotus definiuntur.

 mitur,

mitur, *menſurae*, & quantum, quod datur, *menſurandi* nomen accepit. Terminus vero, qui indicat, quoties menſura in menſurando contineatur, dicitur *Quotus.*

§. LIX.

Quomodo quotus inueniatur.

Menſurandum ergo eſt multiplum menſurae (§. XII.), quod in quoto determinatur (§. LVIII.). Inuenimus ergo quotum, ſi menſuram a menſurando toties, quoties fieri poteſt, ſubducimus.

SCHOL. 1. Inde factum eſt, vt nonnulli diuiſionem compendiariam vocauerint ſubtractionem. Sed cogitata mea, collata cum §. XXXIX. ſeqq., ex ſequentibus iudicabit commatibus Lector Philoſophus.

SCHOL. 2. Spectata multiplicationis operatione factum eſſe multiplicandi multiplum, quod multiplicator determinat, conceditur (§. LI. ſeqq.). Multiplicator ergo pro quoto, multiplicandus pro menſura & factum pro menſurando ſubſtitui poteſt (§. LVIII.). Ergo & hoc caſu *vnum ſe habet ad quotum, vt menſura ad menſurandum* (§. LIV.).

Schol. 3. En principii reductionis vsum in arte inueniendi, quo a simili ad simile propter similitudinem argumentamur.

§. LX.

Quantum metiri idem valet ac *diuidere*, quae operatio signa: vel ita $\frac{a}{b}$ (vbi a diuidendum & b diuisor) exprimitur (Schol. 2. §. XLV.). Non possumus metiri quantum, nisi applicemus mensuram (§. LVIII.). Ergo nec possumus diuidere, nisi mensura, quae hoc respectu *diuisor* dicitur, sit determinata. Et quoniam eadem pro se inuicem perfecte possunt substitui (§. I.), omnia, quibus §. LVII. sequentibus metiendi methodus explicata est, etiam examinandae diuisionis naturae ansam praebent. Hinc notio diuisionis, quid diuisor.

Schol. Diuisionis definitionem ita euinco: Ex omnium Mathematicorum consensu in diuisione quaerimus, quoties diuisor contineatur in mensurando, quod hoc respectu diuidendum appellatur. Dum vero hoc inquirimus, ex vsu loquendi. tam vulgari, quam recepto, metimur (§. LVII.), ergo dum diuidimus, metimur. Dicas forsan, metiri esse genus & diuidere speciem. Sed abstrahe cogitando ab accidentalibus, & ita fac periculum, vtrum exquirere possis, quod vel plus vel minus iusto in definitione sit. Tale si inuenias, velim eam damnes. Vtrum vero ex data definitione modum diuidendi deducere possimus, nos faciamus periculum.

§. LXI.

Quid fiat in diuisione.

Quantitatis ergo partes diuidendum constituentes in diuisione destruuntur, quatenus diuisori aequales (§. LXI. LX.). Quod igitur mensurandum non minus esse debeat mensura, si actu volumus diuidere, facile intelligitur.

§. LXII.

Continuatur quid residuum.

Quod si vero mensurandum contineat partem mensura seu diuisore minorem, ea actu diuidi nequit (§. LXI.), & hoc respectu dicitur *residuum*. Mensura ergo seu diuisor semper residuo maior esse debet.

Schol. I. Quo omnem tamen euitare pos-

possimus confusionem, necessarium est, vt diuisionem non actu instituendam signo, diuisionem indicante, notemus (§. LX. & Schol. 2. §. XLV.), Et ita videmus fractionum originem, quibus semper diuisor maior est diuidendo.

