

Zur Optimierung elektrostimulativer Hüftgelenksimplantate mit externer magnetischer Anregung

Dissertation
zur
Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
der Fakultät für Informatik und Elektrotechnik
der Universität Rostock

vorgelegt von

Carsten Potratz, geb. am 25.06.1981 in Wismar
aus Rostock

Tag der Einreichung: 15.06.2010

Tag der Verteidigung: 28.10.2010

Gutachter

Prof. Dr. Ursula van Rienen, Universität Rostock

Prof. Dr. Herbert de Gersem, Katholische Universität Leuven

Prof. Dr. Olaf Dössel, Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Idee des induktiv gekoppelten Elektrostimulationssystems	2
1.3 Zielsetzung	3
1.4 Gliederung	4
2 Grundlagen	5
2.1 Die Maxwell-Gleichungen	5
2.1.1 Integrale und differentielle Form	5
2.1.2 Maxwell-Gleichungen für harmonische Anregung	7
2.1.3 Elektro-quasistatische und magneto-quasistatische Formulierung	7
2.1.4 Elektrisches Skalarpotential und magnetisches Vektorpotential	8
2.2 Numerische Formulierung	9
3 Zur Modellierung des Hüftimplantat-Beckenknochen-Verbundes	11
3.1 Das menschliche Becken	11
3.1.1 Anatomie	11
3.2 Simulationsmodelle	13
3.2.1 Geometrie	13
3.2.2 Elektrische Materialeigenschaften	14
3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen	19
3.3.1 Nicht-faradaysche Prozesse an den Materialgrenzen	23
3.3.2 Faradaysche Prozesse an den Materialgrenzen	24
3.3.3 Parameter der Materialgrenze Elektrolyt/Metall	27
3.4 Zusammenfassung des Kapitels	33
4 Zur schnellen Berechnung des elektrischen Feldes im Hüftknochen	35
4.1 Zur schnellen Feldberechnung	35
4.1.1 Abtastung der Feldverteilung und Interpolation nicht simulierter Elektrodenpositionen	39
4.1.1.1 Abtastung der Feldverteilung	39
4.1.1.2 Interpolation nicht simulierter Elektrodenpositionen .	41
4.2 Berechnung der Skalierungsfaktoren des elektrischen Feldes	43
4.2.1 Elemente des Ersatzschaltbildes des Elektrostimulationssystems	46
4.2.1.1 Selbst- und Gegeninduktivitäten	46

4.2.1.2	Kopplungswiderstand zwischen den Stimulationselektroden	49
4.2.1.3	Elemente der Materialgrenzen	50
4.3	Potentialberechnung	51
4.3.1	Berechnung der Wichtungsfaktoren im Frequenzbereich	51
4.3.2	Berechnung des elektrischen Feldes im Zeitbereich	55
4.4	Zusammenfassung des Kapitels	59
5	Zur Optimierung des Elektrostimulationssystems	61
5.1	Zur mathematischen Beschreibung von Optimierungszielen	61
5.2	Eindimensionale Optimierungsverfahren	66
5.2.1	Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus	68
5.2.2	Methode des Simulated-Annealing	69
5.2.3	Differential Evolution	70
5.2.4	Bewertung der eindimensionale Optimierungsverfahren	71
5.3	Mehrdimensionale Optimierung - Pareto Optimierung	73
5.3.1	Optimalität in mehreren Dimensionen	73
5.3.2	Evolutionäre mehrdimensionale Optimierung des Elektrostimulationssystems	75
5.3.3	Schritt 1: Erzeugung der Startpopulation	77
5.3.4	Schritt 2: Fitnessbewertung der aktuellen Population	77
5.3.5	Schritt 3: Selektion der Individuen des Reproduktionspools	81
5.3.6	Schritt 4: Reproduktion	82
5.3.6.1	Die Kreuzungsoperation	82
5.3.6.2	Die Mutationsoperation	84
5.3.7	Schritt 5: Reduktion und Erzeugen der nachfolgenden Generation	87
5.4	Parallelisierung der evolutionären Optimierung	89
5.5	Zusammenfassung des Kapitels	90
6	Ergebnisse	93
6.1	Vorbereitung der Optimierung des Elektrostimulationssystems	93
6.1.1	Abtastung der elektrischen Feldverteilung	93
6.1.2	Bestimmung der Elemente der Materialgrenzen	98
6.2	Optimierung	101
6.2.1	Zur Definition von Optimierungszielen	101
6.2.2	Ergebnisse der Optimierung	108
6.2.2.1	Resultate der eindimensionalen Optimierung	108
6.2.2.2	Resultate der mehrdimensionalen Optimierung	111
6.3	Fehlerbetrachtung	113
6.3.1	Betrachtung des Einflusses der nichtlinearen Materialgrenzen	116
6.4	Skalierung des parallelisierten mehrdimensionalen Optimierungsalgorithmus	119
6.5	Zusammenfassung des Kapitels	120

7 Zusammenfassung und Ausblick	121
A Anhang	125
A.1 Validierung der numerischen Feldberechnung	125
A.1.1 Aufnahme der Potentialverteilung im humanen Becken	125
A.1.2 Vergleich von Simulation und Messung	126
A.2 Ein weiteres Optimierungsbeispiel	131
A.3 Zur Berechnung der Induktivität beliebig geformter Spulen	135
A.3.1 Modellierung der Wirbelströme im Implantat	138
A.4 Ablaufdiagramm	140

Abbildungsverzeichnis

1.1	Hüftgelenksendoprothese mit Verankerungszapfen, mehreren Stimulationselektroden und eingelegten Sekundärspulen.	2
3.1	Männliches (a) und weibliches (b) humanes Becken	11
3.2	Hüftgelenk in Vorder- (a) und Rückansicht (b)	12
3.3	Querschnitt eines modellierten Knochens, bestehend aus zwei abgegrenzten Bereichen.	13
3.4	Bestandteile des Simulationsmodells	13
3.5	Relative Permittivität ϵ_r und Leitfähigkeit κ von spongiöser Knochensubstanz nach [SW89].	15
3.6	Phasenwinkel der gemessenen Impedanz an <i>Substantia Spongiosa</i> nach [SW89].	15
3.7	(a) Spezifischer Widerstand ϱ gemessen mit der 4-Spitzen-Messmethode an der <i>Substantia Spongiosa</i> eines Gelenkkopfes an zwei unterschiedlichen Positionen [EKB08] (b) Spezifische Leitfähigkeit κ , berechnet aus den Messwerten aus Abbildung 3.7(a).	16
3.8	(a) Spezifischer Widerstand ϱ , gemessen mit 2-Spitzen-Messmethode an der <i>Substantia Corticalis</i> eines Gelenkkopfes [EKB08], (b) Spezifische Leitfähigkeit κ , berechnet aus den Messwerten aus Abbildung 3.8(a).	17
3.9	Ergebnisse Impedanzmessung (nach Betrag (a) und Phase (b)) in der <i>Substantia Spongiosa</i> eines menschlichen Hüftknochens mittels einer 4-Spitzen Elektrodenanordnung mit verschiedenen Messspannungen .	18
3.10	Geschnittenes Modell eines Hüftknochens mit eingesetztem Implantat und markierter Materialgrenze Implantat/Knochen. Das umgebende Substitutmaterial ist nicht dargestellt.	20
3.11	(a) Darstellung eines Knochenstücks zwischen zwei Elektroden. Dargestellt sind die sich bildenden Materialgrenzen (die Materialgrenzen sind stark vergrößert dargestellt, je nach Modell sind diese einige Moleküllagen stark) sowie die Äquipotentiallinien (rot) des elektrischen Potentials. (b) Elektrisches Ersatzschaltbild des Überganges zwischen Metall und biologischem Gewebe (die Beschreibung der einzelnen Elemente erfolgt im Haupttext).	21
3.12	Betrag und Phase des CP-Elements für verschiedene Werte von β . .	24
3.13	Strom-/Spannungs-Kennlinie der faradayschen Stromdichte als Funktion von η	26

Abbildungsverzeichnis

3.14	Betrag und Phase der Impedanz der Materialgrenze Elektrolyt/Metall an einer Vakuum-Plasmaspray-beschichteten Probe sowie einer polierten Titanprobe [KLN03].	28
3.15	Darstellung Betrag und Phase der Impedanz der Materialgrenze Elektrolyt/Metall (VPS) der gemessen Impedanz (Mess) sowie der Impedanz des Modells mit den bestimmten Parametern (ESB).	29
3.16	Darstellung Betrag und Phase der Impedanz der Materialgrenze Elektrolyt/Metall (poliert) der gemessen Impedanz (Mess) sowie der Impedanz des Modells mit den bestimmten Parametern (ESB).	30
3.17	Strom-/Spannungs-Kennlinie der Materialgrenze Titan-/NaCl-Elektrolyt an einer VPS-Oberfläche (a) sowie einer polierten Oberfläche (b) (gemessen gegen die Referenzelektrode).	31
3.18	Darstellung der gemessenen Kennlinie (bezogen auf die Abweichung vom Ruhepotential u) sowie der mit den Parametern aus Tabelle 3.3 bestimmten Kennlinie nach Gleichung (3.10).	33
4.1	Implantat im globalen kartesischen Koordinatensystem.	36
4.2	Darstellung der durch σ beschriebenen Oberfläche des Implantates $z = \sigma(x, y)$ (a) sowie den Bereich σ_E , in dem Stimulationselektroden positioniert werden können (b).	36
4.3	(a) Elektrodenanordnung bestehend aus zwei Stimulationselektroden. (b) & (c) Modelle mit einer einzelnen Stimulationselektrode zur näherungsweisen Berechnung der Feldverteilung der Anordnung aus (a).	38
4.4	(a) Bereich der gültigen Elektrodenpositionen σ_E mit den abgetasteten Elektrodenpositionen. (b) Abtastpunkte 3 mm über der Implantatoberfläche mit einem Abstand in x- und y-Richtung von 1 mm.	40
4.5	Interpolation des elektrischen Feldes am Punkt P einer nicht simulierten Elektrodenposition (rot) durch simulierte Elektrodenpositionen (blau).	42
4.6	Elektrostimulierendes Hüftimplantat mit einer Stimulationselektrode und Primärspule (Knochen als Drahtgittermodell) (a) und Ersatzschaltbild des Elektrostimulationssystems (b).	44
4.7	Erweitertes Ersatzschaltbild eines Elektrostimulationssystems mit N individuellen Stimulationselektroden auf der Implantatoberfläche. Dargestellt sind die Elemente der Stimulationselektroden i und j sowie die Elemente der Erregerspule.	45
4.8	Stromschleife mit dem Radius r_0	46
4.9	Dargestellt sind der k -te Kreisring der Spule i und die Fläche des m -ten Kreisringes der Spule j	47
4.10	Beispielhafte Zerlegung einer Spule in drei kurze Teilspulen.	49
4.11	Zur Erzeugung der Stützstellen der Interpolationsfunktion aus Gleichung (4.25) verwendete Elektrodenpositionen.	50
4.12	Ersatzschaltbild des Elektrostimulationssystems für die Berechnung im Frequenzbereich.	52

4.13	Ersatzschaltbild des Elektrostimulationssystems (zwei Stimulationselektroden dargestellt) und Knoten i markiert.	53
4.14	Prinzip der Kopplung von <i>NGSPICE</i> an <i>Mathematica</i>	56
4.15	Ersatzelement für ein CPE, bestehend aus Widerständen und Kondensatoren.	57
4.16	Ersatzmodell des Transferwiderstandes als anti-parallele Zusammenschaltung zweier Dioden.	58
5.1	Beispiel für eine Aufteilung der abgetasteten Region Ω in die Teilgebiete Ω_1 , Ω_2 und Ω_3	63
5.2	Darstellung des Abweichungswertes δ_j als Funktion der elektrischen Feldstärke an einem Punkt P_j innerhalb des Optimierungsgebietes Ω_i nach (5.1).	64
5.3	Darstellung des Abweichungswertes δ_j als Funktion der elektrischen Feldstärke an einem Punkt P_j innerhalb des Optimierungsgebietes Ω_i nach (5.2).	65
5.4	Darstellung des Abweichungswertes δ_j als Funktion der elektrischen Feldstärke an einem Punkt P_j innerhalb des Optimierungsgebietes Ω_i nach (5.3) ($E_{max} = 2E_{min}$).	66
5.5	Darstellung der Übernahmewahrscheinlichkeit für verschiedene T_i als Funktion der Abweichung $(f_{neu} - f_{alt})/f_{alt}$	70
5.6	Ermittelte Optima für verschiedene Gewichte in einem Zielfunktionsraum für ein Optimierungsproblem mit den Zielfunktionen f_1 und f_2	72
5.7	Beispiel für die Dominanzrelation aus (5.11) in einem zweidimensionalen Zielfunktionsraum	74
5.8	Beispiel für die Dominanzrelation aus (5.11) in einem zweidimensionalen Zielfunktionsraum.	78
5.9	Einteilung des Zielfunktionsraums aus Abbildung 5.8 in drei Fronten. Die erste Front (rot) dominiert die zwei nachfolgenden Fronten. Die zweite Front (grün) wird von der ersten dominiert und dominiert ihrerseits die Dritte, die durch das Element \vec{p}_6 gebildet wird.	79
5.10	Ermittlung der <i>Sharing-Distance</i> für das i -te Element einer Front in einem Zielfunktionsraum mit zwei Zielfunktionen.	80
5.11	Wahrscheinlichkeit für das i -te Individuum einer Population, während einer <i>Tournament</i> -Runde ausgewählt zu werden	82
5.12	Zwei Individuen \vec{p}_i und \vec{p}_j des Reproduktionspools in ihrer Darstellung als Parametervektor	83
5.13	Resultierende Individuen nach einer <i>Onepoint</i> -Kreuzung (a) und einer <i>Uniform</i> -Kreuzung (b)	84
5.14	(a) Einzelne Elektrodenanordnung \vec{p}_i aus dem Reproduktionspool. (b) Elektrodenanordnung nach der Mutationsoperation.	84
5.15	Platzierungswahrscheinlichkeit der markierten Elektrodenposition (blaues Kreuz).	86

Abbildungsverzeichnis

5.16 (a) Ungültige Elektrodenanordnung vor der Korrektur; (b) Korrigierte Elektrodenanordnung	87
5.17 Prinzip der verteilten Feldberechnung auf mehreren PCs.	90
6.1 Patientenspezifisches Simulationsmodell für die numerische Berechnung der einzelnen elektrischen Feldverteilung	94
6.2 Variante für eine Stimulationselektrode des Elektrostimulationssystems: (a) Einzelne Bestandteile und (b) zusammengefügte Elektrode.	95
6.3 (a) Bereich der gültigen Elektrodenpositionen σ_E mit den abgetasteten Elektrodenpositionen. (b) Abtastpunkte 3 mm über der Implantat-oberfläche mit einem Abstand in x- und y-Richtung von 1 mm.	96
6.4 (a) Beispiel für ein Simulationsmodell mit einer Stimulationselektrode. Der Hüftknochen sowie das umgebende Substitutmaterial sind nicht dargestellt. (b) Implantat im Knochen und (c) Diskretisierung im Bereich des Implantats (äquidistantes Gitter mit einer Kantenlänge von 0.5 mm).	97
6.5 Elektrische Feldverteilung einer Stimulationselektrode aus der Simulation des Modells aus Abbildung 6.4(a).	99
6.6 Betrag und Phase der CP-Elemente des Materialübergangs Elektrodenkappe/Knochen für eine polierte Titanoberfläche (a) sowie für eine VPS-beschichtete Titanoberfläche (b).	100
6.7 Kennlinien der für das Beispiel bestimmten Transferwiderstände (a) R_{CT1} , (b) R_{CT2} (polierte Titankappe) und (c) R_{CT2} (VPS-beschichtete Titankappe) sowie Kennlinien der ohmschen Widerstände aus der Linearisierung.	102
6.8 Darstellung der Zielfunktionsregionen Ω_1 und Ω_2 . Abtastpunkte innerhalb des Verankerungszapfens und in Bereichen, die nicht im Knochen liegen, wurden entfernt.	103
6.9 Implantat und Primärspule im globalen Koordinatensystem. Der Knochen ist als Drahtgittermodell dargestellt.	104
6.10 Magnetische Flussdichte $ \vec{B}(r, z) $ der Primärspule ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$).	105
6.11 (a) Elektrostimulierendes Hüftimplantat mit einer Stimulationselektrode und Primärspule (Knochen als Drahtgittermodell). (b) Ersatzschaltbild des Elektrostimulationssystems.	106
6.12 Widerstand zwischen der Elektrodenkappe und dem Implantat, primär gebildet durch die <i>Substantia Spongiosa</i> bei einer Leitfähigkeit von $\kappa = 0,15 \text{ S/m}$	107
6.13 Implantat mit vier Stimulationselektroden auf der Oberfläche.	108
6.14 Elektrisches Feld im abgetasteten Gebiet Ω für eine Elektrodenanordnung mit vier Stimulationselektroden (a). Relative Abweichung δ vom Sollwert der elektrischen Feldstärke (b).	109
6.15 Zielfunktionsraum des beschriebenen Optimierungsproblems.	110

6.16	Darstellung der ermittelten Approximationen der Pareto-Menge für Elektrodenanordnungen mit drei (blau), vier (violett) und fünf (gelb) Stimulationselektroden.	111
6.17	Elektrisches Feld im abgetasteten Gebiet Ω für eine Elektrodenanordnung mit fünf Stimulationselektroden (a). Relative Abweichung δ vom Sollwert der elektrischen Feldstärke (b).	112
6.18	Wirbelstromdichte (und elektrische Feldstärke) an den Abtastpunkten.	114
6.19	Relativer Fehler des mit dem entwickelten Ansatz berechneten elektrischen Feldes.	115
6.20	Impedanz der CP-Elemente und der angepassten RC-Ketten der Materialgrenzen Elektrodenkappe/Knochen ((a) Betrag und (b) Phase) und Knochen/Implantat ((c) Betrag und (d) Phase).	117
6.21	Berechnete Potentiale u_1 bis u_4 im Zeitbereich (u_2 und u_4 liegen übereinander).	118
6.22	Spannungsabfälle über den Materialgrenzen im zeitlichen Verlauf.	118
6.23	(a) Zeitdauer T_i für einen vollständigen Iterationsschritt des Optimierungszyklus in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Rechenkernen i . (b) Geschwindigkeitsgewinn k in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Rechenkernen.	120
A.1	Hüftknochen mit ausgefrästem Hüftlager, extern gespeister Stimulationselektrode und Implantat (ohne Verankerungszapfen).	126
A.2	(a) Fixierter humaner Beckenknochen mit eingesetztem geerdetem Implantat, vorbereitet zur Messung der Potentialverteilung im Knocheninneren. (b) Messung der Potentialverteilung an den Messpunkten mittels Messspitze und Messarm.	127
A.3	Messfeld mit vorgebohrten Messlöchern zur Bestimmung des elektrischen Potentials.	127
A.4	Darstellung des elektrischen Potentials auf der Knochenoberfläche.	128
A.5	Vergleich Messung und Simulation 2 mm im Knochen.	129
A.6	Vergleich Messung und Simulation 7 mm im Knochen.	130
A.7	Darstellung der Zielfunktionsregionen Ω_1 und Ω_2 . Abtastpunkte innerhalb des Verankerungszapfens und in Bereichen, die nicht im Knochen liegen, wurden entfernt.	132
A.8	Darstellung der ermittelten Approximationen der Pareto-Menge für die Zielfunktionsregionen aus (A.1).	133
A.9	Darstellung der Abweichung an den Abtastpunkten δ für die Elektrodenanordnungen (a) \vec{p}_1 und (b) \vec{p}_2	134
A.10	Stromfaden im Raum.	135
A.11	Elliptische Leiterschleife (blau) und angenäherter Polygonzug (rot).	137
A.12	Vergleich der magnetischen Flussdichte einer kreisförmigen Leiterschleife (rot) mit der Flussdichte eines Polygonzuges mit fünf (grün) beziehungsweise 25 Elementen (blau, gestreift).	138
A.13	Implantat mit Evaluationskurve auf der Oberfläche.	139

Abbildungsverzeichnis

A.14 Magnetische Flussdichte entlang der Kurve aus Abbildung A.13 der originalen kreisförmigen Spule (Original), aus der niederfrequenten Wirbelstromsimulation (Sim. LF) sowie mit zusätzlichen Leiterschleifen (Modifiziert).	140
A.15 Einzelne Schritte zur Optimierung eines elektrostimulativen Hüftgelenkimplantats.	141

Tabellenverzeichnis

3.1	Elektrische Leitfähigkeiten der in den Simulationen vorkommenden Materialien.	19
3.2	Ermittelte Parameter des CP-Elemente (K , β) und der Passivierungs- widerstände für die VPS-beschichtete und polierte Titanoberfläche.	29
3.3	Transferstrom i_0 , Transferstromdichte j_0 , Transferkoeffizienten α_1 und α_2 sowie Gleichgewichtsspannung U_{eq} der VPS-beschichteten und polierten Titanoberfläche.	32
5.1	Dominanz der einzelnen Elektrodenanordnungen aus Abbildung 5.8.	78
6.1	Elektrische Leitfähigkeiten der in den Simulationen vorkommenden Materialien.	93
6.2	Maße der Stimulationselektrode aus Abbildung 6.2.	96
6.3	Geeignete Startwerte für die zu spezifizierenden Parameter des mehr- dimensionalen evolutionären Optimierungsalgorithmus.	113
6.4	Fourieranalyse der berechneten Spannungsabfälle aus der transienten Simulation.	119

Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung	Einheit
j	imaginäre Einheit; $j^2 = -1$	
α	Durchtrittsfaktor der Butler-Volmer-Gleichung	
β	Phasenparameter des Constant-Phase-Elements	
\underline{I}	Strom im Frequenzbereich	A
\underline{U}	Spannung im Frequenzbereich	V
\underline{Z}	Impedanz	V/A
δ	Abweichung vom Sollwert	
κ	spezifische Leitfähigkeit	$A/(Vm)$
μ_0	Permeabilität des Vakuums; $4\pi \cdot 10^{-7}$	$Vs/(Am)$
μ_r	relative Permeabilität	
\vec{A}	Magnetisches Vektorpotential	Vs/m
\vec{B}	magnetische Flussdichte	Vs/m^2
\vec{D}	elektrische Flussdichte	As/m^2
\vec{E}	elektrische Feldstärke	V/m
\vec{H}	magnetische Feldstärke	A/m
\vec{J}	Stromdichte	A/m^2
\vec{p}	Elektrodenanordnung	
\vec{r}	Ortsvektor	m
Ω	Zielregion	
ω	Kreisfrequenz; $\omega = 2\pi f$	$1/s$
σ_E	Bereich zur Positionierung der Stimulationselektroden	

ε_0	Permittivität des Vakuums; $8,8542 \cdot 10^{-12}$	$As/(Vm)$
ε_r	relative Permittivität	
φ	Elektrisches Skalarpotential	V
ϱ	Spezifischer elektrischer Widerstand	Ωm
C	Kapazität	As/V
F	Faraday-Konstante	As/mol
f	Frequenz	$1/s$
$i(t)$	Strom im Zeitbereich	A
j_F	Faradaysche Stromdichte	A/m^2
K	Amplitude des Constant-Phase-Elements	Ω
L	Eigeninduktivität	Vs/A
M	Gegeninduktivität	Vs/A
R	Ohmscher Widerstand	V/A
R_g	Gaskonstante	$J/(mol K)$
T	Absolute Temperatur	K
$u(t)$	Spannung im Zeitbereich	V

1 Einleitung

In der Orthopädie werden verschiedene Elektro-Stimulationsverfahren zur Therapie von Knochenheilungsstörungen eingesetzt [Kra84]. Bei diesen Verfahren wird durch ein extern appliziertes elektromagnetisches Feld eine natürliche funktionale Belastung des stimulierten Knochens nachgeahmt, was verschiedene zelluläre Reaktionen des Knochengewebes induziert [AB93, DSSI02] und so dessen Regeneration beschleunigt. In dieser Arbeit soll die Möglichkeit untersucht werden, ein elektrostimulatives System in ein Hüftgelenkimplantat zu integrieren, um den Einheilungsprozess zu verbessern. Eine aus medizinischer Sicht positive Implantation eines künstlichen Hüftgelenks bedingt das gute Einwachsen des umgebenden Knochenmaterials in das Implantat. Dies stellt die mechanische Stabilität und somit die erforderliche Prothesenbelastbarkeit sicher. Dennoch kommt es bei einigen Patienten zu wiederholten Beschwerden, welche auf ein mangelhaftes Einwachsen des Knochens in die Implantatoberfläche zurückzuführen ist. Hier besteht die Hoffnung, dass diesen Patienten mit einer speziellen Prothese geholfen werden kann, die ihr eigenes Einwachsen mittels eines von ihr erzeugten elektrischen Feldes stimuliert.

1.1 Motivation

Seit den 80er Jahren werden kleinere Frakturen und Knochendefekte unterstützend durch eine elektrostimulative Therapie behandelt. Hierbei wird das Knochenwachstum durch ein elektrisches Wechselfeld stimuliert. Dies führt im Stimulationsgebiet zu einer erhöhten Zellproliferation, verbesserter Zelldifferenzierung und einer erhöhten Knochengewebebildung [AB93, DSSI02]. Verschiedene Studien haben gezeigt, dass die Frakturheilung durch die Applikation eines elektrischen Feldes positiv beeinflusst werden kann [ACS04]. Dies geht soweit, dass bei Patienten mit nicht verheilenden Frakturen ein positiver Heilungsprozess in Gang gesetzt werden kann [ACS04]. Es besteht nun die Hoffnung, dass dieses elektrostimulative Verfahren auf großflächige Endoprothesen, wie künstliche Hüftpfannen übertragen werden kann. Um den Therapieerfolg zu maximieren, ist es wünschenswert, die Verteilung des elektrischen Feldes im umgebenden Knochen beeinflussen zu können, um an verschiedenen Orten im Knochen unterschiedliche elektrische Feldstärken zu erzeugen und so das Einwachsen gezielt beeinflussen zu können. Für den Entwurf und die Optimierung des Systems muss die elektrische Feldverteilung im Stimulationsareal mittels numerischer Simulationen evaluiert werden. Dabei werden neben spezifischen anatomischen Geometriemodellen auch die elektrischen Materialeigenschaften des Knochens, sowie des umgebenden Gewebes benötigt.

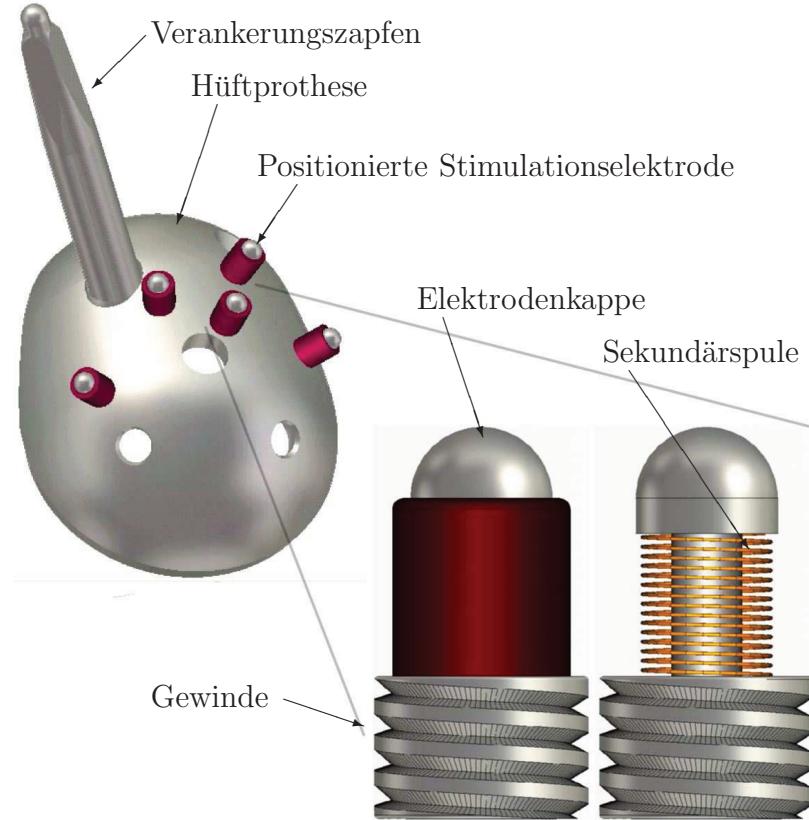


Abbildung 1.1: Hüftgelenksendoprothese mit Verankerungszapfen, mehreren Stimulationselektroden und eingelegten Sekundärspulen.

1.2 Idee des induktiv gekoppelten Elektrostimulationssystems

Das geplante Elektrostimulationssystem basiert auf dem Prinzip der induktiven Elektrostimulation [Kra84]. Hierbei werden in das zu stimulierende Areal eine oder mehrere Spulen und Stimulationselektroden operativ implantiert. Eine sich außerhalb des Patienten befindliche Primärspule erzeugt ein mit der Stimulationsfrequenz oszillierendes Magnetfeld. Dieses induziert in den implantierten Spulen eine Spannung und führt somit zu einem Stromfluss durch das leitfähige Knochenmaterial. Durch die Anzahl und Positionierung der stimulierenden Elektroden kann die Feldgeometrie beeinflusst werden, um in unterschiedlichen Bereichen verschiedene elektrische Feldstärken zu erzeugen. Um dieses System nun auf ein Hüftgelenkimplantat zu übertragen, muss das System aus Spulen und Stimulationselektroden in die bestehende Form einer Hüftgelenksendoprothese integriert werden.

Abbildung 1.1 zeigt eine Darstellung der Hüftpfanne mit mehreren Stimulationselektroden und gekapselten Sekundärspulen. Ziel ist es, einen bereits existierenden Prototyp einer Hüftpfanne [Klü08] mit mehreren Stimulationselektroden auszustatten.

ten [KSB08, PGS08]. Diese Stimulationselektroden werden nach dem Einsetzen der künstlichen Hüftpfanne in den Beckenknochen in die Prothese eingeschraubt, wobei über das metallene Gewinde eine galvanische Verbindung zwischen dem Prothesenkörper und der unteren Elektrodenhälfte entsteht. In der verschraubten Endposition ragt der runde metallische Elektrodenkopf in den Knochen. Die eingelegte Sekundärspule kontaktiert sowohl das Schraubgewinde als auch die Elektrodenkappe, die sich im Knochen befindet. Hierbei sollte nach Möglichkeit auf einen ferromagnetischen Kern verzichtet werden, um die medizinische Zulassung zu vereinfachen [Pri09] und weiterhin die Anwendung von Bildgebungsverfahren wie der Magnetresonanztomographie zu ermöglichen.

Zur Applikation der elektrostimulativen Therapie platziert der Patient eine Spule um seinen Oberschenkel im Hüftbereich. Diese erzeugt ein magnetisches Wechselfeld, welches eine Spannungsdifferenz zwischen der Elektrodenkappe und der Oberfläche des Implantats induziert. Somit bildet sich ein elektrisches Feld im Knochen aus, welches ihn in diesem Bereichen stimulieren soll. Im Verlauf mehrerer Wochen nach der Implantation wird diese Stimulationssprozedur mehrmals die Woche durchgeführt, um in dieser kritischen Zeit das Einwachsen des neuen Implantates zu fördern [Pri09].

1.3 Zielsetzung

Wie bereits angesprochen wurde, ist es nötig das elektrostimulierende Implantat im Hüftknochen numerisch zu simulieren, um die sich einstellende elektrische Feldverteilung zu evaluieren. Auf dieser Basis soll dann eine Optimierung des Stimulationssystems erfolgen, um den therapeutischen Erfolg zu maximieren. Somit ist es zunächst erforderlich, die elektrische Feldverteilung, die eine Anordnung von Stimulationselektroden im umgebenden Knochen erzeugt, mit der nötigen Genauigkeit zu berechnen. Hierbei müssen neben den spezifischen geometrischen und elektrischen Eigenschaften des Knochens auch die Prozesse an den Materialgrenzen zwischen Knochen und dem Implantatmaterial berücksichtigt werden. Da die numerische Feldberechnung auch als Grundlage für eine nachfolgende Optimierung dienen soll, muss die Feldberechnung möglichst effektiv gestaltet werden, um den nötigen Zeitaufwand in einem überschaubaren Rahmen zu halten.

Ziel dieser Arbeit ist, ein geeignetes Verfahren zu entwickeln, das es in möglichst uneingeschränkter Weise ermöglicht, die elektrostimulative Prothese und dabei speziell die von ihr erzeugte elektrische Feldverteilung unter medizinisch begründeten Vorgaben zu optimieren. Dies setzt natürlich eine gewisse Abstraktion des eigentlichen Problems voraus, um das Anwendungsspektrum nicht zu sehr einzuschränken. Der Fokus dieser Arbeit liegt klar auf der schnellen Berechnung und Optimierung von elektrischen Feldern im Knochen. Auf die medizinischen Wirkmechanismen der Elektrostimulation kann und soll nicht eingegangen werden. Weiterhin soll in dieser Arbeit keine Bewertung des Verfahrens der Elektrostimulation unter medizinischen Aspekten vorgenommen werden. Stattdessen soll versucht werden, die aus der medizinischen Literatur bekannten Stimulationssparameter bezüglich der Stimulationsfre-

quenz und der benötigten elektrischen Feldstärke auf die zu optimierende elektrostimulative Prothese zu übertragen. In der medizinischen Literatur werden verschiedene Stimulationsschemen vorgeschlagen. Für die niederfrequenten Elektrostimulation befindet sich die Stimulationsfrequenz üblicherweise in einem Intervall zwischen 10 Hz [SAU02] und 100 Hz [KSS09] und einer elektrischen Feldstärke in der Größenordnung von 1 V/m im Knochen [BWS01].

1.4 Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in insgesamt sieben Kapitel und einen Anhang. Kapitel 2 befasst sich mit den Grundlagen der Elektrodynamik soweit sie im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden. Im Anschluss werden in Kapitel 3 die grundlegenden elektrischen Eigenschaften des Verbundes aus Implantat, Stimulationselektroden und des umgebenden Knochens untersucht. In Kapitel 4 wird ein hybrider Ansatz zur schnellen Berechnung des elektrischen Feldes im Frequenz- und Zeitbereich vorgestellt. Kapitel 5 behandelt die Optimierung der Elektrodenanordnung auf der Oberfläche der Prothese. Hierbei werden mehrere Optimierungsalgorithmen auf ihre Eignung zur Optimierung der elektrischen Feldverteilung untersucht. Im sechsten Kapitel werden die Methoden der vorherigen Kapitel an einem Beispiel erprobt. Dabei wird das Elektrostimulationssystem anhand eines plausibel gewählten Beispiels optimiert. Abschließend gibt Kapitel 7 eine Zusammenfassung der Arbeit, sowie einen Ausblick auf die zukünftige Vorgehensweise. In den Anhängen findet der Leser einen Vergleich einer numerisch berechneten mit einer messtechnisch ermittelten elektrischen Feldverteilung in einem Hüftknochen, ein weiteres Optimierungsbeispiel sowie ein Verfahren, um das magnetische Feld beliebig geformter Spulen näherungsweise zu berechnen.

2 Grundlagen

2.1 Die Maxwell-Gleichungen

2.1.1 Integrale und differentielle Form

Der Begriff des Elektromagnetismus ist heute untrennbar mit James Clerk Maxwell verbunden, der 1865 eine Theorie zur Beschreibung elektrischer und magnetischer Felder vorstellte [Max65]. An dieser Stelle soll jedoch weder auf die formale noch historische Entwicklung der Maxwell-Gleichungen eingegangen werden. Vielmehr soll in kurzer Form die Grundlage der Theorie des klassischen Elektromagnetismus umrissen werden, insofern sie für diese Arbeit benötigt wird. Die hierzu nötigen Gleichungen sollen dabei als axiomatisch vorausgesetzt werden. Der experimentelle Nachweis und eine vollständigere Beschreibung kann aus einer Vielzahl von Büchern zum Thema klassische Elektrodynamik entnommen werden ([JW06, Sim93]).

Die Verknüpfung der elektrischen und magnetischen Feldstärke (\vec{E} und \vec{H}) sowie der Flussdichten des elektrischen und magnetischen Feldes (\vec{D} und \vec{B}) werden durch folgenden Gleichungssatz formal beschrieben:

$$\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.1)$$

$$\iint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV \quad (2.2)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.3)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} + \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (2.4)$$

Die Gleichungen (2.1) und (2.2) beschreiben die Quellen des magnetischen beziehungsweise elektrischen Feldes. Dabei wird die elektrische und die magnetische Flussdichte über die geschlossene Oberfläche eines Raumgebietes V integriert. Für die magnetische Flussdichte folgt, dass der Fluss durch jede geschlossene Oberfläche eines Volumens V null ist. Dieses ergibt sich aus der Tatsache, dass magnetische Felder reine Wirbelfelder sind und keine freien magnetischen Ladungen existieren (zumindest nach dem derzeitigen Erkenntnisstand). Für die elektrische Flussdichte folgt, dass der Fluss durch die Oberfläche eines Volumens gleich der gesamten eingeschlossenen Ladungsmenge ist.

Die Gleichungen (2.3) und (2.4) beschreiben die gegenseitige Kopplung des elektrischen und des magnetischen Feldes. Sie können so interpretiert werden, dass zeit-

2 Grundlagen

veränderliche magnetische Felder elektrische Wirbelfelder erzeugen und elektrische Felder ihrerseits magnetische Wirbelfelder erzeugen. Aus dieser gegenseitigen Verkopplung folgt, dass die Maxwell-Gleichungen auch Lösungen vom Typ einer Wellengleichung enthalten.

Zusätzlich zu den Feldstärken und Flussdichten werden die sogenannten Materialgleichungen benötigt. Diese verknüpfen die elektrische Feldstärke mit der elektrischen Flussdichte sowie die magnetische Feldstärke mit der magnetischen Flussdichte. Für linear isotrope Medien gilt:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (2.7)$$

Hier bezeichnet \vec{J} die elektrische Leitungsstromdichte in einem leitfähigen Medium. Die Größe κ wird als Leitfähigkeit bezeichnet und ist, wie ε_r und μ_r , ein materialspezifischer Parameter. Durch die Nichtexistenz freier magnetischer Ladungen existiert keine magnetische Stromdichte \vec{J}_M in Analogie zur elektrischen Stromdichte \vec{J} . Die Größen ε_0 und μ_0 werden als Permittivität und Permeabilität des Vakuums bezeichnet und sind fundamentale physikalische Größen.

Mit den Integralsätzen von Gauß:

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (2.8)$$

und Stokes:

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

können die integralen Maxwell-Gleichungen (2.1)-(2.4) in eine differentielle Darstellung überführt werden:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (2.13)$$

Die Gleichungen (2.1)-(2.4) beziehungsweise (2.10)-(2.13) sind die allgemeinste Formulierung makroskopischer elektromagnetischer Felder und Wellen. Es lassen sich allerdings Vereinfachungen für Spezialfälle vornehmen.

2.1.2 Maxwell-Gleichungen für harmonische Anregung

Zunächst sollen hier die Maxwell-Gleichungen für den Fall einer harmonischen Anregung betrachtet werden. Ein beliebiges zeitabhängiges Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}, t)$ lässt sich im Fall harmonischer Anregung wie folgt notieren:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}. \quad (2.14)$$

Hierbei beschreibt $\vec{F}(\vec{r})$ die räumliche Verteilung des Vektorfeldes \vec{F} . Die zeitliche Abhängigkeit wird durch den Term $e^{j\omega t}$ beschrieben, wobei $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit und ω die Kreisfrequenz der Anregung bezeichnen. Mit diesem Ansatz können die zeitlichen Ableitungen aus den Gleichungen (2.3) und (2.4) sowie (2.12) und (2.13) in einfacher Weise ausgeführt werden und die Maxwell-Gleichungen für harmonische Erregung notiert werden:

$$\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} \cdot d\underline{s} = -j\omega \iint_A \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \quad (2.15)$$

$$\oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \cdot d\underline{s} = \iint_A (j\omega \underline{\vec{D}} + \underline{\vec{J}}) \cdot d\vec{A}, \quad (2.16)$$

sowie

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \quad (2.17)$$

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = j\omega \underline{\vec{D}} + \underline{\vec{J}}. \quad (2.18)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Feldgrößen nun neben einer Amplitude eine zusätzliche Phaseninformation tragen. Zur Unterscheidung von harmonischen Feldern und allgemeinen Feldern mit beliebiger Zeitabhängigkeit werden Feldgrößen im harmonischen Fall mit einem Unterstrich gekennzeichnet.

2.1.3 Elektro-quasistatische und magneto-quasistatische Formulierung

Für lineare isotrope Materialien können die Gleichungen (2.17) und (2.18) wie folgt formuliert werden:

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j\omega \mu \underline{\vec{H}} \quad (2.19)$$

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = (j\omega \varepsilon + \kappa) \underline{\vec{E}}. \quad (2.20)$$

Unter der Bedingung, dass die Leitfähigkeit κ wesentlich größer ist als $\omega \varepsilon$, also:

$$\frac{\omega \varepsilon}{\kappa} \ll 1 \quad (2.21)$$

kann Gleichung (2.20) näherungsweise geschrieben werden als:

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \kappa \underline{\vec{E}}. \quad (2.22)$$

Diese Näherung wird als magneto-quasistatische Formulierung bezeichnet. Kann hingegen die magnetische Induktion vernachlässigt werden, so kann die Gleichung (2.19) als:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (2.23)$$

geschrieben werden. Dieser Vereinfachung wird als elektro-quasistatische Näherung bezeichnet [van01]. Betrachtungen zur Gültigkeit der elektro-quasistatischen und magneto-quasistatischen Formulierungen können in [SKC09] nachvollzogen werden.

2.1.4 Elektrisches Skalarpotential und magnetisches Vektorpotential

Die Wahl eines Lösungsverfahrens der Maxwell-Gleichungen für eine gegebene Problemstellung hängt im Wesentlichen von den möglichen sich ergebenden Vereinfachungen ab. Im Fall zeitlich stationärer oder langsam veränderlicher Felder kann die zeitliche Änderung des elektrischen und magnetischen Feldes vernachlässigt werden. Dies ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung des Wellencharakters zeitveränderlicher elektromagnetischer Felder und gültig, wenn die Wellenlänge der korrespondierenden elektromagnetischen Welle im Medium wesentlich größer ist als die Ausdehnung des betrachteten Gebietes. Die Gleichungen (2.12) und (2.13) vereinfachen sich somit zu:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (2.24)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}. \quad (2.25)$$

Nach dem Satz vom Helmholtz [KMR04] lässt sich (fast) jedes Vektorfeld in ein reines Wirbelfeld sowie ein Quellenfeld zerlegen, wobei das Wirbelfeld als Rotation eines Vektorpotentials und das Quellenfeld als Gradient eines skalaren Potentials aufgefasst werden kann. Für das elektrische Feld kann mittels des Ansatzes:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (2.26)$$

und unter der Bedingung, dass die Permittivität im gesamten Raum divergenzfrei ist ($\operatorname{div} \varepsilon(\vec{r}) = 0$), die Poisson-Gleichung abgeleitet werden [JW06]:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Für ladungsfreie Raumgebiete $\rho = 0$ vereinfacht sich die Poisson-Gleichung zur Laplace-Gleichung:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.28)$$

Für das magnetische Feld kann mit dem Ansatz:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (2.29)$$

aus Gleichung (2.25) das magnetische Vektorpotential:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.30)$$

hergeleitet werden. Hierbei wurde die für statische und quasistatische Felder gebräuchliche Coulomb-Eichung ($\operatorname{div} \vec{A} = 0$) verwendet, um die Divergenz des Vektorpotentials zu definieren.

2.2 Numerische Formulierung

Im Allgemeinen sind die meisten Problemstellungen jedoch zu komplex, um die Maxwell-Gleichungen analytisch auszuwerten. Dies hat die Entwicklung einer ganzen Reihe von Verfahren zur näherungsweisen numerischen Lösung der Maxwell-Gleichungen begünstigt. Bei einem dieser Verfahren handelt es sich um die *Theorie der Finiten Integration ("Finite Integration Theory", FIT)* [Wei77, van01], welche die Maxwell-Gleichungen in ein algebraisches Gleichungssystem transformiert. Im Rahmen dieser Arbeit werden die nötigen Feldsimulationen, die für die hier beschriebene Optimierungsaufgabe erforderlich sind, mit einer erweiterten kommerziellen Implementierung des *FIT*-Ansatzes (*Conformal-FIT* [CW02]) durchgeführt. Daher soll nicht weiter auf dieses Verfahren eingegangen werden.

3 Zur Modellierung des Hüftimplantat-Beckenknochen-Verbundes

3.1 Das menschliche Becken

3.1.1 Anatomie

In diesem Abschnitt wird in kurzer Form die Anatomie des menschlichen Beckens als Grundlage für das spätere Simulationsmodell beschrieben. Hierbei liegt das Hauptaugenmerk auf dem strukturellen Aufbau. Die biologischen und mechanischen Eigenschaften befinden sich nicht im Fokus der Arbeit und werden daher nicht weiter betrachtet. Der interessierte Leser sei für weiterführende Literatur an Werke der Medizin verwiesen (zum Beispiel [Gra00]).

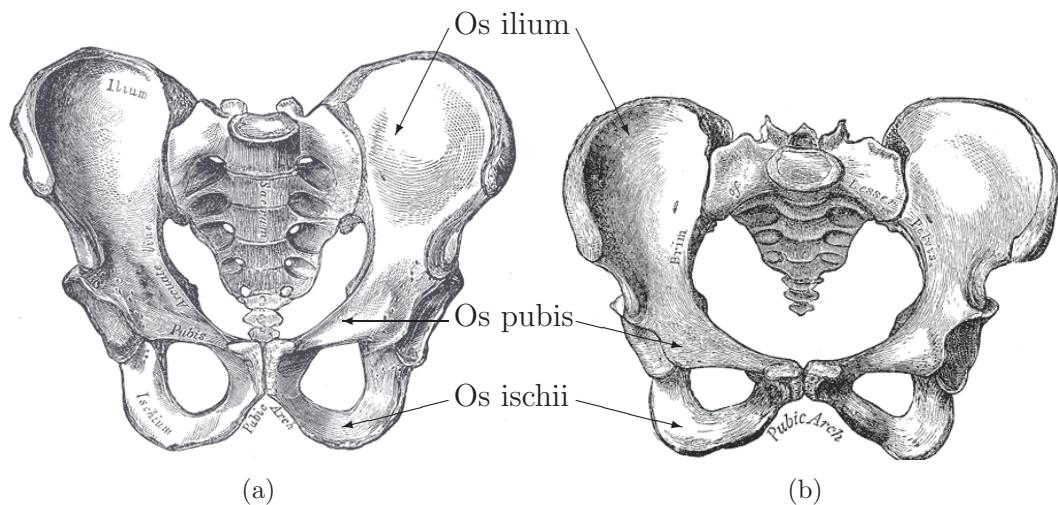


Abbildung 3.1: Männliches (a) und weibliches (b) humanes Becken (entnommen aus [Gra00]).

Abbildung 3.1 zeigt die knöcherne Struktur eines männlichen (a) und eines weiblichen (b) Beckens. Die dargestellten Becken bestehen aus je zwei schaufelförmigen Knochen, die Hüftbeine (Os coxae) genannt werden. Jedes Hüftbein ist seinerseits aus drei Anteilen zusammengesetzt: Dem Darmbein (Os ilium), dem Sitzbein (Os ischii) und

3 Zur Modellierung des Hüftimplantat-Beckenknochen-Verbundes

dem Schambein (Os pubis). Diese Knochenteile verwachsen während der Pubertät zu einer festen Knochenstruktur. In der Hüftgelenkspfanne (Acetabulum) treffen die drei Knochenbestandteile zusammen und formen eine kalottenförmige Vertiefung, die dem Femurkopf (Endstück des Oberschenkelknochens) als natürliches Gegenlager dient.

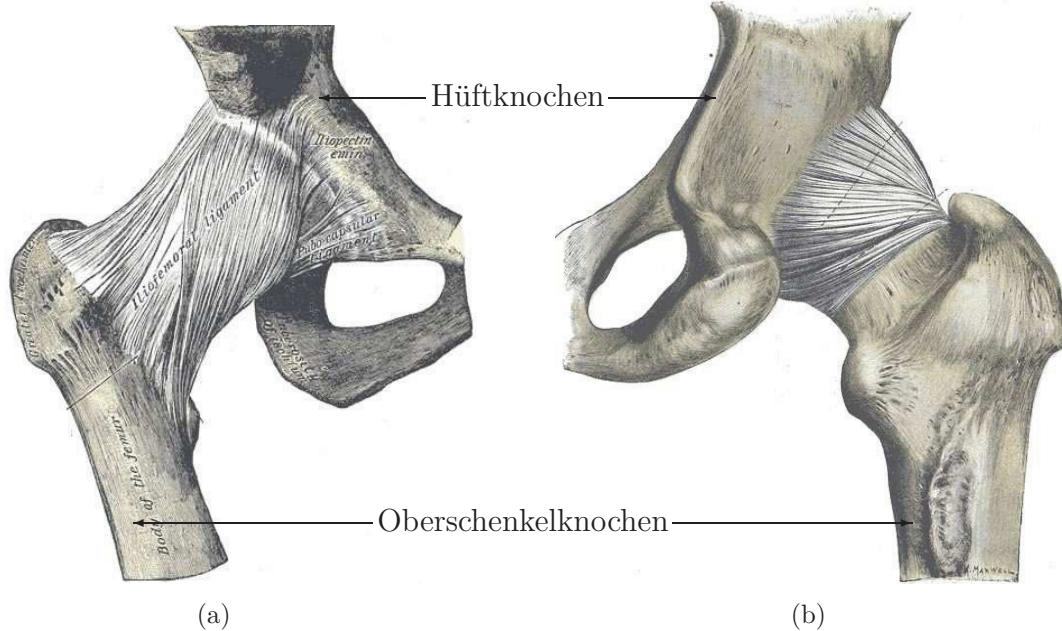


Abbildung 3.2: Hüftgelenk in Vorder- (a) und Rückansicht (b) (entnommen aus [Gra00]).

Abbildung 3.2 zeigt ein menschliches Hüftgelenk in Vorder- (a) und Rückansicht (b). Der Oberschenkelknochen wird durch eine Reihe von Bändern mit dem Hüftknochen verbunden, die den Femurkopf im Acetabulum halten [Gra00]. Dieser Bereich wird mechanisch besonders belastet und ist somit anfällig für verschiedene Abrasionerscheinungen. In Kombination mit genetischer Prädisposition oder Osteoporose kann es zu einer übermäßigen Abnutzung kommen. Je nach Schwere des Knochendefektes muss das natürliche Gegenlager durch ein künstliches verstärkt werden, um die mechanische Stabilität und die gewohnte Bewegungsfreiheit wiederherzustellen.

Die Hüftknochen bestehen aus zwei abgrenzbaren Bereichen [Gra00] (beispielhaft dargestellt in Abbildung 3.3). Der innere Bereich, *Substantia Spongiosa* genannt, besteht aus einem Geflecht von verbundenen Bälkchen (Trabekel), deren Zwischenräume mit Knochenmark und Körperflüssigkeit gefüllt sind. Dieser innere Bereich des Knochens ist von einer etwa 1 mm dicken Schicht umhüllt, welche *Komposta* oder *Substantia Corticalis* genannt wird und dem Knochen seine mechanische Stabilität verleiht. Die beiden Bereiche unterscheiden sich hinsichtlich ihrer elektrischen Eigenschaften und müssen daher getrennt betrachtet werden [Pot08].

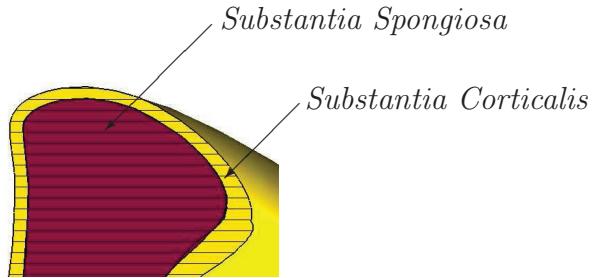


Abbildung 3.3: Querschnitt eines modellierten Knochens, bestehend aus zwei abgegrenzten Bereichen.

3.2 Simulationsmodelle

3.2.1 Geometrie

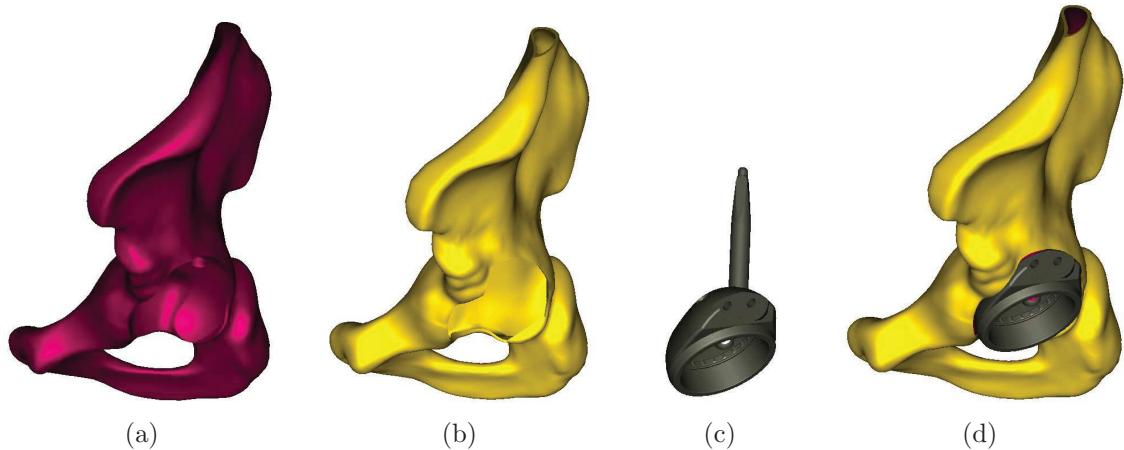


Abbildung 3.4: Teile eines Simulationsmodells: *Substantia Spongiosa* (a), *Substantia Corticalis* (b), Endoprothese (c) sowie zusammengesetztes Modell (d).

Ziel dieser Arbeit ist es, ein elektrostimulierendes Hüftgelenkimplantat zu simulieren, um dieses im Anschluss einer Optimierung zu unterziehen. Hierfür müssen zunächst geeignete Simulationsmodelle generiert werden, um das elektrische Feld innerhalb des Hüftknochens numerisch berechnen zu können. Es müssen also der Hüftknochen, das eigentliche Implantat sowie das umgebende Gewebe geeignet modelliert werden. Die einzelnen Arbeitsschritte zur Modellgenerierung wurden bereits in [Pot08] abgehandelt. Daher soll hier auf eine umfassende Beschreibung verzichtet und nur die wichtigsten Eckdaten des Modells aufgezeigt werden.

3 Zur Modellierung des Hüftimplantat-Beckenknochen-Verbundes

Die Modelle des Hüftknochens werden aus CT-Aufnahmen¹ rekonstruiert [Klü08] und mittels CAD-Software weiter bearbeitet, um einen inneren Kern sowie eine etwa 1 mm dicke äußere Schale zu erzeugen [Pot08]. Dieses Modell gibt dann die patientenspezifische Geometrie des Hüftknochens wieder. Das Modell des Implantates wird aus CAD-Daten eines bereits hergestellten Prototypen erzeugt. Abbildung 3.4 zeigt die Modelle der *Substantia Spongiosa* (a) und der *Substantia Corticalis* (b) für einen Hüftknochen, ein Modell der Endoprothese (c) und ein zusammengefügtes Simulationsmodell (d).

3.2.2 Elektrische Materialeigenschaften

Neben der geometrischen Struktur sind vor allem die elektrischen Materialeigenschaften aus den Materialgleichungen ((2.5)-(2.7)) für die numerische Simulation der elektromagnetischen Feldverteilung im Knochen von entscheidender Bedeutung. Es werden also für jedes Material im Simulationsgebiet die Größen relative Permittivität ϵ_r , relative Permeabilität μ_r und elektrische Leitfähigkeit κ benötigt.

Zuerst soll festgestellt werden, dass im gesamten Modell keine magnetischen Materialien zum Einsatz kommen. Daher kann im gesamten Simulationsgebiet $\mu_r = 1$ angenommen werden. Die elektrische Leitfähigkeit der verwendeten Materialien unterscheidet sich zum Teil erheblich: Das Implantat wird aus einer Titan-Legierung hergestellt, die eine Leitfähigkeit von $5,65 \cdot 10^6$ S/m aufweist [MAT10]. Die elektrischen Eigenschaften des Knochengewebes sind jedoch ungleich schwieriger anzugeben, als die des Implantatmaterials. Daher sollen zunächst Daten aus der Literatur sowie aus eigenen Messungen² zusammengetragen werden, um die wichtigsten Eigenschaften zu ermitteln.

Gabriel et al. haben in einer Reihe von Publikationen [GGC96, GLG96a, GLG96b] eine umfangreiche Sammlung von elektrischen Materialparametern für biologische Gewebe zusammengetragen. Im ersten Beitrag der Reihe ([GGC96]) wurden bestehende Messwerte aus verschiedenen Literaturquellen gesammelt und gegenübergestellt. Dieser Beitrag liefert einen Überblick über die verfügbaren Messdaten zu den elektrischen Eigenschaften von biologischem Gewebe, die bis 1995 publiziert wurden.

In [GLG96a] wurden die Ergebnisse eigener Messungen präsentiert und mit den Daten aus der Literaturrecherche ([GGC96]) verglichen. Hierbei sind die elektrischen Eigenschaften der *Substantia Spongiosa* und der *Substantia Corticalis* für ein Frequenzintervall von 100 MHz bis 10 GHz angegeben und somit im Rahmen dieser Arbeit nicht verwendbar. Im dritten Teil ihrer Beitragsserie [GLG96b] befassen sich Gabriel

¹Bei der Computertomographie (CT) handelt es sich um ein bildgebendes Verfahren aus der Medizintechnik. Hierbei werden von einem abzubildenden Volumen eine Vielzahl von Röntgenaufnahmen aus unterschiedlichen Winkeln angefertigt. Aus diesen kann im Anschluss eine dreidimensionale Abbildung erzeugt werden.

²Die Messungen wurden im Rahmen des DFG-Projektes „Modellbildung und Simulation der Feldverteilung von großflächigen elektrostimulierenden Implantaten für die Orthopädische Chirurgie“ (RI 814/17-1) durchgeführt.

et al. mit verschiedenen Modellen zur näherungsweisen Beschreibung der elektrischen Eigenschaften von biologischen Materialien.

Für den zur Elektrostimulation relevanten Frequenzbereich enthalten [GGC96] und [GLG96a] jedoch nur einen Datensatz für die elektrischen Eigenschaften der *Substantia Spongiosa*. Dieser stammt aus einer Veröffentlichung von Saha et al. [SW89]. Die vermessenen Knochenproben wurden aus Schienbeinknochen entnommen und bis zur Bestimmung der elektrischen Eigenschaften tiefgekühlt.

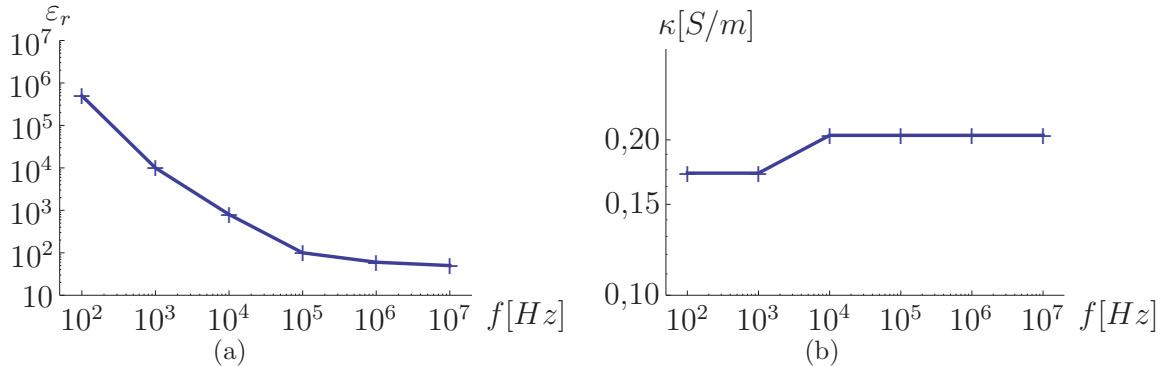


Abbildung 3.5: Relative Permittivität ε_r und Leitfähigkeit κ von spongiöser Knochensubstanz nach [SW89].

Abbildung 3.5 zeigt die relative Permittivität ε_r und Leitfähigkeit κ von spongiöser Knochensubstanz nach [SW89]. Auffallend sind die hohen Werte für die relative Permittivität ε_r . Jedoch zeigt die *Substantia Spongiosa* selbst bei diesen ungewöhnlich hohen Werten der relative Permittivität in guter Näherung ein rein resistives Verhalten, da nach Gleichung (2.21) die Leitungsstromdichte die Verschiebungsstromdichte dominiert. Dieses konnte von Saha et al. [SW89] auch experimentell nachvollzogen werden.

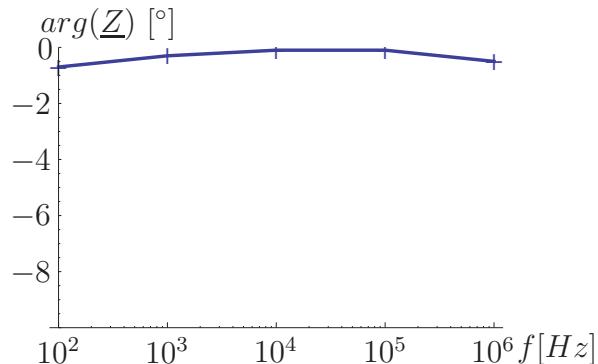


Abbildung 3.6: Phasenwinkel der gemessenen Impedanz an *Substantia Spongiosa* nach [SW89].

Abbildung 3.6 zeigt den Phasenwinkel einer Impedanzmessung an einer *Substantia Spongiosa* Probe nach [SW89]. Es ist erkennbar, dass die gemessene Impedanz in

sehr guter Näherung ein resistives Verhalten zeigt. Im Rahmen des DFG-Projektes „*Modellbildung, Simulation und Optimierung der Feldverteilung von großflächigen elektrostimulierenden Implantaten für die Orthopädische Chirurgie*“ (RI 814/17-1) wurden Messungen an humanen Femurköpfen durchgeführt, um deren elektrische Leitfähigkeit zu bestimmen [EKB08]. Hierbei wurde die elektrische Leitfähigkeit der *Substantia Spongiosa* und der *Substantia Corticalis* mehrerer Femurköpfe mit einer 4-Spitzen-Messmethode bestimmt. Bei dieser Messmethode wird eine Messspitze mit vier Elektroden verwendet. Durch die äußeren Elektrodenspitzen wird ein bekannter Messstrom in das Knochenmaterial eingeprägt. Die beiden inneren Elektroden dienen zur Messung der im Gewebe abfallenden Spannung. Bei diesem Aufbau fliesst über die inneren Elektroden nahezu kein Strom, so dass es zu keinem Spannungsabfall an den Zuleitungen und an den Materialgrenzen zwischen der metallischen Elektrode und dem Knochen kommt. Daher wird das tatsächliche Verhalten des biologischen Materials gemessen. Ist ein skalierender Geometriefaktor bekannt, so kann aus dem Verhältnis der abfallenden Spannung zum eingeprägten Strom auf die elektrischen Eigenschaften des Materials geschlossen werden (der Messaufbau ist in [EKB08] näher beschrieben).

