

Geometrische Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Rostock

vorgelegt von

Steve Kalke, geb. am 01.09.1984 in Rostock

aus Rostock

Rostock, 16.05.2013

Gutachter:

1. Prof.-Dr. Wolf-Dieter Richter
Institut für Mathematik, Universität Rostock
2. Prof.-Dr. Zoltán Sasvári
Institut für Mathematische Stochastik, Technische Universität Dresden
3. Prof.-Dr. Ilya Molchanov
Institut für mathematische Statistik und Versicherungslehre, Universität Bern

Datum der Einreichung: 16. Mai 2013

Datum der Verteidigung: 04. November 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	b
Notationen	e
1 Grundlagen	1
1.1 Sphärische Verteilungen	1
1.2 $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen	3
1.3 $l_{n,p}$ -verallgemeinerte Kugelkoordinaten	7
1.4 Charakteristische Funktionen	10
1.5 α -symmetrische und adjungierte Verteilungen	17
1.6 Unbegrenzt teilbare und stabile Verteilungen	21
2 Eine geometrische Darstellung $l_{n,p}$-symmetrischer charakteristischer Funktionen	27
2.1 Vorbetrachtungen	27
2.2 Schoenbergs Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen	27
2.3 Ng und Tians Darstellung $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen	29
2.4 Eine p -Verallgemeinerung der Theoreme von Schoenberg und Ng/Tian	31
2.5 Eine Anwendung der geometrischen Darstellung	35
3 Die charakteristische Funktion der p-verallg. Gleichverteilung	40
3.1 Vorbetrachtungen	40
3.2 Integraldarstellungen und Folgerungen für eine Verallg. von Poissons Integral	41
3.3 Reihendarstellungen und Folgerungen für eine verallg. hypergeometrische Funktion	46
3.4 Nullstellenanalyse und Verallg. der Theoreme von v. Lommel und Moore	49
4 Die charakteristische Funktion der p-verallg. Normalverteilung	55
4.1 Vorbetrachtungen	55
4.2 Integraldarstellungen	57
4.3 Reihendarstellungen und eine Erweiterung des Theorems von Pogány und Nadarajah	60
4.4 Teilbarkeits- und Stabilitätsuntersuchung	64
5 Charakteristische Generatoren $l_{n,p}$-symmetrischer Verteilungen	67
5.1 Vorbetrachtungen	67
5.2 Ein Vergleich mit α -symm. und α -stabilen charakteristischen Niveaumengen	68
5.3 Ein globaler Ansatz mit streng monotonen charakteristischen Generatoren	72
5.4 Lokale Betrachtungen	82
6 Neue Charakterisierungen α-symmetrischer Verteilungen	87
6.1 Vorbetrachtungen	87
6.2 Eine stochastische Darstellung stabiler α -symmetrischer Verteilungen	89
6.3 Ein α -Analogon der stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen	93
6.4 Beispiele adjungierter α -symmetrischer und $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen	95
Anhang A: Zusammenfassung und Ausblick	100
Anhang B: Beweise	103
Anhang C: Abbildungen	136

Einleitung

Die in dieser Arbeit im Fokus stehenden charakteristischen Funktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen besitzen eine herausragende Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik. Ihr Einsatz wird in diesem Zusammenhang in (Sirjaev, 1988) als eines der grundlegenden Hilfsmittel des analytischen Apparates der Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet. Als klassische Anwendungsgebiete der hiermit verbundenen „Methode der charakteristischen Funktionen“ sind u.a. die Herleitung von Grenzwertsätzen sowie die Verteilungsbestimmung von Summen unabhängiger Zufallsgrößen zu nennen. So wurde z.B. durch die Betrachtung charakteristischer Funktionen in (Liapunoff, 1902) der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie hergeleitet, welcher unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die stochastische Konvergenz einer Summe von unabhängigen Zufallsgrößen gegen eine normalverteilte Zufallsgröße beschreibt. Die Untersuchung der charakteristischen Funktion einer Summe von unabhängigen Zufallsgrößen erweist sich hierbei als überaus vorteilhaft gegenüber einer direkten Analyse der entsprechenden Verteilungsfunktion und wurde auch in späteren Arbeiten zur effektiven Herleitung einer Vielzahl von Grenzwertsätzen verwendet, vgl. mit (Gnedenko u. Kolmogorov, 1954).

Neben der herausragenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Bedeutung sind charakteristische Funktionen auch durch eine große Relevanz für statistische Verfahren gekennzeichnet. Als Beispiel sei hier die in (Press, 1972) thematisierte Parameterschätzung für univariate und multivariate stabile Verteilungen genannt, bei der die bekannte Struktur stabiler charakteristischer Funktionen für die Konstruktion entsprechender Schätzer ausgenutzt wird, vgl. auch mit Abschnitt 1.6. Statistische Anwendungsmöglichkeiten charakteristischer Funktionen beschränken sich zudem nicht nur auf Verfahren im Zusammenhang mit stabilen Verteilungen. Die Ausführungen in (Ushakov, 1999) verdeutlichen unter diesem Gesichtspunkt, dass eine Vielzahl von statistischen Methoden wie z.B. Anpassungs- und Unabhängigkeitstests auf charakteristischen Funktionen und der Tatsache basieren, dass sich fundamentale Verteilungseigenschaften wie die Symmetrie, die Unimodalität, die Existenz und Gestalt der Momente sowie die Unabhängigkeit der Randverteilungen in diesen Funktionen widerspiegeln, vgl. hierzu auch mit den Abschnitten 1.4 und 3.4 für weitere Eigenschaften und statistische Anwendungsmöglichkeiten charakteristischer Funktionen.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf den geometrischen Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen. Es handelt sich dabei um eine Familie von multivariaten charakteristischen Funktionen, welche der in (Osiewalski u. Steel, 1993) erstmals eingeführten Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen zuzuordnen ist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in Analogie zur Anwendung charakteristischer Funktionen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und in der mathematischen Statistik auch der Bereich der geometrischen Beschreibung dieser Funktionen zum einen eine lange Tradition besitzt und zum anderen Gegenstand aktueller Forschung ist, geht doch bereits aus (Schoenberg, 1938) u.a. hervor, dass sich die Niveaumengen sphärischer charakteristischer Funktionen als Niveaumengen des euklidischen Radius interpretieren lassen, vgl. mit den Abschnitten 1.1 und 2.2. In (Cambanis, Keener et al., 1983) wurde mit den α -symmetrischen Verteilungen ferner eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen eingeführt, deren zugehörige charakteristische Funktionen als Komposition eines verallgemeinerten Radius und eines skalaren charakteristischen Generators darstellbar sind, vgl. mit Abschnitt 1.5. Darüber hinaus ist die geometrische Struktur charakteristischer Funktionen auch im Fokus der Betrachtungen in (Molchanov, 2009): Hier wird die Erzeugung multivariater symmetrisch stabiler charakteristischer Funktionen durch skalare charakteristische Generatoren und positiv homogene Funktionale verdeutlicht, welche als Minkowskifunktionale symmetrischer Sternkörper aufgefasst werden können, vgl. mit Abschnitt 1.6.

Für die in dieser Arbeit betrachteten charakteristischen Funktionen $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen sind im Falle $p \notin \{1, 2\}$ keine geometrischen Strukturaussagen in der Literatur zu finden. Die Geometrie der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen wurde aber in anderer Hinsicht bereits vielfach thematisiert. So ist die genannte Verteilungsfamilie z.B. in (Gupta u. Song, 1997b) als die Familie aller Skalenmischungen einer Basisverteilung $\omega_{n,p}$ definiert worden, welche aus formalen Gründen als gleichverteilt auf den Borelmengen $\mathfrak{B}_{n,p}$ der p -verallgemeinerten Sphäre $S_{n,p} := \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : |x_1|^p + \dots + |x_n|^p = 1\}$ bezeichnet wurde, obwohl sich $\omega_{n,p}$ für $p \notin \{1, 2\}$ im Gegensatz zur wohlbekannten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$ nicht mithilfe des euklidischen Oberflächeninhaltsmaßes \mathfrak{D}_n darstellen lässt. Im Hinblick auf (Richter, 2009) erscheint es vielmehr gerechtfertigt zu sein, die betrachtete Basisverteilung nicht als Gleichverteilung, sondern als p -verallgemeinerte Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ zu bezeichnen. Dies wird durch eine geometrische Eigenschaft von $\omega_{n,p}$ bzgl. eines verallgemeinerten Oberflächeninhaltes $\mathfrak{D}_{n,p}$

deutlich. Ein beliebiger $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektor X besitzt in diesem Kontext eine stochastische Darstellung

$$X \stackrel{d}{=} RU_p, \quad (0.1)$$

wobei R eine P -f.s. nichtnegative Zufallsgröße und U_p ein von R unabhängiger Zufallsvektor ist, dessen Verteilung $\omega_{n,p}$ dargestellt werden kann als

$$P(U_p \in D) = \frac{\mathfrak{D}_{n,p}(D)}{\mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p})}, \quad D \in \mathfrak{B}_{n,p}, \quad (0.2)$$

vgl. hierzu auch mit Abschnitt 1.2 für eine ausführliche Diskussion von $\omega_{n,p}$. Die auf (0.1) basierende und ebenfalls in (Richter, 2009) präsentierte geometrische Maßdarstellung absolutstetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen spiegelt die Geometrie des Basisvektors U_p wider und bewirkt für bestimmte Mengen überdies eine Vereinfachung der zugehörigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsintegrale, wodurch sich u.a. in (Arellano-Valle u. Richter, 2012), (Günzel, Richter et al., 2012), (Kalke u. Richter, 2013) und (Kalke, Richter et al., 2013) bereits wahrscheinlichkeitstheoretische bzw. statistische Anwendungen aus der mit (0.1) verbundenen Geometrie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen ergeben haben. Die $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen sind in geometrischer Hinsicht aber nicht nur für die verallgemeinerte Gleichverteilung des Basisvektors bzgl. einer i. Allg. nichteuklidischen Geometrie sondern vor allem auch für die geometrisch geprägte Struktur der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten bekannt. Eine derartige Dichte ist stets als Komposition eines verallgemeinerten Radius $|\cdot|_p$ und einer dichtegenerierenden skalaren Funktion darstellbar, wobei

$$|x|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

vgl. mit (Gupta u. Song, 1997b) und mit Abschnitt 1.3 für eine Interpretation von $|\cdot|_p$ als verallgemeinerter Radius. Die Niveaumengen $l_{n,p}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten lassen sich somit in geometrischer Weise als die Niveaumengen eines verallgemeinerten Radius deuten. Als Beispiel sei hier die bereits in (Subbotin, 1923) eingeführte p -verallgemeinerte Normalverteilung genannt, deren Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{n,p}$ dargestellt werden kann als

$$f_{n,p}(x) = \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \exp\left(-\frac{|x|_p^p}{p}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (0.3)$$

Aufgrund des (die Form der Dichteniveaumengen beeinflussenden) zusätzlichen Parameters $p > 0$ besitzt die p -verallgemeinerte Normalverteilung mit (0.3) eine deutlich größere Flexibilität als die Standardnormalverteilung bei der Anpassung an reale Daten. Die Flexibilität der Familie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen ergibt sich aber auch daraus, dass neben der Form der Dichteniveaumengen (vgl. mit Abbildung 1) auch die Schwere der Verteilungsenden durch die Wahl der erzeugenden Zufallsgröße R in (0.1) variabel modellierbar ist. Die hieraus resultierende Attraktivität $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen spiegelt sich in zahlreichen Anwendungen dieser Verteilungen in den verschiedensten Bereichen der modernen Wissenschaft wider. Die Autoren in (Nardon u. Pianca, 2009) und (Pogány u. Nadarajah, 2010) nennen in diesem Zusammenhang u.a. die Bereiche Signalübermittlung, Medizin, Finanzwirtschaft, Telekommunikation, Informationssysteme, Physik, Kybernetik und Nanotechnologie.

Es wird in dieser Arbeit gezeigt werden, dass auch die charakteristischen Funktionen $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen geometrisch interpretierbare Strukturen besitzen. Hierzu erfolgt in Kapitel 1 die Bereitstellung notwendiger Grundlagen über charakteristische Funktionen, verallgemeinerte Kugelkoordinaten und die Familien sphärischer, $l_{n,p}$ -symmetrischer, α -symmetrischer sowie stabiler Verteilungen. Der Ausgangspunkt für die Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ist dann die in Kapitel 2 präsentierte geometrische Darstellung dieser Funktionen, welche eine direkte Folgerung von (0.1) ist und als p -Verallgemeinerung von Schoenbergs Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen bezeichnet werden kann. Die charakteristische Funktion eines beliebigen $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektors X ist unter diesem Aspekt darstellbar als

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \int_0^\infty \varphi_{n,p}(rt) dF(r), \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (0.4)$$

wobei $\varphi_{n,p}$ die charakteristische Funktion der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ ist und F die Verteilungsfunktion von $|X|_p$ bezeichnet, vgl. mit Theorem 2.5. In Kapitel 2 wird nicht nur dargelegt und erläutert, inwiefern (0.2) die (i. Allg. nichteuklidische) Geometrie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen widerspiegelt. Es erfolgt insbesondere auch die Demonstration der Verwendbarkeit von (0.2) für wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen, indem für diese Arbeit bedeutsame stochastische Darstellungen $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen in Abschnitt 2.5 erstmalig mithilfe der Methode der charakteristischen Funktionen bewiesen und interpretiert werden.

In den nachfolgenden Kapiteln 3 und 4 stehen ferner die Darstellung und die Herleitung analytischer Eigenschaften zweier wichtiger Vertreter $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen im Mittelpunkt des Interesses. Die dort vollzogenen Betrachtungen sind maßgeblich für die Berechnung sowie für statistische Anwendungsmöglichkeiten dieser Funktionen und stellen grundlegende Voraussetzungen für eine weiterführende geometrische Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen dar, welche in Kapitel 5 erfolgt und die geometrische Beschreibung der zugehörigen Niveaumengen beinhaltet. Aus den Ausführungen in Kapitel 5 wird hierbei deutlich, dass sich eine Vielzahl von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen analog zu den sphärischen bzw. α -symmetrischen charakteristischen Funktionen in eindeutiger Weise (global) als Komposition eines (als verallgemeinerter Radius) geometrisch interpretierbaren Funktional und eines skalaren charakteristischen Generators darstellen lassen. Die hiermit verbundene p -Verallgemeinerung sphärischer charakteristischer Generatoren basiert auf assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionalen, welche i. Allg. inhomogen sind und in vielen Fällen zumindest numerisch berechnet bzw. simuliert werden können. Darüber hinaus werden in Abschnitt 5.3 auch Spezialfälle $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen aufgeführt, für deren zugehörige charakteristische Funktionen die Existenz eines globalen charakteristischen Generators und eines global-assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktional ausgeschlossen werden kann. Es wird sich jedoch in Abschnitt 5.4 zeigen, dass auch derartige $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen mithilfe lokal definierter verallgemeinerter Radiusfunktional sowie lokal-charakteristischer Generatoren geometrisch beschrieben werden können.

Im abschließenden Kapitel 6 dieser Arbeit werden die in den Kapiteln 2-5 erzielten Resultate über $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen für die Herleitung neuartiger Charakterisierungen α -symmetrischer Verteilungen verwendet. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten der in diesem Kontext untersuchten Verteilungen sind unter bestimmten Voraussetzungen proportional zu $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 1.5. Im Hinblick auf die damit verbundene Verwandtschaft von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeigen die Betrachtungen in Kapitel 6, dass sich auch die Niveaumengen stetig positiv definiter α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten als die Niveaumengen assoziierter verallgemeinerter Radien (global bzw. lokal) in geometrischer Weise deuten lassen. Der beleuchtete Zusammenhang zwischen $l_{n,p}$ -symmetrischen und α -symmetrischen Verteilungen wird zudem für die Herleitung eines α -Analogons der stochastischen Darstellung sphärischer Verteilungen (siehe (0.1) im Falle $p = 2$) sowie für die Angabe bisher nicht veröffentlichter Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen ausgenutzt.

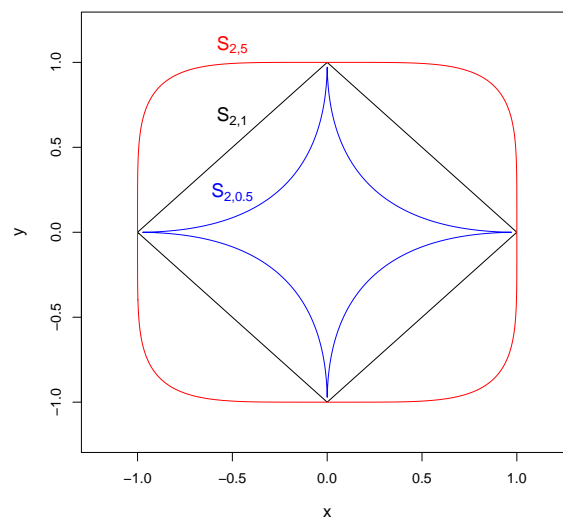


Abbildung 1: Der p -verallgemeinerte Einheitskreis $S_{2,p} := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_p = 1\}$ für $p \in \{1/2, 1, 5\}$.

Notationen

In dieser Arbeit werden die im Folgenden erläuterten Bezeichnungen und Symbole verwendet:

- Mit \mathbb{R} wird das reelle Intervall $(-\infty, \infty)$ bezeichnet. Für einen relationalen Operator $\Xi \in \{<, \leq, >, \geq, \neq\}$ und eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbb{R}_{\Xi a} := \{x \in \mathbb{R} : x \Xi a\}.$$

- Die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$ wird mit \mathbb{N} symbolisiert. Sei $\Xi \in \{<, \leq, >, \geq, \neq\}$. Dann ist

$$\mathbb{N}_{\Xi a} := \{x \in \mathbb{N} : x \Xi a\}.$$

- Mit \mathbb{C} wird die Menge der komplexen Zahlen $\{a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet. Für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ ist $\operatorname{Re}(a + bi) = a$, $\operatorname{Im}(a + bi) = b$, $\overline{a + bi} = a - bi$ und $B_\epsilon(a + bi) = \{x \in \mathbb{C} : |x - a - bi| \leq \epsilon\}$.

- Seien M_1 und M_2 beliebige nichtleere Mengen. Dann ist

$$M_1 \times M_2 := \{(m_1, m_2) : m_i \in M_i, i \in \{1, 2\}\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist $M_1^{\times n}$ definiert als $M_1^{\times n} := \{(m_1, \dots, m_n) : m_i \in M_1, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere Menge. Dann ist $A^n := \{a^T : a \in A^{\times n}\}$.
- Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ wird das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symbolisiert.
- Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Einheitsbasis von \mathbb{R}^n . Wir verwenden überdies die Symbole $1_n := \sum_{i=1}^n e_i$ und $0_n := 0 \cdot 1_n$.
- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $M \subset \mathbb{C}^n$. Dann wird M genau dann zusammenhängend genannt, wenn für je zwei Elemente $z_0 \in M$ und $z_1 \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ so existiert, dass $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$.
- Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wird als sternförmig mit Zentrum $a \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet, falls $M = \{a + \lambda \cdot (x - a) : \lambda \in (0, 1], x \in M\}$.
- Für $p \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist $|x|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$.
- Seien $p > 0$, $r \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann ist $S_{n,p} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_p = 1\}$, $S_{n,p}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_p = r\}$, $S_{n,p}^+ := S_{n,p} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ und $S_{n,p}^+(r) := S_{n,p}(r) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.
- Für $p > 0$, $r \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist $K_{n,p} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_p \leq 1\}$, $K_{n,p}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_p \leq r\}$, $K_{n,p}^+ := K_{n,p} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ und $K_{n,p}^+(r) := K_{n,p}(r) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.
- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann symbolisiert M° die Menge aller inneren Punkte von M . Hierbei ist $x \in M$ ein innerer Punkt von M , falls eine Konstante $r > 0$ so existiert, dass $\{x + y : y \in K_{n,2}(r)\} \subset M$.
- Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bezeichnet \mathfrak{B}_n die Borelsche σ -Algebra zur Grundmenge \mathbb{R}^n . Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathfrak{B}_n(M) := \{M \cap B : B \in \mathfrak{B}_n\}$, $\mathfrak{B}_{n,p} := \mathfrak{B}_n(S_{n,p})$ und $\mathfrak{B}_{n,p}^+ := \mathfrak{B}_n(S_{n,p}^+)$.
- Das Lebesgue-Borelmaß auf \mathfrak{B}_n wird im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit μ_n bezeichnet.
- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $L^1(M)$ die Menge aller μ_n -integrierbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- Für den euklidischen Oberflächeninhalt im \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wird das Symbol \mathfrak{D}_n verwendet.
- Als (n -variate) Zufallsvariablen werden in dieser Arbeit $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_n)$ -messbare Abbildungen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnet, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein nicht näher beschriebener Wahrscheinlichkeitsraum ist. Im Falle $n = 1$ wird X auch eine Zufallsgröße genannt, während $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_n)$ -messbare Abbildungen für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ auch Zufallsvektoren heißen. Für das in $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß $P^X = \mathfrak{L}(X)$ einer Zufallsvariablen X schreiben wir zudem $X \sim \mathfrak{L}(X)$.

- Zwei Zufallsvariablen X und Y sind identisch verteilt (kurz: $X \stackrel{d}{=} Y$), falls $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}(Y)$.
- Die Verteilung einer Zufallsvariablen X wird symmetrisch genannt, falls $-X \stackrel{d}{=} X$.
- Seien X eine Zufallsvariable und R eine von X unabhängige und P -f.s. nichtnegative Zufallsgröße. Dann wird $\mathfrak{L}(RX)$ als Skalenmischung von $\mathfrak{L}(X)$ bezeichnet.
- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Menge (mit Zentrum 0_n), wobei $0_n \in M^\circ$. Dann ist das Minkowskifunktional $|\cdot|_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Menge M definiert als

$$|x|_M := \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda \cdot M\} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

- Für $x \geq 0$ ist $\lceil x \rceil := \min(\mathbb{N}_{\geq x})$ und $\lfloor x \rfloor := \max(\mathbb{N}_{\leq x})$.
- Sei $\nu > -\frac{1}{2}$. Dann wird mit J_ν die Besselfunktion der ersten Art und Ordnung ν symbolisiert.
- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $M \subset \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$I_M(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in M , \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus M . \end{cases}$$

- Für $(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) := (a_1 \cdot e_1, \dots, a_n \cdot e_n)$. Wenn $|a_i| = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, dann wird $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ auch Signaturmatrix genannt.
- Sei $\phi \in [0, 2\pi)$. Dann ist

$$O(\phi) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} .$$

- Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ werden die n -variate Standardnormalverteilung mit $N_{n,2}$ und die hierzu gehörige stetige Wahrscheinlichkeitsdichte mit $f_{n,2}$ symbolisiert.
- Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann bezeichnet χ_n^2 die Chi-Quadratverteilung mit n Freiheitsgraden.
- Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist ω_n die Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$, wobei

$$\omega_n(A) = \frac{\mathfrak{V}_n(A)}{\mathfrak{V}_n(S_{n,2})} \quad , \quad A \in \mathfrak{B}_{n,2} .$$

- Die Gammaverteilung mit Parametern $a > 0$ und $b > 0$ wird mit $\text{Ga}(a, b)$ symbolisiert. Die hierzu gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte f ist darstellbar als

$$f(x) = I_{(0,\infty)}(x) \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

- Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\beta_1 > 0, \dots, \beta_{n+1} > 0$. Dann ist $D_n(\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$ die n -variate Dirichletverteilung mit Parametern $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ und der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = I_{K_{n,1}^{\circ}}(x) \frac{\Gamma(\beta_1 + \dots + \beta_{n+1})}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\beta_i)} (1 - |x|_1)^{\beta_{n+1}-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i-1} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

1 Grundlagen

1.1 Sphärische Verteilungen

In diesem Abschnitt wird die multivariate Familie sphärischer Verteilungen eingeführt, deren Vertreter als Verallgemeinerungen der multivariaten Standardnormalverteilung aufgefasst werden können. Zwar liegt der Fokus dieser Arbeit auf den $l_{n,p}$ -symmetrischen und den α -symmetrischen Verteilungen. Es erscheint jedoch aus zwei Gründen sinnvoll vor der Einführung dieser beiden Familien von multivariaten Verteilungen zunächst die sphärischen Verteilungen zu betrachten. Auf der einen Seite motiviert sich die Struktur der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen aus der Struktur der sphärischen Verteilungen, sodass dieser Abschnitt unter anderem einen vorbereitenden Charakter für die Einführung $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen besitzt. Auf der anderen Seite sind die sphärischen Verteilungen ein sehr wichtiger Spezialfall der $l_{n,p}$ -symmetrischen als auch der α -symmetrischen Verteilungen, sodass eine separate Einführung allein aufgrund ihrer Bedeutung innerhalb der Familien $l_{n,p}$ -symmetrischer und α -symmetrischer Verteilungen gerechtfertigt erscheint.

Die Ausführungen dieses Abschnittes basieren auf grundlegenden Arbeiten aus dem sehr umfangreichen Forschungsgebiet der sphärischen Verteilungen, zu denen u.a. die Artikel (Schoenberg, 1938), (Kelker, 1970), (Cambanis, Huang et al., 1981) und (Anderson u. Fang, 1990) sowie die Textbücher (Johnson, 1987), (Fang, Kotz et al., 1990) und (Fang u. Zhang, 1990) gehören. Bei der nun folgenden Definition sphärischer Verteilungen weichen wir jedoch methodisch von der Vorgehensweise in Standardwerken wie (Cambanis, Huang et al., 1981) oder (Fang, Kotz et al., 1990) ab. So wird die Familie der sphärischen Verteilungen in (Cambanis, Huang et al., 1981) mithilfe einer Strukturaussage der zugehörigen charakteristischen Funktionen (vgl. mit Theorem 1.4) eingeführt, während die Autoren in (Fang, Kotz et al., 1990) einen Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ sphärisch verteilt nennen, falls

$$OX \stackrel{d}{=} X$$

für eine beliebige orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In dieser Arbeit werden die sphärischen Verteilungen hingegen in Anlehnung an die Einführung l_1 -Norm symmetrischer Verteilungen in (Fang, Kotz et al., 1990) und an die Einführung $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen in (Richter, 2009) mithilfe einer stochastischen Darstellung definiert, welche auf der folgenden stochastischen Darstellung der Standardnormalverteilung beruht:

Theorem 1.1. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit $X \sim N_{n,2}$. Dann sind $X/|X|_2$ und $|X|_2$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X/|X|_2 \sim \omega_n$ und $|X|_2^2 \sim \chi_n^2$. Der Zufallsvektor X erfüllt daher die stochastische Darstellung*

$$X \stackrel{d}{=} RU, \tag{1.5}$$

wobei R^2 chiquadratverteilt ist, U der Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$ folgt und R und U stochastisch unabhängig sind.

Beweis. Folgt aus Theorem 2.3 und Beispiel 2.5 in (Fang, Kotz et al., 1990). □

Mit der stochastischen Darstellung (1.5) kann die multivariate Standardnormalverteilung als Skalenmischung der Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$ mit einer erzeugenden Variablen R verstanden werden, wobei R^2 chiquadratverteilt ist. Lässt man nun auf der rechten Seite von Gleichung (1.5) für die Verteilung der Zufallsgröße R auch alle anderen univariaten Verteilungen mit $P(R \geq 0) = 1$ zu, so erhält man eine die Standardnormalverteilung verallgemeinernde Familie von Skalenmischungen der Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$, welche als die Familie sphärischer Verteilungen bezeichnet wird.

Definition 1.2. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann heißt ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ sphärisch verteilt im \mathbb{R}^n , falls

$$X \stackrel{d}{=} RU, \tag{1.6}$$

wobei R eine P -f.s. nichtnegative Zufallsgröße ist, U der Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$ folgt und R und U stochastisch unabhängig sind.

Beispiel 1.3. Die Standardnormalverteilung $N_{n,2}$ und die Gleichverteilung ω_n sind für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sphärische Verteilungen im \mathbb{R}^n .

Mit Definition 1.2 verstehen wir die sphärischen Verteilungen als die Familie aller Skalenmischungen der Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,2}$. Die Einführung sphärischer Verteilungen erfolgt daher in dieser Arbeit anhand einer stochastischen Darstellung. Wie zu Beginn dieses Abschnittes angedeutet wurde, existieren jedoch auch andere, äquivalente Möglichkeiten für die Definition dieser Verteilungsfamilie, welche im nun folgenden Theorem aus (Fang, Kotz et al., 1990) festgehalten sind.

Theorem 1.4. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X besitzt eine sphärische Verteilung im \mathbb{R}^n ;
- (ii) Für eine beliebige orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $X \stackrel{d}{=} O X$;
- (iii) Es existiert eine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = h(|t|_2)$, $t \in \mathbb{R}^n$;
- (iv) Für einen beliebigen reellen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle a, X \rangle \stackrel{d}{=} |a|_2 X_1$.

Beweis. Siehe (Fang, Kotz et al., 1990). □

Die Familie aller Skalenmischungen von ω_n besteht nicht nur aus absolutstetigen Verteilungen. So besitzt eine sphärische Verteilung genau dann eine Wahrscheinlichkeitsdichte, wenn auch die zugehörige erzeugende Variable R absolutstetig verteilt ist (vgl. mit Theorem 2.9 aus (Fang, Kotz et al., 1990)). Ein Beispiel hierfür ist die in Abbildung 2 (a) grafisch veranschaulichte Standardnormalverteilung, deren Wahrscheinlichkeitsdichte als Hintereinanderausführung der euklidischen Norm und einer skalaren Funktion darstellbar ist. Wie das folgende Theorem belegt, besitzen alle absolutstetigen sphärischen Verteilungen eine derart zerlegbare Wahrscheinlichkeitsdichte, wobei die jeweilige skalare Funktion auch als Dichtegenerator bzw. als Vielfaches einer dichtegenerierenden Funktion bezeichnet wird.

Theorem 1.5. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit einer absolutstetigen sphärischen Verteilung. Dann existieren eine dichtegenerierende Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0 < \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}-1} g(r) dr < \infty$ und eine positive, reelle Konstante $C(n, g)$ so, dass durch

$$f(x) := C(n, g) g(|x|_2^2) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad (1.7)$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte von X gegeben ist.

Beweis. Siehe (Fang, Kotz et al., 1990). □

Aus Eigenschaft (iii) in Theorem 1.4 wird eine wichtige strukturelle Eigenschaft sphärischer charakteristischer Funktionen deutlich: der Wert von $\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle)$ hängt für alle $t \in \mathbb{R}^n$ nur von der euklidischen Norm von t ab, d.h. sphärische charakteristische Funktionen sind für $r > 0$ konstant auf $S_{n,2}(r)$. Dies gilt auch für die in Theorem 1.5 beschriebenen Wahrscheinlichkeitsdichten absolutstetiger sphärischer Verteilungen, vgl. mit Abbildung 2. Mit dem Eindeutigkeitssatz charakteristischer Funktionen ist daher jede sphärische Verteilung im \mathbb{R}^n durch ihren charakteristischen Generator $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Theorem 1.4 (iii) eindeutig bestimmt, während jede absolutstetige sphärische Verteilung im \mathbb{R}^n auch durch eine dichtegenerierende Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erzeugt wird. Die Niveaumengen der charakteristischen Funktionen (kurz: charakteristische Niveaumengen) als auch der Wahrscheinlichkeitsdichten (kurz: Dichteniveaumengen) absolutstetiger sphärischer Verteilungen lassen sich darüber hinaus als Niveaumengen der euklidischen Norm in geometrischer Weise interpretieren. So kann die euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ z.B. als dessen Radius beim Übergang von kartesischen Koordinaten zu n -dimensionalen Polarkoordinaten (siehe Abschnitt 2.7.1. in (Anderson, 2003) bzw. Definition 1.18) aufgefasst werden.

Die bereits an dieser Stelle angedeuteten geometrischen Strukturen sphärischer charakteristischer Funktionen werden in den Abschnitten 2.2 sowie 5.1 vertieft und in ausführlicher Weise beschrieben. Im Hinblick auf die Aussage in Theorem 1.4 (iii) ergibt sich ferner die interessante Frage, welche skalaren Funktionen $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ in Komposition mit der euklidischen Radiusfunktion sphärische charakteristische Funktionen erzeugen. Eine Antwort hierauf liefert ein Theorem aus (Askey, 1973), welches in Abschnitt 1.4 angegeben wird. Wir möchten aber schon in diesem Abschnitt festhalten, dass der charakteristische Generator eines sphärisch verteilten Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ auch die charakteristischen Funktionen der Randverteilungen von X erzeugt und insbesondere mit der Einschränkung der charakteristischen Funktion von X_1 auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ übereinstimmt. Ein sphärischer charakteristischer Generator wird somit an alle multivariaten Randverteilungen vererbt und ist zur Beschreibung des Oszillations- bzw. Abklingverhaltens der jeweiligen (sphärischen) charakteristischen Funktion geeignet, vgl. mit der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 1.6. Sei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ der charakteristische Generator eines sphärisch verteilten Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist h auch der charakteristische Generator einer sphärischen Verteilung im \mathbb{R}^k , falls $k \in \{2, \dots, n\}$. Darüber hinaus ist durch $\varphi(t) = h(|t|)$, $t \in \mathbb{R}$, die charakteristische Funktion von X_1 gegeben.

Beweis. Siehe (Fang, Kotz et al., 1990). □

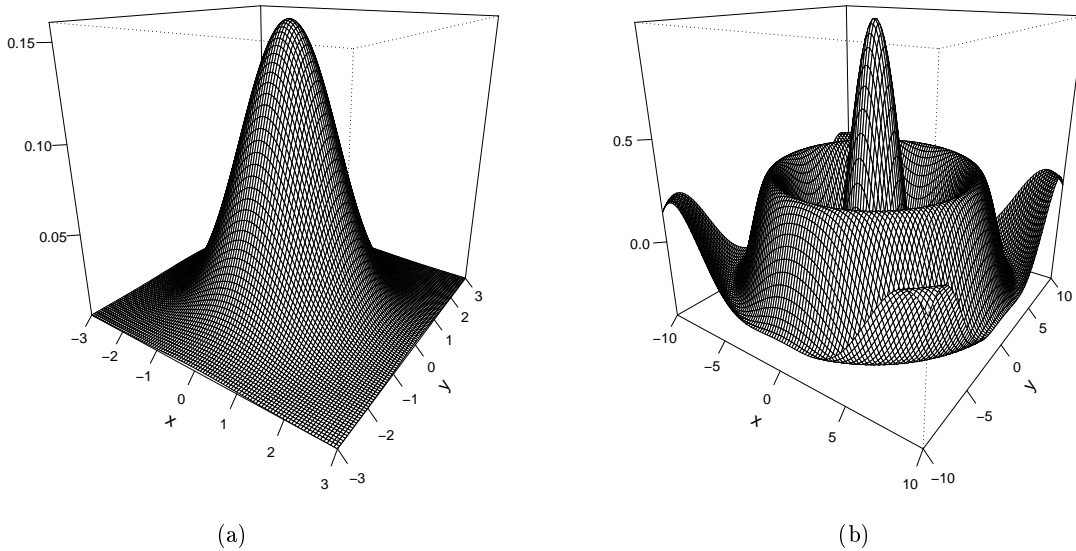


Abbildung 2: (a) Die Dichte $f_{2,2}$ der Standardnormalverteilung $N_{2,2}$.
(b) Die charakteristische Funktion der Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{2,2}$.

1.2 $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen

Die Ausführungen des vorangegangenen Abschnittes haben verdeutlicht, dass die sphärischen Verteilungen als Verallgemeinerungen der multivariaten Standardnormalverteilung interpretiert werden können. In Analogie hierzu werden in diesem Abschnitt die $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen eingeführt, indem eine an (1.5) anlehende stochastische Darstellung der noch zu definierenden p -verallgemeinerten Normalverteilung für eine Familie von Skalenmischungen verallgemeinert wird. Die Einführung $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen basiert daher wie schon im Falle der sphärischen Verteilungen auf einer stochastischen Darstellung. Wir folgen damit der Vorgehensweise in (Gupta u. Song, 1997b) und (Richter, 2009) und verwenden nicht den Ansatz aus (Osiewalski u. Steel, 1993), welcher die Definition absolutstetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen mithilfe einer Strukturaussage der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten beinhaltet, vgl. mit Theorem 1.13. Hierbei sei erwähnt, dass in (Osiewalski u. Steel, 1993) erstmals eine die p -verallgemeinerte Normalverteilung generalisierende Familie von multivariaten Verteilungen unter der Bezeichnung l_q -sphärische Verteilungen eingeführt und beschrieben wurde und dass die $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen im Falle $p \geq 1$ auch als L_p -Norm sphärische Verteilungen bezeichnet werden. In grundlegenden Arbeiten wie z.B. (Gupta u. Song, 1997a), (Gupta u.

Song, 1997b), (Gupta u. Song, 1997c), (Szabłowski, 1998) und (Richter, 2009) wurden zudem weitere Eigenschaften und Charakterisierungen von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen hergeleitet.

Wir definieren zunächst die p -verallgemeinerte Normalverteilung, welche bereits in (Subbotin, 1923) verwendet und später u.a. in (Johnson u. Kotz, 1970), (Goodman u. Kotz, 1973), (Taguchi, 1978), (Schechtman u. Zinn, 1990), (Pogány u. Nadarajah, 2010) und (Kalke u. Richter, 2013) untersucht wurde.

Definition 1.7. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 0$. Dann wird eine absolutstetige Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{n,p}(x) = \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \exp\left(-\frac{|x|_p^p}{p}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

als n -variante p -verallgemeinerte Normalverteilung bezeichnet und mit $N_{n,p}$ symbolisiert. Im Falle $n = 1$ schreiben wir für $N_{n,p}$ auch N_p .

Die p -verallgemeinerte Normalverteilung besitzt aufgrund ihres zusätzlichen Parameters $p > 0$ eine größere Flexibilität bei der Anpassung an reale Daten als die Standardnormalverteilung. Der Parameter p beeinflusst hierbei nicht nur die Schwere der Verteilungsenden, sondern insbesondere auch die Form der Dichteniveaumengen $S_{n,p}(r)$, $r > 0$, der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung und wird daher auch als Formparameter bezeichnet, vgl. mit Abbildung 3. Die n -variante p -verallgemeinerte Normalverteilung generalisiert ferner bekannte Verteilungen wie die Laplaceverteilung ($p = 1$) oder die Standardnormalverteilung ($p = 2$) und approximiert für $p \rightarrow \infty$ die Gleichverteilung auf der Menge $[-1, 1]^n$.

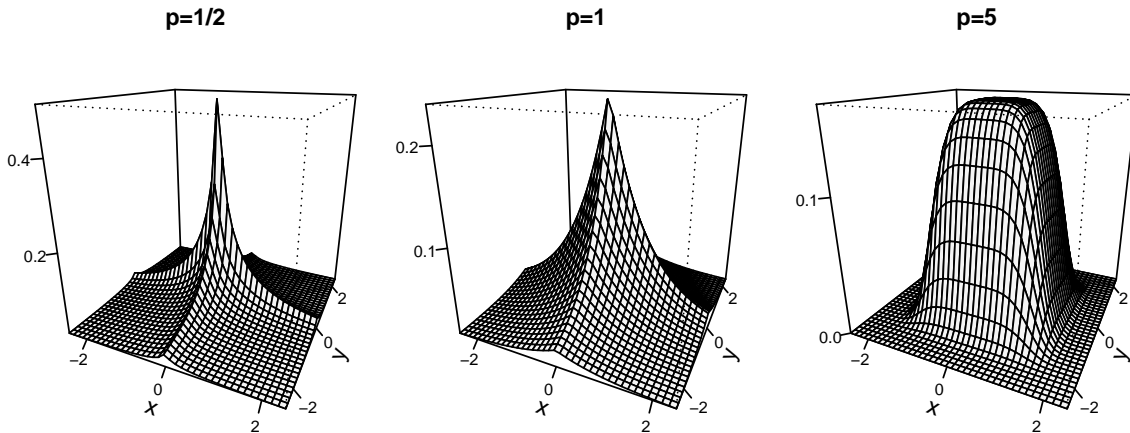


Abbildung 3: Die Dichte der bivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung für $p \in \{1/2, 1, 5\}$.

Die multivariate p -verallgemeinerte Normalverteilung ist für $p \neq 2$ nicht als Skalenmischung von ω_n darstellbar. Im Hinblick auf die angestrebte Darlegung eines p -Analogons von Darstellung (1.5) ergibt sich daher die Notwendigkeit, die Basisverteilung der sphärischen Verteilungen in geeigneter Weise zu p -verallgemeinern. Dies ist Gegenstand der folgenden Definition.

Definition 1.8. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit $X \sim N_{n,p}$. Dann wird die Verteilung von $X/|X|_p$ als p -verallgemeinerte Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ (bzw. als p -verallgemeinerte Gleichverteilung auf $S_{n,p}$) bezeichnet und mit $\omega_{n,p}$ symbolisiert.

Bevor die in Definition 1.8 eingeführte Verteilung in Theorem 1.10 für die Angabe einer p -Verallgemeinerung von Darstellung (1.5) verwendet wird, erfolgt nun zuerst die Erläuterung der Bezeichnung „ p -verallgemeinerte Gleichverteilung“ sowie die Einordnung dieses Begriffes in die Literatur. Hierbei sei daran erinnert, dass unter einer Gleichverteilung auf der zusammenhängenden Berandung \overline{K} einer kompakten sternförmigen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0_n \in K^\circ$ gemeinhin die Verteilung

$$\varsigma(D) = \frac{\mathfrak{D}_n(D)}{\mathfrak{D}_n(\overline{K})}, \quad D \in \overline{K} \cap \mathfrak{B}_n, \quad (1.8)$$

verstanden wird, vgl. z.B. mit der auf $\mathfrak{B}_{n,2}$ definierten Verteilung ω_n . Der Begriff der Gleichverteilung ist in diesem Zusammenhang eng an eine geometrische Eigenschaft bzgl. einer euklidischen Geometrie gebunden. Es ist jedoch (Rachev u. Rüschemdorf, 1991), (Szablowski, 1998) und (Richter, 2009) zu entnehmen, dass sich $\omega_{n,p}$ nur im Spezialfall $p \in \{1, 2\}$ mithilfe einer euklidischen Geometrie wie in (1.8) darstellen lässt. Trotz dieser Tatsache wird die in Definition 1.8 eingeführte Verteilung in einigen Artikeln wie z.B. (Rachev u. Rüschemdorf, 1991), (Gupta u. Song, 1997c) und (Szablowski, 1998) aus formalen Gründen auch als Gleichverteilung auf $S_{n,p}$ bezeichnet. Eine geometrische Beschreibung von $\omega_{n,p}$ in Analogie zu (1.8) findet aber weder in (Rachev u. Rüschemdorf, 1991), (Gupta u. Song, 1997c), (Szablowski, 1998) noch im Artikel (Schechtman u. Zinn, 1990) statt, in welchem die bedingte Verteilung eines Zufallsvektors $U_p \sim \omega_{n,p}$ unter der Bedingung $\{U_p \in S_{n,p}^+\}$ mithilfe des sogenannten Kegelmaßes auf $\mathfrak{B}_{n,p}^+$ dargestellt wird, wobei

$$P(U_p \in D | U_p \in S_{n,p}^+) = \frac{\mu_n(x \in K_{n,p}^+ : x/|x|_p \in D)}{\mu_n(K_{n,p}^+)} \quad , \quad D \in \mathfrak{B}_{n,p}^+ . \quad (1.9)$$

Aus Gleichung (1.9) wird zwar deutlich, dass $\omega_{n,p}$ dem Kegelmaß auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ entspricht, vgl. mit (Naor, 2007). Ein geometrisch geprägter Definitionsansatz von $\omega_{n,p}$ mithilfe einer zu (1.8) analogen Darstellung ist jedoch erst in (Richter, 2009) präsentiert worden. Der hiermit verbundene geometrische Hintergrund von $\omega_{n,p}$ motiviert die Bezeichnung als p -verallgemeinerte Gleichverteilung und ist in der nun folgenden, auf (Richter, 2009) zurückgehenden Bemerkung zusammengefasst dargestellt.

Bemerkung 1.9. Die in Definition 1.8 eingeführte p -verallgemeinerte Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ besitzt die geometrische Eigenschaft

$$\omega_{n,p}(D) = \frac{\mathfrak{D}_{n,p}(D)}{\mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p})} \quad , \quad D \in \mathfrak{B}_{n,p} ,$$

wobei $\mathfrak{D}_{n,p}$ einen p -verallgemeinerten Oberflächeninhalt bezeichnet. Dieser wird für $p \geq 1$ analog zum euklidischen Oberflächeninhalt $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}_{n,2}$ (vgl. mit (Schilov, 1972)) durch die zur $l_{n,p}$ -Norm $|\cdot|_p$ duale $l_{n,q}$ -Norm erzeugt, d.h.

$$\mathfrak{D}_{n,p}(D) = \int_{G(D)} |N(x_1, \dots, x_{n-1})|_q dx \quad , \quad D \in \mathfrak{B}_{n,p} .$$

Hierbei ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $G(D) = \{x_{(n-1)} \in K_{n-1,p} : (x_{(n-1)}^T, x_n)^T \in D\}$ und $N(x_1, \dots, x_{n-1})$ ist der Normalenvektor von $S_{n,p}$ im Punkt $(x_1, \dots, x_{n-1})^T$. Im Falle $p \in (0, 1)$ wird $|\cdot|_q$ durch das Minkowskifunktional der Menge $S(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{p/(p-1)} \geq 1\}$ ersetzt, welches in (Moszyńska u. Richter, 2012) als Semi-Antinorm klassifiziert wird. Darüber hinaus ist $\mathfrak{D}_{n,1}(D) = \mathfrak{D}_n(D)/\sqrt{n}$, $D \in \mathfrak{B}_{n,1}$, sodass $\omega_{n,1}$ auch als Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,1}$ bezeichnet werden kann.

Es folgt die angekündigte stochastische Darstellung der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung:

Theorem 1.10. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit $X \sim N_{n,p}$. Dann sind $|X|_p$ und $X/|X|_p$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen und

$$\frac{\partial P(|X|_p < x)}{\partial x} = \mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^p}{p}} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Der Zufallsvektor X besitzt daher die stochastische Darstellung

$$X \stackrel{d}{=} R_p U_p , \quad (1.10)$$

wobei R_p verteilt ist wie $|X|_p$, U_p der p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ folgt und R_p und U_p stochastisch unabhängig sind.

Beweis. Folgt aus Lemma 1 in (Schechtman u. Zinn, 1990). □

Die n -variate p -verallgemeinerte Normalverteilung ist mit Theorem 1.10 eine Skalenmischung von $\omega_{n,p}$, sofern $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dies motiviert in Anlehnung an Abschnitt 1.1, (Gupta u. Song, 1997b) und an (Richter, 2009) die folgende Definition $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen, welche als Verallgemeinerung von Definition 1.2 bezeichnet werden kann. Die Familie der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen wird in diesem Zusammenhang als die Familie aller Skalenmischungen einer Basisverteilung eingeführt, welche mit Bemerkung 1.9 als eine verallgemeinerte Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ bzgl. des verallgemeinerten Oberflächeninhaltes $\mathfrak{D}_{n,p}$ aufgefasst werden kann. Die hiermit verbundene und i. Allg. nichteuklidische Geometrie des Basisvektors der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen spiegelt sich in der zugehörigen (und in Definition 1.11 angegebenen) stochastischen Darstellung wider.

Definition 1.11. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$. Dann wird die Verteilung eines Zufallsvektors X als $l_{n,p}$ -symmetrisch bezeichnet, falls

$$X \stackrel{d}{=} RU_p, \quad (1.11)$$

wobei R eine P -f.s. nichtnegative Zufallsgröße ist, U_p der p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ folgt und R und U_p stochastisch unabhängig sind.

Beispiel 1.12. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$. Dann sind die p -verallgemeinerte Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ sowie die n -variate p -verallgemeinerte Normalverteilung $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen. Darüber hinaus ist jede sphärische Verteilung im \mathbb{R}^n auch eine $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung mit $p = 2$.

Eine wichtige Eigenschaft $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektoren ist die Verteilungsinvarianz gegenüber Multiplikationen mit Signaturmatrizen $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $|d_i| = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. So folgt beispielsweise aus der in Definition 1.7 angegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung von $N_{n,p}$, dass $DX \stackrel{d}{=} X$, sofern $X \sim N_{n,p}$. Für einen beliebigen $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektor $Y \stackrel{d}{=} RU_p$ gilt ferner

$$\begin{aligned} P(DY \in A) &= P(DRX/|X|_p \in A) \\ &= P(R(DX)/|DX|_p \in A) \\ &= P(RX/|X|_p \in A) \\ &= P(Y \in A) \quad , \quad A \in \mathfrak{B}_{n,p}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Es ergibt sich zudem bereits aus (Osiewalski u. Steel, 1993), dass die absolutstetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen auch mithilfe einer geometrisch-strukturellen Darstellung der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten definiert werden können. In Analogie zum Fall $p = 2$ ist eine $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung hierbei genau dann absolutstetig, wenn auch die zugehörige erzeugende Variable R eine absolutstetige Verteilung besitzt, vgl. mit (Gupta u. Song, 1997b).