Schol. 2. Principium hoc amplissimi vsus est, tam per vniuersam Arithmeticae partem, qua fractionum mutationes explicantur, quam per vniuersam inueniendi artem. *Quoad primam* enim statim intelligimus, fractionem esse quotum (§. LVIII.). Ergo se semper vnum haber ad fractionem, vt denominator ad numeratorem (Sch. 2. §. LIX. & Sch. 1. §. XXIX.); Consequenter quantitas fractionis ex relatione denominatoris ad numeratorem cognoscitur. *Quod secundam*, vt quaedam notem, permittas. Grauissimum est, problemata resoluere, sed vides hoc in casu speciali, quod si natura eorum, quae in quaestione proponuntur, signis accurate exhibeatur, facile possit euitari, ne illegitima regularum applicatione a veritate aberretur.

§. LXIII.

Praemissis his principiis, si etiam ea, quae initio §. LVI. dicta, applican- Exemplum diuisionis.

cantur, conſtruamus diuiſionis calculum.

Diuidantur quadringenta quinquaginta & quinque per duo. Erit in arte characteriſtica combinatoria.

$$\frac{455\ (\S.\ \mathrm{XXXIX.})}{2\ (\S.\ \mathrm{LX.})}$$

Quo iam quotus a diuidendo & diuiſore poſſit diſtingui, adſcribatur diuidendi dextrae (§. XXIX.) linea (§. XLII. in fin.), poſt quam ſigna quotum indicantia debito ponantur loco (§. XXIX.). Et ita habemus

$$\left.\frac{455}{2}\right|_{n}^{m} \quad \text{Quotus}$$

Iam diuidamus primo centenarium, deinde decadem & tandem vnitatem. (§. LV.). Quoniam igitur $4 = 2 + 2$ (§. XXI.), 2 bis continetur in 4 (§. LXI.) E. quotus eſt 2. (§. LVIII.). Conſequenter $4 : 2 = 2$ (§. LX.). Porro $5 = 2 + 2 + 1$ (§. XXI.) E. 2. continetur in 5 bis (§. LXI.),

(§. LXI.), & 1 est residuum (§. LXII.). E. quotus est $2 + \frac{1}{2}$ (§. LVIII. & Schol. 1. §. LXII.). Quoniam vero hoc residuum est pars totius mensurandi, quod diuidendum, summo cum iure ad proximas refertur vnitates, hac ergo ex ratione adhuc diuidendum est 15 per 2. Quoniam igitur $15 = 10 + 5$ (§. XXIX.), & $10 = 9 + 1$ (§. XXIII.), 5 vero $= 2 + 2 + 1$, & 9 $= 2 + 2 + 2 + 2 + 1$, & $1 + 1 = 2$, erit $15 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1$ (§. XXI. II.). Ergo 2 continetur in 15 septies (§. LXI.), & 1 est residuum (§. LXII.). Est ergo quotus $7 + \frac{1}{2}$ (§. LVIII. Sch. 1. § LXII.). Si iam partes huius quoti combinantur (§. XXIX.), totus erit quotus $227 + \frac{1}{2}$ (§. LV.), qui post lineam mn ponendus, per modo dicta.

SCHOL. 1. Eundem etiam obtinet locum calculus in quantis numeratis, applicemus illum modo ad fractiones eodem gaudentes denominatore (heterogenea enim per se inuicem diuidi nequeunt (§. LXI.). Diuidatur e. g. $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{5}$. Quoniam igitur $4 : 2 = 2$, erit $\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ (§. XLIV.). SCHOL.

Schol. 2. Ne vero principium, cuius Schol. 1. mentionem feci, dubium videatur, quod in diuiſione heterogeneorum quanta tantummodo in abſtracto ſpectemus, nihil notioni admiſcentes, quod rei obuiae proprium, notare velis.

§. LXIV.

Compendium diuiſionis.