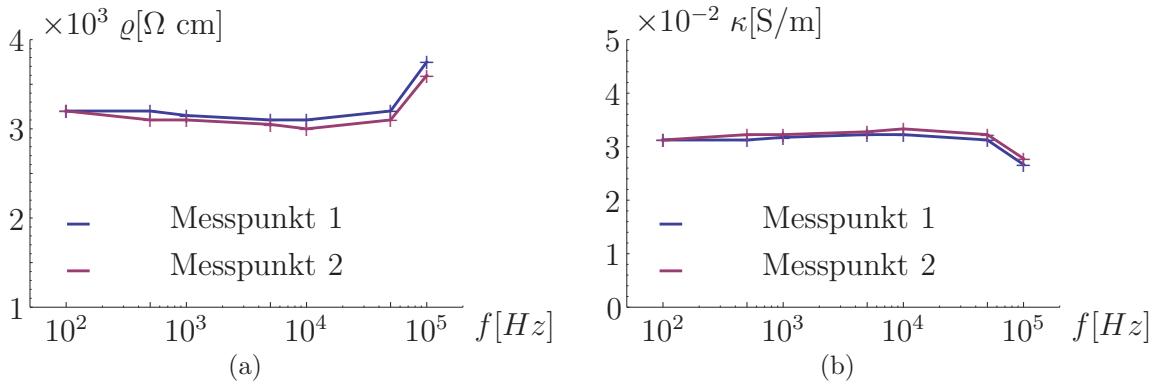


Abbildung 3.7: (a) Spezifischer Widerstand ϱ gemessen mit der 4-Spitzen-Messmethode an der *Substantia Spongiosa* eines Gelenkkopfes an zwei unterschiedlichen Positionen [EKB08] (b) Spezifische Leitfähigkeit κ , berechnet aus den Messwerten aus Abbildung 3.7(a).

Abbildungen 3.7(a) und 3.7(b) zeigen den spezifischen Widerstand ϱ der *Substantia Spongiosa*, der mit einer 4-Spitzen-Messanordnung an einem humanen Femurkopf an zwei örtlich verschiedenen Messpunkten gemessen wurde [EKB08] sowie die daraus berechnete spezifische Leitfähigkeit. Es ist erkennbar, dass die Leitfähigkeit im Frequenzintervall von 100 Hz bis 50 kHz eine vernachlässigbare Frequenzabhängig aufweist und daher als frequenzunabhängig angenommen werden kann. Abbildung 3.8 stellt den spezifischen Widerstand ϱ der *Substantia Corticalis* sowie die daraus berechnete spezifische Leitfähigkeit κ dar. Aufgrund der Materialstärke der *Substantia Corticalis* von rund 1 mm wurde diese Messung mit einer 2-Spitzen-Messanordnung durchgeführt. Hier ist erkennbar, dass die elektrische Leitfähigkeit in einem weiten

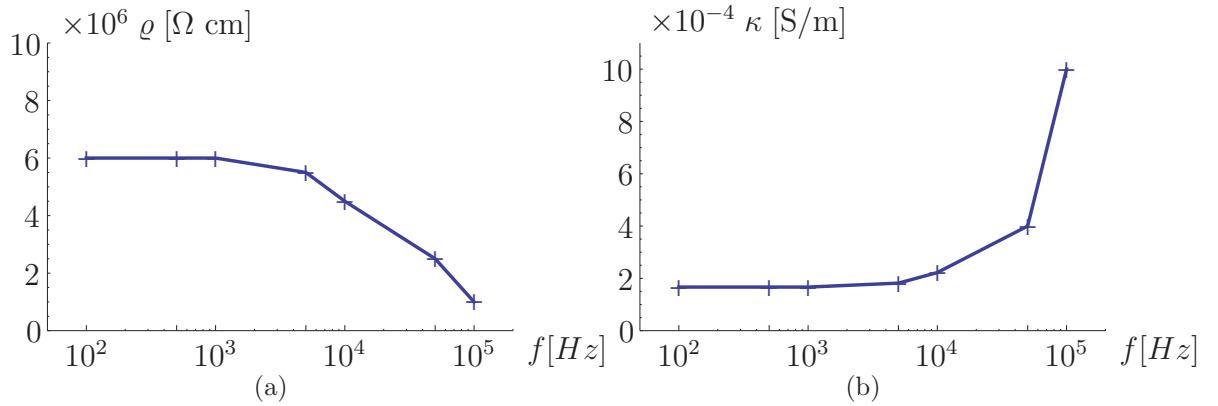


Abbildung 3.8: (a) Spezifischer Widerstand ρ , gemessen mit 2-Spitzen-Messmethode an der *Substantia Corticalis* eines Gelenkkopfes [EKB08], (b) Spezifische Leitfähigkeit κ , berechnet aus den Messwerten aus Abbildung 3.8(a).

Frequenzbereich, hier bis 10 kHz, als unabhängig von der Frequenz angesehen werden kann. Weiterhin zeigt der Vergleich der Leitfähigkeiten von *Substantia Spongiosa* aus Abbildung 3.7 und *Substantia Corticalis* aus Abbildung 3.8, dass die Leitfähigkeit der *Substantia Corticalis* etwa zwei Größenordnungen unter der der *Substantia Spongiosa* liegt. Ewald et al. erwähnen in ihrem Beitrag, dass die *Substantia Spongiosa* durch die längere gefrorene Lagerung einen sehr ausgetrockneten Eindruck machte [EKB08]. Dieses (sowie die unterschiedliche Entnahmestelle der Probe) könnten eine Erklärung für die, im Vergleich zu [SW89], niedrigere Leitfähigkeit sein. Dieses deckt sich mit den Beobachtungen von Kosterich et al., die die elektrischen Eigenschaften von mit leitfähigen Flüssigkeiten durchtränkten Knochen untersuchten [KFP84]. Die elektrische Leitfähigkeit wird wesentlich von der Leitfähigkeit des Fluids bestimmt und ist zu dieser proportional. Somit kann geschlussfolgert werden, dass eine Austrocknung des Knochens seine elektrische Leitfähigkeit vermindert.

Neben der systematischen Untersuchung der elektrischen Eigenschaften von Femurköpfen wurde zur Validierung der numerisch berechneten elektrischen Feldverteilung die elektrische Potentialverteilung in einem Hüftknochen gemessen und mit den simulierten Werten verglichen. Die verwendeten Methoden sowie die Ergebnisse sind im Anhang dargestellt. Bei dieser Messung wurde zusätzlich die elektrische Leitfähigkeit der *Substantia Spongiosa* des verwendeten Beckens bestimmt. Abbildung 3.9 zeigt die Ergebnisse einer Impedanzmessung³ mittels eines 4-Spitzen-Messaufbaus. Aus der gemessenen Impedanz ergibt sich eine elektrische Leitfähigkeit von 0,124 S/m für die *Substantia Spongiosa* des verwendeten Hüftknochens.

³Der Begriff der Impedanz ist an dieser Stelle etwas irreführend: Die Abbildung zeigt das komplexe Verhältnis der über den inneren Elektroden abfallenden Spannung zum eingeprägten Strom. Hierbei wurde dieser so eingestellt, dass die ausgewiesene Spannung an den inneren Elektroden gemessen wurde.

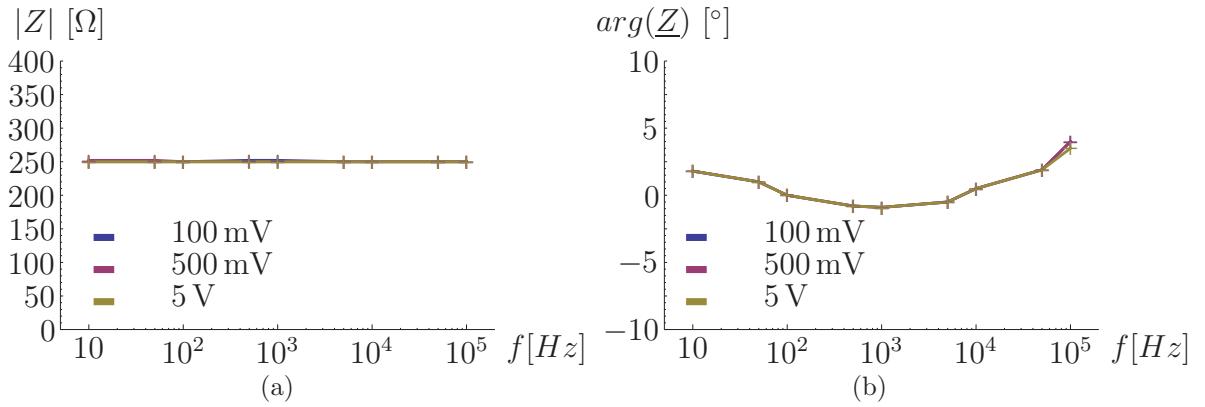


Abbildung 3.9: Ergebnisse Impedanzmessung (nach Betrag (a) und Phase (b)) in der *Substantia Spongiosa* eines menschlichen Hüftknochens mittels einer 4-Spitzen Elektrodenanordnung mit verschiedenen Messspannungen (100 mV, 500 mV und 5 V; die einzelnen Graphen liegen übereinander).

Neben der elektrischen Leitfähigkeit können zwei weitere wesentliche Erkenntnisse aus den Messergebnissen abgeleitet werden: Zum einen wird über einen Messspannungsbereich von nahezu zwei Größenordnungen die gleiche Impedanz gemessen. Dieses ist ein Indiz dafür, dass die elektrische Leitfähigkeit bis zu einer gewissen elektrischen Feldstärke als linear angenommen werden kann. Zum anderen zeigt der gemessene Phasenwinkel (siehe Abbildung 3.9(b)), dass sich das Knochenmaterial bis etwa 10 kHz nahezu resistiv verhält.

Es zeigte sich, wie auch 2007 von Sierpowska et al. festgestellt, dass die Verfügbarkeit von Daten über die elektrischen Eigenschaften von Knochen im niederfrequenten Bereich sehr begrenzt ist [SLH07]. Dennoch können aus den präsentierten Daten die wichtigsten elektrischen Eigenschaften von Knochen abgeleitet werden. Zunächst soll die relative Permittivität betrachtet werden: Selbst mit den aus der Literatur stammenden Werten für ϵ_r [SW89] verhält sich das Knochenmaterial in guter Näherung resistiv [SW89]. Auch die Ergebnisse der Impedanzmessungen aus Abbildung 3.9 bekräftigen diese Aussage. Somit kann die Permittivität (und somit die elektrische Verschiebungsflussdichte) in der Beschreibung der elektrischen Felder im Knochen vernachlässigt werden.

Die beobachtete elektrische Leitfähigkeit κ der *Substantia Spongiosa* erstreckt sich von 0,03 S/m [EKB08] (gemessen an einem Femurkopf mit Austrocknungserscheinungen) bis 0,17 S/m [GGC96, SW89] (gemessen an einem feuchten Unterschenkelknochen) für Frequenzen unterhalb von 10 kHz. Zusätzliche Messungen (siehe Anhang) ergaben eine elektrische Leitfähigkeit von 0,124 S/m für die *Substantia Spongiosa* eines menschlichen Hüftknochens. Für die elektrische Leitfähigkeit der *Substantia Corticalis* wurde ein Wert von 0,002 S/m ermittelt [EKB08].

Weiterhin ist im Frequenzbereich kleiner 10 kHz keine nennenswerte Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der Frequenz festzustellen. Ebenso wurde in die-

3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen

sem Bereich keine nennenswerte Abhängigkeit der elektrischen Eigenschaften von der auftretenden elektrischen Feldstärke beobachtet.

Abschließend soll nun das den Knochen umgebende Gewebe betrachtet werden. Hierzu wurde in [PGS08] ein Ansatz vorgestellt, bei dem das umgebende Gewebe durch ein homogenes Substitutmaterial mit einer Leitfähigkeit von 0,01 S/m ersetzt wurde. Das Substitutmaterial entspricht in seinen elektrischen Eigenschaften einer Mischung aus Blut, Fett- und Muskelgewebe. Dieses kann die äußeren Gewebeschichten in guter Näherung ersetzen, da ihr Einfluss, bedingt durch die schlechte Leitfähigkeit der *Substantia Corticalis*, gering ist.

Material	κ [S/m]
Titanlegierung (Implantat)	$5,65 \cdot 10^6$
<i>Substantia Corticalis</i>	0,002
<i>Substantia Spongiosa</i>	0,03 - 0,17
Substitutmaterial	0,01

Tabelle 3.1: Elektrische Leitfähigkeiten der in den Simulationen vorkommenden Materialien.

Tabelle 3.1 fasst die elektrische Leitfähigkeit der in den Simulationen verwendeten Materialien zusammen.

3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen

Eine besondere Bedeutung bei der Simulation von elektrostimulierenden Endoprothesen im menschlichen Körper kommt der Materialgrenze zwischen der metallenen Prothese und dem biologischen Gewebe zu (siehe Abbildung 3.10).

In diesem Abschnitt wird ein Modell dieser Grenzschicht betrachtet, um die Auswirkungen der Prozesse an den Materialgrenzen auf die elektrische Feldverteilung im Knochen zu untersuchen und diese Effekte in die Berechnung des elektrischen Feldes und somit in den nachfolgenden Optimierungsprozess einzubringen. Dabei soll der Berechnungsaufwand möglichst gering ausfallen, um die spätere Optimierung in vertretbarer Zeit durchführen zu können.

Wie bereits erwähnt, besteht *Substantia Spongiosa* aus einem Geflecht von Balken (Trabekel), das von Gewebeflüssigkeit durchtränkt ist. Diese wirkt als Elektrolyt. So mit liegt an der Grenzfläche Knochen/Implantat und Knochen/Stimulationselektrode eine Metall/Elektrolyt-Paarung vor. Grundgedanke des Modells ist nun, dass sich die an der Grenzschicht auftretenden Effekte in chemische (auch faradaysche Prozesse genannt) und nicht-chemische Prozesse trennen lassen [RM02]. Da eine umfangreiche Darstellung der Prozesse an der Grenzfläche den Rahmen dieser Arbeit übersteigen

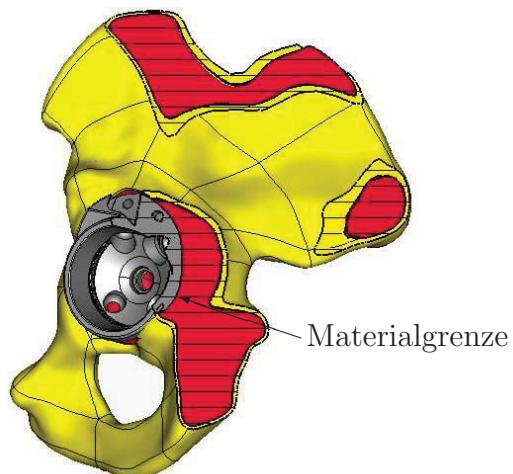


Abbildung 3.10: Geschnittenes Modell eines Hüftknochens mit eingesetztem Implantat und markierter Materialgrenze Implantat/Knochen. Das umgebende Substitutmaterial ist nicht dargestellt.

würde, kann hier nur eine knappe Einführung gegeben werden. Details können in [HV05] nachvollzogen werden.

Als chemische Prozesse (faradaysche Prozesse) werden Vorgänge bezeichnet, die zur Erzeugung (beziehungsweise Entfernung) von Ladungsträgern an einer Materialgrenze führen. Sind diese Vorgänge mit keinem übermäßigen Materialtransport verbunden, so werden sie vor allem durch die Rate von Elektronen, die durch die Materialgrenze ins Elektrolyt übergehen beziehungsweise von dort ins Metall wechseln, bestimmt [HV05]. Der bedeutendste Prozess nicht-chemischer Natur ist die Bildung der elektrischen Doppelschicht (EDL). Zusätzlich spielen Diffusionsprozesse eine Rolle in der Beschreibung der Materialgrenze. Allerdings erfolgt an dieser Stelle eine Beschränkung auf die phänomenologische Einteilung in faradaysche und nicht-faradaysche Prozesse.

Zunächst soll ein vereinfachtes Modell zur Beschreibung der Grenzschichten und des Knochens betrachtet werden, das aus zwei metallischen Elektroden beliebiger Form, die sich innerhalb eines Knochenstückes befinden, besteht. Hierbei soll eine Elektrode eine mit einem Vakuum-Plasma-Spray-(VPS-) Verfahren⁴ beschichtete Oberfläche aufweisen. Die zweite Elektrode soll entweder eine polierte Titanoberfläche oder eine VPS-beschichtete Oberfläche besitzen. Diese Konstellation ist auch im späteren Implantat mit Stimulationselektroden anzutreffen, wobei das Implantat VPS-beschichtet ist, um das Anwachsen der Knochenzellen zu fördern, während die

⁴Bei diesem Verfahren wird ein metallisches Granulat durch einen Lichtbogen auf eine Oberfläche geschossen. Durch den Lichtbogen wird das Granulat aufgeschmolzen und verhaftet dann auf der zu beschichtenden Oberfläche.

3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen

Kappen der Stimulationselektroden entweder aus poliertem oder VPS-beschichtetem Titan bestehen sollen. Abbildung 3.11 zeigt eine Darstellung sowie ein entsprechendes

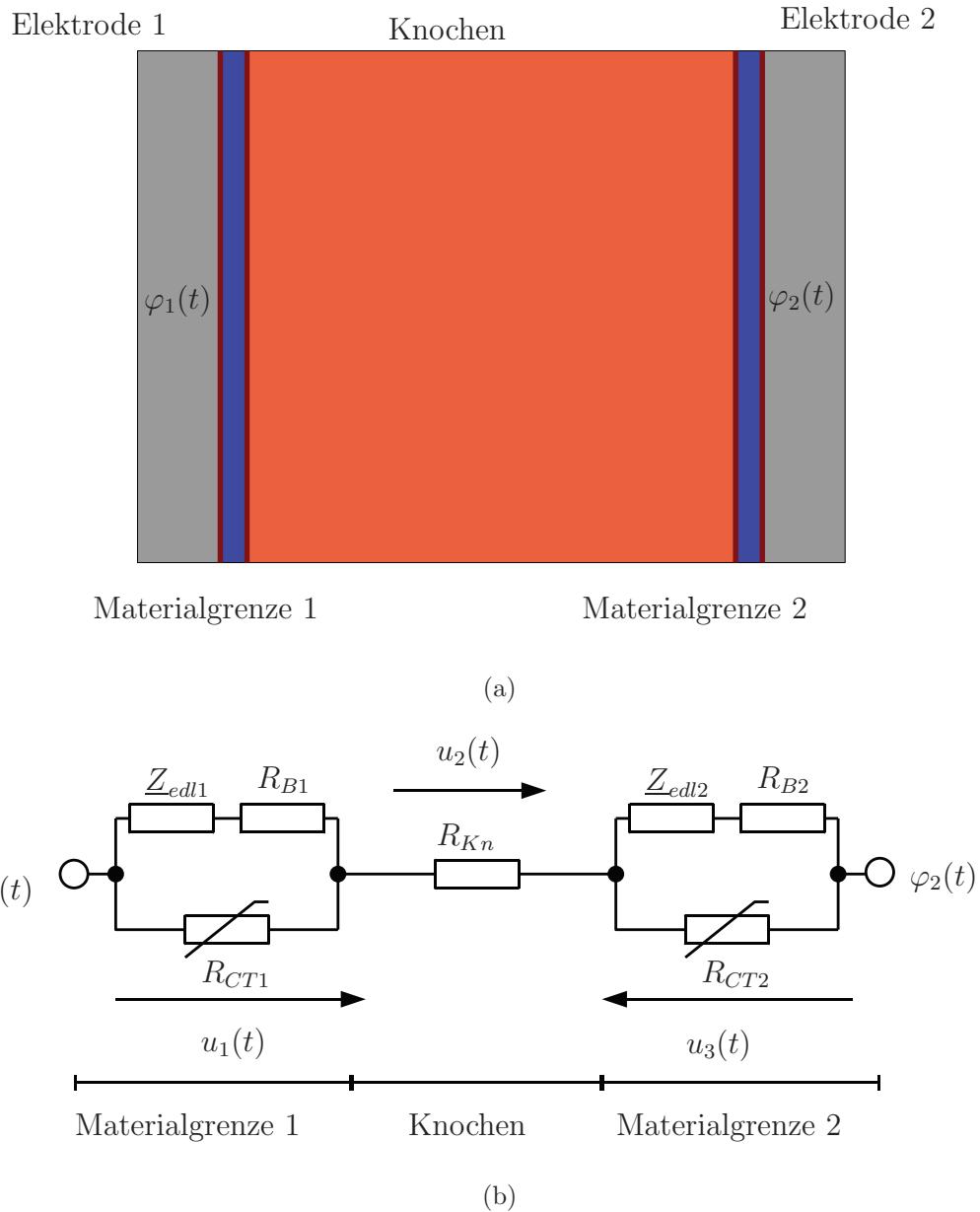


Abbildung 3.11: (a) Darstellung eines Knochenstücks zwischen zwei Elektroden. Dargestellt sind die sich bildenden Materialgrenzen (die Materialgrenzen sind stark vergrößert dargestellt, je nach Modell sind diese einige Moleküllagen stark) sowie die Äquipotentiallinien (rot) des elektrischen Potentials. (b) Elektrisches Ersatzschaltbild des Überganges zwischen Metall und biologischem Gewebe (die Beschreibung der einzelnen Elemente erfolgt im Haupttext).

3 Zur Modellierung des Hüftimplantat-Beckenknochen-Verbundes

Ersatzschaltbild (ESB) dieses Modells. Hierbei modellieren die Elemente \underline{Z}_{edl1} und \underline{Z}_{edl2} die bereits erwähnten nicht-chemischen Vorgänge (insbesondere die elektrische Doppelschicht). Die nichtlinearen chemischen Vorgänge, die durch Ladungstransfer an den Materialgrenzen auftreten, werden durch die nichtlinearen Widerstände R_{CT1} und R_{CT2} ins Modell einbezogen. Eine eventuell zusätzlich auftretende Passivierungsschicht der Elektrodenoberflächen wird durch die ohmschen Widerstände R_{B1} und R_{B2} im ESB modelliert⁵. Zwischen den Elektroden befindet sich Knochengewebe, welches durch einen ohmschen Widerstand R_{Kn} modelliert wird (im vorherigen Abschnitt wurde festgestellt, dass sich Knochenmaterial bei den zur Elektrostimulation verwendeten Frequenzen in guter Näherung rein resistiv verhält).

Wird nun angenommen, dass beide Elektroden durch eine äußere Spannungsquelle gespeist werden, so ergeben sich im Inneren der Elektroden die Potentiale $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Die Differenz der eingeprägten Potentiale ist gleich der Summe der Spannungsabfälle über den Materialgrenzen⁶ und dem Spannungsabfall über dem Knochengewebe zwischen den Elektroden:

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t). \quad (3.1)$$

Um nun den Spannungsabfall über dem Knochen $u_2(t)$ zu bestimmen, müssen die von außen eingeprägten Potentiale um die an den Grenzschichten abfallenden Spannungen korrigiert werden:

$$u_2(t) = (\varphi_1(t) - u_1(t)) - (\varphi_2(t) - u_3(t)). \quad (3.2)$$

Sind die ESB-Elemente der Materialgrenzen sowie der resultierende Widerstand des sich zwischen den Elektroden befindlichen Knochenmaterials bekannt, so kann der Spannungsabfall über dem Knochen und damit das elektrische Feld berechnet werden. Unter der Bedingung, dass die Dicke der Knochenschicht mehrere Größenordnungen größer ist als die der Materialgrenzen, kann der beschriebene Ansatz auf beliebig geformte Elektroden angewandt werden. Diese Voraussetzung ist für das Elektrostimulationssystem gegeben, da die Stärke dieser Übergangsschicht einige Moleküldurchmesser nicht überschreitet [GPBv09]. Dieser Ansatz wird später genutzt, um in Kapitel 4 den Einfluss von Materialgrenzen in die Berechnung des elektrischen Feldes im Knochen einzubeziehen.

Nachfolgend werden die beiden Zweige ($\underline{Z}_{edl} + R_B$ und R_{CT}) der Materialgrenze betrachtet, um ihr elektrisches Verhalten qualitativ zu charakterisieren. Im Anschluss daran werden Messergebnisse genutzt, um das Verhalten der Elemente quantitativ zu beschreiben.

⁵Diese Passivierungsschicht hat selbstverständlich auch einen Einfluss auf die nichtlinearen Widerstände R_{CT1} und R_{CT2} , kann jedoch mit diesen zusammengefasst werden. Da die Parameter dieses Ersatzschaltbildes nachfolgend aus Messdaten bestimmt werden, sind R_{B1} und R_{B2} in R_{CT1} und R_{CT2} implizit enthalten.

⁶Die Orientierung des Spannungsabfalls an den Materialgrenzen richtet sich nach der Orientierung der Grenzfläche.

3.3.1 Nicht-faradaysche Prozesse an den Materialgrenzen

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der Elemente Z_{edl1} und Z_{edl2} betrachtet werden. Wie bereits festgestellt wurde, handelt es sich bei der Gewebeflüssigkeit, die den spongiösen Teil des Knochens bildet, um ein Elektrolyt. Im niederfrequenten Bereich erfolgt die elektrische Stromleitung primär über den Transport von Ionen⁷. Werden nun Elektroden in ein Elektrolyt eingebracht und eine äußere Potentialdifferenz zwischen diesen erzeugt, so bildet sich ein elektrisches Feld im Elektrolyt. Die Ionen bewegen sich gemäß des Vorzeichens ihrer Ladung zur positiven oder negativen Elektrode. Hier bilden sie Zonen starker Raumladung, die so ausgeprägt sein können, dass weitere Ionen aus dem Elektrolyt von den Elektroden abgestoßen werden. Dieser Gleichgewichtspunkt wird durch eine Vielzahl von Faktoren bestimmt. Zur Berechnung dieser sogenannten Doppelschicht wurden verschiedene Modelle entwickelt. Die bekanntesten klassischen Modelle zur Beschreibung elektrischer Doppelschichten stammen von Helmholtz [Hel79], Gouy und Chapman [Gou10, Cha13] sowie Stern [Ste24]. Diese Modelle liefern allerdings nur für einige Spezialfälle hinsichtlich der Konzentration des Elektrolyts, der Oberflächenstruktur der Elektrode sowie des Potentialunterschiedes Resultate, die mit Messergebnissen eine gute quantitative Übereinstimmung zeigen [GPBv09].

Einen weiteren Ansatz zur Berechnung von elektrischen Doppelschichten stellen molekulardynamische Simulationen dar. Hierbei wird das Verhalten einer Vielzahl von Molekülen simuliert, um das Verhalten dann unter statistischen Gesichtspunkten zu untersuchen. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes sind die simulierbaren Zeiträume jedoch zu kurz, um Aussagen über die Interaktion mit einem niederfrequenten elektrischen Feld zu treffen. Daher ist ein messtechnischer Zugang zum Phänomen der elektrischen Doppelschicht erfolgsversprechend, um die elektrischen Eigenschaften zu bestimmen. Hierbei wird insbesonders das Verfahren der Impedanzspektroskopie [Mac87] verwendet.

Die Natur der elektrischen Doppelschicht lässt ein kapazitives Verhalten vermuten. Genauere Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass sich die Doppelschicht nicht exakt als kapazitives Element beschreiben lässt [RM02]. Es existiert zwar ein konstanter Phasenunterschied zwischen fließendem Strom und Spannungsabfall über der Materialgrenze, allerdings ist dieser im allgemeinen größer als -90° . Um dieses Verhalten zu modellieren, wird ein empirisch bestimmtes „Constant-Phase-Element“ (CPE, CP-Element) genutzt [RM02]:

$$Z_{edl} = K \cdot (j \frac{\omega}{\omega_0})^{-\beta}. \quad (3.3)$$

Hierbei entspricht K dem Verhältnis von Amplituden von Spannungsabfall und Strom⁸. Das CPE kann als Verallgemeinerung der bekannten linearen, passiven Netzwerkele-

⁷Der elektrische Verschiebungsstrom soll hier vernachlässigt werden, da bereits festgestellt wurde, dass Knochenmaterial im relevanten Frequenzbereich ein nahezu ohmsches Verhalten zeigt.

⁸Üblicherweise ist die Impedanz des CP-Elements durch $K \cdot (j\omega)^{-\beta}$ gegeben. Somit hat K die ungewöhnliche Dimension Ωs^β . Durch die Wahl der Normierungsfrequenz $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ hat K die erwartete Dimension Ω . Die Kennlinie des CP-Elements wird hierdurch nicht verändert.

mente (Widerstand, Kondensator und Induktivität) aufgefasst werden, die sich durch die Wahl von $\beta = 0$, $\beta = 1$ beziehungsweise $\beta = -1$ ergeben. Für die Beschreibung des pseudokapazitiven Verhaltens der Grenzschicht liegt β im Intervall von 0 bis 1.

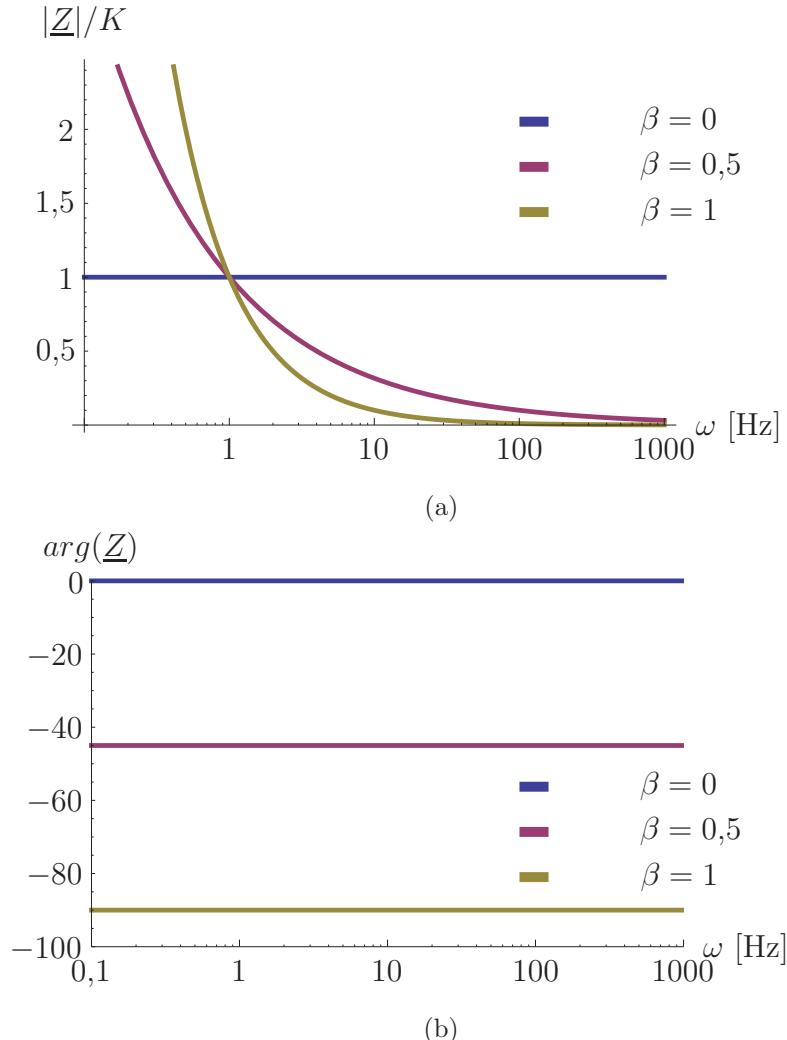


Abbildung 3.12: Betrag und Phase des CP-Elements für verschiedene Werte von β .

Abbildung 3.12 zeigt das Verhalten des „Constant-Phase-Elements“ für verschiedene Werte von β . Für $\beta = 0$ beziehungsweise $\beta = 1$ ist das Verhalten eines idealen Widerstandes beziehungsweise Kondensators erkennbar. Für die Bestimmung der Kennlinien der Materialgrenzen müssen die Parameter K und β messtechnisch ermittelt werden.

3.3.2 Faradaysche Prozesse an den Materialgrenzen

Neben der elektrischen Doppelschicht bestimmen vor allem elektronische Ladungs- transportvorgänge durch die Grenzschicht das Verhältnis von Stromfluss und dem

3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen

damit verbundenem Spannungsabfall. Im Ersatzschaltbild aus Abbildung 3.11 wird dieser Ladungstransport durch die nichtlinearen Widerstände R_{CT1} und R_{CT2} ins Modell einbezogen. Für Prozesse, bei denen es zu keinem nennenswerten Materialtransport kommt, kann der Ladungstransfer an Materialgrenzen zwischen einem Metall und einem Elektrolyt durch die Butler-Volmer-Gleichung beschrieben werden [HV05]:

$$j_F = j_0 \left(e^{(1-\alpha)(nF/R_gT)\eta} - e^{-\alpha(nF/R_gT)\eta} \right). \quad (3.4)$$

Neben den physikalischen Konstanten (Faraday-Konstante F und Gaskonstante R_g) und der absoluten Temperatur T treten mehrere Größen auf, die von der Metall/Elektrolyt-Paarung und der Struktur der metallischen Elektrodenoberfläche bestimmt werden. Hierbei bezeichnet n die Anzahl an Elektronen, die an einer chemischen Reaktion an der Elektrode beteiligt sind. Der Durchtrittsfaktor α beschreibt das Verhältnis vom anodischen und kathodischen Ladungstransfer. Die Größen j_F und j_0 bezeichnen die faradaysche Stromdichte (Stromdichte durch Ladungstransfer durch die Materialgrenze) sowie eine als Austauschstromdichte bezeichnete Größe, die ebenfalls durch die Metall/Elektrolyt-Paarung und die Oberflächenstruktur bestimmt ist. Die Größe η notiert die Abweichung von der elektrochemischen Gleichgewichtsspannung U_{eq} :

$$\eta = u_a - U_{eq}. \quad (3.5)$$

Die Gleichgewichtsspannung U_{eq} ⁹ bezeichnet hierbei die elektrochemische Spannung, die sich an der Materialgrenze ohne angelegte äußere elektrische Spannung einstellt. Die Spannung u_a beschreibt den Spannungsabfall über der Materialgrenze, der sich durch eine von außen eingeprägte elektrische Spannung ergibt, die das elektrochemische Gleichgewicht stört und zu einem Ladungstransport durch die Materialgrenze führt. Außer den fundamentalen physikalischen Größen F und R_g sind die anderen Größen a priori nicht bekannt und müssen messtechnisch erfasst werden¹⁰.

Für kleine Werte von η kann Gleichung (3.4) durch eine Reihenentwicklung um $\eta = 0$ linearisiert werden. Die faradaysche Stromdichte ergibt sich dann näherungsweise zu:

$$j_F = j_0 \frac{nF}{R_gT} \eta. \quad (3.6)$$

Abbildung 3.13 zeigt eine Darstellung der Strom-/Spannungs-Kennlinie nach (3.4) beziehungsweise (3.6) für eine Elektrode in einem Elektrolyt mit $n = 1$ bei einer Temperatur von 37 °C (310 K), wie sie im menschlichen Körper herrscht. Zunächst ist erkennbar, dass die linearisierte Butler-Volmer-Gleichung für Abweichungen vom Gleichgewichtspotential η bis etwa 60 mV und einen Durchtrittsfaktor α von 0,5 in

⁹Diese Gleichgewichtsspannung sowie die Spannung u_a beziehen sich auf eine bekannte Referenzelektrode, an der eine chemische Reaktion unter normierten Bedingungen abläuft. Details zu Referenzelektroden können in [HV05] nachvollzogen werden.

¹⁰Die Anzahl der für eine Reaktion benötigten Elektronen n kann für einfache Elektrolyte ohne Mehrfachreaktionen angegeben werden. Bei Elektrolyten mit mehreren Bestandteilen muss auch diese messtechnisch ermittelt werden [RM02].

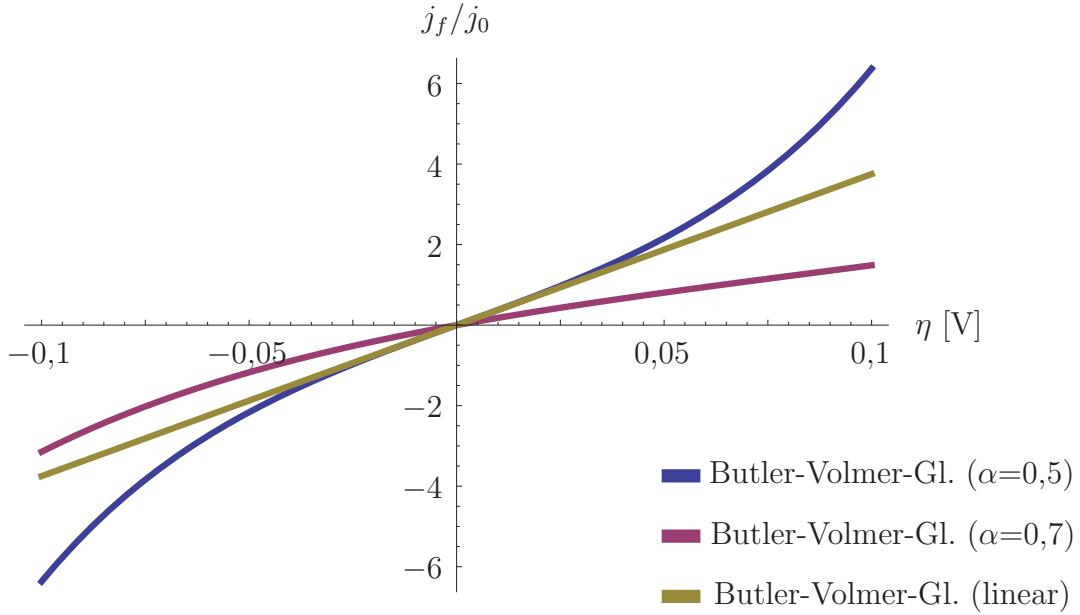


Abbildung 3.13: Strom-/Spannungs-Kennlinie der faradayschen Stromdichte als Funktion von η (für $\alpha = 0,5$ und $\alpha = 0,7$ sowie linearisiert; $n = 1$; $T = 310\text{ K}$).

guter Näherung verwendet werden kann, um die faradayschen Prozesse zu beschreiben. Allerdings ergibt sich dieser Durchtrittsfaktor nur für ideal glatte Oberflächen [HV05]. Raue Oberflächen besitzen andere Durchtrittsfaktoren, was zu einer asymmetrischen Strom-/Spannungs-Kennlinie führt. In Abbildung 3.13 ist zusätzlich die Strom-/Spannungs-Kennlinie für einen Durchtrittsfaktor von 0,7 dargestellt.

Sind nun die spezifischen Parameter der Butler-Volmer-Gleichung (3.4) sowie die Elektrodenflächen A_1 und A_2 der jeweiligen Elektroden bekannt, so kann der faradaysche Stromfluss durch die Materialgrenzen an den Elektroden (i_{F1} und i_{F2}) aus Gleichung (3.4) ermittelt werden:

$$i_{Fi} = j_{fi}(\eta)A_i. \quad (3.7)$$

Hier soll nun angenommen werden, dass sich ohne äußere Anregung an den Materialgrenzen die elektrochemische Gleichgewichtsspannung U_{eq} einstellt. Somit führt ein von außen erzwungener Stromfluss durch die Ladungstransferwiderstände R_{CT1} und R_{CT2} zu einer Abweichung vom Gleichgewichtspotential η_1 und η_2 .

Die Strom-/Spannungs-Kennlinie der Widerstände R_{CT1} und R_{CT2} ist dann durch

$$I_{Fi} = j_{0i}A_i \left(e^{(1-\alpha_i)(nF/R_gT)u_i} - e^{-\alpha_i(nF/R_gT)u_i} \right) \quad (3.8)$$

gegeben, wobei nun u_i ($u_i = \eta_i$) die Abweichung vom Gleichgewichtspotential bezeichnet¹¹. Die unbekannten Größen (j_{0i} , α_i , n) müssen messtechnisch ermittelt werden.

¹¹Der Gebräuchlichkeit halber soll von hier an η_i als u_i geschrieben werden, da alle folgenden Betrachtungen aus elektrotechnischer Sicht erfolgen.

3.3.3 Parameter der Materialgrenze Elektrolyt/Metall

In den zwei vorherigen Abschnitten wurde ein kurzer theoretischer Abriss der Vorgänge an der Materialgrenze Metall/Knochen gegeben. In diesem Abschnitt sollen nun Messergebnisse genutzt werden, um die unbekannten Parameter der Elemente Z_{edl1} und R_{CT1} sowie Z_{edl2} und R_{CT2} (siehe Gleichungen (3.3) und (3.8)) des ESBs aus Abbildung 3.11 zu bestimmen¹². Weiterhin kann auf Basis dieser Daten entschieden werden, in welchen Grenzen Vereinfachungen und Linearisierungen zulässig sind. Die nachfolgenden Messungen wurden von der Forschungsgruppe „Grenzfläche“ der Universität Rostock durchgeführt. Dabei wurden Messproben mit VPS-Beschichtungen sowie polierten Titanoberflächen, wie sie auch im Implantat und den Stimulations-elektroden zur Anwendung kommen, in einer isotonischen Kochsalzlösung mittels Impedanzspektroskopie untersucht [KLN03].

Abbildung 3.14 zeigt die Ergebnisse einer Impedanzspektroskopie einer VPS-beschichteten und einer polierten Titanoberfläche. Hierbei wurden der Betrag $|Z|$ und die Phase $\arg(Z)$ der Impedanz der Materialgrenze für eine Fläche von jeweils $2,27 \text{ cm}^2$ gemessen. Bei dieser Messmethode werden sehr kleine Messspannungen verwendet, so dass die Abweichung von der elektrochemischen Gleichgewichtsspannung sehr klein ist ($u = \eta \approx 0$, siehe Gleichung (3.8)) und somit kein nennenswerter Stromfluss durch den nichtlinearen Widerstand R_{CT} stattfindet. Somit wird die Impedanz $Z_{edl} + R_B$ gemessen [KLN03].

Zunächst fällt das unterschiedliche Verhalten der Titanoberflächen auf. Während bei der VPS-beschichteten Oberfläche der pseudokapazitive Anteil Z_{edl1} bereits bei rund 10 Hz keinen signifikanten Einfluss auf die Gesamtimpedanz der Reihenschaltung $Z_{edl} + R_B$ hat, dominiert dieser bei der polierten Oberfläche die Gesamtimpedanz bis etwa 1 kHz. Weiterhin zeigt sich bei einem Vergleich bei sehr niedrigen Frequenzen ($< 0.1 \text{ Hz}$), dass der Betrag der Impedanz der polierten Oberfläche bei gleicher Frequenz etwa zwei Größenordnungen über der der VPS-Oberfläche liegt. Dieser Umstand ist auf die *effektive* Oberfläche zurückzuführen. Während beide Proben eine *makroskopische* Oberfläche von jeweils $2,27 \text{ cm}^2$ haben, ist die wirksame Oberfläche der VPS-Probe, bedingt durch mikroskopische Rauheiten, wesentlich größer [KLN03].

Mit den dargestellten Messergebnissen aus Abbildung 3.14 können die Parameter der CP-Elemente Z_{edl1} und Z_{edl2} sowie der Passivierungswiderstände R_{B1} und R_{B2} aus Abbildung 3.11 berechnet werden.

Tabelle 3.2 enthält die aus den Messdaten ermittelten Parameter für den Beschichtungswiderstand und das CPE. Die Werte wurden mit der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung für den Frequenzbereich von 10 Hz bis 10 kHz ermittelt¹³.

¹²Der Autor dankt der Forschungsgruppe „Grenzfläche“ am Institut für Gerätesysteme und Schaltungstechnik der Fakultät für Informatik und Elektrotechnik der Universität Rostock für die Überlassung der Messergebnisse.

¹³Eine Elektrostimulation mit Stimulationsfrequenzen unterhalb von 20 Hz ist nicht vorgesehen. Somit können niedrigere Frequenzen vernachlässigt werden.

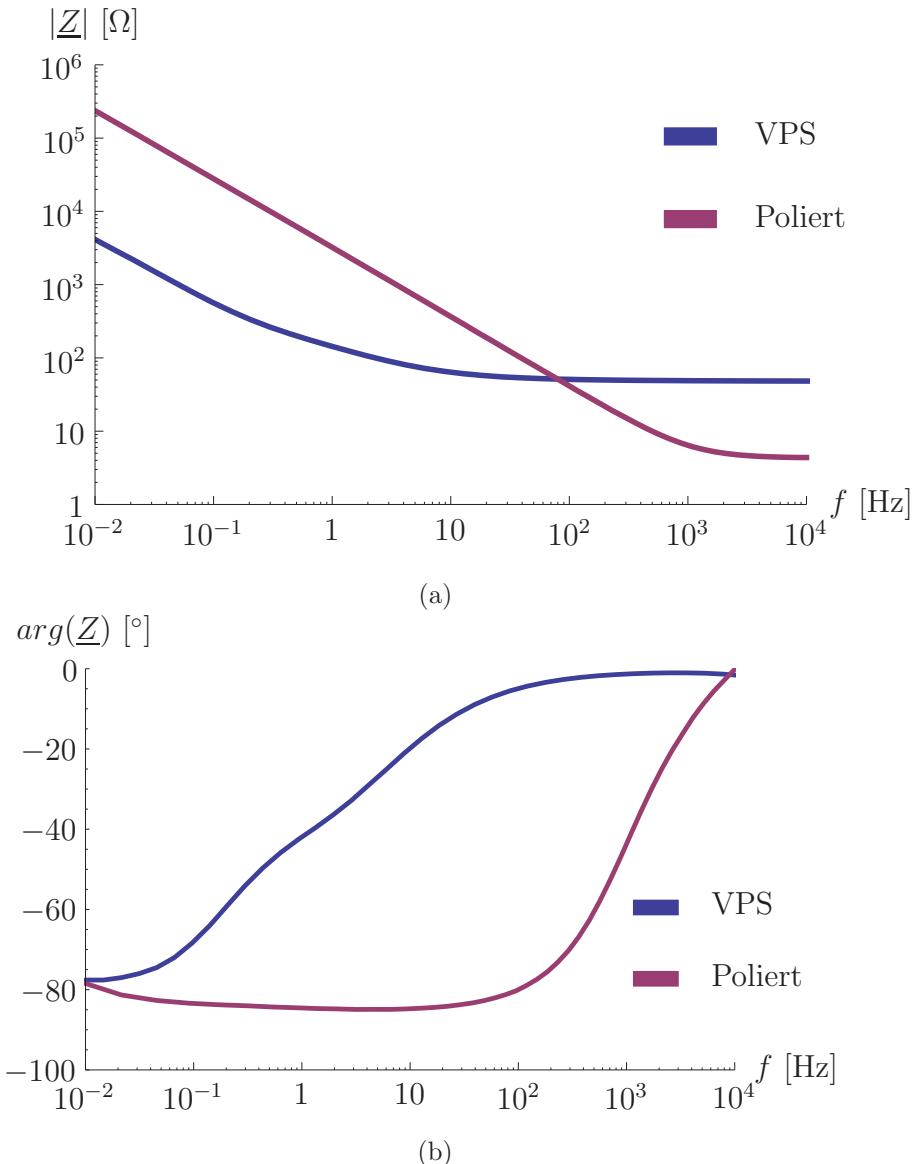


Abbildung 3.14: Betrag und Phase der Impedanz der Materialgrenze Elektrolyt/Metall an einer Vakuum-Plasmaspray-beschichteten Probe sowie einer polierten Titanprobe [KLN03].

Die Abbildungen 3.15 und 3.16 zeigen die gemessenen Impedanzen sowie die Impedanzen, die sich aus dem Ersatzschaltbild mit den Werten aus Tabelle 3.2 ergeben. Es ist erkennbar, dass das vorgestellte CPE die (Kleinsignal-)Impedanz der Materialgrenzen sehr gut beschreibt. Allerdings muss hier beachtet werden, dass sich die gemessenen Impedanzen auf eine Messelektrode mit einer Messfläche $A_{\text{Mess}} = 2,27 \text{ cm}^2$ beziehen. Unter der Voraussetzung, dass die Materialgrenze aus makroskopischer Sicht eine Äquipotentialfläche darstellt, können die Impedanzen auf andere

3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen

Oberfläche	K	β	R_B
VPS	546,5 Ω	0,733	48,7 Ω
poliert	18977,2 Ω	0,953	4,4 Ω

Tabelle 3.2: Ermittelte Parameter des CP-Elemente (K, β) und der Passivierungs-widerstände für die VPS-beschichtete und polierte Titanoberfläche.

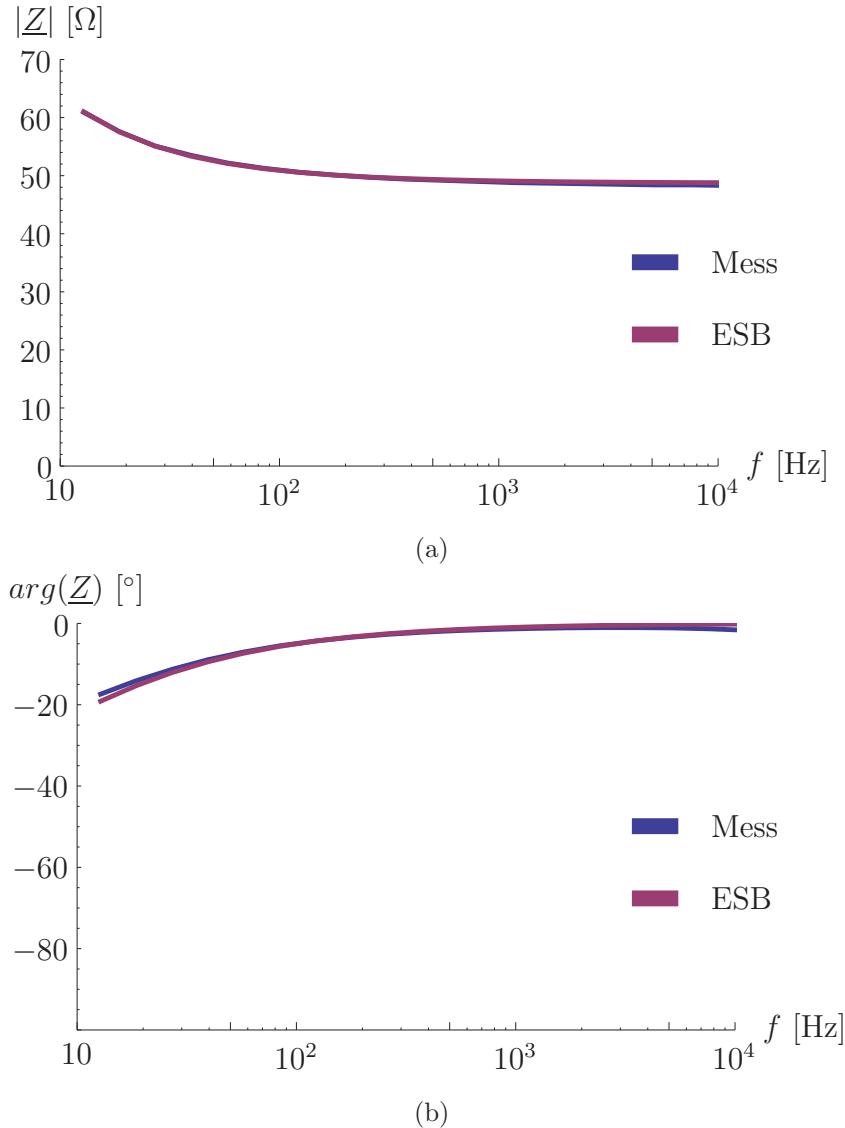


Abbildung 3.15: Darstellung Betrag und Phase der Impedanz der Materialgrenze Elektrolyt/Metall (VPS) der gemessen Impedanz (Mess) sowie der Impedanz des Modells mit den bestimmten Parametern (ESB).

Oberflächen umgerechnet werden. Die auf die Fläche A skalierte Impedanz \underline{Z}' ergibt sich zu

$$\underline{Z}' = \frac{A_{\text{Mess}}}{A} \underline{Z}_{\text{Mess}}. \quad (3.9)$$

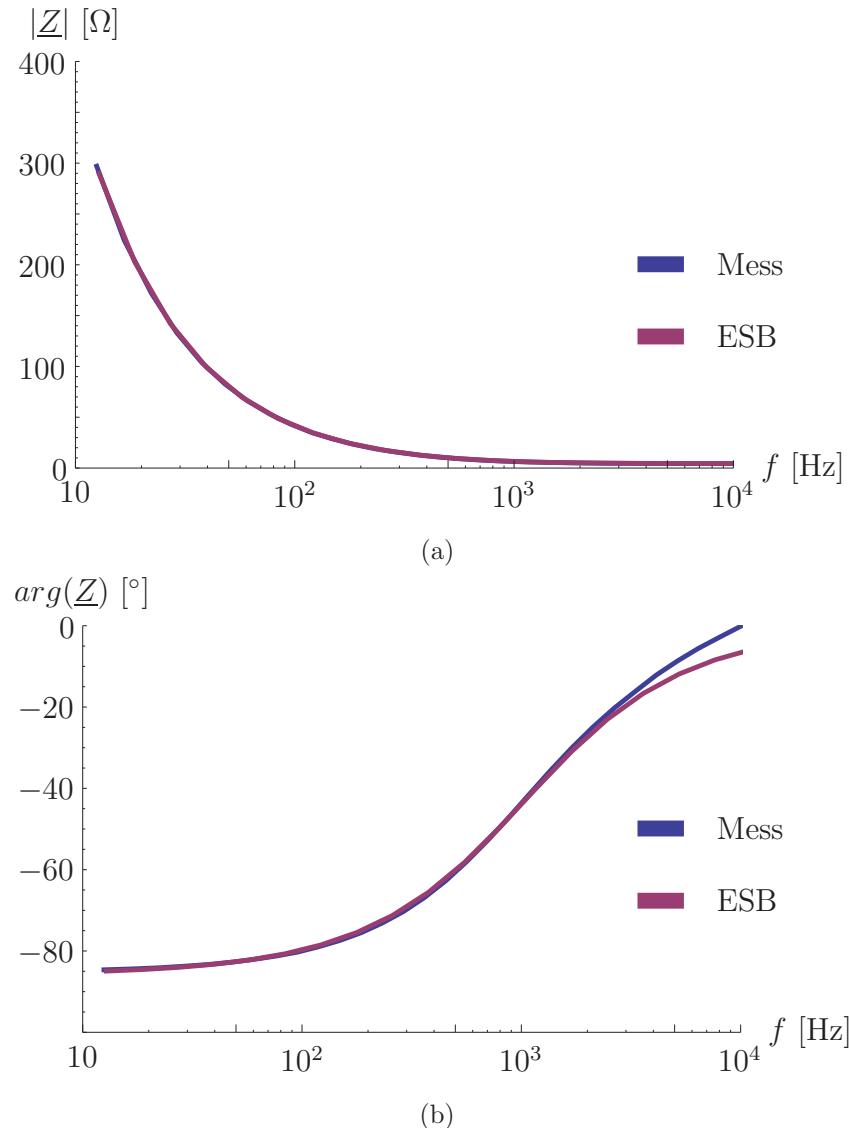


Abbildung 3.16: Darstellung Betrag und Phase der Impedanz der Materialgrenze Elektrolyt/Metall (poliert) der gemessen Impedanz (Mess) sowie der Impedanz des Modells mit den bestimmten Parametern (ESB).

Hierbei bezeichnen $\underline{Z}_{\text{Mess}}$ und A_{Mess} die gemessene Impedanz aus der Impedanzspektroskopie und die Fläche der Messelektrode. A bezeichnet die Fläche der Materialgrenze, auf die die Impedanz skaliert werden soll. Mit den Parametern aus Tabelle 3.2 und der Skalierungsvorschrift aus Gleichung (3.9) können die Beschichtungswiderstände und die CP-Elemente der Materialgrenzen Implantat/Knochen und Elektrodenkappe/Knochen bestimmt werden.

Neben den nicht-chemischen Vorgängen müssen auch die chemischen Vorgänge an der Grenzfläche betrachtet werden. Im Ersatzschaltbild aus Abbildung 3.11 werden diese durch die Transferwiderstände R_{CT1} beziehungsweise R_{CT2} repräsentiert. Wie bereits

3.3 Modellierung der Materialgrenze zwischen Implantatoberfläche und Knochen

erwähnt, kann die Strom-/Spannungs-Kennlinie durch die Butler-Volmer-Gleichung beschrieben werden. Abbildung 3.17 zeigt die Messergebnisse einer elektrochemischen

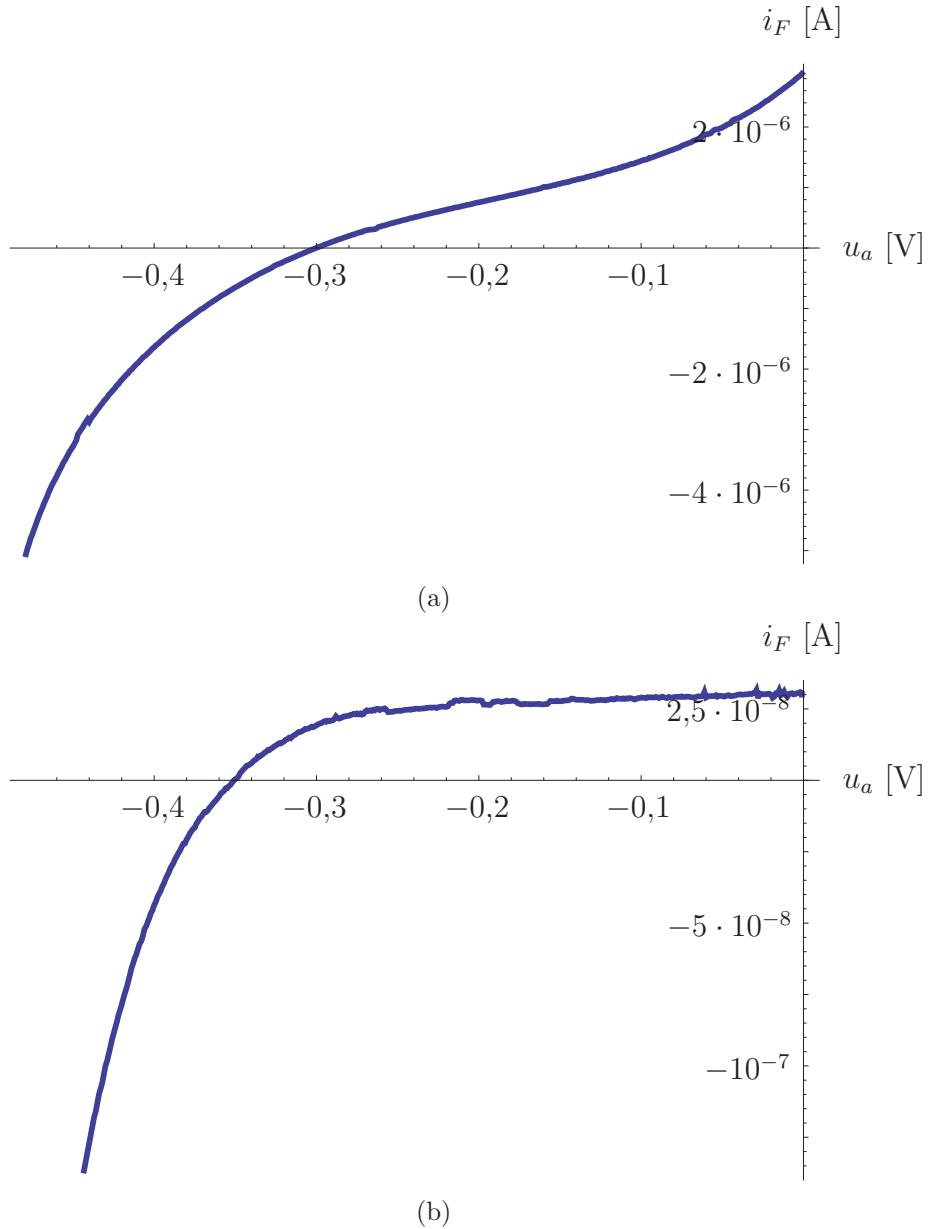


Abbildung 3.17: Strom-/Spannungs-Kennlinie der Materialgrenze Titan-/NaCl-Elektrolyt an einer VPS-Oberfläche (a) sowie einer polierten Oberfläche (b) (gemessen gegen die Referenzelektrode).

Messung zur Bestimmung der Strom-/Spannungs-Kennlinie von VPS-beschichteten und polierten Titanoberflächen. Hierbei wird über der Grenzfläche der Spannungsabfall u_a erzeugt und der dabei fließende Strom i_F gemessen. Der Nulldurchgang markiert dabei die Gleichgewichtsspannung U_{eq} , bei der sich der anodische und der

kathodische Stromfluss kompensieren. Aus den Messdaten können die unbekannten Größen der Butler-Volmer-Gleichung bestimmt werden. Wie Richardot et al. [RM02] festgestellt haben, ist Gleichung (3.4) nur für ideale Oberflächen gültig. Für reale Oberflächen muss die Summe der Transferkoeffizienten des kathodischen und des anodischen Zweigs nicht zwangsläufig Eins ergeben. Daher wurde nicht Gleichung (3.4) zum Bestimmen der Parameter benutzt, sondern eine leicht modifizierte Form:

$$i_F = i_0 (e^{(\alpha_1 F/R_g T)(u_a - U_{eq})} - e^{-(\alpha_2 F/R_g T)(u_a - U_{eq})}) . \quad (3.10)$$

Diese Notation richtet sich nach [RM02], wobei der anodische und der kathodische Zweig jeweils einen unterschiedlichen Transferkoeffizienten besitzen. Weiterhin ist die Ladungszahl n in den Transferkoeffizienten α_1 und α_2 aufgegangen. Die unbekannten Größen aus Gleichung (3.10) wurden wiederum mit der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung bestimmt (siehe Tabelle 3.3). Hierbei ist zu beachten, dass sich die Spannungen u_a und U_{eq} auf die verwendete Referenzelektrode beziehen.

Oberfläche	i_0	j_0	α_1	α_2	U_{eq}
VPS	$3,35 \cdot 10^{-7}$ A	$1,48 \cdot 10^{-7}$ A/cm ²	0,193	0,423	0,3 V
poliert	$2,86 \cdot 10^{-8}$ A	$1,26 \cdot 10^{-8}$ A/cm ²	0,003	0,499	0,355 V

Tabelle 3.3: Transferstrom i_0 , Transferstomdichte j_0 , Transferkoeffizienten α_1 und α_2 sowie Gleichgewichtsspannung U_{eq} der VPS-beschichteten und polierten Titanoberfläche.