Theorem 1.13. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und sei X ein Zufallsvektor mit einer absolutstetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung. Dann existieren eine dichtegenerierende Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0 < \int_0^\infty r^{\frac{n}{p}-1} g(r) dr < \infty$ und eine positive, reelle Konstante $C(n, g, p)$ so, dass durch

$$f(x) := C(n, g, p) g(|x|_p^{\frac{p}{p}}) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte von X gegeben ist.

Beweis. Folgt aus Theorem 2.1 in (Gupta u. Song, 1997b). □

Beispiel 1.14. Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$, $U = (U_1, \dots, U_m)^T \sim \omega_{m,p}$ und $n \in \{1, \dots, m-1\}$. Dann besitzt $(U_1, \dots, U_n)^T$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^n}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{p}\right)} (1 - |x|_p^{\frac{p}{p}})^{\frac{m-n}{p}-1} \quad , \quad x \in K_{n,p}^\circ,$$

vgl. mit Theorem 2.1 aus (Gupta u. Song, 1997c). Im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist der Zufallsvektor $(U_1, \dots, U_n)^T$ daher absolutstetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilt.

Für weitere Beispiele $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen bzw. $l_{n,p}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten verweisen wir auf (Gupta u. Song, 1997b) und auf (Richter, 2009). An dieser Stelle sei vielmehr festgehalten, dass die in Theorem 1.13 dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichte einer beliebigen absolutstetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung für $r > 0$ konstant ist auf $S_{n,p}(r)$. Die Dichteniveaumengen absolutstetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen lassen sich somit für $p > 0$ analog zum sphärischen Fall als Niveaumengen des Funktional $|\cdot|_p$ in geometrischer Weise interpretieren (vgl. hierzu auch mit Abschnitt 1.3 für eine geometrische Beschreibung von $|\cdot|_p$ als verallgemeinerter Radius).

Die $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen besitzen dagegen nur im sphärischen Fall bereits bekannte geometrische Strukturen, vgl. mit Abschnitt 1.1. Es sind zudem für $p \notin \{1, 2\}$ nur im Spezialfall der p -verallgemeinerten Normalverteilung überhaupt Darstellungen von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen in der Literatur zu finden, vgl. z.B. mit (Pogány, 2010) und (Pogány u. Nadarajah, 2010). In den Kapiteln 2-5 dieser Arbeit werden aus diesem Grund in ausführlicher Weise Darstellungen und Eigenschaften $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen hergeleitet. Im Hinblick auf die geometrisch interpretierbare stochastische Darstellung in (1.11) und die durch (1.13) bestimmte geometrische Struktur der Wahrscheinlichkeitsdichten besteht hierbei in erster Linie ein Interesse an den geometrischen Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen. So wird zum einen in Kapitel 2 eine geometrische Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen hergeleitet, welche die geometrisch-stochastische Darstellung in (1.11) widerspiegelt. Zum anderen erfolgt in Kapitel 5 eine ausführliche Analyse der charakteristischen Niveaumengen $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen und die Herleitung eines p -Analogons von Theorem 1.4 (iii) für eine Familie nichtsphärischer $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen. In den Kapiteln 3 und 4 werden ferner wichtige Spezialfälle $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen gesondert betrachtet, welche für die geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen von entscheidender Bedeutung sind.

Am Ende dieses Abschnittes werden nun noch Eigenschaften ausgewählter $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen angegeben. Es wird sich in diesem Zusammenhang in Abschnitt 1.4 zeigen, dass insbesondere die Kenntnis der Momente einer Verteilung wertvoll bei der Untersuchung der zugehörigen charakteristischen Funktion ist. In den beiden folgenden Lemmata sind in unter diesem Aspekt die Momente der p -verallgemeinerten Normalverteilung als auch der p -verallgemeinerten Gleichverteilung dargestellt, deren charakteristische Funktionen in den Kapiteln 3 bzw. 4 thematisiert werden.

Lemma 1.15. *Seien $p > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und sei X eine p -verallgemeinert normalverteilte Zufallsgröße. Dann ist*

$$\mathbb{E}X^k = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k/2 \notin \mathbb{N} , \\ \frac{p^{\frac{k}{p}} \Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} & , \text{ falls } k/2 \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Beweis. Siehe (Johnson u. Kotz, 1970). □

Lemma 1.16. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, $p > 0$ und sei $U = (U_1, \dots, U_n)^T$ ein Zufallsvektor mit $U \sim \omega_{n,p}$. Dann ist*

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n U_i^{k_i} \right) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } (k_1/2, \dots, k_n/2)^T \notin \mathbb{N}^n , \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{1+k_i}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\sum_{i=1}^n k_i}{p}\right) \Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} & , \text{ falls } (k_1/2, \dots, k_n/2)^T \in \mathbb{N}^n . \end{cases}$$

Beweis. Siehe (Arellano-Valle u. Richter, 2012). □

1.3 $l_{n,p}$ -verallgemeinerte Kugelkoordinaten

Die stochastische Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen in (1.11) ist eng verbunden mit dem Übergang von kartesischen Koordinaten zu den in diesem Abschnitt vorgestellten $l_{n,p}$ -verallgemeinerten Kugelkoordinaten, welche auch als $l_{n,p}$ -sphärische Koordinaten bezeichnet werden und in (Richter, 2007) eingeführt wurden. Es handelt sich hierbei um eine p -Verallgemeinerung der üblichen n -dimensionalen sphärischen bzw. Kugelkoordinaten, welche aufgrund ihres im Folgenden dargestellten

Zusammenhangs zum p -verallgemeinerten Oberflächeninhalt $\mathfrak{D}_{n,p}$ in späteren Kapiteln (wie z.B. Kapitel 2) von Bedeutung sein wird und welche insbesondere auch die geometrische Interpretationsmöglichkeit von $|\cdot|_p$ als verallgemeinertes Radiusfunktional verdeutlicht.

Bevor wir die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation einführen, geben wir in der folgenden Definition zunächst p -Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen aus (Richter, 2007) an.

Definition 1.17. Sei $p > 0$. Dann ist durch

$$\cos_p(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\left|(\cos(\phi), \sin(\phi))^T\right|_p}, \quad \phi \in [0, 2\pi),$$

die p -verallgemeinerte Kosinusfunktion und durch

$$\sin_p(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\left|(\cos(\phi), \sin(\phi))^T\right|_p}, \quad \phi \in [0, 2\pi),$$

die p -verallgemeinerte Sinusfunktion definiert.

Die in Abbildung 4 dargestellten p -verallgemeinerten trigonometrischen Funktionen wurden ausführlich in (Richter, 2007) untersucht und sind maßgeblich für die in diesem Abschnitt betrachtete p -Verallgemeinerung der n -dimensionalen sphärischen Koordinaten. So weist die nun folgende Definition der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation keine strukturellen Unterschiede zur Definition der sphärischen Koordinatentransformation auf, vgl. hierzu z.B. mit (Anderson, 2003). Der Unterschied zwischen beiden Definitionen ergibt sich für $p \neq 2$ lediglich durch die Wahl üblicher trigonometrischer Funktionen im sphärischen Fall und p -verallgemeinerter trigonometrischer Funktionen im $l_{n,p}$ -sphärischen Fall.

Definition 1.18. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$, $M_n^* = [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi)$ und $M_n = \mathbb{R}_{\geq 0} \times M_n^*$. Dann ist die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation $SPH_p : M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$, definiert durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos_p(\phi_1), \quad x_2 = r \sin_p(\phi_1) \cos_p(\phi_2), \quad \dots, \quad x_{n-1} = r \sin_p(\phi_1) \cdot \dots \cdot \sin_p(\phi_{n-2}) \cos_p(\phi_{n-1}), \\ x_n &= r \sin_p(\phi_1) \cdot \dots \cdot \sin_p(\phi_{n-2}) \sin_p(\phi_{n-1}) \quad . \end{aligned}$$

Die $l_{n,p}$ -sphärische Koordinatentransformation besitzt eine zur n -dimensionalen sphärischen Koordinatentransformation analoge Struktur und entspricht dieser im Falle $p = 2$, da $(\cos_2(\phi), \sin_2(\phi)) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Für $p \neq 2$ unterscheiden sich dagegen die p -verallgemeinerten trigonometrischen Funktionen von den üblichen trigonometrischen Funktionen, vgl. mit Abbildung 4, sodass auch die zugehörige Radiusvariable r i. Allg. unterschiedlich gewählt werden muss. Das im Folgenden angegebene Theorem aus (Richter, 2007) impliziert jedoch, dass sowohl die Winkel $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ als auch die verallgemeinerte Radiusvariable r (für $p \neq 2$) zum sphärischen Fall analoge Interpretationen besitzen. Hierbei sei hervorgehoben, dass r der durch $|\cdot|_p$ erzeugte p -verallgemeinerte Radius eines Punktes ist, welcher i. Allg. vom euklidischen Radius verschieden ist.

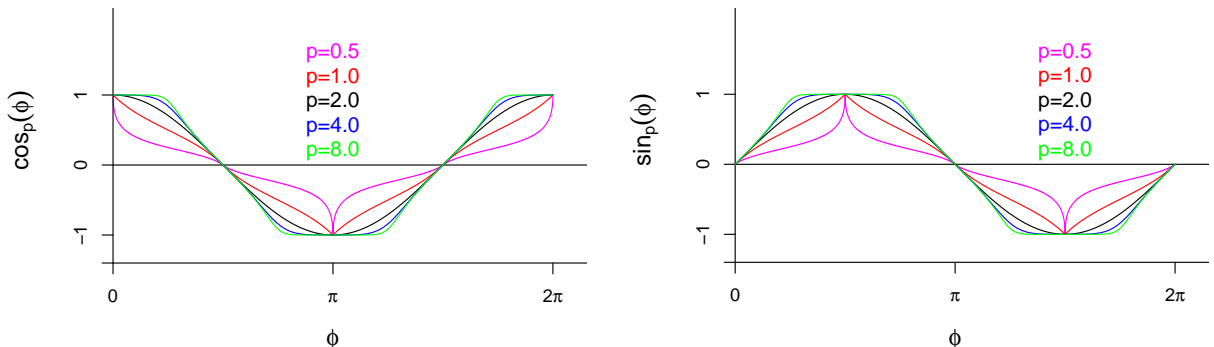


Abbildung 4: Die p -verallgemeinerten trigonometrischen Funktionen für $p \in \{1/2, 1, 2, 4, 8\}$.

Theorem 1.19. Die Abbildung SPH_p ist für alle $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ f.ü. eineindeutig. Für die (f.ü. eindeutig definierte) inverse Abbildung $SPH_p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow M_n$, $(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$, gilt

$$r = |x|_p$$

und

$$\phi_i = \begin{cases} \arccos_p \left(\frac{x_i}{(\sum_{j=i}^n |x_j|^p)^{1/p}} \right) & , i \in \{1, \dots, n-2\} , \\ \arctan \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} \right) & , i = n-1 , \end{cases}$$

sofern $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $x_{n-1} \neq 0$ und \arccos_p die zu \cos_p inverse Abbildung bezeichnet.

Beweis. Siehe (Richter, 2007). □

Mithilfe $l_{n,p}$ -verallgemeinerter Kugelkoordinaten lässt sich jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ als Element einer $l_{n,p}$ -Sphäre $S_{n,p}(r)$ eindeutig darstellen. Während das Funktional $|\cdot|_p$ den p -verallgemeinerten Radius r von $S_{n,p}(r)$ erzeugt, lässt sich mithilfe der Winkel $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ die genaue Lage von x auf $S_{n,p}(r)$ bestimmen.

Eine wichtige Anwendung von Koordinatentransformationen ist die Umformung n -dimensionaler Integrale bzgl. des Lebesguemaßes μ_n . So kann der Übergang zu $l_{n,p}$ -verallgemeinerten Kugelkoordinaten wie im Spezialfall $p = 2$ zur Vereinfachung bzw. zur geometrischen Veranschaulichung derartiger Integrale führen. Für die Integraltransformation mithilfe von $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinaten ist hierbei die Kenntnis der Funktionaldeterminante von SPH_p notwendig, welche im nun folgenden Theorem aus (Richter, 2007) angegeben ist.

Theorem 1.20. Unter den Voraussetzungen von Definition 1.18 genügt die Funktionaldeterminante $J(SP H_p)$ der Abbildung $SP H_p$ der Darstellung

$$J(SP H_p)(r, \phi) = r^{n-1} J^*(SP H_p)(\phi) \quad , (r, \phi) \in M_n, \phi_i \neq k\pi/2, i \in \{1, \dots, n-1\}, k \in \mathbb{N},$$

wobei

$$J^*(SP H_p)(\phi) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\sin \phi_i)^{n-i-1}}{|(\cos \phi_i, \sin \phi_i)^T|_p^{n-i+1}} \quad , \phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \in M_n^* .$$

Beweis. Siehe (Richter, 2007). □

Neben der Möglichkeit, in n -dimensionalen Lebesgue-Integralen mithilfe von Theorem 1.19 und Theorem 1.20 $l_{n,p}$ -verallgemeinerte Kugelkoordinaten einführen zu können, wird es im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Vorteil sein, die betrachteten Lebesgue-Integrale mithilfe des p -verallgemeinerten Oberflächeninhaltes $\mathfrak{D}_{n,p}$ zu umschreiben. Auf diese Weise können z.B. auch $l_{n,p}$ -symmetrische Wahrscheinlichkeitsintegrale unter bestimmten Voraussetzungen (und unter Verwendung von Darstellung (1.11)) geometrisch interpretierbar gemacht werden. Der p -verallgemeinerte Oberflächeninhalt $\mathfrak{D}_{n,p}(A)$ einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n(S_{n,p}(r))$ lässt sich hierbei alternativ zur in Bemerkung 1.9 angegebenen Berechnungsvorschrift mithilfe der in Theorem 1.20 spezifizierten Funktion $J^*(SP H_p)$ und dem p -verallgemeinerten Radius $r > 0$ berechnen:

Theorem 1.21. Seien $r > 0$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $A \in \mathfrak{B}_n(S_{n,p}(r))$. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Definition 1.18, dass $A^* := \{\phi \in M_n^* : SP H_p(r, \phi) \in A\}$ eine Lebesgue-Borel-messbare Menge ist und dass

$$\mathfrak{D}_{n,p}(A) = r^{n-1} \int_{A^*} J^*(SP H_p)(\phi) d\phi .$$

Beweis. Siehe (Richter, 2007). □

Durch die in Theorem 1.21 präsentierte alternative Berechnungsvorschrift von $\mathfrak{D}_{n,p}$ können n -dimensionale Lebesgue-Integrale wie angekündigt mithilfe von Integralen bezüglich des p -verallgemeinerten Oberflächeninhaltes $\mathfrak{D}_{n,p}$ ausgedrückt werden. Seien hierzu $(p, n) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}_{\geq 2}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, $A \in \mathfrak{B}_n$, $A^*(r) = \{\phi \in M_n^* : SPH_p(r, \phi) \in A\}$, $r > 0$, und $A(r) = \{\theta \in S_{n,p} : r\theta \in A\}$, $r > 0$. Dann ist

$$\int_A f(x) dx = \int_0^\infty \int_{A^*(r)} f(x(r, \phi)) r^{n-1} J^*(SPH_p)(\phi) d\phi dr \quad (1.14)$$

$$= \int_0^\infty r^{n-1} \int_{A(r)} f(r\theta) \mathfrak{D}_{n,p}(d\theta) dr \quad (1.15)$$

$$= \int_0^\infty \int_{A \cap S_{n,p}(r)} f(y) \mathfrak{D}_{n,p}(dy) dr. \quad (1.16)$$

Im Falle $f = \mathbb{I}_A$ führt Gleichung (1.15) auf die in (Richter, 2007) hergeleitete und in (Richter, 2012) betrachtete nichteuklidische Indivisiblarstellung des Lebesguemaßes, welche in Abschnitt 2.4 ausführlich thematisiert wird. Darüber hinaus ergibt sich aus (1.15) auch die in (Richter, 2009) eingeführte geometrische Maßdarstellungsformel absolutstetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen. So folgt aus Darstellung (1.15) für einen $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = C(n, g, p) g(|x|_p^p)$, $x \in \mathbb{R}^n$, dass

$$P(X \in A) = C(n, g, p) \mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}) \int_0^\infty r^{n-1} \frac{\mathfrak{D}_{n,p}(A \cap S_{n,p}(r))}{\mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}(r))} g(r^p) dr. \quad (1.17)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \in A)$ lässt sich hierbei mit (1.17) heuristisch als gewichtete Summe sämtlicher Anteile des p -verallgemeinerten Oberflächeninhaltes von $A \cap S_{n,p}(r)$ am p -verallgemeinerten Oberflächeninhalt der verallgemeinerten Sphäre $S_{n,p}(r)$ auffassen, wobei die Gewichtung mithilfe der Wahrscheinlichkeit dafür erfolgt, dass die verallgemeinerte Radiusvariable $|X|_p$ in einer infinitesimal kleinen Umgebung des p -verallgemeinerten Radius $r > 0$ liegt.

1.4 Charakteristische Funktionen

Das zentrale Anliegen dieser Arbeit besteht in der Herleitung von Darstellungen und Eigenschaften $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen, wobei in erster Linie die geometrischen Strukturen dieser Funktionen beleuchtet werden sollen. Bevor wir die spezielle Familie der $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen in den Kapiteln 2-5 ausführlich untersuchen, möchten wir in diesem Abschnitt zunächst vorwiegend bekannte und in gewissem Sinne allgemeingültige Aussagen über charakteristische Funktionen symmetrischer Zufallsvariablen zusammenfassen, welche für die folgenden Kapitel und für das allgemeine Verständnis von reellwertigen charakteristischen Funktionen von Bedeutung sind. Hierbei werden zum einen analytische Eigenschaften wie z.B. die Stetigkeit, die Beschränktheit oder die Differenzierbarkeit charakteristischer Funktionen betrachtet. Zum anderen werden aber auch Bedingungen an eine komplex- bzw. reellwertige Funktion formuliert, welche die Identifizierbarkeit der betrachteten Funktion als charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen gewährleisten. Derartige Kriterien können insbesondere zur Untersuchung des für diese Arbeit sehr wichtigen Nullstellenverhaltens charakteristischer Funktionen verwendet werden, vgl. z.B. mit Abschnitt 3.4.

Es sei zunächst festgehalten, dass die in dieser Arbeit betrachteten symmetrischen Zufallsvariablen auch symmetrische und reellwertige charakteristische Funktionen besitzen. So verschwindet auf der einen Seite der Imaginärteil der charakteristischen Funktion φ einer symmetrisch verteilten Zufallsvariablen $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ für ein beliebiges Argument $t \in \mathbb{R}^n$, denn

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varphi(t)) &= \mathbb{E} \sin \langle t, X \rangle \\ &= \mathbb{E} \sin \langle t, -X \rangle \\ &= \mathbb{E} [-\sin \langle t, X \rangle] \\ &= -\operatorname{Im}(\varphi(t)) \quad , t \in \mathbb{R}^n , \end{aligned}$$

d.h. es ist $\text{Im}(\varphi(t)) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$. Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned} \text{Re}(\varphi(t)) &= \mathbb{E} \cos\langle t, X \rangle \\ &= \mathbb{E} \cos\langle -t, X \rangle \\ &= \text{Re}(\varphi(-t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \end{aligned} \tag{1.18}$$

d.h. $\varphi(t) = \varphi(-t)$, $t \in \mathbb{R}^n$. Im Falle eines für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$ gegebenen $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektors $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ impliziert Gleichung (1.12) sogar, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i \langle Dt, Y \rangle) &= \mathbb{E} \exp(i \langle t, DY \rangle) \\ &= \mathbb{E} \exp(i \langle t, Y \rangle) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \end{aligned} \tag{1.19}$$

sofern $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $|d_i| = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Die $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen sind somit invariant gegenüber Multiplikationen des Funktionsargumentes mit Signaturmatrizen. Die charakteristische Funktion einer symmetrischen und mit beliebigen Momenten versehenen Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich zudem hinsichtlich der Eigenschaften Beschränktheit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit beschreiben. Wir weisen in diesem Zusammenhang auf die beiden folgenden Theoreme hin.

Theorem 1.22. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion einer n -variaten, symmetrisch verteilten Zufallsvariablen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) φ ist gleichmäßig stetig ;
- (ii) $\varphi(0_n) = 1$;
- (iii) $|\varphi(t)| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Siehe (Ushakov, 1999) . □

Theorem 1.23. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion einer n -variaten, symmetrisch verteilten Zufallsvariablen $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit endlichen k -ten Momenten $M_{k_1, \dots, k_n} := \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n X_i^{k_i} \right)$, wobei $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + \dots + k_n = k$. Dann ist φ k -fach partiell differenzierbar und es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) $\frac{\partial^k \varphi}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}}$ ist reell, beschränkt und gleichmäßig stetig ;
- (ii) $\frac{\partial^k \varphi}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}}(t) = (-1)^{k/2} \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\langle t, x \rangle) \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} P^X(dx)$, $t \in \mathbb{R}^n$, $k/2 \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\frac{\partial^k \varphi}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}}(t) = (-1)^{(k+1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \sin(\langle t, x \rangle) \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} P^X(dx)$, $t \in \mathbb{R}^n$, $k/2 \notin \mathbb{N}$;
- (iv) $M_{k_1, \dots, k_n} = (-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \frac{\partial^k \varphi}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}}(0_n)$.

Beweis. Siehe (Sirjaev, 1988) und (Sasvári, 2013) . □

Mit den Theoremen 1.22 und 1.23 sind die in dieser Arbeit betrachteten charakteristischen Funktionen n -variater symmetrischer Verteilungen stetig und beschränkt sowie in einigen Fällen auch beliebig oft partiell differenzierbar, vgl. mit Lemma 1.15 und Lemma 1.16. Im Falle der Integrierbarkeit einer charakteristischen Funktion ist die zugehörige Verteilung zudem absolutstetig und die (μ_n -f.ü. eindeutig bestimmte) zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte kann mit der nun folgenden Inversionsformel charakteristischer Funktionen ermittelt werden.

Theorem 1.24. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion einer n -variaten Zufallsvariablen $X = (X_1, \dots, X_n)^T$, wobei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt X eine absolutstetige Verteilung und eine stetige und beschränkte Dichte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle t, x \rangle) \varphi(t) dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Beweis. Siehe (Ushakov, 1999) . □

Theorem 1.24 beinhaltet eine Darstellung für die zu einer integrierbaren charakteristischen Funktion φ gehörige stetige Wahrscheinlichkeitsdichte f . Eine notwendige Voraussetzung für die Integrierbarkeit von φ ist die Eigenschaft

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \tag{1.20}$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in \mathbb{R}^n bezeichne. Die Integrierbarkeit von φ ist umgekehrt jedoch keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von (1.20). Hierfür genügt es, eine beliebige absolutstetige Verteilung zu betrachten, vgl. mit dem folgenden Theorem.

Theorem 1.25. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine beliebige Norm in \mathbb{R}^n und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion einer n -variaten absolutstetig verteilten Zufallsvariablen. Dann ist

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0 .$$

Beweis. Folgt aus Theorem 1.11.1 in (Bisgaard u. Sasvári, 2000). □

Neben den bisher thematisierten Eigenschaften wie z.B. die Stetigkeit, die Beschränktheit, die Differenzierbarkeit oder das Verhalten im Unendlichen charakteristischer Funktionen wird es in dieser Arbeit von großem Nutzen sein, derartige Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches durch konvergente Potenzreihen darzustellen. Im Hinblick hierauf wird in diesem Abschnitt die Familie der univariaten ganzanalytischen charakteristischen Funktionen eingeführt, für deren Definition zunächst der Begriff der holomorphen Funktion benötigt wird, vgl. hierzu z.B. mit (Ahlfors, 1966) und (Salamon, 2012).

Definition 1.26. Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann heißt eine Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wenn sie an jeder Stelle $z_0 \in \mathcal{M}$ komplex differenzierbar ist und die Ableitung $f' : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

Aus Definition 1.26 ist noch nicht direkt ersichtlich, inwiefern der Begriff der holomorphen Funktion für die Beschreibung charakteristischer Funktionen mithilfe von konvergenten Potenzreihen verwendet werden kann. Das folgende Theorem 1.27 verdeutlicht in diesem Zusammenhang aber die Darstellbarkeit holomorpher Funktionen durch derartige Reihen und ist erneut (Ahlfors, 1966) bzw. (Salamon, 2012) entnommen.

Theorem 1.27. Seien $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z_0 \in \mathcal{M}$ und $B_r(z_0) \subset \mathcal{M}$ für ein $r > 0$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad , \quad z \in B_r(z_0) , \tag{1.21}$$

wobei die rechte Seite in (1.21) für alle $z \in B_r(z_0)$ absolut konvergiert.

Beweis. Siehe (Salamon, 2012). □

Es wurden nun alle notwendigen Vorbereitungen getroffen, um die folgende Definition ganzer charakteristischer Funktionen in Anlehnung an (Bisgaard u. Sasvári, 2000) einführen zu können.

Definition 1.28. Eine charakteristische Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wird ganz bzw. ganzanalytisch genannt, falls eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ so existiert, dass

$$\varphi(t) = f(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Mit Theorem 1.27 und Definition 1.28 lässt sich eine ganze charakteristische Funktion für beliebig wählbares $t \in \mathbb{R}$ durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt t darstellen. Es erweist sich jedoch als relativ schwierig, eine gegebene charakteristische Funktion φ mithilfe von Definition 1.28 in direkter Weise auf die Zugehörigkeit zur Familie der ganzanalytischen charakteristischen Funktionen zu untersuchen. Dies gilt insbesondere dann, wenn keine geschlossene Darstellung für φ bekannt ist und beispielsweise nur die zugehörige Verteilungsfunktion explizit gegeben ist. Im zuletzt genannten Fall ist das folgende Theorem aus (Bisgaard u. Sasvári, 2000) ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Verifikation einer ganzen charakteristischen Funktion.

Theorem 1.29. Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine charakteristische Funktion mit zugehöriger Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Dann ist φ genau dann ganzanalytisch, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(r|x|) dF(x) < \infty$$

für alle $r > 0$.

Beweis. Siehe (Bisgaard u. Sasvári, 2000). □

Beispiel 1.30. Für die charakteristische Funktion τ_2 der Standardnormalverteilung N_2 gilt $\tau_2(t) = \exp(-t^2/2)$, $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion τ_2 ist ferner ganzanalytisch, denn für beliebiges $r > 0$ ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(r|x|) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(rx - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{r^2}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dx < \infty . \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion τ_1 der Standardlaplaceverteilung N_1 besitzt die Darstellung $\tau_1(t) = 1/(1+t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Es ist jedoch τ_1 nicht ganzanalytisch, denn für die Funktion $l(x) := \exp(|x|) \cdot f_{1,1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned} l(x) &= \exp(|x|) \cdot \left[\frac{1}{2} \exp(-|x|) \right] \\ &= \frac{1}{2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} , \end{aligned}$$

d.h. $l \notin L^1(\mathbb{R})$.

Die Ganzheit charakteristischer Funktion wird in dieser Arbeit vor allem für die Herleitung zugehöriger Monotonieeigenschaften ausgenutzt, welche wiederum für die geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen von großer Bedeutung sind. Wir werden hierfür in Lemma 1.32 zunächst zeigen, dass eine ganzanalytische charakteristische Funktion φ auf einem reellen Intervall $[t_1, t_2]$ nicht konstant sein kann, sofern $t_1 < t_2$ und $\varphi(t) \neq 1$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Dieser Sachverhalt kann z.B. mithilfe des folgenden Theorems aus (Salamon, 2012) bewiesen werden, welches in der Literatur auch als Satz über die Isoliertheit von Nullstellen holomorpher Funktionen bezeichnet wird.

Theorem 1.31. *Seien $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Menge, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion und $z_0 \in \mathcal{M}$ eine Nullstelle von f . Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(z_0) \subset \mathcal{M}$ und*

$$f(z) \neq 0 \quad , \quad z \in B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} .$$

Beweis. Siehe (Salamon, 2012). □

Es wurden nun alle notwendigen Hilfsmittel für den Beweis des folgenden Lemmas über nichtkonstante ganzanalytische charakteristische Funktionen bereitgestellt.

Lemma 1.32. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze charakteristische Funktion, welche nicht der konstanten charakteristischen Funktion $\tilde{\varphi}(t) = 1, t \in \mathbb{R}$, entspricht. Dann existieren keine reellen Zahlen t_1 und t_2 und keine komplexe Zahl c so, dass $t_1 < t_2$ und*

$$\varphi(t) = c \quad , \quad t \in [t_1, t_2] . \tag{1.22}$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Nachdem in diesem Abschnitt bisher die Eigenschaften einer jeweils gegebenen charakteristischen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ thematisiert wurden, soll nun abschließend noch die Frage untersucht werden, welche komplexwertigen Funktionen überhaupt charakteristische Funktionen sein können. Genauer gesagt werden im Folgenden Bedingungen an eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ aufgeführt, unter denen φ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ist. Derartige Aussagen besitzen insbesondere für die Untersuchung des Nullstellenverhaltens charakteristischer Funktionen eine große Bedeutung, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 3.4. Für die in Theorem 1.34 erfolgende Angabe eines notwendigen Kriteriums charakteristischer Funktionen wird nun in Anlehnung an Definition 1.3.1 aus (Sasvári, 1994) zunächst die Familie der positiv definiten Funktionen eingeführt.

Definition 1.33. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann wird eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ positiv definit genannt, falls für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}^n$ und $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varphi(t_i - t_j) \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0 \quad . \tag{1.23}$$

Im nun folgenden Theorem 1.34, welches auch als Bochners Theorem bekannt ist, wird der Zusammenhang zwischen charakteristischen Funktionen und positiv definiten Funktionen verdeutlicht. So ist auf der einen Seite jede charakteristische Funktion positiv definit. Auf der anderen Seite können die charakteristischen Funktionen unter den positiv definiten Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ anhand weiterer notwendiger Bedingungen an φ eindeutig ausgemacht werden.

Theorem 1.34. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann ist eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann die charakteristische Funktion einer n -variaten Zufallsvariablen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) φ ist stetig ;
- (ii) $\varphi(0_n) = 1$;
- (iii) φ ist positiv definit .

Beweis. Siehe (Ushakov, 1999). □

Mithilfe von Theorem 1.34 erhalten wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Identifikation einer beliebigen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ als charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen. Es ist jedoch in konkreten Anwendungen i. Allg. relativ schwierig, die positive Definitheit von φ auf direktem Wege mithilfe von Definition 1.33 zu überprüfen. Eine Alternative hierzu bietet das folgende Theorem von Pólya, vgl. mit (Pólya, 1949), welches aufgrund seiner relativ leichten Anwendbarkeit eines der am häufigsten benutzten Hilfsmittel für die Verifikation univariater charakteristischer Funktionen ist.

Theorem 1.35. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit*

- (i) $\varphi(0) = 1$,
- (ii) $\varphi(t) = \varphi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$,
- (iv) φ ist konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Dann ist φ die charakteristische Funktion einer symmetrischen und absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Eine zu φ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte f ist hierbei für $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xt) \varphi(t) dt \quad (1.24)$$

gegeben.

Beweis. Siehe (Pólya, 1949). □

Eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus Theorem 1.35 ist die charakteristische Funktion einer symmetrischen und absolutstetigen Verteilung. Die zu φ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte kann darüber hinaus mithilfe der (in Theorem 1.24 angegebenen) Inversionsformel charakteristischer Funktionen μ_1 -f.ü. eindeutig ermittelt werden, vgl. mit Darstellung (1.24), obwohl die charakteristische Funktion φ i. Allg. nicht integrierbar ist. Es ist jedoch mit den Bedingungen (i)-(iv) aus Theorem 1.35 nicht sichergestellt, dass die zur charakteristischen Funktion φ gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auch eine strikt positive Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt. Da aber genau dieser Aspekt für die in dieser Arbeit stattfindenden Nullstellenuntersuchungen von charakteristischen Funktionen von Bedeutung sein wird, vgl. z.B. mit Abschnitt 3.4, erfolgt nun die Angabe einer Ergänzung von Theorem 1.35, welche z.B. in (Sato, 2005) zu finden ist.

Theorem 1.36. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen aus Theorem 1.35 erfüllt und für welche ein $\epsilon > 0$ so existiert, dass φ streng konvex auf $(0, \epsilon)$ ist. Dann ist die durch (1.24) gegebene und zu φ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte f strikt positiv auf $\mathbb{R}_{\neq 0}$.*

Beweis. Siehe (Sato, 2005). □

Beispiel 1.37. Seien $\alpha \in (0, 1)$ und

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|^\alpha}{\alpha}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist φ stetig und erfüllt die Eigenschaften (i)-(iii) aus Theorem 1.35. Für die erste und zweite Ableitung von φ gilt ferner

$$\varphi'(t) = -t^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right), \quad t > 0,$$

bzw.

$$\varphi''(t) = (1 - \alpha + t^\alpha) \exp\left(-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) t^{\alpha-2}, \quad t > 0.$$

Die zweite Ableitung von φ ist somit strikt positiv auf $\mathbb{R}_{>0}$, d.h. φ ist streng konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$ und mit Theorem 1.36 die zu einer strikt positiven Wahrscheinlichkeitsdichte gehörige charakteristische Funktion.

Wir werden univariate charakteristische Funktionen, welche den Anforderungen aus Theorem 1.35 genügen, im Folgenden auch als charakteristische Funktionen vom Pólyatyp bezeichnen. Da aber nicht jede charakteristische Funktion vom Pólyatyp sein muss, sind die Bedingungen in Theorem 1.35 bzw. Theorem 1.36 nicht notwendig und insofern auch nicht geeignet um zu zeigen, dass eine gegebene Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ keine charakteristische Funktion ist. Für dieses Vorhaben kann neben den in Theorem 1.34 angegebenen notwendigen Bedingungen an eine charakteristische Funktion auch das folgende Theorem hilfreich sein.

Theorem 1.38. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine charakteristische Funktion mit*

$$\varphi(t) = 1 + o(t^2) \quad , t \rightarrow 0 .$$

Dann ist $\varphi(t) = 1, t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Siehe (Lukacs, 1970). □

Beispiel 1.39. Seien $\alpha > 2$ und

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|^\alpha}{\alpha}\right) \quad , t \in \mathbb{R} .$$

Dann ist φ stetig und besitzt die (für eine charakteristische Funktion notwendigen) Eigenschaften (i) und (ii) aus Theorem 1.34. Mit Theorem 1.38 ist φ jedoch keine charakteristische Funktion, denn $\varphi(t) \neq 1, t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, und

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |t|^{k\alpha-2}}{k! \alpha^k} = 0 .$$

Im multivariaten Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist es im Vergleich zum univariaten Fall deutlich schwieriger zu beurteilen, ob eine gegebene Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ auch eine charakteristische Funktion ist. So existieren laut (Ushakov, 1999) zwar multivariate Verallgemeinerungen des Theorems von Pólya, jedoch besitzen diese entweder nicht den Vorteil der leichten Anwendbarkeit oder aber sie beziehen sich nur auf sehr spezielle Familien von charakteristischen Funktionen. Ein Beispiel für die zuletzt genannte Kategorie multivariater Verallgemeinerungen von Theorem 1.35 ist das folgende Theorem aus (Askey, 1973), welches hinreichende Bedingungen für das Vorliegen einer sphärischen charakteristischen Funktion beinhaltet.

Theorem 1.40. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\varphi(0_n) = 1$;
- (ii) Für eine beliebige orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\varphi(t) = \varphi(Ot), t \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\lim_{|t|_2 \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$;
- (iv) Für beliebiges $v \in S_{n,2}$ und $\phi_v(t) := \varphi(t \cdot v), t \in \mathbb{R}$, ist ϕ_v $\lfloor n/2 \rfloor$ -mal differenzierbar und die Funktion $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \phi_v^{(\lfloor n/2 \rfloor)}$ ist konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Dann ist φ die charakteristische Funktion einer sphärischen Verteilung im \mathbb{R}^n .

Beweis. Siehe (Askey, 1973). □

Beispiel 1.41. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und

$$\varphi(t) = (1 + |t|_2^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist φ stetig und genügt den Bedingungen (i)-(iii) aus Theorem 1.40. Für $v \in S_{n,2}$ ist zudem eine unendlich oft differenzierbare Funktion durch

$$\phi_v(t) := \varphi(t \cdot v) = (1 + t^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben, wobei

$$\frac{\partial^{[n/2]+2}}{\partial t^{[n/2]+2}} \phi_v(t) = (-1)^{[n/2]} (n+1)(n+3) \cdot \dots \cdot (n+3+2[n/2]) (1+t^2)^{-\frac{n+5+2[n/2]}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion φ erfüllt somit auch die Bedingung (iv) aus Theorem 1.40 und ist aus diesem Grund die charakteristische Funktion einer sphärischen Verteilung im \mathbb{R}^n .

1.5 α -symmetrische und adjungierte Verteilungen

In Abschnitt 1.2 wurden die $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen als Verallgemeinerungen der sphärischen Verteilungen eingeführt. Der Ausgangspunkt für die Generalisierung war hierbei die definierende stochastische Darstellung sphärischer Verteilungen in (1.6). Es existieren jedoch auch andere definierende Eigenschaften sphärischer Verteilungen (vgl. mit Theorem 1.4), welche ihrerseits die Basis für eine Verallgemeinerung sein können.

Wir betrachten in diesem Zusammenhang nun die in (Cambanis, Keener et al., 1983) eingeführte und später in (Fang, Kotz et al., 1990), (Gneiting, 1998) und (Gneiting, 2001) untersuchte Familie von α -symmetrischen Verteilungen, deren Vertreter eine verallgemeinerte Form von Eigenschaft (iii) in Theorem 1.4 aufweisen. Die zugehörigen charakteristischen Funktionen besitzen somit eine zum sphärischen Fall analoge Struktur.

Es folgt nun zunächst die Definition der α -symmetrischen Verteilungen in Anlehnung an (Fang, Kotz et al., 1990):

Definition 1.42. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha > 0$. Dann heißt ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ α -symmetrisch verteilt, falls eine Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so existiert, dass

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = h(|t|_\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (1.25)$$

Die α -symmetrischen charakteristischen Funktionen gleichen in ihrer (geometrischen) Struktur den in Theorem 1.13 beschriebenen $l_{n,p}$ -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichten. Aus diesem Zusammenhang zwischen α -symmetrischen Verteilungen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen ergibt sich auch die Bedeutung der Familie α -symmetrischer Verteilungen für diese Arbeit, deren zentrales Anliegen die geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ist. So wird die angedeutete Verbindung zum einen in Kapitel 5 für die geometrische Beschreibung der $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen verwendet. Zum anderen ergeben sich aus den geometrischen Betrachtungen zu $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen aber auch bisher nicht bekannte Eigenschaften α -symmetrischer Verteilungen, welche in Kapitel 6 dargelegt sind.

Aus Definition 1.42 folgt unmittelbar, dass alle sphärischen Verteilungen 2-symmetrisch sind und dass sich jede α -symmetrische Verteilung eindeutig aus dem Tripel (n, α, h) ergibt. Hierbei wird α auch als Index und h wie in Abschnitt 1.1 auch als charakteristischer Generator bezeichnet. Im Hinblick auf Theorem 1.23 und Darstellung (1.25) wird zudem deutlich, dass α -symmetrische Verteilungen für $\alpha \notin \{2, 4, 6, \dots\}$ keine Momente der Ordnung $[\alpha]$ oder höher besitzen, denn die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, ist in diesem Fall genau $([\alpha] - 1)$ -mal im Nullpunkt differenzierbar. Aufgrund der expliziten Darstellbarkeit der zugehörigen charakteristischen Funktionen existieren aber trotz dieser Tatsache eine Vielzahl von statistischen Anwendungsmöglichkeiten für α -symmetrische Verteilungen, vgl. hierzu auch mit (Zolotarev, 1986) und mit (Fang, Kotz et al., 1990).

Beispiel 1.43. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha \in (0, 2]$. Dann ist

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|^\alpha}{\alpha}\right), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

die charakteristische Funktion einer n -variater α -symmetrischer Verteilung mit charakteristischem Generator $h(x) = \exp(-x^\alpha/\alpha)$, $x \geq 0$, vgl. mit (Fang, Kotz et al., 1990).

Beispiel 1.44. Seien $n = 2$ und $\alpha \geq 1$. Dann ist

$$\varphi(t) = \exp(-|t|_\alpha), \quad t \in \mathbb{R}^2,$$

die charakteristische Funktion einer bivariater α -symmetrischer Verteilung mit charakteristischem Generator $h(x) = \exp(-x)$, $x \geq 0$, vgl. mit (Fang, Kotz et al., 1990).

Der charakteristische Generator einer n -variater sphärischer Verteilung erzeugt im Falle $(n-1) \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ auch eine $(n-1)$ -variater sphärischer Verteilung und kann selber als univariate charakteristische Funktion aufgefasst werden, vgl. mit Bemerkung 1.6. Die hiermit verbundene Vererbungseigenschaft sphärischer charakteristischer Generatoren gilt auch für beliebige α -symmetrischer charakteristischer Generatoren. Aus diesem Grund und unter Berücksichtigung von Theorem 1.38 sowie Beispiel 1.39 kann der charakteristische Generator h aus Beispiel 1.43 für $\alpha > 2$ keine α -symmetrischer Verteilung erzeugen, denn in diesem Fall ist $h(t) = 1 + o(t^2)$, $t \rightarrow 0$.

Eine weitere Analogie zwischen sphärischer Verteilungen und α -symmetrischer Verteilungen besteht neben der Struktur der charakteristischen Funktionen und der Vererbung der zugehörigen charakteristischen Generatoren im Hinblick auf die Verteilung von Linearkombinationen $\langle a, X \rangle$ im Falle eines α -symmetrisch verteilten Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ und $a \in \mathbb{R}^n$, vgl. mit dem folgenden Theorem und Theorem 1.4.

Theorem 1.45. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha > 0$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Der Zufallsvektor X ist genau dann α -symmetrisch verteilt mit charakteristischem Generator h , wenn die charakteristische Funktion von $\langle a, X \rangle$ für alle $a \in S_{n,\alpha}$ durch $h \circ |\cdot|$ gegeben ist.
- (ii) Der Zufallsvektor X ist genau dann α -symmetrisch verteilt, wenn $\langle a, X \rangle \stackrel{d}{=} |a|_\alpha X_1$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Siehe (Fang, Kotz et al., 1990). □

Die charakteristische Funktion einer α -symmetrischer Verteilung ist mit Darstellung (1.25) konstant auf $S_{n,\alpha}(r)$, $r > 0$. Im Falle $\alpha = 2$ ist darüber hinaus bekannt, dass auch die durch Theorem 1.5 gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte einer absolutstetigen α -symmetrischer Verteilung als Hintereinanderausführung des verallgemeinerten Radius $|\cdot|_\alpha$ und einer skalaren Funktion darstellbar ist und somit in ihrer geometrischen Struktur der zugehörigen charakteristischen Funktion gleicht.

Für $\alpha \neq 2$ sind dagegen nur in ausgewählten Spezialfällen explizite oder strukturelle Dichtedarstellungen α -symmetrischer Verteilungen bekannt. Es existieren jedoch sehr wohl Wahrscheinlichkeitsdichten, welche in ihrer (geometrischen) Struktur den charakteristischen Funktionen α -symmetrischer Verteilungen gleichen. So unterscheiden sich stetig positiv definite $l_{n,\alpha}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten mit den Theoremen 1.13 und 1.34 nur durch einen Normierungsfaktor von einer α -symmetrischer charakteristischen Funktion. Auf der anderen Seite ist jede nichtnegative und integrierbare α -symmetrischer charakteristische Funktion nach geeigneter Normierung auch eine $l_{n,\alpha}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichte.

Der angedeutete Zusammenhang zwischen positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichten und charakteristischen Funktionen wird im nun folgenden Theorem 1.46 festgehalten, welches auf Satz 3.1.3 in (Laue, Riedel et al., 1999) basiert. Anschließend erfolgt in Definition 1.47 die Einführung des hiermit verbundenen Begriffes der Adjungiertheit von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Anlehnung an (Laue, Riedel et al., 1999), für welchen in der Literatur auch das Synonym der Dualität von Wahrscheinlichkeitsverteilungen existiert.

Theorem 1.46. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte mit zugehöriger charakteristischer Funktion φ . Dann existiert eine stetige und positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte \hat{f} mit zugehöriger charakteristischer Funktion $\hat{\varphi}$ so, dass

$$\hat{f}(x) = \hat{C}_0 \varphi(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

und

$$f(x) = C_0 \hat{\varphi}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

wobei $C_0 = f(0_n)$, $\hat{C}_0 = \hat{f}(0_n)$ und $(2\pi)^n C_0 \hat{C}_0 = 1$.

Beweis. Folgt aus Satz 3.1.3 in (Laue, Riedel et al., 1999). □

Definition 1.47. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte mit zugehöriger charakteristischer Funktion φ . Seien zudem \hat{f} und $\hat{\varphi}$ wie in Theorem 1.46 gewählt. Dann bezeichnen wir

- (i) f und \hat{f} als zueinander adjungierte Wahrscheinlichkeitsdichten ,
- (ii) φ und $\hat{\varphi}$ als zueinander adjungierte charakteristische Funktionen ,

und

- (iii) die Verteilungen von φ und $\hat{\varphi}$ als zueinander adjungiert .

Korollar 1.48. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha > 0$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative und integrierbare α -symmetrische charakteristische Funktion mit zugehöriger stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte f . Dann existiert (mit den Bezeichnungen aus Theorem 1.46) eine $l_{n,\alpha}$ -symmetrische adjungierte Verteilung mit der stetig positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte \hat{f} und der charakteristischen Funktion $\hat{\varphi}$.

Beweis. Folgt aus Theorem 1.46. □

In Korollar 1.48 wird eine für diese Arbeit wichtige Verbindung zwischen α -symmetrischen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen aufgezeigt. So gibt es zumindest für einige Kombinationen von $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha > 0$ eine nichtleere Familie n -variater α -symmetrischer Verteilungen, deren Vertreter adjungierte Verteilungen von $l_{n,\alpha}$ -symmetrischen Verteilungen sind. Es stellt sich jedoch die Frage, für welche Kombinationen von n und α dies der Fall ist und unter welchen Bedingungen überhaupt die Existenz einer charakteristischen Funktion mit der in (1.25) angegebenen Gestalt sichergestellt ist. Im Hinblick auf die zuletzt genannte Problemstellung verdeutlichen die Beispiele 1.43 und 1.44, dass im bivariaten Fall für beliebig wählbares $\alpha > 0$ nichtkonstante α -symmetrische charakteristische Funktionen existieren. Mit Beispiel 1.43 ist für $\alpha \in (0, 2]$ zudem auch im multivariaten Fall eine nichtkonstante α -symmetrische charakteristische Funktion gegeben. Es konnte aber in (Zastavnyi, 1993) gezeigt werden, dass im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und $\alpha > 2$ nur die konstante charakteristische Funktion $\varphi(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}^n$, die in (1.25) angegebene Struktur besitzt.

Bei der Beantwortung der Frage nach Vertretern adjungierter α -symmetrischer und $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen werden die Betrachtungen zu $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen in den Kapiteln 2-5 eine entscheidende Rolle spielen. Auf der Basis der hier hergeleiteten Resultate erfolgt in Abschnitt 6.4 (neben dem im Folgenden angeführten Beispiel 1.49) die Spezifikation einer Familie von adjungierten $l_{n,p}$ -symmetrischen und α -symmetrischen Verteilungen, welche darüber hinaus auch bisher nicht publizierte Beispiele α -symmetrischer charakteristischer Funktionen liefert.

Beispiel 1.49. Seien n, α und φ wie in Beispiel 1.43 gewählt. Dann ist φ eine positive und integrierbare α -symmetrische charakteristische Funktion. Es existiert daher mit Korollar 1.48 eine $l_{n,\alpha}$ -symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte \hat{f} mit $\hat{f}(x) = \hat{C}_0 \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Aus der Proportionalität von \hat{f} und der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{n,\alpha}$ der α -verallgemeinerten Normalverteilung (vgl. mit Definition 1.7) folgt hierbei, dass $\hat{f} = f_{n,\alpha}$, d.h.

$$\hat{C}_0 = f_{n,\alpha}(0_n) = \left(\frac{\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}}{2\Gamma(\frac{n}{\alpha})} \right)^n .$$

Für die charakteristische Funktion $\hat{\varphi}$ von $N_{n,\alpha}$ gilt somit

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= \hat{C}_0 (2\pi)^n f(x) \\ &= \left(\frac{\pi \alpha^{1-\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{n}{\alpha})} \right)^n f(x) \quad , x \in \mathbb{R}^n , \end{aligned}$$

wobei f die zu φ gehörige (stetige) α -symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet.