Fieri poteſt, vt diuiſor ſit ſignum quanti deriuatiuum (§. XXIII.) adeoque ex notis conſtet plurimis. Sed dum reſolutio §. LXIII. ex principiis deducta generalis eſt, eodem etiam modo hoc in caſu problema reſolui poteſt. Quoniam autem Mathematici lubenter laborem facilitant (§. XLI. ſeqq.), diuiſorem in omnibus diuidendi notis ſupraſcriptis toties contineri, quoties character diuiſoris primus in primo diuidendi charactere continetur, fingunt. Sed cum fictio fallere queat, vtrum in caſu obuio ſit applicabilis, eruitur, ſi factum ex quoto in diuiſorem ſubtrahatur a diuidendo ſupraſcripto (Schol. 2. §. LIX. §. LXI. & XLVIII.), tunc ex natura reſi-

residui fictionis possibilitatem euincere possumus. (§. LXII.).

SCHOL. En methodum demonstrandi, fictionem heuristicam in casu obuio esse applicabilem.

§. LXV.

Multa ex his inferri possent consectaria. Pauca scopo consentanea deducam. Diuisio adeoque & mensurae actio (§. LIX.) instituti nequit, nisi mensura cognoscatur & ad mensurandum sit applicabilis (§. LXII.). Mensura debet esse pars mensurandi (§. LVIII.) & applicatur, si exquiritur, quoties contineatur in mensurando (§. LVIII.). Si ergo totum non immediate possumus resoluere in suas partes, (Resolutio illa vt sit physica, non necessarium esse, L. A. cognoscet), etiam hoc modo quantum non possumus metiri. Breuissimis ergo exponemus mensurae immediatae seu vicariae, eiusque applicationis, ideam. Consectaria ex dictis de diuisione

SCHOL. Nescio igitur, cur illi tantopere vapulent, qui cum Euclide docent,

cent, mensuram esse mensurandi multiplum. Quae enim de numeris & quantitatibus irrationalibus opponuntur, in sequentibus enodabo.

§. LXVI.

Relatio definitur.

Ex consideratione quantitatis 4 cognoscimus eam esse 2+2 (§. XXI.), qui vero simul considerat quantum 2, cognoscit 4 esse duplum ipsius 2, 2 vero dimidium ipsius 4. Hanc affectionem quanto 4 vel 2 tunc demum conuenire intelligimus quanto 2 vel 4 simul considerato, & hoc respectu dicitur *relatio* quam 4. habet ad 2 & 2 ad 4. *Relatio* enim est affectio, quae, altera re simul considerata, alteri demum conuenire intelligitur.

§. LXVII.

Terminus antecedens & consequens quid?

Quantum, quod refertur ad alterum, dicitur terminus *antecedens*, & ad quod refertur *consequens*.

§. LXVIII.

Hinc rationis mathematicae notio.

In quanto nil distinguimus, nisi vnitatum multitudinem (§. VII.), nulla ergo quantorum ad se inuicem

cem concipi poteſt relatio, niſi quod vnum ſit altero maius vel minus. (§. LXVI.) vid. §. XXXVI. Et haec quantorum relatio *rationis* (ſc. mathematicae) nomen accepit.

SCHOL. Genuinam igitur Euclidis definitionem de ratione, quam per *habitudinem magnitudinum eiusque generis ſecundum quantitatem* definit, eſſe mihi videtur. Opponitur quidem relatio ſinus recti ad ſinum complementi in Trigonometria, ſed qua ex ratione, non video. Si enim vnum quantum altero maius vel minus, vnum quantum alterum determinare, fingi poteſt. Conſentio ergo cum *Hobbeſio*, qui in *Tractatu de principiis & ratiocinatione Geometrarum c. XI. p. 22.* rationem magnitudinis ad magnitudinem relationem interpretatus eſt.

§. LXIX.

In ratione vnus terminus eſt altero maior, vel minor (§. LXVIII.), quanta ergo, quae rationem conſtituunt, homogenea eſſe debent. *Homogenea* enim ſunt, quorum vnum altero maius vel minus eſſe poteſt. In ratione quanta homogenea ſunt.

§. LXX.

Ratio geometrica definitur.