Abbildung 3.18 zeigt die Messergebnisse sowie die Kennlinien nach Gleichung (3.10) mit den Parametern aus Tabelle 3.3. Anschließend wurden die Messergebnisse auf die Abweichung vom Gleichgewichtspotential u umgerechnet. Es wird deutlich, dass die modifizierte Butler-Volmer-Gleichung und die gemessene Strom-/Spannungs-Kennlinie sehr gut übereinstimmen. Die Strom-/Spannungs-Kennlinie wurde erneut mit Messelektroden mit einer Fläche von 2,27 cm² bestimmt. Indem der gemessene Transferstrom auf die Elektrodengröße normiert wird, können die Transferströme für Materialgrenzen mit anderen Oberflächengrößen berechnet werden. Hierbei ändern sich die Transferkoeffizienten nicht. Lediglich der Transferstrom i_0 muss entsprechend skaliert werden. Tabelle 3.3 enthält die hierfür nötige Stromdichte j_0 , die mit der Oberfläche A der Materialgrenze multipliziert wird, um den resultierenden Transferstrom zu bestimmen. Die Strom-/Spannungs-Kennlinien ($i_F = f(u)$) der resultierenden nichtlinearen Transferwiderstände R_{CT} sind dann, in Anlehnung an Gleichung (3.10), durch

$$i_F = j_0 A (e^{(\alpha_1 F/R_g T)u} - e^{-(\alpha_2 F/R_g T)u}) \quad (3.11)$$

gegeben.

Die von Richardot et al. durchgeführten experimentellen Untersuchungen haben gezeigt, dass das in dieser Arbeit genutzte Ersatzschaltbild der Materialgrenze Metall-/Elektrolyt für Frequenzen bis etwa 1 kHz gültig ist [RM02].

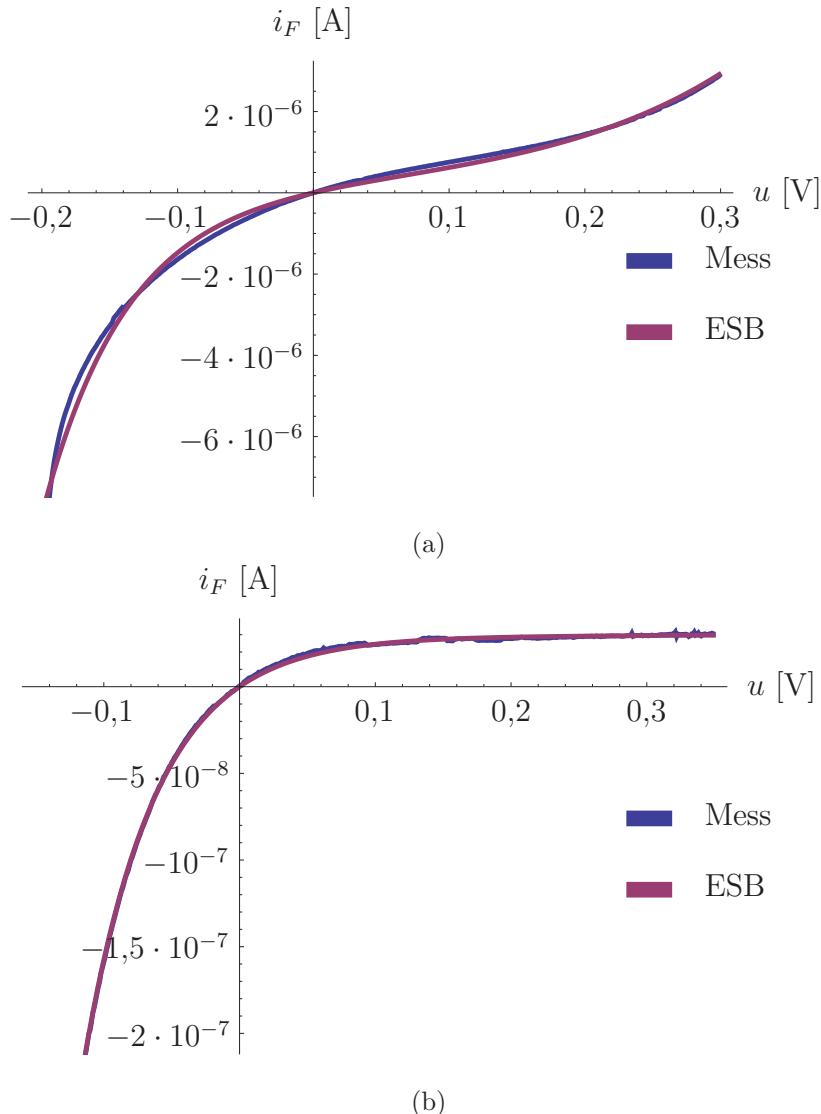


Abbildung 3.18: Darstellung der gemessenen Kennlinie (bezogen auf die Abweichung vom Ruhepotential u) sowie der mit den Parametern aus Tabelle 3.3 bestimmten Kennlinie nach Gleichung (3.10).

3.4 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurden die grundlegenden Eigenschaften des zu simulierenden Implantat-/Knochen-Verbundes diskutiert. Zunächst wurde, basierend auf der Anatomie des menschlichen Beckens, ein geschichtetes Knochenmodell vorgestellt. Dieses Modell besitzt einen inneren Kern sowie eine rund 1 mm dicke Schale, um die beiden Knochenbereiche in den Simulationen mit unterschiedlichen elektrischen Materialparametern modellieren zu können.

Im Anschluss wurden die Materialparameter der im Simulationsmodell vorkommenden Objekte diskutiert. Für das Implantat wurden die Eigenschaften einer Titanlegie-

3 Zur Modellierung des Hüftimplantat-Beckenknochen-Verbundes

rung angenommen. Komplizierter stellt sich die Situation bei den elektrischen Eigenschaften von Knochenmaterial dar. Zunächst wurden Messwerte aus einer häufig verwendeten Sammlung von elektrischen Parametern für biologisches Gewebe präsentiert. Allerdings liegt für den interessanten Frequenzbereich nur ein einziger brauchbarer Datensatz vor. Daher wurden zusätzlich die Ergebnisse von Messungen, die im Rahmen des Projektes durchgeführt wurden, angeführt. Aus diesen Messungen konnten mehrere wichtige Eigenschaften abgeleitet werden: Zunächst wurde gezeigt, dass sich Knochenmaterial auch bei sehr niedrigen Frequenzen in guter Näherung resistiv verhält, so dass die Permittivität des Knochens vernachlässigt werden kann. Zusätzlich konnte aus den Ergebnissen einer 4-Spitzen-Impedanzmessung abgeleitet werden, dass die Leitfähigkeit nicht von der Messspannung und somit von der elektrischen Feldstärke im Knochen abhängig ist. Die Leitfähigkeit des Knochenmaterials kann also als linear angenommen werden. Es zeigte sich, dass die Leitfähigkeit für Frequenzen unterhalb von 10 kHz eine vernachlässigbare Abhängigkeit von der Frequenz aufweist.

Nach den elektrischen Materialeigenschaften wurde der Einfluss von Grenzschichten zwischen dem Implantat und dem biologischen Gewebe betrachtet. Hierfür wurde zunächst ein Ersatzschaltbild vorgestellt, welches gesonderte Elemente für die chemischen und die nicht-chemischen Vorgänge an der Grenzschicht besitzt. Für diese Elemente wurde dann das Strom-/Spannungs-Verhalten betrachtet, und anhand von Messergebnissen wurden die nötigen Parameter zur Beschreibung dieser Vorgänge für VPS-beschichtete und polierte Titanoberflächen bestimmt. Zudem wurde auf das Skalierungsverhalten eingegangen, um die Kennlinien der Elemente auf Grenzflächen anderer Größe umrechnen zu können.

4 Zur schnellen Berechnung des elektrischen Feldes im Hüftknochen

Ziel dieser Arbeit ist die Optimierung eines künstlichen Hüftgelenks, das sein eigenes Einwachsen mittels eines von ihm selbst erzeugten elektrischen Feldes stimuliert. Hierzu muss das elektrische Feld gewissen Anforderungen hinsichtlich seiner Stärke in unterschiedlichen Bereichen des Knochens genügen, um eine erfolgreiche Elektrostimulation zu gewährleisten. Diese Anforderungen sind durch biologische Randbedingungen gegeben und sollen hier zunächst noch keine Rolle spielen.

4.1 Zur schnellen Feldberechnung

In den vorherigen Kapiteln wurde das Elektrostimulationssystem vorgestellt, mit dem das elektrische Feld im Knochen generiert werden soll. Aufgrund der hohen geometrischen Komplexität des Hüftknochens und des Implantates muss die Berechnung des elektrischen Feldes unter Zuhilfenahme eines Programms zur numerischen Feldsimulationen [CST] durchgeführt werden. Durch die Vielzahl an Designparametern, welche optimiert werden müssen, ist eine rein numerische Behandlung dieses Problems jedoch wenig erfolgversprechend, da diese sehr zeitintensiv wäre.

Daher soll in diesem Kapitel ein hybrider Ansatz vorgestellt werden, der die numerische Feldsimulation mit einem semi-analytischen Modell verbindet. Dieses kann sehr schnell ausgewertet werden und ermöglicht dabei die Berechnung des elektrischen Feldes innerhalb des Knochens mit der nötigen Genauigkeit. Somit kann die nachfolgende Optimierung, bei der eine große Zahl an Implantatkonfigurationen ausgewertet werden muss, in einem vertretbaren Zeitrahmen durchgeführt werden. In diesem Kapitel wird zunächst nur das semi-analytische Modell betrachtet. Die Optimierungsprozedur ist Gegenstand des Kapitels 5.

Zur vereinfachten Beschreibung wird zunächst ein globales kartesisches Koordinatensystem eingeführt, auf das sich alle Koordinatenangaben, sofern nicht explizit anders erwähnt, beziehen.

Abbildung 4.1 zeigt das Implantat in diesem globalen Koordinatensystem. In der nachfolgenden Optimierungsphase werden mehrere Stimulationselektroden auf der Implantatoberfläche positioniert. Hierzu muss eine Beschreibung der Oberfläche der dem Knochen zugewandten Seite der Endoprothese als Funktion:

$$\sigma : \{x, y\} \rightarrow z \mid x, y, z \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

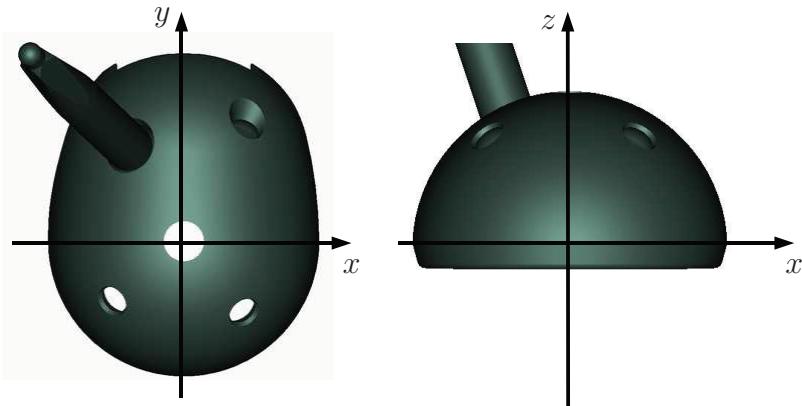


Abbildung 4.1: Implantat im globalen kartesischen Koordinatensystem.

bekannt sein¹. Diese kann aus dem CAD-Modell der Endoprothese gewonnen werden, indem die Oberfläche an einer Menge von Punkten abgetastet und zwischen diesen mittels einer Spline-Fläche interpoliert wird [Loc93]. Diese Funktion weist einem Koordinatenpaar $\{x, y\}$ die Höhe z der Implantatoberfläche im globalen Koordinatensystem zu. Zusätzlich kann mit der Funktion σ der Anstieg und somit der Normalenvektor der Fläche an einem Punkt berechnet werden. Die spätere Positionierung der Elektroden erfolgt jedoch nur in einem Teilbereich dieser Oberfläche, der nachfolgend als σ_E bezeichnet wird und durch einen Satz von Ungleichungen definiert ist. Dieser Bereich ist so definiert, dass Simulationselektroden während der Implantation ohne Probleme eingesetzt werden können.

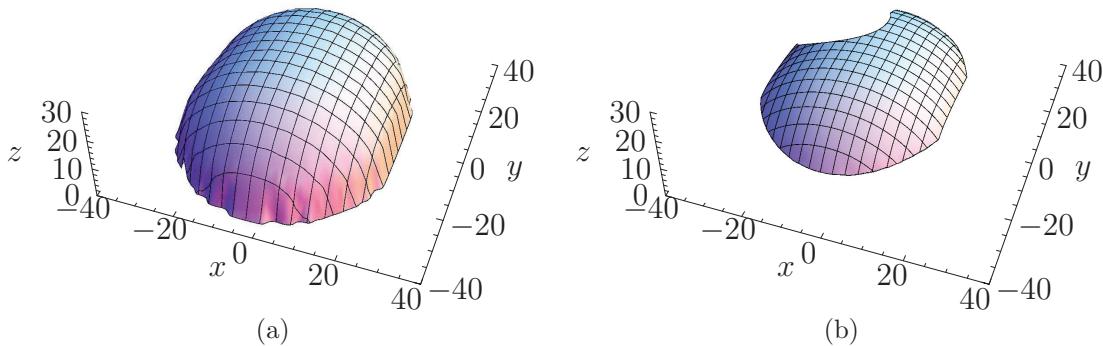


Abbildung 4.2: Darstellung der durch σ beschriebenen Oberfläche des Implantates $z = \sigma(x, y)$ (a) sowie den Bereich σ_E , in dem Simulationselektroden positioniert werden können (b).

¹Die Geometrie der Fläche ist einfach genug, so dass einem Punkt in der x-y-Ebene ein Höhenwert zugeordnet ist.

Abbildung 4.2 zeigt einen Plot der durch σ beschriebenen Oberfläche sowie den Bereich σ_E . Eine Anordnung von N Stimulationselektroden innerhalb von σ_E ist nun durch die Position der einzelnen Elektroden auf der Oberfläche $x_1, y_1, \dots, x_N, y_N$ sowie die Anzahl an Windungen der Spule im Elektrodeninneren N_{W1}, \dots, N_{WN} eindeutig beschrieben. Somit kann eine Elektrodenanordnung als Vektor der Form:

$$\vec{p} := \{x_1, y_1, N_{W1}, \dots, x_N, y_N, N_{WN}\} \quad (4.2)$$

aufgefasst werden. Der Windungssinn der Sekundärspulen gegenüber der anregenden Primärspule wird durch ein positives (gleicher Windungssinn) beziehungsweise negatives (entgegengesetzter Windungssinn) Vorzeichen der Windungszahl N_{Wi} ausgedrückt.

Es soll nun eine Elektrodenanordnung \vec{p} betrachtet werden, die sich in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld befindet. In jeder der Sekundärspulen wird durch das Magnetfeld eine Spannung induziert, welche zu einem Stromfluss im leitfähigen Knochen führt und somit ein elektrisches Feld erzeugt. Zusätzlich existiert eine Wirbelstromkomponente im Knochen, die direkt durch das sich zeitlich ändernde magnetische Feld erzeugt wird. Somit setzt sich das elektrische Feld an einem Punkt P aus zwei Komponenten zusammen:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_{wirbel}(P) + \vec{E}_{\vec{p}}(P). \quad (4.3)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{E}_{wirbel}(P)$ den Feldanteil, den das primäre Magnetfeld direkt im Knochen erzeugt, während $\vec{E}_{\vec{p}}(P)$ den Anteil bezeichnet, der durch die in den Stimulationselektroden befindlichen Spulen generiert wird.

An dieser Stelle soll kurz auf die Natur der beiden Feldanteile eingegangen werden. Der Feldanteil \vec{E}_{wirbel} ist ein reines Wirbelfeld. Der Feldanteil $\vec{E}_{\vec{p}}$, der durch die Elektroden im Knochen erzeugt wird, kann innerhalb des Knochens als Gradient eines skalaren Potentials nach Gleichung (2.28) aufgefasst werden.

An dieser Stelle soll nur festgestellt werden, dass aufgrund der niedrigen Stimulationsfrequenz und der schlechten Leitfähigkeit des Knochens die Wirbelstromdichte wesentlich geringer ist als die durch die Stimulationselektroden erzeugte Stromdichte. Somit gilt:

$$|\vec{E}_{wirbel}(P)| \ll |\vec{E}_{\vec{p}}(P)|. \quad (4.4)$$

Die Gültigkeit dieser Aussage kann für eine Implantatvariante gezeigt werden, indem beiden Feldkomponenten berechnet und verglichen werden. Dieses ist möglich, soll zunächst aber für die weiteren Betrachtungen keine Rolle spielen. Es soll an dieser Stelle vorausgesetzt werden, dass das elektrische Feld im Knochen in guter Näherung durch den Feldanteil $\vec{E}_{\vec{p}}(P)$ beschrieben wird:

$$\vec{E}(P) \approx \vec{E}_{\vec{p}}(P). \quad (4.5)$$

Im vorherigen Kapitel wurde festgestellt, dass die elektrische Leitfähigkeit des Knochens für Frequenzen kleiner 10 kHz unabhängig von der herrschenden elektrischen

Feldstärke und der Frequenz ist. Somit kann das elektrische Feld, das eine wie in Gleichung (4.2) parametrisierte Elektrodenanordnung erzeugt, als linear angesehen und durch die Superposition der Feldanteile der einzelnen Stimulationselektroden dargestellt werden:

$$\vec{E}_{\vec{p}}(P) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{p_i}(P). \quad (4.6)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{E}_{p_i}(P)$ die elektrische Feldstärke, die von der Elektrode i erzeugt wird. Diese Superponierbarkeit der elektrischen Feldstärke wird nun genutzt, um das elektrische Feld einer Elektrodenanordnung näherungsweise zu berechnen.

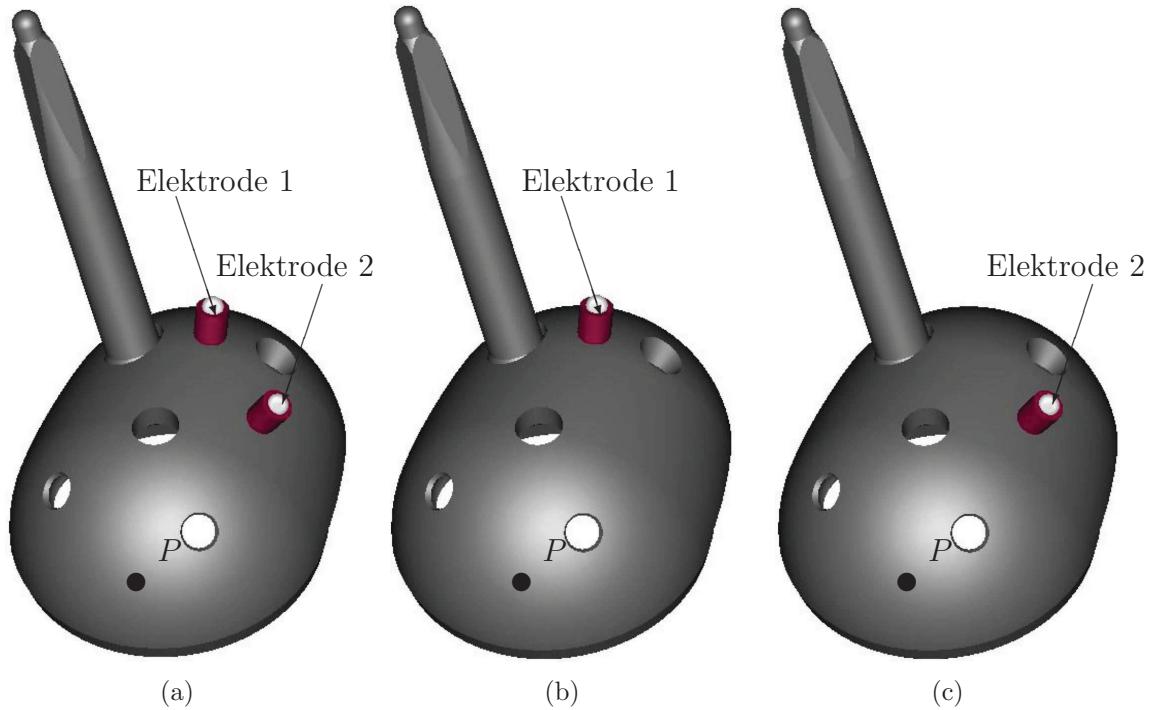


Abbildung 4.3: (a) Elektrodenanordnung bestehend aus zwei Stimulationselektroden. (b) & (c) Modelle mit einer einzelnen Stimulationselektrode zur näherungsweisen Berechnung der Feldverteilung der Anordnung aus (a).

Dieses soll am Beispiel der Elektrodenanordnung aus Abbildung 4.3(a) erläutert werden. Der Punkt P sei ein beliebiger Punkt innerhalb des umgebenden Hüftknochens (nicht dargestellt). Das elektrische Feld an diesem Punkt ergibt sich nach Gleichung (4.6) durch die Superposition der einzelnen Feldkomponenten der Stimulationselektroden eins und zwei. Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Berechnung des elektrischen Feldes am Punkt P ergibt sich, indem zunächst die einzelnen Modelle 4.3(b) und 4.3(c) simuliert und die jeweilige elektrische Feldstärke am Punkt P bestimmt wird. Näherungsweise kann die Feldstärke im Modell 4.3(a) am Punkt P dann durch

die vektorielle Addition der beiden mit den Modellen 4.3(b) und 4.3(c) bestimmten Feldstärken berechnet werden. Hierbei entsteht ein gewisser Fehler, da die Modelle 4.3(b) und 4.3(c) vom Modell 4.3(a) abweichen und die Superposition formal nicht gültig ist. Allerdings sind die Modelle hinreichend ähnlich, so dass dieser Fehler verhältnismäßig klein ist. Somit kann die Gleichung (4.6) wie folgt formuliert werden:

$$\vec{E}_{\vec{p}}(P) \approx \sum_{i=1}^N \vec{E}'_{p_i}(P). \quad (4.7)$$

Der Vektor $\vec{E}'_{p_i}(P)$ bezeichnet die Feldstärke, die die Elektrode i einer Anordnung am Punkt P erzeugen würde, wenn diese Elektrode die einzige Stimulationselektrode auf der Implantatoberfläche wäre.

Diese Form der näherungsweisen Berechnung bietet einen entscheidenden Vorteil: In der späteren Optimierungsphase wird eine große Anzahl von Elektrodenanordnungen ausgewertet, die unter Umständen sehr ähnlich sind. So können beispielsweise mehrere Elektrodenanordnungen Stimulationselektroden an den gleichen Positionen besitzen und sich lediglich hinsichtlich der Position von einer oder zwei Stimulationselektroden unterscheiden. Durch die Berechnung des elektrischen Feldes als Superposition einzelner Felder ist es möglich, die zuvor berechneten einzelnen Feldverteilungen abermals zu verwenden, ohne dass eine numerische Simulation erneut stattfinden müsste. Der hierbei unvermeidlich auftretende Fehler wird in Kapitel 6 gesondert betrachtet.

Dieser Ansatz der näherungsweisen Feldberechnung kann verbessert werden, indem die Feldverteilungen von Elektroden auf einem dichten Gitter von Positionen auf der Oberfläche systematisch abgetastet werden. Die Berechnung des aus einer Anordnung von mehreren Stimulationselektroden resultierenden elektrischen Feldes kann dann, ohne erneute zeitaufwändige Simulationen, durch die Superposition der im Voraus berechneten Feldverteilungen erfolgen.

4.1.1 Abtastung der Feldverteilung und Interpolation nicht simulierter Elektrodenpositionen

4.1.1.1 Abtastung der Feldverteilung

In diesem Abschnitt wird die systematische Abtastung der Feldverteilungen der einzelnen Elektrodenpositionen beschrieben. Da dieser Ansatz nur eine diskrete Menge von möglichen Elektrodenpositionen zulassen würde, wird im Anschluss eine Interpolation zwischen den simulierten Positionen vorgestellt. Hierdurch wird die elektrische Feldverteilung auch für Elektrodenanordnungen berechenbar, die Elektroden enthalten, die sich an nicht simulierten Positionen befinden.

Wie in Gleichung (4.7) beschrieben, kann das elektrische Feld an einem Punkt durch die Superposition der elektrischen Feldkomponenten der einzelnen Elektroden näherungsweise berechnet werden. Soll dieser Ansatz genutzt werden, um die Feldverteilung in einem Gebiet zu bestimmen, so muss zunächst eine Menge von Abtastpunkten

erzeugt werden, für die das elektrische Feld für alle zu simulierenden Elektrodenpositionen aufgenommen wird. Da das Knochenwachstum über der Implantatoberfläche im Knochen stimuliert werden soll, ist es sinnvoll diesen Bereich durch die Abtastpunkte zu erfassen. Die Abtastpunkte befinden sich in diesem Beispiel 3 mm über der Implantatoberfläche im Knochen. Der Abstand der Punkte in der x-y Ebene im globalen Koordinatensystem beträgt 1 mm. In diesem Beispiel werden so $m = 3265$ Messpunkte erzeugt. Der gesamte abgetastete Bereich wird fortan mit Ω bezeichnet.

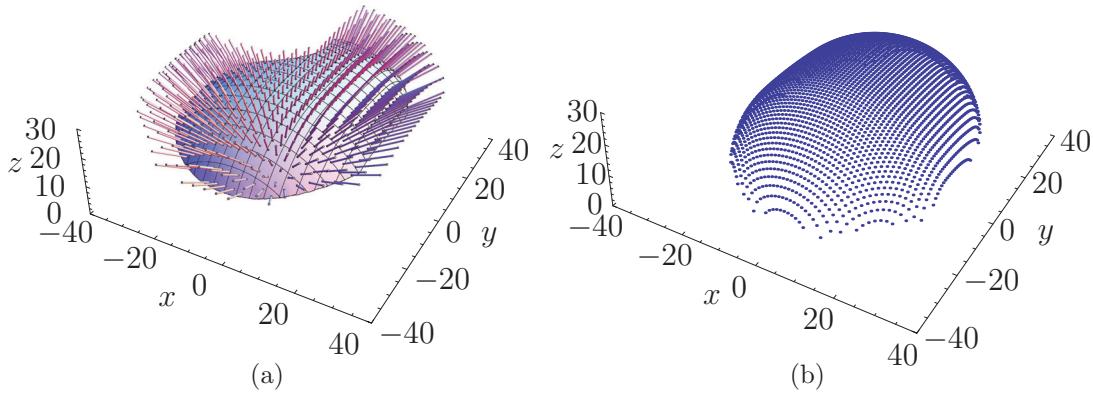


Abbildung 4.4: (a) Bereich der gültigen Elektrodenpositionen σ_E mit den abgetasteten Elektrodenpositionen. (b) Abtastpunkte 3 mm über der Implantatoberfläche mit einem Abstand in x- und y-Richtung von 1 mm.

Abbildung 4.4(a) zeigt die zu simulierenden Elektrodenpositionen, für die die elektrische Feldstärke an den Abtastpunkten aus Abbildung 4.4(b) bestimmt wird. Für jede Elektrodenposition wird ein Simulationsmodell, bestehend aus dem Implantat, dem geschichteten Knochen sowie einer Stimulationselektrode am entsprechenden Ort, erzeugt. Im Beispiel von Abbildung 4.4 werden $n = 514$ Simulationsmodelle erzeugt, die sich jeweils nur um die Position der Stimulationselektrode unterscheiden. In diesen Modellen wird nun zwischen der Implantatoberfläche und der Kappe der Elektrode die Spannung $U_{SIM} = 1$ V eingeprägt.

Um das elektrische Feld im Knochen und damit auch an den Messpunkten aus Abbildung 4.4(b) zu berechnen, muss lediglich ein Strömungsfeldproblem² numerisch gelöst werden, was mit einem relativ geringen Rechenaufwand möglich ist³. Da die einzelnen Simulationsmodelle voneinander unabhängig sind, können die Berechnungen beliebig auf mehreren Rechnern parallel simuliert werden⁴. Als Ergebnis dieser

²Unter den im vorherigen Kapitel beschriebenen Voraussetzungen verhält sich das Gewebe linear und resistiv. Somit kann die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt werden.

³Die Rechenzeit für ein Modell beträgt rund 30 min auf einer konventionellen Workstation (Stand 2009).

⁴Eine detaillierte Beschreibung der Simulation wird in Kapitel 6 gegeben.

Simulationsreihe liegt ein Datensatz vor, der die Feldverteilung aller simulierten Elektrodenpositionen enthält. Im Weiteren soll die folgende Notation gelten:

$$\vec{E}_{ik} = \begin{pmatrix} E_{ik,x} \\ E_{ik,y} \\ E_{ik,z} \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \quad (4.8)$$

Hierbei bezeichnet \vec{E}_{ik} das elektrische Feld, das eine Stimulationselektrode an Position i am Messpunkt k erzeugt. Somit liegen für jede der n simulierten Elektrodenpositionen m Feldstärkevektoren vor. Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass die Wahl der Messpunkte wie sie hier dargestellt ist, nicht zwingend so durchgeführt werden muss. Es können beliebige Punkte innerhalb des zu simulierenden Gebietes gewählt werden. Entscheidend ist, in welchem Areal die spätere Optimierung stattfinden soll. Dieses muss hinreichend dicht mit Messpunkten abgetastet werden, um das resultierende elektrische Feld in der späteren Optimierung beurteilen zu können. Auf Basis der simulierten Elektrodenpositionen kann nun das elektrische Feld an den Abtastpunkten einer beliebigen Anordnung von Elektroden auf der Implantatoberfläche näherungsweise berechnet werden, indem die korrespondierenden simulierten Feldverteilungen vektoriell überlagert werden. Hierfür ist es nützlich, einen zusätzlichen Wichtungsfaktor w_{p_i} einzuführen:

$$\vec{E}_k \approx \sum_{i=1}^N w_{p_i} \vec{E}_{p_i k}. \quad (4.9)$$

Dabei bezeichnet p_i den Index der Elektrode i der Elektrodenanordnung \vec{p} . Durch den in Gleichung (4.9) eingeführten Wichtungsfaktor w_{p_i} ist es möglich, die mit fester Potentialdifferenz berechneten elektrischen Felder zu skalieren, um Parameter, die in der numerischen Simulation nicht berücksichtigt wurden, in die Berechnung des elektrischen Feldes mit einzubringen. Somit kann das elektrische Feld für verschiedene sekundäre Windungszahlen, die Amplitude der anregenden magnetischen Flussdichten sowie die Stimulationsfrequenz (in gewissen Grenzen) näherungsweise aus dem Datensatz aus (4.8) berechnet werden.

Im nächsten Abschnitt wird näher auf die Berechnung der Wichtungsfaktoren eingegangen. Zunächst soll jedoch ein weiterer Punkt erörtert werden: Der bisherige Ansatz erlaubt es lediglich, die Stimulationselektroden auf diskreten Positionen zu platzieren. Da sich die simulierten Elektrodenpositionen jedoch dicht beieinander befinden (der Durchmesser der Stimulationselektroden beträgt ein Mehrfaches des Abstandes der simulierten Elektrodenpositionen) ist es möglich, das elektrische Feld einer innerhalb von σ_E positionierten, aber nicht simulierten Stimulationselektrode aus den simulierten Feldverteilungen zu interpolieren.

4.1.1.2 Interpolation nicht simulierter Elektrodenpositionen

Das elektrische Feld einer Anordnung von Stimulationselektroden ergibt sich nach Gleichung (4.9) näherungsweise als gewichtete Linearkombination der einzelnen Feld-

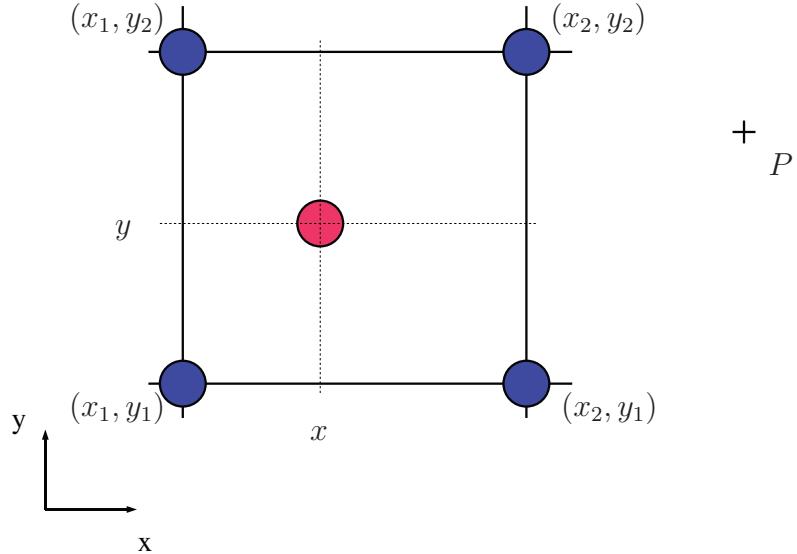


Abbildung 4.5: Interpolation des elektrischen Feldes am Punkt P einer nicht simulierten Elektrodenposition (rot) durch simulierte Elektrodenpositionen (blau).

komponenten. Mit diesem Ansatz könnten die Stimulationselektroden in der nachfolgenden Optimierung jedoch nur auf einer diskreten Menge von Positionen platziert werden. Daher soll das elektrische Feld von Elektroden an nicht simulierten Positionen aus den Feldverteilungen der umgebenden simulierten Elektrodenpositionen interpoliert werden.

Abbildung 4.5 zeigt eine Situation, wie sie während der Optimierung auftreten kann: Eine während der Optimierung generierte Elektrodenanordnung enthält eine oder mehrere Elektroden an Positionen (hier rot dargestellt), die nicht simuliert wurden. Das elektrische Feld, das eine Elektrode an dieser Position erzeugt, soll nun aus den Daten der umgebenden simulierten Elektrodenpositionen für alle Messpunkte (hier stellvertretend für den Punkt P) mittels bilinearer Interpolation berechnet werden. Hierfür werden zunächst die benachbarten simulierten Elektrodenpositionen bestimmt (in Abbildung 4.5 blau markiert). Die interpolierte elektrische Feldstärke an einem Abtastpunkt $\vec{E}_{Int}(P)$ ergibt sich durch die gewichtete Überlagerung der elektrischen Feldstärken der simulierten Elektrodenpositionen zu:

$$\vec{E}_{Int}(P) = w_{x_1y_1}\vec{E}_{x_1y_1}(P) + w_{x_1y_2}\vec{E}_{x_1y_2}(P) + w_{x_2y_1}\vec{E}_{x_2y_1}(P) + w_{x_2y_2}\vec{E}_{x_2y_2}(P). \quad (4.10)$$

Die Wichtungsfaktoren $(w_{x_1y_1}, w_{x_1y_2}, w_{x_2y_1}, w_{x_2y_2})$ ergeben sich wegen der angenommenen Linearität in beiden Koordinaten x und y durch folgende Verhältnisse:

$$\begin{aligned}
 w_{x_1y_1} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \\
 w_{x_2y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \\
 w_{x_1y_2} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \\
 w_{x_2y_2} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Diese Interpolation wird für alle Abtastpunkte durchgeführt. Somit liegt für die nicht simulierte Elektrodenposition ein interpolierter Datensatz vor. Mit diesem kann das elektrische Feld der Elektrodenanordnung mit der nicht simulierten Elektrodenposition berechnet werden.

4.2 Berechnung der Skalierungsfaktoren des elektrischen Feldes

In diesem Abschnitt wird anhand eines Ersatzschaltbildes (ESB) eine semi-analytische Beschreibung des magnetisch gekoppelten Elektrostimulationssystems vorgestellt, die es erlaubt, die Wichtungsfaktoren w_{p_i} aus Gleichung (4.9) schnell und effektiv zu berechnen. Hierzu soll zunächst ein Implantat mit lediglich einer Stimulationselektrode betrachtet werden, die auf der Implantatoberfläche positioniert ist und durch die Primärspule magnetisch angeregt wird (siehe Abbildung 4.6(a)).

Abbildung 4.6(b) zeigt das Ersatzschaltbild des in Abbildung 4.6(a) dargestellten Stimulationssystems. Hierbei repräsentieren L_P und R_P die Eigeninduktivität und den ohmschen Widerstand der Primärspule. Die magnetische Kopplung erfolgt durch die Gegeninduktivität M . Im Kreis der Sekundärspule repräsentieren L und R_C die Eigeninduktivität und den ohmschen Widerstand der Sekundärspule. Die Parallelschaltungen von R_{CT1} und Z_{edl1} sowie R_{CT2} und Z_{edl2} modellieren die Grenzschichten zwischen Elektrodenkappe und Knochen beziehungsweise Knochen und Implantatoberfläche⁵. Aufgrund der unterschiedlichen Beschaffenheit bezüglich der wirksamen Oberfläche und Oberflächenstruktur müssen diese Grenzschichten separat behandelt werden. Der Widerstand R_G modelliert den ohmschen Widerstand zwischen der Elektrodenkappe und der Implantatoberfläche, der durch den Knochen gebildet wird⁶. Dieser Widerstand ist, wie auch die Gegeninduktivität M , von der Position der Stimulationselektrode auf der Oberfläche des Implantats abhängig. Jede zuvor simulierte Elektrodenposition hat einen spezifischen Widerstand R_{Gi} , der zusätzlich zu den Feldverteilungen aus Gleichung (4.8) aus den Simulationsdaten bestimmt wird. Hierzu

⁵Die Widerstände R_{B1} und R_{B2} wurden mit den CP-Elementen zusammengefasst.

⁶Wie bereits erwähnt, verhält sich das Knochenmaterial bei Frequenzen kleiner 10 kHz in sehr guter Näherung resistiv.

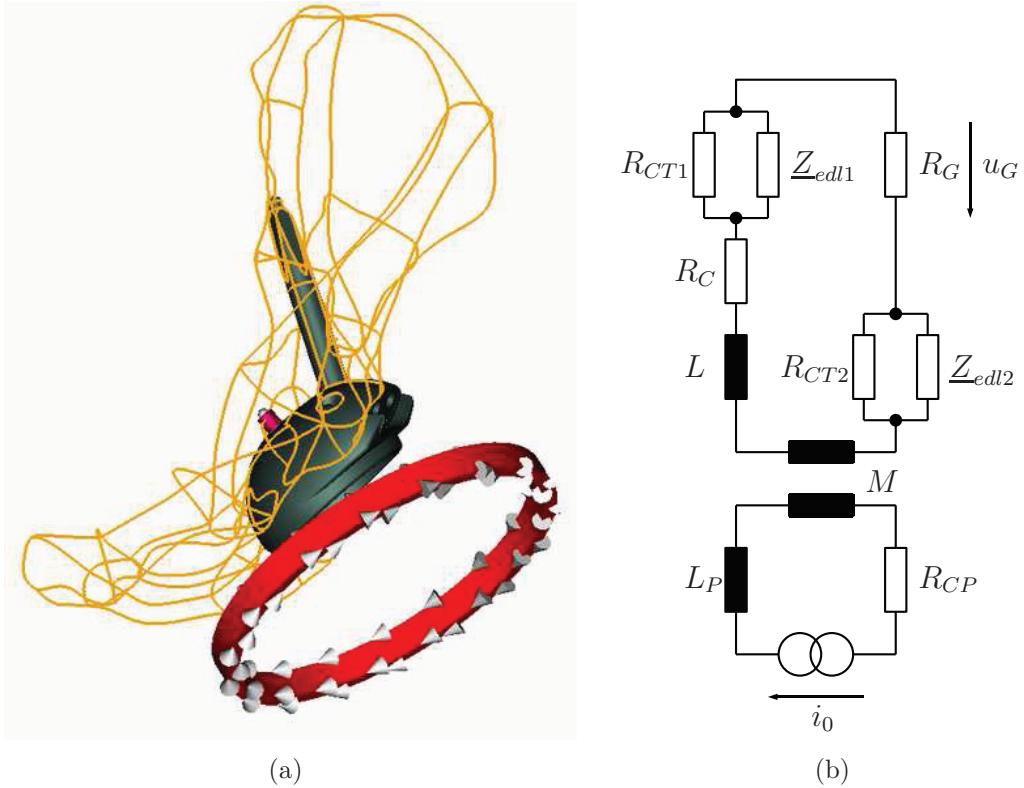


Abbildung 4.6: Elektrostimulierendes Hüftimplantat mit einer Stimulationselektrode und Primärspule (Knochen als Drahtgittermodell) (a) und Ersatzschaltbild des Elektrostimulationssystems (b).

wird die im Simulationsmodell definierte Potentialdifferenz U_{SIM} auf den Stromfluss I_i durch die Kappe einer Stimulationselektrode an der Position i bezogen:

$$R_{Gi} = \frac{U_{SIM}}{I_i}. \quad (4.12)$$

Sind die weiteren Elemente des ESB bekannt, so kann der Spannungsabfall über dem Gewebewiderstand berechnet werden. Die Berechnung sowie das Bestimmen der ESB-Elemente wird nachfolgend für eine beliebige Anzahl von Stimulationselektroden auf der Oberfläche im Frequenz- sowie im Zeitbereich erfolgen. Hier soll zunächst nur festgestellt werden, dass die Kenntnis von u_G und U_{SIM} das Berechnen des korrespondierenden Wichtungsfaktors aus Gleichung (4.9) ermöglicht, da die räumliche Verteilung des erzeugten elektrischen Feldes der Elektrode nicht von der Potentialdifferenz zwischen der Elektrodenkappe und der Implantatoberfläche abhängt⁷. Diese

⁷Es soll an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, dass es zwar einen Spannungsabfall an den Materialgrenzen zwischen Knochen und Implantat sowie Knochen und Elektrodenkappe gibt, diese Materialgrenze aber aus makroskopischer Sicht keine Ausdehnung in den Knochen besitzt. Somit wirken sich diese Materialgrenzen lediglich auf den Spannungsabfall über dem Knochen, jedoch nicht auf die Verteilung des elektrischen Feldes aus.

4.2 Berechnung der Skalierungsfaktoren des elektrischen Feldes

wirkt als skalierende Größe auf den Betrag der elektrischen Feldstärke. Somit ergibt sich der Wichtungsfaktor für eine Stimulationselektrode an Position i zu:

$$w_i := \frac{u_{Gi}}{U_{SIM}}. \quad (4.13)$$

Der Spannungsabfall u_{Gi} über dem Knochen ist seinerseits von den Designparametern (Anzahl der Primär- und Sekundärwindungen, Stromstärke, Position und Orientierung der Primärspule sowie Frequenz des Stromes i_0) abhängig.

Nun soll der präsentierte Ansatz auf den allgemeinen Fall von mehreren Stimulationselektroden auf der Implantatoberfläche übertragen werden. Ziel ist es, die Wichtungsfaktoren w_{pi} einer Elektrodenanordnung \vec{p} für Gleichung (4.9) zu bestimmen, um das resultierende elektrische Feld im Optimierungsgebiet mit dem Datensatz aus (4.8) zu berechnen.

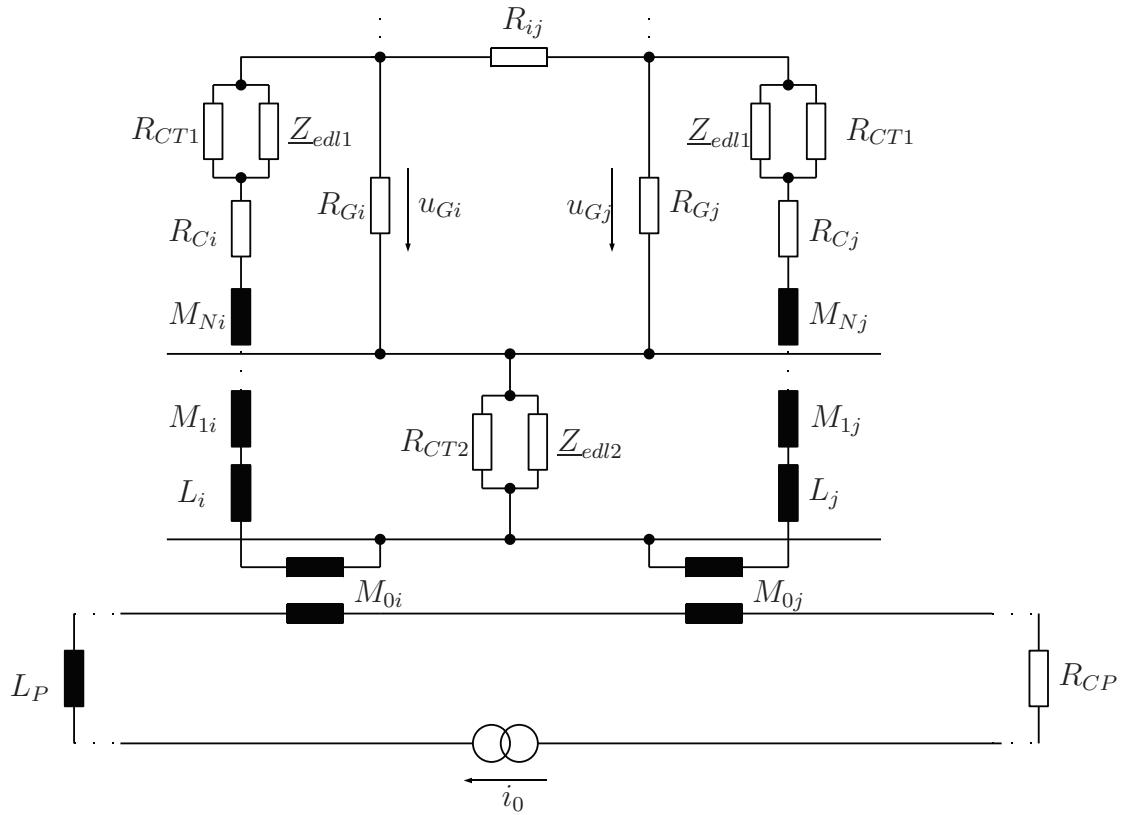


Abbildung 4.7: Erweitertes Ersatzschaltbild eines Elektrostimulationssystems mit N individuellen Stimulationselektroden auf der Implantatoberfläche. Dargestellt sind die Elemente der Stimulationselektroden i und j sowie die Elemente der Erregerspule.

In Abbildung 4.7 sind die Elemente der Stimulationselektroden i und j eines Elektrostimulationssystems mit N Elektroden als Verallgemeinerung des Ein-Elektroden-Systems aus Abbildung 4.6(b) dargestellt. Zusätzlich zu den bekannten Elementen

enthält nun jeder Elektrodenkreis die Gegeninduktivitäten M_{1i}, \dots, M_{Ni} beziehungsweise M_{1j}, \dots, M_{Nj} , um die magnetische Kopplung der einzelnen Stimulationselektroden untereinander nachzubilden. Jede Stimulationselektrode ist mit der primären Erregerspule über eine Gegeninduktivität M_{0i} gekoppelt.

Die Übergangsschicht zwischen Implantat und Knochen kann in guter Näherung als gleichmäßig über der Oberfläche verteilt angenommen werden. Daher beziehen sich die Spannungsabfälle über den Gewebewiderständen R_{G1}, \dots, R_{GN} auf das gleiche Bezugspotential φ_0 . Somit können in volliger Analogie zu dem Ein-Elektroden-Stimulationssystem die Wichtungsfaktoren aller Stimulationselektroden der Anordnung als

$$w_{pi} := \frac{u_{Gi}}{U_{SIM}} \quad (4.14)$$

definiert werden. Sind diese Wichtungsfaktoren bekannt, so kann das elektrische Feld durch die Überlagerung der einzelnen Feldverteilungen nach (4.9) berechnet werden. Hierzu müssen jedoch die noch unbekannten ESB-Elemente bestimmt werden, um dann mittels einer Netzwerkanalyse die unbekannten Spannungen zu berechnen.

4.2.1 Elemente des Ersatzschaltbildes des Elektrostimulationssystems

4.2.1.1 Selbst- und Gegeninduktivitäten

In diesem Abschnitt sollen die Selbst- und Gegeninduktivitäten L_i und M_{ij} berechnet werden. Es wird davon ausgegangen, dass sich keine magnetisierbaren Materialien im Stimulationssareal⁸ befinden. Es gilt also im gesamten Gebiet $\mu_r = 1$. Weiterhin sollen die Primärspule und die Sekundärspulen aus Kreisringen geformt sein, wobei der Stromfluss auf einen vernachlässigbar dünnen Querschnitt begrenzt ist.

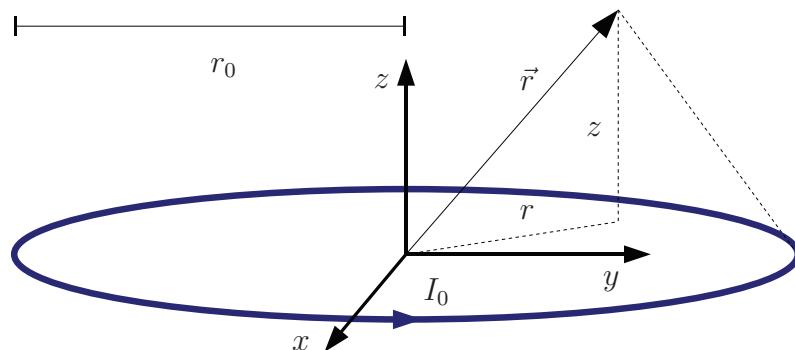


Abbildung 4.8: Stromschleife mit dem Radius r_0 .

Zunächst soll die magnetische Flussdichte, die ein stromdurchflossener Kreisring des Radius r_0 verursacht, betrachtet werden. Nach Gleichung (2.30) kann die magnetische

⁸Biologisches Gewebe ist nicht magnetisierbar, und im Elektrostimulationssystem sollen keine magnetischen Materialien eingesetzt werden.

Flussdichte \vec{B} als die Rotation eines noch unbekannten Vektorpotentials \vec{A} dargestellt werden. Unter den genannten Voraussetzungen und durch die Wahl eines geeigneten Zylinderkoordinatensystems (siehe Abbildung 4.8) folgt zunächst, dass lediglich die A_φ -Komponente verschieden von Null ist. Nach [Sim93] (Seite 351 f.) ergibt sich diese Komponente zu:

$$A_\varphi(r, z) = \frac{\mu_0 I r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{z^2 + r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi)}} d\phi. \quad (4.15)$$

Das Auswerten von (4.15) liefert für A_φ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{4r_0 r}{z^2 + (r + r_0)^2}, \\ A_\varphi(r, z) &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sqrt{z^2 + (r_0 + r)^2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hierbei bezeichnen $F(\pi/2, k)$ und $E(\pi/2, k)$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Art, die wie folgt definiert sind:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (4.17)$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (4.18)$$

Somit ergibt sich die magnetische Flussdichte (in Zylinderkoordinaten) eines vom Strom I_0 durchflossenen Kreisringes mit dem Radius r_0 , die im Koordinatenursprung liegt und deren Achse parallel zur z-Achse des Koordinatensystems ist, zu:

$$\vec{B}(r, z) = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ A_\varphi(r, z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z A_\varphi(r, z) \\ 0 \\ \frac{1}{r} \partial_r(r A_\varphi(r, z)) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

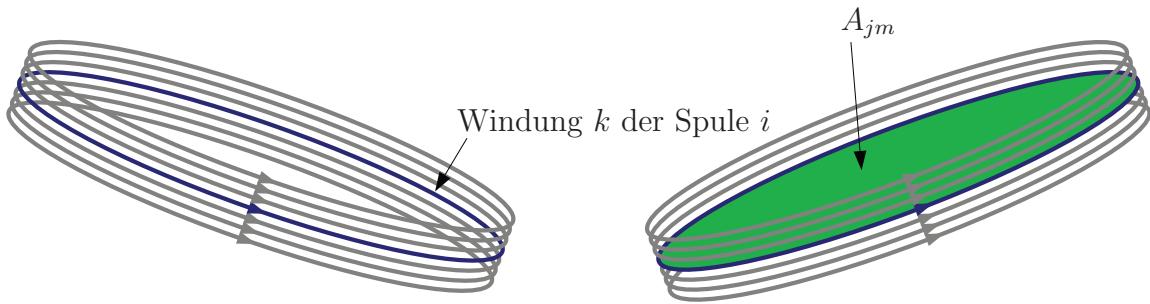


Abbildung 4.9: Dargestellt sind der k -te Kreisring der Spule i und die Fläche des m -ten Kreisringes der Spule j .

4 Zur schnellen Berechnung des elektrischen Feldes im Hüftknochen

Das Auswerten von Gleichung (4.19) liefert die magnetische Flussdichte in jedem Punkt im Stimulationsareal. Sollte die Spule nicht wie beschrieben positioniert sein, kann sie durch eine lineare Koordinatentransformation [BSMM01] der Form:

$$\vec{r}' = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; \vec{r}, \vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \quad (4.20)$$

in ein geeignetes Koordinatensystem überführt werden. Hierbei beschreibt \mathbf{A} die Rotation, während \vec{b} die Translation beschreibt. Soll nun die magnetische Flussdichte an einem Ort \vec{r} ausgewertet werden, so wird dieser Ort durch Gleichung (4.20) auf \vec{r}' abgebildet.

Die Selbst- und Gegeninduktivitäten zweier Spulen können durch das Aufsummieren der Flusskomponenten der verschiedenen Windungen berechnet werden, die durch Gleichung (4.20) geeignet transformiert wurden. Für die Gegeninduktivität der Spulen i und j ergibt sich:

$$M_{ij} = \frac{1}{I_i} \sum_{k=1}^{N_{Wi}} \sum_{m=1}^{N_{Wj}} \iint_{A_{jm}} \vec{B}_{ik} \cdot d\vec{a}. \quad (4.21)$$

Hier bezeichnet \vec{B}_{ik} die magnetische Flussdichte, die der k -te Kreisring der i -ten Spule an einem Punkt erzeugt. Soll nun die Gegeninduktivität zwischen dem k -ten Kreisring der i -ten Spule und dem m -ten Kreisring der j -ten Spule berechnet werden, so wird \vec{B}_{ik} über die Fläche A_{jm} des m -ten Kreisringes integriert und auf den Strom der i -ten Spule I_i normiert (siehe Abbildung 4.9). Die Summation aller auf diesem Weg berechneten Teilinduktivitäten liefert die Gegeninduktivität M_{ij} . Die Selbstinduktivität der Spule i wird analog berechnet:

$$L_i = \frac{1}{I_i} \sum_{k=1}^{N_{Wi}} \sum_{m=1}^{N_{Wi}} \iint_{A_{im}} \vec{B}_{ik} \cdot d\vec{a}. \quad (4.22)$$

Für kurze Spulen⁹ kann die rechenaufwändige Summation reduziert werden, indem die Integration lediglich für die Mittelebene der Spulen durchgeführt wird. Unter der Annahme, dass sich die einzelnen Summationsterme nur wenig unterscheiden, können die Selbst- und Gegeninduktivitäten dann näherungsweise wie folgt berechnet werden:

$$M_{ij} \approx \frac{N_{Wi} N_{Wj}}{I_i} \iint_{A_{Nj/2}} \vec{B}_{N_i/2} \cdot d\vec{a} \quad (4.23)$$

$$L_i \approx \frac{N_{Wi}^2}{I_i} \iint_{A_{Nj/2}} \vec{B}_{N_i/2} \cdot d\vec{a}. \quad (4.24)$$

Der relative Fehler der nach (4.23) und (4.24) berechneten Induktivitäten hängt vom Verhältnis des Durchmessers zur Spulenlänge, sowie im Fall von (4.23) vom Abstand

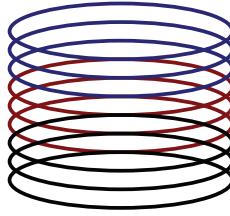


Abbildung 4.10: Beispielhafte Zerlegung einer Spule in drei kurze Teilspulen.

der beiden Spulen ab. Ist die Annahme einer kurzen Spule nicht gerechtfertigt, so kann eine Spule in mehrere Teilspulen zerlegt werden. Im Anschluss wird die Induktivität zwischen allen Teilen bestimmt, um dann die Gesamtinduktivität zu berechnen.

Abbildung 4.10 zeigt eine Spule, die in mehrere kurze Teilspulen zerlegt wurde. Die Eigen- und Gegeninduktivitäten können mit den Gleichungen (4.24) beziehungsweise (4.23) näherungsweise berechnet werden. Die gesamte Eigeninduktivität (die Bestimmung einer Gegeninduktivität erfolgt analog) kann dann mittels Gleichung (4.22) bestimmt werden. Hierbei werden die Teilspulen als einzelne Windungen aufgefasst. Mit einer feineren Zerlegung der ursprünglichen Spule kann die Genauigkeit der berechneten Induktivitäten weiter gesteigert werden. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Induktivitäten zwischen verschiedenen Spulen sehr genau bestimmt werden können, ohne dabei die aufwändige Berechnung aller Teilinduktivitäten nach Gleichung (4.21) beziehungsweise (4.22) vornehmen zu müssen.

4.2.1.2 Kopplungswiderstand zwischen den Stimulationselektroden

Aufgrund der Ausrichtung der Stimulationselektroden zum primären Magnetfeld sowie einer inhomogenen Materialverteilung in der Umgebung der Stimulationselektroden befinden sich die Kappen unterschiedlicher Stimulationselektroden auf unterschiedlichen Potentialen. Hierdurch fließen zwischen ihnen Austauschströme. Durch die Widerstände R_{ij} des ESB aus Abbildung 4.7 wird dieser Stromfluss zwischen den einzelnen Stimulationselektroden modelliert.

Sollen nun die Verbindungswiderstände aller simulierten Elektrodenpositionen zueinander berechnet werden, würde dieses eine sehr große Anzahl von Simulationen erfordern, da diese Zahl der nötigen Simulationen quadratisch mit der Anzahl der einzelnen Elektrodenpositionen skaliert. Somit würden n Elektrodenpositionen n Simulationen zur Berechnung der Feldverteilungen erfordern und weitere $n^2 - n$ Simulationen, um die Verbindungswiderstände zu bestimmen¹⁰. Dieses ist nicht praktikabel, da n in der Größenordnung von einigen hundert ist und somit mehrere zehntausend Simulationen nötig wären. Daher wurde ein anderer Weg gewählt: Anstatt den Wi-

⁹Spulen, deren Länge wesentlich kleiner ist als ihr Durchmesser.

¹⁰Werden die Materialeigenschaften des Knochens als isotrop angenommen - es gilt also die Reziprozität von Quelle und Senke - sind $1/2n^2 - n$ Simulationen nötig.

derstand R_{ij} zwischen allen Elektrodenpositionen separat zu berechnen, wird eine Interpolationsfunktion der Form:

$$r_{ij} : \{\{x_i, y_i\}, \{x_j, y_j\}\} \rightarrow R_{ij} \quad \{x_i, y_i\}, \{x_j, y_j\} \in \sigma_E, \quad R_{ij} \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

verwendet, die dem Koordinatentupel $\{\{x_i, y_i\}, \{x_j, y_j\}\}$ zweier Stimulationselektroden einen angenäherten Widerstandswert R_{ij} zuweist. Hierzu muss zunächst der Definitionsbereich von r_{ij} abgetastet werden, um die Basispunkte für die Interpolation zu erzeugen. Dieses kann mittels des zur Aufnahme der Feldverteilung genutzten Ansatzes der Simulation von Anordnungen mit jeweils einer Stimulationselektrode erfolgen. Jedoch werden nun Simulationsmodelle mit jeweils zwei Stimulationselektroden erzeugt.

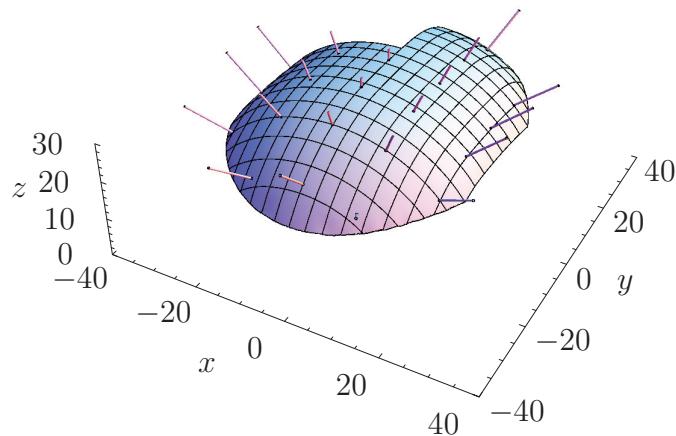


Abbildung 4.11: Zur Erzeugung der Stützstellen der Interpolationsfunktion aus Gleichung (4.25) verwendete Elektrodenpositionen.

Abbildung 4.11 zeigt ein Beispiel für die Wahl möglicher Abtastpunkte. Hierzu wurden im Optimierungsbereich σ_E Elektrodenpositionen mit festem Abstand bestimmt (der Abstand beträgt in der Abbildung 10 mm). Danach werden alle Kombinationen von jeweils zwei Stimulationselektroden an den Positionen simuliert (unter Berücksichtigung der Reziprozität ergibt dieses für Abbildung 4.11 dann 210 zu simulierende Kombinationen), und der Widerstand zwischen den beiden Elektroden wird ermittelt. Wie schon zuvor erwähnt, können auch diese Simulationen unabhängig voneinander parallel durchgeführt werden, um den Prozess der Datengewinnung zu beschleunigen. Die berechneten Widerstandswerte können nun als Stützstellen zur Konstruktion einer Interpolationsfunktion nach Definition (4.25) genutzt werden.

4.2.1.3 Elemente der Materialgrenzen

In Kapitel 3 wurden die theoretischen Grundlagen für die Beschreibung der Materialgrenze zwischen Implantat, Knochen sowie den Kappen der Elektroden erläutert.

Zusätzlich wurden Messwerte präsentiert und das Skalierungsverhalten dieser Elemente analysiert. Wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, finden an den Materialgrenzen chemische und nicht-chemische Prozesse statt. Diese werden durch die Elemente R_{CT} und \underline{Z}_{edl} modelliert. Der Beschichtungswiderstand R_B aus Abbildung 3.11 wird aus Gründen der Übersichtlichkeit mit dem CPE zur Impedanz \underline{Z}_{edl} zusammengefasst. Zunächst soll die Materialgrenze zwischen dem Implantat und dem Knochen betrachtet werden. Das Implantat wird während des Produktionsprozesses mittels eines VPS-Beschichtungsverfahrens mit einer speziellen Oberfläche ausgestattet, um dem Knochen das Anwachsen zu erleichtern. Aus dem CAD-Modell eines Implantates kann die Fläche des Überganges zwischen Implantat und Knochen berechnet werden. Mit dieser Fläche können die Impedanz \underline{Z}_{edl2} sowie die Strom-/Spannungs-Kennlinie des Ladungstransferwiderstandes R_{CT2} bestimmt werden. Da diese Elemente von der Größe der Implantatoberfläche abhängen, soll die quantitative Betrachtung in Kapitel 6 zur Vorbereitung der Optimierung erfolgen. Mit den Elementen R_{CT1} und \underline{Z}_{edl1} , die die Materialgrenze an den Elektrodenkappen modellieren, wird ebenfalls so verfahren.