Das Vorschreiten bei der Erforschung α -symmetrischer Verteilungen wird in (Fang, Kotz et al., 1990) als nur sehr langsam eingeschätzt. So sind bisher nur in Spezialfällen explizite oder strukturelle Darstellungen α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten bekannt. Es ist ferner bis auf eine Ausnahme bisher nicht gelungen, die stochastische Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen aus Definition 1.2 für $\alpha \neq 2$ zu α -verallgemeinern. In diesem Zusammenhang erfolgt nun die Angabe eines Resultates aus (Cambanis, Keener et al., 1983), welches zumindest im Falle $\alpha = 1$ ein Analogon von (1.6) beinhaltet.

Theorem 1.50. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $h_{n,2} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ der charakteristische Generator von ω_n und sei

$$h_0(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^1 h_{n,2}(w^{-1}x^2) w^{-1/2} (1-w)^{(n-3)/2} dw \quad , x \geq 0 .$$

Dann besitzt ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ genau dann eine 1-symmetrische Verteilung, wenn

$$X \stackrel{d}{=} RY ,$$

wobei Y ein 1-symmetrisch verteilter Zufallsvektor mit charakteristischem Generator h_0 ist, R eine P-f.s. nichtnegative Zufallsgröße ist und R und Y stochastisch unabhängig sind.

Beweis. Siehe (Cambanis, Keener et al., 1983). □

Die Familie 1-symmetrischer Verteilungen entspricht mit Theorem 1.50 der Familie aller Skalenmischungen einer 1-symmetrischen (Basis-)Verteilung. Es ist somit in (Cambanis, Keener et al., 1983) gelungen, für $\alpha = 1$ eine α -Verallgemeinerung der stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen herzuleiten. Im Falle $\alpha \notin \{1, 2\}$ ist dagegen kein α -Analogon von (1.6) bekannt. Aus den Betrachtungen zu $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen ergeben sich in Kapitel 6 dieser Arbeit jedoch auch neue Charakterisierungen für α -symmetrische Verteilungen. Hierzu zählen u.a. ein α -Analogon von (1.6) für eine Familie von α -symmetrischen Verteilungen im Falle $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ sowie stochastisch bzw. geometrisch interpretierbare Darstellungen der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten. Die in Abschnitt 6.4 erfolgende Spezifikation des bereits angedeuteten Zusammenhangs zwischen α -symmetrischen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen führt zudem auf neue Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen.

1.6 Unbegrenzt teilbare und stabile Verteilungen

In den Abschnitten 1.1, 1.2 und 1.5 wurden die in dieser Arbeit im Fokus stehenden Familien sphärischer, $l_{n,p}$ -symmetrischer und α -symmetrischer Verteilungen eingeführt. Ergänzend hierzu werden in diesem Abschnitt die Familien unbegrenzt teilbarer und stabiler Verteilungen betrachtet. Hierfür gibt es mehrere Beweggründe: Zum einen wird eine in Abschnitt 4.4 erfolgende Charakterisierung von $N_{n,p}$ hinsichtlich unbegrenzter Teilbarkeit und Stabilität in Kapitel 5 wichtige Aufschlüsse über die Geometrie $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen liefern. Zum anderen sind die symmetrisch stabilen Verteilungen eng verwandt mit den in Abschnitt 1.5 betrachteten α -symmetrischen Verteilungen. Wir möchten daher in diesem Abschnitt auch den Zusammenhang und die Unterschiede zwischen den α -symmetrischen Verteilungen und den bereits in (Lévy, 1923) untersuchten stabilen Verteilungen verdeutlichen. Nicht zuletzt besteht in dieser Arbeit aber auch deswegen ein Interesse an stabilen Verteilungen, weil die zugehörigen charakteristischen Funktionen im multivariaten Fall geometrisch interpretierbare Strukturen besitzen. Im Hinblick auf das zentrale Thema dieser Arbeit ergeben sich hieraus wichtige Anhalts- bzw. Vergleichspunkte bei der (in Kapitel 5 erfolgenden) Analyse $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen.

Die stabilen bzw. unbegrenzt teilbaren Verteilungen stellen insbesondere im Zusammenhang mit Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie sehr wichtige und bekannte Familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen dar. So gibt es zahlreiche Monographien und Textbücher, welche ausschließlich diesen Verteilungen gewidmet sind und über die in diesem Abschnitt vollzogenen Betrachtungen hinausgehen, vgl. z.B. mit (Gnedenko u. Kolmogorov, 1954), (Feller, 1971), (Samorodnitsky u. Taqqu, 1994) oder (Steutel u. v. Harn, 2004). Es folgt nun zunächst die Definition der unbegrenzten Teilbarkeit einer Verteilung in Anlehnung an (Steutel u. v. Harn, 2004).

Definition 1.51. Die Verteilung einer Zufallsvariablen X heißt unbegrenzt teilbar, falls für beliebig wählbares $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ u.i.v. Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_m so existieren, dass

$$X \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_m. \quad (1.26)$$

Aus Definition 1.51 ist sofort ersichtlich, dass eine unbegrenzt teilbare Verteilung auch eine unbegrenzt teilbare charakteristische Funktionen φ besitzt, d.h. $\varphi^{1/m}$ ist für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine charakteristische Funktion. Reellwertige und unbegrenzt teilbare charakteristische Funktionen können somit keine negativen Werte annehmen und man kann sogar zeigen, dass derartige Funktionen strikt positiv sind, vgl. hierzu mit (Steutel u. v. Harn, 2004).

Eine Verschärfung von Definition 1.51 liegt vor, wenn die Summanden Y_1, \dots, Y_m aus (1.26) nicht nur u.i.v. sondern (bis auf eine Verschiebung und eine Skalierung) auch wie X verteilt sind. Unbegrenzt teilbare Verteilungen dieser Art werden als stabil bezeichnet (siehe Definition 1.52 und (Lévy, 1923)), da der Verteilungstyp auch nach m -facher Teilung in gewisser Weise erhalten bleibt.

Definition 1.52. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann heißt die Verteilung einer n -variablen Zufallsvariablen X stabil, falls für beliebige Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ auch Konstanten $c_3 > 0$ und $d \in \mathbb{R}^n$ so existieren, dass

$$c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} \stackrel{d}{=} c_3 X + d, \quad (1.27)$$

wobei $X, X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ u.i.v. sind. Im Falle $d = 0_n$ heißt die Verteilung von X symmetrisch stabil.

Beispiel 1.53. Sei X_0, X_1, X_2, \dots eine Folge von u.i.v. Zufallsgrößen mit $X_0 \sim N_2$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dass

$$X_0 \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{\sqrt{m}} + \dots + \frac{X_m}{\sqrt{m}}.$$

Für $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ ist zudem

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{d}{=} \sqrt{c_1^2 + c_2^2} X_0.$$

Die univariate Standardnormalverteilung N_2 ist daher unbegrenzt teilbar und symmetrisch stabil.

Mit Definition 1.51 und Definition 1.52 sind stabile Verteilungen auch immer unbegrenzt teilbar. Die Umkehrung dieser Aussage gilt i. Allg. nicht. Im Falle einer symmetrisch stabilen Verteilung lässt sich zudem die Konstante c_3 aus (1.27) mithilfe einer eindeutig bestimmten Konstanten $\alpha \in (0, 2]$ als α -verallgemeinerter Radius des Vektors $(c_1, c_2)^T$ darstellen:

Theorem 1.54. *Eine Zufallsvariable X besitzt genau dann eine symmetrisch stabile Verteilung, wenn ein $\alpha \in (0, 2]$ so existiert, dass für alle $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$*

$$c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} \stackrel{d}{=} |(c_1, c_2)^T|_\alpha X, \quad (1.28)$$

wobei $X, X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ u.i.v. sind.

Beweis. Siehe (Feller, 1971). □

Die Verteilung von X aus Theorem 1.54 wird auch als symmetrisch α -stabil und die dazugehörige Konstante $\alpha \in (0, 2]$ als Stabilitätsindex bezeichnet. Eines der Hauptanliegen dieses Abschnittes ist der Vergleich symmetrisch α -stabiler Verteilungen mit den in Abschnitt 1.5 definierten α -symmetrischen Verteilungen. Als Vergleichskriterium wird hierbei die Struktur der zugehörigen charakteristischen Funktionen herangezogen. Aus diesem Grund wird nun zunächst eine Darstellung univariater symmetrisch α -stabiler charakteristischer Funktionen angegeben, welche auf (Lévy, 1937) zurückgeht.

Theorem 1.55. *Sei $\alpha \in (0, 2]$. Dann ist eine Zufallsgröße X genau dann symmetrisch α -stabil verteilt, wenn ein $c > 0$ so existiert, dass*

$$\mathbb{E} \exp(itX) = \exp(-c|t|^\alpha) \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe (Lévy, 1937). □

Beispiel 1.56. Der charakteristische Generator $h(x) = \exp(-x^\alpha/\alpha)$, $x \geq 0$, aus Beispiel 1.43 erzeugt für alle $\alpha \in (0, 2]$ eine univariate symmetrisch α -stabile charakteristische Funktion. Die zugehörige multivariate charakteristische Funktion

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|^\alpha}{\alpha}\right) \quad , t \in \mathbb{R}^n,$$

ist die charakteristische Funktion eines Zufallsvektors mit n u.i. α -stabil verteilten Komponenten. Es ist somit für alle $\alpha \in (0, 2]$ durch φ die charakteristische Funktion eines symmetrisch α -stabil verteilten Zufallsvektors gegeben.

Durch Beispiel 1.56 liegt nun ein erster Anhaltspunkt beim Vergleich der Familien α -symmetrischer und symmetrisch α -stabiler Verteilungen vor. So ist der Schnitt dieser beiden Familien für kein $\alpha \in (0, 2]$ leer, da symmetrisch α -stabil verteilte Zufallsvektoren mit u.i.v. Komponenten auch immer eine α -symmetrische Verteilung besitzen. Für einen umfassenderen Vergleich dieser beiden Familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird jedoch eine allgemeine Darstellung der zugehörigen charakteristischen Funktionen benötigt. Eine derartige Darstellung ist für die multivariaten symmetrisch α -stabilen Verteilungen im nun folgenden Theorem angegeben.

Theorem 1.57. *Seien $\alpha \in (0, 2]$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann besitzt ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ genau dann eine symmetrisch α -stabile Verteilung, wenn*

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \exp\left(-\int_{S_{n,\alpha}} |\langle t, z \rangle|^\alpha \sigma_\alpha(dz)\right) \quad , t \in \mathbb{R}^n. \quad (1.29)$$

Hierbei ist σ_α ein endliches, symmetrisches Maß auf $\mathfrak{B}_{n,\alpha}$, welches für $\alpha \in (0, 2)$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Folgt aus Theorem 2.3.1 und Proposition 2.3.8 in (Samorodnitsky u. Taquq, 1994). \square

Wir werden das Maß σ_α aus Theorem 1.57 auch als Spektralmaß bezeichnen. Eine multivariate symmetrisch α -stabile Verteilung wird folglich für $\alpha \in (0, 2)$ in eindeutiger Weise durch ihren Stabilitätsindex α und durch ihr Spektralmaß σ_α bestimmt. In der Literatur wird der Begriff des Spektralmaßes symmetrisch α -stabiler Verteilungen mitunter auch anders als in dieser Arbeit verwendet. So ist z.B. in (Samorodnitsky u. Taquq, 1994) die charakteristische Funktion von X aus (1.29) in alternativer Weise dargestellt als

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \exp \left(- \int_{S_{n,2}} |\langle t, z \rangle|^\alpha \sigma(dz) \right), \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (1.30)$$

Hierbei ist σ ein endliches, symmetrisches Maß auf $\mathfrak{B}_{n,2}$, welches für $\alpha \in (0, 2)$ eindeutig bestimmt ist. Das so durch (1.30) definierte Maß σ entspricht nicht dem in (1.29) verwendeten Spektralmaß σ_α . Es gilt jedoch der Zusammenhang

$$\sigma_\alpha = \tilde{\sigma} \circ T_\alpha,$$

wobei $T_\alpha(\vartheta) = \vartheta/|\vartheta|_2$, $\vartheta \in S_{n,\alpha}$, und $\tilde{\sigma}(dz) = |z|_\alpha^\alpha \sigma(dz)$, vgl. mit (Samorodnitsky u. Taquq, 1994).

Bemerkung 1.58. Seien $\alpha \in (0, 2]$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und σ_α ein endliches, symmetrisches Maß auf $\mathfrak{B}_{n,\alpha}$. Dann geht aus (Molchanov, 2009) hervor, dass die Funktion

$$t \rightarrow \left(\int_{S_{n,\alpha}} |\langle t, z \rangle|^\alpha \sigma_\alpha(dz) \right)^{1/\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (1.31)$$

positiv homogen ist und als das Minkowskifunktional $|\cdot|_F$ einer Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften aufgefasst werden kann:

- (i) F ist eine sternförmige Menge ;
- (ii) $0_n \in F^\circ$;
- (iii) F ist kompakt ;
- (iv) Das Minkowskifunktional $|\cdot|_F$ von F ist stetig .

Hierbei wird eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften (i)-(iv) auch als symmetrischer Sternkörper bezeichnet. Im Falle der Konvexität wird der zu (1.31) gehörige Sternkörper ferner eine L_α -Kugel genannt und es ist durch

$$t \mapsto \exp(-|t|_F^\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (1.32)$$

eine symmetrisch α -stabile charakteristische Funktion definiert, vgl. mit (Molchanov, 2009) bzw. mit (Koldobsky, 1992). Es existiert demnach auf der einen Seite zu jeder symmetrisch α -stabilen Verteilung ein nicht notwendigerweise konvexer, symmetrischer Sternkörper F , vgl. mit Theorem 1.57. Auf der anderen Seite erzeugt aber auch jede L_α -Kugel F eine symmetrisch α -stabile charakteristische Funktion mit der in (1.32) angegebenen Gestalt.

Beispiel 1.59. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha \in (0, 2]$. Dann ist

$$\varphi(t) = \exp(-|t|_\alpha^\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

die charakteristische Funktion eines symmetrisch α -stabil verteilten Zufallsvektors mit zugehörigem Sternkörper $K_{n,\alpha}$. Im Falle $\alpha \in [1, 2]$ ist $K_{n,\alpha}$ ferner eine L_α -Kugel.

Beispiel 1.60. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein symmetrisch α -stabil verteilter Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion wie in Beispiel 1.59 und sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Dann ist $X^* := MX$ symmetrisch α -stabil verteilt, denn für u.i.v. Zufallsvektoren $X^{(1)}, X^{(2)}, X$ und Konstanten $c_1 > 0, c_2 > 0$ ist

$$\begin{aligned} P\left(c_1^{1/\alpha} MX^{(1)} + c_2^{1/\alpha} MX^{(2)} \in S\right) &= P\left(c_1^{1/\alpha} X^{(1)} + c_2^{1/\alpha} X^{(2)} \in M^{-1}S\right) \\ &= P\left((c_1 + c_2)^{1/\alpha} X \in M^{-1}S\right) \\ &= P\left((c_1 + c_2)^{1/\alpha} MX \in S\right), \quad S \in \mathfrak{B}_n. \end{aligned}$$

Sei nun speziell $M = OD$ für eine orthogonale Matrix O und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mit $d_1 > 0, \dots, d_n > 0$. Dann gilt für den zu X^* gehörigen Sternkörper F , dass

$$\begin{aligned} F &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : |DO^T x|_\alpha^\alpha \leq 1\right\} \\ &= \left\{OD^{-1}y \in \mathbb{R}^n : |y|_\alpha^\alpha \leq 1\right\} \\ &= OD^{-1}K_{n,\alpha}. \end{aligned}$$

Der Sternkörper F kann daher als α -verallgemeinerter Ellipsoid bezeichnet werden und ist für $\alpha \in [1, 2]$ eine L_α -Kugel, vgl. mit Abbildung 5.

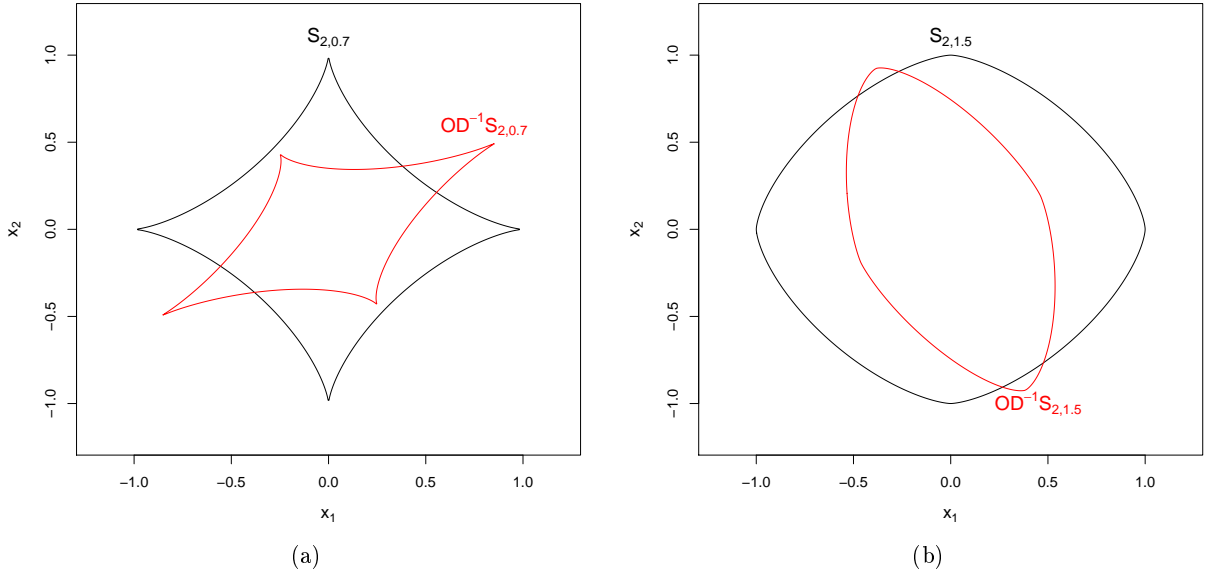


Abbildung 5: (a) Die Berandung $OD^{-1}S_{2,\alpha}$ einer α -verallgemeinerten Ellipse für $\alpha = 0.7$, $D = \text{diag}(1, 2)$ und $O = O(\pi/6)$.
(b) Die Berandung $OD^{-1}S_{2,\alpha}$ einer α -verallgemeinerten Ellipse für $\alpha = 1.5$, $D = \text{diag}(2, 1)$ und $O = O(\pi/8)$.

Beispiel 1.61. Seien $\alpha \in [1, 2)$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann folgt aus Bemerkung 1.58 und der Minkowski-Ungleichung (vgl. mit Satz 14.2 in (Bauer, 1992)), dass durch

$$t \mapsto \left(\int_{S_{n,\alpha}} |\langle t, z \rangle|^\alpha \omega_{n,\alpha}(dz) \right)^{1/\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

das Minkowskifunktional eines symmetrisch konvexen Sternkörpers F_α definiert ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\omega_{n,\alpha}$ erzeugt somit eine symmetrisch α -stabile Verteilung mit zugehöriger L_α -Kugel

$$F_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{E}(|\langle x, U \rangle|^\alpha) \leq 1\},$$

wobei $U \sim \omega_{n,\alpha}$. In Abbildung 6 sind die Niveaumengen der Norm $|\cdot|_{F_\alpha}$ für $n = 2$ und $\alpha \in \{1, 1.5\}$ dargestellt. Dass es sich bei $|\cdot|_{F_\alpha}$ (trotz der in Abbildung 6 sichtbaren Ähnlichkeiten) i. Allg. nicht um

einen p -verallgemeinerten Radius $|\cdot|_p$ handelt, kann durch die Betrachtung des Spezialfalles $n = 2$ und $\alpha = 1$ gezeigt werden. So folgt aus Korollar 5 in (Kalke, Richter et al., 2013), dass die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsgröße $|\langle a, X \rangle|$ durch

$$f(x) = \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x) \frac{a_1 e^{-\frac{x}{a_1}} - a_2 e^{-\frac{x}{a_2}}}{a_1^2 - a_2^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gegeben ist, sofern $X \sim N_{2,1}$ und $a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}_{\neq 0}^2$ mit $a_1 \neq a_2$. Für ein derart gewähltes $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}^2$ und einen Zufallsvektor $U \sim \omega_{2,1}$ gilt daher:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\langle a, U \rangle| &= \frac{1}{\mathbb{E}|X|_1} \mathbb{E}|\langle a, X \rangle| \\ &= \frac{1}{(a_1^2 - a_2^2) \mathbb{E}|X|_1} \int_0^\infty x \left(a_1 e^{-\frac{x}{a_1}} - a_2 e^{-\frac{x}{a_2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}|X|_1} \frac{a_1^3 - a_2^3}{(a_1^2 - a_2^2)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}|X|_1} \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2}{a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

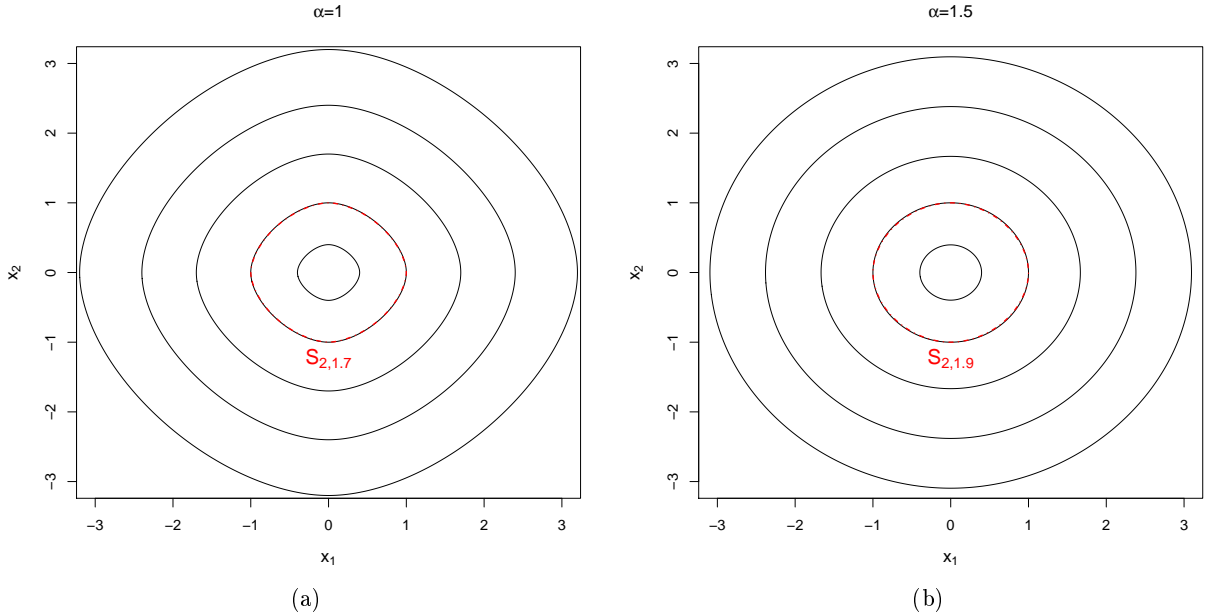


Abbildung 6: Numerisch berechnete Niveaulinien (vgl. mit Bemerkung 1.62) der in Beispiel 1.61 definierten Norm $|\cdot|_{F_\alpha}$ für verschiedene Werte von $\alpha \in [1, 2)$:
(a) Ein Vergleich zwischen den Niveaulinien von $|\cdot|_{F_1}$ und dem verallgemeinerten Kreis $S_{2,1,7}$.
(b) Ein Vergleich zwischen den Niveaulinien von $|\cdot|_{F_{1,5}}$ und dem verallgemeinerten Kreis $S_{2,1,9}$.

Bemerkung 1.62. Die numerische Approximation von Integralen erfolgt in dieser Arbeit mithilfe der R-Routine `integrate`. Diese verwendet ein adaptives Quadraturverfahren auf der Basis der Gauß-Kronrod Quadraturformel und des numerischen Softwarepaketes QUADPACK, vgl. z.B. mit (Piessens, de Doncker-Kapenga et al., 1983) und (Davis u. Rabinowitz, 1984).

Ein Vergleich der charakteristischen Funktionen symmetrisch α -stabiler und α -symmetrischer Verteilungen zeigt, dass sich die betrachteten charakteristischen Funktionen stets in ein positiv homogenes Funktional $|\cdot|_F$ und in eine skalare Funktion h zerlegen lassen. Während $|\cdot|_F$ das Minkowskifunktional eines symmetrischen Sternkörpers und somit als (im Falle $F \neq S_{n,2}$ verallgemeinerter) Radius interpretierbar ist, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 5.3, kann h (in Analogie zu Definition 1.42 und Bemerkung 1.6) als charakteristischer Generator bezeichnet werden. Der Unterschied zwischen beiden

Familien von Verteilungen besteht nun auf der einen Seite darin, dass der verallgemeinerte Radius symmetrisch α -stabiler charakteristischer Funktionen von den verallgemeinerten Radien $|\cdot|_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} > 0$, der α -symmetrischen charakteristischen Funktionen verschieden sein kann. Auf der anderen Seite werden α -symmetrische charakteristische Funktionen auch durch andere charakteristische Generatoren als die charakteristischen Generatoren $h(x) = \exp(-x^{\tilde{\alpha}})$, $x \geq 0$, $\tilde{\alpha} \in (0, 2]$, der symmetrisch α -stabilen Verteilungen erzeugt. So ist die Verteilung von X^* aus Beispiel 1.60 zum einen zwar symmetrisch α -stabil aber i. Allg. nicht $\tilde{\alpha}$ -symmetrisch für ein $\tilde{\alpha} > 0$. Zum anderen ist die in Beispiel 1.44 beschriebene Verteilung auch im Falle $\alpha \in [1, 2]$ nicht stabil. Es ist somit weder die Familie der α -symmetrischen Verteilungen in der Familie der symmetrisch α -stabilen Verteilungen enthalten, noch gilt der umgekehrte Fall. Eine α -symmetrische Verteilungen ist hierbei genau dann stabil, falls die zugehörige charakteristische Funktion ϕ für ein $c > 0$ darstellbar ist als

$$\phi(t) = \exp(-c|t|_{\alpha}^{\alpha}) \quad , t \in \mathbb{R}^n .$$

Zum Ende dieses Abschnittes werden nun noch einige notwendige bzw. hinreichende Bedingungen an unbegrenzt teilbare Verteilungen aufgeführt, welche für eine in Kapitel 4 erfolgende Charakterisierung von $N_{n,p}$ hinsichtlich unbegrenzter Teilbarkeit bzw. Stabilität bedeutend sind.

Theorem 1.63. *Eine univariate absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einer symmetrischen und auf $\mathbb{R}_{>0}$ log-konvexen Wahrscheinlichkeitsdichte ist unbegrenzt teilbar.*

Beweis. Siehe (Steutel u. v. Harn, 2004). □

Mithilfe von Theorem 1.63 kann in speziellen Fällen die unbegrenzte Teilbarkeit einer univariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung nachgewiesen werden. Da es sich bei der angegebenen Konvexitätseigenschaft jedoch nicht um eine notwendige Bedingung unbegrenzt teilbarer Verteilungen handelt, kann anhand von Theorem 1.63 nicht gezeigt werden, dass eine gegebene Verteilung nur begrenzt oft teilbar ist. Hierfür können jedoch die beiden folgende Theoreme aus (Sato, 1973) bzw. aus (Steutel u. v. Harn, 2004) sehr hilfreich sein, sofern die gegebene Verteilung nicht der Normalverteilung bzw. der Verteilung einer P -f.s. beschränkten Zufallsgröße entspricht.

Theorem 1.64. *Eine Zufallsgröße X mit einer unbegrenzt teilbaren Verteilung und $P(X = x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$, ist genau dann normalverteilt, wenn*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log(P(|X| > x))}{x \log x} = \infty .$$

Beweis. Siehe (Sato, 1973). □

Theorem 1.65. *Seien $a \geq 0$ und X eine Zufallsgröße mit $P(X = x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Verteilung von X nicht unbegrenzt teilbar, falls $P(|X| \leq a) = 1$.*

Beweis. Siehe (Steutel u. v. Harn, 2004). □

2 Eine geometrische Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen

2.1 Vorbetrachtungen

In Abschnitt 1.2 haben wir bereits bekannte geometrische Eigenschaften $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen aus der Literatur zitiert und als eines der Hauptziele dieser Arbeit die Erforschung der geometrischen Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen motiviert. Die Geometrie dieser Funktionen wird sich hierbei in Analogie zur Betrachtung der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf verschiedene Arten zeigen. So repräsentiert auf der einen Seite die stochastische Darstellung in (1.11) die Geometrie eines $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektors X , mit der sich X als unabhängiges Produkt eines verallgemeinerten Radius und eines auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ verallgemeinert gleichverteilten Zufallsvektors ergibt. Auf der anderen Seite lassen sich auch die zu einer absolutstetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung gehörigen Dichteniveaumengen in geometrischer Weise als die Niveaumengen des p -verallgemeinerten Radius $|\cdot|_p$ interpretieren, vgl. mit Theorem 1.13 und Abschnitt 1.3. Die Untersuchung der geometrischen Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wird nun in dieser Arbeit ebenfalls unter Verwendung zweier verschiedener Ansätze erfolgen. Während hierbei in Kapitel 5 die charakteristischen Niveaumengen in Analogie zu Theorem 1.4 (iii) geometrisch beschrieben werden, liegt der Fokus in diesem Kapitel auf der Analyse des Einflusses von Darstellung (1.11) auf die Struktur einer $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion. Wir werden in diesem Zusammenhang in den Abschnitten 2.2 und 2.3 zunächst die Spezialfälle $p = 2$ und $p = 1$ betrachten und die Aussagen von Schoenberg bzw. Ng und Tian zur Struktur $l_{n,2}$ -symmetrischer bzw. $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen zitieren und geometrisch interpretieren. Anschließend wird in Abschnitt 2.4 die p -Verallgemeinerung dieser Aussagen erfolgen. Mithilfe der in diesem Zusammenhang präsentierten geometrischen Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wird es zum ersten Mal möglich sein, eine beliebige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung anhand ihrer charakteristischen Funktion definieren und geometrisch beschreiben zu können. In Abschnitt 2.5 wird darüber hinaus die Bedeutung der in Abschnitt 2.4 bewiesenen geometrischen Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen für wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen demonstriert. Die hier hergeleiteten stochastischen Darstellungen $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen werden bei der in Kapitel 5 erfolgenden geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen als auch bei der in Kapitel 6 vollzogenen Charakterisierung α -symmetrischer Verteilungen zur Anwendung kommen.

2.2 Schoenbergs Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen

Die charakteristischen Funktionen sphärischer Verteilungen wurden bereits in Abschnitt 1.1 thematisiert. Hierbei folgt aus Theorem 1.4, dass sich sphärische charakteristische Funktionen immer als Hintereinanderausführung der euklidischen Norm und eines charakteristischen Generators darstellen lassen. Da die sphärischen charakteristischen Niveaumengen somit auch Niveaumengen des euklidischen Radius $|\cdot|_2$ sind, kann Theorem 1.4 (iii) als geometrische Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen verstanden werden. Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit eines geometrischen Zugangs zu den betrachteten Funktionen. So liefert das folgende Theorem aus (Schoenberg, 1938) analoge geometrische Interpretationen wie die stochastische Darstellung (1.6) und wie eine an das Prinzip von Torricelli anlehrende Integrationsmethode, welche in (Richter, 1985) eingeführt wurde.

Theorem 2.1. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein sphärisch verteilter Zufallsvektor. Dann ist*

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \int_0^\infty \varphi_n(rt) dF(r) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

wobei φ_n die charakteristische Funktion von ω_n bezeichnet und F die Verteilungsfunktion von $|X|_2$ ist.

Beweis. Siehe (Schoenberg, 1938). □

Die Integraldarstellung aus Theorem 2.1 kann als geometrische Darstellung einer sphärischen charakteristischen Funktion bezeichnet werden, denn durch $\varphi_n(rt)$, $t \in \mathbb{R}^n$, ist die charakteristische Funktion der Gleichverteilung auf $S_{n,2}(r)$ gegeben. Die mit der stochastischen Darstellung (1.6) verbundene (und euklidisch geprägte) Geometrie sphärischer Verteilungen wird daher in (2.1) widergespiegelt. So lässt das Resultat aus Theorem 2.1 die folgende heuristische Interpretation zu: Die charakteristische Funktion eines sphärisch verteilten Zufallsvektors RU ergibt sich als die gewichtete Summe sämtlicher charakteristischer Funktionen von Gleichverteilungen auf Sphären $S_{n,2}(r)$, $r \geq 0$, wobei die Gewichtung mithilfe der Wahrscheinlichkeit dafür erfolgt, dass sich die Radiusvariable R in einer infinitesimal kleinen Umgebung des Radius r befindet.

Die Bezeichnung als geometrische Darstellung einer sphärischen charakteristischen Funktion ist zudem dadurch motiviert, dass die mit (2.1) verbundene Berechnungsmethode sphärischer charakteristischer Funktionen strukturell an die in (Richter, 1985) eingeführte und u.a. in (Richter, 1991), (Ittrich, Krause et al., 2000), (Günzel, Richter et al., 2012) und (Kalke, Richter et al., 2013) verwendete verallgemeinerte Indivisiblenmethode zur Berechnung sphärischer Wahrscheinlichkeitsintegrale erinnert. Das Lebesguemaß $\mu_n(A)$ einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n$ kann in diesem Zusammenhang dargestellt werden als

$$\mu_n(A) = \int_0^\infty \mathfrak{D}_n(A \cap S_{n,2}(r)) dr, \quad (2.2)$$

vgl. auch mit (Richter, 2007). Als Grundstein dieser geometrischen Darstellung des Lebesguemaßes kann das aus der Anschauung gewonnene Prinzip von Torricelli bezeichnet werden, nach welchem zwei Flächen F_1 und F_2 zwischen zwei konzentrischen Kreisen K_1 und K_2 denselben Flächeninhalt besitzen, wenn die Teilmengen $K \cap F_1$ und $K \cap F_2$ eines beliebigen konzentrischen Kreises K zwischen K_1 und K_2 jeweils gleiche Bogenlängen besitzen, vgl. mit (Richter, 1991). Die in (2.2) dargestellte Verallgemeinerung dieses Prinzips basiert u.a. auf der Einführung n -dimensionaler Kugelkoordinaten und auf dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 1.3. Heuristisch betrachtet ergibt sich $\mu_n(A)$ hierbei als Summe sämtlicher Oberflächeninhalte von Schnittmengen $A \cap S_{n,2}(r)$, $r > 0$, wobei die Sphären $S_{n,2}(r)$ in diesem Zusammenhang auch als verallgemeinerte Indivisiblen bezeichnet werden können, vgl. mit Abbildung 7. Die charakteristischen Funktionen der Gleichverteilungen auf denselben verallgemeinerten Indivisiblen werden in (2.1) zur Bestimmung einer sphärischen charakteristischen Funktion in der beschriebenen Art und Weise gewichtet und „summiert“.

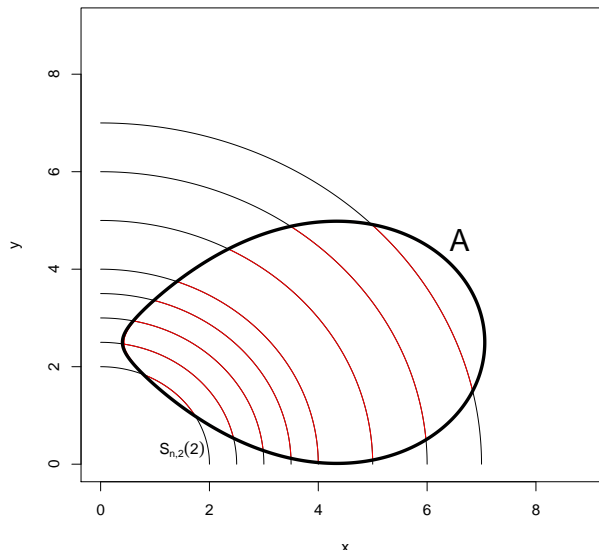


Abbildung 7: Die verallgemeinerte Indivisiblenmethode I: Das Volumen einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n$ ergibt sich als Integral über alle Oberflächeninhalte der (rot markierten) Schnitte von A mit den verallgemeinerten Indivisiblen $S_{n,2}(r)$.

Mit Theorem 2.1 ist neben den dargestellten Interpretationsmöglichkeiten auch eine Möglichkeit zur effizienten Berechnung und Untersuchung sphärischer charakteristischer Funktionen verbunden. Eine beliebige sphärische charakteristische Funktion kann unter diesem Aspekt auf die charakteristische

Funktion φ_n der Gleichverteilung auf $S_{n,2}$ zurückgeführt werden. Dies hat bei Kenntnis von φ_n zur Folge, dass sich ein n -dimensionales Integrationsproblem zu einem eindimensionalen Integrationsproblem vereinfachen lässt. Im Falle der konkreten Anwendung von (2.1) kommt hierbei erleichternd hinzu, dass die charakteristische Funktion φ_n mithilfe der wohlbekannten skalaren Besselfunktion J_k (der ersten Art und der Ordnung k) berechnet werden kann, vgl. hierzu auch mit (Watson, 1995).

Theorem 2.2. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist*

$$\varphi_n(t) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|t|_2}\right)^{n/2-1} J_{n/2-1}(|t|_2) \quad , t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}.$$

Beweis. Siehe (Schoenberg, 1938). □

2.3 Ng und Tians Darstellung $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen

Der Fall $p = 1$ stellt eine Besonderheit unter den nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen dar. Zwar ist der Basisvektor U_p aus Gleichung (1.11) auch in diesem Fall p -verallgemeinert gleichverteilt auf $\mathfrak{B}_{n,p}$, allerdings entspricht die 1-verallgemeinerte Gleichverteilung $\omega_{n,1}$ der Gleichverteilung auf $S_{n,1}$, da der 1-verallgemeinerte Oberflächeninhalt $\mathfrak{D}_{n,1}$ proportional zum euklidischen Oberflächeninhalt \mathfrak{D}_n ist, vgl. mit Bemerkung 1.9. Aus diesem Grund kann im Zusammenhang mit $l_{n,1}$ -symmetrischen Verteilungen auch vom pseudo-euklidischen Fall gesprochen werden. Für die zugehörigen charakteristischen Funktionen dieser Verteilungen ist kein Analogon von Eigenschaft (iii) aus Theorem 1.4 bekannt. Eine geometrische Beschreibung $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen im Sinne einer Zerlegung in einen (u.U. verallgemeinerten) Radius und in einen charakteristischen Generator kann daher nicht auf der Basis von bereits publizierten Resultaten erfolgen. Es sei hier jedoch auf das Kapitel 5 bzgl. charakteristische Generatoren $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen verwiesen, in welchem auch für eine Vielzahl $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen derartige Zerlegungen hergeleitet werden. Ein zu Abschnitt 2.2 analoger geometrischer Zugang zu $l_{n,1}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen ist dagegen mit dem folgenden Theorem aus (Ng u. Tian, 2001) möglich:

Theorem 2.3. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein $l_{n,1}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektor. Dann ist*

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \int_0^\infty \varphi_{n,1}(rt) dF(r) \quad , t \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

wobei $\varphi_{n,1}$ die charakteristische Funktion von $\omega_{n,1}$ bezeichnet und F die Verteilungsfunktion von $|X|_1$ ist.

Beweis. Siehe (Ng u. Tian, 2001). □

Gleichung (2.3) kann in Analogie zu Gleichung (2.1) als geometrische Darstellung $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen bezeichnet werden. Die charakteristische Funktion $\varphi_{n,1}(rt)$, $t \in \mathbb{R}^n$, entspricht hierbei für $r \geq 0$ der charakteristischen Funktion eines auf $S_{n,1}(r)$ gleichverteilten Zufallsvektors. Aus diesem Grund ist mit Theorem 2.3 die folgende Heuristik möglich: Die charakteristische Funktion eines $l_{n,1}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektors RU_1 ergibt sich als die gewichtete Summe sämtlicher charakteristischer Funktionen von Gleichverteilungen auf verallgemeinerten Sphären $S_{n,1}(r)$, $r \geq 0$, wobei die Gewichtung mithilfe der Wahrscheinlichkeit dafür erfolgt, dass sich die verallgemeinerte Radiusvariable R in einer infinitesimal kleinen Umgebung des verallgemeinerten Radius r befindet. Die stochastische Darstellung $l_{n,1}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektoren sowie die hiermit verbundene nichteuklidische Geometrie des zugehörigen Basisvektors spiegeln sich somit auch in der mit (2.3) gegebenen Darstellung der entsprechenden charakteristischen Funktionen wider.

Die Funktion $\varphi_{n,1}(rt)$, $t \in \mathbb{R}^n$, kann in Anlehnung an das Indivisiblenprinzip von Cavalieri ferner als charakteristische Funktion der Gleichverteilung auf der verallgemeinerten Indivisiblen $S_{n,1}(r)$ angesehen werden. Nach diesem Prinzip besitzen zwei Flächen F_1 und F_2 zwischen zwei Parallelen P_1 und P_2 denselben Flächeninhalt, wenn die Teilmengen $P \cap F_1$ und $P \cap F_2$ einer beliebigen Parallelen P

zwischen P_1 und P_2 jeweils gleich lang sind, vgl. mit (Richter, 1991). Eine Verallgemeinerung des Cavalieri-Prinzips wurde im Kontext der Berechnung $l_{n,1}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsintegrale in (Henschel u. Richter, 2002) eingeführt und u.a. in (Kalke, Richter et al., 2013) verwendet. Das Lebesguemaß $\mu_n(A)$ einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n$ ergibt sich in diesem Zusammenhang als

$$\mu_n(A) = \int_0^\infty \mathfrak{D}_{n,1}(A \cap S_{n,1}(r)) dr \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \mathfrak{D}_n(A \cap S_{n,1}(r)) dr, \quad (2.5)$$

vgl. auch mit (Richter, 2007) und Abbildung 8.

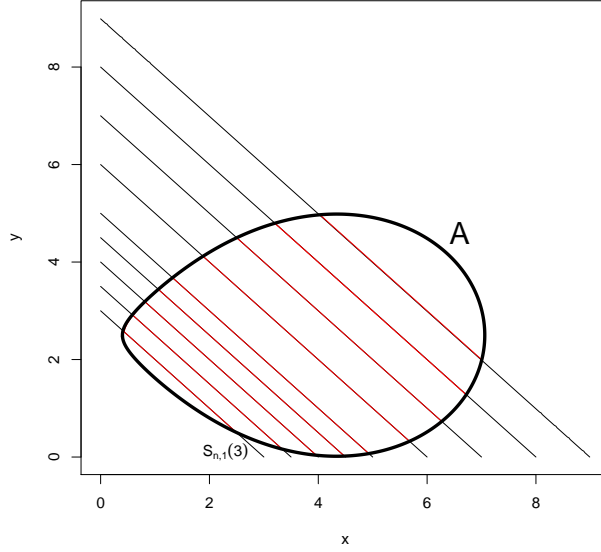


Abbildung 8: Die verallgemeinerte Indivisiblenmethode II: Das Volumen einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n$ ist proportional zum Integral über alle Oberflächeninhalte der (rot markierten) Schnitte von A mit den verallgemeinerten Indivisiblen $S_{n,1}(r)$.

Wie schon im sphärischen Fall lässt sich auch die charakteristische Funktion einer beliebigen $l_{n,1}$ -symmetrischen Verteilung auf eine einzige charakteristische Funktion zurückführen. Diese wird mit $\varphi_{n,1}$ bezeichnet und ist dem Basisvektor der $l_{n,1}$ -symmetrischen Verteilungen zuzuordnen. Hierdurch lassen sich auf der einen Seite bestimmte Eigenschaften von $\varphi_{n,1}$ auf andere $l_{n,1}$ -symmetrische charakteristische Funktionen übertragen, vgl. z.B. mit Abschnitt 5.2. Auf der anderen Seite kann Theorem 2.3 auch bei der Berechnung beliebiger $l_{n,1}$ -symmetrischer charakteristischer Funktion von Vorteil sein, sofern $\varphi_{n,1}$ bekannt ist. Eine schnelle und genaue Berechnung der charakteristischen Funktion von $\omega_{n,1}$ ist in diesem Zusammenhang z.B. mithilfe der im Folgenden angegebenen endlichen Reihendarstellung aus (Ng u. Tian, 2001) möglich.

Theorem 2.4. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $t_j^2 \neq t_k^2$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$. Dann ist

$$\varphi_{n,1}(t) = \begin{cases} \Gamma(n) \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{n}{2}-1} t_k^{n-1} \sin(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (t_k^2 - t_j^2)^{-1}, & n \text{ gerade}, \\ \Gamma(n) \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} t_k^{n-1} \cos(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (t_k^2 - t_j^2)^{-1}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Beweis. Siehe (Ng u. Tian, 2001). □

2.4 Eine p -Verallgemeinerung der Theoreme von Schoenberg und Ng/Tian

Nachdem in den Abschnitten 2.2 und 2.3 geometrische Darstellungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen in den Spezialfällen $p = 1$ und $p = 2$ angegeben und interpretiert wurden, erfolgt nun die Betrachtung des allgemeinen Falles $p > 0$. Hierbei sei daran erinnert, dass für $p \notin \{1, 2\}$ bisher nur im Spezialfall der p -verallgemeinerten Normalverteilung Darstellungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen in der Literatur zu finden sind, vgl. z.B. mit (Pogány u. Nadarajah, 2010) und (Pogány, 2010). Die in diesem Abschnitt in Theorem 2.5 präsentierte p -Verallgemeinerung der Theoreme 2.1 und 2.3 stellt daher unter mehreren Gesichtspunkten eine Innovation auf dem Gebiet der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen dar. So wird es mithilfe von Theorem 2.5 auf der einen Seite zum ersten Mal möglich sein, eine beliebige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung anhand einer strukturellen Darstellung der zugehörigen charakteristischen Funktion definieren zu können. Auf der anderen Seite wird sich die in Gleichung (1.11) zum Ausdruck kommende geometrische Struktur einer $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung mithilfe von Theorem 2.5 erstmals für beliebiges $p > 0$ auch in der zugehörigen charakteristischen Funktion widerspiegeln. Wir werden deshalb auch von der geometrischen Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen sprechen. Eine geometrische Charakterisierung im Sinne einer Zerlegung der charakteristischen Funktion in Analogie zu Theorem 1.4 (iii) in einen (u.U. verallgemeinerten) Radius und in einen charakteristischen Generator wird hierbei nicht in diesem Abschnitt sondern in Kapitel 5 angegeben.

Es folgt die angekündigte p -Verallgemeinerung der Theoreme 2.1 und 2.3:

Theorem 2.5. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektor. Dann ist*

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \int_0^\infty \varphi_{n,p}(rt) dF(r) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

wobei $\varphi_{n,p}$ die charakteristische Funktion von $\omega_{n,p}$ bezeichnet und F die Verteilungsfunktion von $|X|_p$ ist.