Si vna quantitas altera maior vel minor eſt, id etiam ex eo fieri poteſt, quoniam vna eſt alterius multiplum (§. XLVI. LI.), & ſi hoc, ratio dicitur *geometrica.*

SCHOL. Solam geometricam rationem ſcopo maxime conſentaneam hic explicabo. Quae enim de ratione arithmetica altera quantorum ad ſe inuicem relationis ſpecie dicenda, ex his quae dicuntur, quilibet facile determinare poteſt. Ne enim ambages fiant moleſtae, ad colophonem diſſertationi imponendum properemus.

§. LXXI.

Quae eſt maioris, & minoris in aequalitatis.

In ratione geometrica, vel terminus antecedens maior eſt conſequente, vel conſequens antecedentem quantitate ſuperat (§. LXX. LXVII.). Si prius, ratio geometrica dicicitur *ratio maioris inaequalitatis;* ſi poſterius, eſt *ratio minoris inaequalitatis.*

§. LXXII.

Hinc exponens definitur.

Ergo in ratione geometrica maioris inaequalitatis terminus antecedens

cedens eſt multiplum conſequentis, & in ratione minoris inaequalitatis conſequens terminus multiplum antecedentis continet (§. LXXI.). Fieri ergo poteſt, vt quotuplum priori caſu diuiſione antecedentis per conſequentem, poſteriori vero diuiſione conſequentis per antecedentem eruamus (§. LIX.). Quotus, qui hac inuenitur operatione, *exponentis* nomen accepit.

§. LXXIII.

Ratio geometrica vtraque quomodo inueniatur.

Quotus indicat, quoties menſura ſeu diuiſor contineatur in menſurando, ſeu diuidendo (§. LVIII.), ex exponente ergo & cognoſcimus, quoties terminus rationis maior complectatur minorem (§. LXXII.). Atque adeo in ratione geometrica minoris inaequalitatis inuenitur terminus conſequens ex multiplicatione termini antecedentis per exponentem (§. LI.), & in ratione geometrica maioris inaequalitatis terminus conſequens ex diuiſione antecedentis per exponentem oritur (§.LX.ſqq.).

§. LXXIV.

Continuatur.

Sit ergo terminus antecedens a & exponens b, erit ratio geometrica minoris inaequalitatis a:ab, & ratio geometrica maioris inaequalitatis ab:a. (§. LXXIII. LX & Schol. 2. §. LIX.).

SCHOL. Formata videmus hoc in commate ſigna deriuatiua (§. VI.), quorum primitiua denotant notas, quae rationem geometricam, tam minoris, quam maioris inaequalitatis exprimunt. Aequipollent ergo definitionibus §. LXXI. & LXVIII. datis. vid. §. IV. Schol. 3. ſeqq.

§. LXXV.

Rationes geomet. quando ſimiles & aequales.

Ratio (ſc. geometrica §. LXX.) ab ratione non niſi exponente diſtingui poteſt (§. LXVIII. ſeqq.), ſi ergo duae pluresue rationes eodem gaudeant exponente, quatenus ſunt rationes, a ſe inuicem non poſſunt diſtingui (§. I.), ergo ſunt ſimiles, atque adeo aequales (§. VIII.), aequalitas enim ex identitate quantorum cognoſcitur.

§. LXXVI.

§. LXXVI.

Similitudo & consequenter aequalitas (§. LXXV.) rationum dicitur *proportio*, quae est geometrica, si rationes eam constituentes sunt geometricae. Proportio geomet. exinde explicatur.

§. LXXVII.

Ex duabus ergo rationibus geometricis, quibus idem imponitur exponens, proportio enatat geometrica (§. LXXV.): ponamus iam m terminum antecedentem, erit a : ab = m : mb, seu ab : a = mb : m propositio naturam proportionis geometricae exprimens (§. LXXIV, XVI.). Vide, quae annotata sunt Schol. ad §. LXXIV. Eiusque natura ostenditur.

§. LXXVIII.