4.3 Potentialberechnung

In diesem Abschnitt sollen nun mit den zuvor bestimmten Elementen des Ersatzschaltbildes die Potentiale der Elektrodenkappen gegen die Implantatoberfläche berechnet werden. In Kapitel 3 wurde die Grenzschicht zwischen Metall und biologischem Gewebe behandelt. Dabei wurde festgestellt, dass für kleine Spannungsabfälle über der Grenzschicht der nichtlineare Ersatzwiderstand R_{CT} , der den Ladungstransfer an der Grenzschicht beschreibt, durch einen linearen ohmschen Widerstand ersetzt werden kann. In diesem Fall verhält sich das vorliegende System linear und kann bei harmonischer Erregung ohne Probleme mit den herkömmlichen Verfahren der Netzwerkanalyse berechnet werden.

Die Berechnung der Elektrodenpotentiale erfolgt daher auf zwei unterschiedliche Weisen: Zunächst werden die nichtlinearen Elemente der Materialgrenzen linearisiert, und es wird eine harmonische Erregung angenommen. Die Potentiale werden dann mittels einer Knotenspannungsanalyse [Phi00] berechnet. Danach soll das nichtlineare Verhalten berücksichtigt werden, und die Berechnung des elektrischen Feldes soll im Zeitbereich erfolgen. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt dann, ob die Elemente der Materialgrenzen in den nichtlinearen Bereich ausgesteuert werden und somit einen nennenswerten nichtlinearen Einfluss auf die elektrische Feldstärke im Knochen haben oder ob sie in guter Näherung als linear betrachtet werden können.

4.3.1 Berechnung der Wichtungsfaktoren im Frequenzbereich

Um die Potentialberechnung im Frequenzbereich durchzuführen, soll zunächst das Ersatzschaltbild aus Abbildung 4.7 vereinfacht werden. Abbildung 4.12 zeigt ein äquivalentes Ersatzschaltbild, das genutzt werden soll, um die Spannungsabfälle \underline{U}_G über

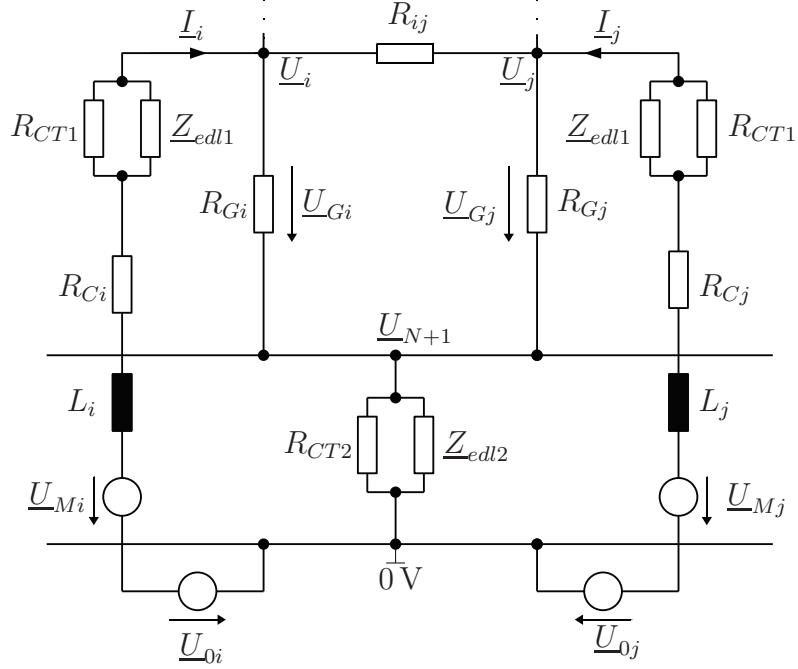


Abbildung 4.12: Ersatzschaltbild des Elektrostimulationsystems für die Berechnung im Frequenzbereich.

den Gewebewiderständen zu berechnen und somit im Anschluss die Wichtungsfaktoren aus Gleichung (4.14) zu bestimmen. Im vereinfachten Ersatzschaltbild wurden die Elemente der Primärspule entfernt und die entsprechenden Gegeninduktivitäten durch die Spannungsquellen $\underline{U}_{01}, \dots, \underline{U}_{N1}$ ersetzt. Weiterhin wurden alle Gegeninduktivitäten zwischen den Elektroden durch äquivalente Spannungsquellen ersetzt. Hierbei bezeichnet \underline{U}_{Mi} die durch den Stromfluss in den anderen Stimulationselektroden induzierte Spannung in der Elektrode i .

Die Spannungsquellen $\underline{U}_{01}, \dots, \underline{U}_{0N}$ können mit den durch Gleichung (4.23) berechneten Induktivitäten bestimmt werden:

$$\underline{U}_{0i} = -j\omega M_{0i} \underline{I}_0. \quad (4.26)$$

Hierbei bezeichnet \underline{I}_0 den anregenden Strom in der Primärspule. Die Spannungsquellen \underline{U}_{Mi} ergeben sich als Summe aller durch die Gegeninduktivitäten induzierten Spannungen, welche durch die Gegeninduktivitäten M_{ik} zwischen den Stimulationselektroden sowie den durch die entsprechenden Spulen fließenden Ströme \underline{I}_k ausgedrückt werden können:

$$\underline{U}_{Mi} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N j\omega M_{ik} \underline{I}_k. \quad (4.27)$$

Sind die Impedanzen Z_k der entsprechenden Zweige bekannt, so können die Ströme I_k in Gleichung (4.27) durch die Knotenspannungen U_k ausgedrückt werden:

$$\underline{U}_{Mi} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N j\omega M_{ik} \underline{Z}_k^{-1} \underline{U}_k. \quad (4.28)$$

Die Impedanzen Z_k können direkt aus dem Ersatzschaltbild aus Abbildung 4.12 abgelesen werden:

$$\underline{Z}_k = j\omega L_k + R_{Ck} + (R_{CT1}^{-1} + \underline{Z}_{edl1}^{-1})^{-1}. \quad (4.29)$$

Um die unbekannten Spannungen U_i zu berechnen, wird eine Knotenspannungsanalyse (KSA) durchgeführt. Hierfür müssen alle Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umgerechnet werden. Abbildung 4.13 zeigt ein Ersatzschaltbild, in dem dieses geschehen ist. Die Stromquellen ergeben sich mit den aus Gleichung (4.29) bekannten Impedanzen zu:

$$\underline{L}_{0i} = \underline{Z}_i^{-1}(\underline{U}_{0i} + \underline{U}_{Mi}). \quad (4.30)$$

Der Grundgedanke der KSA lautet, dass die Summe aller Ströme an einem Knotenpunkt Null ergibt. Diese Forderung wird nach ihrem Entdecker als erstes kirchhoffsches Gesetz bezeichnet.

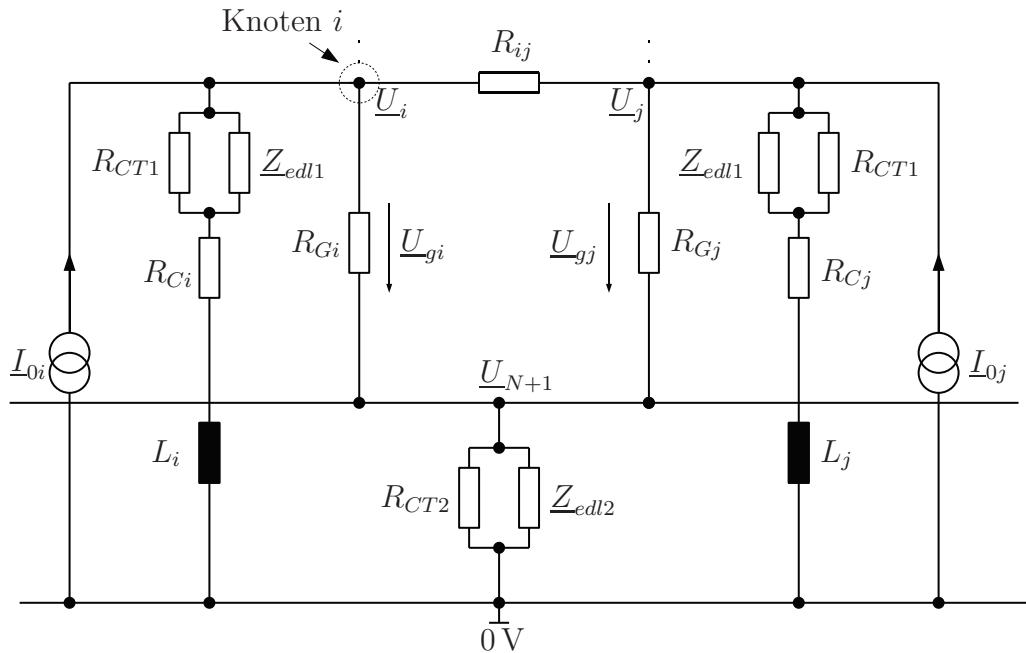


Abbildung 4.13: Ersatzschaltbild des Elektrostimulationsystems (zwei Stimulations-elektroden dargestellt) und Knoten i markiert.

4 Zur schnellen Berechnung des elektrischen Feldes im Hüftknochen

Am Knoten i (vergleiche Abbildung 4.13) ergibt sich nun folgende Strombilanz (ausgedrückt in den Knotenspannungen):

$$0 = \underline{Z}_i^{-1} \underline{U}_i + R_{Gi}^{-1} (\underline{U}_i - \underline{U}_{N+1}) + \sum_{k=1, k \neq i}^N R_{ik}^{-1} (\underline{U}_i - \underline{U}_k) - \underline{I}_{0i}. \quad (4.31)$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Strom \underline{I}_{0i} selbst von den Knotenspannungen abhängig ist. Mit den Gleichungen (4.26) - (4.30) können diese Anteile den korrespondierenden Knotenspannungen zugeordnet werden:

$$\begin{aligned} -j\omega M_{0i} \underline{Z}_i^{-1} \underline{I}_0 &= \left(\underline{Z}_i^{-1} + R_{Gi}^{-1} + \sum_{k=1, k \neq i}^N R_{ik}^{-1} \right) \underline{U}_i \\ &\quad - \sum_{k=1, k \neq i}^N (R_{ik}^{-1} - j\omega M_{ik} \underline{Z}_i^{-1} \underline{Z}_k^{-1}) \underline{U}_k - R_{Gi}^{-1} \underline{U}_{N+1}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite nur vom anregenden Strom \underline{I}_0 abhängig. Die rechte Seite enthält die zu bestimmenden Knotenspannungen \underline{U}_i . Insgesamt können für N Stimulationselektroden N Gleichungen aufgestellt werden. Für das Potenzial auf der Implantatoberfläche kann eine zusätzliche Gleichung formuliert werden (wiederum in den Knotenspannungen geschrieben):

$$0 = \left(R_{CT2}^{-1} + \underline{Z}_{edl2}^{-1} + \sum_{k=1}^N R_{Gk}^{-1} \right) \underline{U}_{N+1} - \sum_{k=1}^N R_{Gk}^{-1} \underline{U}_k. \quad (4.33)$$

Somit wird das System mit $N + 1$ Knotenspannungen durch $N + 1$ Gleichungen beschrieben. Die unbekannten Knotenspannungen ergeben sich als Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\vec{I} = \mathbf{G} \cdot \vec{U} \quad \vec{I}, \vec{U} \in \mathbb{C}^{N+1}; \mathbf{G} \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}. \quad (4.34)$$

Die Matrix \mathbf{G} kann für eine beliebige Anzahl von Stimulationselektroden (N) nach dem folgenden Muster konstruiert werden:

$$\begin{aligned} g_{ii} &:= R_{Gi}^{-1} + \underline{Z}_i^{-1} + \sum_{k=1, k \neq i}^N R_{ik}^{-1} \\ g_{(N+1)(N+1)} &:= \sum_{k=1}^N R_{Gk}^{-1} + R_{CT2}^{-1} + \underline{Z}_{edl2}^{-1} \\ g_{ij} &:= -R_{ij}^{-1} + j\omega M_{ij} \underline{Z}_i^{-1} \underline{Z}_j^{-1} \\ g_{i(N+1)} &:= -R_{Gi}^{-1} \\ g_{(N+1)j} &:= -R_{Gj}^{-1} \\ \mathbf{G} &:= [g_{ij}]_{N+1, N+1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Sie ähnelt im Aufbau der bekannten Leitwertmatrix der Knotenspannungsanalyse: Die Elemente der Hauptdiagonale ergeben sich durch die Summe aller Leitwerte, die mit diesem Knoten verbunden sind. Die Elemente der Nebendiagonalen ergeben sich jeweils durch die negative Summe aller Leitwerte, die die beiden korrespondierenden Knoten miteinander verbinden.

Im Unterschied zur konventionellen Knotenspannungsanalyse enthalten die Elemente, die sich nicht auf der Hauptdiagonale befinden, einen weiteren Term, der neben der ohmschen Kopplung die magnetische Kopplung zwischen zwei Knoten repräsentiert. Der Vektor \vec{I} enthält die magnetische Anregung durch die Primärspule und kann nach folgendem Muster konstruiert werden:

$$\vec{I} = -j\omega \underline{I}_0 \begin{pmatrix} M_{01} \underline{Z}_1^{-1} \\ \vdots \\ M_{0N} \underline{Z}_N^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Die Zeile i enthält die magnetische Kopplung der Primärspule mit der entsprechenden Stimulationselektrode. Die Zeile $N+1$ enthält eine Null, da die Grenzschicht zwischen Implantat und Knochen und die Primärspule keiner magnetischen Wechselwirkung unterliegen. Das Lösen des linearen Gleichungssystems aus (4.34) liefert den Vektor der Knotenspannungen \vec{U} . Mit diesem können die Wichtungsfaktoren aus Gleichung (4.14) berechnet werden:

$$\underline{w}_i := \frac{\underline{U}_i - \underline{U}_{N+1}}{U_{SIM}}. \quad (4.37)$$

Die Wichtungsfaktoren enthalten sowohl die Informationen über die Amplitude als auch über die Phase (in Relation zur Phase des anregenden Stromes \underline{I}_0 in der primären Spule). Die Berechnung der Feldstärke an den Messpunkten kann nun mittels Gleichung (4.9) erfolgen.

4.3.2 Berechnung des elektrischen Feldes im Zeitbereich

Neben der Feldberechnung im Frequenzbereich soll hier auch die Berechnung des elektrischen Feldes im Zeitbereich betrachtet werden, da so auch die nichtlinearen Elemente der Materialgrenzen zwischen Metall und Knochen simuliert werden können. Wie bereits festgestellt wurde, verhält sich das Knochenmaterial im für die Elektrostimulation relevanten Frequenz- und Feldstärkebereich linear. In völliger Analogie zur bisherigen Vorgehensweise kann die Berechnung der Potentiale mittels eines Ersatzschaltbildes erfolgen. Hierzu wird nun jedoch das ursprüngliche ESB verwendet, da die Vereinfachungen, die für den harmonischen Fall durchgeführt werden konnten, nicht mehr gültig sind.

Im Fall einer transienten Simulation im Zeitbereich sind die Wichtungsfaktoren nun ihrerseits Funktionen der Zeit. Somit schreibt sich Gleichung (4.37) als:

$$w_i(t) := \frac{u_{Gi}(t) - \varphi_0(t)}{U_{SIM}}. \quad (4.38)$$

Hierbei bezeichnet $\varphi_0(t)$ das Bezugspotential an der Materialgrenze an der Implantat-oberfläche (siehe Abbildung 4.7). Die Wichtungsfaktoren aus Gleichung (4.38) ergeben sich als Reaktion auf eine Anregung durch die Primärspule:

$$i_0 = f(t). \quad (4.39)$$

Hierbei ist $f(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit. Es soll an dieser Stelle keine Einschränkung auf rein harmonische Funktionen erfolgen. Somit kann mit dem hier präsentierten Ansatz auch die Reaktion auf eine pulsförmige Erregung berechnet werden.

Um den Implementationsaufwand gering zu halten, wurde zur Berechnung der Wichtungsfaktoren nach Gleichung (4.38) die Open Source Software *NGSPICE* [NGS10] eingesetzt. *NGSPICE* ist eine Implementation der Berkeley SPICE Bibliothek, die es erlaubt, elektrische Schaltungen zu simulieren. Zu diesem Zweck wird die zu simulierende Schaltung in Form einer Netzliste präpariert. In dieser sind die Topologie der Schaltung, die verwendeten Bauelemente sowie deren spezifische Parameter beschrieben. Diese Netzliste kann mit geringem Aufwand für ein System aus N Stimulations-elektroden erzeugt werden, da sich der grundsätzliche Aufbau des Elektrostimulationssystems nicht ändert.

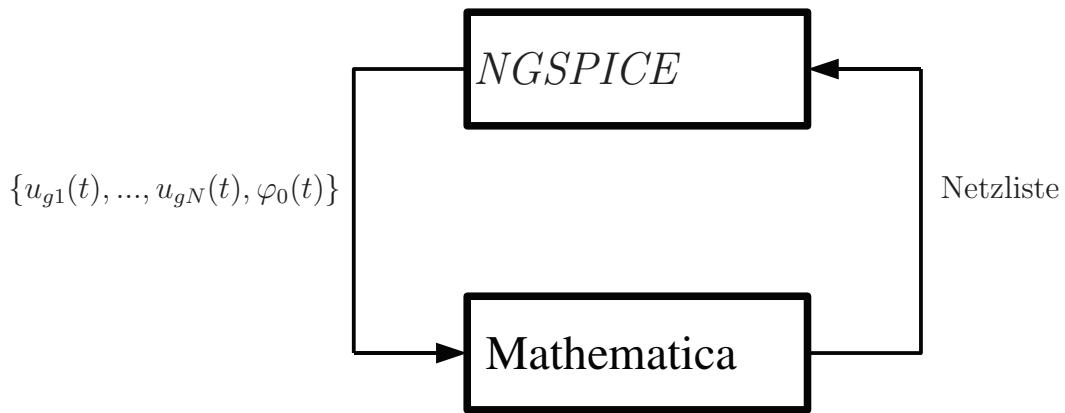


Abbildung 4.14: Prinzip der Kopplung von *NGSPICE* an *Mathematica*.

Abbildung 4.14 zeigt das Prinzip der Kopplung des Schaltungssimulators *NGSPICE* an das Computer-Algebra-System *Mathematica*. Die Feldberechnung und die spätere Optimierung wurden in *Mathematica* implementiert. Sollen nun die Wichtungsfaktoren nach (4.38) berechnet werden, so muss eine Netzliste für *NGSPICE* erzeugt werden. Diese enthält die Schaltung sowie die Anweisungen, die zur Durchführung der transienten Analyse nötig sind. Nach der Simulation werden die Potentiale $\{u_{g1}(t), \dots, u_{gN}(t), \varphi_0(t)\}$ aus *NGSPICE* ausgelesen und sind in *Mathematica* zur weiteren Verwendung verfügbar.

Um diese Netzliste erzeugen zu können, müssen die Parameter der im ESB auftretenden Bauelemente bekannt sein. Die ohmschen Widerstände und die Selbst- und Gegeninduktivitäten werden wie im Fall der harmonischen Erregung berechnet. Einigen besonderen Behandlung bedürfen jedoch die Elemente der Materialgrenzen R_{CT}

und Z_{edl} , da *NGSPICE* keine Modelle für ein CPE oder einen Transferwiderstand bereitstellt.

Das CPE zeigt ein pseudokapazitives Verhalten. Im Rahmen dieser Arbeit wurde untersucht, in wie fern das CP-Element durch eine Reihenschaltung von RC-Elementen nachgebildet werden kann. Ein Vergleich der Impedanz des CP-Elements und der angepassten RC-Kette wird in Kapitel 6 gegeben. Hier soll zunächst nur festgestellt werden, dass die RC-Kette das Verhalten eines CP-Elements in einem begrenzten Frequenzintervall sehr gut nachbilden kann.

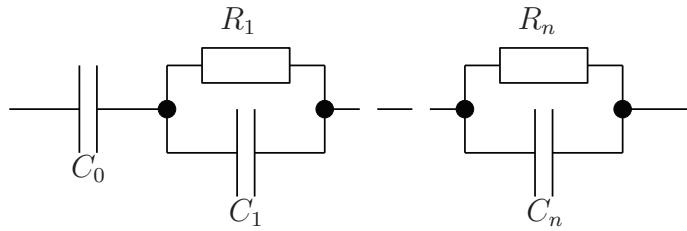


Abbildung 4.15: Ersatzelement für ein CPE, bestehend aus Widerständen und Kondensatoren.

Abbildung 4.15 zeigt eine Darstellung einer RC-Kette zur näherungsweisen Beschreibung des Frequenzverhaltens des CPEs. Die Impedanz eines CPEs ist nach Gleichung (3.3) durch $K(j\omega/\omega_0)^{-\beta}$ gegeben. Die Impedanz der Schaltung aus Abbildung 4.15 ergibt sich durch die Reihenschaltung der Elemente zu:

$$Z = \frac{1}{j\omega C_0} + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{1 + j\omega R_i C_i}. \quad (4.40)$$

Die Elemente R_1, \dots, R_n und C_0, \dots, C_n müssen nun so gewählt werden, dass sich im Frequenzintervall $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen der Impedanz des CPEs und der RC-Kette ergibt. Das Intervall $[\omega_1, \omega_2]$ ergibt sich hierbei aus der Anregung. Für eine harmonische Anregung ist ω_1 durch die Anregungsfrequenz gegeben. Die obere Grenze ω_2 sollte so gewählt werden, dass hinreichend viele Oberwellen der Grundfrequenz ω_1 abgedeckt sind. Für eine nicht-harmonische Anregung sollte das Intervall $[\omega_1, \omega_2]$ so gewählt werden, dass ein Großteil der Energie des Leistungsdichtespektrums des Anregungssignals im Intervall liegt. Die Anzahl n und die Größe der Elemente hängt also entscheidend von dem Anregungssignal ab und muss daher für verschiedene Anregungssignale gesondert betrachtet werden.

Neben dem CPE müssen die Transferwiderstände R_{CT} modelliert werden. Dieses kann im Schaltungssimulator durch die Parallelschaltung zweier Dioden erreicht werden. Abbildung 4.16 zeigt die anti-parallele Zusammenschaltung der Dioden D_1 und D_2 . Die Strom-/Spannungs-Kennlinie einer Diode ist in einfacher Näherung durch die Shockley-Gleichung [TS02] gegeben:

$$I_D = I_S (e^{U_D/(N_e U_{th})} - 1). \quad (4.41)$$

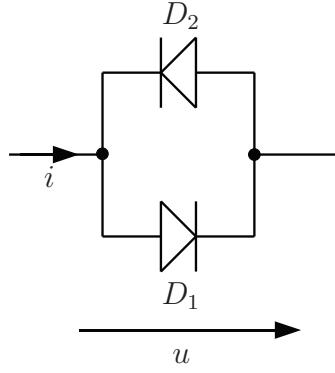


Abbildung 4.16: Ersatzmodell des Transferwiderstandes als anti-parallele Zusammenschaltung zweier Dioden.

Hierbei bezeichnet I_S den Sperrstrom der Diode. Die Spannungen U_D und $U_{th} = kT/q$ bezeichnen die über dem pn-Übergang abfallende Spannung sowie die Thermospannung, die durch die Umgebungstemperatur T , die Boltzmann-Konstante k und die Elementarladung q gegeben ist. Der Faktor N_e wird als Emissionskoeffizient bezeichnet und ist von der Beschaffenheit des pn-Überganges abhängig. Die Strom-/Spannungs-Kennlinie der Schaltung aus Abbildung 4.16 kann nach Gleichung (4.41) wie folgt geschrieben werden:

$$i = I_S (e^{u/(N_e U_{th})} - e^{-u/(N_e U_{th})}). \quad (4.42)$$

Ein Vergleich der Gleichung (4.42) mit der Kennlinie eines Ladungstransferwiderstandes (3.11):

$$i_F = j_0 A (e^{(\alpha_1 F / R_g T) u} - e^{-(\alpha_2 F / R_g T) u})$$

zeigt die Ähnlichkeit der Strom-/Spannungs-Kennlinien. Somit kann ein Transferwiderstand R_{CT} durch die Parallelschaltung zweier Dioden nach Abbildung 4.16 in *NGSPICE* modelliert werden. Die Parameter der Dioden D_1 und D_2 ergeben sich durch einen Vergleich der Gleichungen (3.11) und (4.42):

$$\begin{aligned} I_S &= j_0 A, \\ N_{e1} &= \frac{R_g T}{\alpha_1 F U_{th}} = \frac{R_g q}{\alpha_1 F k}, \\ N_{e2} &= \frac{R_g T}{\alpha_2 F U_{th}} = \frac{R_g q}{\alpha_2 F k}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Auf die physikalische Bedeutung der Ähnlichkeit der Shockley-Gleichung und der Butler-Volmer-Gleichung soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Es soll nur festgestellt werden, dass diese Ähnlichkeit genutzt werden kann, um den Transferwiderstand R_{CT} mit den vorhandenen Modellen des Schaltungssimulators *NGSPICE* zu modellieren.

4.4 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde ein hybrider Ansatz zur Berechnung des elektrischen Feldes im Hüftknochen vorgestellt. Hierzu wurde zunächst die Feldberechnung innerhalb des Knochens durch die Superposition von zuvor berechneten Feldverteilungen vorgestellt. Diese Feldverteilungen werden erzeugt, indem auf der Implantatoberfläche ein Gitter von möglichen Elektrodenpositionen generiert wird. Für jede Gitterposition wird ein separates Simulationsmodell erstellt, wobei sich an der korrespondierenden Position eine Stimulationselektrode befindet. Zwischen der Implantatoberfläche und der Kappe der Elektrode wird eine feste Spannung eingeprägt. Die Modelle werden simuliert, und das elektrische Feld wird an einer Menge von Abtastpunkten aufgenommen. Die Feldverteilung einer Elektrodenanordnung an diesen Abtastpunkten ergibt sich dann näherungsweise durch die gewichtete Überlagerung der einzelnen Feldverteilungen.

Die Wichtungsfaktoren werden im harmonischen Fall analytisch berechnet. Dieses erlaubt es, das resultierende Feld einer Elektrodenanordnung in weniger als 1 s zu berechnen¹¹. Somit ist es möglich, eine Optimierung der Elektrodenanordnungen auf der Implantatoberfläche in einer vertretbaren Zeit durchzuführen.

Weiterhin wurde der Schaltungssimulator *NGSPICE* an das verwendete Programm *Mathematica* gekoppelt, um transiente Rechnungen im Zeitbereich durchführen zu können. Somit kann bei der Berechnung der Wichtungsfaktoren die nichtlineare Strom-/Spannungs-Kennlinie des Überganges Implantat/Knochen beziehungsweise Elektrodenkappe/ Knochen berücksichtigt werden. Hierzu müssen die Elemente der Übergangsschichten in geeignete, in *NGSPICE* vorhandene Elemente übertragen werden. Die restlichen Elemente des Ersatzschaltbildes können analog zur harmonischen Feldberechnung bestimmt werden.

Mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Berechnungsverfahren ist es möglich, das elektrische Feld, das das Elektrostimulationssystem erzeugt, sehr schnell zu berechnen. Somit kann auf Basis dieses Verfahrens die Optimierung des Elektrostimulationssystems durchgeführt werden. Diese Optimierung ist Gegenstand des nachfolgenden Kapitels.

¹¹Auf einer typischen Workstation (Stand 2009).

5 Zur Optimierung des Elektrostimulationssystems

In diesem Kapitel soll die Optimierung des Elektrostimulationssystems auf Basis des in Kapitel 4 vorgestellten Verfahrens zur Feldberechnung behandelt werden. Dieser Optimierungsprozess ist nötig, um ein Elektrostimulationssystem zu ermitteln, das eine bestimmte elektrische Feldverteilung im Knochen bestmöglich generiert.

5.1 Zur mathematischen Beschreibung von Optimierungszielen

In Kapitel 4 wurde ein Ansatz vorgestellt, mit dem das elektrische Feld eines Elektrostimulationssystems schnell und effektiv berechnet werden kann. Der präsentierte Algorithmus liefert, ausgehend von einer Reihe von Parametern, die elektrische Feldstärke an einer Menge von Abtastpunkten im Knochen. Hierbei können folgende Parameter modifiziert werden, um die gewünschte Feldverteilung im Knochen zu erzeugen:

- Anzahl und Positionierung der Stimulationselektroden auf der Oberfläche (beziehungsweise im Bereich σ_E),
- Anzahl und Orientierung der Windungen innerhalb einer Stimulationselektrode,
- Form und Ausrichtung der externen Anregungsspule¹,
- Amplitude und Frequenz des Stroms i_0 in der Anregungsspule.

Diese Parameter spannen den so genannten Parameterraum auf. Jede Parameterkombination kann als Punkt in diesem Raum aufgefasst werden. Aufgrund von physikalischen und technischen Bedingungen kann jedoch nur ein Unterraum praktisch realisiert werden. Hierbei sind folgende Nebenbedingungen zu beachten:

- Die Positionierung der Stimulationselektroden kann nur auf der Implantatoberfläche innerhalb des Gebietes σ_E erfolgen.

¹Die Optimierung der Primärspule ist nicht im Fokus dieser Arbeit. Im Anhang wird eine Methode vorgestellt, mit dem beliebige Erregerspulen berechnet werden können.

5 Zur Optimierung des Elektrostimulationssystems

- Die Anzahl der Windungen im Inneren einer Elektrode ist durch das zur Verfügung stehende Volumen begrenzt. Aufgrund von nicht weiter behandelten mechanischen Anforderungen an die Stabilität der Stimulationselektroden ist das für die Sekundärspulen zur Verfügung stehende Volumen unter Umständen wesentlich kleiner als das Elektrodenvolumen.
- Die Frequenz des durch die externe Spule erzeugten Magnetfeldes muss eine gute Elektrostimulation des Knochens ermöglichen².
- Der Strom i_0 muss so gewählt werden, dass die externe Spule ohne größere Kühlmaßnahmen betrieben werden kann. Gleichzeitig sollte ein möglichst starkes Magnetfeld erzeugt werden, um mit möglichst wenigen Windungen innerhalb der Stimulationselektroden auszukommen.

Alle genannten Parameter könnten in einem Optimierungsprozess gleichzeitig optimiert werden, um die gewünschte elektrische Feldverteilung auf der Implantatoberfläche zu erzielen. Allerdings ist dabei zu beachten, dass die Komplexität des Optimierungsproblems mit jedem zusätzlich zu optimierenden Parameter rapide ansteigt. Daher sollte die Menge der zu optimierenden Parameter möglichst eingeschränkt werden und nur solche Parameter optimiert werden, die nicht anderweitig behandelt werden können. Im folgenden wird die Optimierung einer Elektrodenanordnung \vec{p} nach Gleichung (4.2) betrachtet. Dies bedeutet, dass für jede Stimulationselektrode eine optimale Position und eine optimale Windungszahl ermittelt werden müssen. Die externe Primärspule soll hierbei als gegeben angenommen werden. Der Strom i_0 in der externen Spule sowie die Stimulationsfrequenz wird möglichst groß gewählt, um die Anzahl der nötigen Sekundärwindungen in den Stimulationselektroden möglichst klein wählen zu können. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass bei der gewählten Frequenz eine effektive Elektrostimulation des Knochens gewährleistet ist. Ziel der Optimierung ist es, in unterschiedlichen Bereichen des Knochens verschiedene elektrische Feldstärken zu generieren, um unterschiedliche Reaktionen des biologischen Gewebes hervorzurufen. Hierbei können drei Fälle unterschieden werden, die nachfolgend betrachtet werden sollen.

In Kapitel 4 wurde das Gebiet Ω definiert. Dies ist der Bereich des Knochens, der bei der Datengewinnung abgetastet wurde. Es soll an dieser Stelle vorausgesetzt werden, dass dieser Bereich hinreichend dicht abgetastet wurde, um das elektrische Feld mit der nötigen Genauigkeit zu beschreiben, und dass Ω den für die Optimierung relevanten Bereich auf der Implantatoberfläche enthält. Die Definition von Zielfunktionen für die elektrische Feldverteilung kann nun sowohl für den gesamten Bereich Ω erfolgen, als auch für einzelne Teilgebiete innerhalb von Ω . Abbildung 5.1 zeigt, wie eine Aufteilung des abgetasteten Gebietes Ω in einzelne Teilgebiete erfolgen kann. Diese Aufteilung ist hier nur als Beispiel gewählt und kann völlig frei erfolgen.

Zunächst soll der Fall einer oberen elektrischen Feldstärkengrenze betrachtet werden, die nicht überschritten werden sollte/darf. Ziel einer Optimierung ist es also, eine

²Es sollen keine aktiven Komponenten zur Frequenzumrichtung im Implantat eingesetzt werden.

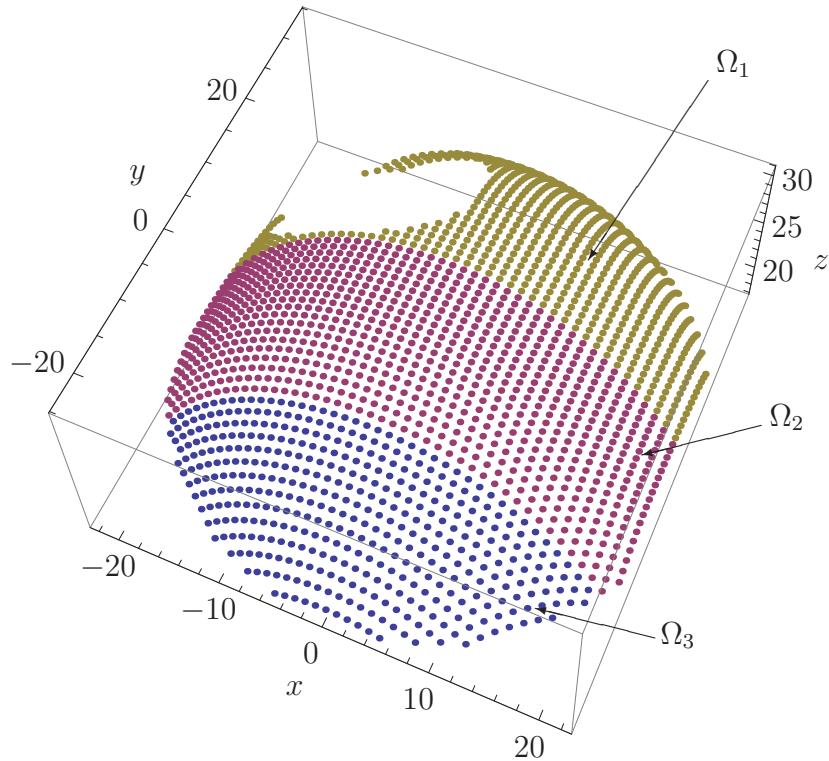


Abbildung 5.1: Beispiel für eine Aufteilung der abgetasteten Region Ω in die Teilgebiete Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 .

Elektrodenanordnung zu ermitteln, die in dem entsprechenden Bereich elektrische Feldstärken erzeugt, die unterhalb dieser kritischen Grenze liegen. Ein Anwendungsbereich hierfür sind Gebiete mit angrenzenden Nervenbündeln, die nicht stimuliert werden sollen. Es sei Ω_i ein Bereich in Ω ($\Omega_i \in \Omega$). Weiterhin sei E_{max} eine kritische Feldstärke, die in Ω_i nicht überschritten werden soll. Durch:

$$\begin{aligned} \delta_j &= \begin{cases} 0 & \text{falls } |\vec{E}(P_j)| \leq E_{max} \vee P_j \notin \Omega_i \\ (|\vec{E}(P_j)| - E_{max})^2 / E_{max}^2 & \text{sonst} \end{cases} \\ f_i &= \sum_{j=1}^m \delta_j \end{aligned} \quad (5.1)$$

ist eine geeignete Zielfunktion f_i gegeben. Hierbei wird die elektrische Feldstärke für alle m abgetasteten Punkte ausgewertet. Liegt der Punkt P_j nicht in Ω_i oder ist die Feldstärke an diesem Punkt kleiner als die kritische Feldstärke, so wird diesem Punkt eine Abweichung $\delta_j = 0$ zugewiesen. Andernfalls erhält der Punkt ein $\delta_j > 0$.

Abbildung 5.2 zeigt eine Darstellung des Abweichungsterms δ_j aus (5.1) an einem beliebigen Punkt P_j innerhalb von Ω_i . Es ist erkennbar, dass sich der zugewiesene Wert bei einer Überschreitung der kritischen Feldstärke nach dem Abstand zur oberen Feldstärkegrenze richtet. Dabei gehen größere Abweichungen überproportional

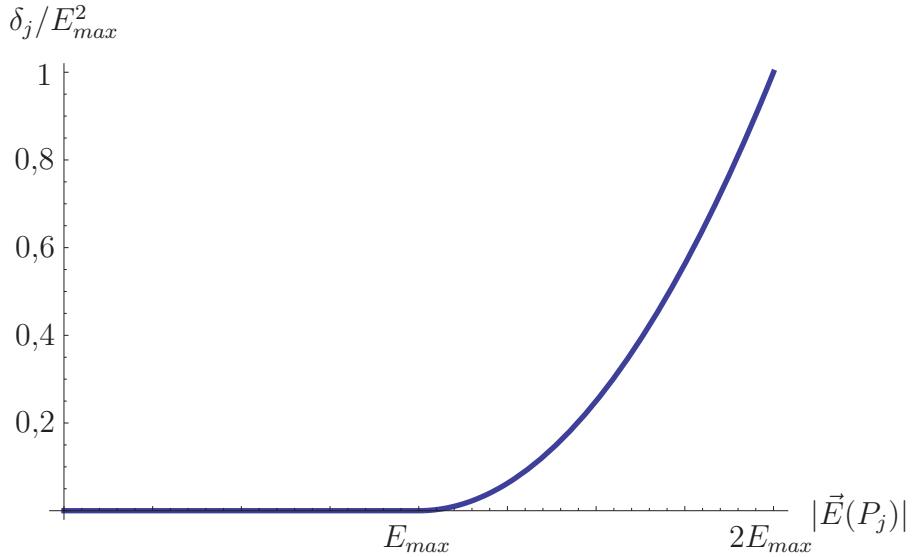


Abbildung 5.2: Darstellung des Abweichungswertes δ_j als Funktion der elektrischen Feldstärke an einem Punkt P_j innerhalb des Optimierungsgebietes Ω_i nach (5.1).

stärker ein als kleinere. Wird die Funktion f_i während des Optimierens minimiert, so werden auch die Überschreitungen der kritischen Feldstärke im Gebiet Ω_i minimiert. In analoger Weise lässt sich ein zweites Optimierungskriterium definieren: Es soll in einem Gebiet Ω_i eine gewisse Feldstärke E_{min} überschritten werden. Dies ist der typische Fall in Bereichen, in dem der Knochen durch die Elektrostimulation zum Wachsen angeregt werden soll. Unter der Annahme, dass eine positive Beeinflussung des Knochenwachstums ab einer gewissen elektrischen Feldstärke auftritt, muss eine Elektrodenanordnung ermittelt werden, die mindestens diese Feldstärke in Ω_i erzeugen. Durch:

$$\begin{aligned} \delta_j &= \begin{cases} 0 & \text{falls } |\vec{E}(P_j)| \geq E_{min} \vee P_j \notin \Omega_i \\ (|\vec{E}(P_j)| - E_{min})^2 / E_{min}^2 & \text{sonst} \end{cases} \\ f_i &= \sum_{j=1}^m \delta_j \end{aligned} \quad (5.2)$$

ist eine geeignete Zielfunktion definiert. Hierbei wird erneut jedem Punkt P_j ein Wert für den Grad der Abweichung vom Sollbereich zugewiesen. Im Anschluss werden alle Abweichungswerte addiert. Wird diese Funktion während der Optimierung minimiert, so wird gleichzeitig die Unterschreitung der Feldstärke E_{min} innerhalb Ω_i minimiert.

Abbildung 5.3 zeigt eine Darstellung des Abweichungsterms δ_j aus (5.2) an einem Punkt P_j innerhalb von Ω_i .

Eine drittes Optimierungsziel ergibt sich durch die Kombination der beiden zuvor präsentierten Zielfunktionen: In einem Gebiet Ω_i soll eine gewisse Feldstärke E_{min}

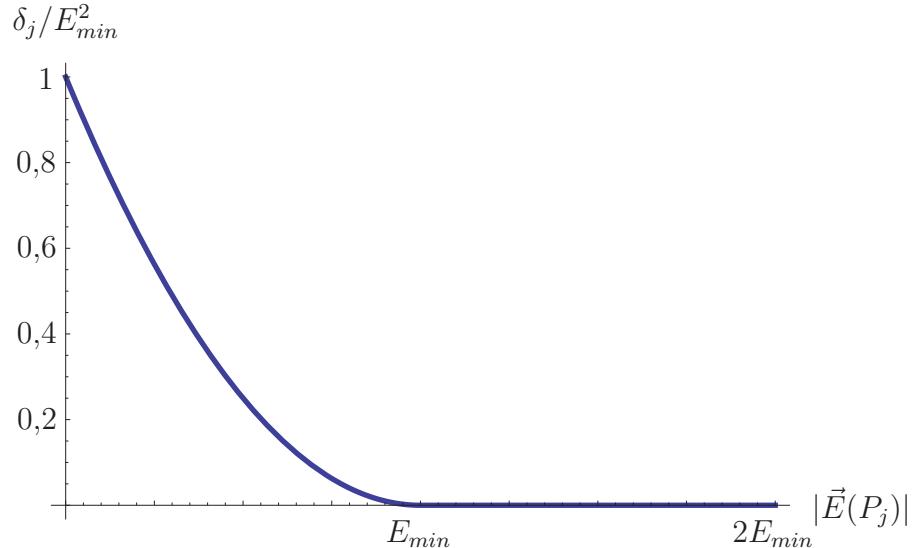


Abbildung 5.3: Darstellung des Abweichungswertes δ_j als Funktion der elektrischen Feldstärke an einem Punkt P_j innerhalb des Optimierungsgebietes Ω_i nach (5.2).

erreicht oder überschritten werden. Gleichzeitig soll eine obere Grenze E_{max} nicht überschritten werden (dass $E_{min} < E_{max}$ gilt, sei hier vorausgesetzt). Eine geeignete Zielfunktion ist durch:

$$\begin{aligned} \delta_j &= \begin{cases} 0 & \text{falls } |\vec{E}(P_j)| \in [E_{min}, E_{max}] \vee P_j \notin \Omega_i \\ (|\vec{E}(P_j)| - E_{min})^2 / E_{min}^2 & \text{falls } |\vec{E}(P_j)| < E_{min} \\ (|\vec{E}(P_j)| - E_{max})^2 / E_{max}^2 & \text{falls } |\vec{E}(P_j)| > E_{max} \end{cases} \\ f_i &= \sum_{j=1}^m \delta_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

gegeben. Hierbei wird jedem Punkt innerhalb Ω_i ein Wert, der die Abweichung vom Sollintervall $[E_{min}, E_{max}]$ charakterisiert, zugewiesen. Erneut haben größere Abweichungen einen überproportionalen Einfluss auf den resultierenden Zielfunktionswert. Abbildung 5.4 zeigt eine Darstellung des Abweichungswertes δ_j aus (5.3) an einem Punkt P_j (in diesem Beispiel wurde $E_{max} = 2E_{min}$ angenommen).

Mit den Zielfunktionen (5.1)-(5.3) können nun innerhalb des Optimierungsgebietes Ω einzelnen Bereichen Ziele für die Verteilung des elektrischen Feldes zugewiesen und in Form von zu minimierenden Funktionen beschrieben werden. Während des Optimierungsprozesses wird dann gezielt nach Elektrodenanordnungen gesucht, die diese Zielfunktionen bestmöglich minimieren. Weiterhin ist durch die Definition der Zielfunktionen bekannt, dass ein Zielfunktionswert von Null einer Zielfunktion gleichbedeutend mit dem vollständigen Erreichen des korrespondierenden Optimierungszieles ist.

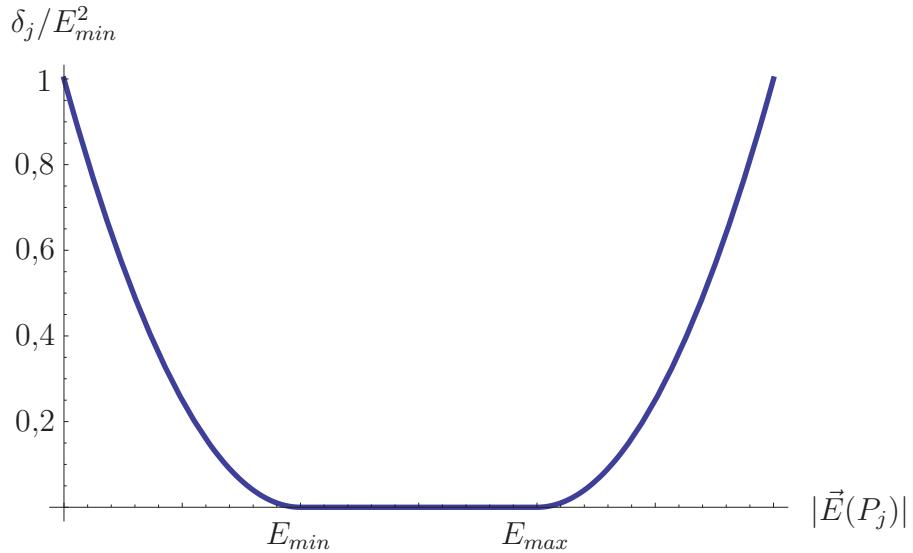


Abbildung 5.4: Darstellung des Abweichungswertes δ_j als Funktion der elektrischen Feldstärke an einem Punkt P_j innerhalb des Optimierungsgebietes Ω_i nach (5.3) ($E_{max} = 2E_{min}$).

5.2 Eindimensionale Optimierungsverfahren

Im vorherigen Abschnitt wurde eine Methode vorgestellt, mit der eine Reihe von Zielvorgaben für die elektrische Feldstärke in unterschiedlichen Regionen des Knochens durch Funktionen formuliert werden können. An dieser Stelle soll nun angenommen werden, dass im abgetasteten Knochenareal Ω k Gebiete definiert wurden ($\Omega_1, \dots, \Omega_k \in \Omega$). Weiterhin soll davon ausgegangen werden, dass für jedes Gebiet Ω_i eine Zielfunktion f_i nach (5.1), (5.2) oder (5.3) definiert wurde.

In Kapitel 4 wurde der Begriff der Elektrodenanordnung eingeführt und mit dem Symbol \vec{p} bezeichnet. Im Kontext der Optimierung kann eine Elektrodenanordnung als ein Vektor im Parameterraum aufgefasst werden. Daher soll von einer Elektrodenanordnung nun als Parametervektor gesprochen werden. Ziel der Optimierung ist es nun, die optimale Elektrodenanordnung \vec{p}_O zu finden, die die Zielfunktionen f_1 bis f_k minimiert.

Eine Elektrodenanordnung aus N Stimulationselektroden hat hierbei $3N$ linear unabhängige Parameter, die optimiert werden müssen³ (für jede Stimulationselektrode zwei Koordinaten (x, y -Position) und die Anzahl der Windungen im Elektrodeninneren N_W).

Mittels des in Kapitel 4 vorgestellten Verfahrens kann zu einer Elektrodenanordnung \vec{p} mit $3N$ Freiheitsgraden eine Feldverteilung in Ω berechnet werden. Die Zielfunktionen f_1 bis f_k weisen dieser berechneten Feldverteilung k skalare Werte zu, die

³Es soll darauf verzichtet werden, die Anzahl der Stimulationselektroden während eines Optimierungslaufes zu erhöhen, da die erhaltenen Elektrodenanordnungen nicht mehr mit einander vergleichbar wären.

minimiert werden müssen. Diese k Werte können als Vektor aus einem Vektorraum der Dimension k aufgefasst werden. Der Vektorraum, dem dieser Vektor entstammt, wird in Anlehnung an den Parameterraum als *Zielfunktionsraum* bezeichnet [Wei08]. Somit wird durch die Feldberechnung und die anschließende Bewertung der elektrischen Feldverteilung mittels k Zielfunktionen eine Abbildung der Form $\mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^k$ realisiert.

Sollen nun die k Zielfunktionen *gleichzeitig* minimiert werden, so können sie zu einer Zielfunktion zusammengefasst werden:

$$f(\vec{p}) = \sum_{i=1}^k g_i f_i(\vec{p}) \quad g_i > 0, g_i \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Hierfür werden die einzelnen Zielfunktionswerte gewichtet addiert und der Zielfunktionsraum auf \mathbb{R} abgebildet ($\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$). An die Gewichte g_i sollen keine besonders strengen Anforderungen gestellt werden. Um den Charakter der Minimierung zu erhalten, soll gefordert werden, dass sämtliche Gewichte g_i größer Null sind und der Menge der reellen Zahlen entstammen. Zur Minimierung der Zielfunktion f aus (5.4) müssen nun die Gewichte g_i geeignet gewählt werden. Prinzipiell kann durch die Wahl der Gewichte eine Priorisierung der einzelnen Zielfunktionen f_i erfolgen. Allerdings stellt die Wahl der Gewichte einen Schwachpunkt dieses Verfahrens dar: Der Wertebereich der einzelnen Zielfunktionen f_i ist a priori schwer einschätzbar. Dies kann dazu führen, dass durch eine ungünstige Wahl der Gewichte einzelne Zielfunktionen zu stark oder zu schwach in die Zielfunktion f eingehen [DD97].

Da der Wertebereich im Allgemeinen nicht bekannt ist, kann dieses Problem vor dem Optimierungsprozess nicht geeignet behandelt werden. Die einzige Möglichkeit ist, während einer Optimierung den Wertebereich aller Zielfunktionen f_i zu beobachten und gegebenenfalls, bei einer ungünstigen Wahl der Wichtungsfaktoren, diese anzupassen und den Optimierungsalgorithmus erneut zu starten. Neben diesem Problem ergeben sich eine Reihe von weiteren Schwierigkeiten, die mit diesem Ansatz verbunden sind. Auf diese soll hier allerdings nicht weiter eingegangen werden. Der interessierte Leser sei für eine ausführliche Diskussion auf [Wei08] verwiesen. Nachfolgend werden drei Algorithmen vorgestellt, deren Eignung untersucht wurde, um die aus (5.4) resultierende Zielfunktion zu minimieren. Die Ergebnisse der Optimierung mit diesen Algorithmen werden in Kapitel 6 vorgestellt.

Zur korrekten Behandlung der Nebenbedingungen wurde ein einfacher aber effektiver Ansatz verwendet. Hierbei wird jedem Parametervektor, der eine Nebenbedingung verletzt, automatisch ein Zielfunktionswert zugewiesen, der größer ist als alle Zielfunktionswerte von gültigen Parametervektoren, die alle Nebenbedingungen einhalten [Cou43].

5.2.1 Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus

Eine Möglichkeit zur Minimierung der eindimensionalen Zielfunktion aus Gleichung (5.4) stellt der Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus⁴ [NM65] dar. Dieser kann zur Minimierung von mehrdimensionalen Funktionen genutzt werden. Zu Beginn werden für ein n -dimensionales Optimierungsproblem $n + 1$ Punkte, die ein Simplex⁵ bilden, im Parameterraum erzeugt. Für jeden Simplexpunkt wird der Funktionswert der zu minimierenden Funktion bestimmt. Im Anschluss führt das Simplex eine von vier möglichen Transformationen aus, um den Simplexpunkt mit dem schlechtesten Funktionswert durch einen neuen zu ersetzen:

1. **Reflexion:** Der Punkt mit dem schlechtesten Funktionswert wird am Schwerpunkt des Simplex gespiegelt.
2. **Expansion:** War die Reflexion erfolgreich, das heisst, dass der neue Punkt den besten Funktionswert aufweist, so wird dieser Punkt weiter in Richtung der letzten Reflexionsoperation verschoben.
3. **Kontraktion:** Weist der durch die Reflexion entstandene Punkt hingegen erneut den schlechtesten Funktionswert auf, so wird dieser verworfen und der ursprüngliche Punkt wird in Richtung des Punktes mit dem besten Funktionswert bewegt. Hierbei verkleinert das Simplex sein Volumen, daher der Name Kontraktion.
4. **Komprimierung:** Bringt auch die Kontraktion keinen neuen Punkt mit einem besseren Funktionswert hervor, so werden alle Simplexpunkte in Richtung des Punktes mit dem niedrigsten Funktionswert zusammengezogen.

Diese vier Transformationsschritte werden nun so lange durchgeführt, bis eine hinreichend gute Lösung gefunden wurde oder das Simplex sich auf ein hinreichend kleines Volumen zusammengezogen hat. Der Punkt mit dem besten Funktionswert stellt dann gleichzeitig das gefundene Optimum dar. Für die Operationen Expansion, Kontraktion und Komprimierung müssen eine Reihe von Parametern spezifiziert werden, die diese Operationen steuern. Auf die Wahl dieser Parameter soll hier nicht weiter eingegangen werden. Der interessierte Leser sei auf [YD74] verwiesen. Eine Implementation des Algorithmus kann [PTVF07] entnommen werden.

Für die Optimierung des Elektrostimulationssystems ist dieser Algorithmus gut geeignet, da er ohne Ableitungen auskommt. Diese müssten ansonsten durch rechenaufwendige Differenzenquotienten nachgebildet werden. Es werden lediglich die Funktionswerte der Simplexpunkte im Parameterraum benötigt. Hierdurch ist der Algorithmus robust und kann auch zur Optimierung unstetiger Funktionen eingesetzt werden. Allerdings ist bei nichtlinearen Optimierungsproblemen zu beachten, dass die Konvergenz in Richtung des globalen Minimums nicht sichergestellt werden kann.

⁴Auch unter dem Namen Downhill-Simplex-Verfahren bekannt.

⁵Ein Simplex ist der einfachste Körper, der durch $n + 1$ Punkte in einem n dimensionalen Raum erzeugt wird. Im 3-dimensionalen Raum wäre dies ein Tetraeder.

Somit wird unter Umständen lediglich ein lokales Minimum gefunden. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu erhöhen, dass das globale Minimum gefunden wird, kann der Algorithmus mit verschiedenen Konfigurationen gestartet werden. Das Minimum ist dann durch den Punkt gegeben, der den niedrigsten Funktionswert aufweist.

5.2.2 Methode des Simulated-Annealing

Ein Schwachpunkt des Nelder-Mead-Simplex-Downhill Algorithmus liegt darin, dass neue Punkte im Parameterraum nur dann Eingang in das Iterationsschema finden, wenn ihr Funktionswert besser ist als der Punkt, der ersetzt werden soll. Dies hat zur Folge, dass das Simplex meistens gegen das nächste lokale Minimum konvergiert. Um also die Wahrscheinlichkeit dafür zu erhöhen, dass ein Optimierungsverfahren das globale Optimum findet, müssen auch temporäre Verschlechterungen des Zielfunktionswertes zugelassen werden. Dadurch wird es einem Algorithmus ermöglicht, Regionen im Parameterraum zu verlassen, die ein lokales Minimum aufweisen.

Ein Optimierungsverfahren mit diesen Eigenschaften ist das Simulated-Annealing [KCV83]. Dieser Algorithmus simuliert einen Ausglühprozess, wie er zur Verringerung von mechanischen Spannungen in bearbeiteten Werkstücken eingesetzt wird. Die zu minimierende Funktion wird hierbei als Energiefunktion interpretiert. Ausgehend von einem Punkt im Parameterraum wird zufällig ein neuer Punkt in der Umgebung erzeugt. Ist der Funktionswert des neuen Punktes kleiner als der des alten Punktes, so wird die neue Lösung übernommen. Ist er hingegen größer, so wird er lediglich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit übernommen, die der Boltzmann-Verteilung folgt:

$$p = e^{-(f_{neu} - f_{alt})/T_i} \quad (5.5)$$

Hierbei bezeichnen f_{neu} und f_{alt} die Funktionswerte des neuen beziehungsweise des alten Punktes im Parameterraum. Der Parameter T_i bezeichnet einen Temperaturparameter, mit dem die Übernahmewahrscheinlichkeit einer Verschlechterung gesteuert wird. Zu Beginn wird ein hinreichend großes T_0 gewählt. Nach einer Anzahl von Iterationsschritten wird die Temperatur gesenkt:

$$T_{i+1} = cT_i \quad c \in (0,1). \quad (5.6)$$

Somit stellt die Temperatur T_{i+1} eine monoton fallende Folge dar.

Abbildung 5.5 zeigt eine Darstellung der Übernahmewahrscheinlichkeit nach Gleichung (5.5) für eine Folge von Temperaturparametern. Es ist erkennbar, dass bei höheren Werten von T auch große Verschlechterungen mit hoher Wahrscheinlichkeit übernommen werden. Bei kleineren Werten von T ist die Wahrscheinlichkeit, dass größere Verschlechterungen übernommen werden, wesentlich geringer.

Zu Beginn des Verfahrens sind auch große Verschlechterungen des Funktionswertes wahrscheinlich. Jedoch wird mit fallendem Temperaturparameter die Wahrscheinlichkeit, einen höheren Funktionswert einzunehmen, immer geringer. Bei hinreichend langsamer Senkung des Temperaturparameters und hinreichend vielen Übergängen

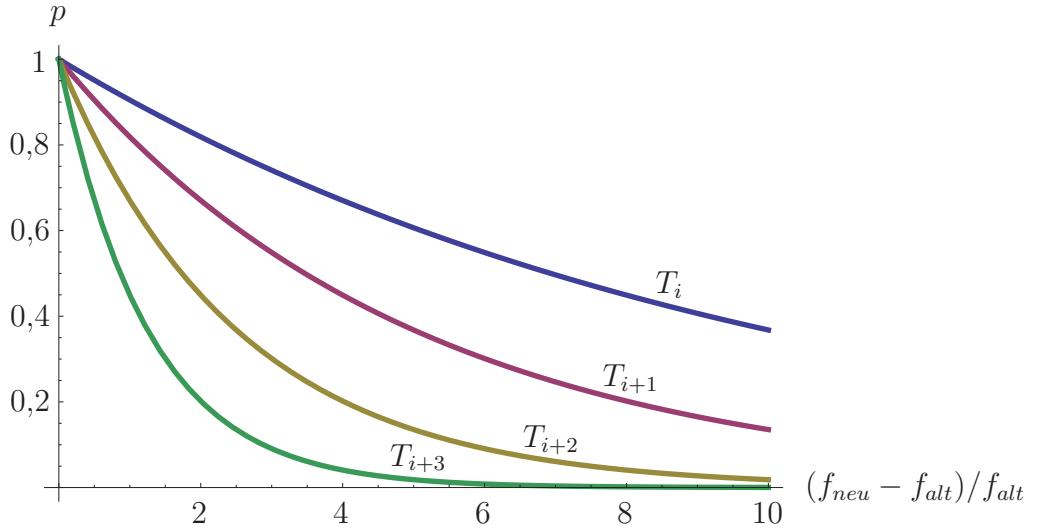


Abbildung 5.5: Darstellung der Übernahmewahrscheinlichkeit für verschiedene T_i als Funktion der Abweichung $(f_{neu} - f_{alt}) / f_{alt}$

auf einer Temperaturstufe T_i konvergiert die Lösung gegen das globale Minimum [GKR94].

Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens liegt in seiner geringen Komplexität. Jedoch sind - im Vergleich zu anderen Optimierungsverfahren - sehr viele Funktionsauswertungen nötig. Weiterhin müssen die Starttemperatur T_0 und die Abkühlrate c geeignet spezifiziert werden, um eine akzeptable Konvergenz zu erreichen. Auf die Wahl der Parameter soll hier nicht näher eingegangen werden. Der interessierte Leser sei hierfür auf [Kir84] verwiesen. Ergebnisse der Optimierung mit dem Simulated-Annealing Verfahren werden in Kapitel 6 vorgestellt.

5.2.3 Differential Evolution

Als letzter eindimensionaler Optimierungsalgorithmus soll das Verfahren der *Differential Evolution* [SP95] vorgestellt werden. Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, dass neue Vektoren im Parameterraum durch die Linearkombination bekannter Lösungen gebildet werden.

Soll eine optimale Elektrodenanordnung \vec{p}_O , die eine Zielfunktion nach Gleichung (5.4) mit k einzelnen Zielfunktionen minimiert, ermittelt werden, so werden zunächst nk Elektrodenanordnungen zufällig erzeugt:

$$\vec{p}_i \quad i \in [1, nk]. \quad (5.7)$$

Für jeden Vektor wird der Zielfunktionswert $f(\vec{p}_i)$ bestimmt. Im Anschluss wird für jeden Vektor aus (5.7) ein Testvektor \vec{v}_i generiert:

$$\vec{v}_i = \vec{p}_{r_1} + F \cdot (\vec{p}_{r_2} - \vec{p}_{r_3}); \quad r_1, r_2, r_3 \in [1, nk], \quad (5.8)$$

der sich aus der Linearkombination aus einem zufällig gewählten Vektor \vec{p}_{r_1} und der Differenz zweier weiterer zufällig gewählter Vektoren bildet. Der Faktor F ist eine konstante reelle Zahl, die die Verstärkung oder Dämpfung des Differenzvektors $\vec{p}_{r_2} - \vec{p}_{r_3}$ steuert. Für jeden Testvektor v_i wird im Anschluss der Funktionswert der zu optimierenden Zielfunktion ermittelt. Ist dieser niedriger als der Zielfunktionswert des ursprünglichen Vektors \vec{p}_i , so ersetzt \vec{v}_i den Vektor \vec{p}_i in der nächsten Generation. Andernfalls wird \vec{p}_i beibehalten.

Um die Diversität der Population zu erhöhen, wird ein zweiter Testvektorsatz \vec{u}_i nach folgendem Schema ermittelt, das den Testvektor \vec{v}_i mit dem ursprünglichen Vektor \vec{p}_i mischt:

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= [u_j]_k \\ u_j &= \begin{cases} (\vec{v}_i)_j & \text{wenn } j = r \bmod k, \dots, (r + L - 1) \bmod k; \quad r \in [0, k - 1], L \in [1, k] \\ (\vec{p}_i)_j & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für den zweiten Satz von Testvektoren werden zunächst der Startindex r und die Anzahl der zu tauschenden Komponenten L ermittelt. Im Anschluss wird ein neuer Vektor aus den Komponenten der beiden Vektoren \vec{v}_i und \vec{p}_i gebildet. Für diesen neuen Vektor wird der Funktionswert berechnet. Ist er besser, so ersetzt er \vec{p}_i in der nächsten Generation. Andernfalls wird der Vektor \vec{p}_i beibehalten. Nach diesem Schema wird nun eine Generationenfolge von Vektoren erzeugt, bis ein Abbruchkriterium erreicht ist. Der Vektor mit dem besten Funktionswert stellt dann die optimierte Elektrodenanordnung dar. Auf die Wahl der freien Parameter des Algorithmus soll erneut nicht eingegangen werden, der interessierte Leser sei auf [SP95] und [GMK02] verwiesen.