Beweis. Der Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ist genau dann $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilt, wenn X eine stochastische Darstellung wie in Definition 1.11 besitzt. Es genügt daher zu zeigen, dass im Falle einer P -f.s. nichtnegativen Zufallsgröße R mit der Verteilungsfunktion F und eines hiervon unabhängigen, p -verallgemeinert gleichverteilten Zufallsvektors U_p die folgende Darstellung erfüllt ist:

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, R U_p \rangle) = \int_0^\infty \varphi_{n,p}(rt) dF(r) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Hierzu gehen wir auf der linken Seite von (2.7) zum Erwartungswert der bedingten Erwartung bei gegebener Zufallsvariable R über. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, R U_p \rangle) &= \mathbb{E} \mathbb{E} (\exp(i\langle R t, U_p \rangle) | R) \\ &= \mathbb{E} \varphi_{n,p}(R t) \\ &= \int_0^\infty \varphi_{n,p}(rt) dF(r) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei die in (2.8) verwendete Darstellung der bedingten Erwartung von $\exp(i\langle t, R U_p \rangle)$ bei gegebener Zufallsvariable R aus der Unabhängigkeit von R und U_p sowie aus Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998) folgt. \square

Die mit der stochastischen Darstellung (1.11) verbundene Geometrie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen spiegelt sich mit Theorem 2.5 auch in den zugehörigen charakteristischen Funktionen wider. Wir betrachten hierzu die Verteilung eines Zufallsvektors $r \cdot U_p$, wobei r eine positive Konstante ist und U_p der p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf $S_{n,p}$ folgt. Dann ist

$$P(r \cdot U_p \in D) = \frac{\mathfrak{D}_{n,p}(D)}{\mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}(r))} \quad , \quad D \in \mathfrak{B}(S_{n,p}(r)).$$

Die Verteilung von $r \cdot U_p$ kann daher für $r \geq 0$ als p -verallgemeinerte Gleichverteilung auf $S_{n,p}(r)$ bezeichnet werden, vgl. mit Bemerkung 1.9. Die zugehörige charakteristische Funktion ist ferner durch $\varphi_{n,p}(rt)$, $t \in \mathbb{R}^n$, gegeben. In Analogie zu den beiden vorherigen Teilabschnitten kann hiermit die folgende heuristische Interpretation von Theorem 2.5 angegeben werden: Die charakteristische Funktion eines $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektors RU_p ergibt sich als die gewichtete Summe sämtlicher charakteristischer Funktionen von p -verallgemeinerten Gleichverteilungen auf verallgemeinerten Sphären $S_{n,p}(r)$, $r \geq 0$, wobei die Gewichtung mithilfe der Wahrscheinlichkeit dafür erfolgt, dass sich die verallgemeinerte Radiusvariable R in einer infinitesimal kleinen Umgebung des p -verallgemeinerten Radius r befindet.

Aufgrund der ausgeführten Interpretationsmöglichkeiten wird Gleichung (2.6) in dieser Arbeit auch als geometrische Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen bezeichnet. Dies ist auch dadurch motiviert, dass die mit (2.6) verbundene Berechnungsmethode $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen strukturell an die in (Richter, 2007) eingeführte und u.a. in (Richter, 2009), (Richter, 2012) und (Kalke, Richter et al., 2013) verwendete Integrationsmethode erinnert, welche sich an das geometrisch anschauliche Prinzip von Cavalieri und Torricelli anlehnt und daher als verallgemeinerte Indivisiblenmethode bezeichnet werden kann. Das Lebesguemaß $\mu_n(A)$ einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n$ genügt in diesem Zusammenhang für $p > 0$ der Darstellung

$$\mu_n(A) = \int_0^\infty \mathfrak{D}_{n,p}(A \cap S_{n,p}(r)) \, dr,$$

d.h. $\mu_n(A)$ ergibt sich heuristisch gesehen als die Summe sämtlicher p -verallgemeinerter Oberflächeninhalte von Schnittmengen $A \cap S_{n,p}(r)$, $r > 0$, wobei die verallgemeinerten Sphären $S_{n,p}(r)$ unter diesem Aspekt auch als verallgemeinerte Indivisiblen bezeichnet werden können, vgl. mit Abbildung 9. Die charakteristischen Funktionen der p -verallgemeinerten Gleichverteilungen auf denselben verallgemeinerten Indivisiblen werden in (2.6) zur Bestimmung einer $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion in der beschriebenen Art und Weise gewichtet und „summiert“.

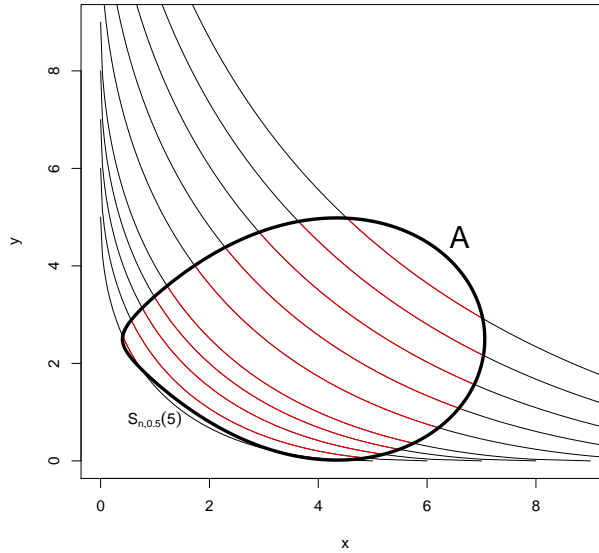


Abbildung 9: Die verallgemeinerte Indivisiblenmethode III: Das Volumen einer Menge $A \in \mathfrak{B}_n$ ergibt sich als das Integral über alle p -verallgemeinerten Oberflächeninhalte der (rot markierten) Schnitte von A mit den verallgemeinerten Indivisiblen $S_{n,p}(r)$.

Die in Theorem 2.5 erfolgte geometrisch-strukturelle Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ermöglicht es erstmals auch für $p \notin \{1, 2\}$, die Familie der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen anhand der zugehörigen charakteristischen Funktionen definieren zu können. Darüber hinaus kann Gleichung (2.6) sehr hilfreich bei der Berechnung bzw. bei der Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen sein, lässt sich doch jede dieser Funktionen auf die charakteristische Funktion $\varphi_{n,p}$ zurückführen. Aus den Kenntnissen über $\varphi_{n,p}$ lassen sich somit auch Schlussfolgerungen für andere $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen treffen. Als Beispiel sei hier eine zunächst

hypothetisch angenommene funktionale Zerlegung von $\varphi_{n,p}$ in eine skalare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und in eine n -variate homogene Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Art $\varphi_{n,p} = g \circ h$ genannt. Eine derartige Zerlegungseigenschaft hat mit (2.6) zur Folge, dass sich eine beliebige $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion mithilfe einer skalaren Funktion $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g_0 \circ h$ darstellen lässt. Dieser Gedanke wird bei der Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen in Kapitel 5 vertieft. Es ist jedoch bereits an dieser Stelle ersichtlich, dass ein Interesse an Darstellungen und Eigenschaften der Funktion $\varphi_{n,p}$ bei der Betrachtung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen naheliegend ist. Aus diesem Grund wird in Kapitel 3 eine ausführliche Untersuchung von $\varphi_{n,p}$ erfolgen.

Im nun folgenden Theorem 2.6 wird die charakteristische Funktion von $\omega_{n,p}$ erstmals für alle $p > 0$ mithilfe einer aus der Literatur bekannten Funktion explizit dargestellt. Hierzu wird eine Version \mathcal{F}_n der in (Daoust u. Srivastava, 1969) eingeführten Srivastava-Daoust multivariaten hypergeometrischen Funktion verwendet, welche für Parameter $b, c > 0$, $d, e \in \mathbb{R}_{>0}^n$ und $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ definiert ist durch

$$\mathcal{F}_n \left(\begin{array}{c} [b : \beta] ; [d : \delta] ; \\ [c : \gamma] ; [e : \varepsilon] ; \end{array} x \right) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{\times n}} H(k_1, \dots, k_n) \frac{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad (2.9)$$

wobei

$$H(k_1, \dots, k_n) = \frac{(b)_{\langle (k_1, \dots, k_n)^T, \beta \rangle} \prod_{j=1}^n (d_j)_{k_j \delta_j}}{(c)_{\langle (k_1, \dots, k_n)^T, \gamma \rangle} \prod_{j=1}^n (e_j)_{k_j \varepsilon_j}}, \quad (k_1, \dots, k_n)^T \in \mathbb{N}^n,$$

und

$$(y)_z := \frac{\Gamma(y+z)}{\Gamma(y)}, \quad y > 0, z \geq 0.$$

Durch das Parameterpaar $[b : \beta]$ wird hierbei der gemischte Pochhammerkoeffizienten $(b)_{\langle (k_1, \dots, k_n)^T, \beta \rangle}$ im Zähler von $H(k_1, \dots, k_n)$ erzeugt, während durch $[c : \gamma]$ der entsprechende gemischte Koeffizient im Nenner von $H(k_1, \dots, k_n)$ bestimmt wird. Darüber hinaus erfolgt mit $[d : \delta]$ die Definition der separaten Pochhammerkoeffizienten $(d_1)_{k_1 \delta_1}, \dots, (d_n)_{k_n \delta_n}$ im Zähler von $H(k_1, \dots, k_n)$. Das entsprechende Gegenstück im Nenner von $H(k_1, \dots, k_n)$ ist ferner $[e : \varepsilon]$. Im Falle $(b, \beta) = (c, \gamma)$ bzw. $(\beta, \gamma) = (0_n, 0_n)$ ist zudem

$$\mathcal{F}_n \left(\begin{array}{c} [b : \beta] ; [d : \delta] ; \\ [e : \gamma] ; [e : \varepsilon] ; \end{array} x \right) = \prod_{i=1}^n \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{(d_i)_{k_i \delta_i}}{(e_i)_{k_i \varepsilon_i}} \frac{x_i^{k_i}}{k_i!}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

d.h. \mathcal{F}_n entspricht dem Produkt von n skalaren verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen, vgl. hierzu auch mit der in Abschnitt 3.3 eingeführten Fox-Wright verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion.

Theorem 2.6. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\varphi_{n,p}(t) = \mathcal{F}_n \left(\begin{array}{c} [1 : 0_n] ; [\frac{1}{p} \cdot 1_n : \frac{2}{p} \cdot 1_n] ; \\ [\frac{n}{p} : \frac{2}{p} \cdot 1_n] ; [\frac{1}{2} \cdot 1_n : 1_n] ; \end{array} -\frac{1}{4} (t_1^2, \dots, t_n^2)^T \right), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $U = (U_1, \dots, U_n)^T \sim \omega_{n,p}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i \langle t, U \rangle) &= \mathbb{E} \cos(\langle t, U \rangle) \\ &= \mathbb{E} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (t_1 U_1 + \dots + t_n U_n)^{2m} \\ &= \mathbb{E} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{k \in \mathbb{N}^n : \langle k, 1_n \rangle = 2m} \frac{(2m)!}{k_1! \cdots k_n!} \prod_{i=1}^n (t_i U_i)^{k_i}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei Gleichung (2.10) aus dem Multinomialtheorem (vgl. mit Abschnitt 24.1.2 in (Abramowitz u. Stegun, 1972)) folgt. Aus (2.10) ergibt sich zudem für alle $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, U \rangle) = \mathbb{E} \lim_{l \rightarrow \infty} Z_l(t),$$

wobei

$$Z_l(t) := \sum_{m=0}^l (-1)^m \sum_{k \in \mathbb{N}^n : \langle k, 1_n \rangle = 2m} \frac{1}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{k_i} \right) \prod_{i=1}^n U_i^{k_i}, \quad l \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}^n,$$

und $|Z_l(t)| < g(t) := \exp((|t_1| + \dots + |t_n|)^2)$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^n$. Die Folge $(Z_l(t))_{l \in \mathbb{N}}$ besitzt somit für alle $t \in \mathbb{R}^n$ eine P -integrierbare Majorante $g(t)$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (siehe Satz 15.6 in (Bauer, 1992)) ist daher

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, U \rangle) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{k \in \mathbb{N}^n : \langle k, 1_n \rangle = 2m} \frac{1}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{k_i} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n U_i^{k_i} \right), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Lemma 1.16 gilt ferner

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n U_i^{k_i} \right) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{k_i+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\sum_{i=1}^n k_i}{p}\right) \Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)}, & \text{falls } (k_1/2, \dots, k_n/2)^T \in \mathbb{N}^n, \\ 0 & \text{falls } (k_1/2, \dots, k_n/2)^T \notin \mathbb{N}^n, \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \varphi_{n,p}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{k \in \mathbb{N}^n : \langle k, 1_n \rangle = m} \frac{1}{(2k_1)! \cdot \dots \cdot (2k_n)!} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{2k_i} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n U_i^{2k_i} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}^n : \langle k, 1_n \rangle = m} \frac{(-1)^m}{(2k_1)! \cdot \dots \cdot (2k_n)!} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{2k_i} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{2k_i+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2m}{p}\right) \Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + \frac{2}{p}\langle k, 1_n \rangle\right)} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}k_i\right) \Gamma(1+k_i)}{\Gamma(1+2k_i)} \frac{(-t_i^2)^{k_i}}{k_i!}, \quad t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Mit der Verdopplungsformel von Legendre (vgl. mit Formel 6.1.18 in (Abramowitz u. Stegun, 1972)) erhalten wir darüber hinaus, dass

$$\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(1+k_i)}{\Gamma(1+2k_i)} = \Gamma^n\left(\frac{1}{2}\right) \prod_{i=1}^n \frac{1}{4^{k_i} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k_i\right)}. \quad (2.12)$$

Es ergibt sich nun aus den Gleichungen (2.11) und (2.12), dass

$$\begin{aligned} \varphi_{n,p}(t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma^n\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + \frac{2}{p}\langle k, 1_n \rangle\right)} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}k_i\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k_i\right)} \frac{(-t_i^2/4)^{k_i}}{k_i!} \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\binom{n}{p}_{2\langle (k_1, \dots, k_n)^T, 1_n \rangle/p}} \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{p}\right)_{2k_i/p}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{k_i}} \frac{(-t_i^2/4)^{k_i}}{k_i!} \\ &= \mathcal{F}_n \left(\begin{matrix} [1 : 0_n] ; [\frac{1}{p} \cdot 1_n : \frac{2}{p} \cdot 1_n] ; \\ [\frac{n}{p} : \frac{2}{p} \cdot 1_n] ; [\frac{1}{2} \cdot 1_n : 1_n] ; \end{matrix} ; -\frac{1}{4} (t_1^2, \dots, t_n^2)^T \right), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

2.5 Eine Anwendung der geometrischen Darstellung

Die strukturelle Darstellung in (2.6) ist nicht nur für das geometrische Verständnis von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen von Bedeutung. So kann (2.6) in Ergänzung zur stochastischen Darstellung (1.11) bzw. zur Wahrscheinlichkeitsdichte-Darstellung (1.13) für konkrete wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen ausgenutzt werden. Um dies zu verdeutlichen, wird in diesem Abschnitt eine in (Gupta u. Song, 1997b) präsentierte stochastische Darstellung der p -verallgemeinerten Gleichverteilung erstmals mithilfe der Methode der charakteristischen Funktionen hergeleitet und mit neuen Interpretationen versehen. Die hierfür verwendete Methodik wird darüber hinaus für die Herleitung einer stochastischen Darstellung der n -variaten Randverteilung von $\omega_{m,p}$ zur Anwendung kommen, welche sich als sehr hilfreich für die Untersuchung des Nullstellen- bzw. Monotonieverhaltens von $\varphi_{m,p}$ (in Kapitel 3) und insbesondere auch für die geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen (in Kapitel 5) sowie für die Entwicklung neuartiger Charakterisierungen α -symmetrischer Verteilungen (in Kapitel 6) erweisen wird.

Bevor wir die angesprochenen stochastischen Darstellungen mithilfe der geometrischen Darstellung (2.6) herleiten können, benötigen wir zwei Lemmata zur Vorbereitung. Es folgt zunächst eine Aussage zur Eindeutigkeit einer stochastischen Darstellung wie in (1.11).

Lemma 2.7. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und seien $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ Zufallsvariablen, welche stochastisch unabhängig von einer Zufallsgröße R sind. Es gelte zudem für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dass $0 < \mathbb{E}|R|^m < \infty$ und $P(|X_i| \leq 1) = 1$. Dann folgt aus*

$$RX \stackrel{d}{=} RY,$$

dass

$$X \stackrel{d}{=} Y.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass RY verteilt ist wie RX . Dann existieren sämtliche Momente von RY , sodass für alle $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{\times n}$

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n Y_i^{m_i} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n X_i^{m_i}.$$

Für die charakteristische Funktion von X gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\langle t, X \rangle)^k}{k!} \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} (t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)^k \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, \mathbf{1}_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \prod_{i=1}^n (t_i X_i)^{m_i}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei Gleichung (2.13) aus dem Multinomialtheorem folgt, vgl. mit Abschnitt 24.1.2 in (Abramowitz u. Stegun, 1972). Es ist darüber hinaus

$$P\left(\left|\prod_{i=1}^n X_i^{m_i}\right| \leq 1\right) = 1, \quad (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{\times n}. \quad (2.14)$$

Mit (2.13) und (2.14) folgt nun analog zum Beweis von Theorem 2.6 aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (siehe Satz 15.6 in (Bauer, 1992)), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, \mathbf{1}_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{m_i}\right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n X_i^{m_i}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, \mathbf{1}_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{m_i}\right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n Y_i^{m_i}\right), \quad t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, Y \rangle) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{m_i} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n Y_i^{m_i} \right), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten hierzu die für $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$ durch

$$Z_l(t) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n |t_i|^{m_i} \right) \left(\prod_{i=1}^n |Y_i|^{m_i} \right), \quad l \in \mathbb{N},$$

gegebene monotone Folge $(Z_l(t))_{l \in \mathbb{N}}$. Für diese gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe Satz 11.4 in (Bauer, 1992)), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lim_{l \rightarrow \infty} Z_l(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n |t_i|^{m_i} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n |Y_i|^{m_i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n |t_i|^{m_i} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n |X_i|^{m_i} \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n |t_i|^{m_i} \right) \\ &= \exp(|t_1| + \dots + |t_n|), \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für alle $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, Y \rangle) &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \prod_{i=1}^n (t_i Y_i)^{m_i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}^n : \langle m, 1_n \rangle = k} \binom{k}{m_1, \dots, m_n} \left(\prod_{i=1}^n t_i^{m_i} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n Y_i^{m_i} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei die Vertauschung von Integration und Summation in (2.16) erneut mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz unter Verwendung der Majorante $g(t) = \exp(|t_1|)$, $t \in \mathbb{R}^n$, zulässig ist. Die Behauptung folgt nun aus (2.15) und (2.16). \square

Ein wichtiger Bestandteil der in diesem Abschnitt thematisierten stochastischen Darstellungen von $\omega_{n,p}$ und den zugehörigen multivariaten Randverteilungen ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, deren Vertreter absolutstetig bezüglich $\mathfrak{D}_{n,p}$ sind und ihre Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\mathfrak{B}_{n,p}^+$ konzentrieren. Die Einführung dieser Verteilungen basiert auf dem nun folgenden Lemma.

Lemma 2.8. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{\times n}$ und $p > 0$. Dann ist durch*

$$\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}(A) := \frac{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{m_1+\dots+m_n}{p}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} \int_{A \cap \mathcal{S}_{n,p}^+} \prod_{i=1}^n \theta_i^{m_i-1} \mathfrak{D}_{n,p}(d\theta), \quad A \in \mathfrak{B}_n,$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert. Im Falle eines Zufallsvektors $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$ mit $\Theta \sim \vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ ist $(\Theta_1^p, \dots, \Theta_{n-1}^p)^T \sim D_n(m_1/p, \dots, m_{n-1}/p, m_n/p)$.

Beweis. Siehe Anhang B. \square

Mit $\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ wird in dieser Arbeit stets die auf $\mathfrak{B}_{n,p}^+$ konzentrierte Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Lemma 2.8 bezeichnet. Wie wir im Folgenden erstmals unter Verwendung der Methode der charakteristischen Funktionen darlegen werden, spielt $\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ eine wichtige Rolle bei der stochastischen Beschreibung von Partitionierungen der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{n,p}$. Hierbei wurde bereits in (Gupta u. Song, 1997b) auf direktem Weg mithilfe von (1.11) gezeigt, dass für $p > 0$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k unabhängige Zufallsvektoren $U^{(1)} \sim \omega_{n_1,p}, \dots, U^{(k)} \sim \omega_{n_k,p}$ die Verteilungsaussage

$$U := \begin{pmatrix} R_1 U^{(1)} \\ \vdots \\ R_{k-1} U^{(k-1)} \\ \left(1 - |(R_1, \dots, R_{k-1})^T|_p^p\right)^{1/p} U^{(k)} \end{pmatrix} \sim \omega_{n_1+\dots+n_k,p} \quad (2.17)$$

gilt, falls $(R_1, \dots, R_{k-1})^T$ ein von $(U^{(1)}, \dots, U^{(k)})$ unabhängiger Zufallsvektor mit $(R_1^p, \dots, R_{k-1}^p)^T \sim D_k\left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_{k-1}}{p}, \frac{n_k}{p}\right)$ ist, vgl. mit Theorem 3.2 in (Gupta u. Song, 1997b). Die Partitionen eines p -verallgemeinert gleichverteilten Zufallsvektors sind somit $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilt, wobei sich der Zufallsvektor der zugehörigen p -verallgemeinerten Radiusvariablen mithilfe einer Dirichletverteilung stochastisch darstellen lässt. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Verteilung $\omega_{n,p}$ zwar bereits in früheren Arbeiten wie z.B. (Gupta u. Song, 1997b) untersucht wurde, dass aber die für diese Arbeit wesentliche geometrische Interpretation von $\omega_{n,p}$ als p -verallgemeinerte Gleichverteilung erst durch (Richter, 2009) gegeben ist, vgl. mit Abschnitt 1.2.

Mit der in Theorem 2.9 erfolgenden alternativen Herleitung von (2.17) wird die Verwendbarkeit von Darstellung (2.6) für konkrete wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen demonstriert. Aus der hier angegebenen Version der stochastischen Darstellung (2.17) eines partitionierten p -verallgemeinert gleichverteilten Zufallsvektors lassen sich darüber hinaus neue Interpretationen des Zufallsvektors $(R_1, \dots, R_k)^T$ der zugehörigen p -verallgemeinerten Radien ableiten.

Theorem 2.9. *Seien $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^{\times k}$ und $p > 0$. Seien zudem $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_k)^T$, $U^{(1)}, \dots, U^{(k)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvektoren mit $\Theta \sim \vartheta_{k,p,n_1,\dots,n_k}$, $U^{(1)} \sim \omega_{n_1,p}, \dots, U^{(k)} \sim \omega_{n_k,p}$. Dann ist*

$$\left(\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T}\right)^T \sim \omega_{n,p}, \quad (2.18)$$

wobei $n := n_1 + \dots + n_k$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Im ersten Schritt leiten wir eine Darstellung für die charakteristische Funktion von $Y := (\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T})^T$ her. Im zweiten Schritt werden diese Darstellung sowie Darstellung (2.6) für den Beweis einer stochastische Darstellung $X \stackrel{d}{=} R_p Y$ verwendet, wobei $X \sim N_{n,p}$, $R_p \stackrel{d}{=} |X|_p$ und R_p und Y stochastisch unabhängig sind. Im letzten Schritt wird schließlich unter Berücksichtigung von Lemma 2.7 die Schlussfolgerung getroffen, dass Y der p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ folgt.

1. Schritt: Für die charakteristische Funktion von $Y = (\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T})^T$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i \langle t, Y \rangle) &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left\langle t, \left(\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T} \right)^T \right\rangle \right) \middle| \Theta \right] \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^k \varphi_{n_i,p} \left(\Theta_i t^{(i)} \right) \\ &= \frac{p^{k-1} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{n_i}{p}\right)} \int_{S_{k,p}^+} \prod_{i=1}^k \left(\varphi_{n_i,p} \left(\theta_i t^{(i)} \right) \theta_i^{n_i-1} \right) \mathfrak{D}_{k,p}(d\theta) \quad , \quad t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \dots \\ t^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die in (2.19) verwendete Darstellung der bedingten Erwartung von $\exp(i \langle t, Y \rangle)$ bei gegebener Zufallsvariable Θ folgt hierbei aus Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998) sowie aus der Tatsache, dass $\Theta, U^{(1)}, \dots, U^{(k)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvektoren sind.

2. Schritt: Sei $X \sim N_{n,p}$. Dann folgt aus den Theoremen 2.5 und 1.10, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^\infty \varphi_{n,p}(rt) r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{p^{1-\frac{n_i}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n_i}{p}\right)} \int_0^\infty \varphi_{n_i,p}(rt^{(i)}) r^{n_i-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \\ &= \frac{p^{k-\frac{n}{p}}}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{n_i}{p}\right)} \int_{\mathbb{R}_{>0}^k} \exp\left(-\frac{|y|_p^p}{p}\right) \prod_{i=1}^k \varphi_{n_i,p}(y_i t^{(i)}) y_i^{n_i-1} dy \quad , t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \dots \\ t^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Die Einführung $l_{k,p}$ -sphärischer Koordinaten im zuletzt betrachteten Integral ergibt ferner mit (1.15), dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \frac{p^{k-\frac{n}{p}}}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{n_i}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{S_{k,p}^+} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) \prod_{i=1}^k \left(\varphi_{n_i,p}(r\theta_i t^{(i)}) \theta_i^{n_i-1}\right) \mathfrak{D}_{k,p}(d\theta) dr \\ &= \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^\infty \mathbb{E} \exp(i\langle rt, Y \rangle) r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \\ &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left(\exp(i\langle R_p t, Y \rangle) \mid R_p \right) \\ &= \mathbb{E} \exp(i\langle t, R_p Y \rangle) \quad , t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \dots \\ t^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{2.20}$$

wobei R_p verteilt ist wie $|X|_p$ und R_p und Y stochastisch unabhängig sind, vgl. mit Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998).

3. Schritt: Für den p -verallgemeinerten Radius $R_p = |X|_p$ eines Zufallsvektors $X \sim N_{n,p}$ gilt mit (2.20), dass

$$R_p Y \stackrel{d}{=} R_p U_p,$$

sofern U_p der p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ folgt und R_p stochastisch unabhängig von U_p sowie Y ist. Es ist zudem $P(|Y_i| \leq 1) = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, und

$$\mathbb{E} R_p^l = \frac{p^{\frac{l}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \Gamma\left(\frac{l+n}{p}\right) \in \mathbb{R}_{>0} \quad , l \in \mathbb{N},$$

vgl. mit (8.7). Unter Berücksichtigung von Lemma 2.7 folgt nun, dass

$$Y \stackrel{d}{=} U_p.$$

□

Beispiel 2.10. Seien $p > 0$, $n = 4$ und $n_1 = n_2 = 2$. Dann lässt sich die p -verallgemeinerte Gleichverteilung $\omega_{4,p}$ auf \mathfrak{B}_4 mithilfe der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{2,p}$ auf \mathfrak{B}_2 darstellen. Seien hierzu $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)^T$, $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvektoren mit $\Theta \sim \vartheta_{2,p,2,2}$, $U^{(1)} \sim \omega_{2,p}$ und $U^{(2)} \sim \omega_{2,p}$. Dann ist

$$\left(\Theta_1 U^{(1)T}, \Theta_2 U^{(2)T} \right)^T \sim \omega_{4,p}.$$

Aus Theorem 2.9 ergeben sich neue Interpretationen des Zufallsvektors $(R_1, \dots, R_k)^T$ der zu einem partitionierten, p -verallgemeinert gleichverteilten Zufallsvektor gehörigen p -verallgemeinerten Radien. Die Verteilung von $(R_1, \dots, R_k)^T$ wird in diesem Zusammenhang in (Gupta u. Song, 1997b) auf die bereits beschriebene Art und Weise mithilfe einer Dirichletverteilung dargestellt, vgl. mit (2.17) und mit (Arellano-Valle u. Richter, 2012) für eine analoge Darstellung im Spezialfall $k = 2$. Mithilfe von Theorem 2.9 wird nun aber auch deutlich, dass die Verteilung von $(R_1, \dots, R_k)^T$ auf der in Bemerkung 1.9 beschriebenen (i. Allg. nichteuklidischen) Geometrie basiert. So genügt die Dichte η_{p,n_1,\dots,n_k} von $(R_1, \dots, R_k)^T$ bezüglich des p -verallgemeinerten Oberflächeninhaltes $\mathfrak{D}_{k,p}$ der Darstellung

$$\eta_{p,n_1,\dots,n_k}(\theta) = \frac{p^{k-1} \Gamma\left(\frac{n_1+\dots+n_k}{p}\right)}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{n_i}{p}\right)} \prod_{i=1}^k \theta_i^{n_i-1} \quad , \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T \in S_{k,p}^+ ,$$

vgl. mit Lemma 2.8. Die in Theorem 2.9 verwendete Methode des Partitionierens der Dimension n in k Teildimensionen n_1, \dots, n_k lässt sich zudem auch auf die multivariaten Randverteilungen von $\omega_{m,p}$ übertragen. Die sich hieraus ergebenden und im folgenden Theorem 2.12 angegebenen stochastischen Darstellungen multivariater Randverteilungen von $\omega_{m,p}$ werden in Abschnitt 3.4 eine wichtige Rolle bei der Untersuchung des Monotonie- und Nullstellenverhaltens von $\varphi_{n,p}$ einnehmen, welches wiederum für die in Kapitel 5 erfolgende geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen von Bedeutung sein wird.

Definition 2.11. Seien $p > 0$, $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $n \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist durch $\omega_{n,m,p}$ die n -variate Randverteilung von $\omega_{m,p}$ definiert. Die zugehörige charakteristische Funktion wird zudem mit $\varphi_{n,m,p}$ bezeichnet.

Die angekündigte Ausweitung von Theorem 2.9 auf multivariate Randverteilungen von $\omega_{m,p}$ ist im nachstehenden Theorem 2.12 festgehalten:

Theorem 2.12. Seien $p > 0$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^{\times k}$ und $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{\times k}$, wobei $m_i > n_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Seien zudem $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_k)^T$, $U^{(1)}, \dots, U^{(k)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\Theta \sim \vartheta_{k,p,m_1,\dots,m_k}$, $U^{(1)} \sim \omega_{n_1,m_1,p}$, \dots , $U^{(k)} \sim \omega_{n_k,m_k,p}$. Dann ist

$$\left(\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T}\right)^T \sim \omega_{n,m,p} , \quad (2.21)$$

wobei $m := m_1 + \dots + m_k$ und $n := n_1 + \dots + n_k$.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Korollar 2.13. Seien $p > 0$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^{\times n}$. Seien zudem $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$, $U^{(1)}, \dots, U^{(n)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\Theta \sim \vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$, $U^{(1)} \sim \omega_{1,m_1,p}$, \dots , $U^{(n)} \sim \omega_{1,m_n,p}$. Dann ist

$$\left(\Theta_1 U^{(1)}, \dots, \Theta_n U^{(n)}\right)^T \sim \omega_{n,m,p} , \quad (2.22)$$

wobei $m := m_1 + \dots + m_n$.

Beweis. Folgt aus Theorem 2.12 mit $n = k$ und $n_1 = \dots = n_k = 1$. □

Eine Konsequenz von Theorem 2.12 ist, dass sich multivariate Randverteilungen von $\omega_{m,p}$ durch niedrigdimensionale Randverteilungen von p -verallgemeinerten Gleichverteilungen $\omega_{m_i,p}$ darstellen lassen. So kann z.B. die multivariate Verteilung $\omega_{n,m,p}$ für $m \geq 2n$ mithilfe der univariaten Verteilungen $\omega_{1,m_1,p}, \dots, \omega_{1,m_n,p}$ modelliert werden, vgl. mit Korollar 2.13. Dies wird in Kapitel 3 dahingehend ausgenutzt, dass bestimmte Eigenschaften wie das Nullstellen- bzw. Monotonieverhalten der univariaten charakteristischen Funktion $\varphi_{1,m,p}$ auch auf die multivariate charakteristische Funktion $\varphi_{n,m,p}$ übertragen werden.

Beispiel 2.14. Seien $p > 0$ und $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)^T$, $U^{(1)}$ sowie $U^{(2)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\Theta \sim \vartheta_{2,p,3,2}$, $U^{(1)} \sim \omega_{2,3,p}$ und $U^{(2)} \sim \omega_{1,2,p}$. Dann ist

$$\left(\Theta_1 U^{(1)T}, \Theta_2 U^{(2)}\right)^T \sim \omega_{3,5,p} .$$

3 Die charakteristische Funktion der p -verallg. Gleichverteilung

3.1 Vorbetrachtungen

Die Relevanz der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,p}$ bei der Betrachtung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wird im Hinblick auf die geometrische Darstellung (2.6) deutlich. So ist $\varphi_{n,p}$ auf der einen Seite für das geometrische Verständnis $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen essentiell, vgl. mit Abschnitt 2.4. Auf der anderen Seite kann der in (2.6) dargestellte Zusammenhang auch für die Berechnung und die analytische Untersuchung einer beliebigen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion hilfreich sein.

Die folgenden Ausführungen finden daher unter zwei Gesichtspunkten statt. So möchten wir zum einen im Hinblick auf den Gesamtkontext dieser Arbeit die nötigen Grundlagen für weitere geometrische Beschreibungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen bereitstellen, vgl. hierzu mit Kapitel 5. Zum anderen ist dieses Kapitel aber auch der analytischen Erforschung eines wichtigen Spezialfalles $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen gewidmet. So sind die Darstellung (siehe Abschnitt 3.2 und Abschnitt 3.3) sowie die analytische Untersuchung von $\varphi_{n,p}$ zentrale Anliegen dieses Kapitels. Hierbei ist insbesondere das (in Abschnitt 3.4 thematisierte) Nullstellen- und Monotonieverhalten wesentlich für statistische Anwendungsmöglichkeiten, für die in Kapitel 5 angegebenen geometrischen Beschreibungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen sowie für eine in Kapitel 6 erfolgende Charakterisierung α -symmetrischer Verteilungen. An dieser Stelle sei hervorgehoben, dass der Spezialfall $p = 2$ aufgrund der in Theorem 2.2 dargestellten Beziehung von $\varphi_{n,2}$ zur Besselfunktion bereits sehr gut bekannt ist. Eine Vielzahl der relevanten Eigenschaften von $\varphi_{n,2}$ ergeben sich dabei aus den zahlreichen Monographien und Textbüchern zur Besselfunktion, vgl. z.B. mit (Watson, 1995). Der Fall $p = 2$ wird aus diesem Grund unter mehreren Aspekten als Anhaltspunkt bei der analytischen Untersuchung von $\varphi_{n,p}$ für $p \neq 2$ dienen.

Unabhängig von der speziellen Wahl des Formparameters $p > 0$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\omega_{n,p}$ symmetrisch, wodurch $\varphi_{n,p}$ für alle $p > 0$ die Eigenschaften (i)-(iv) aus Theorem 1.22 besitzt. Mit Lemma 1.16 existieren ferner sämtliche Momente von $\omega_{n,p}$, sodass auch die Eigenschaften (i)-(iv) aus Theorem 1.23 für die spezifische charakteristische Funktion $\varphi_{n,p}$ gelten. Die p -verallgemeinerte Gleichverteilung ist mit Theorem 1.65 zudem nicht unbegrenzt teilbar. Die Existenz von Nullstellen von $\varphi_{n,p}$ ist somit prinzipiell möglich. Für eine detaillierte Analyse des Nullstellen- und Monotonieverhaltens sei in diesem Zusammenhang auf Abschnitt 3.4 verwiesen.

Bei den folgenden Untersuchungen von $\varphi_{n,p}$ wird sich die Betrachtung der charakteristischen Funktion $\varphi_{k,n,p}$ als sehr hilfreich erweisen. So impliziert die Darstellung

$$\varphi_{k,n,p}(t) = \varphi_{n,p} \left((t^T, 0_{n-k}^T)^T \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^k ,$$

dass bestimmte Eigenschaften von $\varphi_{k,n,p}$ wie z.B. das Nullstellen- oder Monotonieverhalten auch Erkenntnisse über die Funktion $\varphi_{n,p}$ liefern, vgl. mit Abbildung 10. Hierbei besitzt insbesondere die univariate charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ mit der aus Korollar 2.13 folgenden Beziehung

$$\varphi_{k,m,p}(t) = \frac{p^{k-1} \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} \int_{S_{k,p}^+} \prod_{i=1}^k \left(\varphi_{1,m_i,p}(\theta_i t_i) \theta_i^{m_i-1} \right) \mathfrak{D}_{k,p}(d\theta) \quad , \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k , \quad (3.1)$$

einen wesentlichen Einfluss auf die analytische Erforschung von $\varphi_{k,n,p}$ bzw. $\varphi_{n,p}$, vgl. mit Abschnitt 3.4. Die Funktion $\varphi_{1,n,p}$ kann ferner als die charakteristische Funktion der Linearkombination $\langle a, U_p \rangle$ im Spezialfall $a = e_1$ angesehen werden, falls $U_p \sim \omega_{n,p}$. Derartige Linearkombinationen sind von entscheidender Bedeutung für die in Kapitel 5 angegebenen geometrischen Beschreibungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen. Wir werden hierfür ausnutzen, dass die charakteristische Funktion von $\langle a, U_p \rangle$ für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ganz ist und daher auf einem nichtleeren offenen Intervall nicht konstant sein kann, vgl. mit dem folgenden Lemma sowie mit Lemma 1.32.

Lemma 3.1. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und sei U_p ein Zufallsvektor, welcher der p -verallgemeinerten Gleichverteilung auf $\mathfrak{B}_{n,p}$ folgt. Dann ist die charakteristische Funktion von $\langle a, U_p \rangle$ ganzanalytisch.*

Beweis. Die euklidische Norm von U_p ist P -f.s. durch den Wert \sqrt{n} beschränkt. Es ist daher

$$P(|\langle a, U_p \rangle| \leq |a|_2 \sqrt{n}) = 1 \quad , \quad a \in \mathbb{R}^n .$$

Hiermit folgt für beliebiges $r > 0$, dass

$$\mathbb{E} \exp(r |\langle a, U_p \rangle|) \leq \exp(r |a|_2 \sqrt{n}) \quad , \quad a \in \mathbb{R}^n .$$

Unter Berücksichtigung von Theorem 1.29 ist die Verteilung von $\langle a, U_p \rangle$ somit für alle $a \in \mathbb{R}^n$ ganz-analytisch. \square

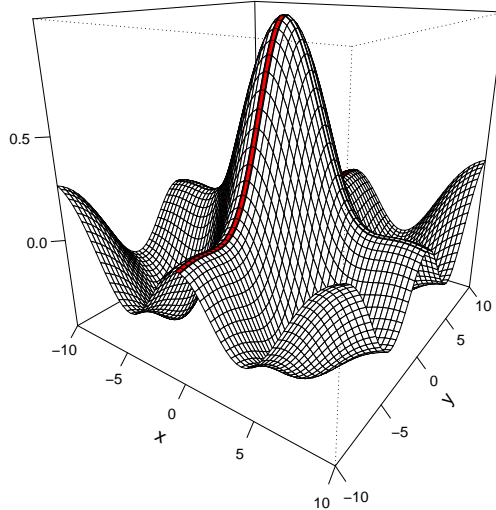


Abbildung 10: Die charakteristische Funktion $\varphi_{2,1/2}$ und die (rot gekennzeichnete) charakteristische Funktion $\varphi_{1,2,1/2}$.

3.2 Integraldarstellungen und Folgerungen für eine Verallg. von Poissons Integral

In diesem Abschnitt werden Integraldarstellungen der Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$ angegeben. Derartige Darstellungen können sowohl für die numerische Berechnung als auch für analytische Untersuchungen der betreffenden Funktionen sehr wertvoll sein. So werden wir auf der Basis der hergeleiteten Integraldarstellungen erste Aussagen über das Verhalten von $\varphi_{n,p}$ bzw. $\varphi_{k,n,p}$ auf einer Umgebung von Null beweisen und die erzielten Resultate unter Verwendung numerischer Quadraturverfahren grafisch veranschaulichen, vgl. hierzu mit Bemerkung 1.62, Abbildung 11 und Anhang C. Die Ausführungen dieses Abschnittes stehen hierbei auch im Zusammenhang mit verallgemeinerten Formen von Poissons Integral für die Besselfunktion J_ϑ der Ordnung $\vartheta > -1/2$. Als solches wird die rechte Seite der Darstellung

$$J_\vartheta(t) = \frac{2 \left(\frac{1}{2}t\right)^\vartheta}{\Gamma\left(\vartheta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1 - z^2)^{\vartheta-1/2} \cos(zt) dz \quad , \quad t \in \mathbb{R} , \quad (3.2)$$

bezeichnet, vgl. mit (Watson, 1995). Aus Gleichung (3.2) und Theorem 2.2 ergibt sich ferner die folgende Integraldarstellung der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,2}$:

$$\varphi_{n,2}(t) = \frac{2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}-1} \cos(z|t|_2) dz \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n . \quad (3.3)$$

Im Falle $p \neq 2$ lassen sich die Funktion $\varphi_{n,p}$ als auch ihre Einschränkungen $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, wie schon im sphärischen Fall mithilfe von numerisch und analytisch auswertbaren Integralen darstellen, vgl. hierzu mit dem folgenden Lemma.

Lemma 3.2. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $p > 0$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 1.18 und Theorem 1.20, dass

$$\varphi_{n,p}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1}}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \int_{K_{n-1,p}^\circ} \cos(\langle t_{(n-1)}, u \rangle) \cos\left(t_n (1 - |u|_p^p)^{1/p}\right) (1 - |u|_p^p)^{\frac{1}{p}-1} du \quad (3.4)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{n-1}}{2^n \Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \int_{\phi \in M_n^*} \cos(\langle t, SPH_p(1, \phi) \rangle) J^*(SPH_p)(\phi) d\phi \quad , t = \begin{pmatrix} t_{(n-1)} \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.5)$$

und

$$\varphi_{k,n,p}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^k}{\Gamma^k\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-k}{p}\right)} \int_{K_{k,p}^\circ} \cos(\langle t, u \rangle) (1 - |u|_p^p)^{\frac{n-k}{p}-1} du \quad , t \in \mathbb{R}^k. \quad (3.6)$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Durch die Betrachtung des Spezialfalles $k = 1$ in Lemma 3.2 ergibt sich für die univariate charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ die Darstellung

$$\varphi_{1,n,p}(t) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)} \int_0^1 (1 - z^p)^{\frac{n-1}{p}-1} \cos(zt) dz \quad , t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Die rechte Seite in (3.7) kann ferner mithilfe einer p -verallgemeinerten Version $\mathcal{P}_{n,p}$ von Poissons Integral beschrieben werden, wobei

$$\mathcal{P}_{n,p}(t) = \frac{p \left(\frac{t}{p}\right)^{\frac{n}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{p} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^1 (1 - z^p)^{\frac{n-1}{p}-1} \cos(zt) dz \quad , t \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Hierbei sei erwähnt, dass in der Literatur neben der in dieser Arbeit zur Definition von $\mathcal{P}_{n,p}$ betrachteten p -Verallgemeinerung der rechten Seite in (3.2) auch andere Integrale als Verallgemeinerungen von Poissons Integral bezeichnet werden, vgl. mit (Watson, 1995).

In Analogie zu den zahlreichen in der Literatur zu findenden Transformationen des in (3.2) dargestellten Integrals von Poisson ist im nun folgenden Lemma eine zu (3.7) alternative Darstellungsmöglichkeit der charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ mithilfe der p -verallgemeinerten trigonometrischen Funktionen angegeben:

Lemma 3.3. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$. Dann ist

$$\varphi_{1,n,p}(t) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t \cos_p(\theta)) \sin_p^{n-2}(\theta)}{\left|(\cos(\theta), \sin(\theta))^T\right|_p^{2/p}} d\theta \quad , t \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch die Substitution von $z = \cos_p(\theta)$ in (3.7), wobei

$$dz = -\frac{\sin_p^{p-1}(\theta)}{\left|(\cos(\theta), \sin(\theta))^T\right|_p^{2/p}} d\theta,$$

vgl. mit Abschnitt 4.4.1 in (Richter, 2007). □

Die charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, sind in (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) und (3.9) mithilfe von numerisch auswertbaren Integralen dargestellt, vgl. hierzu auch mit den auf (3.5) und (3.6) basierenden Abbildungen 10, 11 und 23-26. Derartige Darstellungen können bei der analytischen Untersuchung von Funktionen sehr wertvoll sein und sich in bestimmten Situationen auch als vorteilhaft gegenüber anderen Darstellungsarten wie z.B. (den in Abschnitt 3.3 betrachteten) Reihendarstellungen erweisen. Wir werden die Gleichungen (3.5) und (3.6) in diesem Zusammenhang zum einen dafür verwenden, um die charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, in diesem Abschnitt auf einer jeweils angegebenen Nullumgebung hinsichtlich des Vorzeichens, der Monotonie sowie der Krümmung zu beschreiben. Aus den hiermit verbundenen Aussagen zur charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ ergeben sich zudem Folgerungen für die in (3.8) definierte p -verallgemeinerte Version von Poissons Integral. Zum anderen werden die Darstellungen (3.5) und (3.6) auch bei der in Abschnitt 3.4 erfolgenden globalen Nullstellen- und Monotonieanalyse von $\varphi_{n,p}$ bzw. $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, zum Einsatz kommen. Im Hinblick auf den Gesamtkontext dieser Arbeit sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass die Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen eine wichtige Rolle bei der in Kapitel 5 thematisierten geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen spielen werden.

Es folgt nun zunächst eine Aussage zum Vorzeichen der charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ bzw. $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, welche insbesondere auch im Zusammenhang mit statistischen Anwendungen charakteristischer Funktionen eine große Bedeutung besitzt, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 3.4.

Theorem 3.4. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $p > 0$. Sei zudem $q(x) := x/(x-1)$, $x > 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Für $p > 1$ ist $\varphi_{n,p}(t) > 0$, falls $t \in K_{n,q(p)}(\pi/2)$;
- (ii) Für $p \in (0, 1]$ ist $\varphi_{n,p}(t) > 0$, falls $t \in [-\pi/2, \pi/2]^n$;
- (iii) Für $p > 1$ ist $\varphi_{k,n,p}(t) > 0$, falls $t \in K_{k,q(p)}(\pi/2)$;
- (iv) Für $p \in (0, 1]$ ist $\varphi_{k,n,p}(t) > 0$, falls $t \in [-\pi/2, \pi/2]^k$;
- (v) Im Falle $n > p + 1$ ist $\varphi_{1,n,p}(t) > 0$, falls $t \in [-\pi, \pi]$.

Beweis. Wir beweisen zunächst (i) und (iii): Seien hierzu $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $p > 1$, $t = (t_1, \dots, t_l)^T \in S_{l,q(p)}(\pi/2)$ und $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)^T \in S_{l,p}$. Dann folgt aus der Hölder-Ungleichung (vgl. mit Satz 14.1 in (Bauer, 1992)), dass

$$|\langle t, \theta \rangle| \leq |t|_{q(p)} \cdot |\theta|_p = \frac{\pi}{2}.$$

Hiermit ist aber auch $|\langle t, \theta \rangle| < \pi/2$ für alle $t = (t_1, \dots, t_l)^T \in K_{l,q(p)}(\pi/2)$ und $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)^T \in K_{l,p}^\circ$. Der Integrand in (3.5) bzw. in (3.6) ist unter den gegebenen Voraussetzungen somit μ_l -f.ü. positiv, wodurch die Behauptungen (i) und (iii) gezeigt sind.

Im nächsten Schritt werden die Behauptungen (ii) und (iv) bewiesen. Seien hierzu $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $p \in (0, 1]$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)^T \in S_{l,p}$ und $t = (t_1, \dots, t_l)^T \in [-\pi/2, \pi/2]^l$ mit $\max(|t_1|, \dots, |t_l|) = \pi/2$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\langle t, \theta \rangle| &\leq \max(|t_1|, \dots, |t_l|) \cdot |\theta|_1 \\ &\leq \frac{\pi}{2} |\theta|_p = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hiermit ist aber auch $|\langle t, \theta \rangle| < \pi/2$ für alle $t = (t_1, \dots, t_l)^T \in [-\pi/2, \pi/2]^l$ und $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)^T \in K_{l,p}^\circ$. Der Integrand in (3.5) bzw. in (3.6) ist daher auch in diesem Fall μ_l -f.ü. positiv, sofern $t \in \mathbb{R}^l$ wie angegeben gewählt wird. Hieraus folgen die Behauptungen (ii) und (iv).

Für den Beweis der Behauptung (v) betrachten wir die Funktion

$$h(z) := (1 - z^p)^{\frac{n-1}{p}-1}, \quad z \in [0, 1].$$

Diese ist für $n > p+1$ positiv und streng monoton fallend auf $(0, 1)$. Unter zusätzlicher Berücksichtigung von $|\cos(\pi/2 - x)| = |\cos(\pi/2 + x)|$, $x \in \mathbb{R}$, und Gleichung (3.7) ergibt sich nun

$$\text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) = \text{sign}(\varphi_{1,n,p}(0)) = 1 \quad , \quad t \in [-\pi, \pi] .$$

□

Bemerkung 3.5. Die in Theorem 3.4 angegebenen Nullumgebungen können unter Verwendung bekannter Ungleichungen für mehrfach differenzierbare charakteristische Funktionen in einigen Fällen noch erweitert werden. So ergibt sich z.B. aus Satz 3.3 1 in (Laue, Riedel et al., 1999), dass

$$\varphi_{1,n,p}(t) > \cos(\zeta_{n,p} t) \quad , \quad t \in [-\pi/\zeta_{n,p}, \pi/\zeta_{n,p}] ,$$

wobei $\zeta_{n,p}^2$ die Varianz von $\omega_{1,n,p}$ bezeichnet. Aus der in Beispiel 1.14 angeführten Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung von $\omega_{1,n,p}$ folgt ferner, dass $\zeta_{n,p} \in (0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$, d.h.

$$\varphi_{1,n,p}(t) > 0 \quad , \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2\zeta_{n,p}}, \frac{\pi}{2\zeta_{n,p}} \right] \supset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] . \quad (3.10)$$

Mit Gleichung (3.10) lassen sich daher die Aussagen (ii) und (iv) aus Theorem 3.4 im univariaten Fall $k = 1$ erweitern. Ob sich hiermit auch eine Erweiterung der Aussage (v) aus Theorem 3.4 erzielen lässt, hängt von der konkreten Wahl von $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>p+1}$ ab. So ergibt eine (auf 3 Nachkommastellen genaue) numerische Berechnung von $\zeta_{n,p}$, dass z.B. $\zeta_{60,58} \approx 0.577$ und $\zeta_{10,3} \approx 0.416$.