Si eadem per eadem multiplicamus, facta sunt aequalia. Ergo a. m. b = a. m. b. Atque adeo in proportione geometrica factum terminorum extremorum proportionale est facto terminorum mediorum (§. LXXVII. LIV.). Continuatur.

§. LXXIX.

Continuatur.

In proportione ergo geometrica vltimum inuenimus terminum ex diuisione facti terminorum mediorum per primum (LXI.).

Schol. Ex hoc & praecedente commate definitiones characteristicas maximi momenti esse colligimus. Quoniam enim ex illis naturam definiti primo cognoscere possumus intuitu, simul etiam perspicimus omnia, quae ex illis deduci possunt consectaria, modo attendamus ad notas, quas signa illa eorumque combinatio exprimit. Ita etiam inferri potest $\frac{abm}{a} = \frac{ab}{a}m$, item $\frac{abm}{a} = \frac{m}{a}ab$. Quae propositiones omne fere exhibent fundamentum, quo praxis, quae Italicae accepit nomen, fundata est. En ergo characteristice breuissimis ea exprimi posse, quae si verbis notantur, ingentia complent volumina.

§. LXXX.

Continuatur.

Si quantum A determinatur ex B, vnum alterius multiplum est (§. VII. X. II.), consequenter constituunt rationem geometricam (§. LXXIII.)

LXXIII.) cuius exponens eſt modus, quo A determinatur ex B. (§. LXXII. ſeqq.). Si ergo quantum A eodem modo determinatur ex B, vt C ex D, quantitates illae ſunt proportionales (§. LXXVI.).

§. LXXXI.

Eadem pro ſe inuicem poſſunt ſubſtitui (§. I.); Si ergo menſura B applicari nequit ad A, menſura D applicari poteſt ad C, & quotus inde enatus ſubſtitui pro quoto, ex applicatione menſurae ad C inueniendo (LXXX. LXXVII.). Huius inuentionis methodum euictam videmus §. LXXIX. Conſectarium de menſura.

SCHOL. I. Quantus ſit huius menſurae vicariae vſus, illi intelligent, qui inſenſibilia metiri conatum habent. Reducantur enim ad ſenſibilia, & ita legibus proportionalibus inuenimus inſenſibilium quantitates. Ita e. g. in Pſycheometria quantitatem ſenſationis determinari poſſe videtur, ſi eius operationes reducamus ad curuam, in qua $y^m : z^m = x : v$. Quae vero Schol. 2. §. LXIII. admonita, etiam hic adnotare velit Lector Beneuolus, quo eo rectius iudicetur.

SCHOL.

Schol. 2. Haec, quae euoluta ſunt, ſi perpendo, ea, quae Schol. 3. §. XXVII. & Schol. 3. ſeqq. §. IV. dicta, grauiſſimis confirmant argumentis. Dum enim Arithmetica omnia quantitatum genera per calculum inueniendi docet methodum & principia, non ſolum Matheſeos vniuerſalis ſed & artis characteriſticae combinatoriae ſpecies iuſte appellatur. Plura quidem ardua hac in doctrina non ſine maximo proponi poſſe commodo fateor. Sed me ſcopo hic ſatisfeciſſe perſuaſus, reliqua aliis tradendo temporibus, paginis hiſce impono

FINEM.

LXXVI.

onſequenter aequa-
) rationum dicitur
geometrica, ſi ra-
ituentes ſunt geo-

Proportio geomet. exinde explicatur.

XXVII.

go rationibus geo-
idem imponitur
ortio enatat geo-
XV.): ponamus
n antecedentem,
mb, ſeu ab:a=
naturam propor-
ae exprimens (§.
Vide, quae an-
. ad §. LXXIV.

Eiusque natura oſtenditur.

XXVIII.

eadem multiplica-
aequalia. Ergo a.
Atque adeo in
ometrica factum
remorum propor-
terminorum me-
VII. LIV.).

Continuatur.