5.2.4 Bewertung der eindimensionale Optimierungsverfahren

Es wurden drei Algorithmen vorgestellt, die zur Lösung der aus (5.4) resultierenden Minimierungsaufgabe genutzt werden können. Ein Problem kann allerdings mit keinem dieser Algorithmen zufriedenstellend gelöst werden, da dieses inhärent mit Erzeugung der Zielfunktion aus Gleichung (5.4) verknüpft ist. Durch die Wahl der Gewichte g_i werden die unterschiedlichen Zielfunktionen in den Gebieten unterschiedlich gewichtet und gehen somit unterschiedlich stark in den Optimierungsprozess ein. Somit wird für eine unterschiedliche Wahl der Gewichte ein unterschiedlicher Punkt im Zielfunktionsraum als Optimum ermittelt. Dies soll zunächst an einem einfachen Beispiel illustriert werden.

Abbildung 5.6 zeigt den Zielfunktionsraum eines Minimierungsproblems mit zwei Optimierungszielen, die durch f_1 und f_2 beschrieben werden (dieses Problem entspricht zwei Gebieten Ω_1 und Ω_2 , in denen die Feldverteilung optimiert werden soll). Für unterschiedliche Gewichte g_i werden unterschiedliche Punkte im Zielfunktionsraum ermittelt. Wird eine der Zielfunktionen überproportional begünstigt, indem der zugehörige Wichtungsfaktor wesentlich größer als der andere gewählt wird, wird diese Funktion größtenteils minimiert. Dies ist in Abbildung 5.6 sehr gut erkennbar: Hier

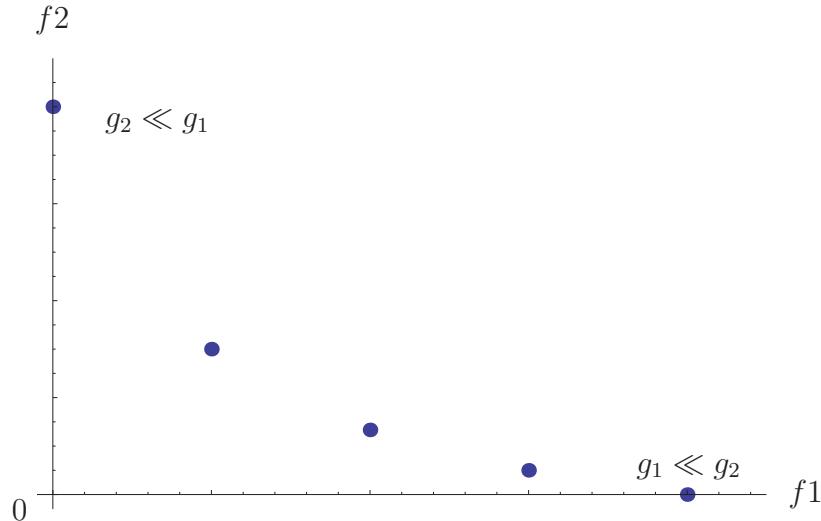


Abbildung 5.6: Ermittelte Optima für verschiedene Gewichte in einem Zielfunktionsraum für ein Optimierungsproblem mit den Zielfunktionen f_1 und f_2 .

wurde die Minimierung unter der Annahme $g_2 \ll g_1$ (beziehungsweise $g_1 \ll g_2$) durchgeführt. Bei dieser Wahl der Wichtungsfaktoren wird f_1 (f_2) minimiert und erreicht den Wert Null. Die jeweils andere Zielfunktion spielt in der Minimierung erst dann eine entscheidende Rolle, wenn die erste Zielfunktion einen hinreichend kleinen Wert angenommen hat. Dies ist prinzipiell kein Problem für die Optimierung des Elektrostimulationssystems, wenn alle Funktionen zu Null minimiert werden können. Ist dies allerdings nicht der Fall, muss eine geeignete Kompromisslösung gefunden werden, die alle Zielfunktionen f_i hinreichend gut minimiert.

Hierzu eine kleine Überlegung: Gegeben seien zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 sowie die dazu gehörigen Zielfunktionen nach (5.1)-(5.3)⁶. Weiterhin soll davon ausgegangen werden, dass der Optimierungsalgorithmus jeweils das globale Minimum ermittelt. Zunächst soll der Wichtungsfaktor g_1 wesentlich größer gewählt werden als g_2 . In diesem Fall wird f_1 so gut wie möglich minimiert und f_2 spielt eine untergeordnete Rolle (siehe Abbildung 5.6). Anschließend wird g_1 um einen kleinen Betrag reduziert und der Optimierungsprozess erneut gestartet. In der nun ermittelten Lösung wird die Zielfunktion f_1 einen geringfügig höheren Zielfunktionswert aufweisen als im vorherigen Lauf. Der Wert der Zielfunktion f_2 hat sich hierbei geringfügig verbessert. Nun wird erneut der Wichtungsfaktor g_1 reduziert und der Optimierungsprozess wiederum gestartet. Diese Prozedur wird solange durchgeführt, bis der Wichtungsfaktor g_2 wesentlich größer ist als g_1 . Mit diesen Wichtungsfaktoren wird nun die Funktion f_2 minimiert, während die Funktion f_1 eine untergeordnete Rolle spielt. Unter der ein-

⁶Dieses Beispiel lässt sich auf beliebig viele Zielfunktionen erweitern und wurde hier der Anschaulichkeit wegen auf zwei Zielfunktionen beschränkt.

gangs geforderten Bedingung, dass der Optimierungsalgorithmus jeweils das globale Minimum ermittelt, kann folgende Aussage getroffen werden: Ausgehend von einem Satz Wichtungsfaktoren $\{g_1, g_2\}$ und einem korrespondierenden Optimum im Zielfunktionsraum $\{f_1, f_2\}$ kann eine Verbesserung des einen Zielfunktionswertes (durch eine Erhöhung des zugehörigen Wichtungsfaktors) nur durch eine Verschlechterung des anderen Zielfunktionswertes erreicht werden. Die so ermittelte Menge wird als Pareto-Menge⁷ des Optimierungsproblems bezeichnet [Wei08].

Da der Wertebereich der einzelnen Zielfunktionen allerdings im Allgemeinen nicht bekannt ist, kann zunächst nur mit einem Satz an Wichtungsfaktoren optimiert werden. Entspricht das gefundene Element der Pareto-Menge nicht den Anforderungen, da einzelne Ziele unter- oder überrepräsentiert sind, so müssen die Wichtungsfaktoren modifiziert und der Optimierungsprozess erneut gestartet werden. Dies wird nun solange durchgeführt, bis ein geeignetes Element der Pareto-Menge gefunden wurde. Es ist ersichtlich, dass dieses Verfahren wenig effektiv und unter Umständen sehr zeitaufwendig ist. Daher soll zur Optimierung des Elektrostimulationssystems ein Algorithmus vorgestellt werden, der in einem Lauf die komplette Pareto-Menge (beziehungsweise eine bestmögliche Approximation) ermittelt. Dies hat den Vorteil, dass keine Wichtungsfaktoren spezifiziert werden müssen beziehungsweise eine weite Spanne von Wichtungsfaktoren implizit enthalten ist. Im nachfolgenden Abschnitt wird ein Optimierungsverfahren vorgestellt, das eine Approximation der Pareto-Menge für mehrere Zielfunktionen ermittelt.

5.3 Mehrdimensionale Optimierung - Pareto Optimierung

In diesem Abschnitt soll mit den gleichen Voraussetzungen begonnen werden, wie in Abschnitt 5.2: Es wird davon ausgegangen, dass in Ω k Gebiete sowie k Zielfunktion nach (5.1), (5.2) oder (5.3) definiert wurden. Erneut ist das Ziel, eine Elektrodenkonfiguration \vec{p}_O zu ermitteln, die die Zielfunktionen f_1 bis f_k bestmöglich minimiert. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt sollen die k Zielfunktionen nun nicht zu einer Funktion zusammengefasst werden. Somit wird durch die k Zielfunktionen eine Elektrodenanordnung mit N Stimulationselektroden und $3N$ Freiheitsgraden in einen k -dimensionalen Vektorraum (Zielfunktionsraum) abgebildet.

5.3.1 Optimalität in mehreren Dimensionen

Da die zu minimierende Größe nun ein Vektor und kein Skalar ist, muss ein neuer Optimalitätsbegriff definiert werden, um einzelne Lösungen im Zielfunktionsraum vergleichbar zu machen [KLP75].

⁷Benannt nach dem Ökonom und Soziologen Vilfredo Pareto.

5 Zur Optimierung des Elektrostimulationssystems

Es sei P eine Menge von n Elektrodenanordnungen mit jeweils N Stimulationselektroden:

$$P = \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n. \quad (5.9)$$

Weiterhin sei F eine vektorielle Funktion, die die k Zielfunktionen f_1, \dots, f_k zu einem Zielfunktionsvektor zusammenfasst:

$$\begin{aligned} F &= (f_1, \dots, f_k)^T \\ F &: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (5.10)$$

und eine Elektrodenanordnung \vec{p} in den Zielfunktionsraum abbildet. Es soll weiterhin davon ausgegangen werden, dass alle Zielfunktionen f_1, \dots, f_k minimiert werden sollen. Eine Relation zum Vergleich zweier Elektrodenanordnungen \vec{p}_1 und \vec{p}_2 ist durch die Dominanzrelation [Wei08] gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 \vdash \vec{p}_2 : \Leftrightarrow \forall i : 1 < i \leq k : f_i(\vec{p}_1) \leq f_i(\vec{p}_2) \wedge \\ \exists j : 1 < j \leq k : f_j(\vec{p}_1) < f_j(\vec{p}_2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Elektrodenanordnung \vec{p}_1 *dominiert* eine zweite Elektrodenanordnung \vec{p}_2 , wenn sie in allen Zielfunktionswerten mindestens den gleichen (kleinen) Zielfunktionswert erreicht und mindestens in einer Zielfunktion einen besseren. Diese Definition soll an einem Beispiel illustriert werden.

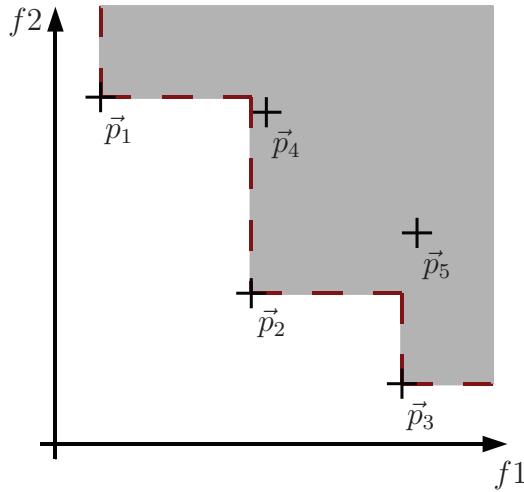


Abbildung 5.7: Beispiel für die Dominanzrelation aus (5.11) in einem zweidimensionalen Zielfunktionsraum

Abbildung 5.7 zeigt einen zweidimensionalen Zielfunktionsraum mit den Zielfunktionen f_1 und f_2 , die minimiert werden sollen. In diesem sind die Zielfunktionswerte von fünf Elektrodenanordnungen ($\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_5$) dargestellt. In diesem Beispiel werden die Elektrodenanordnungen \vec{p}_1, \vec{p}_2 und \vec{p}_3 von keiner anderen Elektrodenanordnung

dominiert. Die Anordnungen \vec{p}_4 und \vec{p}_5 werden von mindestens einer der zuvor genannten Elektrodenanordnungen dominiert. Somit sind die Anordnungen \vec{p}_1 , \vec{p}_2 und \vec{p}_3 optimal im Sinn der Relation (5.11).

Ziel ist es nun, eine Optimierung des Elektrostimulationssystems basierend auf der Dominanzrelation durchzuführen, um zu einem gegebenen Problem mit mehreren Zielfunktionen eine Approximation der Pareto-Menge zu ermitteln. Dieser Grundgedanke wurde zunächst von Goldberg et al. [GDH92] formuliert. Basierend auf [GDH92] wurden verschiedene Optimierungsverfahren entwickelt (beispielsweise [SD94], [HNG94] und [FF93]), von denen sich insbesondere der *NSGA*-Algorithmus [SD94] durch seine breite Anwendbarkeit für eine Vielzahl von Problemen bewährte. Im Jahr 2002 stellten Deb et al. [DPAM02] einen angepassten Algorithmus vor, der verschiedene Kritikpunkte am ursprünglichen Algorithmus beseitigte. Es soll an dieser Stelle nicht auf die Vor- und Nachteile der einzelnen Algorithmen eingegangen werden, da dies den Umfang der Arbeit sprengen würden. Der interessierte Leser sei daher an eine Reihe von Veröffentlichungen verwiesen ([Whi94], [FF95], [CP98], [Coe98], [ZT99], [vL00], [ZDT00], [Pur03]), in denen das Verhalten von verschiedenen Algorithmen an einer Vielzahl von Testproblemen analysiert wird. Hierbei haben der *NSGA*-Algorithmus und sein Nachfolger gezeigt, dass sie in der Lage sind, auch komplexe Optimierungsprobleme in vertretbarer Zeit zu lösen.

5.3.2 Evolutionäre mehrdimensionale Optimierung des Elektrostimulationssystems

Ein evolutionärer Optimierungsalgorithmus imitiert den Prozess der Evolution in der Biologie: Ausgehend von einer Elterngeneration werden neue, modifizierte Nachkommen erzeugt, die sich von ihren Eltern unterscheiden. Jedoch werden nicht alle Individuen einer Elterngeneration in die Erzeugung der Nachkommen einbezogen. Die Individuen werden anhand der zu optimierenden Funktion (oder Funktionen im mehrdimensionalen Fall) bewertet und die Wahrscheinlichkeit Nachkommen hervorzubringen ist für Individuen mit guten Eigenschaften (entspricht besseren Funktionswerten) höher. Die Nachkommen ersetzen nun die Elterngeneration und bringen ihrerseits erneut Nachkommen hervor. Da Individuen mit wünschenswerten Eigenschaften bevorzugt Nachkommen hervorbringen, setzen sich diese Eigenschaften im Verlauf von vielen Generationen durch. Dieses Prinzip ist die Grundlage von allen evolutionären Algorithmen.

Es wurde eine Vielzahl von unterschiedlichen Algorithmen vorgeschlagen, die sich dieses Prinzip zunutze machen. Auf die unterschiedlichen Algorithmen soll hier nicht weiter eingegangen werden. Umfangreiche Vergleiche können in verschiedenen Veröffentlichungen nachvollzogen werden (beispielsweise [CP98], [Coe98], [ZT99], [vL00] und [ZDT00]). Ein grundsätzliches Problem ist allerdings allen evolutionären Algorithmen gemein: Für den Optimierungsprozess müssen verschiedene Parameter spezifiziert werden, für die a priori kein Wert angegeben werden kann. Vielmehr müssen die optimalen Parameter im Verlauf mehrerer Optimierungszyklen ermittelt werden.

Auch für den nachfolgend präsentierten *NSGA-2*-Algorithmus, der in der Arbeit für das vorliegende Problem angepasst wurde, müssen mehrere Parameter spezifiziert werden. Diese werden in den entsprechenden Abschnitten eingeführt. Ein Vergleich der ein- und mehrdimensionalen Optimierung erfolgt in Kapitel 6.

Dieser Abschnitt ist nicht als Einführung in die Theorie der evolutionären Optimierung gedacht. Vielmehr soll eine im Rahmen dieser Arbeit angepasste Version des *NSGA-2*-Algorithmus betrachtet werden, die zur Optimierung des aus Gleichung (5.10) bekannten mehrdimensionalen Optimierungsproblems genutzt werden kann.

Algorithmus 1 Schema des angepassten *NSGA-2*-Algorithmus.

```

1:  $i = 1$ 
2:  $Population_1 = \text{Startpopulation}(n)$ 
3: while  $i \leq i_{max}$   $\&\&$  !Abbruch() do
4:    $Fitness_i = \text{FitnessBestimmen}(Population_i)$ 
5:    $Pool_i = \text{Selektion}(Population_i, Fitness_i)$ 
6:    $Nachkommen_i = \text{Reproduktion}(Pool_i)$ 
7:    $Population_{i+1} = \text{Reduktion}(Population_i \cup Nachkommen_i)$ 
8:    $i++$ 
9: end while
10:  $FitnessBestimmen(Population_{i+1})$ 

```

Der grundsätzliche Ablauf ist in Algorithmus 1 dargestellt. Zunächst wird die Startpopulation $Population_1 = \{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}$ mit n Elektrodenanordnungen zufällig erzeugt. Einzige Bedingung hierbei ist, dass gültige Elektrodenanordnungen erzeugt werden (siehe Nebenbedingungen zu Beginn dieses Kapitels). Die Größe der Population gehört zu den Parametern, die - wie eingangs erwähnt - vom Nutzer zu spezifizieren sind. Im Anschluss wird die *Fitness*⁸ jedes Individuums bestimmt. Diese ist ein Maß dafür, wie gut eine Elektrodenanordnung die gewünschte Feldverteilung generieren kann und inwiefern die einzelnen Zielfunktionswerte f_1, \dots, f_k minimiert werden. Danach wird ein Teil der aktuellen Generation ausgewählt und in den Reproduktionspool übernommen. Die Wahrscheinlichkeit für ein Individuum, in den Reproduktionspool (Pool) übernommen zu werden, basiert auf seinem Fitnesswert. Individuen, die als „fitter“ bewertet wurden, also im Sinne der Optimierung besser sind, haben eine bessere Chance, in den Reproduktionspool übernommen zu werden. Im nachfolgenden Schritt werden aus den Individuen (Elektrodenanordnungen) des Reproduktionspools n neue Elektrodenanordnungen generiert und mit der Elterngeneration zusammengefügt. Die resultierende Menge enthält nun $2n$ Individuen. Daher wird erneut die Fitness dieser Menge berechnet, und die n Individuen mit den besten Fitnesswerten werden in die nachfolgende Generation übernommen. Dies stellt sicher, dass sehr gute Individuen, die in dieser Generation nicht in den Reproduktionspool übernommen wurden, erhalten bleiben.

⁸Der in diesem Kontext gebräuchliche Begriff der Fitness geht auf die darwinsche Evolutionstheorie zurück → „Survival of the Fittest“.

Dieser Prozess wird nun wiederholt, bis ein Abbruchkriterium oder eine vorher festgelegte Anzahl an Iterationen i_{max} erreicht wird. Die Population der letzten Generation enthält die besten ermittelten Elektrodenanordnungen. In dieser Menge von Individuen werden die Elektrodenanordnungen bestimmt, die von keinen anderen Elektrodenanordnungen dominiert werden (siehe Relation (5.11)). Diese Anordnungen stellen dann die beste gefundene Approximation der Pareto-Menge des Optimierungsproblems dar. Die einzelnen Schritte des Optimierungsverfahrens werden nachfolgend behandelt.

5.3.3 Schritt 1: Erzeugung der Startpopulation

Zunächst muss eine geeignete Startpopulation erzeugt werden (im Algorithmus Zeile zwei). Hier können prinzipiell verschiedene Ansätze verfolgt beziehungsweise miteinander kombiniert werden, um eine Startpopulation zu erzeugen:

- Zufällige Generierung der Individuen: Hierbei sollte auf eine möglichst gleichmäßige Verteilung im Parameterraum geachtet werden, um eine hohe Variabilität der Population zu sichern.
- Manuelles Erzeugen einzelner Individuen: Auf diese Art können Elektrodenanordnungen, die aufgrund von Vermutungen oder Experimenten entstanden sind, schon in die erste Generation eingebracht werden. Haben sich die Vermutungen als berechtigt erwiesen, setzen sich diese Anordnungen durch, andernfalls werden sie aus der Generationsfolge entfernt.
- Pareto-Menge vorheriger Optimierungen: Es können die gefundenen Lösungen aus anderen Optimierungsläufen verwendet werden. Hierbei werden einzelne Individuen aus Optimierungszyklen, die beispielsweise mit anderen Nebenbedingungen (Stimulationsfrequenz, Primärstrom) oder anderen Optimierungszielen, die ähnlich sind, in die erste Generation eingebracht.

Diese Möglichkeiten können beliebig kombiniert werden. Im folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die Startpopulation komplett zufällig erzeugt wurde. Weiterhin soll die Startpopulation nur gültige Elektrodenanordnungen enthalten, die alle an sie gestellten Nebenbedingungen erfüllen.

5.3.4 Schritt 2: Fitnessbewertung der aktuellen Population

Nachdem eine neue Generation von Elektrodenanordnungen erzeugt wurde, müssen die einzelnen Anordnungen $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ anhand der Optimierungsziele bewertet werden (Zeile vier im Algorithmus). Hierzu wird zunächst für jede Elektrodenanordnung das elektrische Feld mittels des in Kapitel 4 vorgestellten hybriden Ansatzes berechnet. Im Anschluss wird für jede Elektrodenanordnung die elektrische Feldverteilung berechnet und mittels der Funktion aus Definition (5.10) in den Zielfunktionsraum abgebildet.

Das Bestimmen der Fitnesswerte erfolgt nun in zwei Schritten. Da die Dominanzrelation aus (5.11) transitiv ist, ist durch sie eine eindeutige Ordnung innerhalb einer Menge von Individuen gegeben. Dies soll an einem Beispiel illustriert werden. Erneut wird ein Optimierungsproblem mit zwei Zielfunktionen betrachtet⁹. Der zugehörige Zielfunktionsraum ist somit ebenfalls zweidimensional.

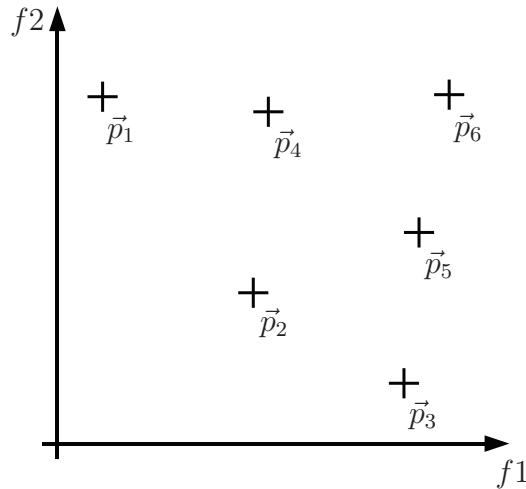


Abbildung 5.8: Beispiel für die Dominanzrelation aus (5.11) in einem zweidimensionalen Zielfunktionsraum.

Abbildung 5.8 zeigt den Zielfunktionsraum der Zielfunktionen f_1 und f_2 sowie sechs Elektrodenanordnungen, die in diesen abgebildet wurden. Die sich ergebenden Dominanzverhältnisse sind in Tabelle 5.1 dargestellt.

Elektrodenanordnung	dominiert	wird dominiert von
\vec{p}_1	\vec{p}_6	—
\vec{p}_2	$\vec{p}_4, \vec{p}_5, \vec{p}_6$	—
\vec{p}_3	\vec{p}_5, \vec{p}_6	—
\vec{p}_4	\vec{p}_6	\vec{p}_2
\vec{p}_5	\vec{p}_6	\vec{p}_2, \vec{p}_3
\vec{p}_6	—	$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \vec{p}_5$

Tabelle 5.1: Dominanz der einzelnen Elektrodenanordnungen aus Abbildung 5.8.

Durch die Dominanzrelation ist eine natürliche Ordnung im Funktionsraum gegeben. In diesem Beispiel dominieren die Elektrodenanordnungen \vec{p}_1 , \vec{p}_2 und \vec{p}_3 alle nachfolgenden Elemente und werden selbst von keinem Element dominiert. Sie sind

⁹Dieses Beispiel lässt sich natürlich auf höherdimensionale Probleme übertragen. Allerdings ist dann die Anschaulichkeit nicht mehr gegeben.

somit die beste Approximation der Pareto-Menge. Werden diese Elemente entfernt, so dominieren \vec{p}_4 und \vec{p}_5 das Element \vec{p}_6 und werden ihrerseits von keinem Element dominiert. Diese Elemente können also als zweitbeste Approximation der Pareto-Menge aufgefasst werden. Werden nun auch diese Elemente entfernt, verbleibt das Element \vec{p}_6 als letztes Element, welches nun wiederum von keinem Element dominiert wird und die drittbeste Approximation der Pareto-Menge ist. Somit strukturiert die Dominanzrelation eine Menge von Punkten im Zielfunktionsraum in mehrere Fronten. Hierbei wird die i -te Front von allen vorhergehenden dominiert und dominiert alle nachfolgenden Fronten.

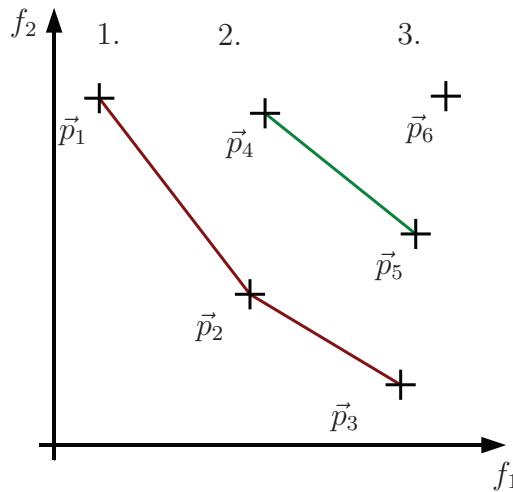


Abbildung 5.9: Einteilung des Zielfunktionsraums aus Abbildung 5.8 in drei Fronten. Die erste Front (rot) dominiert die zwei nachfolgenden Fronten. Die zweite Front (grün) wird von der ersten dominiert und dominiert ihrerseits die Dritte, die durch das Element \vec{p}_6 gebildet wird.

Abbildung 5.9 zeigt die Aufteilung der Elemente aus dem Beispiel in drei Fronten. Der erste Teil des Fitnesswertes eines Individuums ergibt sich nun aus der Nummer der Front, dem diese Elektrodenanordnung zugehörig ist. Hierfür wird die Dominanzrelation zwischen allen Elektrodenanordnungen mittels eines *Non-Dominant-Sorting*-Algorithmus ermittelt. Der ursprünglich von Deb et al. vorgeschlagene Algorithmus [SD94] arbeitet nach dem angedeuteten Prinzip: Für eine Population werden zunächst alle Elemente bestimmt, die nicht dominiert werden. Diese bilden die erste Front. Im Anschluss werden diese aus der Population entfernt, und es werden erneut alle nicht dominierten Elemente bestimmt. Diese bilden dann die zweite Front. Dieser Algorithmus wird solange fortgesetzt, bis jedem Element eine zugehörige Front zugewiesen wurde. Dieser Algorithmus wurde für seine hohe Laufzeit kritisiert, die im ungünstigsten Fall $\mathcal{O}(n^3)$ beträgt, wenn die Population n Individuen enthält. In [DPAM02] haben Deb et al. einen *Non-Dominant-Sorting*-Algorithmus vorgeschla-

gen, der eine Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ aufweist und welcher auch in dieser Arbeit für die Fitnessbewertung verwendet wird.

Nachdem die Einteilung einer Population in Fronten erfolgt ist, müssen die Individuen innerhalb einer Front bewertet werden, da jeder Elektrodenanordnung ein eindeutiger Fitnesswert zugewiesen werden muss. Im *NSGA-2* Algorithmus erfolgt diese Bewertung anhand einer Metrik, die von Deb et al. [DPAM02] als *Sharing-Distance* bezeichnet wird.

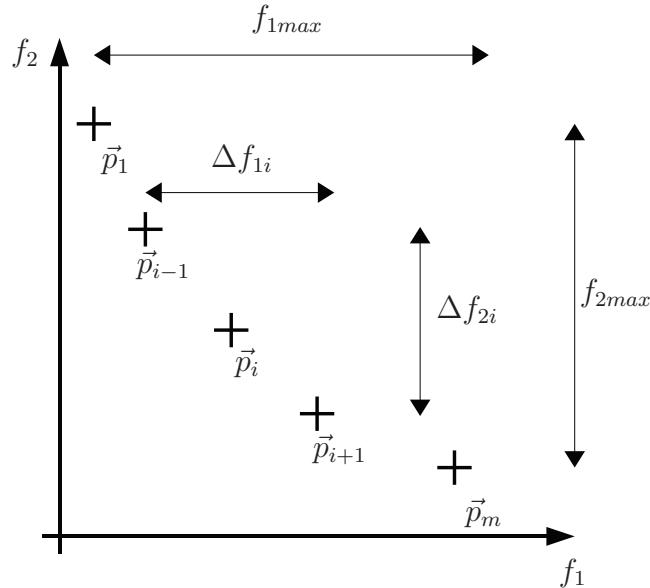


Abbildung 5.10: Ermittlung der *Sharing-Distance* für das i -te Element einer Front in einem Zielfunktionsraum mit zwei Zielfunktionen.

Abbildung 5.10 zeigt ein Beispiel für die Ermittlung der *Sharing-Distance* für das i -te Element in einer Front mit m Elementen. Sie ist für die Zielfunktionen f_1 bis f_k durch:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_m = \infty \\ s_i &= \sum_{j=1}^k \frac{\Delta f_{ji}}{f_{jmax}} \quad i \in [2, m-1] \end{aligned} \quad (5.12)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet Δf_{ji} den Abstand der benachbarten Elemente für die Zielfunktion f_j . Mit f_{jmax} wird der maximale Abstand für die j -te Zielfunktion bezeichnet. Anschaulich betrachtet weist die *Sharing-Distance* einem Individuum den Abstand zu seinen Nachbarn, bezogen auf die Gesamtausdehnung einer Front, zu. Den Randelementen wird eine unendlich große *Sharing-Distance* zugewiesen.

Grundgedanke dieser Metrik ist es, dass Individuen mit einem großen Abstand zu ihren Nachbarn wichtiger für die Diversität einer Population sind als Individuen

aus dicht bevölkerten Bereichen des Zielfunktionsraums. Die Ränder einer Front minimieren jeweils mindestens eine Zielfunktion bestmöglich und werden deshalb als besonders wichtig angesehen.

Nachdem diese beiden Schritte für eine Population durchgeführt wurden, liegen für jede Elektrodenanordnung zwei Fitnesswerte vor. Sollen nun zwei Elektrodenanordnungen verglichen werden, so werden zunächst die Nummern der jeweiligen Fronten verglichen. Das Individuum mit der niedrigeren Frontnummer ist besser („fitter“) als das mit der höheren. Weisen beide Individuen die gleiche Frontnummer auf, so werden die Werte der *Sharing-Distance* verglichen. Das Individuum mit dem höheren Wert ist hierbei besser.

5.3.5 Schritt 3: Selektion der Individuen des Reproduktionspools

Nachdem jeder Elektrodenanordnung der Population ein Fitnesswert-Tupel zugewiesen wurde, muss der Reproduktionspool erzeugt werden (Zeile fünf im Algorithmus). Ziel ist es, eine Teilmenge von αn Individuen zu erzeugen, wobei α im Intervall $(0,1)$ liegt und vom Anwender definiert werden muss. Zur Selektion des Reproduktionspools wird in dieser Arbeit ein *Tournament*-Selektionsschema [Wet83] verwendet, bei dem die Individuen um einen Platz im Reproduktionspool konkurrieren. Hierzu werden m Individuen aus der aktuellen Population ausgewählt. Das Individuum mit dem besten Fitnesswert wird in den Reproduktionspool übernommen. Dieses Schema hat sich als sehr effektiv erwiesen [Bri81].

Die Wahl des Parameters m ist entscheidend für den Selektionsdruck, der durch dieses Schema erzeugt wird. Dies soll an einem Beispiel illustriert werden: Es sei eine Population mit n Individuen gegeben. Weiterhin soll hier davon ausgegangen werden, dass es keine Individuen mit den gleichen Fitnesswerten in dieser Population gibt. Werden diese Individuen nun nach ihren Fitnesswerten angeordnet (beginnend mit dem besten Individuum) und werden m Individuen zufällig gleichverteilt gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das i -te Individuum, in den Fortpflanzungspool zu gelangen, durch

$$p(i) = \left(\frac{n-i+1}{n} \right)^m - \left(\frac{n-i}{n} \right)^m \quad (5.13)$$

gegeben [BL96].

Abbildung 5.11 zeigt die Wahrscheinlichkeit des i -ten Individuums einer Population mit 100 Individuen, in einer Runde in den Reproduktionspool übernommen zu werden, für verschiedene Werte von m . Es ist erkennbar, dass ein größerer Wert von m bessere Individuen für die Übernahme in den Reproduktionspool bevorzugt. Ein höherer Wert für m sorgt somit für eine schnellere Konvergenz der Populationsfolge in die Regionen des Zielfunktionsraums mit den besten Individuen. Allerdings muss hierbei beachtet werden, dass eine zu schnelle Konvergenz dazu führen kann, dass Teile des Parameterraums vom Algorithmus nicht abgetastet werden. Dies bedeutet unter Umständen, dass die gefundene Approximation der Pareto-Menge viele loka-

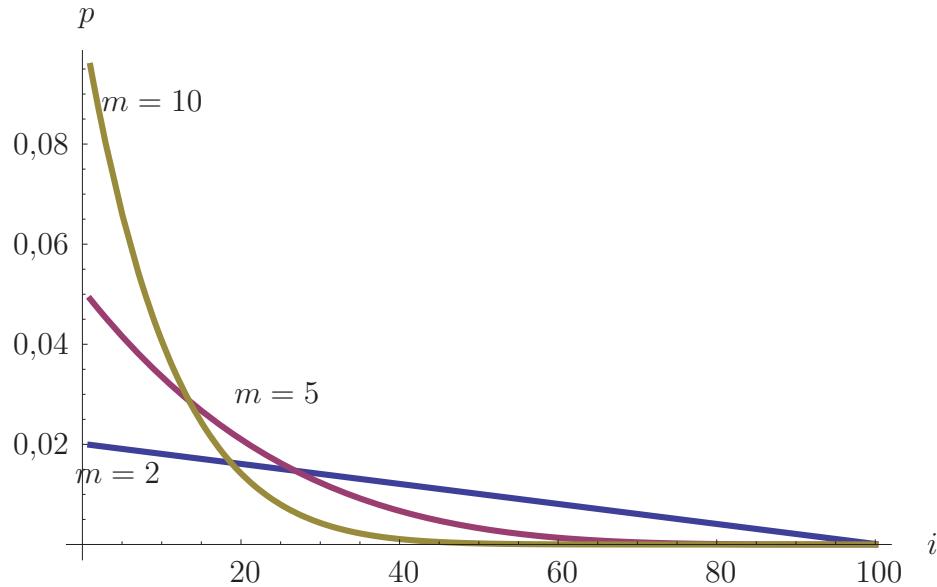


Abbildung 5.11: Wahrscheinlichkeit für das i -te Individuum einer Population, während einer *Tournament*-Runde ausgewählt zu werden

le Optima enthält und die globale Pareto-Menge gar nicht oder nur unvollständig ermittelt wurde.

5.3.6 Schritt 4: Reproduktion

Nachdem der Reproduktionspool bestimmt wurde, werden aus diesen Individuen die Nachkommen generiert (im Algorithmus Zeile sechs). Hierzu werden zwei verschiedene Operationen vorgeschlagen [CP98]: Bei der Kreuzung (Crossover) sollen die Parametervektoren zweier bekannten Individuen neu kombiniert werden, um zwei neue Individuen hervorzubringen, die unter Umständen bessere Fitnesswerte aufweisen. Da bei dieser Operation nur bekannte Informationen neu gemischt werden, bedarf es einer zweiten Operation, die neue Informationen erzeugt. Diese wird, in Anlehnung an den entsprechenden biologischen Vorgang, als Mutation bezeichnet. Hierbei wird ein Parametervektor durch einen Zufallsprozess modifiziert, um neue Informationen in den Optimierungsprozess einzubringen und die Variabilität der Population zu erhöhen. Nachfolgend werden auf die gegebene Problemstellung angepasste Kreuzungs- und Mutationsoperationen für den *NSGA-2*-Algorithmus vorgestellt.

5.3.6.1 Die Kreuzungsoperation

Für die Kreuzung von zwei Parametervektoren werden in der Literatur verschiedene Strategien vorgeschlagen [CP98]. An dieser Stelle soll jedoch nur auf die beiden

gebräuchlichsten (*Onepoint*-Kreuzung und die *Uniform*-Kreuzung) eingegangen werden.

$\vec{p}_i:$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>x_1</td><td>y_1</td><td>N_1</td><td>x_2</td><td>y_2</td><td>N_2</td><td>x_3</td><td>y_3</td><td>N_3</td><td>x_4</td><td>y_4</td><td>N_4</td><td>...</td><td>x_N</td><td>y_N</td><td>N_N</td></tr></table>	x_1	y_1	N_1	x_2	y_2	N_2	x_3	y_3	N_3	x_4	y_4	N_4	...	x_N	y_N	N_N
x_1	y_1	N_1	x_2	y_2	N_2	x_3	y_3	N_3	x_4	y_4	N_4	...	x_N	y_N	N_N		
$\vec{p}_j:$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>x_1</td><td>y_1</td><td>N_1</td><td>x_2</td><td>y_2</td><td>N_2</td><td>x_3</td><td>y_3</td><td>N_3</td><td>x_4</td><td>y_4</td><td>N_4</td><td>...</td><td>x_N</td><td>y_N</td><td>N_N</td></tr></table>	x_1	y_1	N_1	x_2	y_2	N_2	x_3	y_3	N_3	x_4	y_4	N_4	...	x_N	y_N	N_N
x_1	y_1	N_1	x_2	y_2	N_2	x_3	y_3	N_3	x_4	y_4	N_4	...	x_N	y_N	N_N		

Abbildung 5.12: Zwei Individuen \vec{p}_i und \vec{p}_j des Reproduktionspools in ihrer Darstellung als Parametervektor

Abbildung 5.12 zeigt zwei Individuen \vec{p}_i und \vec{p}_j aus dem Reproduktionspool. Die beiden Individuen beschreiben Elektrodenanordnungen mit jeweils N Stimulations-elektroden.

Die für die Optimierung des Elektrostimulationssystems verwendeten Kreuzungsoperationen weichen von den in [CP98] beschriebenen ab, da sie auf einen Zwischen-schritt verzichten. Die originalen Operationen wandeln die beteiligten Parametervektoren zunächst in eine binäre Zeichenkette um und führen dann die nachfolgend beschriebenen Operationen auf diesen durch. Im Anschluss werden die resultierenden binären Zeichenketten dann als Parametervektoren interpretiert. In dieser Arbeit soll auf diesen Zwischenschritt verzichtet und die Kreuzung auf Basis der reellen Parametervektoren durchgeführt werden. Weiterhin sollen Stimulationselektroden - beziehungsweise die drei Parameter, die eine Stimulationselektrode definieren - als eine Einheit betrachtet werden. Dies bedeutet, dass jeweils Sequenzen von zwei zusammenhängenden Positionen und einer Windungszahl zwischen den beteiligten Individuen ausgetauscht werden. Dabei werden in Anlehnung an die originalen Operationen die Namen *Onepoint*-Kreuzung (Austausch erfolgt an einem Punkt) und die *Uniform*-Kreuzung (Austausch erfolgt an mehreren Punkten) verwendet. Bei der vorgeschlagenen *Onepoint*-Kreuzung wird der Parametervektor zwischen zwei Elektroden geschnitten und getauscht. Bei der *Uniform*-Kreuzung wird für jede Stimulationselektrode entschieden, ob die Elektroden getauscht werden. Die Idee dieser Operation ist, dass sich besonders geeignete Stimulationselektroden, also Teile von Parametervektoren, im Laufe mehrerer Generationen ansammeln, aus denen dann eine geeignete Elektrodenanordnung kombiniert werden kann.

Abbildung 5.13 zeigt jeweils ein Beispiel für die resultierenden Individuen einer *Onepoint*-Kreuzung (a) und einer *Uniform*-Kreuzung (b). Es ist erkennbar, dass die Kreuzung so erfolgt ist, dass die Parameter einer Stimulationselektrode - also zwei Koordinaten sowie eine Windungszahl - in ihrer Form erhalten bleiben. Somit tritt bei diesen Kreuzungsoperationen keine Veränderung der einzelnen Stimulationselektroden auf. Da hierbei nur Teile bekannter Elektrodenanordnungen neu gemischt werden, enthalten die Individuen, die aus dieser Operation hervorgegangen sind, Stimulationselektroden, die alle Nebenbedingungen hinsichtlich der Positionierung und der Windungszahlen der eingelegten Spulen erfüllen.

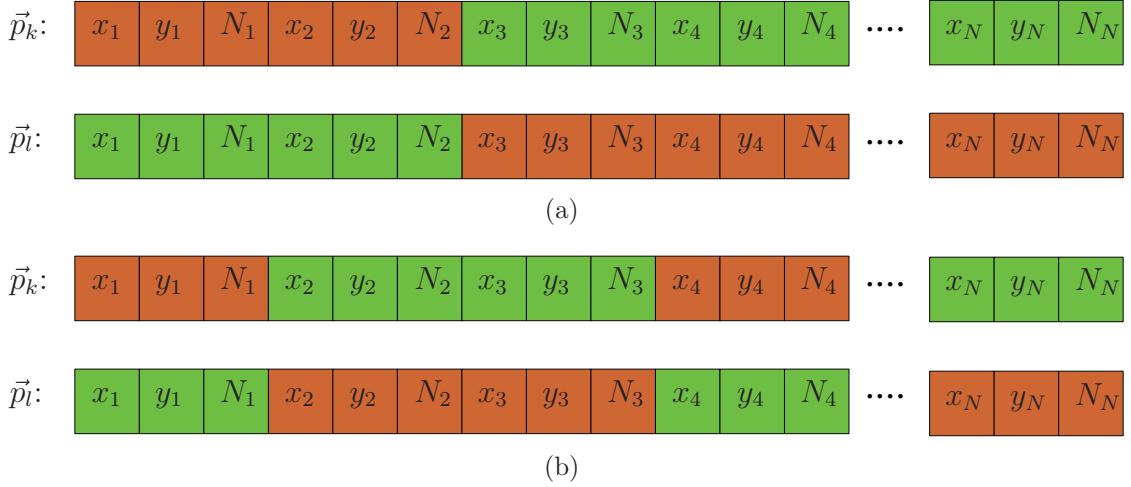


Abbildung 5.13: Resultierende Individuen nach einer *Onepoint*-Kreuzung (a) und einer *Uniform*-Kreuzung (b)

5.3.6.2 Die Mutationsoperation

Wie bereits angesprochen, wird eine zweite Reproduktionsoperation benötigt. Andernfalls könnten nur bereits in der Startpopulation enthaltene Teile von Parametervektoren neu kombiniert werden. Elemente, die nicht in der Startpopulation enthalten waren, würden dann nicht in die Optimierung einfließen. Daher wird nach jeder Kreuzungsoperation mit einer gewissen vom Benutzer zu spezifizierenden Wahrscheinlichkeit, eine zufällige Modifikation an einer oder beiden Elektrodenanordnungen vorgenommen.

Bei dieser Mutation kann es geschehen, dass Teile der aus der Operation hervorgegangen Elektrodenanordnung gegen eine oder mehrere Nebenbedingungen verstößen. Am Ende dieses Abschnittes wird daher ein Verfahren vorgestellt, wie diese dann modifiziert werden können, um alle Nebenbedingungen zu erfüllen. Die Mutationsoperation soll am Beispiel eines Parametervektors einer Elektrodenanordnung erläutert werden.

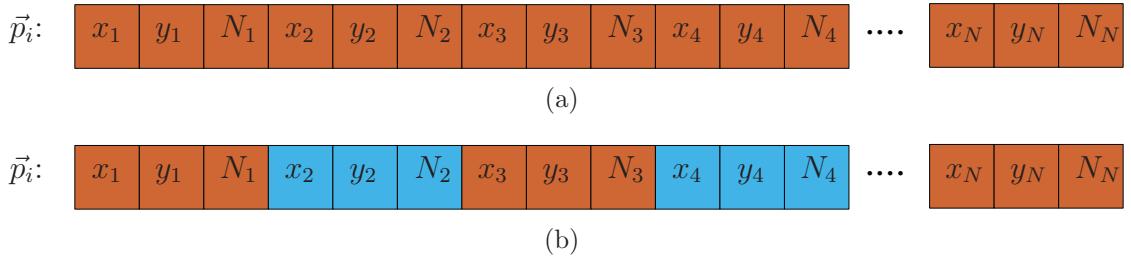


Abbildung 5.14: (a) Einzelne Elektrodenanordnung \vec{p}_i aus dem Reproduktionspool.
(b) Elektrodenanordnung nach der Mutationsoperation.

Hierfür soll die Elektrodenanordnung aus Abbildung 5.14(a) betrachtet werden, die aus einer zuvor durchgeführten Kreuzungsoperation hervorgegangen ist. Zunächst werden die zu modifizierenden Elektroden ermittelt, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mutation an einer Stimulationselektrode auftritt, vom Benutzer spezifiziert wurde.

In der Abbildung 5.14(b) wurden beispielsweise die Stimulationselektroden zwei und vier zur Modifikation ausgewählt. Im Anschluss beginnt der eigentliche Modifikationsprozess, bei dem die Koordinaten der betreffenden Stimulationselektrode (x_i, y_i) und die Windungszahl der eingelegten Spule getrennt modifiziert werden. Die neue Position der Stimulationselektrode ist durch:

$$\tilde{\vec{r}}_i = \vec{r}_i + \vec{m} \quad \tilde{\vec{r}}, \vec{r}, \vec{m} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.14)$$

gegeben. Hierbei bezeichnen \vec{r}_i und $\tilde{\vec{r}}_i$ die Position der korrespondierenden Stimulationselektroden vor beziehungsweise nach der Mutationsoperation auf der Implantatoberfläche. Der Mutationsvektor \vec{m} wird zufällig erzeugt, wobei der Betrag $|\vec{m}|$ normalverteilt ist und eine zuvor definierte Standardabweichung aufweist. Die Modifikation der Windungszahl erfolgt in analoger Weise:

$$\tilde{N}_i = N_i + m \quad \tilde{N}_i, N_i, m \in \mathbb{Z}. \quad (5.15)$$

Hierbei bezeichnen N_i und \tilde{N}_i die Windungszahl der eingelegten Spule vor und nach der Modifikation, wobei die Anzahl an zusätzlichen Windungen m ebenfalls normalverteilt ist und eine zuvor definierte Standardabweichung aufweist.

Da die Mutationen durch einen normalverteilten Prozess erzeugt werden, sind die meisten Änderungen an den Parametervektoren relativ gering und modifizieren die Elektrodenanordnungen nur geringfügig. Einige können jedoch sehr umfangreich sein. Durch die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Mutation an einer Elektrode auftritt sowie die Standardabweichungen von $|\vec{m}|$ und m kann die Mutationsoperation gesteuert werden. Je größer diese Werte gewählt werden, um so wahrscheinlicher ist es, dass umfangreiche Modifikationen auftreten und somit die Variabilität der Population erhöht wird. Allerdings ist hierbei zu beachten, dass dies die Konvergenz des Algorithmus verschlechtert. Dies ist darauf zurück zu führen, dass durch zu starke Mutationen wahllos Punkte im Parameterraum erzeugt werden und der Algorithmus dann eher einer zufälligen Suche (*Random Search*) gleicht.

Abschließend soll die Behandlung von ungültigen Elektrodenanordnungen betrachtet werden. Durch die Mutationsoperation werden neue Punkte im Parameterraum erzeugt, was unter Umständen dazu führt, dass ungültige Elektrodenanordnungen entstehen. Eine Elektrodenanordnung wird als ungültig betrachtet, wenn sie eine oder mehrere Stimulationselektroden außerhalb des zur Positionierung gültigen Bereiches σ_E und/oder eine oder mehrere Elektroden mit Windungszahlen größer als die maximale Windungszahl aufweist. Stimulationselektroden mit zu vielen Windungen können sehr einfach korrigiert werden, indem diese Windungszahlen durch den möglichen Maximalwert ersetzt werden.

Schwieriger gestaltet sich die Korrektur von ungültig positionierten Stimulationselektroden. Der hierfür genutzte Algorithmus soll an einem Beispiel erläutert werden.

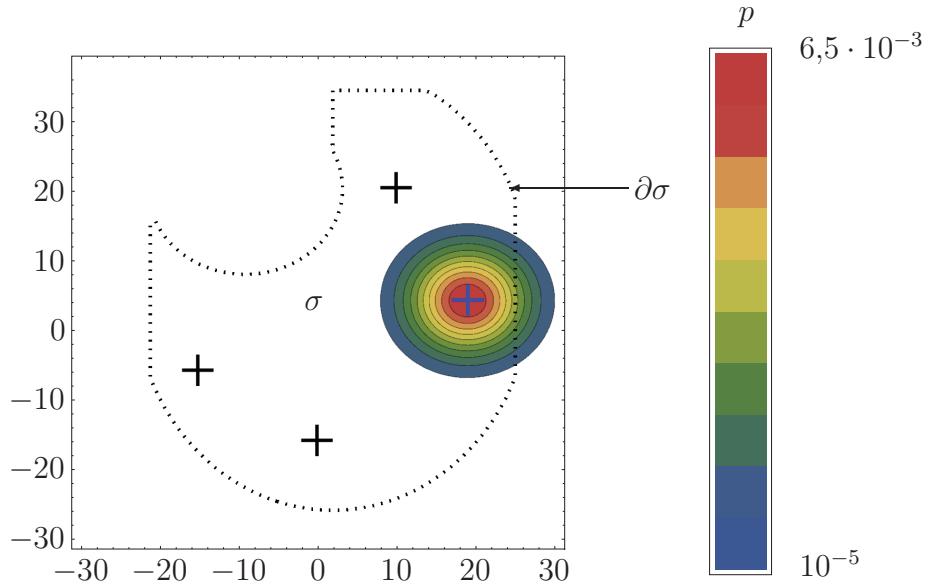


Abbildung 5.15: Platzierungswahrscheinlichkeit der markierten Elektrodenposition (blaues Kreuz).

In der Abbildung 5.15 ist eine Elektrodenanordnung mit vier Stimulationselektroden innerhalb des gültigen Positionsreiches σ_E dargestellt. Der Rand des Gebietes ist als $\partial\sigma_E$ gekennzeichnet. Die Position einer Stimulationselektrode wurde in einer Mutationsoperation für eine Modifikation ausgewählt. Nach Gleichung (5.14) wird zu der aktuellen Position der Stimulationselektrode \vec{r}_i ein weiterer zufällig generierter Vektor \vec{m} addiert. Die konzentrischen Kreise um die zu modifizierende Elektrodenposition geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die neue Position sich an dieser Stelle befindet. Für dieses Beispiel wurde eine Standardabweichung des Betrages $|\vec{m}|$ von 5 mm gewählt¹⁰.

Da an den Mutationsvektor \vec{m} keine weiteren Bedingungen gestellt wurden, kann es vorkommen, dass durch die Modifikation der Position einer Stimulationselektrode eine Position außerhalb von σ_E erzeugt wird. Diese ungültigen neuen Elektrodenanordnungen können auf zwei unterschiedliche Arten behandelt werden: Wird der Ansatz von Courant [Cou43] verwendet, so werden diesen Individuen Fitnesswerte zugewiesen, die schlechter sind als die aller gültigen Elektrodenanordnungen. Dies führt allerdings dazu, dass Elektrodenanordnungen, die Nebenbedingungen minimal verletzen, einen sehr schlechten Fitnesswert zugewiesen bekommen. Daher ist es wünschenswert, diese Anordnungen so zu modifizieren, dass sie alle Nebenbedingungen erfüllen.

Abbildung 5.16(a) zeigt die Elektrodenanordnung aus Abbildung 5.15 nach der Addition des Mutationsvektors \vec{m} zur ausgewählten Elektrodenposition. Durch einen

¹⁰Neue Positionen mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als 10^{-5} sind nicht dargestellt.

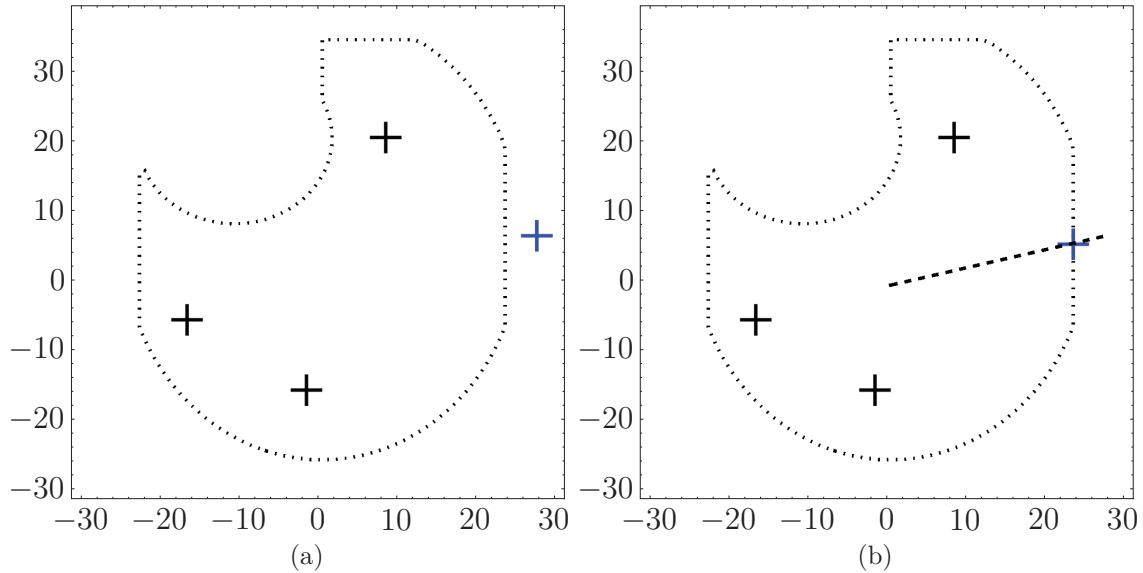


Abbildung 5.16: (a) Ungültige Elektrodenanordnung vor der Korrektur; (b) Korrigierte Elektrodenanordnung

ungünstig erzeugten Vektor wurde eine neue Elektrodenposition außerhalb des gültigen Positionierungsbereiches erzeugt.

Eine Korrektur ist allerdings mit einfachen Mitteln möglich: Zunächst werden alle Elektroden mit ungültigen Positionen bestimmt. In einem zweiten Schritt werden diese dann in Richtung des Mittelpunktes des Bereiches σ_E auf die nächste Grenze verschoben. Dies ist in Abbildung 5.16(b) dargestellt. Somit wird aus der ungültigen Elektrodenanordnung eine gültige, für die in der beschriebenen Weise ein Fitnesswert bestimmt werden kann.

5.3.7 Schritt 5: Reduktion und Erzeugen der nachfolgenden Generation

Im letzten Schritt eines Zyklus des originalen sowie des in dieser Arbeit angepassten *NSGA-2*-Algorithmus erfolgt eine Vereinigung der aktuellen Population mit den aus dem Reproduktionspool erzeugten Individuen (Zeile sieben des Algorithmus). Jede Generation besteht aus n Individuen. Aus dem Reproduktionspool werden durch Kreuzung und Mutation weitere n Individuen erzeugt. Somit besteht die Vereinigungsmenge der Elterngeneration mit den aus dem Fortpflanzungspool erzeugten Individuen aus $2n$ Individuen. Für diese werden nun, wie in Abschnitt 5.3.4 beschrieben, die Fitnesswerte berechnet. Im Anschluss werden die n Individuen mit den besten Fitnesswerten selektiert. Diese bilden die Nachkommengeneration der aktuellen Population. Somit konkurrieren die Individuen der Elterngeneration mit den aus ihnen erzeugten Nachkommen um einen Platz in der nachfolgenden Population. Dies stellt sicher, dass gute Individuen, die in dieser Generation keine Nachkommen

5 Zur Optimierung des Elektrostimulationssystems

hervorgebracht haben, dennoch in die nachfolgende Population übernommen werden können. Dieser Ansatz wird als „Elitismus“ [LZT00] bezeichnet, da sich im Laufe der aufeinanderfolgenden Populationen eine Elite an besonders guten Individuen (Elektrodenanordnungen) in der Population ansammelt. Die Vor- und Nachteile dieses Ansatzes werden in [ZDT00] diskutiert und sollen deshalb hier nicht weiter betrachtet werden.

Nachdem die Nachkommengeneration erzeugt wurde, wird zunächst überprüft, ob ein Abbruchkriterium erreicht wurde. Diese können unterschiedlich definiert und kombiniert werden:

- Ein Individuum oder mehrere Individuen erzeugen die gewünschte elektrische Feldverteilung im Knochen. Somit wurde eine beziehungsweise wurden mehrere Elektrodenanordnungen ermittelt, die durch (5.10) auf den Nullvektor $\vec{0}$ abgebildet werden und somit keine Abweichung in einer Zielfunktion f_1, \dots, f_k aufweisen.
- Mehrere aufeinander folgende Generationen bestehen aus den gleichen Elementen. Dies ist ein Anzeichen dafür, dass der Algorithmus konvergiert ist und keine neuen und besseren Elektrodenanordnungen ermittelt werden können. Dies kann zwei Ursachen haben. Zunächst ist es möglich, dass eine gute Approximation der globalen Pareto-Menge gefunden wurde. Andererseits ist es möglich, dass der Algorithmus zu schnell konvergiert ist, nur eine lokale Approximation ermittelt hat und den Bereich des Parameterraums nicht mehr verlassen kann. In diesem Fall sollte der Algorithmus neu gestartet und die Mutationsrate sowie die Standardabweichung des Betrages der Mutationsvektoren aus Gleichung (5.14) erhöht werden. Sollten dann erneut die gleichen Individuen ermittelt werden, so ist dies ein Indiz dafür, dass diese zur globalen Pareto-Menge gehören. Werden bessere Individuen ermittelt, so kann daraus geschlussfolgert werden, dass die Elektrodenanordnungen des vorherigen Laufs zu einer lokalen Pareto-Menge gehören.

Auf die beschriebene Weise können mehrere Approximationen der Pareto-Menge erzeugt werden. Diese werden zu einer Menge vereinigt. Im Anschluss werden die nicht dominierten Anordnungen (siehe (5.11)) ermittelt. So können mehrere Läufe des Optimierungsverfahrens mit unterschiedlichen Parametern kombiniert werden, um eine bessere Approximation der Pareto-Menge zu erzielen.

- Als drittes und letztes Abbruchkriterium kann der Abbruch nach einer bestimmten Anzahl von Generationen gewählt werden. Wurden nach i_{max} Iterationen keine Elektrodenanordnungen ermittelt, die alle Zielfunktionen zu Null minimieren beziehungsweise keine Konvergenz festgestellt, so kann die letzte Generation gespeichert und der Algorithmus mit neuen Parametern erneut gestartet werden. Die Population des letzten Laufs kann als Startpopulation verwendet werden beziehungsweise kann mit der Ergebnispopulation wie zuvor verschmolzen werden, um die resultierende Approximation der Pareto-Menge zu bestimmen.

Wurde kein Abbruchkriterium erreicht, so wird mit der neuen Population ein weiterer Zyklus gestartet. Ist hingegen ein definiertes Abbruchkriterium erreicht, so wird die Dominanzrelation zwischen allen Individuen der letzten Population ermittelt. Alle nicht dominierten Elektrodenanordnungen (vergleiche (5.10)) stellen die beste ermittelte Approximation der Pareto-Menge des zu optimierenden Elektrostimulationssystems dar. Sind Approximationen aus verschiedenen Läufen des Algorithmus bekannt, so können diese zu einer Menge vereinigt werden. Im Anschluss wird erneut die Dominanzrelation zwischen allen Anordnungen bestimmt. Alle nicht dominierten Stimulationselektrodenanordnungen repräsentieren nun die beste Approximation der Pareto-Menge.

5.4 Parallelisierung der evolutionären Optimierung

Abschließend soll in diesem Abschnitt die Parallelisierung des entwickelten Optimierungsverfahrens behandelt werden. Ein wesentlicher Nachteil evolutionärer Algorithmen ist, dass unter Umständen sehr viele Funktionsauswertungen der zu optimierenden Zielfunktionen nötig sind. Für die Optimierung des Elektrostimulationssystems bedeutet dies, dass die elektrische Feldverteilung von sehr vielen unterschiedlichen Elektrodenanordnungen berechnet werden muss¹¹. Der in Kapitel 4 vorgestellte hybride Ansatz ermöglicht es, das elektrische Feld einer Elektrodenanordnung sehr schnell näherungsweise zu berechnen. Jedoch ist, durch die große Zahl an Elektrodenanordnungen, die Optimierung des Elektrostimulationssystems ein langwieriger Prozess. Wird der Optimierungsalgorithmus zusätzlich mehrfach mit unterschiedlichen Parametern gestartet, um die Approximation der Pareto-Menge zu verbessern, so erhöht sich die nötige Zeitdauer für die Optimierung dementsprechend.

Aus diesem Grund ist es wünschenswert, die Zeitdauer, die zur Optimierung nötig ist, zu reduzieren. Daher soll an dieser Stelle eine parallelisierte Version des Optimierungsverfahrens vorgestellt werden. Diese Parallelisierung kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Da die elektrischen Felder der einzelnen Elektrodenanordnungen einer Generation unabhängig voneinander berechnet werden können und diese Feldberechnung zeitlich am aufwendigsten ist, ist es sinnvoll, diesen Teil zu parallelisieren.

Abbildung 5.17 zeigt das realisierte Parallelisierungsprinzip des Optimierungsalgorithmus. Auf einem zentralen Rechenknoten läuft der Optimierungsalgorithmus. Die rechenaufwendigste Aufgabe ist die Abbildung einer Elektrodenanordnung aus dem Parameterraum in den Zielfunktionsraum. Um diesen Prozess zu parallelisieren, werden die einzelnen Parametervektoren \vec{p} von diesem Rechenknoten (Main) zu einer Reihe von weiteren Knoten gesendet. Diese berechnen die elektrische Feldverteilung und den Zielfunktionsvektor $F(\vec{p})$. Im Anschluss werden die berechneten Zielfunktionsvektoren zum steuernden Knoten (Main) gesendet. Nachdem dieser die Zielfunktionsvektoren

¹¹Hierzu ein kleines Beispiel: Besteht eine Population aus n Individuen und werden insgesamt m Generationen aufeinander folgend erzeugt, muss das elektrische Feld für mn Elektrodenanordnungen berechnet werden. So sind beispielsweise für ein maximales Iterationslimit von 100 Generationen und einer Populationsgröße von 100 Individuen 10^4 Feldverteilungen zu berechnen.