Es ist bereits angedeutet worden, dass sich aus den Integraldarstellungen (3.5) und (3.6) neben den (in Theorem 3.4 hergeleiteten) Aussagen zum Vorzeichen auch Monotonie- und Krümmungseigenschaften der zugehörigen charakteristischen Funktionen ableiten lassen. Zu diesem Zweck sind im folgenden Lemma zunächst die partiellen Ableitungen der in Lemma 3.2 dargestellten Integrale mithilfe der Leibniz'schen Regel zur Ableitung von Parameterintegralen angegeben. Die in diesem Zusammenhang hergeleiteten Integraldarstellungen der partiellen Ableitungen von $\varphi_{n,p}$ bzw. $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, können anschließend (analog zur Vorgehensweise in Theorem 3.4) ausgewertet und für die Angabe von Monotonie- und Krümmungseigenschaften verwendet werden.

Lemma 3.6. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $p > 0$. Seien zudem $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ und $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, k\}$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 1.18 und Theorem 1.20, dass*

$$\frac{\partial^m \varphi_{n,p}}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_m}}(t) = \begin{cases} \int_{M_n^*} \frac{\sin(\langle t, SPH_p(1, \phi) \rangle) J^*(SPH_p)(\phi)}{2 \cdot c(n, m, n-1, p)} \prod_{j=1}^m x_{i_j}(1, \phi) d\phi \quad , \quad \frac{m}{2} \notin \mathbb{N} \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \quad , \\ \int_{M_n^*} \frac{\cos(\langle t, SPH_p(1, \phi) \rangle) J^*(SPH_p)(\phi)}{2 \cdot c(n, m, n-1, p)} \prod_{j=1}^m x_{i_j}(1, \phi) d\phi \quad , \quad \frac{m}{2} \in \mathbb{N} \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \quad , \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial^m \varphi_{k,n,p}}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_m}}(y) = \begin{cases} \int_{K_{k,p}^\circ} \frac{\sin(\langle y, u \rangle) (1 - |u|_p^p)^{\frac{n-k}{p}-1}}{c(n, m, k, p)} \prod_{i=1}^m u_{j_i} du \quad , \quad \frac{m}{2} \notin \mathbb{N} \quad , \quad y \in \mathbb{R}^k \quad , \\ \int_{K_{k,p}^\circ} \frac{\cos(\langle y, u \rangle) (1 - |u|_p^p)^{\frac{n-k}{p}-1}}{c(n, m, k, p)} \prod_{i=1}^m u_{j_i} du \quad , \quad \frac{m}{2} \in \mathbb{N} \quad , \quad y \in \mathbb{R}^k \quad , \end{cases}$$

wobei

$$c(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{p}) := (-1)^{\lceil \frac{\tilde{m}}{2} \rceil} \frac{\Gamma^{\tilde{k}}\left(\frac{1}{\tilde{p}}\right) \Gamma\left(\frac{\tilde{n}-\tilde{k}}{\tilde{p}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{n}}{\tilde{p}}\right) \left(\frac{\tilde{p}}{2}\right)^{\tilde{k}}} \quad , \quad \tilde{n} \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \tilde{m} \in \mathbb{N}, \tilde{k} \in \{1, \dots, \tilde{n}-1\}, \tilde{p} > 0 .$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch die Anwendung der Leibniz'schen Regel zur Ableitung von Parameterintegralen (siehe (Bronshtein, Semendyayev et al., 2004)) auf die Darstellungen (3.5) und (3.6). \square

Durch die Angabe von Lemma 3.6 sind nun alle notwendigen Vorbereitungen für die Untersuchung von Monotonie- bzw. Krümmungseigenschaften der charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, auf einer geeignet gewählten Nullumgebung getroffen worden. Hierbei sei daran erinnert, dass $\varphi_{n,p}$ mit Theorem 1.38 ein lokales Maximum in 0_n besitzt. Die Funktionen $\varphi_{n,p}$ bzw. $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, sind somit auf einer Nullumgebung streng monoton fallend entlang der Strahlen $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, bzw. $\{\lambda \cdot y : \lambda \geq 0\}$, $y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\}$, vgl. mit den Abbildungen 10, 11 und 23-26. Das Monotonieverhalten $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen entlang derartiger Strahlen ist für die in Kapitel 5 erfolgende geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen von entscheidender Bedeutung. Die genannten Nullumgebungen werden daher im folgenden Theorem spezifiziert.

Theorem 3.7. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $p > 0$. Seien zudem $q(x) := x/(x-1)$, $x > 1$, und $r_1, r_2 \in [0, 1]$ mit $r_1 < r_2$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Für $p > 1$ ist $\varphi_{n,p}(r_1 t) > \varphi_{n,p}(r_2 t)$, falls $t \in K_{n,q(p)}(\pi) \setminus \{0_n\}$;
- (ii) Für $p \in (0, 1]$ ist $\varphi_{n,p}(r_1 t) > \varphi_{n,p}(r_2 t)$, falls $t \in [-\pi, \pi]^n \setminus \{0_n\}$;
- (iii) Für $p > 1$ ist $\varphi_{k,n,p}(r_1 t) > \varphi_{k,n,p}(r_2 t)$, falls $t \in K_{k,q(p)}(\pi) \setminus \{0_k\}$;
- (iv) Für $p \in (0, 1]$ ist $\varphi_{k,n,p}(r_1 t) > \varphi_{k,n,p}(r_2 t)$, falls $t \in [-\pi, \pi]^k \setminus \{0_k\}$;
- (v) $\varphi_{1,n,p}$ ist streng konkav auf $[-\pi/2, \pi/2]$.

Beweis. Siehe Anhang B. \square

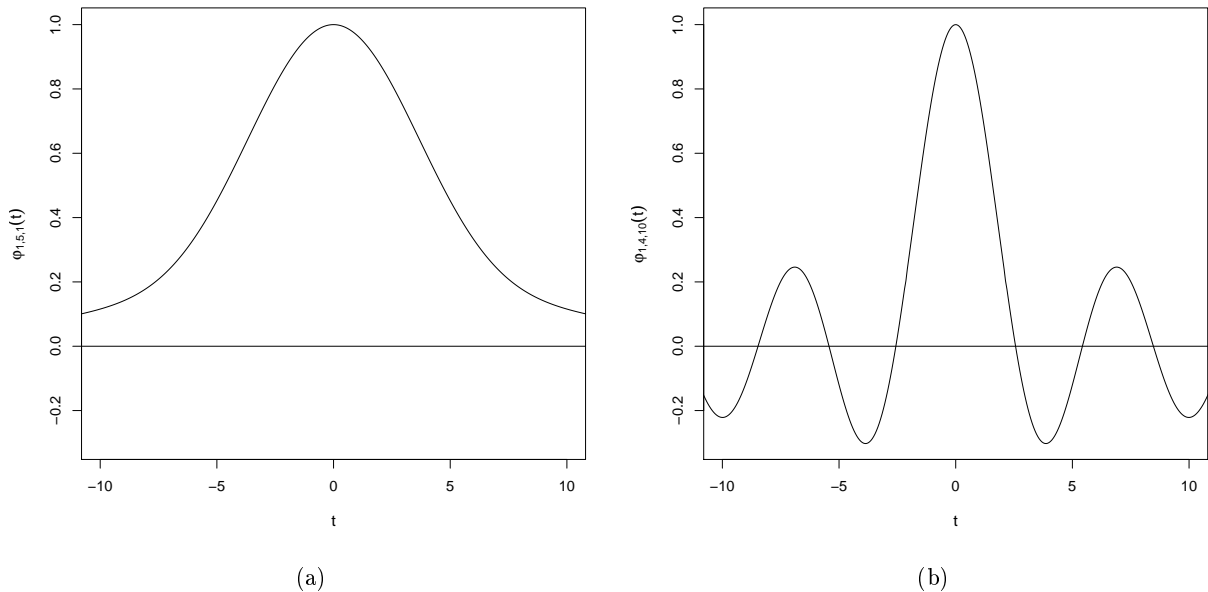


Abbildung 11: Die Funktionen $\varphi_{1,5,1}$ und $\varphi_{1,4,10}$ auf einer Umgebung von 0 :

- (a) $\varphi_{1,5,1}$ ist positiv auf \mathbb{R} , streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und streng konkav auf $[-\pi, \pi]$.
- (b) $\varphi_{1,4,10}$ ist positiv auf $(-2.54, 2.54)$, streng monoton fallend auf $[0, 3.85)$ und streng konkav auf $(-1.84, 1.84)$.

Die charakteristischen Funktionen der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ sowie der dazugehörigen Randverteilungen konnten in diesem Abschnitt für alle $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mithilfe von numerisch und analytisch auswertbaren Integralen dargestellt werden, vgl. hierzu mit Lemma 3.2 und Lemma

3.3. Mithilfe dieser Darstellungen wurden in den Theoremen 3.4 und 3.7 zudem Nullumgebungen spezifiziert, auf welchen die entsprechenden charakteristischen Funktionen positiv und streng monoton fallend entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$ sind, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,p}$ und $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\}$ im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{k,n,p}$, vgl. mit Abbildung 10 und mit den Abbildungen 23-26. Aussagen dieser Art sind in erster Linie im Zusammenhang mit statistischen Anwendungen charakteristischer Funktionen aber auch mit geometrischen Analysen charakteristischer Niveaumengen sehr bedeutsam, worauf wir zu Beginn des Abschnittes 3.4 bzw. in Kapitel 5 ausführlich eingehen werden. In Abschnitt 3.4 werden darüber hinaus die Resultate dieses Abschnittes für spezielle Kombinationen von n und p ergänzt und präzisiert. Dass die Schärfe der in Theorem 3.4 bzw. Theorem 3.7 angegebenen Spezifikationen hierbei sehr stark von der konkreten Wahl von n und p abhängt, lässt sich bereits aus Abbildung 11 erahnen.

Aus den Eigenschaften der univariaten charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ lassen sich, wie zu Beginn dieses Abschnittes angekündigt, auch Eigenschaften der eng verwandten (und in (3.8) definierten) Verallgemeinerung $\mathcal{P}_{n,p}$ von Poissons Integral schlussfolgern. So ist $\mathcal{P}_{n,p}$ mit Theorem 3.4 strikt positiv auf $(0, \pi/2]$. Es folgt zudem aus Theorem 3.7, dass $\mathcal{P}_{n,p}$ im Falle $n \leq p$ streng monoton fallend auf $(0, \pi]$ ist.

3.3 Reihendarstellungen und Folgerungen für eine verallg. hypergeom. Funktion

In Ergänzung zu den in Abschnitt 3.2 hergeleiteten Integraldarstellungen werden die Funktionen $\varphi_{n,p}$, $\varphi_{k,n,p}$ bzw. $\varphi_{1,n,p}$ in diesem Abschnitt mithilfe von konvergenten Reihen sowie verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen dargestellt. Die in diesem Zusammenhang präsentierten Resultate können auf der einen Seite in Analogie zu (3.5) und (3.6) für die numerische Approximation der betrachteten charakteristischen Funktionen verwendet werden. Auf der anderen Seite erweisen sich Reihendarstellungen aber auch bei der Untersuchung bestimmter analytischer Eigenschaften als vorteilhaft gegenüber den in Abschnitt 3.2 betrachteten Integraldarstellungen. So ist z.B. eine Potenzreihendarstellung sehr gut zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens in einer Umgebung des entsprechenden Entwicklungspunktes geeignet, vgl. hierzu mit Beispiel 3.10.

Aus Abschnitt 2.4 ist bereits bekannt, dass sich die charakteristische Funktion $\varphi_{n,p}$ mithilfe der Srivastava-Daoust multivariaten hypergeometrischen Funktion darstellen lässt und mit den dortigen Bezeichnungen durch die konvergente Potenzreihe

$$t \mapsto \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{\times n}} \frac{1}{\binom{n}{p}_{2(k_1 + \dots + k_n)/p}} \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{p}\right)_{2k_i/p}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{k_i}} \frac{(-t_i^2/4)^{k_i}}{k_i!}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.11)$$

gegeben ist. Im Spezialfall $p = 2$ entspricht die in (3.11) aufgeführte Reihe einer skalaren verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion und es ist

$$\varphi_{n,2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}_k} \frac{\left(-\frac{|t|_2^2}{4}\right)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (3.12)$$

vgl. mit Theorem 2.1 und mit (Watson, 1995). Eine zur Beschreibung von $\varphi_{n,2}$ geeignete verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ist hierbei z.B. die in (Fox, 1928) eingeführte Fox-Wright verallgemeinerte hypergeometrische Funktion, mit welcher auch $\varphi_{1,n,p}$ für beliebiges $p > 0$ dargestellt werden kann.

Definition 3.8. Seien $l, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $a = (a_1, \dots, a_l) \in \mathbb{R}_{>0}^{\times l}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\times l}$, $b = (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}_{>0}^{\times q}$ sowie $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\times q}$. Dann ist durch

$${}_l\psi_q((a_1, \alpha_1), \dots, (a_l, \alpha_l); (b_1, \beta_1), \dots, (b_q, \beta_q); z) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\prod_{i=1}^l \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \right) \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

eine Fox-Wright verallgemeinerte hypergeometrische Funktion definiert.

Die Fox-Wright verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ist eine Verallgemeinerung der 1812 eingeführten Gauß'schen hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1$ und kann als skalare Version der in (Daoust u. Srivastava, 1969) eingeführten Srivastava-Daoust multivariaten hypergeometrischen Funktion verstanden werden. Ausführliche Untersuchungen zu ${}_p\psi_q$ sind hierbei u.a. in (Wright, 1935), (Kilbas, Saigo et al., 2002) und (Kilbas, 2005) zu finden.

Die in diesem Kapitel betrachteten charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, lassen sich mithilfe der Fox-Wright verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion bzw. der dazugehörigen multivariaten Verallgemeinerung von Srivastava und Daoust darstellen. Wir weisen in diesem Zusammenhang auf Theorem 2.6, auf die Proportionalität der rechten Seite in (3.12) zur Funktion ${}_1\psi_1((1,0);(n/2,1);-|t|_2^2/4)$, $t \in \mathbb{R}^n$, sowie auf das folgende Lemma hin:

Lemma 3.9. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k \in \{2, \dots, n\}$ und $p > 0$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.4, dass*

$$\begin{aligned} \varphi_{k,n,p}(t) &= \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^{\times k}} \frac{1}{\binom{n}{p}_{2(l_1 + \dots + l_k)/p}} \prod_{i=1}^k \frac{\binom{1}{p}_{2l_i/p}}{\binom{1}{2}_{l_i}} \frac{(-t_i^2/4)^{l_i}}{l_i!} \\ &= \mathcal{F}_k \left(\begin{matrix} [1 : 0_k] ; [\frac{1}{p} \cdot 1_k : \frac{2}{p} \cdot 1_k] ; \\ [\frac{n}{p} : \frac{2}{p} \cdot 1_k] ; [\frac{1}{2} \cdot 1_k : 1_k] ; \end{matrix} -\frac{1}{4} (t_1^2, \dots, t_k^2)^T \right), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n,p}(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}_{2l/p}} \frac{\binom{1}{p}_{2l/p}}{\binom{1}{2}_l} \frac{(-t^2/4)^l}{l!} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} {}_1\psi_2 \left(\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p} \right); \left(\frac{n}{p}, \frac{2}{p} \right), \left(\frac{1}{2}, 1 \right); -\frac{t^2}{4} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Beweis. Folgt aus Theorem 2.6. □

In den Gleichungen (3.13) und (3.14) wurden die charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, für ein jeweils beliebig wählbares Argument mithilfe von konvergenten Potenzreihen im Entwicklungspunkt 0_n bzw. 0_k beschrieben. Reihendarstellungen dieser Art können sowohl für die numerische Approximation als auch für die analytische Untersuchung der entsprechenden charakteristischen Funktionen sehr wertvoll sein, was sich am Beispiel der Funktion $\varphi_{1,n,p}$ demonstrieren lässt. So kann (3.14) auf der einen Seite für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $\varphi_{1,n,p}(t)$ für $t \rightarrow 0$ verwendet werden. Auf der anderen Seite ist durch die Addition der ersten k Summanden der Reihe in (3.14) eine Approximation von $\varphi_{1,n,p}(t)$ gegeben, wobei sich der Approximationsfehler für $t \rightarrow 0$ abschätzen lässt, vgl. mit dem folgenden Beispiel.

Beispiel 3.10. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p > 0$. Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{p}_{2l/p}} \frac{\binom{1}{p}_{2l/p}}{\binom{1}{2}_l} \frac{(-t^2/4)^l}{l!}}{t^2} = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{p}\right)},$$

d.h. die Funktionen $t \mapsto 1 - \varphi_{1,n,p}(t)$ und $t \mapsto t^2$ sind für $t \rightarrow 0$ asymptotisch äquivalent (vgl. hierzu mit 1.3 in (Berg, 1968)). Für die Reihe

$$S_k(t) := \sum_{l=0}^k \frac{1}{\binom{n}{p}_{2l/p}} \frac{\binom{1}{p}_{2l/p}}{\binom{1}{2}_l} \frac{(-t^2/4)^l}{l!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt zudem

$$\varphi_{1,n,p}(t) = S_k(t) + o\left(t^{2k+1}\right) \quad , t \rightarrow 0,$$

d.h. der Fehler bei der Approximation von $\varphi_{1,n,p}(t)$ mithilfe von $S_k(t)$ ist für $t \rightarrow 0$ von kleinerer Ordnung als t^{2k+1} .

Die charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, wurden in (3.13) und (3.14) mithilfe von konvergenten Potenzreihen bzw. verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen dargestellt. In Beispiel 3.10 ist ferner gezeigt worden, dass die in diesem Zusammenhang erzielten Resultate nicht nur für die numerische Approximation, sondern auch für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der entsprechenden charakteristischen Funktionen verwendet werden können. Alternativ hierzu lassen sich aus Lemma 3.9 aber auch Rückschlüsse auf verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen ziehen. So ergeben sich beispielsweise aus (3.14) und den Lemmata 3.2 und 3.3 neue Integraldarstellungen der Einschränkung von ${}_1\psi_2((1/p, 2/p); (n/p, 2/p), (1/2, 1); \cdot)$ auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$. Die zusätzliche Berücksichtigung der Ableitungen von $\varphi_{1,n,p}$ sowie Lemma 3.6 führt zudem auf eine Vielzahl derartiger neuer Darstellungen, welche zum Ende dieses Abschnittes in Theorem 3.12 angegeben werden. In Vorbereitung hierauf sind im folgenden Lemma zunächst auch die Ableitungen der charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ mithilfe von verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen dargestellt.

Lemma 3.11. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\frac{\partial^m \varphi_{1,n,p}(t)}{\partial t^m} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} {}_1\psi_2\left(\left(\frac{m+1}{p}, \frac{2}{p}\right); \left(\frac{m+n}{p}, \frac{2}{p}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right); -\frac{t^2}{4}\right) \quad , t \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

falls $m/2 \in \mathbb{N}$. Im Falle $m/2 \notin \mathbb{N}$ ist

$$\frac{\partial^m \varphi_{1,n,p}(t)}{\partial t^m} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) t}{(-1)^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} {}_1\psi_2\left(\left(\frac{m+2}{p}, \frac{2}{p}\right); \left(\frac{m+n+1}{p}, \frac{2}{p}\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right); -\frac{t^2}{4}\right) \quad , t \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Der in Lemma 3.11 dargestellte Zusammenhang zwischen den Ableitungen der charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ und der Funktion ${}_1\psi_2$ erlaubt unter Einbeziehung von Lemma 3.3 sowie Lemma 3.6 die Schlussfolgerung der folgenden Integraldarstellungen Fox-Wright verallgemeinerter hypergeometrischer Funktionen:

Theorem 3.12. *Seien $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$ und $x \leq 0$. Dann ist*

$$\begin{aligned} {}_1\psi_2\left(\left(\frac{m+1}{2}r, r\right); \left(\frac{m+k}{2}r, r\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right); x\right) &= \int_0^1 \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}z\right) z^m (1-z^{2/r})^{\frac{k-1}{2}r-1}}{c_1(r, k)} dz \quad (3.17) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|} \cos_{2/r} \theta\right) \cos_{2/r}^m \theta \sin_{2/r}^{k-2} \theta}{c_1(r, k) \left|(\cos \theta, \sin \theta)^T\right|_{2/r}^r} d\theta, \end{aligned}$$

falls $m/2 \in \mathbb{N}$. Im Falle $m/2 \notin \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} {}_1\psi_2\left(\left(\frac{m+2}{2}r, r\right); \left(\frac{m+k+1}{2}r, r\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right); x\right) &= \int_0^1 \frac{\sin\left(\sqrt{|x|}z\right) z^m (1-z^{2/r})^{\frac{k-1}{2}r-1}}{c_2(r, k) \sqrt{|x|}} dz \quad (3.18) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\sqrt{|x|} \cos_{2/r} \theta\right) \cos_{2/r}^m \theta \sin_{2/r}^{k-2} \theta}{c_2(r, k) \sqrt{|x|} \left|(\cos \theta, \sin \theta)^T\right|_{2/r}^r} d\theta, \end{aligned}$$

wobei

$$c_1(r, k) := \frac{r \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}r\right)}{2}$$

und

$$c_2(r, k) := \frac{r \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}r\right)}{2}.$$

Beweis. Die Darstellungen (3.17) und (3.18) folgen aus Lemma 3.6 und Lemma 3.11. Der Rest der Behauptung ergibt sich durch die Substitution von $z = \cos_{2/r}(\theta)$ in (3.17) bzw. (3.18), wobei

$$dz = -\frac{\sin_{2/r}^{2/r-1}(\theta)}{\left|(\cos(\theta), \sin(\theta))^T\right|_{2/r}^r} d\theta,$$

vgl. mit Abschnitt 4.4.1 in (Richter, 2007). □

3.4 Nullstellenanalyse und Verallg. der Theoreme von v. Lommel und Moore

Die Funktionen $\varphi_{n,p}$, $\varphi_{k,n,p}$ bzw. $\varphi_{1,n,p}$ werden in diesem Abschnitt auf die Existenz und auf die Lage von Nullstellen sowie auf das Monotonieverhalten untersucht. Zu diesem Zweck erfolgt eine Verallgemeinerung der Theoreme in (v. Lommel, 1868) und (Moore, 1908) zur Nullstellenlage der Besselfunktion J_ϑ , $\vartheta > -1/2$. Darüber hinaus wird für bestimmte Kombinationen von n und p durch die Betrachtung einer zu $\varphi_{1,n,p}$ adjungierten charakteristischen Funktion gezeigt, dass $\varphi_{1,n,p}$ eine strikt positive bzw. auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monotone Funktion ist. Die folgenden Ausführungen beinhalten ferner auch multivariate Verallgemeinerungen der univariaten Resultate mithilfe von Darstellung (3.1).

Die Nullstellen charakteristischer Funktionen besitzen unter mehreren Gesichtspunkten eine große Bedeutung in der Stochastik. Aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht ergibt sich aus dem Theorem von Bochner (siehe Theorem 1.34), dass eine nichtnegative und integrierbare reelle charakteristische Funktion eine stetige und positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt. Untersuchungen von charakteristischen Funktionen auf die Existenz von Nullstellen sind daher ein probates Mittel bei der Suche nach adjungierten Paaren von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, vgl. mit Abschnitt 1.5. In Kapitel 6 werden dieses Mittel sowie die Ausführungen dieses Abschnittes für die Herleitung neuartiger Charakterisierungen einer α -symmetrischen Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet. Darüber hinaus wird das Nullstellen- und Monotonieverhalten $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen insbesondere auch bei der in Kapitel 5 erfolgenden geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen eine entscheidende Rolle spielen.

Das Interesse an Nullstellen charakteristischer Funktionen ist jedoch nicht nur von wahrscheinlichkeitstheoretischer, sondern insbesondere auch von statistischer Natur. So wird z.B. in (Ushakov, 1999) angeführt, dass es eine Vielzahl von statistischen Verfahren gibt, welche auf der Einschränkung einer charakteristischen Funktion φ (bzw. einer empirischen charakteristischen Funktion $\hat{\varphi}_n$) auf eine möglichst große Nullumgebung \mathcal{U} basieren, wobei $\varphi(u) \neq 0$ für alle $u \in \mathcal{U}$ gefordert wird. Als Beispiel sei hier der Symmetrietest für Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus (Heathcote u. Csörgö, 1987) genannt. Bei diesem wird für eine Zufallsgröße X die charakteristische Symmetriefunktion

$$\theta(t) = \frac{1}{t} \arctan\left(\frac{\mathbb{E} \sin(tX)}{\mathbb{E} \cos(tX)}\right), \quad t \in (0, t_0),$$

betrachtet, wobei t_0 die kleinste positive Nullstelle vom Realteil der charakteristischen Funktion von X ist. Die entsprechende empirische charakteristische Symmetriefunktion

$$\hat{\theta}_n(t) = \frac{1}{t} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\hat{\varphi}_n(t))}{\operatorname{Re}(\hat{\varphi}_n(t))}\right), \quad t \in \mathcal{S},$$

ist ein gleichmäßig konsistenter Schätzer für die Einschränkung von θ auf eine beliebige kompakte Menge $\mathcal{S} \subset (0, t_0)$ und basiert auf der empirischen charakteristischen Funktion $\hat{\varphi}_n$ der zugehörigen mathematischen Stichprobe (X_1, \dots, X_n) . Hierbei weisen signifikante Abweichungen zwischen den Funktionswerten des Schätzers $\hat{\theta}_n$ auf eine Asymmetrie der Verteilung von X hin, vgl. mit (Heathcote u. Csörgö, 1987). Es ist daher naheliegend, für die Konstruktion eines Symmetrietests auf der Basis von $\hat{\theta}_n$, die Teilmenge \mathcal{S} so groß wie möglich zu wählen.

Neben den bereits dargelegten statistischen Verfahren sind in der Literatur auch solche zu finden, für welche sogar die Kenntnis sämtlicher Nullstellen einer gegebenen charakteristischen Funktion maßgeblich ist. Als Beispiel seien hier die Dichtedekonvolutionsschätzer in (Delaigle, Hall et al., 2008) und (Meister u. Neumann, 2010) genannt. Wir betrachten in diesem Zusammenhang für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die mathematischen Stichproben (X_1, \dots, X_n) und $(Y_{1,1}, \dots, Y_{n,N_n})$, welche der Modellgleichung

$$Y_{j,k} = X_j + \varepsilon_{j,k} \quad , j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, N_j\}, \quad (3.19)$$

genügen, wobei $\varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{n,N_n}$ u.i.v. sind und $X_1, \dots, X_n, Y_{1,1}, \dots, Y_{n,N_n}, \varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{n,N_n}$ stochastisch unabhängige und absolutstetig verteilte Zufallsgrößen sind. Zur Schätzung der Dichte von X_1 im Modell (3.19) wird in diesem Zusammenhang in (Delaigle, Hall et al., 2008) vorausgesetzt, dass

$$\mathbb{E} \exp(it\varepsilon_{1,1}) \neq 0 \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Darüber hinaus wird in (Meister u. Neumann, 2010) die Existenz einer Funktion $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gefordert, für welche $\mathbb{E} \exp(i\tau(t)\varepsilon_{1,1}) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, und $\mathbb{E} \exp(i(t - \tau(t))\varepsilon_{1,1}) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. In beiden Fällen ist somit für die Annahme einer speziellen Fehlerverteilung $\mathfrak{L}(\varepsilon_{1,1})$ in (3.19) das Nullstellenverhalten der zugehörigen charakteristischen Funktion zu untersuchen.

Es wurden bereits in Abschnitt 3.2 Nullumgebungen der Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$ spezifiziert, auf welchen die betrachteten Funktionen positiv und streng monoton fallend entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$ sind, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,p}$ und $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\}$ im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{k,n,p}$. Eine zentrale Fragestellung dieses Abschnittes ist hierbei, inwiefern sich die in den Theoremen 3.4 und 3.7 angegebenen Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften auch auf größere Nullumgebungen übertragen lassen. Dass eine Verallgemeinerung der Theoreme 3.4 und 3.7 in einigen Fällen möglich sein wird, lässt sich hierbei bereits mit Abbildung 11 erahnen. So ist die Funktion $\varphi_{1,5,1}$ aus Abbildung 11 (a) stets positiv und streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Derartige Erweiterungen der betrachteten Nullumgebungen auf den gesamten Definitionsbereich sind für bestimmte Kombinationen von n und p jedoch ausgeschlossen, vgl. mit Abbildung 11 (b). Es folgt nun in diesem Zusammenhang eine p -Verallgemeinerung des Theorems in (v. Lommel, 1868) zur Nullstellenlage der Besselfunktion J_ϑ , $\vartheta > -1/2$. Hiermit zeigt sich, dass die Funktion $\varphi_{1,n,p}$ in einigen Fällen auf der reellen Achse oszilliert und dass die Funktionen $\varphi_{n,p}$, $\varphi_{k,n,p}$ bzw. $\varphi_{1,n,p}$ in diesen Fällen unendlich viele Nullstellen besitzen.

Theorem 3.13. *Seien $p \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ so gewählt, dass $n \leq p + 1$. Dann ist*

$$\text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) = \begin{cases} 1 & , t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (2\pi, \frac{5}{2}\pi) \cup (4\pi, \frac{9}{2}\pi) \cup \dots, \\ -1 & , t \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \cup (3\pi, \frac{7}{2}\pi) \cup (5\pi, \frac{11}{2}\pi) \cup \dots. \end{cases} \quad (3.20)$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Die Aussage in Theorem 3.13 macht deutlich, dass die charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ sowie die in (3.8) definierte p -verallgemeinerte Version von Poissons Integral unter bestimmten Bedingungen an die Parameter p und n auf der reellen Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$ um den Funktionswert Null oszillieren. Mit dem Satz von Rolle ergibt sich zudem, dass in diesem Fall sowohl $\varphi_{1,n,p}$ als auch die Einschränkung von $\mathcal{P}_{n,p}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ (um den Funktionswert Null) oszillierende Ableitungen von beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}$ besitzen. Hierdurch folgt insbesondere auch, dass die Vorzeichenaussagen (i) und (iii) in Theorem 3.4 nicht für die Nullumgebungen $K_{n,q(p)}(\pi)$ bzw. $K_{k,q(p)}(\pi)$ gelten und dass die Monotonieaussagen (i) und (iii) in Theorem 3.7 nicht für die Nullumgebungen $K_{n,q(p)}(2\pi)$ bzw. $K_{k,q(p)}(2\pi)$ gelten, sofern n und p wie in Theorem 3.13 gewählt werden.

Für die Herleitung von Theorem 3.13 wurde der Beweis des Theorems in (v. Lommel, 1868) zur Nullstellenlage der Besselfunktion J_ϑ , $\vartheta > -1/2$, p -verallgemeinert, vgl. mit Anhang B. Hierbei sei erwähnt, dass in (Moore, 1908) ein Spezialfall des Resultates aus (v. Lommel, 1868) unter Verwendung einer alternativen Beweismethode gezeigt wurde. Diese Methode kommt bei der Herleitung der nun folgenden Ergänzung von Theorem 3.13 zum Einsatz. Das Theorem in (Moore, 1908) zur Nullstellenlage der Besselfunktion J_1 wird in diesem Sinne für die Betrachtung der Funktion $\varphi_{1,n,p}$ im Falle $n \in \mathbb{N}_{>p+1}$, $n \leq 2p + 1$, p -verallgemeinert.

Theorem 3.14. *Seien $p \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_{>p+1}$ so gewählt, dass $n \leq 2p + 1$. Dann ist*

$$\text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) = \begin{cases} 1 & , t \in \{\pi, 3\pi, 5\pi, \dots\} , \\ -1 & , t \in \{2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots\} . \end{cases}$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

In Analogie zur Untersuchung des Falles $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $n \leq p + 1$, folgt mit Theorem 3.14 auch im Falle $n \in \mathbb{N}_{>p+1}$, $n \leq 2p + 1$, dass die Funktion $\varphi_{1,n,p}$ und alle dazugehörigen Ableitungen für $p \geq 1$ auf der reellen Achse um den Funktionswert Null oszillieren. Eine entsprechende Aussage gilt zudem für die Einschränkung von $\mathcal{P}_{n,p}$ auf die reelle Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$. Darüber hinaus ist in diesem Fall weder die Erweiterung der Vorzeichenaussagen (i) und (iii) aus Theorem 3.4 auf Nullumgebungen $K_{n,q(p)}(2\pi)$ bzw. $K_{k,q(p)}(2\pi)$ noch die Erweiterung der Monotonieaussagen (i) und (iii) aus Theorem 3.7 auf Nullumgebungen $K_{n,q(p)}(3\pi)$ bzw. $K_{k,q(p)}(3\pi)$ möglich.

Eine wichtige Konsequenz der Theoreme 3.13 und 3.14 ist, dass die Theoreme 3.4 und 3.7 für $p \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $n \leq 2p + 1$, nur bedingt erweitert werden können. So konnten im Anschluss an die Theoreme 3.13 bzw. 3.14 beschränkte Obermengen der Nullumgebungen angegeben werden, auf denen die Funktionen $\varphi_{n,p}$, $\varphi_{k,n,p}$ bzw. $\varphi_{1,n,p}$ strikt positiv und im Sinne von Theorem 3.7 streng monoton sind. Die in den Theoremen 3.4 und 3.7 aufgeführten Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften gelten in diesem Fall somit nicht im gesamten Definitionsbereich der entsprechenden charakteristischen Funktionen. Wie sich am Beispiel der in Abbildung 11 (a) dargestellten Funktion $\varphi_{1,5,1}$ jedoch zeigt, ist eine derartige Erweiterung in manchen Fällen möglich. Wir betrachten hierzu erneut die univariate charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ und verwenden nun anders als in den Theoremen 3.13 und 3.14 einen probabilistischen Ansatz für die Untersuchung des Nullstellenverhaltens. Hierbei folgt auf der einen Seite aus Theorem 1.46, dass $\varphi_{1,n,p}$ nichtnegativ und integrierbar ist, sofern $\omega_{1,n,p}$ eine stetige und positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt. Auf der anderen Seite ist $\varphi_{1,n,p}$ im Falle der Nichtnegativität und Integrierbarkeit aber auch proportional zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte. Die mit der Umkehrformel (siehe Theorem 1.24) bestimmbare stetige Wahrscheinlichkeitsdichte von $\omega_{1,n,p}$ ist daher in diesem Fall proportional zu einer charakteristischen Funktion, d.h. positiv definit. Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ ist somit genau dann nichtnegativ und integrierbar, wenn $\omega_{1,n,p}$ eine stetige und positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt.

Der aufgezeigte Zusammenhang zwischen stetig positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichten und nichtnegativen, integrierbaren charakteristischen Funktionen wird im folgenden Theorem zur Bestimmung des Vorzeichens von $\varphi_{1,n,p}$ verwendet. Hierbei werden das auf Pólya zurückgehende Theorem 1.35 sowie die in Theorem 1.36 festgehaltene Erweiterung zum Einsatz kommen.

Theorem 3.15. *Sei $(p, n) \in (0, 1/2) \times \mathbb{N}_{\geq 2} \cup [1/2, 1) \times \mathbb{N}_{\geq 3} \cup \{1\} \times \mathbb{N}_{\geq 4}$. Dann ist*

$$\varphi_{1,n,p}(t) > 0 \quad , t \in \mathbb{R} .$$

Beweis. Für den Beweis der Behauptung werden die Theoreme 1.35 und 1.36 angewendet. Hiermit lässt sich zeigen, dass die in Beispiel 1.14 angegebene Wahrscheinlichkeitsdichte von $\omega_{1,n,p}$ unter den gegebenen Voraussetzungen proportional zu einer auf $(0, 1)$ streng konvexen Pólya-Typ charakteristischen Funktion ist. Wir betrachten hierzu die zur Wahrscheinlichkeitsdichte aus Beispiel 1.14 proportionale Funktion

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 - |t|^p)^{\frac{n-1}{p}-1} & , t \in (-1, 1) , \\ 0 & , t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) . \end{cases}$$

Hierbei ist $\varphi(t) = \varphi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 1$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$. Die Stetigkeit von φ ist gegeben, falls $(n-1)/p > 1$. Dies ist für $(p, n) \in (0, 1) \times \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{1\} \times \mathbb{N}_{\geq 3}$ der Fall.

Zur Überprüfung der Konvexitätseigenschaft wird die zweite Ableitung der Einschränkung von φ auf $(0, 1)$ betrachtet. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-(n-1-p) t^{p-1} (1-t^p)^{\frac{n-1}{p}-2} \right) \\ &= (n-1-p) t^{p-2} (1-t^p)^{\frac{n-1}{p}-3} \left((1-p)(1-t^p) + t^p(n-1-2p) \right) \\ &= (n-1-p) t^{p-2} (1-t^p)^{\frac{n-1}{p}-3} (1-p+t^p(n-2-p)) > 0 \quad , t \in (0, 1) , \end{aligned}$$

sofern $(p, n) \in (0, 1/2] \times \mathbb{N}_{\geq 2} \cup [1/2, 1) \times \mathbb{N}_{\geq 3} \cup \{1\} \times \mathbb{N}_{\geq 4}$. Die Funktion φ ist somit unter den Voraussetzungen von Theorem 3.15 streng konvex und positiv auf $(0, 1)$. Sie ist in den betrachteten Fällen aber auch konvex auf $(0, \infty)$, denn

$$\varphi(t) = 0 \quad , t \geq 1 .$$

Aus Theorem 1.35 folgt nun, dass φ eine Pólya-Typ charakteristische Funktion ist. Mit den Theoremen 1.24 und 1.36 gilt ferner, dass die zu φ gehörige Verteilung eine stetige und strikt positive Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt. Da es sich bei φ zudem um eine reelle charakteristische Funktion handelt, kann f dargestellt werden als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-tx) \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \varphi(t) dt \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)}{\pi p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \varphi_{1,n,p}(x) \quad , x \in \mathbb{R} , \end{aligned}$$

vgl. mit Beispiel 1.14. Es ist daher $\varphi_{1,n,p}$ eine strikt positive Funktion. □

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\omega_{1,n,p}$ besitzt eine adjungierte Wahrscheinlichkeitsverteilung und eine positive charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$, falls p und n wie in Theorem 3.15 gewählt werden. In diesen Fällen ist insbesondere auch die Einschränkung der p -verallgemeinerten Version von Poissons Integral $\mathcal{P}_{n,p}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ eine positive Funktion und eine Erweiterung der Aussage in Theorem 3.4 (iii) auf den gesamten Definitionsbereich von $\varphi_{1,n,p}$ möglich. Die positive Definitheit der in Beispiel 1.14 aufgeführten Wahrscheinlichkeitsdichte von $\omega_{1,n,p}$ wurde zudem bereits in (Kuttner, 1944) untersucht. So wurde hier gezeigt, dass auch für alle $p \in (1, 2)$ eine Konstante $\kappa = \kappa(p)$ so existiert, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte aus Beispiel 1.14 positiv definit ist, falls $(n-1)/p - 1 > \kappa(p)$. Wir halten die hierdurch mögliche Erweiterung von Theorem 3.15 im nun folgenden Theorem 3.16 fest.

Theorem 3.16. *Sei $p \in (1, 2)$. Dann existiert eine Konstante $\kappa(p) > 0$ so, dass*

$$\varphi_{1,n,p}(t) \geq 0 \quad , t \in \mathbb{R} ,$$

sofern n eine natürliche Zahl mit $n \geq p(\kappa(p) + 1) + 1$ ist. Die hiermit durch

$$p \mapsto \kappa(p)$$

gegebene Funktion $\kappa : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist stetig und streng monoton wachsend mit $\kappa(3/2) \leq 2$ und $\lim_{p \rightarrow 2} \kappa(p) = \infty$.

Beweis. In (Kuttner, 1944) wurde die Existenz einer stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\kappa : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $\kappa(3/2) \leq 2$ und $\lim_{p \rightarrow 2} \kappa(p) = \infty$ bewiesen, für welche die Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} (1 - |t|^p)^{\frac{n-1}{p}-1} & , t \in (-1, 1) , \\ 0 & , t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) , \end{cases}$$

positiv definit ist, falls $n \geq p(\kappa(p) + 1) + 1$, vgl. hierzu auch mit (Gneiting, 2001). Aus Theorem 1.46 folgt nun, dass in diesem Fall auch $\varphi_{1,n,p}$ nichtnegativ ist. \square

Mit den Theoremen 3.15 und 3.16 existiert für alle $p \in (0, 2)$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ so, dass die charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ nichtnegativ ist und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\omega_{1,n,p}$ eine adjungierte Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt. Diese Tatsache wird in Kapitel 6 für die Herleitung eines α -Analogons der stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen ausgenutzt. Die in Kapitel 5 erfolgende geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen wird sich zudem nicht nur auf Aussagen über das Vorzeichen einer charakteristischen Funktion, sondern auch auf Monotonieaussagen dieser Funktionen stützen. Das folgende Theorem 3.17 belegt in diesem Zusammenhang die auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gegebene strenge Monotonie der in Theorem 3.15 betrachteten charakteristischen Funktionen im Falle $p = 1$.

Theorem 3.17. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ und $p = 1$. Dann ist $\varphi_{1,n,p}$ streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Beweis. Siehe Anhang B. \square

Die charakteristischen Funktionen der Familie $\{\omega_{1,n,1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 4}\}$ sind analog zum speziellen Vertreter $\varphi_{1,5,1}$ (vgl. mit Abbildung 11(a)) positiv und streng monoton fallend auf der reellen Halbachse $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Aussagen in den Theoremen 3.4 (iv) und 3.7 (iv) können daher im univariaten Fall für diese Teilfamilie von $\{\omega_{1,n,p} : (p, n) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}_{\geq 2}\}$ auf den gesamten Definitionsbereich der zugehörigen charakteristischen Funktionen erweitert werden. Mit dem in (3.1) aufgezeigten Zusammenhang zwischen der multivariaten charakteristischen Funktion $\varphi_{k,m,p}$ und der univariaten charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ lassen sich darüber hinaus auch im multivariaten Fall die Aussagen in den Theoremen 3.4 (iv) und 3.7 (iv) bei spezieller Wahl von (k, n, p) in ähnlicher Weise erweitern, vgl. mit Korollar 3.18 (i) bzw. (iii). Das nun folgende Korollar 3.18 beinhaltet ferner eine multivariate Version von Theorem 3.16. Durch die Verwendung eines Resultates aus (Gneiting, 2001) erhalten wir auf diese Weise auch eine Verallgemeinerung von Theorem 3.4 (iii) im multivariaten Fall, vgl. mit Korollar 3.18 (ii).

Korollar 3.18. (i) *Seien $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 4k}$ und $p \in (0, 1]$. Dann ist*

$$\varphi_{k,n,p}(t) > 0 \quad , t \in \mathbb{R}^k .$$

(ii) *Seien $p \in (1, 2)$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\kappa(p)$ wie in Theorem 3.16 und $n \in \mathbb{N}_{\geq k(p(\kappa(p)+1)+1)}$. Dann ist*

$$\varphi_{k,n,p}(t) \geq 0 \quad , t \in \mathbb{R}^k .$$

(iii) *Seien $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 4k}$ und $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^{\times 2}$ mit $|r_1| < |r_2|$. Dann ist*

$$\varphi_{k,n,1}(r_1 t) > \varphi_{k,n,1}(r_2 t) \quad , t \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\} .$$

Beweis. Die Behauptungen (i) und (iii) folgen aus den Theoremen 3.15 und 3.17 sowie aus Gleichung (3.1). Für den Beweis der Behauptung (ii) nutzen wir aus, dass die Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} (1 - |t|^p)^{\frac{n-k}{p}-1} & , t \in K_{k,p}^\circ , \\ 0 & , t \in \mathbb{R}^k \setminus K_{k,p}^\circ , \end{cases}$$

unter den gegebenen Voraussetzungen positiv definit ist, vgl. mit (Gneiting, 2001). Hiermit ist aber auch die in Beispiel 1.14 dargestellte stetige Wahrscheinlichkeitsdichte von $\omega_{k,n,p}$ positiv definit. Aus Theorem 1.46 folgt nun die Nichtnegativität von $\varphi_{k,n,p}$. \square

In diesem Abschnitt wurden im Hinblick auf das Nullstellenverhalten und die Monotonie charakteristischer Funktionen zwei sehr unterschiedliche Teilfamilien von $\{\omega_{1,n,p} : (p, n) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}_{\geq 2}\}$ betrachtet. So oszillieren auf der einen Seite die charakteristischen Funktionen der Teilfamilie

$$\{\omega_{1,n,p} : p \geq 1, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, n \leq 2p + 1\}$$

auf der reellen Achse um den Funktionswert Null, wodurch insbesondere die Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, nur in einer beschränkten und nach oben hin abschätzbaren Nullumgebung positiv und streng monoton fallend entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$ sind, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,p}$ und $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0_k\}$ im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{k,n,p}$, vgl. mit Abbildung 11 (b), Tabelle 1 und Anhang C. Auf der anderen Seite ist $\{\omega_{1,n,1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 4}\}$ in einer Teilfamilie von $\{\omega_{1,n,p} : (p, n) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}_{\geq 2}\}$ enthalten, deren zugehörige charakteristische Funktionen auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ positiv und streng monoton fallend sind, vgl. mit Abbildung 11 (a), Tabelle 1 und Anhang C. Die charakteristischen Funktionen der zuletzt genannten Teilfamilie sowie die dazugehörigen multivariaten Verallgemeinerungen (siehe Korollar 3.18 (iii)) besitzen hierbei eine besondere Bedeutung für diese Arbeit. So werden $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen mit den in Korollar 3.18 (iii) angegebenen Monotonieeigenschaften zum einen in Kapitel 5 mithilfe von charakteristischen Generatoren und assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionalen in geometrischer Weise beschrieben. Zum anderen erfolgt in Kapitel 6 die Herleitung eines α -Analogons der in (1.6) angegebenen stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen auf der Basis von Korollar 3.18.

$p \backslash n$	$[2, \max(2, p + 1)]$	$(\max(2, p + 1), \max(3, 2p + 1)]$
(0, 1/2)	$[0, \infty) ; - ; [0, \pi]$	$[0, \infty) ; - ; [0, \pi]$
[1/2, 1)	$[0, \pi/(2 \zeta_{n,p})] ; - ; [0, \pi]$	$[0, \pi/(2 \zeta_{n,p})] ; - ; [0, \pi]$
1	$[0, \pi/(2 \zeta_{n,p})] \cup A_1 ; A_2 ; [0, \pi]$	$[0, \pi/(2 \zeta_{n,p})] \cup A_3 ; A_4 ; [0, \pi]$
(1, ∞)	$[0, \pi/(2 \zeta_{n,p})] \cup A_1 ; A_2 ; [0, \pi]$	$[0, \max(1, 1/(2 \zeta_{n,p})) \pi] \cup A_3 ; A_4 ; [0, \pi]$

$p \backslash n$	$(\max(3, 2p + 1), \max(4, 3p + 1))$	$[\max(4, 3p + 1), \infty)$
(0, 1/2)	$[0, \infty) ; - ; [0, \pi]$	$[0, \infty) ; - ; [0, \pi]$
[1/2, 1)	$[0, \infty) ; - ; [0, \pi]$	$[0, \infty) ; - ; [0, \pi]$
1	$[0, \pi/(2 \zeta_{n,p})] ; - ; [0, \pi]$	$[0, \infty) ; - ; [0, \infty)$
(1, ∞)	$[0, \max(1, 1/(2 \zeta_{n,p})) \pi] ; - ; [0, \pi]$	$[0, \max(1, 1/(2 \zeta_{n,p})) \pi] ; - ; [0, \pi]$

Tabelle 1: Eine Zusammenfassung von Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften der charakteristischen Funktion $\varphi_{1,n,p}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$. Hierbei wurde in Kapitel 3 gezeigt, dass die Einschränkung von $\varphi_{1,n,p}$ auf die angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ positiv (1. Menge), negativ (2. Menge) bzw. streng monoton fallend (3. Menge) ist, wobei $\zeta_{n,p}^2$ die (in Lemma 1.16 angegebene) Varianz von $\omega_{1,n,p}$ bezeichnet, $A_1 := \cup_{j=1}^{\infty} (2j\pi, 2j\pi + \pi/2)$, $A_2 := \cup_{j=1}^{\infty} ((2j-1)\pi, (2j-1)\pi + \pi/2)$, $A_3 := \cup_{j=1}^{\infty} \{(2j-1)\pi\}$ und $A_4 := \cup_{j=1}^{\infty} \{2j\pi\}$. Im Falle eines Eintrages „-“ wurden keine Aussagen zur Negativität von $\varphi_{1,n,p}$ nachgewiesen.

4 Die charakteristische Funktion der p -verallg. Normalverteilung

4.1 Vorbetrachtungen

Nach der bereits erfolgten Untersuchung von $\varphi_{n,p}$ wird in diesem Kapitel mit der charakteristischen Funktion von $N_{n,p}$ eine weitere spezielle $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion betrachtet, welche im i. Allg. mit $\tau_{n,p}$ und im Spezialfall $n = 1$ auch mit τ_p bezeichnet wird. Hierbei ist der Fokus auf $\tau_{n,p}$ nicht willkürlich gewählt, sondern vielmehr der enormen Bedeutung von $N_{n,p}$ innerhalb der Familie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen geschuldet. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen Verallgemeinerungen von $N_{n,p}$ sind (vgl. mit Definition 1.11 und Theorem 1.10) und dass jede $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion in diesem Sinne auch eine Verallgemeinerung von $\tau_{n,p}$ ist. Darüber hinaus erweist sich die analytische Untersuchung von $\tau_{n,p}$ aufgrund der aus Definition 1.7 folgenden Faktorisierungseigenschaft

$$\tau_{n,p}(t) = \prod_{i=1}^n \tau_p(t_i) \quad , \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

in vielen Fällen als vorteilhaft gegenüber der Betrachtung anderer $l_{n,p}$ -symmetrischer Vertreter. Die Bedeutung von $\tau_{n,p}$ innerhalb der Familie $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ist daher vergleichbar mit der Bedeutung des Spezialfalles $\tau_{n,2}$ innerhalb der Familie sphärischer charakteristischer Funktionen. Dies wird zudem dadurch deutlich, dass sich in einigen Fällen (analog zum Spezialfall $p = 2$) aus den Eigenschaften von $\tau_{n,p}$ auch Folgerungen für andere $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen ergeben. So wurde (4.1) bereits in den Beweisen der Theoreme 3.13 und 3.14 für die Herleitung von Darstellungen der Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{k,n,p}$ verwendet. In Kapitel 5 werden ferner geometrische Eigenschaften $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen mithilfe von (4.1) und den Resultaten dieses Kapitels bewiesen.

Die Relevanz von $\tau_{n,p}$ für diese Arbeit ist nicht zuletzt dadurch gegeben, dass die charakteristische Funktion der p -verallgemeinerten Normalverteilung die einzige $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion ist, für welche auch im Falle $p \notin \{1, 2\}$ bereits Darstellungen in der Literatur zu finden sind, vgl. mit (Maturi u. Elsayigh, 2009), (Pogány, 2010) und (Pogány u. Nadarajah, 2010). Wir werden in diesem Zusammenhang in Abschnitt 4.3 die Reihendarstellung von τ_p für $p > 1$ aus (Pogány u. Nadarajah, 2010) zitieren und für beliebiges $p > 0$ verallgemeinern. Darüber hinaus besteht in Analogie zum vorherigen Kapitel eine Interesse an Integraldarstellungen (siehe Abschnitt 4.2) und an Aussagen zum Nullstellenverhalten sowie zur Monotonie von $\tau_{n,p}$. Ein zentrales Anliegen dieses Kapitels ist aber auch die (in Abschnitt 4.4 erfolgende) Untersuchung von $N_{n,p}$ auf unbegrenzte Teilbarkeit und Stabilität, welche den Zusammenhang zwischen den $l_{n,p}$ -symmetrischen und den α -stabilen Verteilungen verdeutlicht und welche eine entscheidende Rolle bei der (in Kapitel 5 erfolgenden) Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen spielt.

Es sei hervorgehoben, dass in den Spezialfällen $p = 1$ (Standardlaplaceverteilung) und $p = 2$ (Standardnormalverteilung) eine Vielzahl der relevanten Eigenschaften von τ_p bereits aus der Literatur bekannt sind, vgl. hierzu z.B. mit (Steutel u. v. Harn, 2004). Die Funktionen τ_1 und τ_2 können ferner explizit dargestellt werden als

$$\tau_1(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

und

$$\tau_2(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Die Verteilung $N_{n,p}$ ist jedoch auch für $p \notin \{1, 2\}$ mit Momenten beliebiger Ordnung versehen (vgl. mit Lemma 1.15), sodass sich die Theoreme 1.22 und 1.23 auch in diesem Fall auf die spezielle charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ anwenden lassen. Aufgrund der Absolutstetigkeit von $N_{n,p}$ verschwindet $\tau_{n,p}(t)$ zudem für alle $p > 0$, falls $|t|_2 \rightarrow \infty$, vgl. mit Theorem 1.25.

Eine wichtige Eigenschaft der charakteristischen Funktion $\tau_{n,p}$ ist ihre im Falle $p \in (0, 2]$ gegebene Adjungiertheit zur stabilen charakteristischen Funktion

$$\phi(t) = \exp\left(-\frac{|t|_p^p}{p}\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (4.4)$$

vgl. mit Beispiel 1.56. Die hieraus resultierende Proportionalität von $\tau_{n,p}$ zu der zu ϕ gehörigen stetigen und positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte (vgl. mit Theorem 1.46) kann für die Herleitung analytischer Eigenschaften ausgenutzt werden. Dieser Sachverhalt wird nun zunächst für einen probabilistischen Ansatz zur Untersuchung des Nullstellenverhaltens und der Monotonie verwendet.

Theorem 4.1. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 0$. Dann gelten die Aussagen*

(i) $\tau_{n,p}$ ist nichtnegativ auf \mathbb{R}^n

und

(ii) $\tau_{n,p}(r_1 t) \geq \tau_{n,p}(r_2 t)$ für $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ und $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^{\times 2}$ mit $|r_1| < |r_2|$

genau dann, wenn $p \in (0, 2]$. In diesem Fall ist $\tau_{n,p}$ strikt positiv auf \mathbb{R}^n und in (ii) ist

$$\tau_{n,p}(r_1 t) > \tau_{n,p}(r_2 t) .$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die univariate charakteristische Funktion τ_p . Im Falle $p \in (0, 2]$ ist τ_p das positive Vielfache einer stabilen Wahrscheinlichkeitsdichte und somit nichtnegativ, vgl. mit Beispiel 1.56 und Theorem 1.46. Da univariate stabile Wahrscheinlichkeitsverteilungen ferner streng unimodal sind, vgl. z.B. mit (Simon, 2011), ist in diesem Fall sogar $\tau_p(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, und $\tau_p'(t) < 0$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Sei nun auf der anderen Seite τ_p für ein $p > 2$ nichtnegativ auf \mathbb{R} . Dann ist τ_p mit Theorem (1.6.9) aus (Bisgaard u. Sasvári, 2000) auch integrierbar, denn die zu τ_p gehörige und in Definition 1.7 dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{1,p}$ ist in jedem Fall beschränkt und integrierbar.

Aus Theorem 1.46 folgt nun, dass τ_p proportional zu einer stetigen und positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte ist, deren zugehörige charakteristische Funktion mit Theorem 1.24 der in (4.4) dargestellten Funktion ϕ entspricht. Die Funktion ϕ kann mit Theorem 1.38 jedoch keine charakteristische Funktion sein, sofern $p > 2$ ist. Es liegt daher ein Widerspruch vor. Für $p > 2$ existiert aus diesem Grund immer ein $t_1 > 0$ so, dass $\tau_p(t_1) < 0$. Da zudem $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_p(t) = 0$ ist, muss auch ein $t_2 \geq t_1$ so existieren, dass $\tau_p'(t_2) > 0$.

Die Behauptung ist somit im Spezialfall $n = 1$ gezeigt. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ folgt mit (4.1). \square

Die Aussagen des Theorems 4.1 besitzen im Zusammenhang mit statistischen Anwendungen charakteristischer Funktionen eine große Relevanz. Die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ erweist sich unter diesem Aspekt besonders im Falle $p \in (0, 2]$ als sehr gut geeignet für die in Abschnitt 3.4 dargestellten statistischen Verfahren, vgl. hierzu auch mit den Abbildungen 12 und 22, während im Falle $p > 2$ noch nicht bekannt ist, auf welchen Gebieten $\tau_{n,p}$ positiv ist. Es werden jedoch in Abschnitt 4.2 (in Analogie zu Abschnitt 3.2) auch im Falle $p > 2$ Nullumgebungen angegeben, auf denen $\tau_{n,p}$ positiv bzw. streng monoton fallend entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$ ist, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Die auf diesem Wege hergeleiteten Vorzeichen- und Monotonieeigenschaften sind im Gesamtkontext dieser Arbeit für die (in Kapitel 5 fortgeführte) geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen von entscheidender Bedeutung, welche sich zudem auf das folgende Lemma über die Ganzheit von τ_p stützt.

Lemma 4.2. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $p > 0$, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ und sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim N_{n,p}$. Dann ist die charakteristische Funktion von $\langle a, X \rangle$ genau dann ganzanalytisch, wenn $p > 1$.*

Beweis. Siehe Anhang B. \square

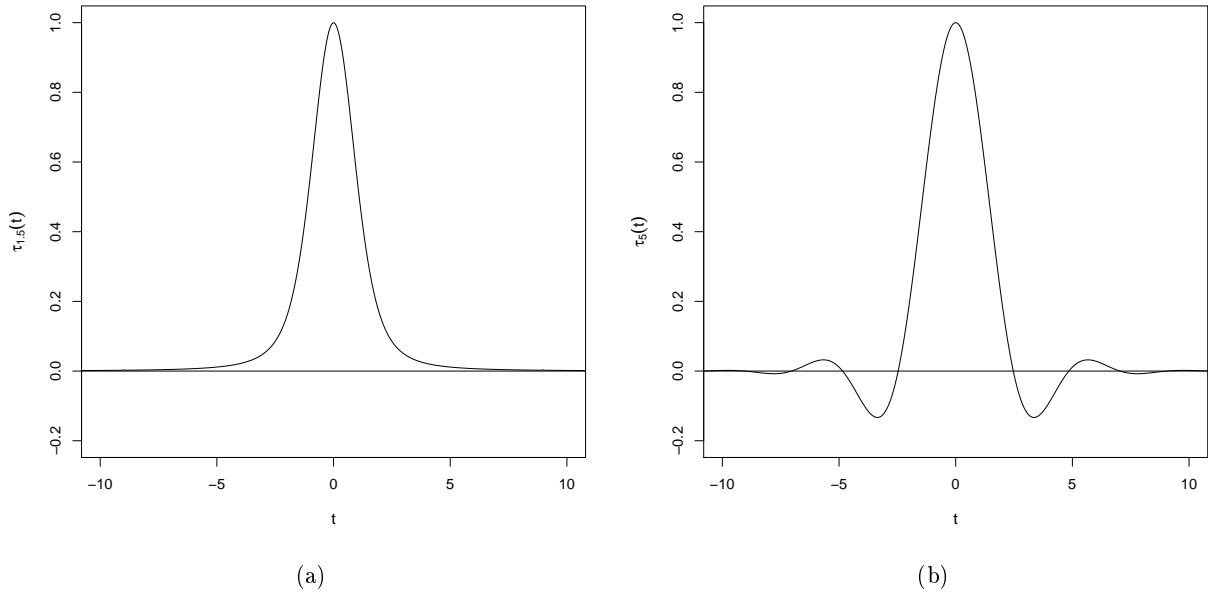


Abbildung 12: Die Funktionen $\tau_{1.5}$ und τ_5 auf einer Umgebung von 0 :

- (a) $\tau_{1.5}$ ist positiv auf \mathbb{R} und streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (b) τ_5 ist positiv auf $(-2.46, 2.46)$ und streng monoton fallend auf $[0, 3.35)$.

4.2 Integraldarstellungen

In diesem Abschnitt werden Integraldarstellungen der Funktion $\tau_{n,p}$ sowie der dazugehörigen partiellen Ableitungen hergeleitet. Anhand der unter diesem Aspekt angegebenen Lemmata 4.3 und 4.4 wird es zum ersten Mal möglich sein, die Funktion $\tau_{n,p}$ für alle $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ numerisch berechnen und analytisch untersuchen zu können, da in der Literatur bisher nur im Falle $p \geq 1$ Darstellungen von τ_p zu finden sind, vgl. mit (Maturi u. Elsayigh, 2009), (Pogány, 2010) und (Pogány u. Nadarajah, 2010). Die eingeführten Integraldarstellungen werden anschließend für die grafische Veranschaulichung von $\tau_{n,p}$ (siehe Abbildung 22) sowie für die Spezifikation von Nullumgebungen verwendet, auf welchen $\tau_{n,p}$ auch im Falle $p > 2$ die in Theorem 4.1 angegebenen Vorzeichen- bzw. Monotonieeigenschaften besitzt.

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der angekündigten Darstellung von $\tau_{n,p}$ für beliebig wählbare Parameter $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 0$:

Lemma 4.3. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\tau_{n,p}(t) = \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \right)^n \int_{\mathbb{R}_{>0}^n} \exp\left(-\frac{|z|_p^p}{p}\right) \prod_{i=1}^n \cos(t_i z_i) dz \quad , \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n. \quad (4.5)$$

Beweis. Im Spezialfall $n = 1$ ergibt sich die Behauptung aus der in Definition 1.7 angegebenen Darstellung der zu τ_p gehörigen stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{1,p}$ sowie aus der Tatsache, dass $\tau_p(t) = \tau_p(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, vgl. mit (1.18). Die Behauptung im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ folgt zudem aus (4.1) und den Betrachtungen im Spezialfall $n = 1$. \square

Die Integraldarstellung (4.5) ist in Analogie zu (3.5) für eine Untersuchung des Vorzeichens der zugehörigen charakteristischen Funktion geeignet. Im Hinblick auf die darüber hinaus angestrebte Untersuchung des Monotonieverhaltens erfolgt nun die Angabe eines Analogons von Lemma 3.6. In Lemma 4.4 sind in diesem Zusammenhang auch die partiellen Ableitungen von $\tau_{n,p}$ mithilfe von numerisch und analytisch auswertbaren Integralen dargestellt.

Lemma 4.4. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{\times n}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n} \tau_{n,p}}{\partial t_1^{m_1} \dots \partial t_n^{m_n}}(t) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial^{m_i} \tau_p}{\partial t_i^{m_i}}(t_i) \quad , \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (4.6)$$

wobei

$$\frac{\partial^{m_i} \tau_p}{\partial t^{m_i}}(t) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m_i}{2}} \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) z^{m_i} \cos(tz) dz & , m_i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R} , \\ (-1)^{\frac{m_i+1}{2}} \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) z^{m_i} \sin(tz) dz & , m_i \notin \mathbb{N}, t \in \mathbb{R} , \end{cases} \quad (4.7)$$

und

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial t}(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) (z^p - 1) \cos(tz) dz \quad , t \in \mathbb{R}_{\neq 0} . \quad (4.8)$$

Beweis. Die Behauptung in (4.6) folgt aus Gleichung (4.1). Darüber hinaus ergibt sich (4.7) durch die Anwendung der Leibniz'schen Regel zur Ableitung von Parameterintegralen (siehe (Bronshtein, Semendyaev et al., 2004)) auf die in Lemma 4.3 hergeleitete Integraldarstellung von τ_p . Für den Beweis von (4.8) betrachten wir Darstellung (4.7) im Falle $m_i = 1$. In diesem gilt

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial t}(t) = -\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) z \sin(tz) dz \quad , t \in \mathbb{R} . \quad (4.9)$$

Die partielle Integration ($u' = z \sin(tz)$, $v = \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right)$) in (4.9) ergibt für $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_p}{\partial t}(t) &= -\frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{\sin(tz)}{t^2} - \frac{z \cos(tz)}{t} \right) z^{p-1} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz \\ &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \frac{z^p \cos(tz)}{t} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz - \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \frac{z^{p-1} \sin(tz)}{t^2} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die Behauptung folgt nun durch partielle Integration ($u' = z^{p-1} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right)$, $v = \frac{\sin(tz)}{t^2}$) im zweiten Summanden von (4.10). Diese führt auf

$$\int_0^\infty \frac{\sin(tz)}{t^2} z^{p-1} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz = \int_0^\infty \frac{\cos(tz)}{t} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz \quad , t \in \mathbb{R}_{\neq 0} .$$

□

In den Lemmata 4.3 und 4.4 wurden die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ sowie die dazugehörigen partiellen Ableitungen in Analogie zum vorherigen Kapitel mithilfe von numerisch auswertbaren Integralen dargestellt, vgl. hierzu auch mit Bemerkung 1.62 und den auf (4.5) basierenden Abbildungen 12 und 22. Die angegebenen Integraldarstellungen können zudem für die Herleitung analytischer Eigenschaften von $\tau_{n,p}$ verwendet werden und sich in bestimmten Situationen als vorteilhaft gegenüber anderen Darstellungsarten wie z.B. den Reihendarstellungen erweisen. In diesem Zusammenhang folgt nun ein Analogon der Theoreme 3.4 und 3.7 zur Beschreibung der Nullumgebungen, auf denen die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ auch für $p > 2$ positiv bzw. streng monoton entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, ist. Auf diese Weise wird nach dem bereits hinreichend betrachteten Fall $p \in (0, 2]$ (siehe Theorem 4.1) auch im Falle $p > 2$ der Grundstein für den Einsatz von $\tau_{n,p}$ in statistischen Anwendungen bzw. für die geometrische Beschreibung der zugehörigen Niveaumengen (siehe Kapitel 5) gelegt.

Theorem 4.5. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 2$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Funktion $\tau_{n,p}$ ist positiv auf $\left[-(\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}\right]^n$;*

(ii) $\tau_{n,p}(r_1 t) > \tau_{n,p}(r_2 t)$ für $t \in \left[- (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2, (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2 \right]^n \setminus \{0_n\}$ und $(r_1, r_2) \in [0, 1]^{\times 2}$ mit $|r_1| < |r_2|$.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Die in Theorem 4.5 (i) angegebene und unter Verwendung von (4.5) hergeleitete Nullumgebung kann mithilfe bekannter Ungleichungen für mehrfach differenzierbare charakteristische Funktionen noch erweitert werden. Eine derartige Erweiterung ist im nachfolgenden Korollar 4.6 dargestellt.

Korollar 4.6. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 2$. Dann ist $\tau_{n,p}$ positiv auf*

$$M := \left[- \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) p^{1/p}} \cdot \frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right) p^{1/p}} \cdot \frac{\pi}{2}} \right]^n,$$

wobei $\left[- (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}} \right]^n \subset M$.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Im Hinblick auf Integraldarstellungen charakteristischer Funktionen sei an dieser Stelle daran erinnert, dass mit Theorem 2.5 bereits für jede $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion eine derartige Darstellung bekannt ist. Der in (2.6) zum Ausdruck kommende Zusammenhang zur charakteristischen Funktion $\varphi_{n,p}$ ist hierbei im Falle der speziellen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion $\tau_{n,p}$ besonders wertvoll. So konnte mithilfe der geometrischen Darstellung von $\tau_{n,p}$ aus Theorem (2.5) und der Faktorisierungseigenschaft von $\tau_{n,p}$ aus (4.1) in Abschnitt 3.4 u.a. gezeigt werden, dass die multivariate charakteristische Funktion $\varphi_{k,n,p}$ unter bestimmten Bedingungen an die Parameter $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$ positiv ist. Dies impliziert insbesondere die i. Allg. nur schwer nachweisbare positive Definitheit der zugehörigen stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte und ist grundlegend für die in Kapitel 6 entwickelten neuartigen Charakterisierungen α -symmetrischer Verteilungen. Darüber hinaus besitzt die geometrische Darstellung von $\tau_{n,p}$ eine wichtige Bedeutung für den in Abschnitt 5.2 erfolgenden Vergleich zwischen α -symmetrischen und $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen. Die in den Beweisen der Theoreme 2.9 und 2.12 bereits verwendete Verallgemeinerung dieser Darstellung ist aus diesem Grund in Lemma 4.7 festgehalten.

Lemma 4.7. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq \max(2,n)}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\tau_{n,p}(t) = \int_0^\infty \varphi_{n,m,p}(r t) dF(r) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist F die Verteilungsfunktion einer P -f.s. positiven Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(r) = I_{(0,\infty)}(r) \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} r^{m-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) \quad , \quad r \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Aus den Theoremen 1.10 und 2.5 folgt, dass

$$\tau_{m,p}(y) = \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} \int_0^\infty \varphi_{m,p}(r y) r^{m-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \quad , \quad y \in \mathbb{R}^m. \quad (4.11)$$

Die Behauptung ist somit im Fall $m = n$ bewiesen. Sei daher nun $n \in \{1, \dots, m - 1\}$. Dann ist $\tau_{n,p}(t) = \tau_{m,p}\left(\left(t^T, 0_{m-n}^T\right)^T\right)$, $t \in \mathbb{R}^n$, vgl. mit (4.1). Hiermit folgt nun aus (4.11), dass

$$\begin{aligned}\tau_{n,p}(t) &= \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} \int_0^\infty \varphi_{m,p}\left(r \left(t^T, 0_{m-n}^T\right)^T\right) r^{m-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \\ &= \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} \int_0^\infty \varphi_{n,m,p}(rt) r^{m-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \quad , t \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

□

4.3 Reihendarstellungen und eine Erweiterung des Theorems von Pogány und Nadarajah

Die Approximation und die analytische Untersuchung einer charakteristischen Funktion kann alternativ zum vorherigen Abschnitt auch anhand einer Reihendarstellung erfolgen. Im Hinblick auf die Berechnung von $\tau_{n,p}$ ist Darstellung (4.5) hierbei dahingehend von Vorteil, dass der Fehler bei der numerischen Approximation durch die Verwendung geeigneter (adaptiver) Quadraturverfahren sehr klein gehalten werden kann, vgl. mit Bemerkung 1.62. Diese Tatsache wurde u.a. für die Berechnung von τ_p in den Abbildungen 12 und 22 ausgenutzt. Es ist jedoch bereits in Beispiel 3.10 deutlich geworden, dass zumindest für bestimmte Teilmengen des Definitionsbereiches einer charakteristischen Funktion auch sehr gute Näherungen mithilfe von Reihendarstellungen ermittelt werden können. Für die analytische Erforschung einer charakteristischen Funktion ist es zudem vorteilhaft, die entsprechende Funktion sowohl durch Integrale als auch durch Reihen darstellen zu können. So gibt es auf der einen Seite spezielle Eigenschaften wie das Nullstellen- und Monotonieverhalten, für deren Untersuchung Integraldarstellungen wie jene in (3.6) und (4.5) besser geeignet sind als Darstellungen mithilfe von alternierenden Potenzreihen. Auf der anderen Seite können aber auch Reihendarstellungen für Untersuchungen bestimmter analytischer Eigenschaften wie z.B. das asymptotische Verhalten einer charakteristischen Funktion unter Umständen besser geeignet sein als entsprechende Integraldarstellungen, vgl. mit Beispiel 3.10.

Die Funktion $\tau_{n,p}$ wird daher in diesem Abschnitt für alle $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mithilfe von Reihen beschrieben. Aus den resultierenden Darstellungen werden ferner analytische Eigenschaften sowie Approximationsmethoden von $\tau_{n,p}$ hergeleitet. In diesem Zusammenhang wird auch eine asymptotische Version der für $p > 1$ in (Pogány u. Nadarajah, 2010) eingeführten Reihendarstellung von τ_p für beliebiges $p > 0$ verallgemeinert und durch weitere Reihendarstellungen ergänzt. An dieser Stelle sei hervorgehoben, dass die bisher einzige publizierte Darstellung einer $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion im Falle $p \notin \{1, 2, 4, 6, \dots\}$ auf dem im Folgenden angegebenen Resultat aus (Pogány u. Nadarajah, 2010) basiert.

Theorem 4.8. *Sei $p > 1$. Dann ist*

$$\tau_p(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} {}_1\psi_1\left(\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); -\frac{t^2 p^{2/p}}{4}\right) \quad , t \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Beweis. Siehe (Pogány u. Nadarajah, 2010). □

Aus Theorem 4.8 und der Faktorisierungseigenschaft in (4.1) folgt, dass sich $\tau_{n,p}$ für alle $p > 1$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ darstellen lässt als

$$\tau_{n,p}(t) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\right)^n \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{\times n}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1+2k_i}{p}\right)}{\Gamma\left(k_i + \frac{1}{2}\right)} \frac{(-t_i^2 p^{2/p}/4)^{k_i}}{k_i!} \quad , t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.13)$$

wobei die rechte Seite in (4.13) für alle $t \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Für $p \in (0, 1]$ ist die Konvergenz der in (4.13) angegebenen Reihe dagegen nicht sichergestellt. Es wird im Folgenden jedoch gezeigt, dass (4.13) auch in diesem Fall für die Approximation und für die Untersuchung analytischer Eigenschaften von $\tau_{n,p}$ auf einer genügend kleinen Nullumgebung verwendet werden kann. Die Aussage in Theorem 4.9 stellt in diesem Zusammenhang eine asymptotische Version der Aussage in Theorem 4.8 dar, welche auch für $p \in (0, 1]$ gilt und in Anlehnung an die Herleitung von Gleichung (5.9.5) in (Lukacs, 1970) bewiesen wird. In Analogie zu Theorem 4.8 genügt auch hier die Betrachtung des univariaten Falles $n = 1$, da sich der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ stets aus (4.1) ergibt.

Theorem 4.9. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\tau_p(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma\left(\frac{1+2k}{p}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{(-t^2 p^{2/p}/4)^k}{k!} + \varepsilon(t) \quad , t \in \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

wobei

$$\varepsilon(t) = O(t^{2m+1}) \quad , t \rightarrow 0.$$

Beweis. Aus Lemma 4.3 folgt, dass

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) \exp(itz) dz \right) \quad , t \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Wir werden die Funktion $h_t(z) := \exp(itz)$, $z \geq 0$, nun für alle Parameter $t \in \mathbb{R}$ unter Verwendung der Restglieddarstellung von Lagrange (siehe Formel (7.97b) in (Bronshtein, Semendyayev et al., 2004)) mithilfe eines zugehörigen Taylorpolynoms mit Entwicklungspunkt 0 darstellen, d.h. wir betrachten die für $z \geq 0$ gültige Darstellung

$$\begin{aligned} \exp(itz) &= \sum_{k=0}^{2m} \frac{(it)^k}{k!} z^k + \frac{\exp(it\xi(z)) (it)^{2m+1}}{(2m+1)!} z^{2m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2m} \frac{(it)^k}{k!} z^k + \theta(t, z) \frac{t^{2m+1} z^{2m+1}}{(2m+1)!}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei $\xi(z) \in (0, z)$ und $\theta(t, z) = i^{2m+1} \exp(it\xi(z))$. Wir erhalten hierbei aus (4.15) und (4.16), dass

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{2m} \frac{(it)^k}{k!} A_k + \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} H_m(t) \right) \quad , t \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

wobei

$$\begin{aligned} A_k &:= \int_0^\infty z^k \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz \\ &= p^{\frac{k+1}{p}-1} \Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right) \quad , k = 1, \dots, 2m+1, \end{aligned}$$

und

$$H_m(t) := \int_0^\infty z^{2m+1} \theta(t, z) \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) dz \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei sei hervorgehoben, dass $|\theta(t, z)| \in [0, 1]$ für $t \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$, d.h. $|H_m(t)| \in [0, A_{2m+1}]$, $t \in \mathbb{R}$. Aus (4.17) folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \tau_p(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=0}^{2m} \frac{t^k \cos(k\pi/2) p^{k/p}}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right) + \operatorname{Re} \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}} H_m(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2m+1)!} t^{2m+1} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=0}^m \frac{(-t^2 p^{2/p})^k}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{p}\right) + \operatorname{Re} \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}} H_m(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2m+1)!} t^{2m+1} \right) \quad , t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mit der Verdopplungsformel von Legendre (vgl. mit (2.12) bzw. mit Formel 6.1.18 in (Abramowitz u. Stegun, 1972)) ist ferner

$$\tau_p(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma\left(\frac{1+2k}{p}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{(-t^2 p^{2/p}/4)^k}{k!} + \operatorname{Re} \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}} H_m(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2m+1)!} t^{2m+1} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left| \operatorname{Re} \left(\frac{p^{1-\frac{1}{p}} H_m(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2m+1)!} t^{2m+1} \right) \right|}{|t^{2m+1}|} \leq \frac{p^{1-\frac{1}{p}} A_{2m+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2m+1)!}.$$

□

Anhand der asymptotischen Darstellung (4.14) wird deutlich, dass die mit (4.12) verbundene Reihe besonders gut zur Approximation von τ_p auf Nullumgebungen geeignet ist. So kann für $|t| \rightarrow 0$ nicht nur der Approximationsfehler beim Abbruch der Reihe in (4.12) abgeschätzt werden, sondern insbesondere auch τ_p für beliebiges $p > 0$ auf einer hinreichend kleinen Nullumgebung näherungsweise ermittelt werden. Darüber hinaus sind die Darstellungen (4.12) und (4.14) auch für die Herleitung analytischer Eigenschaften von τ_p bzw. $\tau_{n,p}$ verwendbar. Auf der Basis von Theorem 4.9 kann in diesem Zusammenhang z.B. für alle $p > 0$ das asymptotische Verhalten von $\tau_p(t)$ für $t \rightarrow 0$ charakterisiert werden, denn mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und den Bezeichnungen aus Theorem 4.9 ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma\left(\frac{1+2k}{p}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{(-t^2 p^{2/p}/4)^k}{k!} - \varepsilon(t)}{t^2} = -\frac{p^{2/p} \Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}, \quad (4.18)$$

d.h. $1 - \tau_p(t)$ ist für $t \rightarrow 0$ asymptotisch äquivalent zur Funktion $t \mapsto t^2$. Dagegen sind sowohl Theorem 4.8 als auch Theorem 4.9 nicht für asymptotische Untersuchungen von $\tau_p(t)$ für $t \rightarrow \infty$ geeignet, da die Summanden der mit (4.12) bzw. (4.14) verbundenen Reihen in diesem Fall nicht beschränkt sind. Hieraus folgt vor allem auch, dass sich der Approximationsfehler bei der numerischen Berechnung von $\tau_p(t)$ mithilfe von (4.12) für betragsmäßig große Argumente t nur schwer abschätzen lässt. In diesem Fall sind vielmehr Reihendarstellungen von Vorteil, deren Summanden für $|t| \rightarrow \infty$ verschwinden. Eine derartige Darstellung ist in Ergänzung zu den Theoremen 4.8 und 4.9 im nun folgenden Theorem 4.10 angegeben. Der Beweis dieses Theorems basiert auf der für $p \in (0, 2]$ aus Beispiel 1.56 folgenden Adjungiertheit von τ_p zur stabilen charakteristischen Funktion in (4.4) sowie auf Theorem 5.8.2 aus (Lukacs, 1970).

Theorem 4.10. *Sei $p \in (0, 1)$. Dann ist*

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{|t| \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} k p\right) \Gamma(pk+1)}{p^k k!} (|t|^{-p})^k, \quad t \in \mathbb{R}_{\neq 0}. \quad (4.19)$$

Beweis. Für die zur charakteristischen Funktion aus (4.4) gehörige stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte f gilt mit Theorem 5.8.2 aus (Lukacs, 1970), dass

$$f(x) = \frac{1}{\pi |x|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} k p\right) \Gamma(pk+1)}{p^k k!} (|x|^{-p})^k, \quad x \in \mathbb{R}_{\neq 0}. \quad (4.20)$$

Es wurde zudem in Beispiel 1.49 gezeigt, dass

$$\tau_p(t) = \frac{\pi p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Die Behauptung folgt daher aus (4.20) und (4.21). □

Die Reihendarstellung (4.19) ist im Hinblick auf die numerische Berechnung und die analytische Untersuchung von τ_p eine hilfreiche Ergänzung zu Darstellung (4.14), sofern $p \in (0, 1)$. So ist Theorem 4.10 in diesem Fall auch zur Approximation von τ_p für betragsmäßig große Argumente geeignet, da die Summanden der Reihe in (4.19) für $|t| \rightarrow \infty$ verschwinden. Der Approximationsfehler bei der numerischen Berechnung von τ_p kann somit in Analogie zu Theorem 4.9 abgeschätzt werden. Anhand von (4.19) ist ferner auch eine Beschreibung des asymptotischen Verhaltens von $\tau_p(t)$ für $|t| \rightarrow \infty$ möglich, vgl. mit Beispiel 4.12.

Für $p \geq 1$ ist die Konvergenz der Reihe in (4.19) dagegen nicht sichergestellt. Das folgende Theorem 4.11 verdeutlicht jedoch, dass eine asymptotische Version der Aussage in Theorem 4.10 auch für $p \geq 1$ ihre Gültigkeit behält. Die Herleitung dieser Aussage erfolgt hierbei in Anlehnung an eine in (Lukacs, 1970) für $p \in (0, 2]$ bewiesene Fouriertransformierten-Darstellung von

$$\phi(t) = \exp\left(-\frac{|t|^p}{p}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Theorem 4.11. *Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 0$. Dann ist*

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{|t| \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}kp\right) \Gamma(pk+1)}{p^k k!} (|t|^{-p})^k + \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{R}_{\neq 0}, \quad (4.22)$$

wobei

$$\varepsilon(t) = O\left(|t|^{-p(m+1)-1}\right), \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Anhand der Theoreme 4.8 und 4.10 ist es in diesem Abschnitt gelungen, die charakteristische Funktion τ_p für alle $p \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ durch eine f.ü. konvergente Reihe darzustellen. Eine Approximation von $\tau_p(t)$ ist daher prinzipiell für alle $t \geq 0$ und $p \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ mithilfe einer Reihendarstellung möglich, indem die ersten m Summanden der in (4.12) bzw. (4.19) dargestellten Reihen addiert werden. In den Theoremen 4.9 und 4.11 wurde zudem gezeigt, dass die hergeleiteten Reihendarstellungen auf bestimmten Teilmengen des Definitionsbereiches besonders gut für die Approximation von τ_p geeignet sind. Auf diesen Bereichen können die in (4.12) bzw. (4.19) dargestellten Reihen zur näherungsweisen Berechnung von τ_p für beliebiges $p > 0$ verwendet werden. Darüber hinaus wird die Relevanz der in diesem Abschnitt präsentierten Reihendarstellungen auch im Hinblick auf die analytische Erforschung von τ_p deutlich. So eignen sich die Darstellungen (4.14) bzw. (4.22) beispielsweise für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $\tau_p(t)$ für $|t| \rightarrow 0$ bzw. $|t| \rightarrow \infty$, vgl. mit (4.18) und mit dem folgenden Beispiel.

Beispiel 4.12. Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 0$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Theorem 4.11, dass

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_p(t)}{t^{-(p+1)}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}kp\right) \Gamma(pk+1) t^{-(pk-p)}}{p^k k!} + \frac{\varepsilon(t)}{t^{-(p+1)}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right) \Gamma(p+1)}{p^{\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\tau_p(t) = O\left(|t|^{-(p+1)}\right), \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Die charakteristische Funktion τ_p strebt somit für $|t| \rightarrow \infty$ mindestens so schnell gegen Null wie die Funktion $h(t) := |t|^{-(p+1)}$, $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Im Falle $p \notin \{2, 4, 6, \dots\}$ ist $\tau_p(t)$ für $|t| \rightarrow \infty$ sogar asymptotisch äquivalent zu $h(t)$.

4.4 Teilbarkeits- und Stabilitätsuntersuchung

In Kapitel 1 dieser Arbeit wurden die $l_{n,p}$ -symmetrischen und die symmetrisch α -stabilen Verteilungen eingeführt und es wurde angedeutet, dass bestimmte Vertreter dieser Verteilungsfamilien zueinander adjungiert sind, vgl. mit Beispiel 1.56 und Kapitel 6. Eine Beschreibung der Schnittmenge der betrachteten Familien von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist jedoch bisher nur im Spezialfall $p = 2$ am Beispiel der Standardnormalverteilung erfolgt. Bei der Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ist aber die Frage nach der Existenz stabiler $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen gerade im Hinblick auf die geometrische Struktur von essentieller Bedeutung, da die symmetrisch α -stabilen charakteristischen Funktionen unter genau diesem Gesichtspunkt hinreichend beschrieben sind, vgl. mit Abschnitt 1.6. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt die Untersuchung von $N_{n,p}$ auf unbegrenzte Teilbarkeit und Stabilität erfolgen. Auf diese Weise tragen wir auch zur Klärung der in der Literatur bisher unbeantworteten Frage bei, ob es für $p \notin \{1, 2\}$ Verteilungen gibt, welche $l_{n,p}$ -symmetrisch und zugleich stabil bzw. unbegrenzt teilbar sind. Die Ausführungen dieses Abschnittes stellen hierbei eine wichtige Grundlage für die in Kapitel 5 erfolgenden geometrischen Beschreibungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen dar, welche einen umfassenden Vergleich zwischen den $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen und den α -symmetrischen bzw. symmetrisch α -stabilen Verteilungen beinhalten.

Im Vorfeld der Stabilitätsanalyse der p -verallgemeinerten Normalverteilung wird nun zunächst die Frage beantwortet, für welche Parameter $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Verteilung $N_{n,p}$ überhaupt unbegrenzt teilbar ist. Hierbei sei daran erinnert, dass die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung keine Nullstellen besitzt. Es ist daher bereits aus Theorem 4.1 ersichtlich, dass $N_{n,p}$ nicht unbegrenzt teilbar und somit auch nicht stabil sein kann, falls p größer als 2 ist. Für $p \in (0, 2]$ besitzt $\tau_{n,p}$ dagegen keine Nullstellen, sodass es prinzipiell auch andere unbegrenzt teilbare p -verallgemeinerte Normalverteilungen als $N_{n,1}$ und $N_{n,2}$ geben kann. Das folgende Theorem gibt in diesem Zusammenhang Auskunft über die Teilbarkeit von $N_{n,p}$ im Falle $p \in (0, 1]$.

Theorem 4.13. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p \in (0, 1]$. Dann ist $N_{n,p}$ unbegrenzt teilbar.*

Beweis. Die Behauptung wird zunächst im Spezialfall $n = 1$ bewiesen. Wir betrachten hierzu für $p \in (0, 1]$ die in Definition 1.7 angegebene Wahrscheinlichkeitsdichte der univariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung

$$f_{1,p}(x) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \exp\left(-\frac{x^p}{p}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für die Ableitungen der Einschränkung von $(\log \circ f_{1,p})$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\frac{\partial(\log \circ f_{1,p})}{\partial x}(x) = -x^{p-1}, \quad x > 0,$$

sowie

$$\frac{\partial^2(\log \circ f_{1,p})}{\partial x^2}(x) = -(p-1)x^{p-2}, \quad x > 0.$$

Die zweite Ableitung von $(\log \circ f_{1,p})$ ist somit nichtnegativ auf $\mathbb{R}_{>0}$, d.h. $f_{1,p}$ ist log-konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$. Es folgt nun aus Theorem 1.63, dass N_p unbegrenzt teilbar ist. Damit ist $N_{n,p}$ aber auch für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ unbegrenzt teilbar, denn die Komponenten eines $N_{n,p}$ -verteilten Zufallsvektors sind unabhängig und identisch p -verallgemeinert normalverteilt. \square

Mit Theorem 4.13 ist $N_{n,p}$ im Falle $p \in (0, 1]$ unbegrenzt teilbar. Hiermit ist für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p \in (0, 1]$ durch $\tau_{n,p}^{1/m}$ die charakteristische Funktion einer n -variater Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben. Im Spezialfall $(p, n) = (1, 1)$ stellt z.B. die Funktion

$$\tau_1^{1/m}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{1/m}, \quad t \in \mathbb{R},$$

die charakteristische Funktion der symmetrischen Gammaverteilung dar, vgl. mit (Steutel u. v. Harn, 2004). Für den Beweis von Theorem 4.13 wurde hierbei ausgenutzt, dass die Dichte $f_{1,p}$ für $p \in (0, 1]$ log-konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist. Aus der log-Konkavität von $f_{1,p}$ im Falle $p \in (1, 2)$ lassen sich dagegen keine Rückschlüsse auf die Teilbarkeit der p -verallgemeinerten Normalverteilung ziehen. Da die unbegrenzte Teilbarkeit von N_p aber auch in diesem Fall nicht durch Theorem 4.1 ausgeschlossen ist, wird die p -verallgemeinerte Normalverteilung für $p \in (1, 2)$ mithilfe eines alternativen Ansatzes auf unbegrenzte Teilbarkeit untersucht. Hierzu wird eine Charakterisierung unbegrenzt teilbarer Verteilungen aus (Sato, 1973) verwendet, vgl. mit Theorem 1.64.

Theorem 4.14. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$. Dann ist $N_{n,p}$ nicht unbegrenzt teilbar.*

Beweis. Die unbegrenzte Teilbarkeit von N_p ist eine notwendige Voraussetzung für die unbegrenzte Teilbarkeit von $N_{n,p}$. Es genügt daher zu zeigen, dass N_p für $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ nicht unbegrenzt teilbar ist. Seien hierzu $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, $x > 0$ und X eine unbegrenzt teilbare Zufallsgröße mit $X \sim N_p$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(|X| > x) &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^p}{p}\right) dy \\ &\leq \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{x^{p-1} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_x^\infty y^{p-1} \exp\left(-\frac{y^p}{p}\right) dy \\ &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{x^{p-1} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \left[-\exp\left(-\frac{y^p}{p}\right)\right]_x^\infty \\ &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{x^{p-1} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \exp\left(-\frac{x^p}{p}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aus (4.24) folgt nun, dass

$$-\log(P(|X| > x)) \geq -\log\left(p^{1-\frac{1}{p}}\right) + \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right) + (p-1)\log x + \frac{x^p}{p}, \quad x > 0.$$

Dies impliziert ferner

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log(P(|X| > x))}{x \log x} \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log\left(p^{1-\frac{1}{p}}\right) + \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right) + (p-1)\log x + \frac{x^p}{p}}{x \log x} = \infty,$$

d.h. X besitzt mit Theorem 1.64 eine Normalverteilung. Hiermit liegt jedoch ein Widerspruch zur Wahl von p vor. Die p -verallgemeinerte Normalverteilung ist somit für $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ nicht unbegrenzt teilbar. \square

Aus den Theoremen 4.13 und 4.14 wird deutlich, dass die p -verallgemeinerte Normalverteilung $N_{n,p}$ genau dann unbegrenzt teilbar ist, wenn $p \in (0, 1] \cup \{2\}$. In allen anderen Fällen ist $N_{n,p}$ höchstens begrenzt oft teilbar und somit insbesondere nicht stabil. Das Theorem 4.14 liefert in diesem Zusammenhang erste Aufschlüsse über die Existenz und die Gestalt der charakteristischen Generatoren von nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen, da sich $\tau_{n,p}$ für $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ zumindest nicht wie in (1.29) darstellen lässt. Eine ausführliche Betrachtung dieses Gesichtspunktes bei der geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wird in Kapitel 5 erfolgen. Es soll nun aber zunächst die Frage geklärt werden, ob die unbegrenzt teilbaren p -verallgemeinerten Normalverteilungen auch stabil sind. Eine Antwort hierauf liefert das folgende Theorem 4.15, dessen Beweis auf einem Vergleich der Momente von N_p (siehe Lemma 1.15) und den Momenten stabiler Verteilungen (siehe Abschnitt 1.6) basiert.

Theorem 4.15. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 0$. Dann ist $N_{n,p}$ genau dann stabil, wenn $p = 2$.*

Beweis. Die Behauptung wird zunächst im Spezialfall $n = 1$ bewiesen. Hierbei ist auf der einen Seite N_2 mit Beispiel 1.56 symmetrisch 2-stabil. Auf der anderen Seite ist die p -verallgemeinerte Normalverteilung für $p \neq 2$ nicht symmetrisch 2-stabil aber mit Momenten beliebiger Ordnung versehen, vgl. mit Lemma 1.15. Da die symmetrisch α -stabilen Verteilungen jedoch für $\alpha \neq 2$ keine Momente zweiter oder höherer Ordnung besitzen, vgl. mit Theorem 1.23 und Theorem 1.55, kann N_p für $p \neq 2$ nicht stabil sein. Die Behauptung ist somit im Spezialfall $n = 1$ bewiesen. Im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ folgt die Behauptung ferner aus der Tatsache, dass die Randverteilungen einer multivariaten stabilen Verteilung notwendigerweise stabil sind. \square

Die p -verallgemeinerte Normalverteilung wurde in diesem Abschnitt hinsichtlich der Verteilungseigenschaften „unbegrenzte Teilbarkeit“ und „Stabilität“ erstmals vollständig charakterisiert. Auf diese Weise haben wir erste Hinweise auf die Schnittmenge der Familien symmetrisch α -stabiler und $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen und insbesondere über die Gestalt und Existenz von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Generatoren erhalten. So ist zumindest die Familie der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilungen für $p \neq 2$ nicht stabil (siehe Theorem 4.15) und damit auch die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ in diesem Fall nicht von der in (1.29) angegebenen geometrischen Gestalt. Diese Tatsache wird in Kapitel 5 für eine ausführliche Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen in entscheidender Weise ausgenutzt.

Im Falle $p \in (0, 1]$ konnte zudem gezeigt werden, dass $N_{n,p}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ unbegrenzt teilbar ist. Da die unbegrenzt teilbaren Verteilungen in der Literatur besonders auch dahingehend von Bedeutung sind, dass sie als Grenzverteilungen von Summen u.i.v. infinitesimaler Zufallsgrößen in Frage kommen, wirft das Theorem 4.13 die interessante Frage auf, unter welchen Bedingungen ein Schemata derartiger Zufallsgrößen die Grenzverteilung N_p (für $p \in (0, 1]$) besitzt. Aufgrund der geometrischen Ausrichtung dieser Arbeit wird dieser Gesichtspunkt nicht weiter vertieft, sondern vielmehr als offenes Problem benannt. Dass sich aber für jedes $p \in (0, 1]$ ein Schemata mit Grenzverteilung N_p konstruieren lässt, wird anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht.

Beispiel 4.16. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p \in (0, 1]$. Dann besitzt die in (Richter, 2007) definierte p -verallgemeinerte t -Verteilung mit n Freiheitsgraden die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$h_{n,p}(x) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)}{2 n^{1/p} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \left(1 + \frac{|x|^p}{n}\right)^{-\frac{n+1}{p}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wird die zu $h_{n,p}$ gehörige charakteristische Funktion darüber hinaus mit $\phi_{n,p}$ bezeichnet, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,p}(x) = f_{1,p}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

und damit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n,p}(t) = \tau_p(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Im angegebenen Fall ist $h_{n,p}$ zudem log-konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\log \circ h_{n,p})}{\partial x^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{n+1}{n} \frac{x^{p-1}}{1 + \frac{x^p}{n}} \right) \\ &= \frac{n+1}{n} \frac{(1-p)x^{p-2} \left(1 + \frac{x^p}{n}\right) + \frac{p}{n} x^{2p-2}}{\left(1 + \frac{x^p}{n}\right)^2} > 0 \quad , \quad x > 0. \end{aligned}$$

Aus Theorem 1.63 folgt nun, dass $\phi_{n,p}^{1/m}$ für $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine charakteristische Funktion ist. Die p -verallgemeinerte Normalverteilung N_p ist somit die Grenzverteilung im Schemata

$$\zeta_m = \xi_{1,m} + \xi_{2,m} + \dots + \xi_{m,m} \quad , \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

sofern $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \dots, \xi_{m,m}$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ u.i.v. mit charakteristischer Funktion $\phi_{m,p}^{1/m}$ sind.