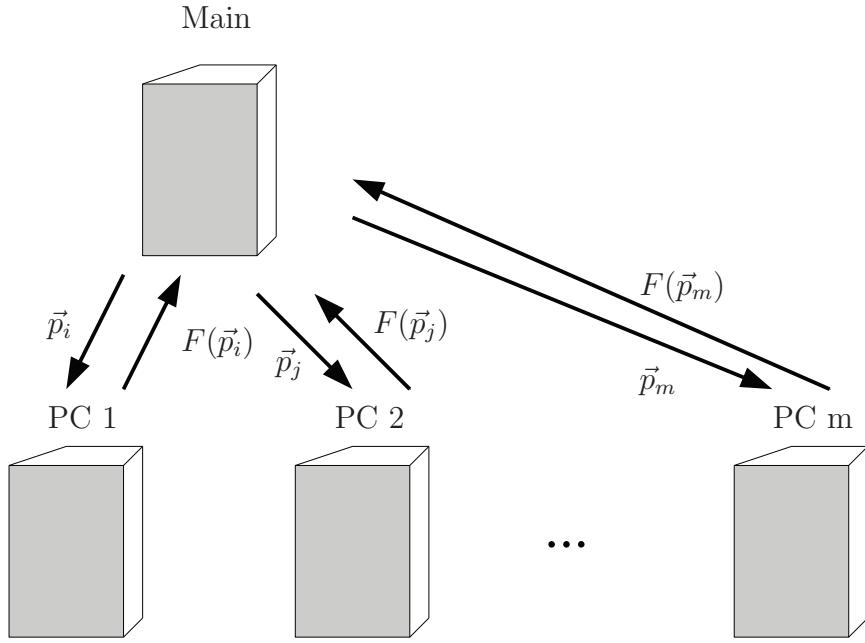


Abbildung 5.17: Prinzip der verteilten Feldberechnung auf mehreren PCs.

onswerte aller Individuen erhalten hat, führt er daraufhin die Fitnessbewertung sowie alle weiteren Schritte des Algorithmus, durch. Diese Parallelisierung ist sehr flexibel, da sie gut mit der Anzahl der Rechenknoten skaliert. Im Idealfall können bis zu n Knoten für die Berechnung der Zielfunktionswerte einer Population mit n Individuen genutzt werden.

Die beschriebene Parallelisierung wurde für den entwickelten Optimierungsalgorithmus in *Mathematica* umgesetzt. *Mathematica* bietet die Möglichkeit, parallele Berechnungen in heterogenen Umgebungen durchzuführen. Hierbei laufen auf unterschiedlichen Rechnern im Netzwerk eine gewisse Anzahl von unabhängigen Rechenknoten. Jeder Rechner kann eine unterschiedliche Anzahl solcher Knoten beherbergen, die sich nach der gesamten Rechenkapazität des Rechners richtet (Anzahl unabhängige CPU-Kerne sowie verfügbarer Arbeitsspeicher). Diese stehen als ein Verbund von Rechenknoten zur Verfügung. Auf die Parallelisierung mit *Mathematica* soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Details und Beispiele können in [Wol10] nachvollzogen werden. In Kapitel 6 wird die Skalierung des parallelen Optimierungsverfahrens genauer betrachtet.

5.5 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurden verschiedene Algorithmen zur Optimierung des Elektrostimulationssystems vorgestellt. Hierzu wurde zunächst eine Möglichkeit präsentiert, mit der Optimierungsziele für die elektrische Feldstärke in einzelnen Regionen definiert werden können. Zunächst wurden dann die definierten Zielfunktionen zu einer

Zielfunktion zusammengefasst, indem die einzelnen Bestandteile gewichtet addiert wurden. Zur anschließenden Optimierung wurden drei Algorithmen vorgeschlagen. Das Problem der Wahl der Gewichte konnte allerdings nicht zufriedenstellend gelöst werden. Daher wurde auf den Begriff der Pareto-Optimalität zurückgegriffen. Auf der Basis dieser Optimalitätsdefinition wurde ein evolutionärer Algorithmus zur Optimierung des Elektrostimulationssystems angepasst. Für diesen Algorithmus wurden modifizierte Kreuzungs- und Mutationsoperationen vorgestellt. Abschließend wurde eine Möglichkeit der Parallelisierung des Algorithmus behandelt.

6 Ergebnisse

In diesem Kapitel soll die Optimierung des Elektrostimulationssystems an einem Beispiel betrachtet werden. Hierbei wird neben der reinen Optimierung der elektrischen Feldverteilung auch auf den Einfluss verschiedener Näherungen, die bei der Feldberechnung durchgeführt werden, eingegangen. Weiterhin soll der Einfluss der Materialgrenze zwischen dem Implantat und dem Knochen untersucht werden.

6.1 Vorbereitung der Optimierung des Elektrostimulationssystems

Bevor die eigentliche Optimierung durchgeführt werden kann, müssen zunächst die benötigten Daten zusammengetragen werden, was nachfolgend kurz betrachtet wird.

6.1.1 Abtastung der elektrischen Feldverteilung

Für die Berechnung des elektrischen Feldes wurde in Kapitel 4 ein hybrider Ansatz vorgestellt. Hierbei werden zuvor simulierte Feldverteilungen einzelner Stimulations-elektroden gewichtet überlagert. Somit müssen diese Feldverteilungen zunächst bestimmt werden. Hierzu wird, wie in Kapitel 3 vorgestellt, ein Hüftknochenmodell basierend auf CT-Aufnahmen verwendet. In das Knochenmodell wurde ein dazu passendes künstliches Hüftgelenksimplantat eingesetzt (Implantatmodell mit 58 mm Kugeldurchmesser). Die elektrischen Eigenschaften der Materialien im Simulationsgebiet wurden nach Tabelle 3.1 wie folgt definiert:

Material	κ [S/m]
Implantat	Modelliert als PEC
Elektrodenkappe	Modelliert als PEC
<i>Substantia Corticalis</i>	0,002
<i>Substantia Spongiosa</i>	0,15
Substitutmaterial	0,01
Elektrodenisolation	0

Tabelle 6.1: Elektrische Leitfähigkeiten der in den Simulationen vorkommenden Materialien.

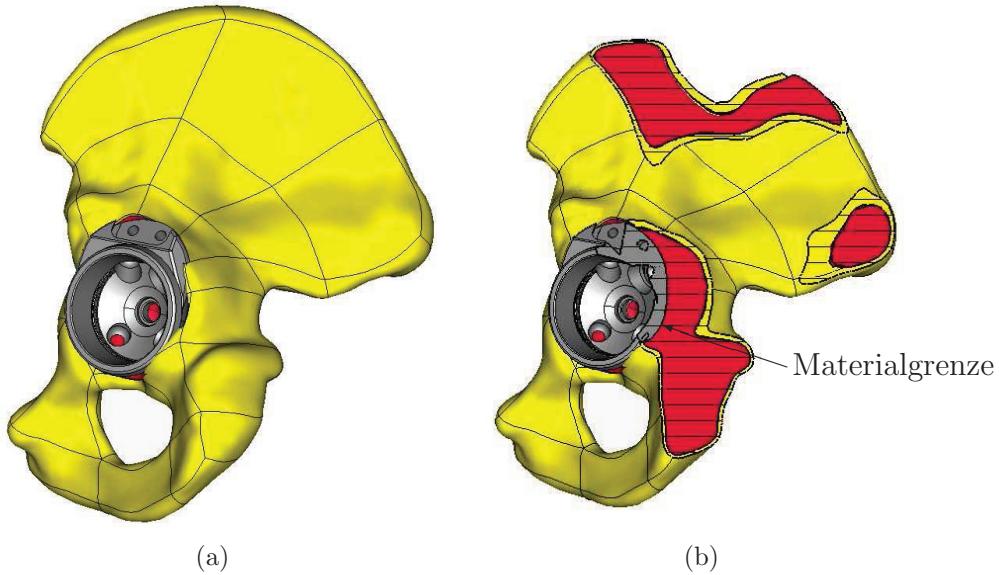


Abbildung 6.1: (a) Patientenspezifisches Simulationsmodell für die numerische Berechnung der einzelnen elektrischen Feldverteilung. (b) Modell geschnitten mit markierter Materialgrenze Implantat/Knochen. Das jeweils umgebende Substitutmaterial, das in den Simulationen das Körpergewebe ersetzt, ist nicht dargestellt.

Das Implantat und die Kappen der Stimulationselektroden wurden als PEC (*Perfect Electric Conductor*) modelliert¹. Abbildung 6.1(a) zeigt das Simulationsmodell, das zur Berechnung der elektrischen Feldverteilungen der einzelnen Stimulationselektroden verwendet wurde. Zusätzlich zum Knochenmodell und dem Modell des Implantats muss eine Stimulationselektrode (vergleiche Abbildung 6.2) modelliert werden. Die nachfolgend vorgestellte Variante ist sowohl unter medizinischen als auch technischen Gesichtspunkten entstanden, auf die hier allerdings nicht weiter eingegangen werden soll. Die Elektrode wurde so dimensioniert, dass sie zum verwendeten Implantat passt. Die Maße können aus Tabelle 6.2 entnommen werden.

Für die Generierung der einzelnen Simulationsmodelle muss zusätzlich der abzutastende Bereich σ_E ², also der Bereich, in dem Stimulationselektroden positioniert werden können, definiert werden. Für dieses Beispiel wurden 514 zu simulierende Positionen ermittelt, was einem Abstand der einzelnen Elektrodenpositionen von 1 mm entspricht. Zusätzlich muss der Bereich Ω , in dem die elektrische Feldverteilung optimiert werden soll (vergleiche Kapitel 4), definiert werden. In diesem Beispiel soll das Knochenwachstum im Hüftlager angeregt werden. Hierfür wurde eine Lage von Ab-

¹Dies ist möglich, da die elektrische Leitfähigkeit der restlichen Materialien mehrere Größenordnungen kleiner ist.

²Der Bereich wurde so definiert, dass der implantierende Chirurg eine Stimulationselektrode in diesem Bereich ohne größere Probleme einsetzen kann.

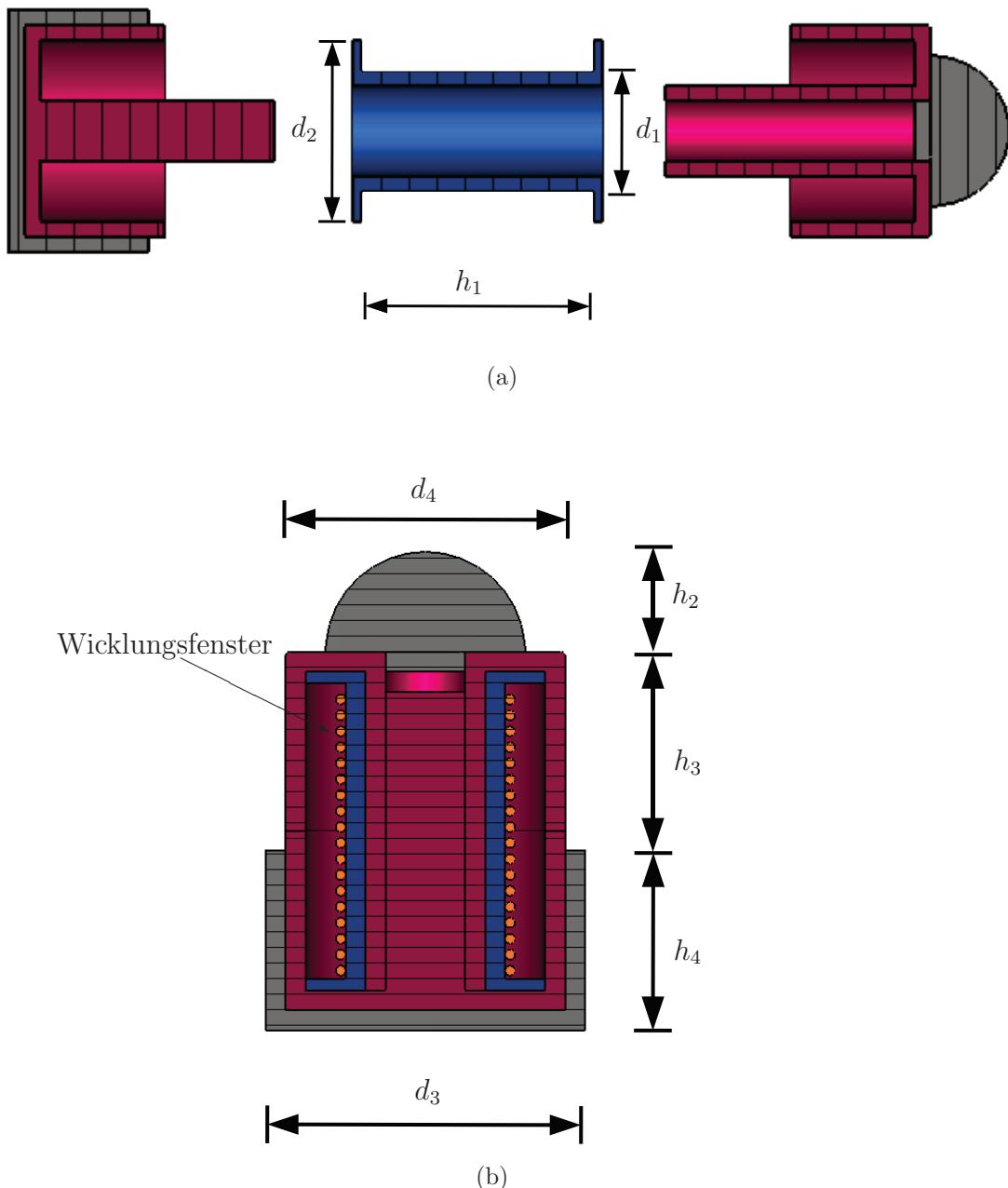


Abbildung 6.2: Variante für eine Stimulationselektrode des Elektrostimulationssystems: (a) Einzelne Bestandteile und (b) zusammengefügte Elektrode.

tastpunkten 3 mm über der Implantatoberfläche (positive z-Richtung) erzeugt. Diese Punkte sind in der x-y-Ebene jeweils 1 mm voneinander entfernt. Die Definition des Bereiches Ω erfolgt hier als Beispiel: Prinzipiell kann dieser Bereich beliebig gewählt

6 Ergebnisse

Parameter	Wert [mm]
d_1	2
d_2	3
d_3	4
d_4	3,5
h_1	8
h_2	2,5
h_3	4,5
h_4	5,5

Tabelle 6.2: Maße der Stimulationselektrode aus Abbildung 6.2.

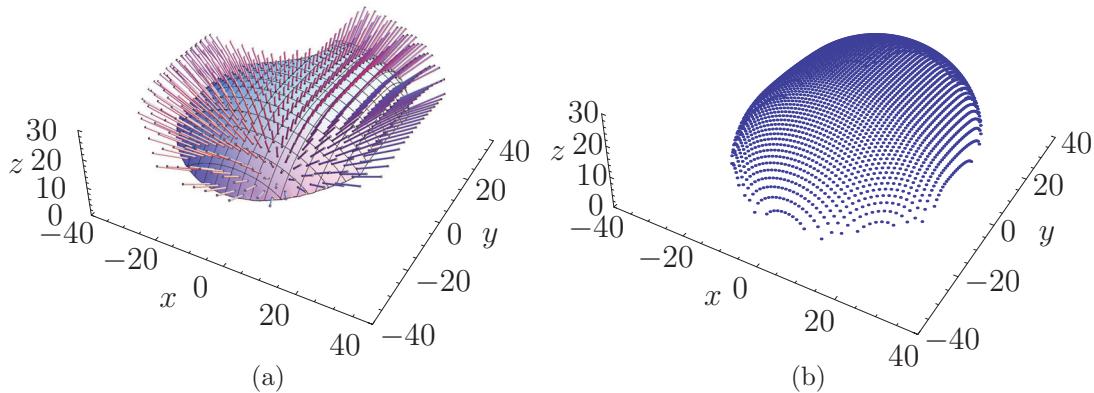


Abbildung 6.3: (a) Bereich der gültigen Elektrodenpositionen σ_E mit den abgetasteten Elektrodenpositionen. (b) Abtastpunkte 3 mm über der Implantatoberfläche mit einem Abstand in x- und y-Richtung von 1 mm.

werden, was sowohl die Größe als auch die Dichte der Abtastpunkte betrifft. Abbildung 6.3(a) zeigt den Bereich σ_E mit den simulierten Elektrodenpositionen sowie die Abtastpunkte, an denen das elektrische Feld für jede zu simulierende Elektrodenposition bestimmt werden soll.

Nachdem die zu simulierenden Elektrodenpositionen sowie die Abtastpunkte erzeugt wurden, muss für jede Elektrodenposition ein Simulationsmodell erstellt werden, das aus dem beschriebenen geschichteten Hüftknochen, dem Implantat, dem homogenen Substitutmaterial sowie einer Stimulationselektrode an der korrespondierenden Position besteht³. Abbildung 6.4 zeigt eines dieser Modelle mit einer einzelnen Stimulationselektrode, wobei der Knochen sowie das umgebende Substitutmaterial nicht dargestellt sind. Zwischen dem Implantat und der Kappe der Stimulationselektrode

³Diese Modelle werden mit *Mathematica* als VBA-Skript zur Steuerung der CST Studio Suite 2009[®] automatisch generiert.

6.1 Vorbereitung der Optimierung des Elektrostimulationssystems

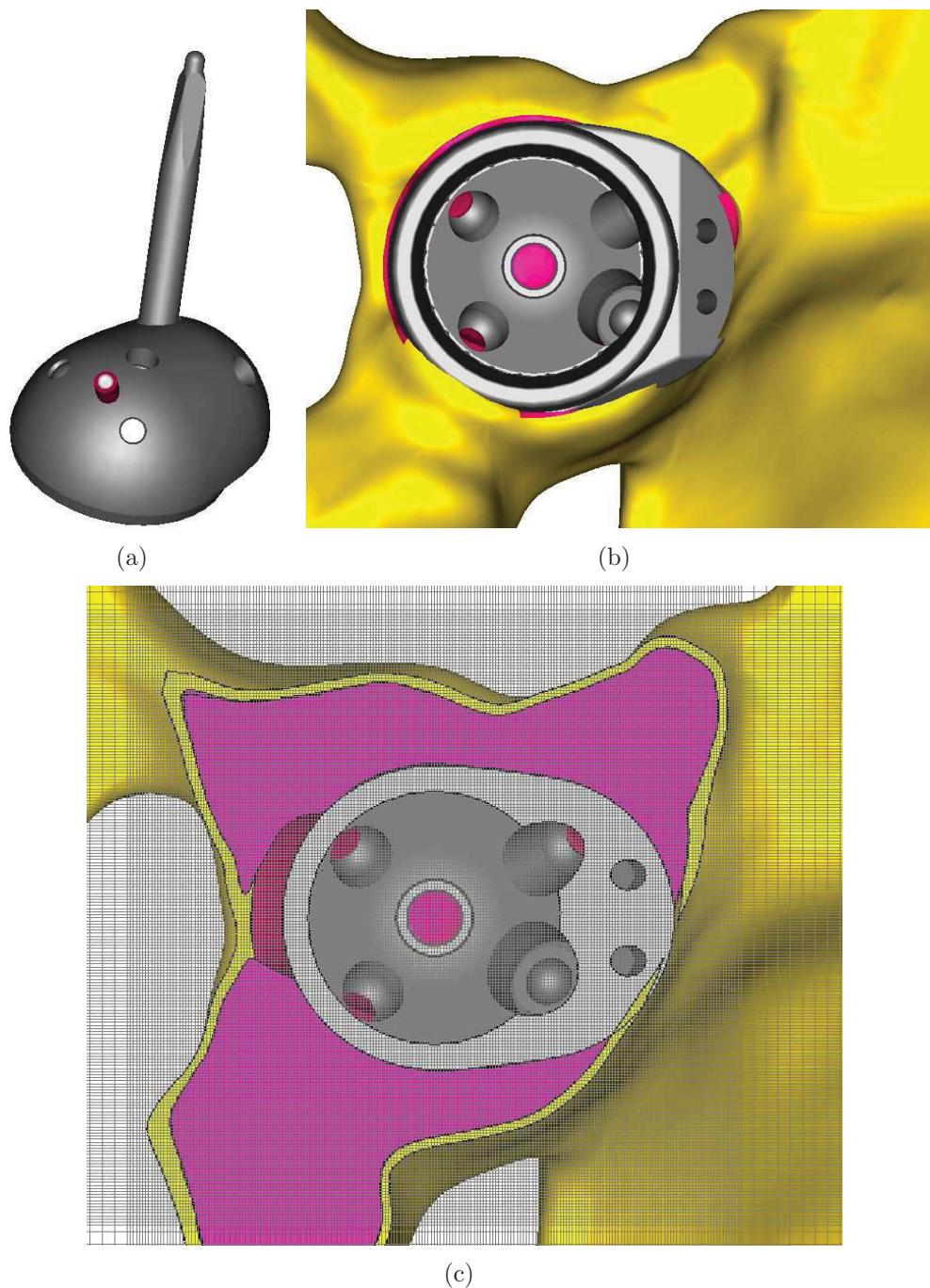


Abbildung 6.4: (a) Beispiel für ein Simulationsmodell mit einer Stimulationselektrode. Der Hüftknochen sowie das umgebende Substitutmaterial sind nicht dargestellt. (b) Implantat im Knochen und (c) Diskretisierung im Bereich des Implantats (äquidistantes Gitter mit einer Kantenlänge von 0.5 mm).

6 Ergebnisse

wird eine Spannung von 1 V eingeprägt. An den Rändern des Rechengebietes wurde eine elektrisch isolierende Randbedingung gewählt ($\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$). Zur Simulation der erzeugten Modelle wurde die CST Studio Suite 2009® mit dem Strömungsfeld-Solver (Stationary-Current-Solver) genutzt. Als Abbruchkriterium wurde ein relatives Residuum von 10^{-10} gewählt. Das Simulationsmodell wurde mit einem äquidistanten kartesischen Grundgitter mit einer Kantenlänge von 2 mm diskretisiert. Der Bereich des Implantats (siehe Abbildung 6.4(b)) wurde mit einem feineren Gitter mit einer Kantenlänge von 0,5 mm diskretisiert (siehe Abbildung 6.4(c)). Das kartesische Gitter wurde gewählt, um jedes Modell mit dem gleichen Gitter zu simulieren und so zusätzliches „Rauschen“ in der Abtastung durch unterschiedliche Gitter zu vermeiden. Im Anschluss wurden alle Modelle simuliert und das elektrische Feld, bestehend aus E_x -, E_y - und E_z -Komponente, wurde an jedem Abtastpunkt aus den Simulationsdaten bestimmt (vergleiche Definition (4.8)). Zusätzlich wurde der Widerstand zwischen der Implantatoberfläche und der Elektrodenkappe ermittelt, um die entsprechende Interpolationsfunktion für die Optimierung zu erzeugen (siehe Definition (4.12)). Abbildung 6.5 zeigt das elektrische Feld im Gebiet Ω , welches die Stimulationselektrode aus Abbildung 6.4(a) erzeugt.

Zusätzlich wurden weitere 210 Simulationsmodelle mit jeweils zwei Stimulationselektroden erzeugt, um die Stützpunkte für die Interpolationsfunktion aus (4.25) zu ermitteln. Folglich mussten zur Vorbereitung der eigentlichen Optimierung 728 Simulationen durchgeführt werden⁴. Mit den nun vorliegenden Feldverteilungen kann das elektrische Feld einer Elektrodenanordnung nach Gleichung (4.2) näherungsweise berechnet werden, um die eigentliche Optimierung des Elektrostimulationssystems durchzuführen.

6.1.2 Bestimmung der Elemente der Materialgrenzen

Neben den einzelnen elektrischen Feldverteilungen werden zur Berechnung des resultierenden elektrischen Feldes im Knochen die Elemente der Materialgrenzen Implantat/Knochen und Knochen/Elektrodenkappe benötigt⁵. Hierzu wurde zunächst die Fläche der Materialgrenze (siehe Abbildung 6.1(b)) zwischen Knochen und Implantat berechnet. Diese beträgt für das verwendete Knochenmodell und das passende Implantat rund $A_1 = 2400 \text{ mm}^2$. Die Materialgrenze zwischen Knochen und der Elektrodenkappe hat eine Fläche von etwa $A_2 = 40 \text{ mm}^2$. Mit diesen Flächen können die Ersatzschaltbild-Elemente der Materialgrenzen bestimmt werden (siehe Kapitel 3). Die Flächenverhältnisse A_{Mess}/A_1 und A_{Mess}/A_2 aus Gleichung (3.9) ergeben sich zu 0,095 und 5,65. Mit diesem Verhältnis und den für die Messprobe bestimmten

⁴Das Durchführen einer Simulation mit einer CPU benötigt rund 20 Minuten Rechenzeit auf einer konventionellen Workstation (Stand 2009). Wie bereits erwähnt, kann der Prozess der Datengewinnung beliebig parallelisiert werden, indem mehrere CPUs/Rechner genutzt werden. Der resultierende Datensatz benötigt rund 500 MB zur Speicherung.

⁵Die weiteren Elemente des ESBs werden bei der Berechnung des elektrischen Feldes bestimmt.

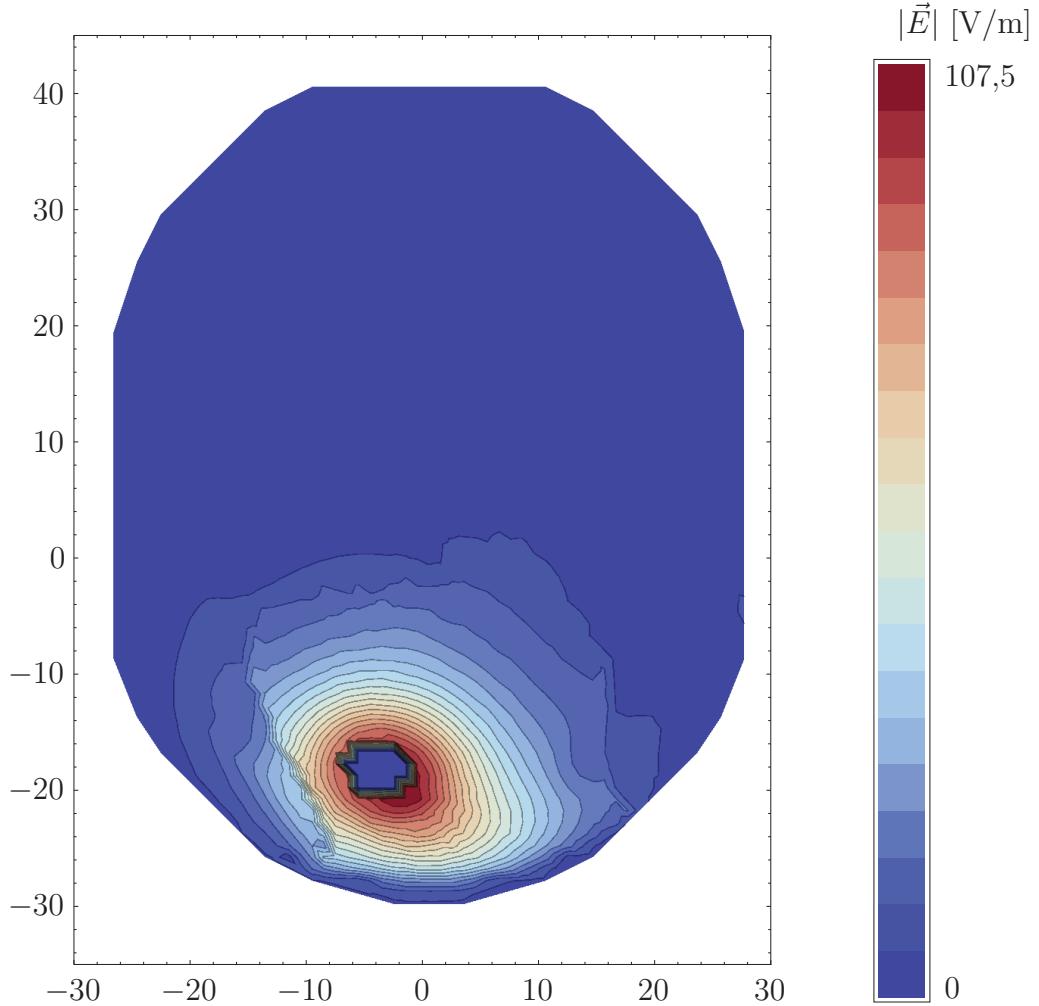


Abbildung 6.5: Elektrische Feldverteilung einer Stimulationselektrode aus der Simulation des Modells aus Abbildung 6.4(a).

Parametern aus Tabelle 3.2 ergeben sich folgenden Impedanzen für die Elemente \underline{Z}_{edl1} und \underline{Z}_{edl2} ⁶:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{edl1}(\omega) &= 4,6 \Omega + 52 \Omega (j\omega/1\text{s}^{-1})^{-0,773} \\ \underline{Z}_{edl2Pol}(\omega) &= 25,4 \Omega + 109,7 \cdot 10^3 \Omega (j\omega/1\text{s}^{-1})^{-0,953} \\ \underline{Z}_{edl2VPS}(\omega) &= 281,5 \Omega + 3,16 \cdot 10^3 \Omega (j\omega/1\text{s}^{-1})^{-0,773}.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Hierbei bezeichnet $\underline{Z}_{edl2Pol}(\omega)$ die Impedanz einer Stimulationselektrode mit einer polierten Titankappe, während $\underline{Z}_{edl2VPS}(\omega)$ die Impedanz der Materialgrenze für den Fall beschreibt, dass die Elektrodenkappe VPS-beschichtet ist.

Abbildung 6.6 zeigt die Impedanz der Materialgrenze an einer Stimulationselektrode für polierte und VPS-beschichtete Oberflächen. Um die elektrische Feldstärke im Kno-

⁶Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt, wurden die ohmschen Widerstände der Beschichtung/Passivierung und die CP-Elemente zusammengefasst, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

6 Ergebnisse

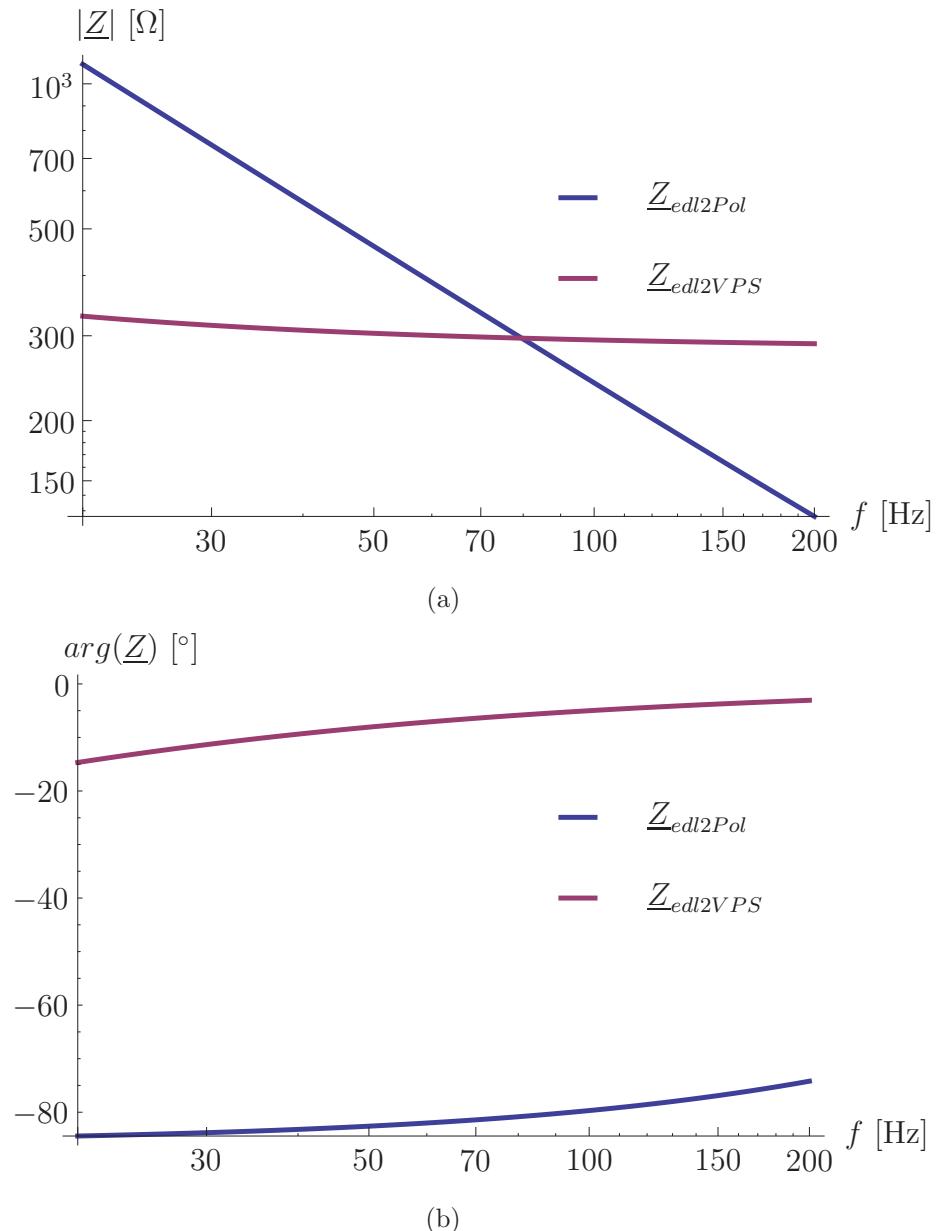


Abbildung 6.6: Betrag und Phase der CP-Elemente des Materialübergangs Elektrodenkappe/Knochen für eine polierte Titanoberfläche (a) sowie für eine VPS-beschichtete Titanoberfläche (b).

chen zu maximieren, ist es wünschenswert, dass der Spannungsabfall an den Materialgrenzen möglichst gering ausfällt. Die Implantatoberfläche muss VPS-beschichtet werden, um dem Knochen das Anwachsen zu erleichtern. Die Elektrodenkappen können dagegen sowohl aus poliertem als auch VPS-beschichtetem Titan bestehen. Die Wahl einer geeigneten Oberflächenbehandlung sollte auf Basis der Stimulationsfrequenz so erfolgen, dass die resultierende Impedanz einen möglichst kleinen Betrag aufweist.

Neben den Elementen \underline{Z}_{edl1} und \underline{Z}_{edl2} müssen auch die Transferwiderstände R_{CT1} und R_{CT2} bestimmt werden. Die Kennlinie ist durch Gleichung (3.11) gegeben. Mit den Flächen A_1 und A_2 und den Messwerten aus Tabelle (3.3) können die Kennlinien ermittelt werden. Die Strom-/Spannungs-Kennlinie des Transferwiderstandes R_{CT1} ergibt sich zu:

$$i_F = 3,52 \cdot 10^{-6} A (e^{u/u_1} - e^{-u/u_2}) \quad | \quad u_1 = 0,138V \quad u_2 = 0,063V. \quad (6.2)$$

Für die Berechnung der elektrischen Feldstärke im Frequenzbereich muss die Kennlinie aus Gleichung (6.2) linearisiert werden. Eine Taylor-Reihenentwicklung um $u = 0$ liefert:

$$i_F = 8,2 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1} u.$$

Somit kann der nichtlineare Transferwiderstand R_{CT1} für kleine Spannungsabfälle durch einen ohmschen Widerstand mit $12,2 \text{ k}\Omega$ ersetzt werden.

Die Kennlinie des Transferwiderstandes R_{CT2} wurde analog für polierte und VPS-beschichtete Elektrodenkappen bestimmt:

$$\begin{aligned} i_{FPol} &= 1,12 \cdot 10^{-8} A (e^{u/u_3} - e^{-u/u_4}) \quad | \quad u_3 = 9,091V \quad u_4 = 0,053V. \\ i_{FVPS} &= 5,81 \cdot 10^{-8} A (e^{u/u_1} - e^{-u/u_2}) \quad | \quad u_1 = 0,138V \quad u_2 = 0,063V. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die linearisierte Kennlinie und somit der entsprechende ohmsche Widerstand ergibt sich erneut durch eine Taylor-Reihenentwicklung um $u = 0$. Für kleine Spannungsabfälle kann der nichtlineare Transferwiderstand R_{CT2} durch einen ohmschen Widerstand mit $4,74 \text{ M}\Omega$ (polierte Titankappe) beziehungsweise $746,2 \text{ k}\Omega$ (VPS-beschichtete Titankappe) ersetzt werden.

Abbildung 6.7 zeigt die Kennlinien der Transferwiderstände R_{CT1} (a) sowie R_{CT2} für eine polierte Titankappe (b) und eine VPS-beschichtete Titankappe (c). Die Kennlinien zeigen, dass die Transferwiderstände nur für kleine Spannungen durch ohmsche Widerstände ersetzt werden können. Anderseits sind die Transferwiderstände parallel zu den Impedanzen \underline{Z}_{edl1} und \underline{Z}_{edl2} geschaltet. Ein Vergleich der linearisierten Transferwiderstände R_{CT1} und R_{CT2} mit den Beträgen der Impedanzen \underline{Z}_{edl1} und \underline{Z}_{edl2} zeigt, dass das elektrische Verhalten der Materialgrenzen primär durch \underline{Z}_{edl1} und \underline{Z}_{edl2} bestimmt wird.

6.2 Optimierung

Nachdem alle Daten für die Berechnung der elektrischen Feldverteilung einer Elektrodenanodnung vorliegen, kann mit der eigentlichen Optimierung begonnen werden.

6.2.1 Zur Definition von Optimierungszielen

In diesem Abschnitt soll die Definition von Optimierungszielen erfolgen, für die ein Elektrostimulationssystem optimiert wird. Wie zu Beginn der Arbeit erwähnt, soll

6 Ergebnisse

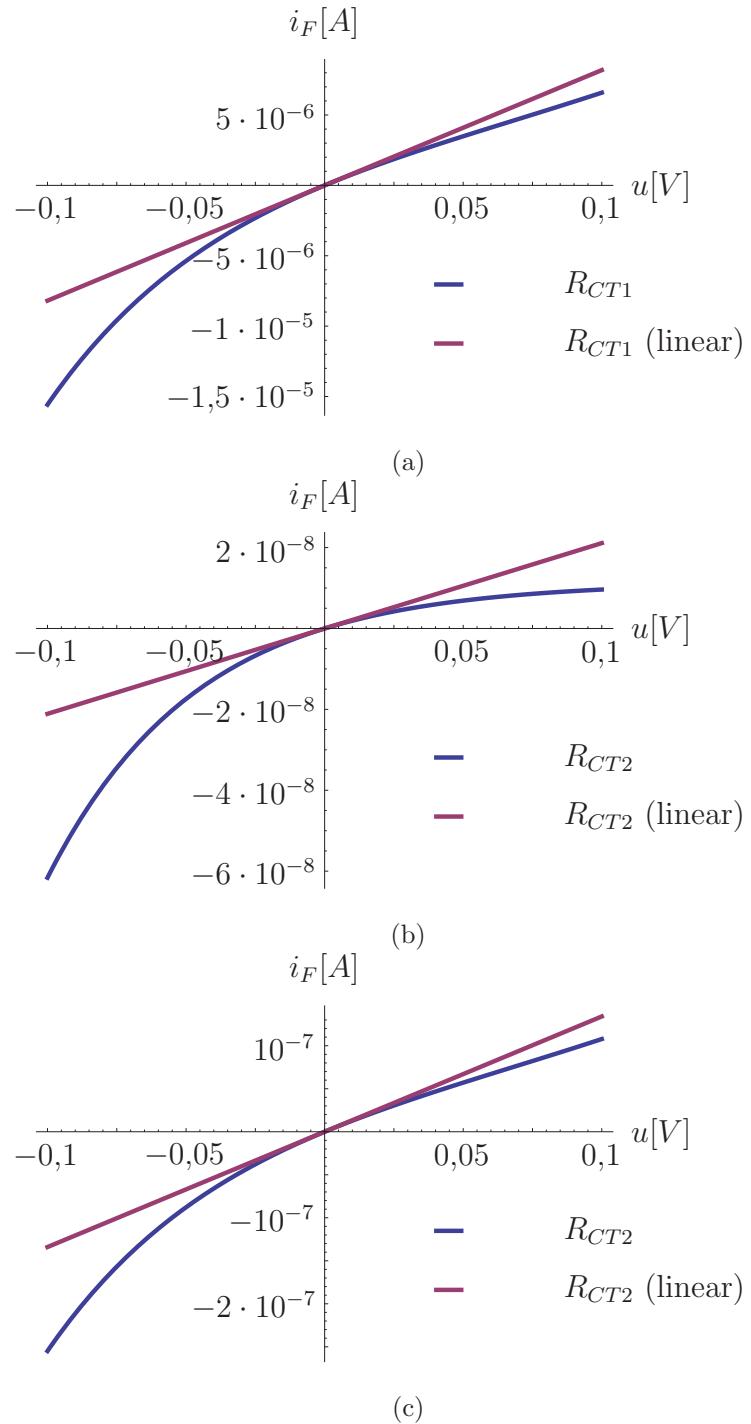


Abbildung 6.7: Kennlinien der für das Beispiel bestimmten Transferwiderstände (a) R_{CT1} , (b) R_{CT2} (polierte Titankappe) und (c) R_{CT2} (VPS-beschichtete Titankappe) sowie Kennlinien der ohmschen Widerstände aus der Linearisierung.

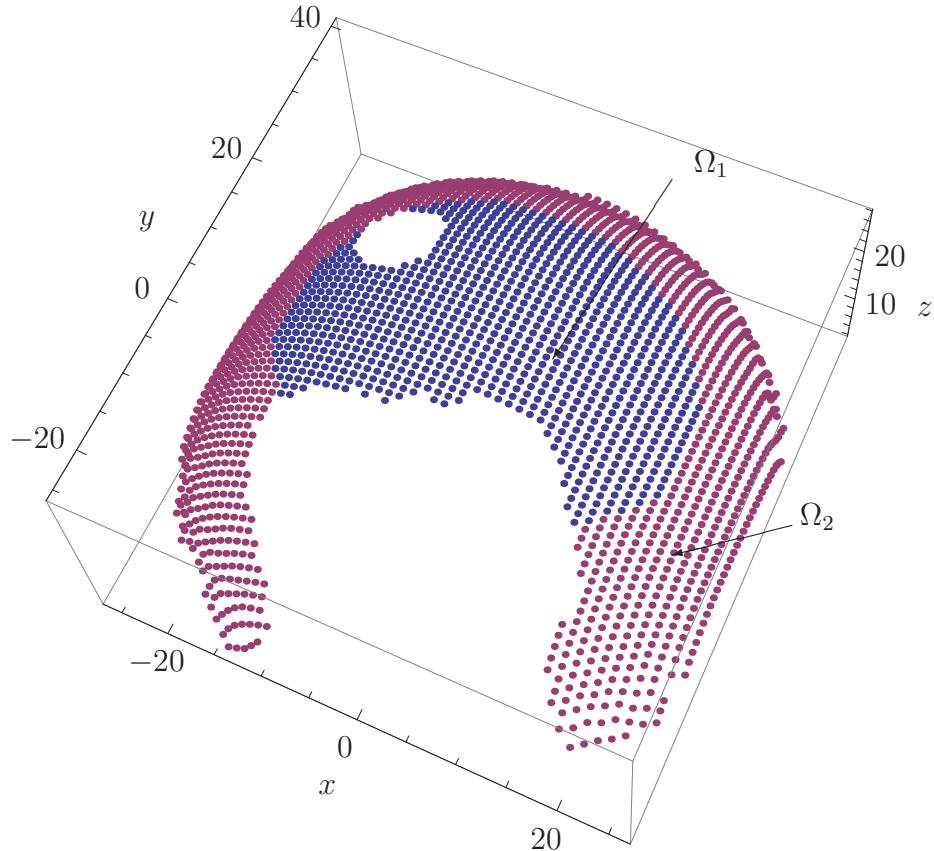


Abbildung 6.8: Darstellung der Zielfunktionsregionen Ω_1 und Ω_2 . Abtastpunkte innerhalb des Verankerungszapfens und in Bereichen, die nicht im Knochen liegen, wurden entfernt.

und kann in dieser Arbeit keine Erklärung für den Wirkungsmechanismus der Elektrostimulation von Knochen gegeben werden. Es sollen vielmehr aus der Literatur bekannte Stimulationsparameter auf das Hüftimplantat mit Stimulationselektroden übertragen werden, um den Knochen an der Grenzfläche Knochen/Implantat zu stimulieren. Für das vorgeschlagene induktiv gekoppelte Stimulationsystem mit harmonischer Erregung werden Stimulationsfrequenzen von 10 Hz [SAU02] bis 100 Hz [BWS01] vorgeschlagen. Die makroskopische Feldstärke im Knochen soll für eine effektive Elektrostimulation zwischen 2 V/m [BWS01] bis 5 V/m [Pri09] betragen.

Zunächst müssen für die Definition von Zielfunktionen nach (5.1)-(5.3) die Gebiete definiert werden, in denen die elektrische Feldverteilung optimiert werden soll. Für das zu optimierende Stimulationsystem sollen die beiden Regionen Ω_1 und Ω_2 wie folgt definiert sein (alle Maße in mm):

$$\begin{aligned}\Omega_1 : \sqrt{(x-10)^2 + y^2} &\leq 20 \\ \Omega_2 : \sqrt{(x-10)^2 + y^2} &> 20.\end{aligned}\tag{6.4}$$

6 Ergebnisse

Dabei werden nur Messpunkte betrachtet, die im Knochen liegen. Punkte außerhalb wurden aus den beiden Regionen entfernt. Der Bereich Ω_1 enthält die Messpunkte, die im zentralen Bereich des Hüftlagers liegen, während Ω_2 den peripheren Bereich erfasst. Im Gebiet Ω_1 soll nun an jedem Punkt eine elektrische Feldstärke von 5 V/m erreicht werden. Das zweite Gebiet Ω_2 soll dagegen mit 2 V/m weniger stark stimuliert werden⁷.

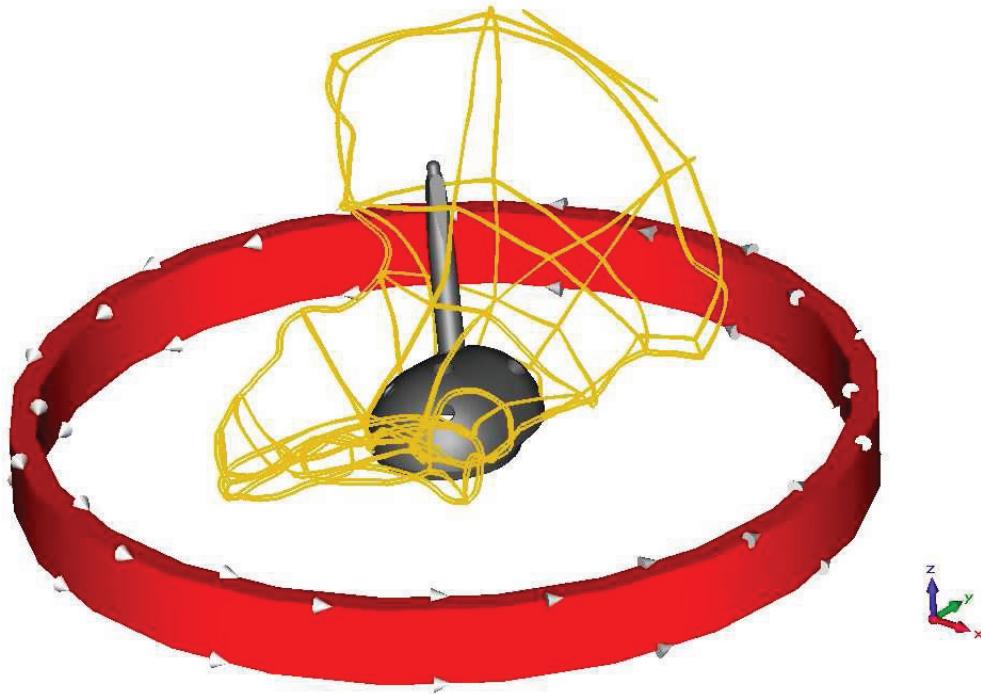


Abbildung 6.9: Implantat und Primärspule im globalen Koordinatensystem. Der Knochen ist als Drahtgittermodell dargestellt.

Die Stimulationsfrequenz soll 50 Hz betragen (Netzfrequenz). Die äußere Primärspule wird als dünne, kreisförmige Spule modelliert, deren Achse mit der z-Achse des in Kapitel 4 eingeführten Koordinatensystems zusammenfällt (siehe Abbildung 6.9). Die Spule⁸ hat einen Durchmesser von 30 cm und erzeugt eine magnetische Flussdichte von 20 mT in ihrem Zentrum (siehe Abbildung 6.10). Die Sekundärelektroden sind, wie in Abbildung 6.2 schematisch dargestellt, aufgebaut. Die Spule im Inneren ist aus Kupferdraht mit 50 μm Durchmesser gewickelt. Bei diesem Drahtdurchmesser und den in Tabelle 6.2 angegebenen Maßen der Stimulationselektrode können rund 3200 Windungen in die Elektrode eingebracht werden⁹.

⁷Die Wahl der zu erreichenden Feldstärke ist hier nur exemplarisch dargestellt.

⁸In der späteren Anwendung sollen verschiedene Spulen eingesetzt werden, die sich an der Anatomie des Patienten orientieren. Die kreisförmige Spule ist als Näherung zu sehen. Im Abschnitt A.3 wird auf beliebig geformte Primärspulen eingegangen.

⁹Wie bereits erwähnt, soll in dieser Arbeit nicht auf Wicklungstechniken und ihre Füllfaktoren eingegangen werden.

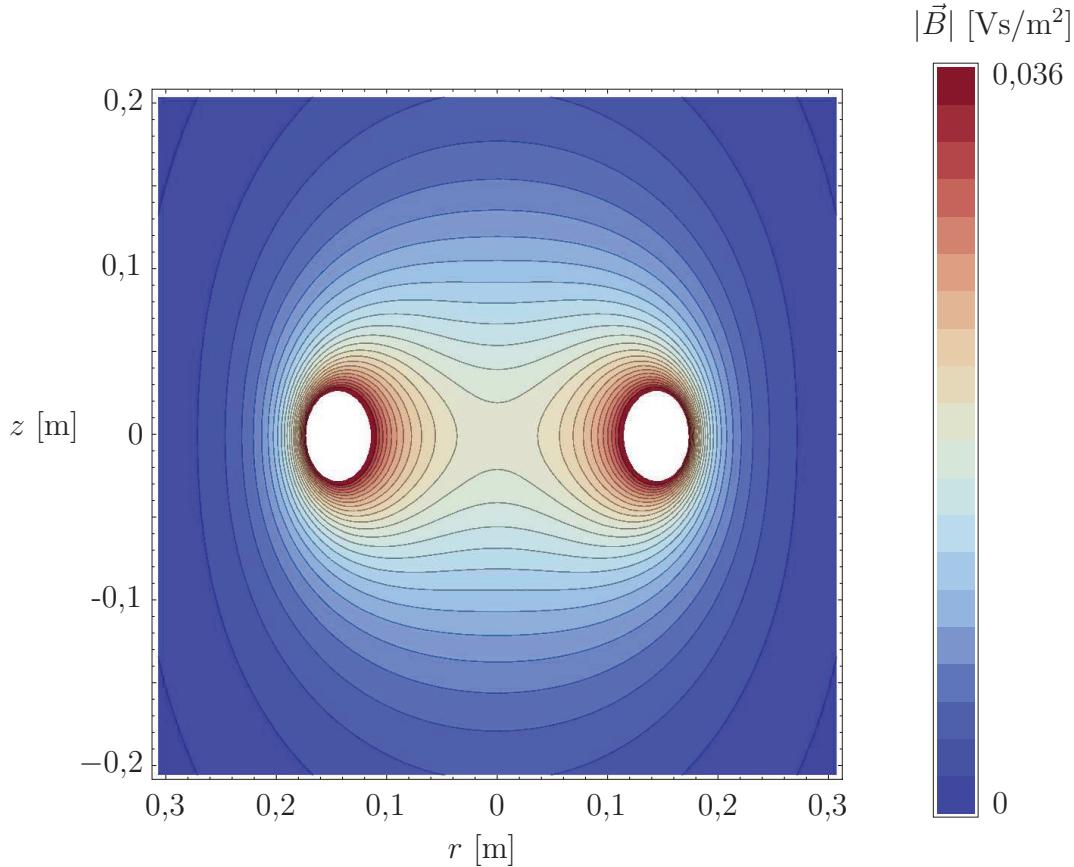


Abbildung 6.10: Magnetische Flussdichte $|\vec{B}(r, z)|$ der Primärspule ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Nachdem nun die Optimierungsziele definiert wurden, kann mit der eigentlichen Optimierung begonnen werden. Zuvor soll das Optimierungsproblem jedoch auf mögliche Vereinfachungen überprüft werden. Hierzu eine Vorüberlegung, zu der das ESB eines Stimulationssystems mit einer Elektrode betrachtet werden soll (siehe Abbildung 6.11): Da in diesem Optimierungsbeispiel keine obere Feldstärkengrenze definiert wurde, die nicht überschritten werden soll, erscheint es sinnvoll, die Stimulationselektroden so auszulegen, dass sie ein möglichst starkes elektrisches Feld im Knochen erzeugen. Hierzu muss der Spannungsabfall zwischen der Elektrodenkappe und der Implantatoberfläche maximiert werden. Wird die Primärspule als gegeben angenommen, so kann eine Erhöhung der induzierten Spannung nur durch eine Erhöhung der Anzahl der Sekundärwindungen in den Stimulationselektroden erfolgen. Hierbei ist zu beachten, dass sowohl die induzierte Spannung und der ohmschen Widerstand der Spule linear mit der Anzahl der Sekundärwindungen zunehmen (zumindest solange sich die Form der Gegeninduktivität M nicht stark ändert), allerdings die Eigeninduktivität L quadratisch mit der Anzahl der Sekundärwindungen skaliert. Aus Abbildung 6.11 lässt sich der Spannungsabfall \underline{U}_G (für harmonische Anregung) ableiten:

$$\underline{U}_G = \frac{R_G}{j\omega L_0 + R_C + R_G + \underline{Z}(\omega)} j\omega M \underline{I}_0. \quad (6.5)$$

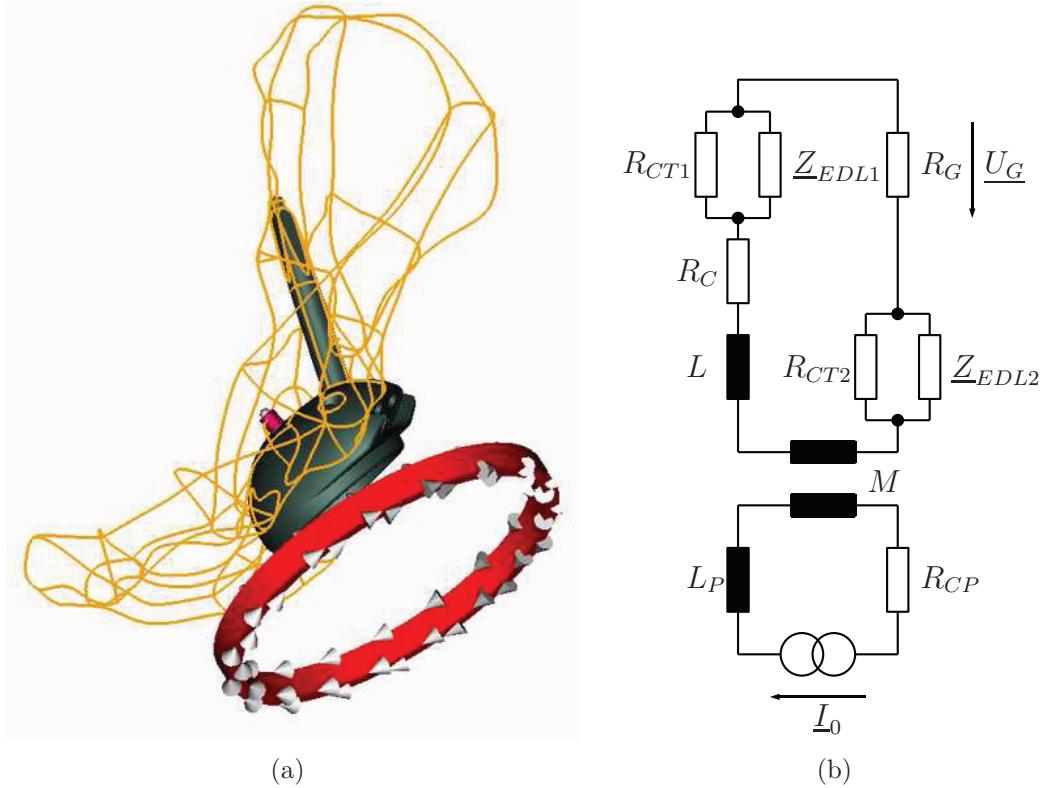


Abbildung 6.11: (a) Elektrostimulierendes Hüftimplantat mit einer Stimulationselektrode und Primärspule (Knochen als Drahtgittermodell). (b) Ersatzschaltbild des Elektrostimulationssystems.

Die Impedanzen der beiden Materialgrenzen wurden zu $Z(\omega)$ zusammengefasst. Ohne auf die einzelnen Größen einzugehen, kann folgendes festgestellt werden: Solange

$$\omega L_0 \ll |R_C + R_G + Z(\omega)|, \quad (6.6)$$

ist es sinnvoll, die Sekundärspulen mit der maximal möglichen Anzahl von Windungen zu bestücken. Diese Betrachtung lässt sich auch auf ein Elektrostimulationssystem mit mehreren Stimulationselektroden übertragen. Da die Gegeninduktivitäten zwischen den Sekundärspulen wesentlich kleiner sind als die Eigeninduktivitäten, soll an dieser Stelle jedoch darauf verzichtet werden.

Mit den zuvor genannten Daten der Sekundärspulen und der maximalen Zahl von 3200 Windungen ergibt sich eine Eigeninduktivität von $0,029 \text{ H}^{10}$. Bei einer Stimulationsfrequenz von 50 Hz folgt:

$$\omega L_0 = 9,1 \Omega.$$

¹⁰Wird die Sekundärspule aus einem Draht mit einem Durchmesser von $20 \mu\text{m}$ gewickelt, so können in die beschriebene Stimulationselektrode rund $2 \cdot 10^4$ Windungen eingebracht werden. Diese Spule hätte dann eine Eigeninduktivität von $1,15 \text{ H}$ und somit einen erheblichen Einfluss auf die über dem Knochen abfallende Spannung. In diesem Fall müsste, wie in Kapitel 5 beschrieben, für jede Elektrodenposition eine optimale Windungszahl ermittelt werden.

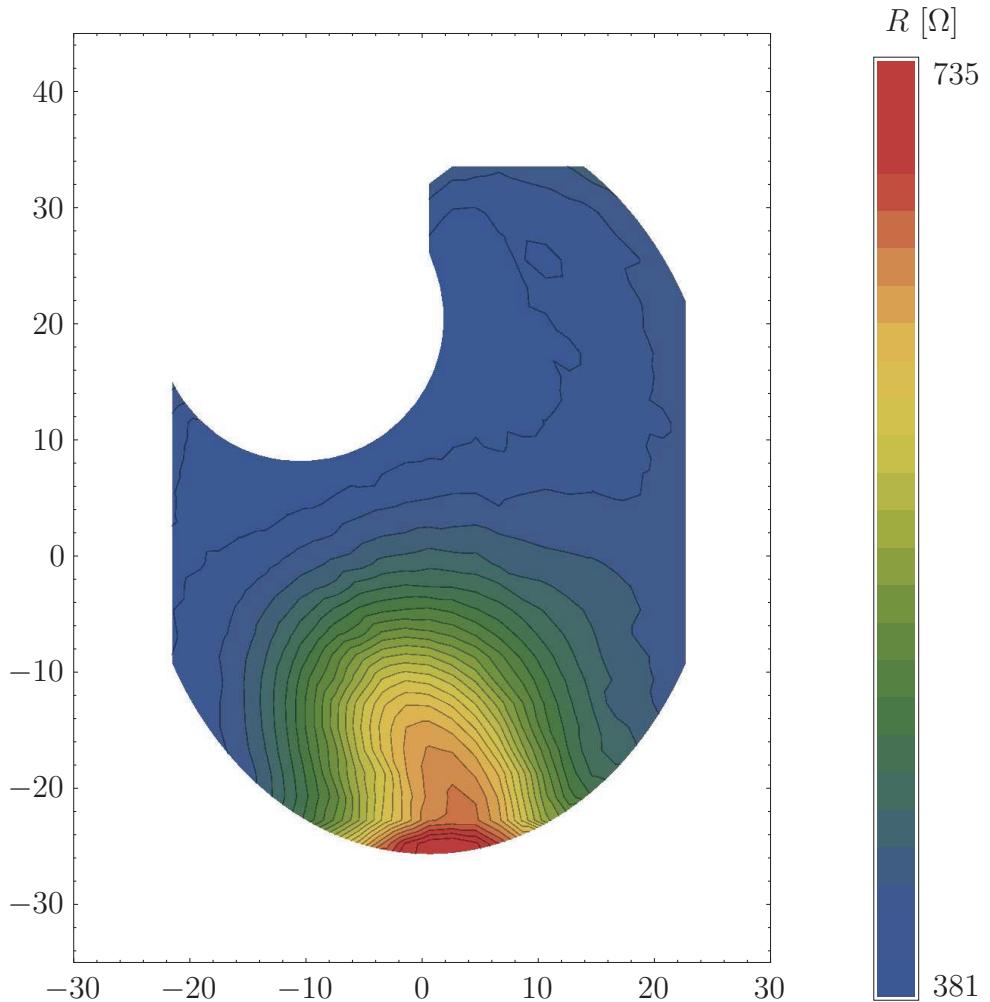


Abbildung 6.12: Widerstand zwischen der Elektrodenkappe und dem Implantat, primär gebildet durch die *Substantia Spongiosa* bei einer Leitfähigkeit von $\kappa = 0,15 \text{ S/m}$.

Ein Vergleich mit dem Widerstand R_G (siehe Abbildungen 6.12 - im ungünstigsten Fall rund 380Ω) zeigt, dass allein der ohmsche Widerstand R_G die Bedingung aus (6.6) gut erfüllt. Daher kann und soll für dieses Beispiel das komplette Wickelfenster in den Sekundärspulen genutzt werden. Daher wird während der Optimierung davon ausgegangen, dass jede Sekundärspule mit 3200 Windungen ausgestattet ist¹¹.

Somit muss nur die Position der Stimulationselektroden für die gegebenen Zielstellungen optimiert werden. Nachfolgend werden die Ergebnisse der Optimierung mit den eindimensionalen Optimierungsverfahren vorgestellt. Im Anschluss wird dann auf die Ergebnisse der mehrdimensionalen Optimierung eingegangen.

¹¹Dies macht das System auch ökonomischer, da so nur ein Elektrodenotypus gefertigt werden muss.

6.2.2 Ergebnisse der Optimierung

Bevor die Ergebnisse der Optimierung präsentiert werden, soll zuvor kurz auf die Abbildung einer Elektrodenanordnung in den Zielfunktionsraum eingegangen werden.

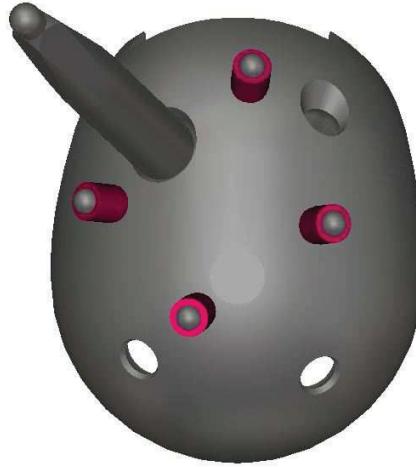


Abbildung 6.13: Implantat mit vier Stimulationselektroden auf der Oberfläche.