5 Charakteristische Generatoren $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen

5.1 Vorbetrachtungen

Die Geometrie $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ist in diesem Kapitel abermals im Mittelpunkt des Interesses. Während die geometrische Darstellung (2.6) Strukturen dieser Funktionen aufzeigt, welche analoge Interpretationen wie die geometrisch-stochastische Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen besitzen, werden die folgenden Ausführungen unter einem anderen geometrischen Gesichtspunkt stattfinden. So werden auf der Basis der Resultate aus den Kapiteln 2 - 4 die Niveaumengen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen analysiert und geometrisch beschrieben. Hierbei sei daran erinnert, dass die absolutstetigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen ihren geometrisch motivierten Namen nicht nur der stochastischen Darstellung (1.11), sondern insbesondere auch der Gestalt ihrer Dichteniveaumengen $S_{n,p}(r)$, $r > 0$, verdanken, vgl. mit Abschnitt 1.2. Die Geometrie der Wahrscheinlichkeitsdichten $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen wird in diesem Zusammenhang maßgeblich durch den p -verallgemeinerten Radius $|\cdot|_p$ bestimmt, lässt sich doch jede derartige Dichte als Komposition von $|\cdot|_p$ und einer das Abklingverhalten modellierenden skalaren (dichtegenerierenden) Funktion darstellen. Eine zentrale Fragestellung dieses Kapitels ist nun, inwiefern auch die charakteristische Funktion einer $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung durch einen u.U. verallgemeinerten Radius und einer das Oszillations- bzw. Abklingverhalten modellierenden skalaren Funktion repräsentiert wird. Für $p = 2$ ist diese Frage mit Theorem 1.4 (iii) bereits hinreichend beantwortet. So ist z.B. für die spezielle sphärische Verteilung $N_{n,2}$ bekannt, dass

$$\tau_{n,2}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}|t|_2^2\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

und

$$f_{n,2}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}|x|_2^2\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

d.h. die dichtegenerierende Funktion der Normalverteilung ist proportional zu ihrem charakteristischen Generator und die Niveaumengen von Dichte als auch charakteristischer Funktion sind Sphären. Dass auch die charakteristische Funktion $\tau_{n,2}$ nur von der euklidischen Norm des Arguments abhängt, ist hierbei durch die orthogonale Invarianz der euklidischen Norm zu begründen, denn

$$\begin{aligned} \tau_{n,2}(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle t, x \rangle) \exp\left(-\frac{1}{2}|x|_2^2\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\langle t, O_t^T x \rangle\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|O_t^T x|_2^2\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\langle |t|_2 \cdot e_1, x \rangle\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|x|_2^2\right) dx \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \quad , \end{aligned}$$

wobei $O_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix ist, welche den Vektor $t \in \mathbb{R}^n$ auf die x_1 -Achse projiziert. Die orthogonale Invarianz ist überdies auch für die Sphäre $S_{n,2}$ und die Gleichverteilung ω_n gegeben, sodass

$$\begin{aligned} \varphi_{n,2}(t) &= \int_{S_{n,2}} \exp(i\langle t, \theta \rangle) \omega_n(d\theta) \\ &= \int_{S_{n,2}} \exp\left(i\langle t, O_t^T \theta \rangle\right) \omega_n(d\theta) \\ &= \int_{S_{n,2}} \exp\left(i\langle |t|_2 \cdot e_1, \theta \rangle\right) \omega_n(d\theta) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \quad . \end{aligned}$$

Aus diesem Grund lässt sich jede $l_{n,2}$ -symmetrische charakteristische Funktion als Komposition des euklidischen Radius $|\cdot|_2$ und einer skalaren Funktion h darstellen, vgl. mit Theorem 1.4 (iii). Es sei

an dieser Stelle festgehalten, dass die absolutstetigen $l_{n,2}$ -symmetrischen Verteilungen somit auf der einen Seite zwar unterschiedliche dichtegenerierende Funktionen bzw. charakteristische Generatoren aufweisen. Auf der anderen Seite unterscheiden sich aber die (durch die jeweils verwendeten Radiusfunktionale bestimmten) Geometrien der Wahrscheinlichkeitsdichten als auch der charakteristischen Funktionen nicht. Dies ist ein Spezialfall und gilt schon für die elliptisch konturierten Verteilungen nicht mehr. Wir betrachten hierzu die achsenparallel elliptisch konturierte Normalverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi a_1^2 \cdots a_n^2}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}|x|_{(a)}^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$|x|_{(a)}^2 := \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{>0}^n,$$

vgl. mit (Richter, 2013). Die Niveaumengen der hierzu gehörigen charakteristischen Funktion sind Mengen der Art $\left\{t \in \mathbb{R}^n : |t|_{(\frac{1}{a})} = r\right\}$, $r > 0$, $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}_{>0}^n$, $1/a = (1/a_1, \dots, 1/a_n)^T$. Die charakteristischen Niveaumengen und die Dichteniveaumengen einer absolutstetigen, achsenparallel elliptisch konturierten Verteilung unterscheiden sich daher i. Allg. in Bezug auf die jeweilige geometrische Gestalt, wobei es sich bei den Funktionen $|\cdot|_{(a)}$ und $|\cdot|_{(1/a)}$ um zueinander duale Normen handelt, welche mit Theorem 4.1 aus (Richter, 2013) auch als verallgemeinerte Radiusfunktionale gedeutet werden können.

Für $p \neq 2$ sind keine Verallgemeinerungen von Theorem 1.4 (iii) für $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen bekannt. Die geometrische Beschreibung der charakteristischen Niveaumengen wird in diesem Fall ferner dadurch erschwert, dass sowohl die verallgemeinerte Sphäre $S_{n,p}$ als auch das Funktional $|\cdot|_p$ nur linear invariant gegenüber Multiplikationen mit Signaturmatrizen $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i \in \{-1, 1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sind. Für die Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen hinsichtlich der Existenz und Gestalt von charakteristischen Generatoren müssen somit i. Allg. andere Verfahren als im Spezialfall $p = 2$ angewendet werden.

Es wird unter in diesem Aspekt in Abschnitt 5.2 zunächst geprüft, ob sich die Niveaumengen einer $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion auch für $p \neq 2$ als Niveaumengen eines homogenen Funktionals interpretieren lassen. Auf diese Weise beinhaltet dieses Kapitel auch einen Vergleich zwischen den $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen und den α -symmetrischen bzw. symmetrisch α -stabilen Verteilungen, welcher im Hinblick auf die hier präsentierte Vollständigkeit bisher so nicht in der Literatur zu finden ist. In Abschnitt 5.3 wird dann gezeigt, dass die charakteristischen Funktionen einer Familie von nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen analoge Strukturen wie die charakteristischen Funktionen der sphärischen bzw. der α -symmetrischen Verteilungen besitzen. Die damit verbundene p -Verallgemeinerung von Theorem 1.4 (iii) basiert auf der ebenfalls in Abschnitt 5.3 erfolgenden Einführung und Charakterisierung eines verallgemeinerten Radiusbegriffes.

Im abschließenden Abschnitt 5.4 dieses Kapitels werden die Betrachtungen aus Abschnitt 5.3 auf eine deutlich größere Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen lokal erweitert. Es wird hier u.a. verdeutlicht, dass die charakteristische Funktion einer beliebigen nichtentarteten $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung zumindest lokal eine im Sinne von Theorem 1.4 (iii) analoge Struktur wie die sphärischen charakteristischen Funktionen aufweist.

5.2 Ein Vergleich mit α -symm. und α -stabilen charakteristischen Niveaumengen

Die $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen sollen in diesem Kapitel auch für $p \neq 2$ auf die Existenz und Gestalt einer Zerlegung in eine skalare Funktion und in einen geeignet definierten verallgemeinerten Radius nach dem Vorbild α -symmetrischer bzw. symmetrisch α -stabiler charakteristischer Funktionen oder auch $l_{n,p}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten untersucht werden, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 5.3 für die Interpretation positiv homogener Funktionale als verallgemeinerte Radiusfunktionale. Die in diesem Zusammenhang bisher betrachteten verallgemeinerten Radien wie z.B. das $|\cdot|_p$ -Funktional besitzen hierbei alle die Eigenschaft der positiven Homogenität und können aus diesem Grund als Minkowskifunktionale symmetrischer Sternkörper aufgefasst werden, vgl. mit Bemerkung 1.58. Im Hinblick auf die Zielstellung dieses Kapitels und der hierfür notwendigen Einführung

eines geeigneten verallgemeinerten Radiusbegriffes (siehe Abschnitt 5.3) ist es daher naheliegend, die Niveaumengen der $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen zunächst auf Übereinstimmungen mit Niveaumengen homogener Funktionale zu untersuchen. Für eine gegebene $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wird daher in diesem Abschnitt geprüft, ob

$$\varphi(t) = h(\phi(t)) \quad , t \in \mathbb{R}^n , \quad (5.1)$$

wobei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion und $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine positiv homogene Funktion ist. Da sich sowohl die α -symmetrischen charakteristischen Funktionen als auch die symmetrisch α -stabilen charakteristischen Funktionen wie in (5.1) darstellen lassen, ist mit diesem Abschnitt auch ein Vergleich zwischen den Familien der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen und der α -symmetrischen bzw. symmetrisch α -stabilen Verteilungen verbunden.

Im Falle der p -verallgemeinerten Normalverteilung ist bereits aus Theorem 4.15 bekannt, dass $N_{n,p}$ für $p \neq 2$ nicht stabil ist. Im folgenden Theorem wird diese Aussage dahingehend erweitert, dass $N_{n,p}$ in diesem Fall auch nicht α -symmetrisch ist, d.h. die Niveaumengen von $\tau_{n,p}$ lassen sich weder als Niveaumengen von $|\cdot|_p$ noch als Niveaumengen des q -verallgemeinerten Radius $|\cdot|_q$ für ein $q > 0$ interpretieren. Hierbei sei daran erinnert, dass die in Abschnitt 1.2 beschriebene Geometrie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen nicht nur vom Funktional $|\cdot|_p$, sondern auch von einem anderen positiv homogenen Funktional bestimmt wird. So wird der p -verallgemeinerte Oberflächeninhalt $\mathfrak{D}_{n,p}$ im Falle $p \geq 1$ durch die zu $|\cdot|_p$ duale Norm $|\cdot|_{p/(p-1)}$ erzeugt, vgl. mit Bemerkung 1.9. Dies legt die Vermutung eines Zusammenhangs zwischen den Niveaumengen von $\tau_{n,p}$ und dem Funktional $|\cdot|_p$ bzw. einem für $q > 0$ gegebenen Funktional $|\cdot|_q$ nahe.

Theorem 5.1. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ und $q > 0$. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\tau_{n,p}(t) = h(|t|_q)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Die Behauptung wird bewiesen, indem die hypothetisch angenommene Existenz einer skalaren Funktion $\tilde{h} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ und einer Konstanten $q > 0$ mit

$$\tau_{n,p}(t) = \tilde{h}(|t|_q^q) \quad , t \in \mathbb{R}^n , \quad (5.2)$$

für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ zum Widerspruch geführt wird. Aus (4.1) und (5.2) folgt hierbei, dass

$$\tilde{h}(|t|_q^q) = \tilde{h}(|t_1|^q + \dots + |t_n|^q) = \prod_{i=1}^n \tau_p(|t_i|) \quad , t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n . \quad (5.3)$$

Die Wahl von $t = t_1 \cdot e_1$ ergibt insbesondere

$$\tilde{h}(|t_1|^q) = \tau_p(|t_1|) \quad , t_1 \in \mathbb{R} ,$$

d.h.

$$\tilde{h}(x) = \tau_p(x^{1/q}) \quad , x \geq 0 . \quad (5.4)$$

Wir erhalten somit aus (5.3) und (5.4), dass

$$\tilde{h}(x_1 + \dots + x_n) = \prod_{i=1}^n \tilde{h}(x_i) \quad , x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n . \quad (5.5)$$

Aus (5.5) folgt nun, dass $\tilde{h}(x) = \exp(cx)$ für alle $x \geq 0$ und ein $c < 0$. Es ist daher

$$\tau_{n,p}(t) = \exp(c|t|_q^q) \quad , t \in \mathbb{R}^n ,$$

d.h.

$$\tau_p(t) = \exp(c|t|^q) \quad , t \in \mathbb{R} . \quad (5.6)$$

Die rechte Seite in (5.6) ist für $q > 2$ keine charakteristische Funktion, vgl. mit Beispiel 1.39. Im Falle $q \in (0, 2]$ impliziert (5.6) zudem die Stabilität von N_p , vgl. mit Theorem 1.55. Da N_p für $p \neq 2$ jedoch nicht stabil ist, vgl. mit Theorem 4.15, liegt ein Widerspruch vor. Die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ kann somit für $p \neq 2$ nicht die in (5.2) angegebene Struktur besitzen. \square

In Theorem 5.1 wird die Ausnahmestellung der Standardnormalverteilung in der Familie der p -verallgemeinerten Normalverteilungen hervorgehoben. Während die Niveaumengen von $\tau_{n,2}$ und $f_{n,2}$ den Sphären $S_{n,2}(r)$, $r \geq 0$, entsprechen und somit als Niveaumengen des Radius $|\cdot|_2$ interpretiert werden können, so lassen sich die Niveaumengen von $\tau_{n,p}$ im Falle $p \neq 2$ für kein $q > 0$ als q -Sphären $S_{n,q}(r)$, $r \geq 0$, auffassen. Es ist daher im Falle $p \in [1, 2) \cup (2, \infty)$ weder ein Zusammenhang von $\tau_{n,p}$ zur Norm $|\cdot|_p$ noch zur dualen (und den p -verallgemeinerten Oberflächeninhalt $\mathfrak{D}_{n,p}$ erzeugenden) Norm $|\cdot|_{p/(p-1)}$ erkennbar. Dass diese Besonderheit des sphärischen Falles nicht nur bei den p -verallgemeinerten Normalverteilungen zu beobachten ist, zeigt ferner das folgende Korollar.

Korollar 5.2. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ und $q > 0$. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\varphi_{n,m,p}(t) = h(|t|_q)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 4.7 und Theorem 5.1. □

Die bisherigen Resultate dieses Abschnittes deuten nicht darauf hin, dass die nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen α -symmetrisch sind bzw. dass die $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen für $p \neq 2$ mithilfe des verallgemeinerten Radius $|\cdot|_p$ oder eines q -verallgemeinerten Radius wie z.B. der im Falle $p \geq 1$ gegebenen dualen Norm $|\cdot|_{p/(p-1)}$ beschrieben werden können. So konnte für die wichtigen Spezialfälle $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen aus den Kapiteln 3 und 4 bereits gezeigt werden, dass die zugehörigen charakteristischen Funktionen für $p \neq 2$ nicht die in (5.1) angegebene Struktur besitzen, sofern $\phi = |\cdot|_q$ für ein $q > 0$. Bei Betrachtung von Abbildung 13 entsteht zudem die Vermutung, dass die Niveaumengen einiger $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wie z.B. $\tau_{n,p}$ und $\varphi_{n,m,p}$ im Falle $p \neq 2$ nicht den Niveaumengen eines homogenen Funktionals entsprechen, vgl. mit dem folgenden Theorem.

Theorem 5.3. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ und sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine positiv homogene Funktion. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass*

$$\tau_{n,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \quad (5.7)$$

oder

$$\varphi_{n,m,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n .$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

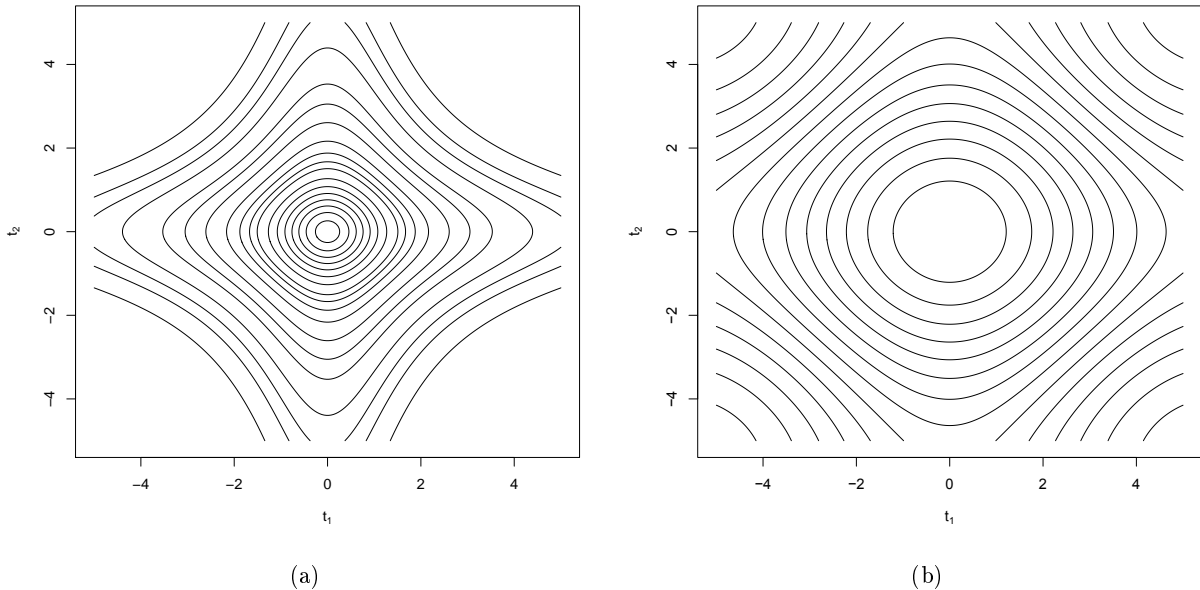


Abbildung 13: (a) Niveaulinien der charakteristischen Funktion $\tau_{2,5/4}$.
(b) Niveaulinien der charakteristischen Funktion $\varphi_{2,1/2}$.

Aus Theorem 5.3 ist sofort ersichtlich, dass die Verteilungen $N_{n,p}$ sowie $\omega_{n,m,p}$ für keine Wahl von $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ stabil oder α -symmetrisch sind. Die in den Kapiteln 3 und 4 ausführlich betrachteten zugehörigen charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,m,p}$ und $\tau_{n,p}$ besitzen somit keine Zerlegung wie in (5.1). Es ist daher bereits nach der Untersuchung weniger Spezialfälle $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen deutlich geworden, dass die in Abschnitt 5.1 formulierten Zielstellungen dieses Kapitels nur mithilfe verallgemeinerter Radiusfunktionale verwirklicht werden können, welche i. Allg. inhomogen sind und nur in speziellen Fällen den Minkowskifunktionalen symmetrischer Sternkörper entsprechen. Im folgenden Abschnitt 5.3 wird ein derartiges Funktional eingeführt und dessen Bezeichnung als verallgemeinerter Radius motiviert. Die Notwendigkeit dieser Begriffseinführung ergibt sich jedoch nicht nur aus den bisher aufgeführten Spezialfällen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen. So zeigt das folgende Theorem, dass eine beliebige nichtentartete $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung mit existenten Momenten beliebiger Ordnung für $p \neq 2$ weder stabil noch α -symmetrisch ist.

Theorem 5.4. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ und sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine positiv homogene Funktion. Sei überdies $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektor mit $0 < \mathbb{E}|X|_p^m < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass*

$$\mathbb{E} \exp(i \langle t, X \rangle) = h(\phi(t)) \quad , t \in \mathbb{R}^n . \quad (5.8)$$

Beweis. Für den Beweis der Behauptung nehmen wir an, dass die charakteristische Funktion von X wie in (5.8) darstellbar ist. Dann ist $\phi(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, und

$$\mathbb{E} \exp(itX_1) = h(|t| \cdot \phi(e_1)) \quad , t \in \mathbb{R} . \quad (5.9)$$

Aus (5.8) und (5.9) folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(it \langle a, X \rangle) &= h(|t| \phi(a)) \\ &= h\left(\phi(e_1) \frac{|t| \phi(a)}{\phi(e_1)}\right) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(i \left(\frac{t \phi(a)}{\phi(e_1)}\right) X_1\right) \quad , t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für $\eta(a) := \phi(a)/\phi(e_1)$, $a \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\langle a, X \rangle \stackrel{d}{=} \eta(a) X_1 \quad , a \in \mathbb{R}^n ,$$

bzw. dass

$$R \left\langle \frac{a}{\eta(a)}, U \right\rangle \stackrel{d}{=} R U_1 \quad , a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} ,$$

wobei R und $U = (U_1, \dots, U_n)^T$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $R \stackrel{d}{=} |X|_p$ und $U \sim \omega_{n,p}$ sind. Aus 2.7 ergibt sich hiermit, dass

$$\langle a, U \rangle \stackrel{d}{=} \eta(a) U_1 \quad , a \in \mathbb{R}^n ,$$

d.h. es ist

$$\begin{aligned} \varphi_{n,p}(t) &= \mathbb{E} \exp\left(i \left(\frac{\phi(t)}{\phi(e_1)}\right) U_1\right) \\ &= \varphi_{1,n,p}\left(\frac{\phi(t)}{\phi(e_1)}\right) \quad , t \in \mathbb{R}^n . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mit (5.10) liegt nun ein Widerspruch zu Theorem 5.3 vor. Die charakteristische Funktion von X kann daher nicht die in (5.8) angegebene Struktur besitzen. \square

Die Ausführungen dieses Abschnittes zeigen, dass sich die charakteristischen Funktionen einer sehr umfangreichen und bedeutenden Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen nicht wie in (5.1) angegebener mithilfe einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ und einer positiv homogenen Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ darstellen lassen, vgl. mit Theorem 5.4. Im folgenden Abschnitt erfolgt daher für die Beschreibung der zugehörigen charakteristischen Niveaumengen die Einführung eines geometrisch interpretierbaren Funktionalbegriffes, welcher über den Begriff des Minkowskifunktional symmetrischer Sternkörper hinausgeht und keine Homogenitätsbedingung beinhaltet. Aus Theorem 5.4 wird zudem deutlich, dass sich die geometrische Gestalt $l_{n,p}$ -symmetrischer Dichteniveaumengen in vielen Fällen sehr stark von der geometrischen Gestalt der zugehörigen charakteristischen Niveaumengen unterscheidet, wodurch die Besonderheit der in den Abschnitten 1.1 und 5.1 betrachteten sphärischen Verteilungen innerhalb der Familie der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen hervorgehoben wird. Die Besonderheit der sphärischen Verteilungen zeigt sich aber nicht nur durch die in diesem Falle übereinstimmenden Dichteniveaumengen und charakteristischen Niveaumengen. So ist auf der einen Seite die Familie der sphärischen Verteilungen identisch zur Familie der 2-symmetrischen Verteilungen und $N_{n,2}$ stabil. Auf der anderen Seite konnte in diesem Abschnitt erstmals gezeigt werden, dass eine nichtentartete $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung mit existenten Momenten beliebiger Ordnung für $p \neq 2$ weder stabil noch α -symmetrisch ist.

Bei der Analyse $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen wurden die entsprechenden charakteristischen Funktion bisher ausschließlich auf die Existenz einer global gültigen Zerlegung in eine skalare Funktion und in eine positiv homogene Funktion untersucht. Im Hinblick auf die in Abschnitt 5.4 erfolgende lokale Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen werden nun auch lokal gültige Eigenschaften von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen berücksichtigt. So kann zum Beispiel bei Betrachtung von Abbildung 13 der Eindruck entstehen, dass sich die dort abgebildeten charakteristischen Funktionen in einer Nullumgebung $K_{2,2}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, wie in (5.1) angegebener zerlegen lassen. Dass eine derartige lokale Zerlegung aber nicht nur für die in Abbildung 13 dargestellten charakteristischen Funktionen nicht möglich ist, zeigen hierbei die folgenden beiden Korollare.

Korollar 5.5. (i) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$, $\varepsilon > 0$ und sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine positiv homogene Funktion. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\varphi_{n,m,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , \quad t \in K_{n,2}(\varepsilon) . \quad (5.11)$$

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in [1, 2) \cup (2, \infty)$, $\varepsilon > 0$ und sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine positiv homogene Funktion. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\tau_{n,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , \quad t \in K_{n,2}(\varepsilon) . \quad (5.12)$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Korollar 5.6. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$, $\varepsilon > 0$ und $q > 0$. Dann existiert keine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\tau_{n,p}(t) = h(|t|_q)$ für alle $t \in K_{n,2}(\varepsilon)$.

Beweis. Siehe Anhang B. □

5.3 Ein globaler Ansatz mit streng monotonen charakteristischen Generatoren

Die Betrachtungen in Abschnitt 5.2 haben deutlich gemacht, dass sich die $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen i. Allg. nicht als Niveaumengen eines homogenen Funktional interpretieren lassen. Hierbei sei daran erinnert, dass sich ein nichtkonstantes positiv homogenes Funktional $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch die Eigenschaften

- (i) ϕ ist stetig ,
- (ii) $\phi(t) = 0$ g.d.w. $t = 0_n$,

(iii) $\phi(rt) = |r| \phi(t)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}^n$,

und

(iv) $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(rt) = \infty$ für $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$

auszeichnet. Im Hinblick auf die zu Beginn dieses Kapitels formulierte Zielstellung der geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen wird im Folgenden ein geometrisch interpretierbarer Funktionalbegriff präsentiert, für dessen Definition die Eigenschaft (iii) eines positiv homogenen Funktionals generalisiert wird. Mithilfe der auf diese Weise eingeführten „verallgemeinerten Radiusfunktionale“ wird es im Folgenden möglich sein, die charakteristischen Niveaumengen einer nichtsphärischen Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen geometrisch beschreiben und in diesem Sinne die Aussage (iii) in Theorem 1.4 p -verallgemeinern zu können.

Definition 5.7. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann wird eine Funktion $|\cdot|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $|\cdot|_*$ ist stetig ;

(ii) $|t|_* = 0$ g.d.w. $t = 0_n$;

(iii) $|rt|_* > |t|_*$ für $r \in (1, \infty)$ und $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$;

(iv) $\lim_{r \rightarrow \infty} |rt|_* = \infty$ für $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

Die Ausführungen dieses Abschnittes werden verdeutlichen, dass sich jeder Vertreter einer Familie von nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktionals und einer (das Oszillations- bzw. das Abklingverhalten beschreibenden) skalaren Funktion darstellen lässt. Die hiermit verbundene geometrische Beschreibung der zugehörigen charakteristischen Niveaumengen ist in diesem Zusammenhang eng an den Begriff und an die in Definition 5.7 festgehaltenen Eigenschaften des verallgemeinerten Radiusfunktionals geknüpft. Es wird daher zunächst in Bemerkung 5.8 die Bezeichnung einer Funktion mit den in Definition 5.7 angegebenen Eigenschaften als verallgemeinertes Radiusfunktional motiviert. In Bemerkung 5.9 wird ferner erläutert, inwiefern die Bedingungen (i)-(iv) notwendig für die geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen sind.

Bemerkung 5.8. Es ist bereits in Abschnitt 1.3 hervorgehoben worden, dass das Funktional $|\cdot|_p$ für alle $p > 0$ als p -verallgemeinerter Radius interpretiert werden kann, da der verallgemeinerte Radius eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ bei der $l_{n,p}$ -sphärischen Koordinatentransformation gerade $|x|_p$ entspricht, vgl. mit Theorem 1.19. In analoger Weise kann nun auch eine beliebige Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften aus Definition 5.7 als verallgemeinerter Radius einer f.ü. eindeutigen Koordinatentransformation $T : [0, \infty) \times [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ aufgefasst werden, wobei

$$T(r, \theta) = \phi_{\{SPH_2(\lambda, \theta) : \lambda \geq 0\}}^{-1}(r) \quad , \quad r \in [0, \infty) , \theta \in [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi) . \quad (5.13)$$

Die f.ü. gegebene Eineindeutigkeit von T folgt in diesem Zusammenhang aus Theorem 1.19 und der Tatsache, dass ϕ entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, streng monoton wachsend ist und das Bild $[0, \infty)$ besitzt. Hierbei wird die Richtung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ durch das zugehörige $(n-1)$ -Tupel sphärischer Winkel $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ beschrieben, während sich die genaue Lage von x auf $\{SPH_2(\lambda, \theta) : \lambda \geq 0\}$ aus dem Wert des ϕ -verallgemeinerten Radius $r > 0$ ergibt, wobei $\phi(SP H_2(y, \theta)) = r$ für genau ein $y \in (0, \infty)$.

Im Falle eines positiv homogenen Funktionals ϕ gilt für die in (5.13) dargestellte Transformation T , dass

$$T(r, \theta) = r \cdot \left(\frac{SPH_2(1, \theta)}{\phi(SP H_2(1, \theta))} \right) \quad , \quad r \geq 0 , \theta \in [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi) ,$$

d.h. θ beschreibt die Lage der Zentralprojektion $SPH_2(1, \theta)/\phi(SP H_2(1, \theta))$ eines Vektors $T(r, \theta)$ auf den zu ϕ gehörigen symmetrischen Sternkörper F , während r dem Wert des Minkowskifunktionals von F an der Stelle $T(r, \phi)$ entspricht. Daraus ergibt sich speziell auch die (in Abschnitt 1.6 angedeutete) Interpretationsmöglichkeit beliebiger nichtkonstanter positiv homogener Funktionale als verallgemeinerte Radiusfunktionale.

Bemerkung 5.9. Der Begriff des verallgemeinerten Radiusfunktional wurde in Definition 5.7 im Hinblick auf die in diesem Abschnitt angestrebte geometrische Beschreibung der Niveaumengen einer $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion φ mithilfe einer global gültigen Zerlegung

$$\varphi = h \circ |\cdot|_* \quad (5.14)$$

eingeführt, wobei h eine skalare Funktion und $|\cdot|_*$ eine als verallgemeinerter Radius geometrisch interpretierbare Funktion ist. Auf die in (i) angegebene Stetigkeitsbedingung kann deswegen nicht verzichtet werden, weil es im Falle einer Unstetigkeit von $|\cdot|_*$ zu Unterschieden zwischen den Niveaumengen der stetigen charakteristischen Funktion φ und der Funktion $|\cdot|_*$ kommen kann. Die Funktion $|\cdot|_*$ wäre in diesem Fall somit ungeeignet für die geometrische Beschreibung der Niveaumengen von φ .

Die Bedingung (ii) ist insofern notwendig, als dass $|t|_* \neq |0_n|_*$ für alle $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ gefordert werden muss, damit die charakteristische Funktion φ im Falle einer Darstellbarkeit wie in (5.14) genau ein globales Maximum in 0_n besitzt. So gilt z.B. für jeden absolutstetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ und einen beliebigen Vektor $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, dass

$$P(\cos(\langle a, X \rangle) < 1) = 1,$$

d.h.

$$\mathbb{E} \cos(\langle a, X \rangle) < 1.$$

Hierbei wurde insbesondere deshalb die Restriktion $|0_n|_* = 0$ getroffen, weil andernfalls die positiv homogenen Funktionen wie z.B. (das im sphärischen Fall maßgebliche Funktional) $|\cdot|_2$ keine Spezialfälle des in Definition 5.7 eingeführten Funktionalbegriffes wären.

In Bedingung (iii) wird die Homogenitätseigenschaft bekannter verallgemeinerter Radien wie z.B. $|\cdot|_p$ dahingehend abgeschwächt, dass die Funktion $|\cdot|_*$ streng monoton wachsend entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, sein muss. Dies ist eine notwendige Bedingung für die Konstruktion der in (5.13) dargestellten f.ü. eindeutigen Abbildung T und somit in erster Linie entscheidend für die geometrische Interpretationsmöglichkeit von $|\cdot|_*$ als verallgemeinerter Radius. Darüber hinaus sei hier bemerkt, dass eine auf $\{\lambda \cdot x : \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, konstante Funktion $|\cdot|_*$ im Falle $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ nicht für die Modellierung von charakteristischen Funktionen geeignet ist, welche wie $\varphi_{n,p}$ nicht konstant auf Mengen $\{\lambda \cdot x : \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]\}$ sein können, vgl. mit Lemma 1.32, Lemma 3.1 und Theorem 3.7. Ein auf $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$ oszillierendes Funktional $|\cdot|_*$ ist zudem deshalb für die in (5.14) betrachteten Zerlegungen uninteressant, weil das Oszillationsverhalten der $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion φ wie im sphärischen Fall durch die skalare Funktion h beschrieben werden soll. Alternativ zur in Bedingung (iv) geforderten Unbeschränktheit von $|\cdot|_*$ ist es für die Konstruktion einer zur sphärischen Koordinatentransformation analogen Transformation mithilfe von $|\cdot|_*$ ausreichend zu verlangen, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |rt|_* = a \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Da die spezielle Wahl von a aber keine Auswirkungen auf die Beschreibbarkeit der in diesem Abschnitt betrachteten $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen mithilfe von verallgemeinerten Radiusfunktionalen hat, wird aus Gründen der Einheitlichkeit die im Falle der positiven Homogenität gegebene Unbeschränktheit von $|\cdot|_*$ gefordert.

Der verallgemeinerte Radiusbegriff aus Definition 5.7 wird im Folgenden für die geometrische Beschreibung nichtsphärischer $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen verwendet. Zuvor wird in Lemma 5.10 festgehalten, dass zumindest für eine bestimmte Familie von multivariaten charakteristischen Funktionen die charakteristischen Niveaumengen mit den Niveaumengen der zugehörigen verallgemeinerten Radiusfunktionale übereinstimmen. Eine Niveaumenge $M \subset \mathbb{R}^n$ einer stetigen Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist hierbei als abgeschlossene zusammenhängende Menge mit $\phi(x) = \phi(y)$ für alle $x, y \in M$ zu verstehen.

Lemma 5.10. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor, wobei die charakteristische Funktion von $\langle a, X \rangle$ für kein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ konstant auf einem reellen Intervall $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, ist. Sei überdies*

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = h(|t|_*) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion und $|\cdot|_*$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist. Dann ist $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine Niveaumenge der charakteristischen Funktion von X , wenn M eine Niveaumenge von $|\cdot|_*$ ist.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Die in den Kapiteln 3 und 4 betrachteten wichtigen Spezialfälle $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen $\varphi_{n,m,p}$ und $\tau_{n,p}$ besitzen für alle $p > 0$ die in Lemma 5.10 vorausgesetzte Eigenschaft, entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, nicht konstant zu sein, vgl. mit Lemma 3.1, Theorem 3.7, Theorem 4.1, Lemma 4.2 sowie mit Lemma 1.32. Es stimmen daher die Niveaumengen dieser Funktionen im Falle der Darstellbarkeit als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktionals $|\cdot|_*$ und einer skalaren Funktion h mit den Niveaumengen von $|\cdot|_*$ überein. Diese Tatsache wird im Folgenden dafür verwendet, um Aussagen über die Darstellbarkeit von $\varphi_{n,m,p}$ bzw. $\tau_{n,p}$ mithilfe von verallgemeinerten Radiusfunktionalen zu treffen.

Wie zu Beginn dieses Kapitels bereits angedeutet wurde, beschränkt sich das Interesse in dieser Arbeit nicht nur auf die Zerlegbarkeit von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen in verallgemeinerte Radiusfunktionale und beliebige skalare Funktionen. Die verwendeten skalaren Funktionen sollen in diesem Zusammenhang zusätzlich die Eigenschaft besitzen, das Oszillations- bzw. Abklingverhalten der jeweiligen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion zu beschreiben. Für $p = 2$ ist dies unter Verwendung von $|\cdot|_2$ als Radiusfunktional der Fall, denn der charakteristische Generator eines sphärisch verteilten Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ proportional zur charakteristischen Funktion von $\langle a, X \rangle$, sofern $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Durch die in Definition 5.7 festgehaltenen abgeschwächten Voraussetzungen an ein verallgemeinertes Radiusfunktional entsteht nun bei der Modellierung einer multivariaten charakteristischen Funktion φ mithilfe einer skalaren Funktion h und eines verallgemeinerten Radiusfunktionals $|\cdot|_*$ ein gewisser Spielraum, da die Funktionen h und $|\cdot|_*$ im Falle einer global gültigen Darstellung $\varphi = h \circ |\cdot|_*$ i. Allg. nicht eindeutig bestimmt sind. So besitzt z.B. die charakteristische Funktion der n -variaten Standardnormalverteilung die Darstellungen

$$\tau_{n,2}(t) = h_1(\phi_1(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n ,$$

und

$$\tau_{n,2}(t) = h_2(\phi_2(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \tag{5.15}$$

wobei $h_1(x) := \exp(-x^2/2)$, $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\phi_1(t) = |t|_2$, $t \in \mathbb{R}^n$, $h_2(x) := \exp(-x^5)$, $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und $\phi_2(t) = (|t|_2^2/2)^{1/5}$, $t \in \mathbb{R}^n$. Die Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 erfüllen die Eigenschaften (i)-(iv) aus Definition 5.7 und stellen somit verallgemeinerte Radiusfunktionale dar. Die skalare Funktion h_2 beschreibt jedoch in keiner Weise das Abklingverhalten von $\tau_{n,2}$, denn für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ist $h_2(t) = o(\tau_{n,2}(ta))$, $t \rightarrow \infty$, bzw. $1 - h(t) = o(1 - \tau_{n,2}(ta))$, $t \rightarrow 0$.

Um derartige nicht erwünschte Darstellungen wie in (5.15) auszuschließen, wird in der nun folgenden Definition 5.11 der Begriff des charakteristischen Generators für beliebige multivariate symmetrische Verteilungen eingeführt. Die in den Abschnitten 1.1, 1.5 und 1.6 betrachteten charakteristischen Generatoren ergeben sich hierbei als Spezialfälle.

Definition 5.11. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine charakteristische Funktion und

$$h(x) := \varphi(x \cdot e_1) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

Dann wird h genau dann als (globaler) charakteristischer Generator von φ bezeichnet, wenn ein verallgemeinertes Radiusfunktional $|\cdot|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ so existiert, dass

$$\varphi(t) = h(|t|_*) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n .$$

Korollar 5.12. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine charakteristische Funktion mit charakteristischem Generator $h(x) := \varphi(x \cdot e_1)$, $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann existiert für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional $\phi_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass

$$\varphi(t) = \varphi(a \cdot \phi_a(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n .$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Es sind nun alle notwendigen Vorbereitungen für die Zerlegung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen in charakteristische Generatoren und verallgemeinerte Radiusfunktionale getroffen worden. Die folgenden Ausführungen werden in diesem Kontext verdeutlichen, dass sich die Vertreter einer Familie von nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen immer als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktionals und eines streng monoton fallenden charakteristischen Generators in eindeutiger Weise darstellen lassen. Hierbei folgt aus Korollar 5.12, dass das Abklingverhalten derartig zerlegbarer charakteristischer Funktionen nicht nur durch die charakteristische Funktion der zugehörigen univariaten Randverteilung repräsentiert wird. So lässt sich eine durch einen charakteristischen Generator erzeugte $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion φ für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ darstellen als

$$\varphi(t) = \varphi(\phi_a(t) \cdot a) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n ,$$

wobei ϕ_a ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist, vgl. mit Korollar 5.12. Die Definition $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Generatoren kann aus diesem Grund auch in allgemeinerer Weise als in Definition 5.11 unter Verwendung eines beliebigen Richtungsvektors $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ erfolgen. Im Hinblick auf die Eindeutigkeit der Zerlegung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wurde in Definition 5.11 jedoch die Restriktion $a = e_1$ getroffen. In Abschnitt 5.4 werden dagegen bei der Einführung lokal-charakteristischer Generatoren auch beliebige Richtungsvektoren zugelassen, vgl. mit Definition 5.23.

Wir betrachten nun zunächst die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ der p -verallgemeinerten Normalverteilung im Falle $p \in (0, 2]$:

Theorem 5.13. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p \in (0, 2]$. Dann ist*

$$\tau_{n,p}(t) = h(|t|_{*p}) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \tag{5.16}$$

wobei $h := \tau_{p|[0,\infty)}$ der (streng monoton fallende) charakteristische Generator von $\tau_{n,p}$ und $|\cdot|_{*p} := \tau_{p|[0,\infty)}^{-1} \circ \tau_{n,p}$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist.

Beweis. Die Funktion τ_p ist für $p \in (0, 2]$ positiv und streng monoton fallend auf $[0, \infty)$, vgl. mit Theorem 4.1. Darüber hinaus ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_p(t) = 0$, vgl. mit Theorem 1.25 und mit Abschnitt 4.1, d.h. $\tau_{p|[0,\infty)}$ sowie $\tau_{n,p}$ besitzen das Bild $(0, 1]$. Es existiert somit für alle $p \in (0, 2]$ die streng monoton fallende Umkehrabbildung

$$\tau_{p|[0,\infty)}^{-1} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

Hiermit lässt sich $\tau_{n,p}$ insbesondere auch für alle $p \in (0, 2]$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ wie in (5.16) darstellen, wobei $h := \tau_{p|[0,\infty)}$, $|\cdot|_{*p} := \tau_{p|[0,\infty)}^{-1} \circ \tau_{n,p}$ und $\{|t|_{*p} : t \in \mathbb{R}^n\} = [0, \infty)$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $|\cdot|_{*p}$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist. Die Eigenschaft (i) aus Definition 5.7 ergibt sich hierbei aus der Stetigkeit von $\tau_{n,p}$ und der Stetigkeit der Umkehrabbildung von $\tau_{p|[0,\infty)}$. Es ist zudem

$$\begin{aligned} |t|_{*p} = 0 &\Leftrightarrow \tau_{n,p}(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow t = 0_n \quad . \end{aligned}$$

Die Eigenschaft (iii) eines verallgemeinerten Radiusfunktionals folgt aus den Monotonieeigenschaften von $\tau_{p|[0,\infty)}^{-1}$ und $\tau_{n,p}$. So ergibt sich aus Theorem 4.1, dass

$$\tau_{n,p}(rt) < \tau_{n,p}(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} , \quad r \in (1, \infty) .$$

Hiermit erhalten wir unter Berücksichtigung der strengen Monotonie von $\tau_{p|[0,\infty)}^{-1}$, dass

$$\tau_{p|[0,\infty)}^{-1}(\tau_{n,p}(rt)) > \tau_{p|[0,\infty)}^{-1}(\tau_{n,p}(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} , \quad r \in (1, \infty) . \tag{5.17}$$

Aus (5.17) und der Tatsache, dass das Bild von $|\cdot|_{*p}$ der Menge $[0, \infty)$ entspricht, folgt ferner die Eigenschaft (iv) eines verallgemeinerten Radiusfunktionals, d.h.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |rt|_{*p} = \infty \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} .$$

□

Beispiel 5.14. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\tau_{n,p}(t) &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+t_k^2} \\ &= \left(1 + \sum_{k=1}^n \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n: \langle \beta, 1_n \rangle = k} \prod_{j=1}^n t_j^{2\beta_j} \right)^{-1} \\ &= \tau_1(|t|_{*1}) \quad , \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n ,\end{aligned}$$

wobei

$$|t|_{*1} := \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n: \langle \beta, 1_n \rangle = k} \prod_{j=1}^n t_j^{2\beta_j}} \quad , \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n .$$

Die Funktion $|t|_{*1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist inhomogen und erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) eines verallgemeinerten Radiusfunktional. Darüber hinaus gilt für $r > 1$ und $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, dass

$$\begin{aligned}|t|_{*1} &= \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n: \langle \beta, 1_n \rangle = k} \prod_{j=1}^n t_j^{2\beta_j}} \\ &< r \sqrt{\sum_{k=1}^n r^{2k-2} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n: \langle \beta, 1_n \rangle = k} \prod_{j=1}^n t_j^{2\beta_j}} \\ &= |rt|_{*1} \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow \infty) .\end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion $\tau_{n,1}$ besitzt daher den charakteristischen Generator $\tau_1|_{(0,\infty)}$ und das assoziierte verallgemeinerte Radiusfunktional $|\cdot|_{*1}$.

Die charakteristischen Niveaumengen der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung sind mit Theorem 5.13 für $p \in (0, 2]$ als die Niveaumengen eines assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktional interpretierbar, welches im Falle $p = 1$ geschlossen darstellbar ist, vgl. mit Beispiel 5.14. Das assoziierte verallgemeinerte Radiusfunktional kann zudem für beliebiges $p \in (0, 2]$ auf der Basis von (4.5) numerisch ermittelt werden, vgl. mit Bemerkung 1.62. In Abbildung 14 ist in diesem Zusammenhang der durch $|\cdot|_{*p}$ im Falle $p \in (0, 2]$ erzeugte verallgemeinerte Einheitskreis grafisch dargestellt. Im Gegensatz zu (nichtkonstanten) positiv homogenen Funktionen kann das für $p \in (0, 2)$ inhomogene verallgemeinerte Radiusfunktional $|\cdot|_{*p}$ dabei nicht als Minkowskifunktional des in Abbildung 14 dargestellten symmetrischen Sternkörpers aufgefasst werden.

Der Beweis der in Theorem 5.13 angegebenen Darstellung von $\tau_{n,p}$ als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktional und eines charakteristischen Generators basiert in entscheidender Weise darauf, dass $\tau_{n,p}$ entlang eines beliebigen Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, positiv ist und streng monoton gegen Null strebt. Die Ausführungen in Kapitel 3 haben in diesem Zusammenhang aber bereits gezeigt, dass es auch andere $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen mit den von $\tau_{n,p}$ genannten Eigenschaften gibt. Dies motiviert die Angabe der folgenden Verallgemeinerung von Theorem 5.13.

Theorem 5.15. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion mit

$$\varphi(t) > \varphi(rt) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} , \quad r > 1 .$$

Es gelte zudem, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(rt) = 0$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Dann ist

$$\varphi(t) = h(|t|_*) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \tag{5.18}$$

wobei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ der (streng monoton fallende) charakteristische Generator von φ und $|\cdot|_* := h^{-1} \circ \varphi$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist.

Beweis. Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.15 ist die Funktion $h(x) := \varphi(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, positiv und streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$. Die Bilder von h und φ entsprechen somit jeweils der Menge $(0, 1]$. Es existiert daher die streng monoton fallende Umkehrabbildung

$$h^{-1} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} ,$$

wobei das Bild von h^{-1} durch $[0, \infty)$ gegeben ist. Die Funktion φ lässt sich aus diesem Grund wie in (5.18) darstellen. Hierbei kann in analoger Weise zum Beweis von Theorem 5.13 gezeigt werden, dass durch $|\cdot|_* := h^{-1} \circ \varphi$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional definiert ist. \square

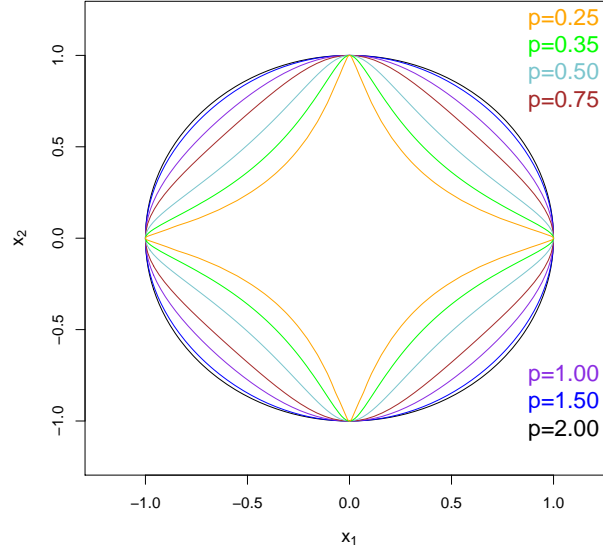


Abbildung 14: Der verallgemeinerte Einheitskreis $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_{*p} = 1\}$ für $p \in (0, 2]$.

Mit Theorem 5.15 lässt sich die charakteristische Funktion einer beliebigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung wie in (5.18) mithilfe eines eindeutig bestimmten Tupels aus einem charakteristischen Generator und einem verallgemeinerten Radiusfunktional darstellen, sofern die Funktion entlang eines jeden Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, positiv ist und streng monoton gegen 0 strebt. Für die auf diese Weise definierte Familie $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen wurde somit eine p -Verallgemeinerung von Theorem 1.4 (iii) bewiesen, wobei die assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionale in vielen Fällen zumindest numerisch berechnet bzw. simuliert werden können, vgl. mit Bemerkung 5.19. Die Theoreme 3.13, 3.14 und 4.1 belegen unter diesem Aspekt überdies, dass nicht jede $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion die Voraussetzungen von Theorem 5.15 erfüllt. Es ist jedoch bereits aus Korollar 3.18 (iii) ersichtlich, dass auch andere nichtsphärische $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen als $\tau_{n,p}$ (im Falle $p \in (0, 2]$) die Voraussetzungen von Theorem 5.15 erfüllen und somit einen streng monoton fallenden charakteristischen Generator und ein assoziiertes verallgemeinertes Radiusfunktional besitzen.

Mithilfe der beiden folgenden Korollare werden nun weitere Vertreter der durch Theorem 5.15 definierten Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen angegeben. Hierzu zählt u.a. auch die charakteristische Funktion der in (Arellano-Valle u. Richter, 2012) eingeführten und in Beispiel 5.14 betrachteten p -verallgemeinerten t -Verteilung, deren assoziiertes verallgemeinertes Radiusfunktional in Abbildung 15 dargestellt ist.