Abbildung 6.13 zeigt eine Elektrodenanordnung mit vier Stimulationselektroden. Die Anordnung wird durch die Position der Elektroden auf der Oberfläche und die Anzahl der Sekundärwindungen eindeutig beschrieben. Für diese Elektrodenanordnung kann nun eine elektrische Feldstärke an den zuvor definierten Abtastpunkten berechnet werden. Diese ist in Abbildung 6.14(a) dargestellt. Auf Basis der zuvor definierten Zielfunktionen wird nun jedem Punkt ein Wert für die Abweichung von der erwünschten elektrischen Feldstärke zugewiesen (vergleiche Definition (5.1)-(5.3)). Die Abweichungswerte der einzelnen Abtastpunkte sind in Abbildung 6.14(b) dargestellt. Im Anschluss werden alle Abweichungen im jeweiligen Zielgebiet Ω_i addiert. Im hier gewählten Beispiel liefert dies für eine Elektrodenanordnung einen Vektor mit zwei Komponenten.

6.2.2.1 Resultate der eindimensionalen Optimierung

In diesem Abschnitt soll zunächst die Ermittlung einer optimalen Elektrodenanordnung mit den vorgestellten eindimensionalen Algorithmen erfolgen. Hierfür ist es nötig, für jede Teilzielfunktion einen Wichtungsfaktor zu spezifizieren. Für dieses Beispiel wurden die folgenden Wichtungsfaktoren gewählt: $\{w_1 = 1, w_2 = 1\}$, $\{w_1 = 3, w_2 = 1\}$ und $\{w_1 = 1, w_2 = 3\}$. Mit dem Aggregationsansatz aus Gleichung (5.4) können die Teilzielfunktionen dann zu einer skalaren Zielfunktion zusammengefasst werden. Im Anschluss wurde die jeweils resultierende Zielfunktion mit den drei beschriebenen eindimensionalen Optimierungsalgorithmen für eine Elektrodenanordnung mit je drei Elektroden minimiert und die jeweils als Optimum ermittelte Elektrodenanordnung in den Zielfunktionsraum abgebildet.

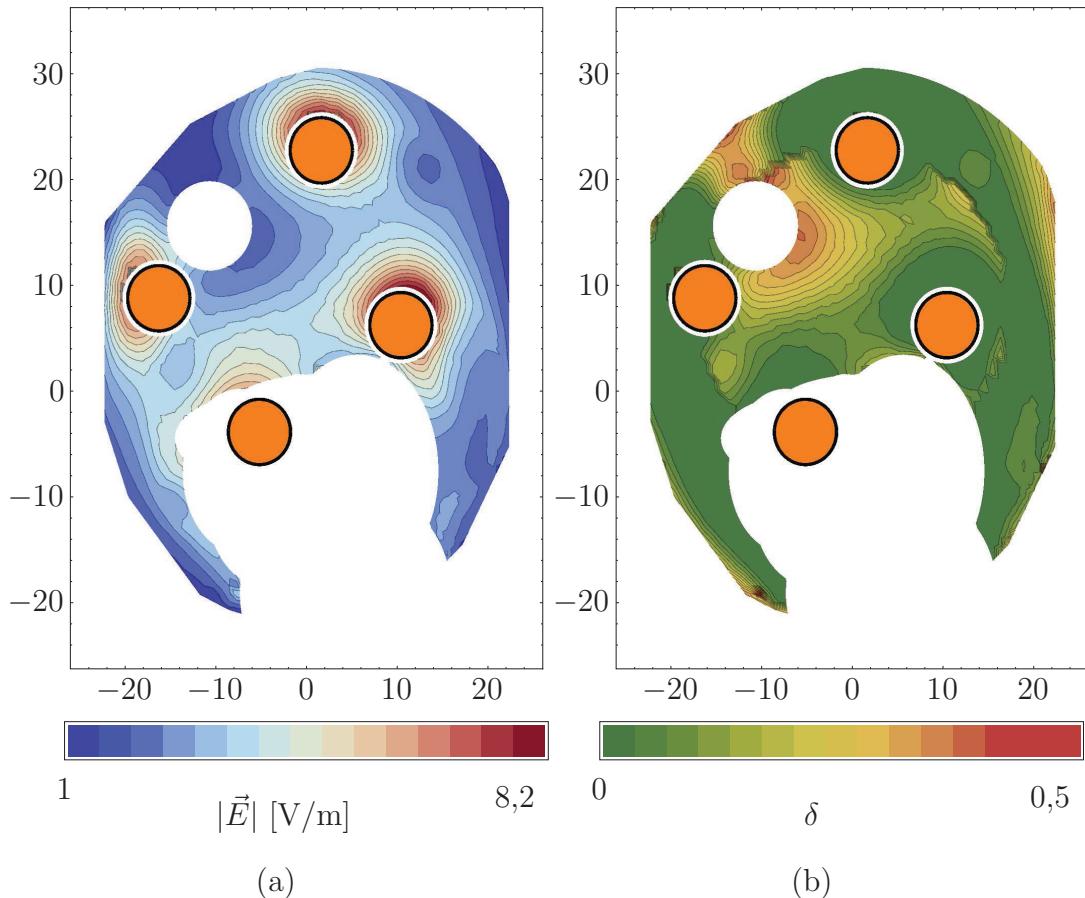


Abbildung 6.14: Elektrisches Feld im abgetasteten Gebiet Ω für eine Elektrodenanordnung mit vier Stimulationselektroden (a). Relative Abweichung δ vom Sollwert der elektrischen Feldstärke (b).

Abbildung 6.15 zeigt den Zielfunktionsraum für die beschriebenen Optimierungsziele, wobei jeder Punkt einer Elektrodenanordnung entspricht. Neben den eindimensionalen Algorithmen wurde die Optimierung auch mit dem angepassten mehrdimensionalen *NSGA-2* Algorithmus durchgeführt. Um das zu einem Wichtungsfaktoren-
satz zugehörige Optimum zu finden, mussten im Fall des Simulated-Annealing Algo-
rithmus rund $12 \cdot 10^3$ Elektrodenanordnungen ausgewertet werden. Der Nelder-Mead-
Simplex-Downhill Algorithmus wertet zum Ermitteln des Optimums rund $1,5 \cdot 10^3$
Elektrodenanordnungen aus. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass dieser Algo-
rithmus meistens gegen das nächste lokale Minimum strebt. Somit müssen verschiedene
Startpunkte gewählt werden, von denen der Algorithmus beginnt. Absolut gesehen
wertet der Differential-Evolution Algorithmus die geringste Zahl an Elektrodenan-

6 Ergebnisse

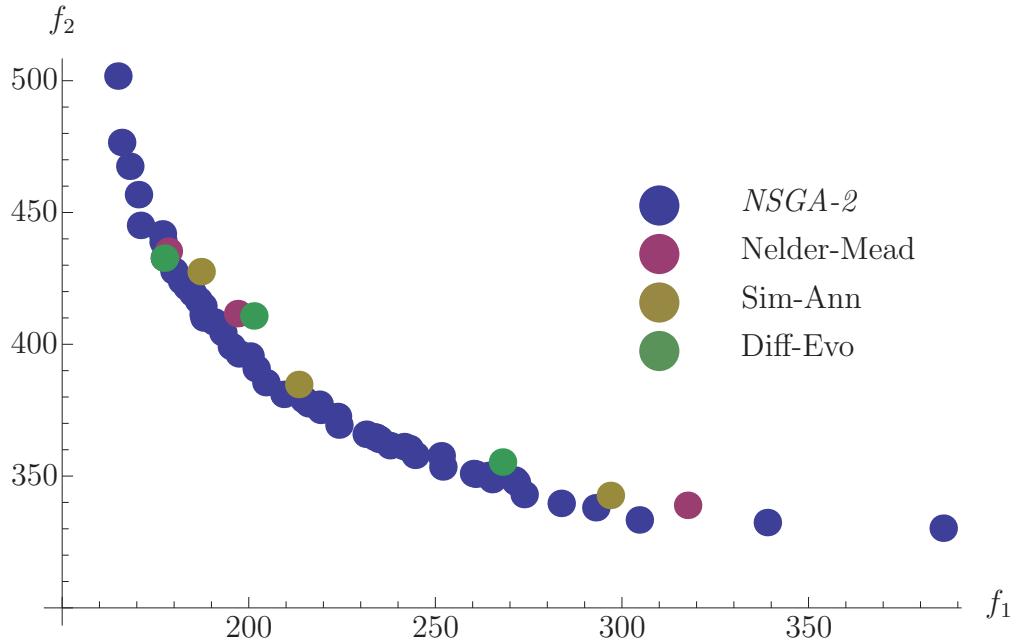


Abbildung 6.15: Zielfunktionsraum des beschriebenen Optimierungsproblems. Jeder Punkt entspricht einer Elektrodenanordnung mit drei Stimulationsselektroden auf der Implantatoberfläche. Die Optimierung wurde mit dem Nelder-Mead-Simplex-Downhill Algorithmus (Nelder-Mead), dem Simulated-Annealing (Sim-Ann), dem Differential-Evolution Algorithmus (Diff-Evo) und dem angepassten *NSGA-2*-Algorithmus durchgeführt.

ordnungen aus. In diesem Beispiel berechnete er für jedes Wichtungstupel $5 \cdot 10^3$ Elektrodenanordnungen¹².

Im Anschluss wurde die Pareto-Menge für das gegebene Optimierungsproblem mit dem angepassten *NSGA-2* Algorithmus ermittelt. Hierfür wurde eine Populationsgröße von 100 Individuen und ein maximales Iterationslimit von 50 Generationen gewählt. Dies entspricht ebenfalls der Auswertung von $5 \cdot 10^3$ Elektrodenanordnungen. Somit ist der Berechnungsaufwand zwischen einem Lauf des Differential-Evolution Algorithmus und einem des *NSGA-2* Algorithmus näherungsweise gleich. Wie jedoch aus Abbildung 6.15 ersichtlich ist, ermittelt der angepasste *NSGA-2* Algorithmus mit dem gleichen Rechenaufwand eine komplette Approximation der Pareto-Menge, während der Differential-Evolution Algorithmus lediglich ein einzelnes Element ermittelt. Weiterhin dominiert die Approximation der Pareto-Menge alle von den eindimensionalen Algorithmen ermittelten Elektrodenanordnungen. Es zeigt sich somit,

¹²Das vollständige Berechnen des elektrischen Feldes einer Elektrodenanordnung benötigt auf einer Workstation (Stand 2009) mit einem CPU-Kern rund eine Sekunde. Somit benötigt ein Lauf des vorgestellten Optimierungsalgorithmus mit insgesamt $5 \cdot 10^3$ auszuwertenden Elektrodenanordnungen etwas unter zwei Stunden Rechenzeit auf einer CPU. Am Ende des Kapitels wird die Skalierung der parallelisierten Version betrachtet.

dass der angepasste *NSGA-2* Algorithmus bei gleichem oder geringerem Rechenaufwand bessere Elektrodenanordnungen ermittelt. Demzufolge sollte zur Optimierung des Elektrostimulationssystems der vorgestellte angepasste *NSGA-2* Algorithmus verwendet werden.

6.2.2.2 Resultate der mehrdimensionalen Optimierung

In diesem Abschnitt soll nun die Optimierung von Elektrodenanordnungen mit drei, vier und fünf Stimulationselektroden erfolgen. Im vorherigen Abschnitt wurde festgestellt, dass der angepasste *NSGA-2* Algorithmus hierzu wesentlich besser geeignet ist als die drei vorgestellten eindimensionalen Optimierungsverfahren. Daher soll nur der mehrdimensionale Algorithmus genutzt werden¹³.

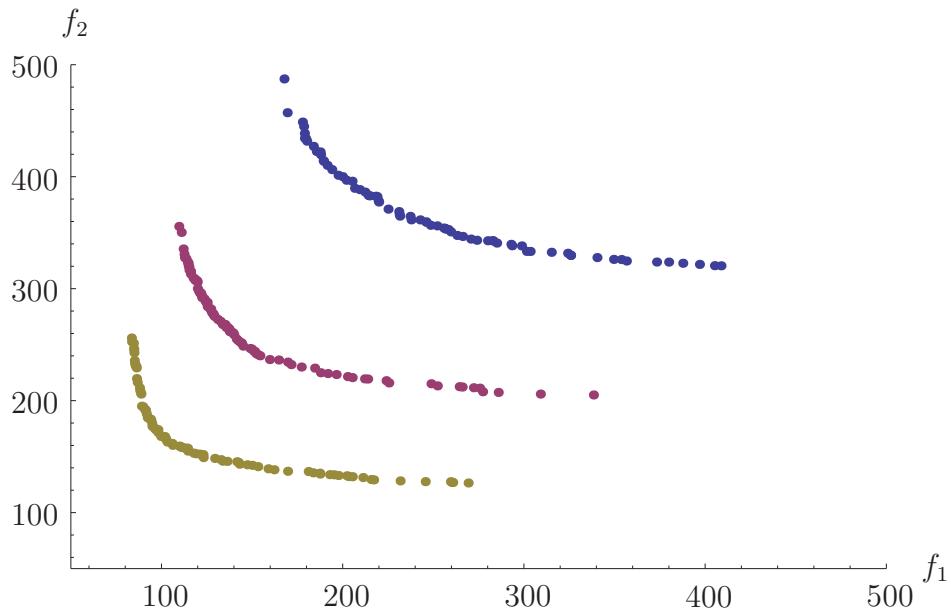


Abbildung 6.16: Darstellung der ermittelten Approximationen der Pareto-Menge für Elektrodenanordnungen mit drei (blau), vier (violett) und fünf (gelb) Stimulationselektroden.

Abbildung 6.16 zeigt die ermittelte Approximation der Pareto-Mengen für Elektrodenanordnungen mit drei bis fünf Stimulationselektroden für die zu Beginn beschriebenen Optimierungsziele. Jeder Punkt repräsentiert hierbei eine einzelne Elektrodenanordnung. Aus diesen kann nun entweder eine als geeignet erscheinende ausgewählt werden, oder die Stimulationssparameter (Frequenz, Primärstrom, Anzahl der Stimulationselektroden) werden modifiziert, um die Abweichung der einzelnen Elektrodenanordnungen weiter zu minimieren. Aus dieser Approximation der Pareto-Menge wurde auch die Elektrodenanordnung aus Abbildung 6.13 ausgewählt.

¹³Um die Anschaulichkeit zu erhalten, wurde für dieses Optimierungsbeispiel von zwei zu minimierenden Zielfunktionen ausgegangen. Der präsentierte Ansatz ist allerdings in der Lage, Probleme mit einer beliebigen Anzahl von Zielfunktionen zu behandeln.

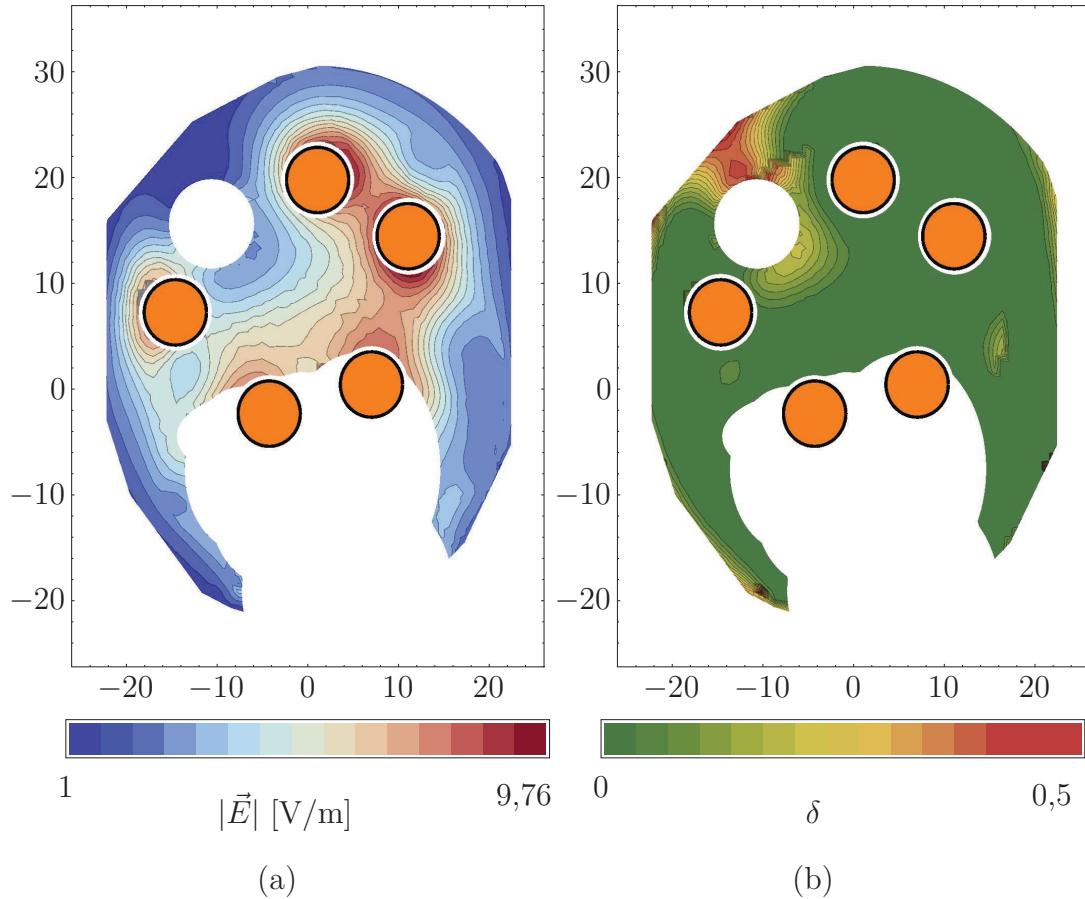


Abbildung 6.17: Elektrisches Feld im abgetasteten Gebiet Ω für eine Elektrodenanordnung mit fünf Stimulationselektroden (a). Relative Abweichung δ vom Sollwert der elektrischen Feldstärke (b).

Abbildung 6.17 zeigt das elektrische Feld und die daraus berechnete Verteilung der einzelnen Abweichungen für eine Elektrodenanordnung mit fünf Stimulationselektroden. Wie zuvor wurde auch hier eine Kompromisslösung gewählt, die beide Zielfunktionen möglichst gleich gut minimiert. Es ist erkennbar, dass dies der Elektrodenanordnung mit fünf Stimulationselektroden wesentlich besser gelingt. Lediglich im Bereich des Verankerungszapfens sind größere Abweichungen von der gewünschten elektrischen Feldstärke festzustellen. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da der Verankerungszapfen eine Äquipotentiallinie darstellt und somit eine Art „Feldschatten“ erzeugt.

An dieser Stelle soll darauf verzichtet werden, Parameterstudien über den Effekt einzelner Parameter des Optimierungsalgorithmus auf die Konvergenz an die Pareto-Menge anzuführen. Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt, muss auch der Optimierungsalgorithmus auf das zu optimierende Problem eingestellt werden. Dennoch zeigte sich im Verlauf mehrerer Optimierungszyklen und verschiedener Testprobleme, dass die

Parameter	Wert
Populationsgröße n	100
Individuen / Tournament	2
Größe Fortpflanzungspool	$0,2 n$
Kreuzungswahrscheinlichkeit (<i>Uniform</i>)	0,4
Kreuzungswahrscheinlichkeit (<i>Onepoint</i>)	0,6
Mutationswahrscheinlichkeit	0,8
Standardabweichung Mutation (Elektrodenposition)	2 mm
Standardabweichung Mutation (Windungszahl)	100

Tabelle 6.3: Geeignete Startwerte für die zu spezifizierenden Parameter des mehrdimensionalen evolutionären Optimierungsalgorithmus.

Werte aus Tabelle 6.3 gute Startwerte für die zu spezifizierenden Parameter darstellen.

6.3 Fehlerbetrachtung

Der in dieser Arbeit präsentierte Ansatz zur Optimierung des Elektrostimulationssystems basiert auf der Vorwärtsberechnung der elektrischen Feldverteilung mit einer anschließenden Bewertung. Um den zur Optimierung nötigen Zeitaufwand in einem vertretbaren Rahmen zu halten, wurde ein hybrider Ansatz vorgestellt, mit dem das elektrische Feld einer spezifischen Elektrodenanordnung in kurzer Zeit ermittelt werden kann. Hierfür wurden in Kapitel 4 einige Annahmen getroffen, die zu einer Vereinfachung des zu lösenden Problems führen, jedoch auch einen Fehler in die berechneten Feldverteilungen einführen. Hier sollen nun die Auswirkungen dieser Näherungen untersucht werden.

In Kapitel 4 wurde angenommen, dass die Wirbelstromdichte im Hüftknochen wesentlich kleiner ist als die Stromkomponente, die durch die Stimulationselektroden im Knochen erzeugt wird¹⁴. Somit kann das elektrische Feld im Knochen in guter Näherung durch den Gradienten eines skalaren Potentials dargestellt werden. In diesem Abschnitt soll nun der Einfluss der im Knochen induzierten Wirbelströme betrachtet werden. Hierzu wurde die Wirbelstromdichte im Hüftknochen des Simulationsmodells aus Abbildung 6.9 numerisch berechnet. Das Modell wurde, wie im Abschnitt 6.1.1 beschrieben, diskretisiert, und es wurden die gleichen Randbedingungen gewählt. Die Wirbelstromdichte wurde mit dem *LF Frequency Domain Solver* mit magneto-quasistatischer Näherung¹⁵ berechnet. Im Anschluss wurde die Wirbelstromdichte an den Abtastpunkten ermittelt.

¹⁴Diese Stromkomponente wird selbstverständlich auch durch magnetische Induktion hervorgerufen.

¹⁵Vereinfachung der Maxwell-Gleichung durch die Vernachlässigung der elektrischen Verschiebungsfußdichte. In Kapitel 3 wurde festgestellt, dass sich Knochenmaterial bei den zur Elektrostimulation verwendeten Frequenzen in guter Näherung rein resistiv verhält.

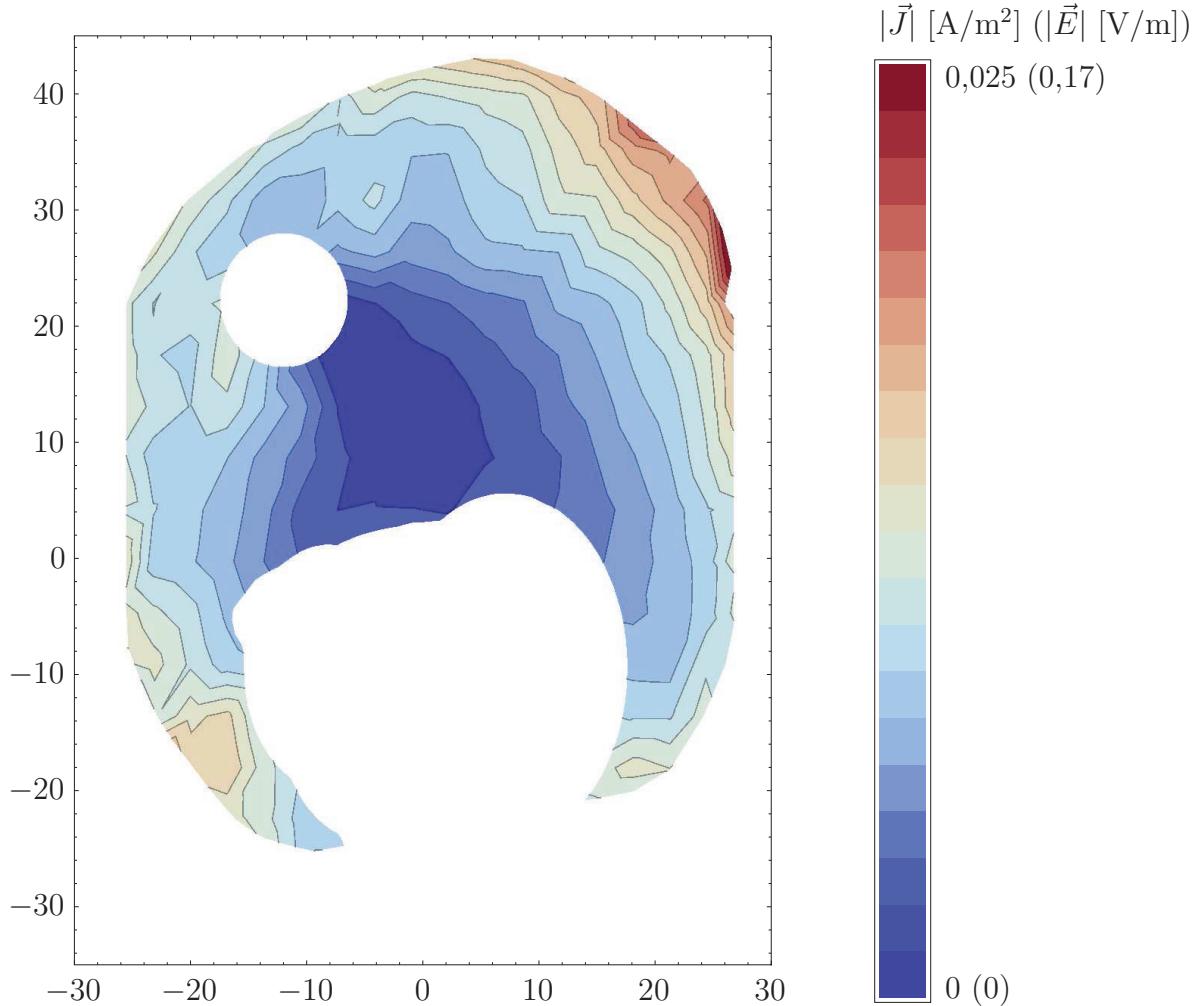


Abbildung 6.18: Wirbelstromdichte (und elektrische Feldstärke) an den Abtastpunkten.

Abbildung 6.18 zeigt den Betrag der Wirbelstromdichte an den korrespondierenden Abtastpunkten. Hierbei wurde erneut nur die Wirbelstromdichte im Knochen dargestellt. Im Mittel wird mit den Stimulationsparametern (Stimulationsfrequenz 50 Hz und maximale magnetische Flussdichte von 20 mT) eine induzierte Wirbelstromdichte von 0,01 A/m² im Knochen erzeugt. Mit der angenommenen Leitfähigkeit von 0,15 S/m ergibt sich somit eine elektrische Feldstärke von rund 0,07 V/m ($\vec{E} = \kappa^{-1} \vec{J}$). Ein Vergleich mit den angestrebten und erzeugten elektrischen Feldstärken zeigt, dass die Vernachlässigung der Wirbelstromdichte gerechtfertigt ist und das elektrische Feld in guter Näherung durch das von den Stimulationselektroden erzeugte elektrische Feld beschrieben wird.

In Kapitel 4 wurde die numerische Berechnung der elektrischen Feldverteilung einer Elektrodenanordnung durch die gewichtete Überlagerung zuvor simulierter Feldverteilungen ersetzt. Hierbei entstehen zwangsläufig Abweichungen, da die einzelnen

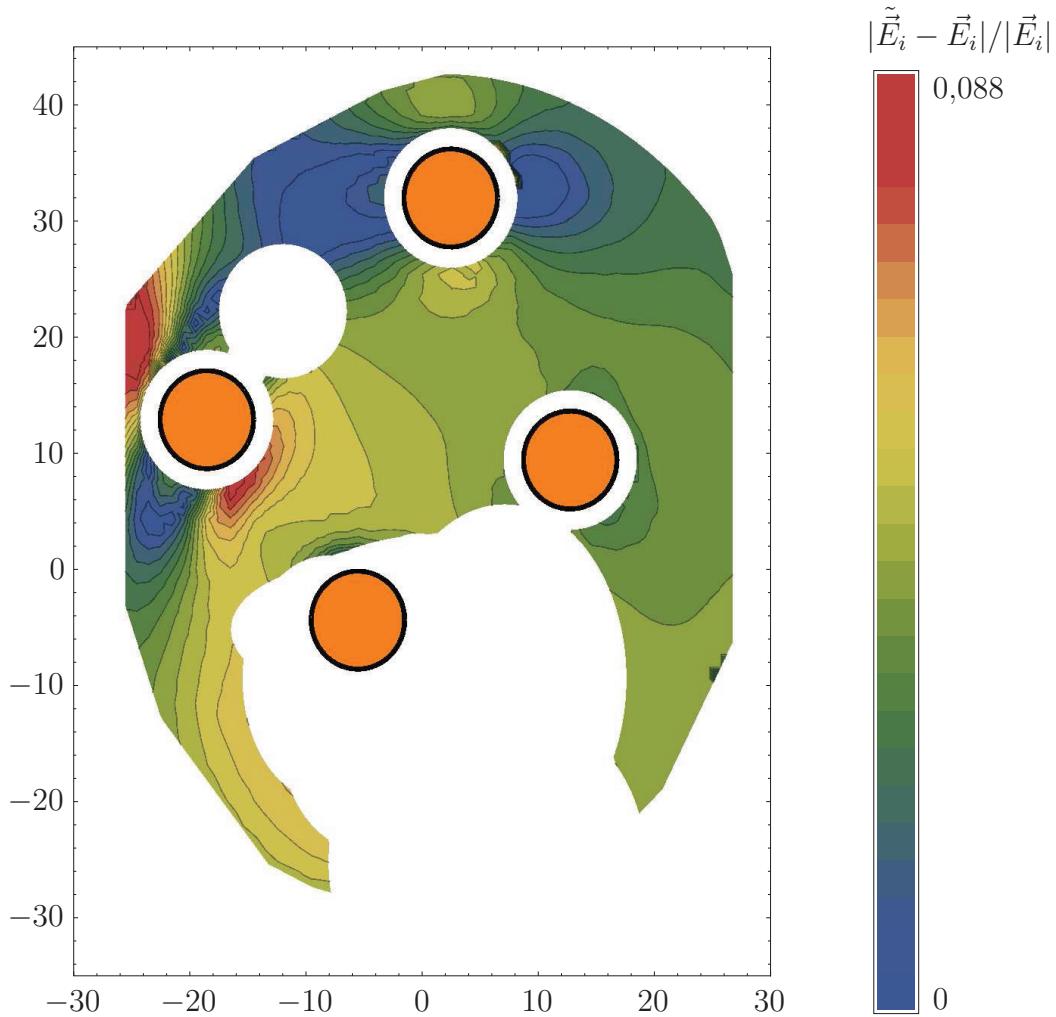


Abbildung 6.19: Relativer Fehler des mit dem entwickelten Ansatz berechneten elektrischen Feldes.

Feldverteilungen mit geringfügig unterschiedlichen Simulationsmodellen berechnet werden. Zusätzlich werden die Feldverteilungen von Elektroden an nicht simulierten Positionen aus den umgebenden simulierten Positionen interpoliert. Der dabei entstehenden Fehler soll am Beispiel einer Elektrodenanordnung mit vier Stimulationselektroden untersucht werden. Hierzu wurde die elektrische Feldverteilung der Elektrodenanordnung aus Abbildung 6.13 numerisch berechnet. Im Anschluss wurde diese mit der Feldverteilung verglichen, die mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Ansatz ermittelt wurde. Für jeden Abtastpunkt wurde der relative Fehler $|\tilde{\vec{E}}_i - \vec{E}_i|/|\vec{E}_i|$ bestimmt. Hierbei bezeichnen $\tilde{\vec{E}}_i$ und \vec{E}_i die elektrische Feldstärke am Messpunkt i , die mit dem Ansatz aus Kapitel 4 beziehungsweise durch die Simulation der Elektrodenanordnung ermittelt wurden.

Abbildung 6.19 stellt den relativen Fehler des berechneten Feldes an den Abtastpunkten im Knochen dar. Der mittlere Fehler über alle Abtastpunkte im Knochen beträgt für diese Elektrodenanordnung 4,9%. Es soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden, den Fehlereinfluss der Interpolation und der Überlagerung getrennt zu untersuchen. Je nach Anzahl und Positionierung der Stimulationselektroden ergibt sich eine mittlere Abweichung zwischen der simulierten Feldverteilung und der mit dem vorgestellten Ansatz berechneten Feldverteilung von 2% bis etwa 7%.

Somit kann festgestellt werden, dass der in Kapitel 4 vorgestellte hybride Ansatz zur näherungsweisen Berechnung des elektrischen Feldes gut geeignet ist, die aufwendige numerische Berechnung der elektrischen Feldverteilung zu ersetzen und die Optimierung in einem überschaubaren Zeitrahmen durchzuführen. Nachdem eine Approximation der Pareto-Menge ermittelt wurde, können die potentiell geeigneten Elektrodenanordnungen konventionell simuliert werden.

6.3.1 Betrachtung des Einflusses der nichtlinearen Materialgrenzen

In Kapitel 3 wurde festgestellt, dass die Materialgrenzen zwischen Implantat und Knochen sowie Knochen und Elektrodenkappen nichtlineare Eigenschaften aufweisen. Daher soll in diesem Abschnitt untersucht werden, welche Auswirkung die nichtlineare Strom-/Spannungs-Kennlinie der Materialgrenzen auf die berechneten Spannungsabfälle und somit auch auf das elektrische Feld im Knochen hat.

In Kapitel 4 wurde ein Ansatz vorgestellt, mit dem die Elemente der Materialgrenzen auf *SPICE* übliche Modelle übertragen werden können. Die nichtlinearen Transferwiderstände können mit einer antiparallelen Zusammenschaltung zweier Dioden modelliert werden. Hierfür müssen lediglich die Kennlinien aus (6.2) und (6.3) auf die Diodenkenngrößen umgerechnet werden. Dies erfolgt mit den in Gleichung (4.43) gegebenen Beziehungen. Etwas schwieriger gestaltet sich die Modellierung der CP-Elemente. In Kapitel 4 wurde vorgeschlagen, diese Elemente durch eine Kette von RC-Gliedern zu ersetzen.

Abbildung 6.20 zeigt einen Vergleich der Impedanzen der CP-Elemente mit den resultierenden RC-Ketten. Hierbei wurden die CP-Elemente durch jeweils eine RC-Kette mit vier Gliedern ersetzt¹⁶. Es zeigt sich, dass bereits vier RC-Glieder ausreichen, um das Verhalten der CP-Elemente in einem Frequenzintervall von [50 Hz, 300 Hz] sehr gut zu beschreiben. Mit diesem Intervall sind die Grundfrequenz sowie die ersten fünf Harmonischen abgedeckt.

Der nichtlineare Einfluss der Materialgrenzen soll am Beispiel der Elektrodenanordnung mit vier Stimulationselektroden aus Abbildung 6.13 untersucht werden. Wie bereits erwähnt, wurden die Simulationen im Zeitbereich mittels *NGSPICE* durchgeführt, welches zu diesem Zweck an *Mathematica* gekoppelt wurde.

¹⁶Hierbei wird das reine CP-Element betrachtet. Der zusätzliche ohmsche Anteil, der durch eine Beschichtung/Passivierung entsteht und mit R_B bezeichnet wurde, ist noch nicht eingerechnet.

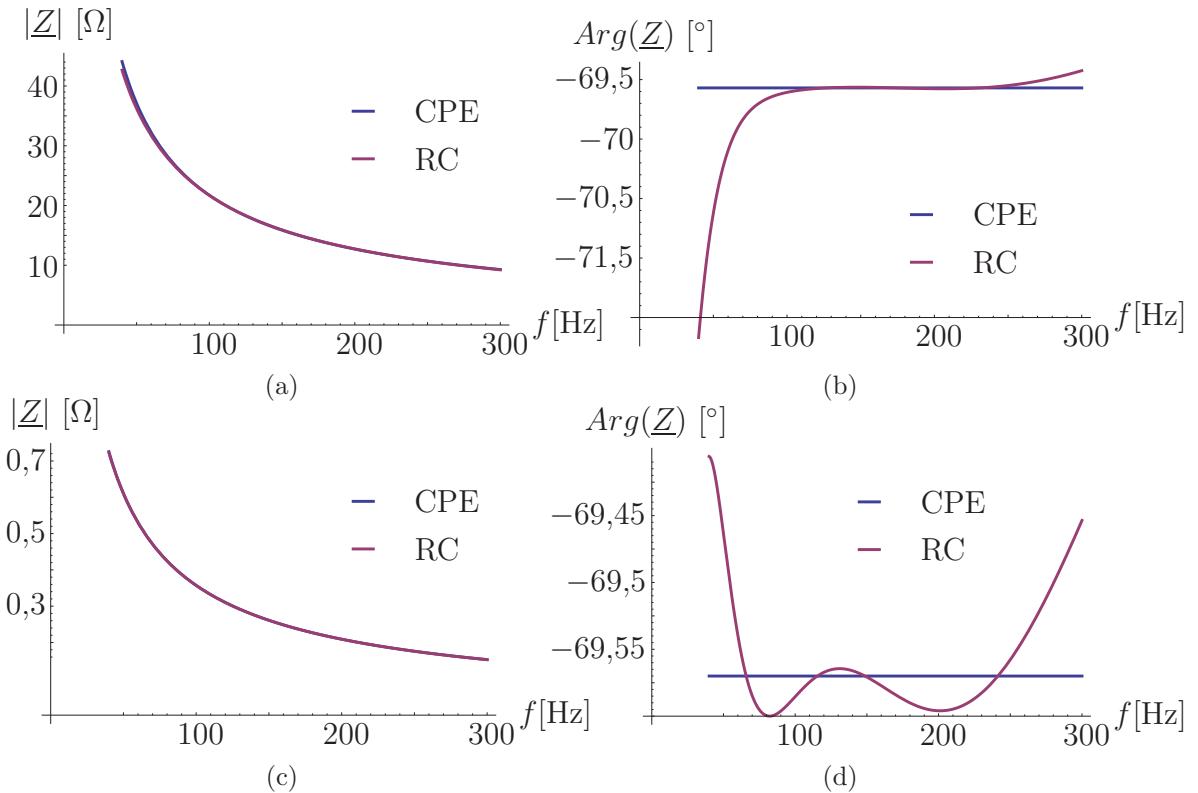


Abbildung 6.20: Impedanz der CP-Elemente und der angepassten RC-Ketten der Materialgrenzen Elektrodenkappe/Knochen ((a) Betrag und (b) Phase) und Knochen/Implantat ((c) Betrag und (d) Phase).

Abbildung 6.21 zeigt einen Ausschnitt der im Zeitbereich berechneten Spannungsabfälle u_1 bis u_4 , mit denen nach Gleichung (4.38) die Wichtungsfaktoren der von den einzelnen Elektroden erzeugten elektrischen Felder berechnet werden können. Zunächst fällt der asymmetrische Spannungsverlauf aller Kurven auf. Dieser wird durch die nichtlineare und asymmetrische Kennlinie der Transferwiderstände verursacht (vergleiche Abbildung 6.7). Dies führt dazu, dass der Spannungsabfall an den Materialgrenzen für die positive und die negative Halbwelle unterschiedlich sind. Besonders deutlich wird dies an der Materialgrenze Knochen/Elektrodenkappe.

Abbildung 6.22 zeigt die Spannungsabfälle über den Materialgrenzen. Während die Materialgrenze Implantat/Knochen (Abbildung 6.22(b)) ein nahezu lineares Verhalten zeigt, was durch das betragsmäßig sehr kleine CP-Element erklärt werden kann, zeigt die Materialgrenze Knochen/Elektrodenkappe ein deutlich nichtlineares Verhalten. Dies ist, wie bereits erwähnt, auf die asymmetrische Kennlinie des Transferwiderstandes in Kombination mit dem parallelgeschalteten CP-Element zurückzuführen. Eine Fourieranalyse der Spannungen u_1 bis u_4 ermöglicht es, die Amplituden der harmonischen Komponenten zu ermitteln.

Tabelle 6.4 enthält die Amplituden der Grundwelle (\hat{U}_{50Hz}) sowie die der ersten drei Oberwellen (\hat{U}_{100Hz} , \hat{U}_{150Hz} und \hat{U}_{200Hz}). Zusätzlich enthält die Tabelle die im Fre-

6 Ergebnisse

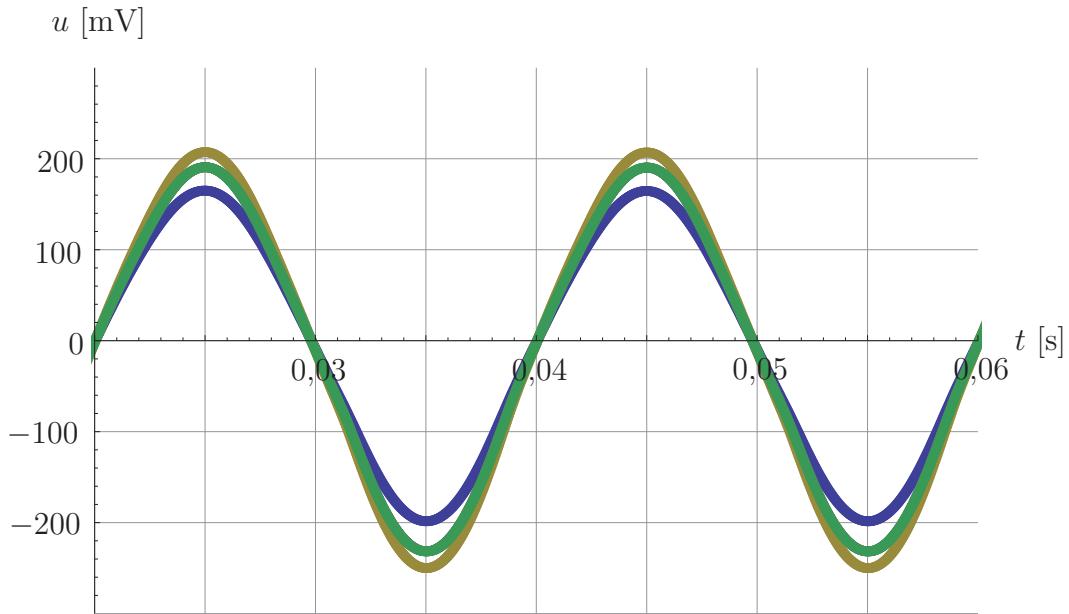


Abbildung 6.21: Berechnete Potentiale u_1 bis u_4 im Zeitbereich (u_2 und u_4 liegen übereinander).

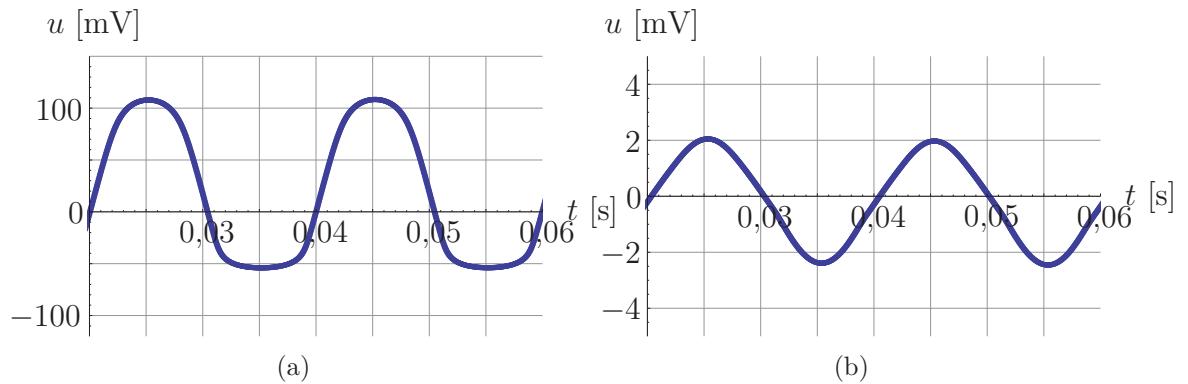


Abbildung 6.22: Spannungsabfälle über den Materialgrenzen im zeitlichen Verlauf. (a) Materialgrenze Knochen/Elektrodenkappe und (b) Implantat/Knochen.

quenzbereich berechneten Amplituden der Spannungsabfälle \hat{U} . Zunächst fällt auf, dass die im Frequenzbereich berechneten Amplituden kleiner sind als die im Zeitbereich bestimmten. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da im Frequenzbereich die Transferwiderstände durch ohmsche Widerstände ersetzt wurden, die die Kennlinie eines Transferwiderstandes nur bis etwa 30 mV in guter Näherung modellieren können. Abbildung 6.22 zeigt allerdings, dass der Spannungsabfall über der Materialgrenze Knochen/Elektrodenkappe wesentlich größer ist. Somit fließt mehr Strom durch den Transferwiderstand, was zu einem höheren Spannungsabfall über den Widerstand des

Spannung	\hat{U} (Frequenzbereich)	\hat{U}_{50Hz}	\hat{U}_{100Hz}	\hat{U}_{150Hz}	\hat{U}_{200Hz}
u_1	162 mV	176 mV	5,5 mV	5,8 mV	$1,5 \cdot 10^{-3}$ mV
u_2	179 mV	203 mV	6,8 mV	8,5 mV	$8 \cdot 10^{-2}$ mV
u_3	184 mV	220 mV	6,9 mV	9,1 mV	$9 \cdot 10^{-2}$ mV
u_4	179 mV	200 mV	6,8 mV	8,5 mV	$8 \cdot 10^{-2}$ mV

Tabelle 6.4: Fourieranalyse der berechneten Spannungsabfälle aus der transienten Simulation.

Knochenmaterials führt¹⁷. Durch die Linearisierung der Kennlinie des Transferwiderstandes werden bei den gewählten Stimulationsparametern die Wichtungsfaktoren im Frequenzbereich rund 10% zu niedrig berechnet. Somit ist auch die elektrische Feldstärke im Knochen rund 10 % höher, verglichen mit der im Frequenzbereich bestimmten Feldstärke. Ob die Optimierung mit einer Feldberechnung im Frequenzbereich oder im Zeitbereich erfolgt, muss durch einen Vergleich der berechneten Spannungen entschieden werden. Da sich die Abweichungen allerdings auf alle Elektroden gleichermaßen auswirkt, erscheint es sinnvoll, die Optimierung im Frequenzbereich durchzuführen und dann ausgewählte Individuen der Pareto-Menge im Zeitbereich zu simulieren.

6.4 Skalierung des parallelisierten mehrdimensionalen Optimierungsalgorithmus

In Kapitel 5 wurde die Möglichkeit der Parallelisierung der vorgestellten Feldberechnungs- und Optimierungsprozedur erwähnt. Hierbei werden aufwendige Rechenschritte - wie das Berechnen der Gegeninduktivitäten zwischen den Stimulationselektroden und die Überlagerung der einzelnen Feldverteilungen - nicht lokal sondern parallel in einem Netzwerk von Rechnern durchgeführt. An dieser Stelle soll kurz auf den möglichen Geschwindigkeitsgewinn in der Optimierung eingegangen werden. Dazu wurde eine Population aus 100 Individuen mit jeweils 5 Stimulationselektroden erzeugt. Basierend auf dieser Population wurde ein vollständiger Iterationsschritt des Optimierungsalgorithmus durchgeführt¹⁸.

Abbildung 6.23(a) stellt die nötige Zeitdauer für einen Iterationsschritt des Algorithmus in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Rechenkernen (i) dar. Es zeigt sich, dass das präsentierte Optimierungsverfahren sehr gut für die Parallelisierung geeignet ist. So kann bei zehn Rechenprozessen mit einer Beschleunigung um den Faktor acht gerechnet werden.

¹⁷Werden die Dioden, die die Transferwiderstände modellieren, durch die linearisierten ohmschen Widerstände ersetzt, so beträgt die Abweichung der im Frequenz- und im Zeitbereich bestimmten Spannungsabfälle weniger als 1%.

¹⁸Dieser Schritt beinhaltet das Berechnen der elektrischen Feldverteilungen aller Individuen, die Fitnessbewertung sowie das Erzeugen der nachfolgenden Generation.

6 Ergebnisse

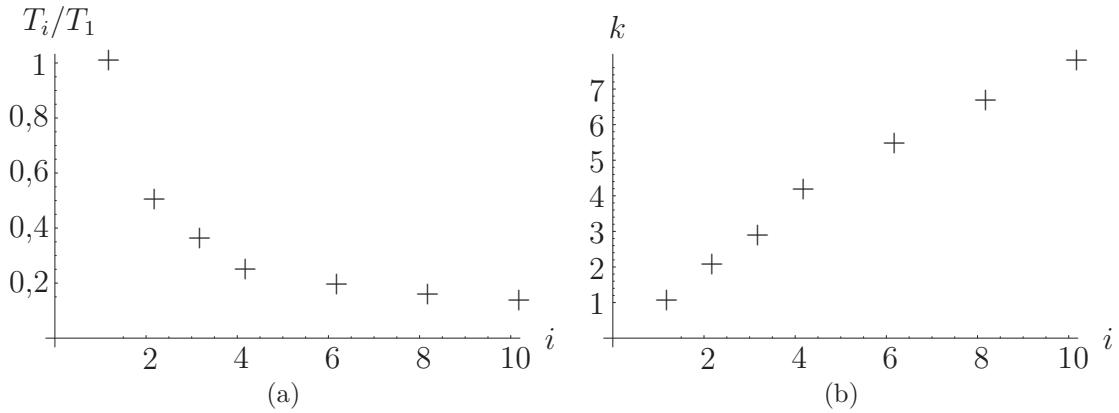


Abbildung 6.23: (a) Zeitdauer T_i für einen vollständigen Iterationsschritt des Optimierungszyklus in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Rechenkernen i . (b) Geschwindigkeitsgewinn k in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Rechenkernen.

6.5 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde die Optimierung eines Elektrostimulationssystems mit den in dieser Arbeit präsentierten Methoden an einem Beispiel durchgeführt. Zunächst wurde die Phase der Datengewinnung beschrieben. Im Anschluss wurden die noch unbekannten Parameter der Materialgrenzen Implantat/Knochen und Knochen/Elektrodenkappe aus den in Kapitel 3 präsentierten Messergebnissen bestimmt.

Danach wurden optimale Elektrodenanordnungen für zwei zuvor vorgestellte Optimierungsziele ermittelt. Hierfür wurden zunächst die in Kapitel 5 präsentierten eindimensionalen Optimierungsalgorithmen verwendet. Es zeigte sich, dass lediglich der Differential-Evolution Algorithmus in der Lage ist, das aus der Aggregation der Zielfunktionen hervorgegangene Optimierungsproblem in einem überschaubaren Rahmen mit zufriedenstellenden Resultaten zu lösen. Im Anschluss wurde das gleiche Optimierungsproblem mit dem angepassten mehrdimensionalen evolutionären Algorithmus behandelt. Dieser zeigte sich den eindimensionalen Verfahren klar überlegen, da mit einem ähnlichen Rechenaufwand nicht nur ein Element sondern die komplette Pareto-Menge¹⁹ ermittelt werden kann.

Abschließend wurde der Einfluss der nichtlinearen Charakteristika der Materialgrenzen sowie die Skalierung der parallelisierten Variante des mehrdimensionalen Optimierungsalgorithmus untersucht. Es zeigte sich, dass der vorgestellte mehrdimensionale Optimierungsalgorithmus sehr gut parallelisierbar ist. So konnte mit zehn Rechenprozessen die zur Optimierung benötigte Zeitdauer um den Faktor acht reduziert werden.

¹⁹Zumindest eine Approximation, die die Elemente der eindimensionalen Optimierung dominiert.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die hier vorgestellte Arbeit befasst sich mit der Entwicklung eines Verfahrens zur Optimierung eines Hüftgelenkimplantats, welches mit einem induktiv gekoppelten Elektrostimulationssystem ausgestattet ist. Dieses soll den Einheilprozess des Implantats verbessern, um so die mechanische Stabilität der Prothesenverankerung und damit die Lebensqualität des Patienten zu verbessern.

Hierfür wurde zunächst ein kurzer Überblick über die Datenlage zu den elektrischen Eigenschaften von Knochen gegeben. Im Anschluss wurde der Einfluss der Materialgrenzen zwischen den Implantatkomponenten und dem Knochen untersucht. Es zeigte sich, dass die Prozesse an den Materialgrenzen einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die elektrische Feldverteilung im Knochen haben. Zur Modellierung dieser Prozesse wurde ein geeignetes Ersatzschaltbild aus der Literatur adaptiert, dessen Elemente aus Messdaten bestimmt wurden. Da die Optimierung das Auswerten der elektrischen Feldverteilung einer Vielzahl von Elektrodenanordnungen erfordert, wurde in Kapitel 4 ein Ansatz vorgestellt, mit dem die elektrische Feldverteilung einer Elektrodenanordnung näherungsweise berechnet werden kann. Vorteil dieses Ansatzes ist, dass das elektrische Feld einer Elektrodenanordnung in weniger als einer Sekunde berechnet werden kann. Eine konventionelle numerische Berechnung benötigt rund 20 Minuten¹. Dieser Ansatz beruht auf der Idee, die elektrische Feldverteilung einer Elektrodenanordnung durch die gewichtete Überlagerung zuvor berechneter Feldverteilungen darzustellen. Später wurde festgestellt, dass die im Vergleich zu einer numerischen Simulation auftretende Abweichung relativ gering ist, so dass dieses Verfahren genutzt werden kann, um das elektrische Feld einer Elektrodenanordnung in der Optimierung zu berechnen und somit die zur Optimierung benötigte Zeitdauer um mehrere Größenordnungen zu reduzieren.

Die eigentliche Optimierung ist Gegenstand des Kapitels 5. Nachdem zunächst auf die Definition von Optimierungszielen für die elektrische Feldverteilung eingegangen worden ist, wurden drei potentiell geeignete eindimensionale Optimierungsalgorithmen, die in der Literatur beschrieben sind, auf das vorliegende Problem angewandt. Hierfür war es nötig, die einzelnen Teilzielfunktionen zu einer einzelnen skalaren Zielfunktion zusammenzufassen. Das inhärente Problem der Wahl der Wichtungsfaktoren konnte jedoch nicht zufriedenstellend gelöst werden. Daher wurde ein weiterer Algorithmus an das Problem angepasst, der auf der Pareto-Optimalität beruht. Somit wird nicht eine einzelne Elektrodenanordnung als Optimum ermittelt, sondern eine Menge von Kompromisslösungen. Bei diesen ist die Verbesserung in einem Teilziel nur durch eine Verschlechterung in einem anderen möglich. Aus dieser Menge können

¹Stand 2010.

7 Zusammenfassung und Ausblick

dann anhand von zunächst nicht in der Optimierung definierten Kriterien eine oder mehrere Elektrodenanordnungen ausgewählt werden.

In Kapitel 6 wurden Elektrodenanordnungen mit drei bis fünf Stimulationselektroden optimiert. Die zuvor theoretisch beschriebenen Schritte wurden hier an einem Beispiel durchgeführt. Dabei wurde auch die Leistungsfähigkeit der Optimierungsalgorithmen aus Kapitel 5 verglichen. Es zeigte sich, dass der angepasste mehrdimensionale Optimierungsalgorithmus bei einer ähnlichen Anzahl von Funktionsauswertungen ein durchweg besseres Ergebnis liefert. Verbunden mit der zugrunde liegenden Flexibilität ist dieser Algorithmus folglich zur Optimierung des Elektrostimulationssystems für die spätere medizinische Anwendung klar zu bevorzugen.

An einer Elektrodenanordnung wurde im Anschluss der Einfluss der nichtlinearen Materialgrenzen untersucht. Es zeigte sich, dass die im Frequenzbereich berechneten Spannungsabfälle zwischen der Elektrodenspitze und der Implantatoberfläche um rund 10% zu niedrig ausfallen. Für das vorgestellte Optimierungsbeispiel ist diese Abweichung dennoch vertretbar, da höhere Spannungsabfälle zu einer höheren Feldstärke im Knochen führen. Somit muss vor der Optimierung anhand von einzelnen typischen Elektrodenanordnungen untersucht werden, ob diese im Frequenz- oder im Zeitbereich durchgeführt wird. Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren sind beide Varianten möglich. Es zeigt sich, dass die Materialgrenzen einen signifikanten Einfluss auf die Feldverteilung im Knochen haben und somit nicht vernachlässigt werden dürfen.

Als wesentliches Problem bei der Optimierung des Implantates stellte sich die ungenügende Datenlage dar. Die Menge an belastbaren Daten zu den elektrischen Eigenschaften von biologischen Geweben im niederfrequenten Bereich ist sehr begrenzt. Allerdings werden mit zunehmender Bedeutung der elektrischen Stimulation von biologischen Systemen auch diese Punkte bedeutender, so dass auf eine Erweiterung der Datenbasis gehofft werden kann.

Neben den elektrischen Eigenschaften des biologischen Gewebes sind vor allem die eigentlichen Stimulationssparameter nicht eindeutig geklärt. In dieser Arbeit wurde daher auf Werte aus der Literatur zurückgegriffen. Jedoch soll festgestellt werden, dass diese teils widersprüchlich sind, so dass hier weitere Forschung nötig erscheint. Dennoch konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass es mit dem vorgeschlagenen Ansatz der Positionierung von Stimulationselektroden auf der Implantatoberfläche möglich ist, die in der Literatur zur niederfrequenten Elektrostimulation angegebenen elektrischen Feldstärken im Knochen zu erzeugen. Der vorgeschlagene Ansatz erlaubt es weiterhin, beliebige Zielfunktionen zu definierten, so dass Elektrodenanordnungen für verschiedene Defektsituationen ermittelt werden können. Dieses ist nötig, da Defekte des Hüftknochens in einem weiten Spektrum auftreten können [DCB89]. Das nächste Ziel ist also, für jede Defektklasse² eine angepasste Elektrodenanordnung zu ermitteln, die diese Defektsituation bestmöglich therapiert.

²Systematische Einteilung von Defekten des Hüftknochens nach Art und Lokalisierung des Defektes.

Um eine ökonomische Verwertung zu vereinfachen, ist es wünschenswert, dass einzelne Elektrodenanordnungen für mehrere Defektklassen genutzt werden können. Somit sollte für jede Defektklasse die Pareto-Menge an geeigneten Elektrodenanordnungen ermittelt werden. Im Anschluss kann gezielt nach Elektrodenanordnungen gesucht werden, die in mehreren Pareto-Mengen vorkommen. Ein zweiter möglicher Ansatz besteht darin, die Zielfunktionen für verschiedene Defektkategorien gemeinsam in einem Optimierungslauf zu minimieren, um so Elektrodenanordnungen zu ermitteln, die eine elektrische Feldverteilung erzeugen, die für die Therapie mehrerer Defekte genutzt werden kann. Hier zeigt sich der Vorteil des vorgestellten Ansatzes zur Feldberechnung: Sobald die Feldverteilungen der einzelnen simulierten Elektrodenpositionen ermittelt worden sind, kann jedes beliebige Optimierungsziel definiert und die Anzahl der Stimulationselektroden variiert werden, ohne erneut den rechenaufwändigen Schritt der Feldsimulation durchführen zu müssen. Somit können schnell und einfach neue Varianten evaluiert beziehungsweise weitere Optimierungsziele definiert werden. Würde die Optimierung hingegen auf numerischen Simulationen für jede Elektrodenanordnung aufbauen, so könnten kurzfristige Änderungen nicht erfolgen, da dieses sofort mit einer langwierigen Reihe von neuen Simulationen verbunden wäre.

Neben der bereits angesprochenen Ermittlung von Elektrodenanordnungen, die möglichst breit einsetzbar sind, sollte die Sensitivität der optimierten Elektrodenanordnungen beachtet werden: Da nicht auszuschließen ist, dass die Prothese bei der Implantation nicht an ihrer optimalen Position im Hüftknochen positioniert wird, sollte die Wahl der Optimierungsziele so erfolgen, dass auch bei einer ungünstigen Positionierung eine effektive Elektrostimulation der gewünschten Areale stattfindet. Zusätzlich ist durch die variable Patientenanatomie nicht sichergestellt, dass die externe Erregerspule exakt gleich positioniert wird, so dass es möglicherweise zu einem verminderten magnetischen Fluss durch die Sekundärspulen und somit zu einem schwächeren elektrischen Feld im Knochen kommt. Auch dieses sollte bei der Definition der Zielfunktionen beziehungsweise bei der Auslegung der Erregerspule und der Sekundärspulen beachtet werden.

Diese Punkte können auch als weiteres Entscheidungskriterium zur Auswahl eines geeigneten Elementes aus der Pareto-Menge dienen, indem einzelne Elemente unter nicht optimalen Bedingungen simuliert werden und Elektrodenanordnungen, die auch mit diesen Abweichungen eine effektive Elektrostimulation gemäß der definierten Zielfunktionen garantieren, bevorzugt werden.

A Anhang

A.1 Validierung der numerischen Feldberechnung

In diesem Abschnitt soll die numerische Berechnung der elektrischen Feldverteilung anhand von Messungen an einem humanen Becken validiert werden.

A.1.1 Aufnahme der Potentialverteilung im humanen Becken

Zunächst wurde der noch gefrorene Beckenknochen mittels hochauflöster CT-Aufnahmen abgetastet, um die spätere Geometrierekonstruktion durchführen zu können. Im Anschluss wurde die Hüftpfanne ausgefräst und das Implantat sowie ein Prototyp einer Stimulationselektrode eingesetzt. Abbildung A.1 zeigt den Hüftknochen und die Stimulationselektrode sowie das Implantat (hier ohne zusätzlichen Verankerungszapfen). Um die Messung zu vereinfachen wurde keine magnetische Kopplung zur Erzeugung eines elektrischen Feldes im Knochen genutzt. Stattdessen wurde die Kappe der Stimulationselektrode über eine Zuleitung mit einem Signalgenerator verbunden. Über diesen konnten Frequenz und Amplitude der Anregung eingestellt werden. Die Masseleitung des Signalgenerators war an das Implantat gelegt, so dass eine definierte Spannung zwischen Implantat und Elektrodenkappe eingeprägt werden konnte.

Im Anschluss wurde das Becken mit dem Implantat¹ in einer Haltevorrichtung fixiert (siehe Abbildung A.2(a)). Diese Haltevorrichtung wurde mit einem Koordinatenmessarm (siehe Abbildung A.2(b)) verbunden, an dessen Spitze eine Potentialsonde befestigt war. Ferner wurde der Knochen in einem Raster angebohrt, um das elektrische Potential im Knocheninneren aufnehmen zu können. Somit konnten sowohl an Punkten auf der Knochenoberfläche als auch im Inneren das elektrische Potential sowie die Koordinaten der Messpunkte aufgenommen werden. Abbildung A.3 zeigt eine vergrößerte Ansicht dieses Bereichs.

Mittels des Signalgenerators wurde eine Spannung von 1 V (Amplitude) bei einer Frequenz von 20 Hz zwischen dem Implantat und der Elektrodenkappe erzeugt. Hierdurch bildet sich im Knochen ein elektrisches Feld. Mit der am Messarm befestigten Potentialsonde wurde das elektrische Potential am Knochen sowohl in 2 mm als auch in 7 mm Tiefe in den vorgebohrten Löchern gemessen. Dieser Vorgang wurde insgesamt drei mal wiederholt. Die Messergebnisse konnten bei jedem Durchlauf mit kleineren Abweichungen von rund 2 % reproduziert werden. Neben den Potentialen

¹Um eventuelle Hohlräume zwischen dem Implantat und dem Knochen auszufüllen wurde ein Kontaktgel verwendet.



Abbildung A.1: Hüftknochen mit ausgefrästem Hüftlager, extern gespeister Stimulationselektrode und Implantat (ohne Verankerungszapfen).

wurden auch der Widerstand zwischen der Elektrodenkappe und der Implantatoberfläche sowie die elektrische Leitfähigkeit im Knochenlager (siehe Kapitel 3) bestimmt.

A.1.2 Vergleich von Simulation und Messung

Basierend auf dem oben beschriebenen Experiment wurde ein numerisches Modell mit den gleichen Charakteristika erzeugt, um die Simulationsmethodik am humanen Beckenknochen zu validieren und zu einer Fehlerabschätzung des für die Optimierung verwendeten Simulationsmodells zu gelangen. Hierzu wurde zunächst aus den CT-Aufnahmen des untersuchten Beckens die geometrische Struktur des verwendeten humanen Beckenknochens in ein geeignetes CAD-Modell übertragen. Entsprechend der in Kapitel 3 beschriebenen Modellierung des Beckenknochens wurde das Knochenmodell in zwei separate Schichten zerlegt: Die äußere, rund 1 mm starke *Substantia Corticalis* und die innere *Substantia Spongiosa*. Die elektrischen Eigenschaften der beiden Schichten unterscheiden sich wesentlich und wurden in dem zur Optimierung verwendeten Simulationsmodell mit den gemessenen elektrischen Leitfähigkeiten von 3,3 mS/m beziehungsweise 120 mS/m modelliert (diese Werte wurden am untersuchten Becken gemessen). Die Stimulationselektrode wurde näherungsweise an der gleichen Position wie in der Messung positioniert², und es wurde die gleiche Spannung zwischen Elektrodenkappe und Implantat eingeprägt.

²Der bei dieser Messung verwendete Elektrodenprototyp hatte kein Gewinde oder eine andere Art der Fixierung im Implantat, daher ist die exakte Position schwer zu ermitteln. Somit kann die tatsächliche Position der Elektrode um mehrere Millimeter von der in der Simulation angenommenen abweichen.



Abbildung A.2: (a) Fixierter humaner Beckenknochen mit eingesetztem geerdetem Implantat, vorbereitet zur Messung der Potentialverteilung im Knocheninneren. (b) Messung der Potentialverteilung an den Messpunkten mittels Messspitze und Messarm.



Abbildung A.3: Messfeld mit vorgebohrten Messlöchern zur Bestimmung des elektrischen Potentials.



Abbildung A.4: Darstellung des elektrischen Potentials auf der Knochenoberfläche.

Zwischen Knochen und Implantat wurde eine weitere 1 mm dicke Schicht erzeugt, um den Übergangswiderstand zwischen Implantat und Knochen zu modellieren. Dieser Übergangswiderstand setzt sich aus der Implantatbeschichtung und den unvermeidlich auftretenden, im Experiment mit Leitgel gefüllten, kleinen Hohlräumen zwischen Knochen und Implantat zusammen³. Die Leitfähigkeit der Schicht wurde so gewählt, dass der aus den numerischen Simulationen berechnete Gesamtwiderstand zwischen Elektrodenkappe und Implantatoberfläche mit dem Gemessenen übereinstimmt. Die Feldberechnung erfolgte - wie in der gesamten Arbeit - mit CST Studio Suite 2009[®] mit den in Kapitel 6 beschrieben Einstellungen. Nach der numerischen Berechnung des elektrischen Feldes wurden die Potentiale an den während der Messungen aufgenommenen Punkten ermittelt. Diese sind, wie auch im Messaufbau (siehe Abbildung A.2), auf das geerdete Implantat bezogen.

Die Abbildungen A.5 und A.6 zeigen die gemessenen sowie die aus der Simulation bestimmten Potentiale entlang der horizontalen Messpunkte-Reihen (i entspricht der Messpunktzahl) in einer Tiefe von 2 mm beziehungsweise 7 mm innerhalb des Knochens. Auf der Knochenoberfläche wurden keine Potentialwerte aufgenommen, da der Knochen in Gefrierlagerung unvermeidbare Austrocknungserscheinungen zeigt. Durch diese Austrocknung war eine gute Kontaktierung zwischen Messspitze und Knochen nicht sichergestellt, was keine reproduzierbare Potentialmessung zuließ.

³Diese Hohlräume, die im Messaufbau vorhanden sind, würden sich im menschlichen Körper unverzüglich mit Gewebeflüssigkeit füllen [Pri09], was eine gute elektrische Kontaktierung des Implantats sicherstellt.

A.1 Validierung der numerischen Feldberechnung

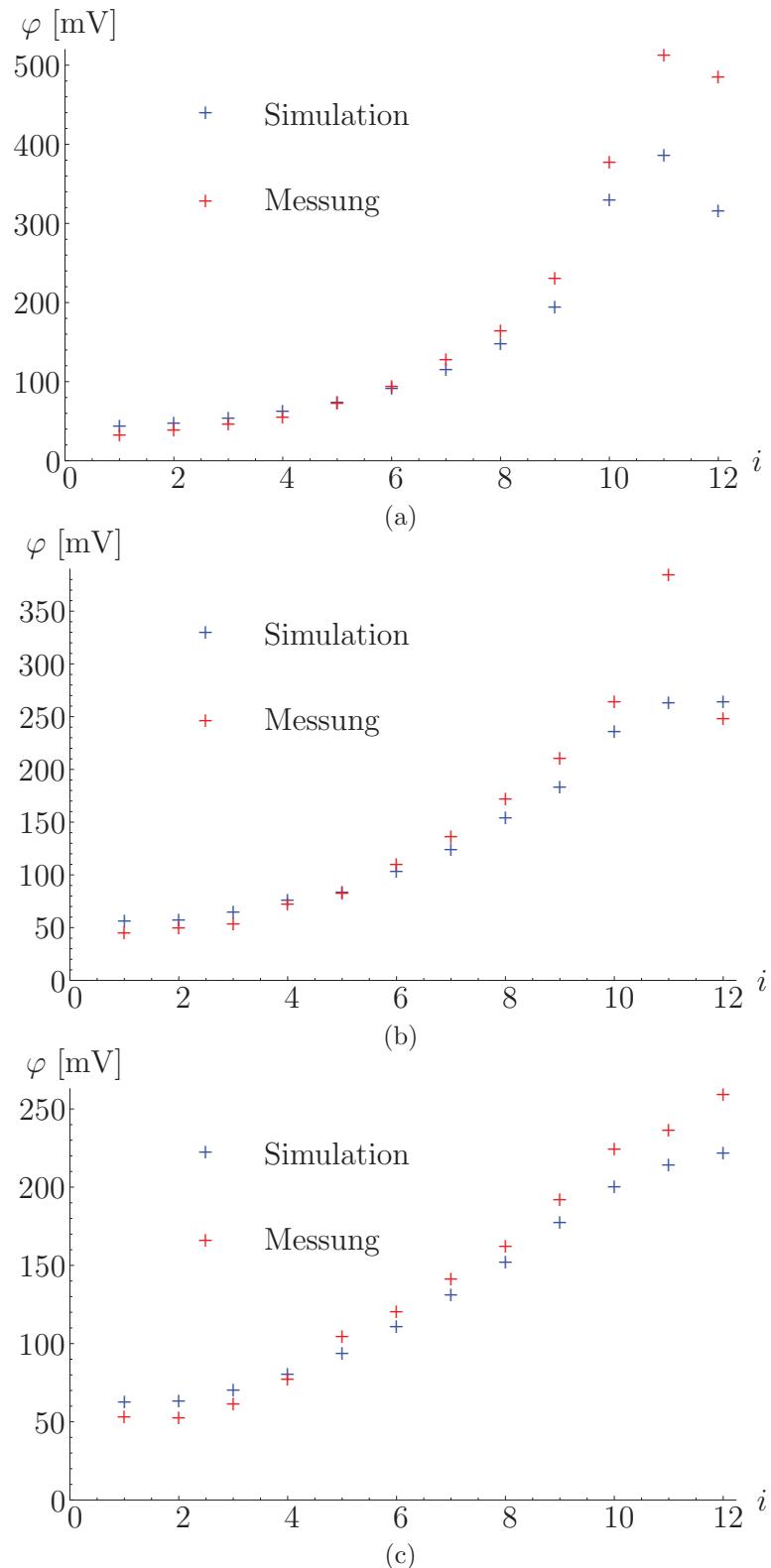


Abbildung A.5: Vergleich Messung und Simulation 2 mm im Knochen.

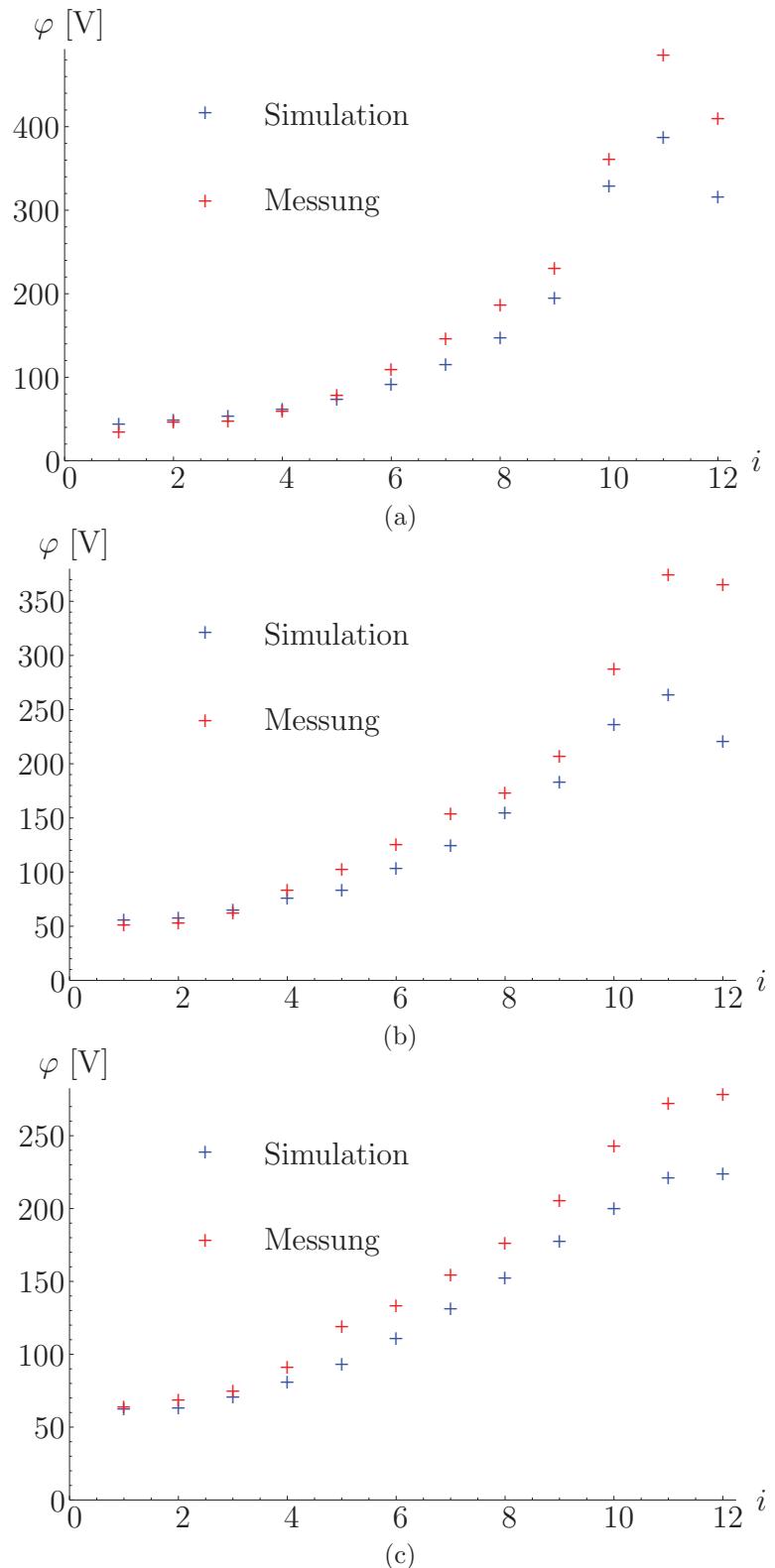


Abbildung A.6: Vergleich Messung und Simulation 7 mm im Knochen.

Zunächst lässt sich feststellen, dass experimentelle Werte und Simulationsdaten in qualitativ guter Übereinstimmung sind. Folgende Messpunkte zeigten größere Abweichungen: Punkt 11 und 12 der ersten Reihe, Punkt 11 der zweiten Reihe (2 mm Tiefe, Abbildung A.5) und die Messpunkte 10-12 in 7 mm Tiefe (Abbildung A.6). Diese Punkte liegen in unmittelbarer Nähe zur eingesetzten Elektrode. In diesem Bereich existiert eine wesentliche Abweichung zwischen dem Simulationsmodell und dem Messaufbau: Im Messaufbau wurde die Elektrode in ein gebohrtes Loch eingesetzt. Aufgrund des fortgeschrittenen Zerfalls der Knochensubstanz war diese Bohrung jedoch geometrisch ungleichmäßig und nicht passschlüssig zur Elektrode. Dieser Übergang und die damit verbundene undefinierte Kontaktierung zwischen Elektrodenkappe und Knochen sind schlecht modellierbar. Im menschlichen Körper füllen sich Hohlräume zwischen Implantaten und Knochen unverzüglich mit Gewebeflüssigkeit. Diese hat eine im Vergleich zum Knochen bessere und isotrope Leitfähigkeit, womit in der späteren medizinischen Anwendung ein definierter elektrischer Kontakt zwischen den Implantatoberflächen und dem Knochen sichergestellt ist. Neben der elektrischen Kontaktierung ist die Elektrodenposition mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, da die Stimulationselektrode manuell und ohne Führung in den Knochen implantiert wurde. Im medizinischen Einsatz sollen die Stimulationselektroden mit dem Implantat verschraubt werden, wodurch eine definierte Position relativ zum Implantat sichergestellt ist. Dennoch kann festgestellt werden, dass das vorgestellte geschichtete Knochenmodell die elektrische Feldverteilung hinreichend genau wiedergibt (insbesondere im Abstand von einigen Millimetern zur Stimulationselektrode), so dass auf dieser Basis eine Optimierung durchgeführt werden kann.

A.2 Ein weiteres Optimierungsbeispiel

In Kapitel 6 wurde eine Optimierung von Elektrodenanordnungen an einem Beispiel durchgeführt, dessen Optimierungsziele medizinisch motiviert waren. An dieser Stelle soll nun ein weiteres Beispiel betrachtet werden, um die Leistungsfähigkeit des mehrdimensionalen Optimierungsverfahrens zu verdeutlichen. Es geht an dieser Stelle nicht um die Ermittlung einer medizinisch sinnvollen Elektrodenanordnung. Das betrachtete Beispiel ist künstlicher Natur, um das in Kapitel 5 betrachtete Problem der Wahl von Wichtungsfaktoren zu illustrieren. Hierzu wird mit den gleichen Voraussetzungen wie in Kapitel 6 begonnen: Es soll eine Elektrodenanordnung für eine Stimulationsfrequenz von 50 Hz und eine externe magnetische Flussdichte von 20 mT ermittelt werden soll.

Abbildung A.7 zeigt die beiden Zielfunktionsregionen Ω_1 und Ω_2 , die durch

$$\begin{aligned}\Omega_1 : \quad &x < 0 \\ \Omega_2 : \quad &x > 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

definiert sind. In beiden Zielfunktionsregionen soll eine elektrische Feldstärke von mindestens 5 V/m erreicht werden. In Kapitel 6 zeigte sich, dass es erst Elektrodenanordnungen mit fünf Stimulationselektroden gelang, diese Feldstärke großflächig

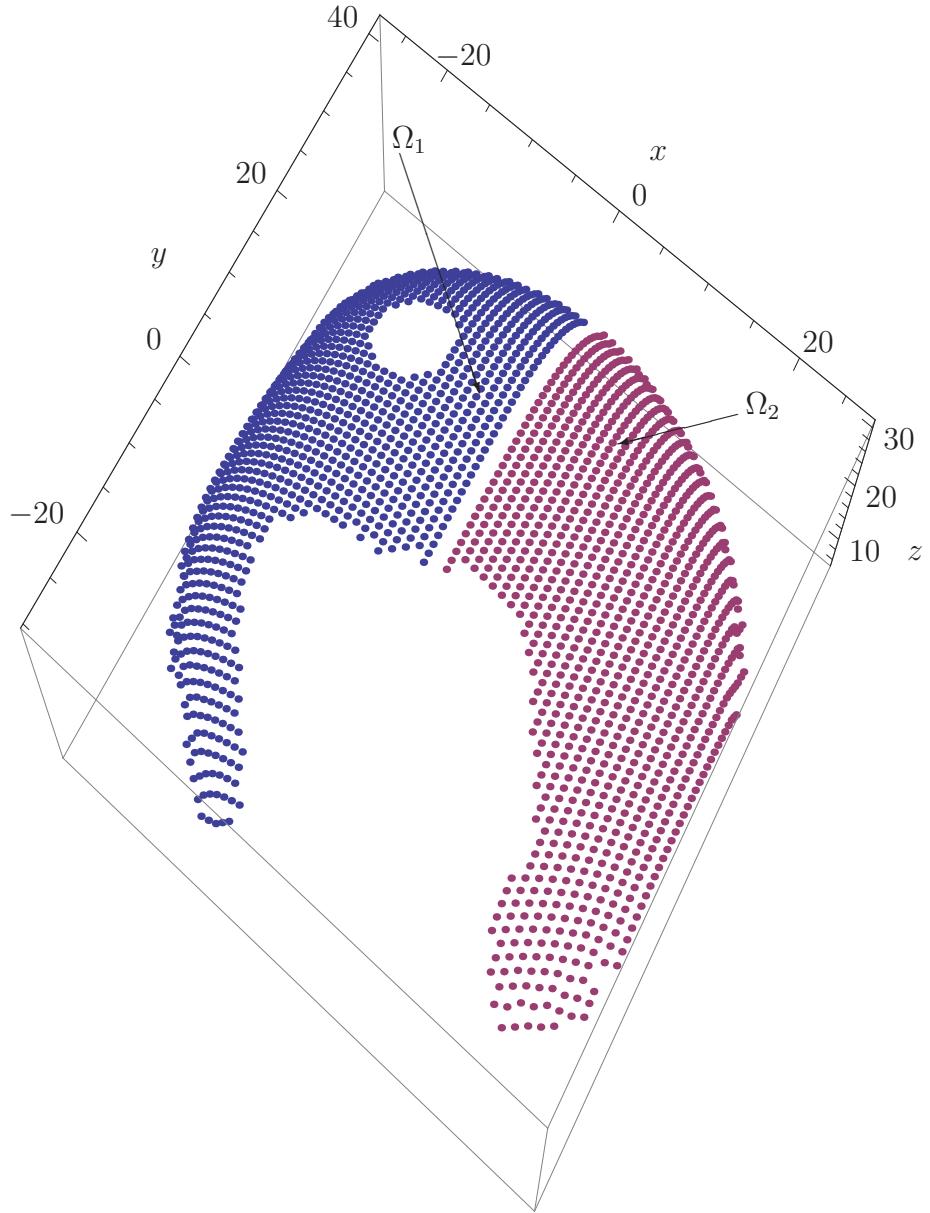


Abbildung A.7: Darstellung der Zielfunktionsregionen Ω_1 und Ω_2 . Abtastpunkte innerhalb des Verankerungszapfens und in Bereichen, die nicht im Knochen liegen, wurden entfernt.

zu erzeugen. Hier soll nun eine Elektrodenanordnung mit drei Stimulationselektroden optimiert werden, obwohl es dann nur schwer möglich ist, beide Zielfunktionen gleichermaßen zu minimieren. Dass die Zielfunktionsregionen auf entgegengesetzten Seiten des Implantates liegen erhöht den Schwierigkeitsgrad zusätzlich. Die eigentliche Optimierung der Elektrodenanordnungen wurde erneut mit dem angepassten mehrdimensionalen Algorithmus durchgeführt.

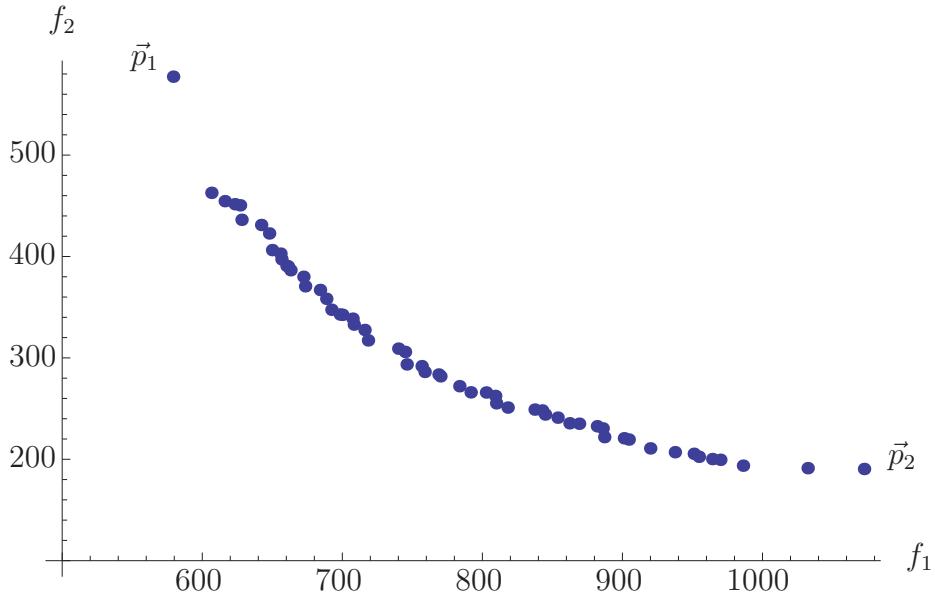


Abbildung A.8: Darstellung der ermittelten Approximationen der Pareto-Menge für die Zielfunktionsregionen aus (A.1).

Abbildung A.8 zeigt eine Darstellung der ermittelten Approximation der Pareto-Menge. Im Gegensatz zu Kapitel 6 sollen nun jedoch die Ränder der Pareto-Menge betrachtet werden. Hier sind insbesondere die markierten Elektrodenanordnungen \vec{p}_1 und \vec{p}_2 interessant, die jeweils die Zielfunktionen f_1 beziehungsweise f_2 bestmöglich minimieren⁴.

Abbildung A.9 zeigt eine Darstellung der Abweichung an den Abtastpunkten δ für die Elektrodenanordnungen (a) \vec{p}_1 und (b) \vec{p}_2 . Zunächst fällt auf, dass es der Elektrodenanordnung \vec{p}_2 sehr gut gelingt, die Zielfunktion f_2 zu minimieren. Wie erwartet wird die Zielfunktion f_1 fast vollständig ignoriert. Schwieriger gestaltet sich die Optimierung einer Elektrodenanordnung für das Minimieren der Zielfunktion f_1 : Selbst der Elektrodenanordnung \vec{p}_1 , die den geringsten Funktionswert aufweist, gelingt dies nur ungenügend⁵. Ursache hierfür ist die Nähe zum Verankerungszapfen, der wie in Kapitel 6 festgestellt, eine Art *Feldschatten* wirft. Weiterhin zeigt eine Analyse der Feldverteilung, die eine Elektrode in Zapfnähe erzeugt, dass der Zapfen die Feldverteilung massiv verzerrt, was somit zu einer Verringerung der Feldstärke über der Implantatoberfläche führt. Somit kann die Zielfunktion f_1 mit nur drei Stimulationselektroden nicht besser minimiert werden. An dieser Stelle zeigt sich erneut der

⁴Wie bereits in Kapitel 6 erläutert, muss beachtet werden, dass sich auch Abtastpunkte innerhalb der Elektroden befinden. An diesen Punkten existiert kein elektrisches Feld. Somit kann, solange sich mindestens eine Elektrode in einer Zielregion befindet, die korrespondierende Zielfunktion nicht zu Null minimiert werden.

⁵Zu erkennen an den Zielfunktionswerten f_1 für \vec{p}_1 und f_2 für \vec{p}_2 . Aufgrund der nahezu gleichen Anzahl von Abtastpunkten in den Regionen Ω_1 und Ω_2 sowie der gleichen angestrebten elektrischen Feldstärke wäre zunächst zu erwarten, dass beide Zielfunktionen gleich skalieren und ähnlich gut minimiert werden können.

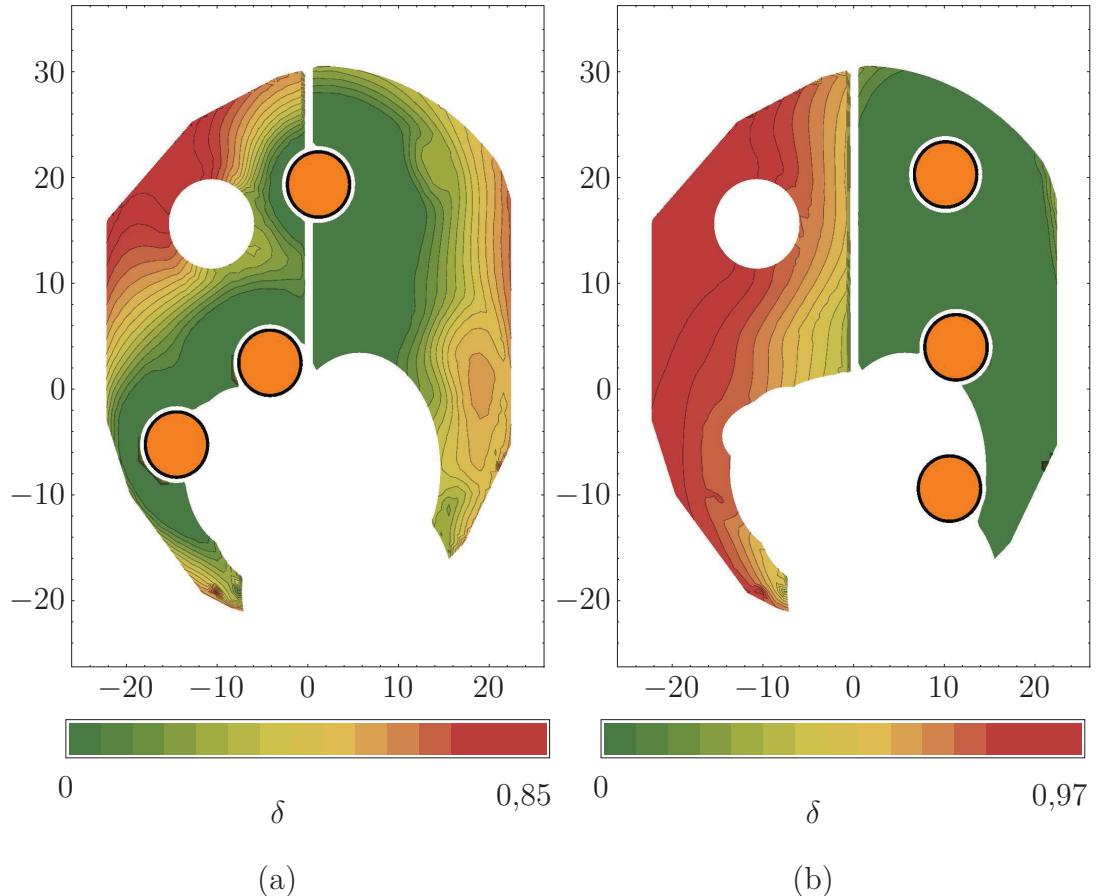


Abbildung A.9: Darstellung der Abweichung an den Abtastpunkten δ für die Elektrodenanordnungen (a) \vec{p}_1 und (b) \vec{p}_2 .

Vorteil des Pareto-Ansatzes in der Optimierung: Die als Beispiel gewählten Zielfunktionen sind hinsichtlich der zu erreichenden Feldstärke und der Größe der Zielfunktionsregionen sehr ähnlich. Dennoch kann eine Zielfunktion (f_2) sehr gut minimiert werden, während dies bei der zweiten schlechter gelingt (f_1). Dies müsste bei der Optimierung mit einem eindimensionalen Ansatz bei der Definition der Wichtungsfaktoren beachtet werden. Da allerdings a priori nur schwer Aussagen über die letztlich zu erreichenden Zielfunktionswerte getroffen werden können, müsste ein geeigneter Wichtungsfaktorensatz durch langwieriges Experimentieren ermittelt werden. Der mehrdimensionale Algorithmus umgeht dieses Problem, in dem er eine Menge von potentiell geeigneten Kompromisslösungen ermittelt.

A.3 Zur Berechnung der Induktivität beliebig geformter Spulen

Bisher wurde davon ausgegangen, dass alle Spulen im Stimulationssystem einen kreisförmigen Querschnitt aufweisen und somit durch die Überlagerung der magnetischen Flussdichte von einzelnen kreisförmigen Leiterschleifen dargestellt werden können. Für die Sekundärspulen in den Stimulationselektroden ist dies zweifellos der Fall, da sich diese Form bei zylindrischen Stimulationselektroden anbietet. Auch die externe Primärspule wurde bisher als kreisförmig angenommen. Im medizinischen Einsatz wird sich die Primärspule an der Anatomie des Patienten orientieren. Hier muss eine kreisförmige Spule nicht die beste Wahl sein. Deswegen wird an dieser Stelle auf die näherungsweise analytische Berechnung des magnetischen Feldes beliebig geformter Spulen eingegangen. Somit können später auch von der kreisförmigen Form abweichende Spulen berechnet werden.

Die Grundidee des vorgestellten Ansatzes ist, die komplexe Spulengeometrie durch einzelne Liniensegmente zu approximieren [Pri10]. Das magnetische Feld eines einzelnen Linienabschnittes kann analytisch berechnet werden. Somit ergibt sich das Feld einer beliebigen Spule näherungsweise durch die Überlagerung der Anteile der approximierten Geometrie. Nachfolgend soll die Flussdichte, die ein einzelnes Liniensegment erzeugt, hergeleitet werden. Ausgangspunkt hierfür ist das Gesetz von Biot-Savart [JW06]⁶:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \times d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (\text{A.2})$$

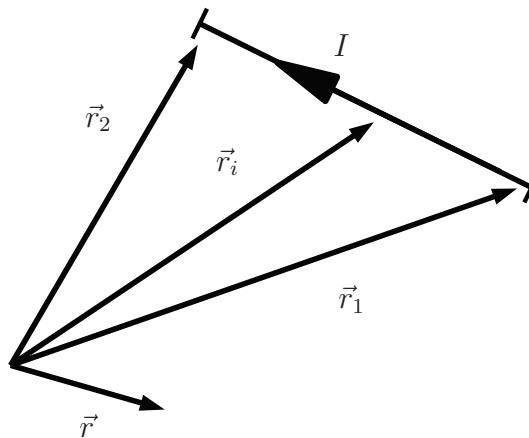


Abbildung A.10: Stromfaden im Raum.

⁶Es soll an dieser Stelle vorausgesetzt werden, dass die Permeabilität im gesamten Gebiet konstant und isotrop ist, so dass das Gesetz von Biot-Savart angewendet werden kann. Ferner wird angenommen, dass $\mu_r = 1$ gilt, was für den menschlichen Körper und die umgebende Luft in sehr guter Näherung gegeben ist.

A Anhang

Abbildung A.10 zeigt ein solches Liniensegment. Hierbei bezeichnet \vec{r} den Punkt, an dem die Flussdichte ermittelt werden soll. Der Ort des infinitesimalen Wegelementes \vec{dl} ist durch \vec{r}_i gegeben (siehe Abbildung A.10). Gleichung (A.2) soll nun genutzt werden, um die Flussdichte, die von einem Stromfaden erzeugt wird, dessen Endpunkte durch \vec{r}_1 und \vec{r}_2 gegeben sind, zu ermitteln. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass der Strom I vom Punkt \vec{r}_1 zu \vec{r}_2 fließt. Für eine vereinfachte Notation sollen ferner die folgenden Hilfsvektoren definiert sein

$$\begin{aligned}\vec{h}_1 &:= \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \\ \vec{h}_2 &:= \vec{r} - \vec{r}_1.\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Der Vektor \vec{r}_i kann wie folgt parametrisiert werden:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + t\vec{h}_1 \quad t \in [0,1]. \quad (\text{A.4})$$

Weiterhin gilt

$$\vec{dl} = d\vec{r}_i = \vec{h}_1 dt. \quad (\text{A.5})$$

Somit kann Gleichung (A.2) als

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{(\vec{h}_2 - \vec{h}_1) \times \vec{h}_1 dt}{|\vec{h}_2 - \vec{h}_1 t|^3} \quad (\text{A.6})$$

geschrieben werden. Ein Auswerten des Kreuzproduktes liefert

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{h}_2 \times \vec{h}_1 \int_0^1 \frac{dt}{|\vec{h}_2 - \vec{h}_1 t|^3}, \quad (\text{A.7})$$

beziehungsweise

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{h}_1 \times \vec{h}_2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{|\vec{h}_2|^2 - 2\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 t + |\vec{h}_1|^2 t^2}}. \quad (\text{A.8})$$

Nach dem Integrieren ergibt sich (A.8) zu

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{h}_1 \times \vec{h}_2 \left[\frac{|\vec{h}_1|^2 t - \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2}{|\vec{h}_2 - \vec{h}_1 t|(\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_1 \vec{h}_2 \cdot \vec{h}_2 - (\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2)^2)} \right]_0^1. \quad (\text{A.9})$$

Das Einsetzen der Grenzen und anschließendes geeignetes Zusammenfassen ergibt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{h}_1 \times \vec{h}_2}{(\vec{h}_1 \times \vec{h}_2) \cdot (\vec{h}_1 \times \vec{h}_2)} \left(\frac{\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2}{|\vec{h}_2|} + \frac{|\vec{h}_1|^2 - \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2}{|\vec{h}_2 - \vec{h}_1|} \right). \quad (\text{A.10})$$

Somit kann die magnetische Flussdichte, die ein Stromfaden an einem beliebigen Ort erzeugt, mit dem Ausdruck (A.10) und den Hilfsvektoren aus (A.3) bestimmt werden.

Einige Voraussetzung hierfür ist, dass der Stromfaden eine endliche Länge aufweist und die Vektoren \vec{h}_1 und \vec{h}_2 nicht parallel zueinander liegen⁷. Soll nun die magnetische Flussdichte einer beliebig geformten Leiterschleife bestimmt werden, muss diese zunächst durch einen Polygonzug geeignet approximiert werden. Abbildung A.11 zeigt ein Beispiel für die Annäherung einer Leiterschleife durch einen Polygonzug mit n Elementen.

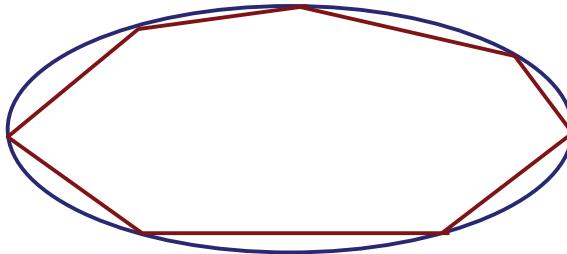


Abbildung A.11: Elliptische Leiterschleife (blau) und angenäherter Polygonzug (rot).

Die magnetische Flussdichte, die die Linienelemente am Ort \vec{r} erzeugen, kann durch die Summation der Flusskomponenten der einzelnen Linienelemente berechnet werden. Somit ergibt sich die Flussdichte der approximierten Spule näherungsweise zu

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^n \vec{B}_i(\vec{r}). \quad (\text{A.11})$$

Die Flussdichten $\vec{B}_i(\vec{r})$ der einzelnen Elemente können mit Gleichung (A.10) bestimmt werden. Hierbei kann die Genauigkeit der Näherung verbessert werden, indem die ursprüngliche Leiterschleife feiner zerlegt wird indem mehr Linienelemente zur Approximation genutzt werden.

Abschließend soll die Zerlegung an einer runden Leiterschleife erprobt werden. Aus Gleichung (4.19) ist die analytische Beschreibung bekannt. Hier soll nun die Flussdichte dieser Leiterschleife mit der Flussdichte eines Polygonzuges verglichen werden. Referenz hierbei ist eine kreisförmige Leiterschleife mit einem Radius von 10 cm. Die magnetische Flussdichte wird 5 cm über der Spulenebene ausgewertet.

Abbildung A.12 zeigt die magnetische Flussdichte entlang des Radius. Es zeigt sich, dass bereits mit einer Zerlegung der Kreisschleife in 25 Stromfäden eine sehr gute Übereinstimmung zu erzielen ist. Auf diese Weise kann die Gegeninduktivität zwischen beliebig geformten Anregungsspulen und den Sekundärspulen bestimmt werden⁸.

⁷In diesem Sonderfall ist nach Gleichung (A.7) $\vec{B}(\vec{r}) = 0$.

⁸Da vorausgesetzt wurde, dass die Sekundärspulen kreisförmig sind, kann die Integration der magnetischen Flussdichte sehr einfach erfolgen.

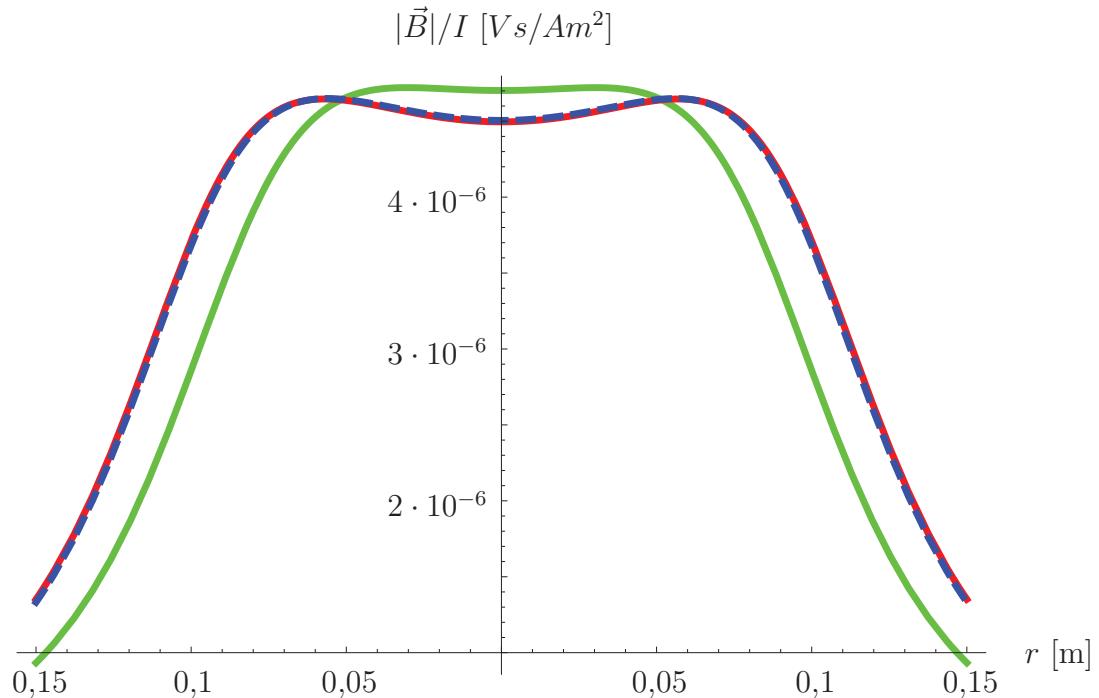


Abbildung A.12: Vergleich der magnetischen Flussdichte einer kreisförmigen Leiterschleife (rot) mit der Flussdichte eines Polygonzuges mit fünf (grün) beziehungsweise 25 Elementen (blau, gestreift).

A.3.1 Modellierung der Wirbelströme im Implantat

An dieser Stelle soll ein weiteres bisher vernachlässigtes Problem betrachtet werden. In Kapitel 4 wurde davon ausgegangen, dass die Wirbelstromdichte im Knochen vernachlässigt werden kann. In Kapitel 6 wurde gezeigt, dass diese Annahme gerechtfertigt ist. Allerdings wurde hierbei nur der Knochen betrachtet. Aufgrund der hohen Leitfähigkeit des Titanmaterials der Prothese ist die induzierte Wirbelstromdichte hier wesentlich höher. Dies wiederum führt zu einer Abschwächung des primären Magnetfeldes und somit zu geringeren induzierten Spannungen. Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung dieses Effekts im hybriden Feldberechnungsansatz basiert auf dem Hinzufügen weiterer Erregungsspulen. Hierzu werden einige zusätzliche Windungen so platziert, dass sie den Effekt der Wirbelströme im Implantat nachbilden.

Abbildung A.13 zeigt das Implantat und eine blau dargestellte Kurve auf der Implantatoberfläche entlang der die magnetische Flussdichte ausgewertet wurde (die Details zur Simulation können dem Abschnitt 6.3 entnommen werden). Die zusätzlichen Spulen werden durch drei weitere Leiterschleifen im gedachten Volumen des Implantates gebildet. Der im Querschnitt des Implantates fließende Wirbelstrom wurde numerisch bestimmt und dann durch ein Optimierungsverfahren geeignet auf die drei zusätzlichen Windungen verteilt. Ziel hierbei war, die Position und den Strom der zusätzlichen Leiterschleifen so zu optimieren, dass die vektorielle Abweichung von der aufgenommenen Flussdichte entlang der Messkurve möglichst gering ist. Neben-



Abbildung A.13: Implantat mit Evaluationskurve auf der Oberfläche.

bedingung hierbei war, dass sich alle zusätzlichen Windungen innerhalb des Implantatvolumens befinden und der Gesamtstrom in den zusätzlichen Leiterschleifen dem induzierten Wirbelstrom im Implantat entspricht.

Abbildung A.14 zeigt die magnetische Flussdichte, welche von der originalen einzelnen Primärspule erzeugt wird (blau), die magnetische Flussdichte, die aus der Simulation aus Abschnitt 6.3 bestimmt wurde sowie die Flussdichte, die sich aus der Überlagerung des Feldes der ursprünglichen Spule mit den zusätzlichen Windungen ergibt. Es zeigt sich, dass der Implantatkörper sehr gut durch einige geeignet positionierte Leiterschleifen substituiert werden kann. Das Bestimmen der Position der zusätzlichen Leiterschleifen sowie die nötige Stromstärke stellt ein weiteres Optimierungsproblem dar, auf das jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll, da die Optimierung mit einem der vorgestellten eindimensionalen Optimierungsverfahren ohne größeren Aufwand gelingt. Somit kann auch der Einfluss der Wirbelströme im Implantat in den vorgestellten hybriden Ansatz eingebracht werden, ohne dass der Berechnungsaufwand nennenswert zunimmt.

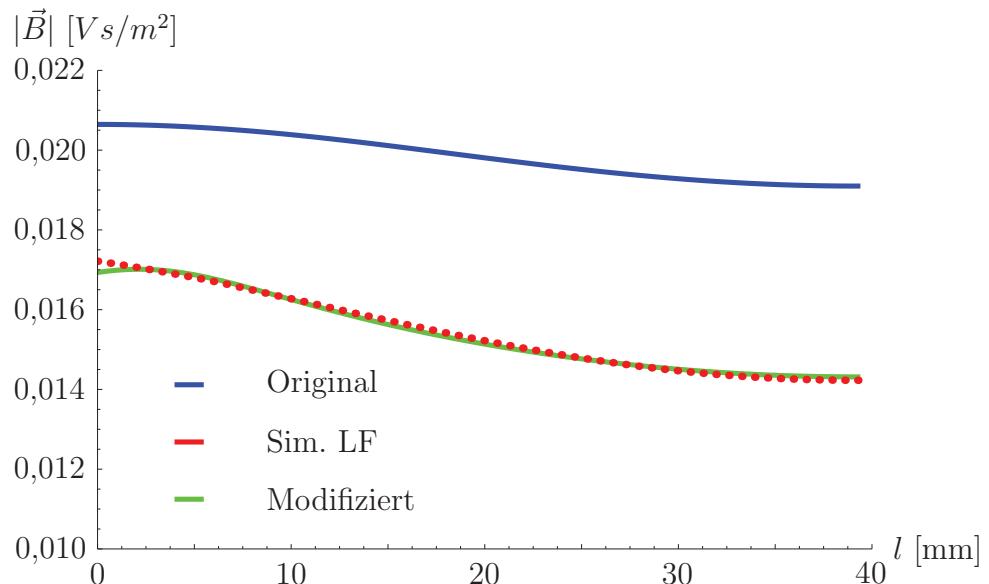


Abbildung A.14: Magnetische Flussdichte entlang der Kurve aus Abbildung A.13 der originalen kreisförmigen Spule (Original), aus der niederfrequenten Wirbelstromsimulation (Sim. LF) sowie mit zusätzlichen Leiterschleifen (Modifiziert).

A.4 Ablaufdiagramm

Abschließend soll die gesamte Optimierungsprozedur in Form eines Ablaufdiagramms zusammengefasst werden.

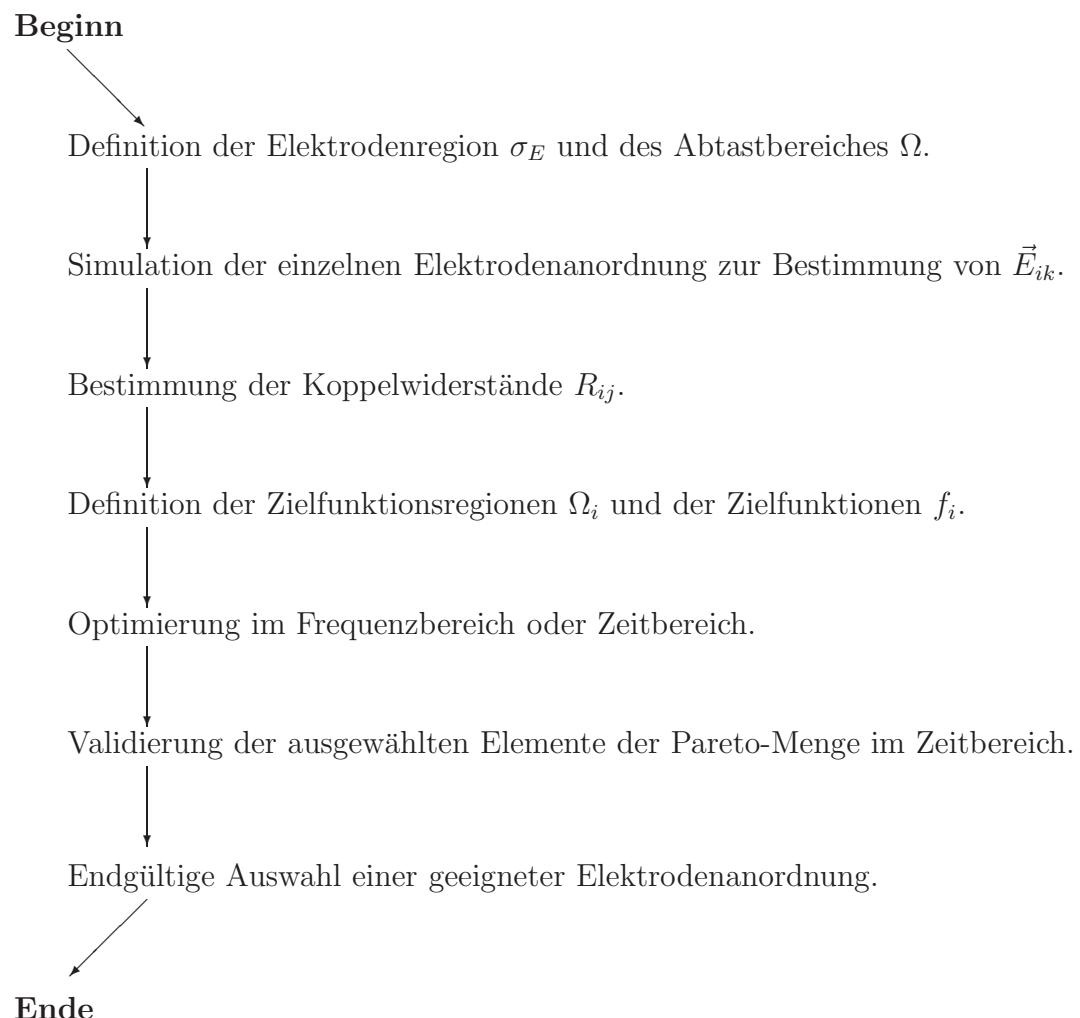


Abbildung A.15: Einzelne Schritte zur Optimierung eines elektrostimulativen Hüftgelenkimplantats.

Literaturverzeichnis

[AB93] C. ANDREW und L. BASSETT. *Beneficial Effects of Electromagnetic Fields*. Journal of Cellular Biochemistry, Bd. 51:(1993) S. 387–393.

[ACS04] R. AARON, D. CIOMBOR und B. SIMON. *Treatment of nonunions with electric and electromagnetic fields*. Clinical Orthopaedics and Related Research, (419):(2004) S. 21–29.

[BL96] T. BLICKLE und L. THIELE. *A Comparison of Selection Schemes used in Evolutionary Algorithms*. Evolutionary Computation, Bd. 4(4):(1996) S. 361–394.

[Bri81] A. BRINDLE. *Genetic algorithms for function optimization*. Doktorarbeit, University of Alberta, Department of Computer Science, 1981.

[BSMM01] I. BRONSTEIN, K. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.

[BWS01] C. T. BRIGHTON et al. *Signal transduction in electrically stimulated bone cells*. J Bone Joint Surg Am, Bd. 83(10):(2001) S. 1514–1523.

[Cha13] D. L. CHAPMAN. *A contribution to the theory of electrocapillarity*. Philosophical Magazine, Bd. 25:(1913) S. 475–481.

[Coe98] C. A. C. COELLO. *A Comprehensive Survey of Evolutionary-Based Multiobjective Optimization Techniques*. Knowledge and Information Systems, Bd. 1:(1998) S. 269–308.

[Cou43] R. COURANT. *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations*. Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. 49(1):(1943) S. 1–23.

[CP98] E. CANTÚ-PAZ. *A Survey of Parallel Genetic Algorithms*, 1998.

[CST] CST AG. *CST Studio Suite 2009®*. Bad Nauheimer Str. 19, 64289 Darmstadt, Deutschland.

[CW02] M. CLEMENS und T. WEILAND. *Magnetic Field Simulation Using Conformal FIT Formulations*. IEEE Transactions On Magnetics, Bd. 38(2):(2002) S. 389 – 392.

[DCB89] J. D'ANTONIO et al. *Classification and management of acetabular abnormalities in total hip arthroplasty*. Clin Orthop Relat Res, Bd. 243:(1989) S. 126–137.

[DD97] I. DAS und J. E. DENNIS. *A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, Bd. 14(1):(1997) S. 63–69.

[DPAM02] K. DEB, A. PRATAP, S. AGARWAL und T. MEYARIVAN. *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Bd. 6:(2002) S. 182–197.

[DSSI02] P. DINIZ, K. SHOMURA, K. SOEJIMA und G. ITO. *Effects of Pulsed Electromagnetic Field (PEMF) Stimulation on Bone Tissue Like Formation Are Dependent on the Maturation Stages of the Osteoblasts*. Bioelectromagnetics, Bd. 23:(2002) S. 398–405.

[EKB08] H. EWALD et al. *Untersuchungen der elektrischen und dielektrischen Eigenschaften von Hüftknochen für den Einsatz elektro-stimulierender Implantate*. 5th Symposium on Automatic Control, Bd. 22:(2008) S. 1847–1850.

[FF93] C. M. FONSECA und P. J. FLEMING. *Genetic Algorithms for Multi-objective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization*. In: *Proceedings of the Fifth International Conference*, S. 416 – 423. 1993.

[FF95] C. M. FONSECA und P. J. FLEMING. *An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization*. Evolutionary Computation, Bd. 3:(1995) S. 1–16.

[GDH92] D. E. GOLDBERG, K. DEB und J. HORN. *Massive Multimodality, Deception, and Genetic Algorithms*. In: *Parallel Problem Solving from Nature*. 1992.

[GGC96] C. GABRIEL, S. GABRIEL und E. CORTHOUT. *The dielectric properties of biological tissues: I. Literature survey*. Phys. Med. Biol., Bd. 41:(1996) S. 2231–2249.

[GKR94] V. GRANVILLE, M. KRIVANEK und J. RASSON. *Simulated Annealing: A Proof of Convergence*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Bd. 16:(1994) S. 652–656.

[GLG96a] S. GABRIEL, R. W. LAU und C. GABRIEL. *The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz*. Phys. Med. Biol., Bd. 41:(1996) S. 2251–2269.

[GLG96b] S. GABRIEL, R. W. LAU und C. GABRIEL. *The dielectric properties of biological tissues: III. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues.* Phys. Med. Biol., Bd. 41:(1996) S. 2271–2293.

[GMK02] R. GÄMPERLE, S. D. MÜLLER und P. KOUMOUTSAKOS. *A Parameter Study for Differential Evolution.* In: *WSEAS Int. Conf. on Advances in Intelligent Systems, Fuzzy Systems, Evolutionary Computation*, S. 293–298. 2002.

[Gou10] M. G. GOUY. *Sur la constitution de la charge électrique a la surface d'un electrolyte.* J. Phys. Radium, Bd. 9(1):(1910) S. 457–468.

[GPBv09] E. GONGADZE, S. PETERSEN, U. BECK und U. VAN RIENEN. *Classical Models of the Interface between an Electrode and an Electrolyte.* Proceedings Comsol Conference 2009.

[Gra00] H. GRAY. *Anatomy of the Human Body.* Bartleby.com, New York, 20. Aufl., 2000.

[Hel79] H. HELMHOLTZ. *Studien über electrische [sic] Grenzschichten.* Annalen der Physik, Bd. 243(7):(1879) S. 337–382.

[HNG94] J. HORN, N. NAFPLIOTIS und D. E. GOLDBERG. *A Niched Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization.* In: *In Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence.* 1994.

[HV05] C. H. HAMANN und W. VIELSTICH. *Elektrochemie.* Wiley-VCH, Weinheim, 4. Aufl., 2005.

[JW06] J. D. JACKSON und C. WITTE. *Klassische Elektrodynamik.* De Gruyter, Berlin, 4. Aufl., 2006.

[KCV83] S. KIRKPATRICK, C. D. GELATT JR und M. P. VECCHI. *Optimization by Simulated Annealing.* Science, Bd. 220(4598):(1983) S. 671–680.

[KFP84] J. D. KOSTERICH, K. R. FOSTER und S. R. POLLACK. *Dielectric Properties of Fluid-Saturated Bone- The Effect of Variation in Conductivity of Immersion Fluid.* IEEE Transactions On Biomedical Engineering, Bd. 31(4):(1984) S. 369–374.

[Kir84] S. KIRKPATRICK. *Optimization by simulated annealing: Quantitative studies.* Journal of Statistical Physics, Bd. 34(5-6):(1984) S. 975–986.

[KLN03] A. KIRBS et al. *Methods for the physical and chemical characterisation of surfaces of titanium implants.* Materials Science and Engineering, Bd. 23(3):(2003) S. 425–429.

Literaturverzeichnis

[KLP75] H. T. KUNG, F. LUCCIO und F. P. PREPARATA. *On Finding the Maxima of a Set of Vectors*. Journal of Association for Computing Machinery, Bd. 4:(1975) S. 469–476.

[Klü08] D. KLÜSS. *Biomechanische Untersuchungen zur Steigerung der primären Verankerung zementfrei implantierbarer Revisionshüftpfannen*. Doktorarbeit, Universität Rostock, 2008.

[KMR04] K. KÜPFMÜLLER, W. MATHIS und A. REIBIGER. *Theoretische Elektrotechnik*. Springer, 16. Aufl., 2004.

[Kra84] W. KRAUS. *Magnetfeldtherapie und magnetisch induzierte Elektrostimulation in der Orthopädie*. Orthopäde, Bd. 13:(1984) S. 78–92.

[KSB08] D. KLUESS et al. *A New Concept of an Electrostimulative Acetabular Revision System with Patient Individual Additional Fixation*. IFMBE Proceedings, (22):(2008) S. 1847–1850.

[KSS09] I. KIM et al. *Novel effect of biphasic electric current on in vitro osteogenesis and cytokine production in human mesenchymal stromal cells*. Tissue Eng Part A, Bd. 15(9):(2009) S. 2411–2422.

[Loc93] F. LOCHER. *Numerische Mathematik für Informatiker*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 1993.

[LZT00] M. LAUMANNS, E. ZITZLER und L. THIELE. *A Unified Model for Multi-Objective Evolutionary Algorithms with Elitism*. In: *In Congress on Evolutionary Computation (CEC 2000)*, S. 46–53. IEEE Press, 2000.

[Mac87] J. R. MACDONALD. *Impedance spectroscopy – emphasizing solid materials and systems*. Wiley-Interscience, New York, 1987.

[MAT10] MATWEB, 2010. URL www.matweb.com.

[Max65] J. C. MAXWELL. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Phil. Trans. R. Soc. Lond, Bd. 155:(1865) S. 459–512.

[NGS10] NGSPICE. 2010. URL <http://ngspice.sourceforge.net/>.

[NM65] J. A. NELDER und R. MEAD. *A simplex method for function minimization*. The Computer Journal, Bd. 7(4):(1965) S. 308–313.

[PGS08] C. POTRATZ et al. *Periprosthetic Fields and Currents of an Electrostimulative Acetabular Revision System*. IFMBE Proceedings, Bd. 22:(2008) S. 1808–1811.

[Phi00] E. PHILIPPOW. *Grundlagen der Elektrotechnik*. Verlag Technik, Berlin, 10. Aufl., 2000.

[Pot08] C. POTRATZ. *Elektromagnetische Feldsimulation an Hüftgelenksimplantaten mit externem magnetischen Stimulationsfeld*. Diplomarbeit, Universität Rostock, 2008.

[Pri09] PRIVATE KOMMUNIKATION R. BADER, 2009.

[Pri10] PRIVATE KOMMUNIKATION H.-W. GLOCK, 2010.

[PTVF07] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANNERY. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Aufl., 2007.

[Pur03] R. C. PURSHOUSE. *On the Evolutionary Optimisation of Many Objectives*. Doktorarbeit, Department of Automatic Control and Systems Engineering, The University of Sheffield, 2003.

[RM02] A. RICHARDOT und E. MCADAMIS. *Harmonic analysis of low-frequency bioelectrode behavior*. IEEE Transactions on Medical Imaging, Bd. 21(6):(2002) S. 604–612.

[SAU02] P. R. SUPRONOWICZ et al. *Novel current-conducting composite substrates for exposing osteoblasts to alternating current stimulation*. J Biomed Mater Res, Bd. 59(3):(2002) S. 499–506.

[SD94] N. SRINIVAS und K. DEB. *Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms*. Evolutionary Computation, Bd. 2:(1994) S. 221–248.

[Sim93] K. SIMONY. *Theoretische Elektrotechnik*. Barth Verlagsgesellschaft mbH, Berlin, 10. Aufl., 1993.

[SKC09] T. STEINMETZ, S. KURZ und M. CLEMENS. *Domains of Validity of Quasistatic and Quasistationary Field Approximations*. Proceedings ISET 2009 XV International Symposium on Theoretical Engineering, Bd. 217.

[SLH07] J. SIERPOWSKA et al. *Effect of human trabecular bone composition on its electrical properties*. Medical Engineering & Physics, Bd. 29:(2007) S. 845–852.

[SP95] R. STORN und K. PRICE. *Differential Evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*. Techn. Ber., International Computer Science Institute, Berkeley, 1995.

[Ste24] O. STERN. *Zur Theorie der elektrolytischen Doppelschicht*. Elektrochemie, Bd. 30:(1924) S. 508–516.

[SW89] S. SAHA und P. A. WILLIAMS. *Electric and dielectric properties of wet human cancellous bone as a function of frequency*. Annals of Biomedical Engineering, Bd. 17(2):(1989) S. 143–158.

Literaturverzeichnis

[TS02] U. TIETZE und C. SCHENK. *Halbleiter - Schaltungstechnik*, Bd. 12. Springer-Verlag GmbH, Berlin, 2002.

[van01] U. VAN RIENEN. *Numerical Methods in Computational Electrodynamics: Linear Systems in Practical Applications*. Springer, Berlin, 2001.

[vL00] D. A. VAN VELDHUIZEN und G. B. LAMONT. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: Analyzing the State-of-the-Art*. Evolutionary Computation, Bd. 8(2):(2000) S. 125–147.

[Wei77] T. WEILAND. *Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis*. Archiv für Elektrotechnik und Übertragungstechnik, Bd. 31(3):(1977) S. 116–120.

[Wei08] T. WEISE. *Global Optimization Algorithms - Theory and Application*. Online als e-book: <http://www.it-weise.de/projects/book.pdf>, 2008.

[Wet83] A. WETZEL. *Evaluation of the Effectiveness of Genetic Algorithms in Combinatorial Optimization*. Doktorarbeit, University of Pittsburgh, 1983.

[Whi94] D. WHITLEY. *A genetic algorithm tutorial*. Statistics and Computing, Bd. 4:(1994) S. 65–85.

[Wol10] WOLFRAM RESEARCH. *Parallel Computing Tools User Guide*. <http://reference.wolfram.com/mathematica/ParallelTools/tutorial/Overview.html>, 02.03.2010.

[YD74] L. A. YARBRO und S. N. DEMIN. *Selection and Preprocessing of Factors for Simplex Optimization*. Analytica Chimica Acta, Bd. 73(2):(1974) S. 391–398.

[ZDT00] E. ZITZLER, K. DEB und L. THIELE. *Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results*. Evolutionary Computation, Bd. 8:(2000) S. 173–195.

[ZT99] E. ZITZLER und L. THIELE. *Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach*. IEEE Transactions On Evolutionary Computation, Bd. 3(4).

Danksagung

Auf dieser nun letzten Seite möchte ich mich bei allen bedanken, die mich auf meinem Weg begleitet und mir so das Schreiben dieser Arbeit ermöglicht haben.

- Prof. Dr. Ursula van Rienen für die Betreuung der Arbeit sowie die Möglichkeit in ihrer Arbeitsgruppe zu forschen.
- Prof. Dr. Herbert De Gersem und Prof. Dr. Olaf Dössel für die Übernahme der Gutachten.
- Meinen Kollegen am Lehrstuhl für theoretische Elektrotechnik der Universität Rostock für ungezählte Diskussionen, viele schöne Momente und ihre Unterstützung.
- Insbesondere Dr. Hans-Walter Glock für die zahllosen kritischen Diskussionen, Ratschläge sowie das Korrekturlesen.
- Den Mitarbeitern des Forschungslabors für Biomechanik und Implantattechnologie der Universität Rostock sowie des Lehrstuhls für Technische Elektronik und Sensorik der Universität Rostock für die gute Zusammenarbeit.
- Dipl.-Ing. Regina Lange von der Forschungsgruppe Grenzfläche für das Bereitstellen der Messergebnisse.
- Frau Susanne Gürker für das Korrekturlesen der Arbeit.
- Meiner Freundin Veronika Salzburger für ihre Geduld und Unterstützung.
- Der DFG für die finanzielle Förderung des Forschungsvorhabens (RI 814/17-1).
- Allen anderen, die hier nicht explizit genannt sind.

Zu guter Letzt möchte ich mich insbesondere bei meinen Eltern für ihre Unterstützung bedanken. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht entstanden.