Korollar 5.16. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2]$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit

$$X \stackrel{d}{=} RY ,$$

wobei R eine P -f.s. positive Zufallsgröße ist, $Y \sim N_{n,p}$ und R und Y stochastisch unabhängig sind. Dann ist

$$\varphi(t) := \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = h(|t|_*) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n ,$$

wobei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ der (streng monoton fallende) charakteristische Generator von φ und $|\cdot|_* := h^{-1} \circ \varphi$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Korollar 5.17. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq 4n}$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit

$$X \stackrel{d}{=} RZ,$$

wobei R eine P -f.s. positive Zufallsgröße ist, $Z \sim \omega_{n,m,1}$ und R und Z stochastisch unabhängig sind. Dann ist

$$\varphi(t) := \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = h(|t|_*) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ der (streng monoton fallende charakteristische) Generator von φ und $|\cdot|_* := h^{-1} \circ \varphi$ ein verallgemeinertes Radiusfunktional ist.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Beispiel 5.18. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2]$, $c > 0$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein absolutstetig verteilter Zufallsvektor mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^n \Gamma\left(\frac{c+n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{c}{p}\right) \Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right) c^{n/p}} \left[1 + \frac{|x|_p^p}{c}\right]^{-\frac{c+n}{p}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

welche in (Arellano-Valle u. Richter, 2012) auch als die Dichte der p -verallgemeinerten t -Verteilung mit c Freiheitsgraden eingeführt wurde. Dann ist

$$X \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} Y,$$

wobei $Y \sim N_{n,p}$, $V \sim Ga(c/p, c/p)$ und Y und V stochastisch unabhängig sind, vgl. mit (Arellano-Valle u. Richter, 2012). Die Zufallsgröße $V^{-\frac{1}{p}}$ ist somit P -f.s. positiv und stochastisch unabhängig vom Zufallsvektor Y . Mit Korollar 5.16 besitzt die charakteristische Funktion φ von X daher einen charakteristischen Generator h . Die Niveaumengen von φ können ferner als Niveaumengen des assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionals $|\cdot|_* = h^{-1} \circ \varphi$ (geometrisch) interpretiert werden, welches mit Theorem 5.4 im Falle $p \in (0, 2)$ inhomogen ist.

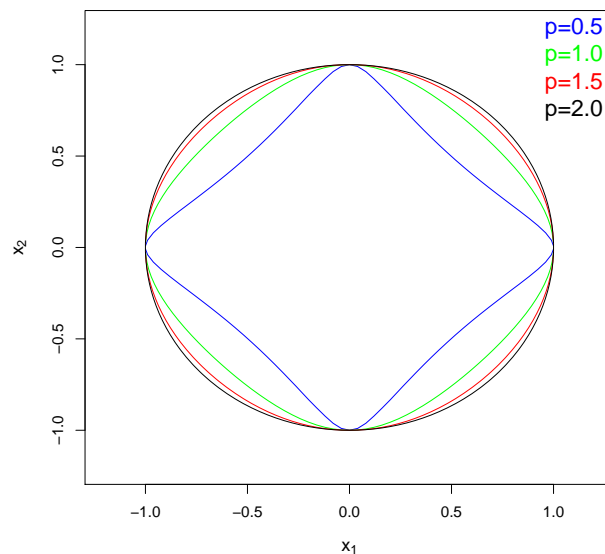


Abbildung 15: Der verallgemeinerte Einheitskreis eines verallgemeinerten Radiusfunktionals, welches mit der charakteristischen Funktion der 2-dimensionalen p -verallgemeinerten t -Verteilung mit 10 Freiheitsgraden assoziiert ist.

Bemerkung 5.19. Alternativ zur in den Abbildungen 14 und 15 erfolgten numerischen Berechnung assoziierter verallgemeinerter Radiusfunktionale ist in einigen Fällen auch eine numerische Simulation dieser Funktionale mithilfe des R-Programmpaketes `pgnorm` möglich, vgl. mit (Kalke, 2012). Das genannte Programmpaket basiert auf den in (Kalke u. Richter, 2013) hergeleiteten Algorithmen wie z.B. der p -verallgemeinerten Box-Muller Methode für die Simulation der p -verallgemeinerten Normalverteilung N_p . Mithilfe einer mathematischen Stichprobe (X_1, \dots, X_n) von u.i. p -verallgemeinert normalverteilten Zufallsgrößen lässt sich in diesem Kontext auch der Basisvektor U_p der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen darstellen als

$$U_p \stackrel{d}{=} \frac{(X_1, \dots, X_n)^T}{\left| (X_1, \dots, X_n)^T \right|_p},$$

sofern $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Neben der p -verallgemeinerten Normalverteilung und der p -verallgemeinerten Gleichverteilung können anhand von `pgnorm` ferner auch Skalenmischungen von $\omega_{n,p}$ simuliert werden, falls für die entsprechende erzeugende Zufallsgröße ebenfalls Simulationsalgorithmen zur Verfügung stehen. Es ist aus diesem Grund für eine große Anzahl von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen und zugehörigen mathematischen Stichproben (Y_1, \dots, Y_m) die Simulation der empirischen charakteristischen Funktion $\hat{\varphi}_m$ sowie der durch Theorem 5.15 gegebenen assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionale möglich, wobei

$$\hat{\varphi}_m(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \cos(\langle t, Y_j \rangle) \quad , t \in \mathbb{R}^n ,$$

vgl. auch mit Beispiel 6.2 und Abbildung 19.

Die Korollare 5.16 und 5.17 verdeutlichen, dass die in Theorem 5.13 betrachtete Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen mit streng monoton fallenden charakteristischen Generatoren eine Vielzahl von Vertretern besitzt, zu denen im Falle $p \in (0, 2]$ u.a. die p -verallgemeinerte Normalverteilung und die p -verallgemeinerte t -Verteilung gehören. Im Hinblick auf die Geometrie sphärischer charakteristischer Niveaumengen stellt sich hierbei zum einen die Frage, ob sich die betrachteten $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen auch für (fest gewähltes) $p \neq 2$ in einheitlicher Weise mithilfe eines verallgemeinerten Radiusfunktionals beschreiben lassen. Zum anderen soll im Folgenden diskutiert werden, ob die in Theorem 5.13 betrachteten charakteristischen Generatoren auch im nichtsphärischen Fall an die jeweiligen Randverteilungen vererbt werden, vgl. mit Bemerkung 1.6.

Im Zusammenhang mit der Frage nach einer für $p \neq 2$ einheitlichen geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen besitzt die i. Allg. nicht gegebene Homogenität verallgemeinerter Radiusfunktionale eine Schlüsselrolle. So wurde in Korollar 5.16 gezeigt, dass auch die charakteristischen Funktionen einer Familie von Skalenmischungen der p -verallgemeinerten Normalverteilung (im Falle $p \in (0, 2]$) als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktionals und eines charakteristischen Generators dargestellt werden können. Für einen derartig verteilten Zufallsvektor $X \stackrel{d}{=} RY$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \mathbb{E}(\tau_{n,p}(Rt)) \\ &= \mathbb{E}(\tau_p(|Rt|_{*p})) \quad , t \in \mathbb{R}^n , \end{aligned} \tag{5.19}$$

vgl. mit dem Beweis von Korollar 5.16. Die für $p \in (0, 2)$ gegebene Inhomogenität von $|\cdot|_{*p}$ bewirkt nun in (5.19), dass das zur charakteristischen Funktion von X gehörige verallgemeinerte Radiusfunktional i. Allg. von $|\cdot|_{*p}$ verschieden ist. Die nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen unterscheiden sich somit von den sphärischen Verteilungen nicht nur dahingehend, dass sich die zugehörigen charakteristischen Niveaumengen nicht mithilfe der Geometrie der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten beschreiben lassen. Die Niveaumengen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen besitzen in diesem Zusammenhang sogar für ein fest gewähltes $p \neq 2$ i. Allg. unterschiedliche geometrische Strukturen.

Bei der Frage nach der Vererbung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Generatoren betrachten wir zunächst ein beliebiges verallgemeinertes Radiusfunktional $\phi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Dann besitzt auch die durch

$$\phi_k(t) := \phi_n \left((t^T, 0_{n-k}^T)^T \right) \quad , t \in \mathbb{R}^k ,$$

gegebene Funktion $\phi_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $k \in \{2, \dots, n-1\}$ die Eigenschaften (i)-(iv) aus Definition 5.7, d.h. ϕ_k ist ein verallgemeinertes Radiusfunktional auf \mathbb{R}^k . Ein $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, mit den Eigenschaften aus Theorem 5.15 vererbt aus diesem Grund seinen charakteristischen Generator $h(x) := \mathbb{E} \cos(x \cdot X_1)$, $x \geq 0$, an alle zugehörigen multivariaten Randverteilungen, wobei

$$\mathbb{E} \exp \left(i \left\langle t, (X_1, \dots, X_k)^T \right\rangle \right) = h(\phi_k(t)) \quad , \quad k \in \{2, \dots, n-1\}, \quad t \in \mathbb{R}^k .$$

Das Abklingverhalten der charakteristischen Funktionen sämtlicher Randverteilungen von X wird daher durch die charakteristische Funktion von X_1 repräsentiert. Hieraus folgt jedoch i. Allg. nicht, dass im Falle der Absolutstetigkeit von X auch das Abklingverhalten der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten durch die Randdichte von X_1 repräsentiert werden kann. Aus diesem Grund vererben einige $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen ihre charakteristischen Generatoren an beliebige Randverteilungen, während sich die zugehörigen dichtegenerierenden Funktionen beim Übergang zu den Randverteilungen verändern.

Wir fassen nun noch einmal zusammen, dass in diesem Abschnitt für eine Familie nichtsphärischer $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen mit den in Theorem 5.15 angegebenen Eigenschaften die Existenz von charakteristischen Generatoren nachgewiesen wurde. Mithilfe der zugehörigen und in Theorem 5.15 spezifizierten verallgemeinerten Radiusfunktionale lassen sich die Niveaumengen dieser charakteristischen Funktionen darüber hinaus geometrisch interpretieren, vgl. mit Abbildung 14 und Abbildung 15. Die geometrisch-strukturelle Darstellung $l_{n,2}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen aus Theorem 1.4 (iii) konnte in dieser Arbeit somit zum ersten Mal für eine Familie nichtsphärischer $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen p -verallgemeinert werden. Es stellt sich jedoch die Frage, ob auch die $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen einen charakteristischen Generator besitzen, welche nicht im Sinne von Theorem 5.15 streng monoton entlang eines jeden Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, gegen Null streben. Wir betrachten hierzu beispielhaft die in Abbildung 16 dargestellten Niveaulinien der charakteristischen Funktion $\tau_{2,3}$, welche mit Theorem 4.1 Nullstellen besitzt und somit nicht die Voraussetzungen von Theorem 5.15 erfüllt. Die numerisch (auf der Basis von (4.5)) ermittelten Niveaulinien weisen hierbei nicht die Eigenschaft (iii) eines verallgemeinerten Radiusfunktionals auf, da z.B. die rot markierten Niveaumengen Punkte enthalten, welche offensichtlich nicht in einer Niveaumenge eines beliebigen verallgemeinerten Radiusfunktionals enthalten sein können. Mit Lemma 5.10 ist $\tau_{2,3}$ daher zumindest auf der Grundlage der numerischen Ergebnisse nicht global als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktionals $|\cdot|_* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ darstellbar. Im folgenden Theorem wird diese numerisch motivierte Vermutung über die Nichtexistenz charakteristischer Generatoren in allgemeinerer Form für die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 2$ bewiesen.

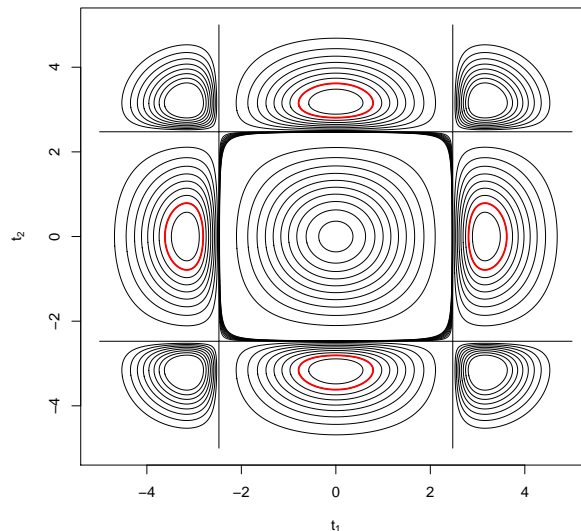


Abbildung 16: Niveaulinien der charakteristischen Funktion $\tau_{2,3}$.

Theorem 5.20. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 2$ und sei $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion. Dann existiert kein verallgemeinertes Radiusfunktional $|\cdot|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass

$$\tau_{n,p}(t) = h(|t|_*) \quad , t \in \mathbb{R}^n . \quad (5.20)$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Für die charakteristische Funktion der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung kann mit Theorem 5.20 die Existenz eines (globalen) charakteristischen Generators ausgeschlossen werden, sofern $p > 2$. Die Niveaumengen dieser charakteristischen Funktion lassen sich somit nicht als Niveaumengen eines verallgemeinerten Radiusfunktionals (geometrisch) interpretieren. Die numerischen Berechnungen der charakteristischen Funktionen $\varphi_{n,p}$ und $\varphi_{n,m,p}$ deuten überdies darauf hin, dass auch die Niveaumengen dieser Funktionen nicht mit den Niveaumengen verallgemeinerter Radiusfunktionale übereinstimmen, sofern $\varphi_{n,p}$ bzw. $\varphi_{n,m,p}$ Nullstellen besitzen und somit nicht die Voraussetzungen von Theorem 5.15 erfüllen. So lässt sich beispielsweise für die in Abbildung 17 dargestellten Niveaulinien analog zu Abbildung 16 feststellen, dass sowohl in Abbildung 17 (a) als auch in Abbildung 17 (b) nicht die Niveaulinien eines Funktionals mit der Eigenschaft (iii) aus Definition 5.7 dargestellt sind. Es bleibt aber i. Allg. eine ungeklärte Frage, ob es neben dem bereits bekannten sphärischen Beispiel φ_n auch nichtsphärische $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen gibt, welche nicht die in Theorem 5.15 angegebenen Eigenschaften und dennoch einen charakteristischen Generator besitzen. Im nun folgenden Abschnitt wird in diesem Zusammenhang gezeigt, dass auch $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen mit Nullstellen zumindest lokal eine ähnliche Struktur wie die in Theorem 5.15 betrachteten charakteristischen Funktionen aufweisen und dass die zugehörigen charakteristischen Niveaumengen somit ebenfalls in geometrischer Weise gedeutet werden können.

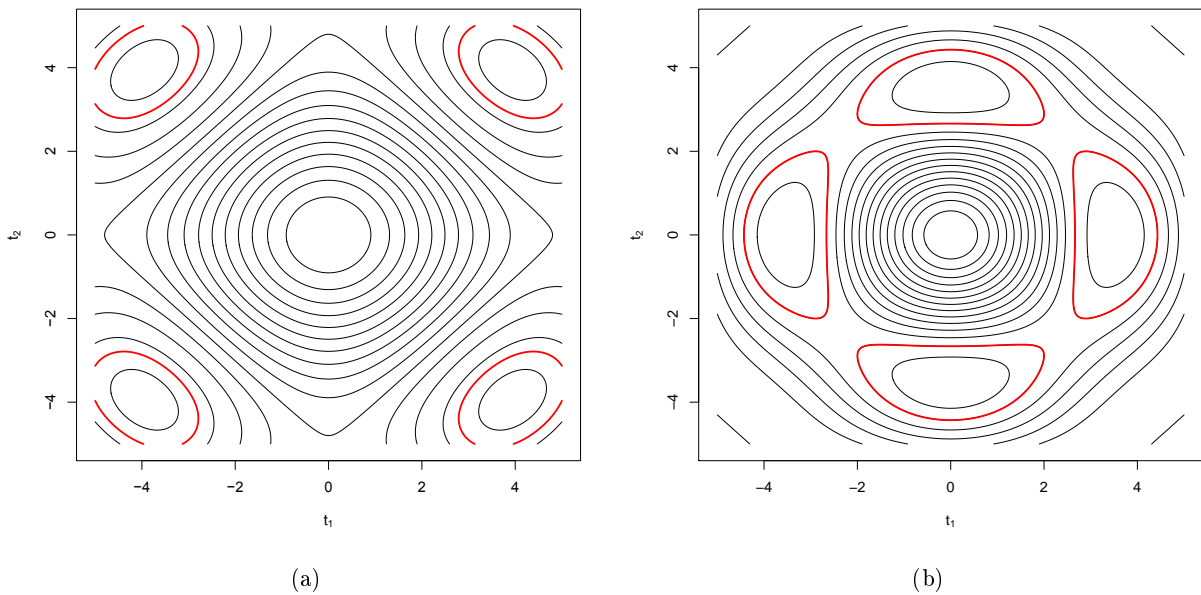


Abbildung 17: (a) Niveaulinien der charakteristischen Funktion $\varphi_{2,3/4}$.
(b) Niveaulinien der charakteristischen Funktion $\varphi_{2,5}$.

5.4 Lokale Betrachtungen

Nach der in Abschnitt 5.3 erfolgten globalen Beschreibung von $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen mithilfe von streng monoton fallenden charakteristischen Generatoren und verallgemeinerten Radiusfunktionalen stehen in diesem Abschnitt diejenigen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen im Mittelpunkt des Interesses, welche nicht entlang eines jeden Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, streng monoton gegen Null streben. Für die geometrische Beschreibung der in diesem Zusammenhang betrachteten $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Niveaumengen ist der Einsatz der in Abschnitt 5.3 verwendeten Beweistechniken i. Allg. nicht möglich. Es wurde zudem in Theorem 5.20

sowie in den Abbildungen 16 und 17 deutlich gemacht, dass in einigen Fällen die Existenz eines (globalen) charakteristischen Generators ausgeschlossen werden kann. Die grafischen Darstellungen deuten in diesen Fällen vielmehr an, dass sich die Niveaumengen zu lokalen Extremstellen der jeweiligen charakteristischen Funktion verdichten. Dies legt die Vermutung nahe, dass sich die global gültigen Zerlegungseigenschaften der im Sinne von Theorem 5.15 streng monotonen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen in lokaler Form auch auf $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen übertragen lassen, welche die Monotonieeigenschaften aus Theorem 5.15 nicht besitzen. In diesem Zusammenhang verdeutlichen die folgenden Ausführungen, dass sich eine $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktion unter schwächeren Voraussetzungen als in Theorem 5.15 lokal als Komposition eines (u.U. nicht im Nullpunkt zentrierten) lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals und eines lokal-charakteristischen Generators darstellen lässt. Die hierfür notwendigen Begriffsdefinitionen werden zunächst eingeführt:

Definition 5.21. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $t_0 \in \mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Menge mit Zentrum t_0 , wobei $t_0 \in M^\circ$. Dann wird eine Funktion $\phi_{t_0} : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ als ein in t_0 zentriertes lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional bezeichnet, wenn ϕ_{t_0} die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) ϕ_{t_0} ist stetig ;
- (ii) $\phi_{t_0}(t) = 0$ g.d.w. $t = t_0$;
- (iii) $\phi_{t_0}(t_1) > \phi_{t_0}(t_2)$ für $t_1, t_2 \in M$ mit $(t_1 - t_0) = r \cdot (t_2 - t_0)$, $r \in (1, \infty)$.

Bemerkung 5.22. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $t_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei $\phi_{t_0} : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein in t_0 zentriertes lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional mit einem kompakten Definitionsbereich M . Dann kann ϕ_{t_0} in Analogie zu den Betrachtungen aus Bemerkung 5.8 für die Konstruktion einer f.ü. eindeutigen verallgemeinerten Kugelkoordinatentransformation

$$T : [0, r_0] \times [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi) \rightarrow M_0 := \{t \in M : \phi_{t_0}(t) \leq r_0\}$$

verwendet werden, wobei

$$r_0 := \min_{a \in M \setminus \{t_0\}} \left(\max_{x \in \{t_0 + \lambda \cdot (a - t_0) : \lambda \geq 0\} \cap M} \phi_{t_0}(x) \right)$$

und

$$T(r, \theta) = \phi_{t_0|_{M_0 \cap \{t_0 + SPH_2(\lambda, \theta) : \lambda \geq 0\}}}^{-1}(r) \quad , \quad r \in [0, r_0] , \quad \theta \in [0, \pi)^{\times(n-2)} \times [0, 2\pi) .$$

Das $(n-1)$ -Tupel $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ beschreibt in diesem Zusammenhang die Richtung eines Vektors $x \in M_0 \setminus \{t_0\}$ bezüglich des Vektors t_0 , d.h. θ entspricht dem $(n-1)$ -Tupel sphärischer Winkel von $x - t_0$. Darüber hinaus ergibt sich die genaue Lage von x auf $M_0 \cap \{t_0 + SPH_2(\lambda, \theta) : \lambda \geq 0\}$ aus dem Wert des verallgemeinerten Radius $r \in (0, r_0]$, wobei $\phi_{t_0}(t_0 + SPH_2(y, \theta)) = r$ für genau ein $y > 0$.

Definition 5.23. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $t_0 \in \mathbb{R}^n$ und $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Menge mit Zentrum t_0 . Sei zudem $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine charakteristische Funktion. Dann wird eine Funktion $h_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ als ein lokal-charakteristischer Generator von $\varphi|_{M_0}$ bezeichnet, wenn ein in t_0 zentriertes lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional $\phi_{t_0} : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{t_0\}$ so existieren, dass $M_0 \subset M$,

$$\varphi(t) = h_0(\phi_{t_0}(t)) \quad , \quad t \in M_0 ,$$

und

$$h_0(x) = \varphi(t_0 + x \cdot (a - t_0)) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

Mit dem in Definition 5.21 eingeführten Begriff des zentrierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals verbinden sich analoge geometrische Interpretationen wie mit dem in Abschnitt 5.3 eingeführten Begriff des verallgemeinerten Radiusfunktionals, vgl. mit Bemerkung 5.22. Die Niveaumengen einer multivariaten charakteristischen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ können daher lokal als Niveaumengen eines

verallgemeinerten Radius geometrisch interpretiert werden, sofern φ auf einer sternförmigen Menge $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ mit Zentrum $t_0 \in M_0$ als Komposition eines in t_0 zentrierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktional ϕ_{t_0} und einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann, d.h. falls

$$\varphi(t) = h(\phi_{t_0}(t)) \quad , \quad t \in M_0 . \quad (5.21)$$

Hierbei sei daran erinnert, dass die Menge der zentrierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionale auch bei der geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten eine Rolle spielt. Wir betrachten hierzu einen absolutstetig $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilten Zufallsvektor X und einen beliebigen Vektor $t_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann können die Dichteniveaumengen von $Y = X + t_0$ als Niveaumengen des in t_0 zentrierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals

$$|t|_{p,t_0} := |t - t_0|_p \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n ,$$

aufgefasst werden, vgl. mit Theorem 1.13. Bei der lokalen geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen besteht überdies in Analogie zu Abschnitt 5.3 nicht nur ein Interesse an lokalen Zerlegungen von φ mithilfe eines lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals und einer beliebigen skalaren Funktion. Die Funktion h in (5.21) soll in diesem Zusammenhang auch das lokale Oszillations- bzw. Abklingverhalten von φ beschreiben. Der in Definition 5.23 eingeführte lokal-charakteristische Generator erfüllt diese Aufgabe, da eine solche skalare Funktion die charakteristische Funktion φ für ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{t_0\}$ entlang der Strecke $\{t_0 + \lambda \cdot (a - t_0) : \lambda \geq 0\} \cap M_0$ repräsentiert. Hierbei kann der Richtungsvektor a im Gegensatz zur Definition eines globalen charakteristischen Generators (siehe Definition 5.11) einem beliebigen Vektor aus der Menge $\mathbb{R}^n \setminus \{t_0\}$ entsprechen. Die lokale Zerlegung einer charakteristischen Funktion in ein lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional und in einen lokal-charakteristischen Generator ist daher i. Allg. nicht eindeutig. So gilt z.B. für die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ im Falle $p \in (0, 2]$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dass

$$\tau_{n,p}(t) = \tau_{p|[0,\infty)}(|t|_{*p}) \quad , \quad t \in K_{n,2} ,$$

bzw.

$$\tau_{n,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , \quad t \in K_{n,2} ,$$

wobei $\phi : K_{n,2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein in 0_n zentriertes lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional und

$$h(x) := \tau_{n,p}(x \cdot 1_n) \quad , \quad x \geq 0 ,$$

ein lokal-charakteristischer Generator von $\tau_{n,p|K_{n,2}}$ ist, vgl. mit Theorem 5.13 und mit Korollar 5.12. Im Falle $p > 2$ sind dagegen keine lokalen geometrischen Beschreibungen der Niveaumengen von $\tau_{n,p}$ bekannt. Im nun folgenden Theorem wird jedoch gezeigt, dass sich $\tau_{n,p}$ auch in diesem Fall immer als Komposition eines lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals und eines lokal-charakteristischen Generators darstellen lässt.

Theorem 5.24. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Dann existieren ein $t_0 \in \mathbb{R}^n$ und eine sternförmige Menge $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ mit Zentrum t_0 so, dass $y \in M_0$ und $\tau_{n,p|M_0}$ einen lokal-charakteristischen Generator $h_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.*

Beweis. Siehe Anhang B. □

Mit den Theoremen 5.13 und 5.24 lassen sich die charakteristischen Niveaumengen der multivariaten p -verallgemeinerten Normalverteilung für alle $p > 0$ im gesamten Definitionsbereich geometrisch interpretieren. Während ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ im Falle $p \in (0, 2]$ als Element einer Niveaumenge des assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionals angesehen werden kann, lässt sich y im Falle $p \in (2, \infty)$ als Niveaumengenelement eines mit $\tau_{n,p}$ verbundenen lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals auffassen. Hierbei breiten sich die Niveaumengen der assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionale sowohl im Falle $p \in (0, 2)$ als auch im Falle $p \in (2, \infty)$ streng monoton um isolierte lokale Extremstellen von $\tau_{n,p}$ herum aus. Das Abklingverhalten des Betrages von $\tau_{n,p}$ auf genügend kleinen Umgebungen dieser isolierten lokalen Extremstellen wird zudem für alle $p > 0$ durch entsprechende lokal-charakteristische Generatoren repräsentiert.

Der in Theorem 5.24 verwendete lokale Ansatz zur geometrischen Beschreibung charakteristischer Niveaumengen kann auch auf andere symmetrische Verteilungen übertragen werden. So deutet beispielsweise Abbildung 17 darauf hin, dass sich nicht nur die Niveaumengen der spezifischen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion $\tau_{n,p}$ streng monoton um lokale Extremstellen herum ausbreiten. Das folgende Theorem 5.25 beinhaltet in diesem Zusammenhang eine Verallgemeinerung der Aussage in Theorem 5.24, welche u.a. die Existenz $l_{n,p}$ -symmetrischer lokal-charakteristischer Generatoren unter deutlich schwächeren Voraussetzungen als in Theorem 5.15 impliziert.

Theorem 5.25. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine charakteristische Funktion und sei $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte sternförmige Menge mit Zentrum t_0 , wobei $t_0 \in M_0^\circ$. Dann besitzt die Einschränkung von φ auf M_0 einen lokal-charakteristischen Generator $h_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, falls*

$$\varphi(a) < \varphi(t_0 + \lambda \cdot (a - t_0)) \quad , \quad a \in M_0 \setminus \{t_0\}, \lambda \in (0, 1), \quad (5.22)$$

oder

$$\varphi(a) > \varphi(t_0 + \lambda \cdot (a - t_0)) \quad , \quad a \in M_0 \setminus \{t_0\}, \lambda \in (0, 1). \quad (5.23)$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Es sei an dieser Stelle zusammengefasst, dass sich die Niveaumengen multivariater reeller charakteristischer Funktionen auf genügend kleinen (und sternförmigen) Umgebungen isolierter lokaler Extremstellen als Niveaumengen lokal-verallgemeinerter Radiusfunktionale geometrisch beschreiben lassen. Die Aussage in Theorem 5.25 kann in diesem Zusammenhang auch als lokale p -Verallgemeinerung von Theorem 1.4 (iii) auf $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen angesehen werden, welche isolierte lokale Extremstellen und nicht die in Theorem 5.15 vorausgesetzten globalen Monotonie- und Vorzeicheneigenschaften besitzen. So lassen sich beispielsweise die grafischen Darstellungen der in dieser Arbeit untersuchten wichtigen Spezialfälle $\tau_{2,p}$ und $\varphi_{2,p}$ (siehe Abbildung 16 und Abbildung 17) auch im Falle existenter Nullstellen mithilfe der Theoreme 5.24 und 5.25 geometrisch deuten. Es bleibt jedoch i. Allg. eine ungeklärte Frage, ob auch andere $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen als $\tau_{n,p}$ bzw. die in Abschnitt 5.3 betrachteten positiven und streng monotonen charakteristischen Funktionen im gesamten Definitionsbereich mit lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionalen assoziiert sind. Wie das abschließende Korollar dieses Abschnittes nun zeigt, lässt sich die charakteristische Funktion einer beliebigen nichtentarteten $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung aber zumindest auf einer genügend kleinen und sternförmigen Nullumgebung als Komposition eines lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals und eines lokal-charakteristischen Generators darstellen. Hierbei sei darauf hingewiesen, dass die in diesem Zusammenhang betrachteten Nullumgebungen im Falle der in den Kapiteln 3 und 4 betrachteten Spezialfälle $\varphi_{k,n,p}$ und $\tau_{n,p}$ spezifiziert werden können, vgl. mit Beispiel 5.27 und mit Beispiel 5.28. Es ist zudem auch möglich, die charakteristische Funktion φ einer beliebigen nichtentarteten $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung auf einer genügend kleinen Nullumgebung als Komposition eines assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionals und des lokalen charakteristischen Generators $h(x) := \varphi(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, darzustellen, sodass in vielen Fällen zumindest eine numerische Berechnung bzw. Simulation der assoziierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionale möglich ist, vgl. mit Abbildung 18.

Korollar 5.26. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p > 0$ und sei X ein $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion φ und $P(X = 0_n) < 1$. Dann existiert eine sternförmige Menge $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ mit Zentrum 0_n so, dass $0_n \in M_0^\circ$ und $\varphi|_{M_0}$ einen lokal-charakteristischen Generator besitzt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ein $t > 0$ so existiert, dass $\varphi(t \cdot a) \neq 1$. Seien hierzu $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T \sim N_{n,p}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle a, Y \rangle)^2 &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \mathbb{E}Y_j^2 \\ &= |a|_2^2 \frac{p^{\frac{2}{p}} \Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}, \end{aligned}$$

vgl. mit Lemma 1.15. Unter Berücksichtigung von Theorem 1.23 ist daher $P(\langle a, Y \rangle = 0) < 1$. Aus Theorem 1.10 ergibt sich ferner, dass im Falle eines Zufallsvektors $U \sim \omega_{n,p}$ auch $P(\langle a, U \rangle = 0) < 1$. Hiermit kann aber auch die Zufallsgröße $\langle a, X \rangle$ nicht die charakteristische Funktion $\tilde{\varphi}(t) = 1, t \in \mathbb{R}$, besitzen, denn

$$\langle a, X \rangle \stackrel{d}{=} R \langle a, U \rangle,$$

wobei R eine von U unabhängige Zufallsgröße mit $P(R = 0) < 1$ ist. Es folgt damit aus Theorem 1.38, dass für alle $a \in S_{n,2}$ ein $\varepsilon_a > 0$ so existiert, dass die Funktion $\eta_a(x) := \varphi(x \cdot a), x \geq 0$, streng monoton fallend auf $[0, \varepsilon_a]$ ist. Die Behauptung ergibt sich nun mit $M_0 := \{\lambda \cdot a : a \in S_{n,2}, \lambda \in [0, \varepsilon_a]\}$ aus Theorem 5.25. \square

Beispiel 5.27. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 2$. Dann kann die Menge M_0 aus Korollar 5.26 im Falle der charakteristischen Funktion $\tau_{n,p}$ durch $M_0 := [-(p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2, (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2]^n$ gewählt werden, vgl. mit Theorem 4.5. Aus Korollar 5.5 folgt überdies, dass das mit $\tau_{n,p}$ assoziierte und in Abbildung 18 (a) dargestellte lokal-verallgemeinerte Radiusfunktional ϕ_0 analog zum Fall $p \in (0, 2]$ inhomogen ist.

Beispiel 5.28. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, k \in \{2, \dots, n\}, p \in (1, \infty)$ und $q(p) = p/(p-1)$. Dann kann die Menge M_0 aus Korollar 5.26 im Falle der charakteristischen Funktion $\varphi_{k,n,p}$ durch $M_0 := K_{k,q(p)}$ gewählt werden, vgl. mit Theorem 3.7. Im Falle $p \in (0, 1]$ ist ferner die Wahl von $M_0 := [-\pi, \pi]^k$ möglich. Es folgt darüber hinaus aus Korollar 5.5, dass das mit $\varphi_{k,n,p}$ assoziierte und in Abbildung 18 (b) dargestellte lokal-verallgemeinerte Radiusfunktional ϕ_0 für alle $p > 0$ inhomogen ist.

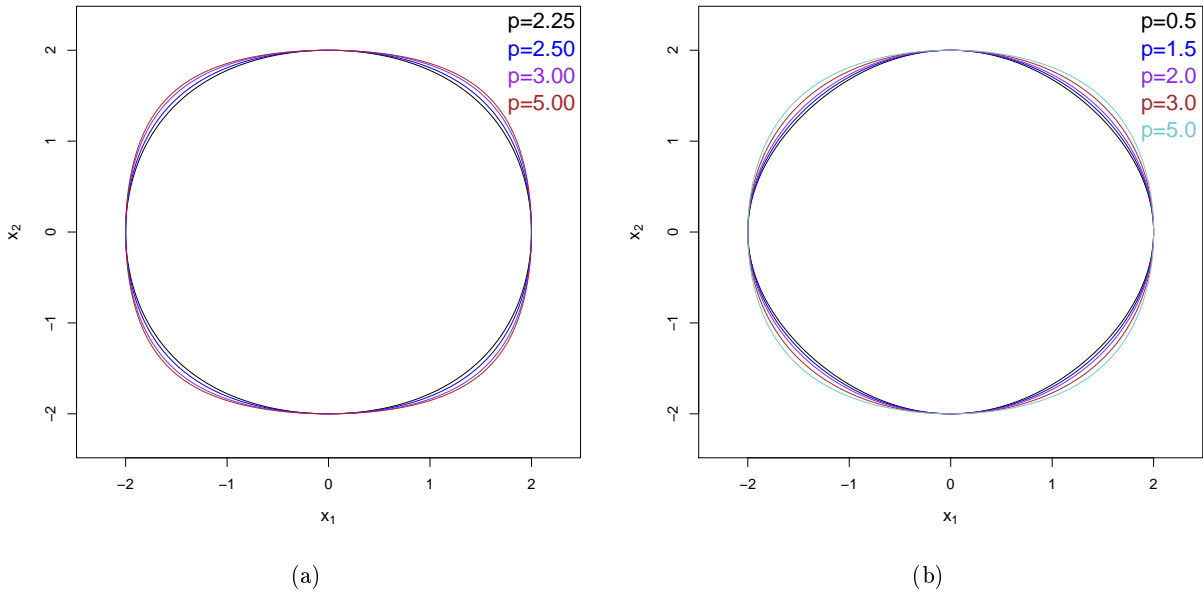


Abbildung 18: Approximationen von assoziierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionalen mithilfe numerischer Quadratur:

(a) Das mit $\tau_{2,p}$ assoziierte und in 0_2 zentrierte lokal-verallgemeinerte Radiusfunktional bzgl. des charakteristischen Generators $h = \tau_{p|[0,\infty)}$ erzeugt den dargestellten verallgemeinerten Kreis mit Niveau 2.

(b) Das mit $\varphi_{2,p}$ assoziierte und in 0_2 zentrierte lokal-verallgemeinerte Radiusfunktional bzgl. des charakteristischen Generators $h = \varphi_{1,2,p|[0,\infty)}$ erzeugt den dargestellten verallgemeinerten Kreis mit Niveau 2.

6 Neue Charakterisierungen α -symmetrischer Verteilungen

6.1 Vorbetrachtungen

Nach der in den Kapiteln 2-5 erfolgten Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen werden wir die dort erzielten Resultate in diesem Kapitel für die Darlegung neuartiger Charakterisierungen α -symmetrischer Verteilungen verwendet. Hierbei sei daran erinnert, dass die α -symmetrischen Verteilungen aufgrund der (in Abschnitt 1.5 beschriebenen) geometrischen Struktur einer α -symmetrischen charakteristischen Funktion eng verwandt mit den $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen sind. So existiert zu einer absolutstetigen α -symmetrischen Verteilung mit stetig positiv definiter Wahrscheinlichkeitsdichte f eine adjungierte $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilung, deren charakteristische Funktion proportional zu f ist, vgl. mit Korollar 1.48 und Theorem 1.46. Aus den Betrachtungen zu $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen in den Kapiteln 2-5 lassen sich daher Schlussfolgerungen über die Gestalt sowie über analytische und geometrische Eigenschaften von positiv definiten α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichten treffen. Die Ausführungen dieses Kapitels beinhalten in diesem Zusammenhang die Angabe neuartiger stochastisch bzw. geometrisch interpretierbarer Darstellungen α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten. Hierbei ist die unter diesem Aspekt in Abschnitt 6.2 hergeleitete Darstellung stabiler α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten der Ausgangspunkt für ein α -Analogon der stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen, welches in Abschnitt 6.3 präsentiert wird und erstmals den Fall $\alpha \notin \{1, 2\}$ berücksichtigt. Die Relevanz einer zu (1.6) analogen Zerlegung

$$X \stackrel{d}{=} RY \quad (6.1)$$

eines Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ in eine Basisvariable $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ und eine hiervon unabhängige erzeugende Zufallsgröße R wird neben den damit u.U. verbundenen geometrischen Interpretationsmöglichkeiten (vgl. mit Kapitel 2) auch im Hinblick auf ein in (Fang, Kotz et al., 1990) präsentiertes Theorem deutlich. So wurde hier gezeigt, dass für eine nichtparametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit einer Zerlegung wie in (6.1) nur die skaleninvarianten Statistiken für alle Vertreter der Familie dieselbe Verteilung besitzen, vgl. mit Theorem 7.3 aus (Fang, Kotz et al., 1990).

Die in Abschnitt 6.3 eingeführten Darstellungen α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten werden schließlich in Abschnitt 6.4 für die Charakterisierung einer Familie von adjungierten α -symmetrischen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen verwendet, welche nicht nur die Verteilung aus Beispiel 1.43 enthalten wird, sondern insbesondere auch zur Herleitung neuer Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen sowie für die geometrische Beschreibung α -symmetrischer Dichteniveaumengen verwendet werden kann.

Es sei zunächst hervorgehoben, dass sich aus den Ausführungen in den Kapiteln 2 und 5 wichtige Eigenschaften stetig positiv definiter α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten in direkter Art und Weise ableiten lassen. Eine Konsequenz aus der geometrischen Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen (vgl. mit Theorem 2.5) und aus Korollar 1.48 ist, dass sich jede derartige Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ darstellen lässt als

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi_{n,\alpha}(rx) d\gamma(r) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

wobei $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ proportional zu einer auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ konzentrierten stetigen Verteilungsfunktion ist. Mithilfe des in (6.2) aufgezeigten Zusammenhangs zwischen n -variater positiv definiter α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten und der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,\alpha}$ können nun auch die zugehörigen Dichteniveaumengen zum ersten Mal für beliebiges $\alpha \in (0, 2]$ in geometrischer Weise beschrieben werden. Es impliziert z.B. die Gültigkeit von

$$0 < \int_0^\infty r^m d\gamma(r) < \infty \quad , \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1} \quad (6.3)$$

dass die Niveaumengen der zu γ gehörigen stetigen α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte im Falle $\alpha \neq 2$ nicht den Niveaumengen eines homogenen Funktionals entsprechen, vgl. mit Theorem 5.4. Eine

stetige und positiv definite α -symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte f , welche entlang eines jeden Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, streng monoton fallend ist, kann mit Theorem 5.15 überdies dargestellt werden als

$$f(x) = g(|x|_*) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad (6.4)$$

wobei g eine streng monotone dichtegenerierende Funktion und $|\cdot|_*$ ein assoziiertes verallgemeinertes Radiusfunktional ist, vgl. mit Beispiel 6.1 und Abschnitt 6.4. Aus Korollar 5.26 folgt sogar ganz allgemein, dass jede stetig positiv definite α -symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte zumindest lokal (d.h. auf einer geeignet gewählten Sternmenge mit Zentrum 0_n) als Komposition eines assoziierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals und einer skalaren Funktion darstellbar ist, vgl. mit Beispiel 6.2 und Abbildung 19. Die Niveaumengen positiver definierter α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten lassen sich somit in analoger Weise zu den Niveaumengen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen als Niveaumengen verallgemeinerter Radiusfunktionale bzw. lokal-verallgemeinerter Radiusfunktionale geometrisch deuten, worauf in Abschnitt 6.4 in detaillierter Weise eingegangen wird.

Beispiel 6.1. Sei f die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte der in Beispiel 1.43 betrachteten α -symmetrischen Verteilung mit charakteristischer Funktion

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|_\alpha^\alpha}{\alpha}\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n .$$

Dann folgt aus der Proportionalität von φ und $f_{n,\alpha}$, dass f bis auf einen Normierungsfaktor mit der charakteristischen Funktion $\tau_{n,\alpha}$ übereinstimmt und daher wie in (6.2) darstellbar ist. Es ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{f_{n,\alpha}(0)} \frac{\alpha^{1-\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} x^{n-1} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right) \alpha^{1-n}}{\pi^n \Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)} x^{n-1} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0} , \end{aligned}$$

vgl. mit Theorem 1.10 und Beispiel 1.49. Die Funktion γ erfüllt auch für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Bedingung (6.3), sodass die Niveaumengen von f im Falle $\alpha \in (0, 2)$ nicht die Niveaumengen eines homogenen Funktionals sind. Aufgrund des Zusammenhangs

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{f_{n,\alpha}(0_n)} \tau_{n,\alpha}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

ist f mit Theorem 5.13 aber darstellbar als

$$f(x) = g(|x|_{*\alpha}) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

wobei die skalare Funktion g vermöge der Beziehung $g(x) = f(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, als dichtegenerierende Funktion von f bezeichnet werden kann und $|\cdot|_{*\alpha}$ das assoziierte verallgemeinerte Radiusfunktional von f bzw. $\tau_{n,\alpha}$ ist.

Beispiel 6.2. Sei f die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte der in Beispiel 1.44 betrachteten α -symmetrischen Verteilung mit charakteristischer Funktion

$$\varphi(t) = \exp(-|t|_\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^2 .$$

Dann ist φ proportional zur $l_{2,\alpha}$ -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\hat{f}(x) = \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{4 \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \exp(-|x|_\alpha) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 .$$

Für einen Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)^T$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte \hat{f} gilt ferner

$$\frac{\partial P(|X|_\alpha < x)}{\partial x} = I_{(0,\infty)}(x) x e^{-x} \quad , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

d.h. $|X|_\alpha$ besitzt die Verteilung $\text{Ga}(2, 1)$. Die positiv definite α -symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte f ist somit wie in (6.2) darstellbar, wobei

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hat{f}(0_2)} x e^{-x} \\ &= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi^2 \alpha \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} x e^{-x} \quad , x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^m d\gamma(r) &= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi^2 \alpha \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \int_0^\infty r^{m+1} e^{-r} dr \\ &= \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma(m+2)}{\pi^2 \alpha \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}.\end{aligned}$$

Die Niveaumengen von f können aus diesem Grund nicht als die Niveaumengen eines homogenen Funktionals interpretiert werden, sofern $\alpha \neq 2$. Mit Korollar 5.26 ist f aber zumindest auf einer geeignet gewählten Sternmenge $M_0 \subset \mathbb{R}^2$ mit Zentrum 0_2 darstellbar als

$$f(x) = g(\phi_0(x)) \quad , x \in M_0.$$

Dabei ist g eine skalare Funktion und $\phi_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ein assoziiertes lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional von f , welches in Abbildung 19 auf der Basis einer numerischen Simulation (mit Stichprobenumfang $k = 10^6$) anhand der R-Routinen `rpgnorm` und `rgamma` dargestellt ist, vgl. mit Bemerkung 5.19.

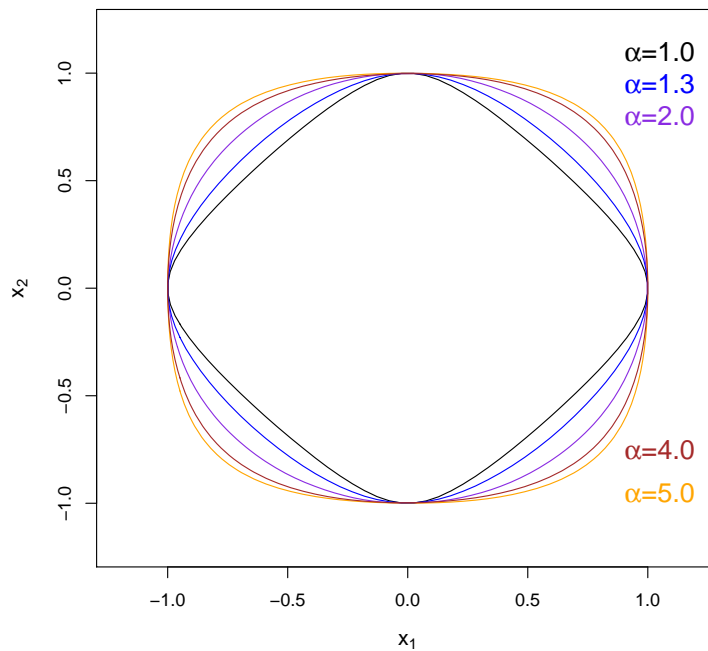


Abbildung 19: Der verallgemeinerte Einheitskreis des mit der Dichte f (aus Beispiel 6.2) assoziierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals bzgl. der skalaren Funktion $g(x) := f(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$.

6.2 Eine stochastische Darstellung stabiler α -symmetrischer Verteilungen

Die in diesem Abschnitt betrachteten stabilen α -symmetrischen Verteilungen besitzen eine ähnliche Bedeutung für die Familie α -symmetrischer Verteilungen wie die Normalverteilung für die sphärischen Verteilungen bzw. wie die p -verallgemeinerte Normalverteilung für die $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen. So kann auf der einen Seite analog zum Beweis von Theorem 5.1 gezeigt werden, dass ein α -symmetrisch

verteilter Zufallsvektor X genau dann u.i.v. Komponenten besitzt, wenn die Verteilung von X auch stabil ist. Auf der anderen Seite sind die α -symmetrischen charakteristischen Funktionen für $\alpha \in (0, 2]$ Verallgemeinerungen der stabilen n -variater charakteristischen Funktion

$$t \mapsto \exp(-|t|_\alpha^\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n . \quad (6.5)$$

Für die Angabe eines α -Analogons von Darstellung (1.6) wird in diesem Abschnitt daher in Analogie zum 2-symmetrischen Fall zunächst eine erzeugende stochastische Darstellung des in (6.5) charakterisierten Vertreters mit u.i.v. Komponenten bewiesen. Zu diesem Zweck erfolgt die Herleitung von Darstellungen der zugehörigen stetig positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte und die anschließende stochastische Deutung mithilfe der Betrachtungen aus Kapitel 3. Im folgenden Lemma wird unter diesem Gesichtspunkt der Zusammenhang zwischen einer stabilen α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte und der charakteristischen Funktion $\tau_{n,p}$ spezifiziert.

Lemma 6.3. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha \in (0, 2]$. Dann gilt für einen Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit der charakteristischen Funktion aus (6.5), dass*

$$\frac{\partial^n P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi \alpha} \right)^n \tau_{n,\alpha}(\alpha^{-1/\alpha} x) \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n . \quad (6.6)$$

Beweis. Mit Lemma 4.3 ist

$$\begin{aligned} \tau_{n,\alpha}(\alpha^{-1/\alpha} x) &= \left(\frac{\alpha^{1-1/\alpha}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \right)^n \int_{\mathbb{R}_{>0}^n} \exp\left(-\frac{|y|_\alpha^\alpha}{\alpha}\right) \prod_{j=1}^n \cos(\alpha^{-1/\alpha} x_j y_j) dy \\ &= \left(\frac{\alpha}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \right)^n \int_{\mathbb{R}_{>0}^n} \exp(-|z|_\alpha^\alpha) \prod_{j=1}^n \cos(x_j z_j) dz \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n , \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei sich Gleichung (6.7) durch die Substitution von $y = \alpha^{1/\alpha} z$ ergibt. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi \alpha} \right)^n \tau_{n,\alpha}(\alpha^{-1/\alpha} x) &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}_{>0}^n} \exp(-|z|_\alpha^\alpha) \prod_{j=1}^n \cos(x_j z_j) dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|z|_\alpha^\alpha) \prod_{j=1}^n \exp(ix_j z_j) dz \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{\partial P(X_j < x_j)}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$= \frac{\partial^n P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n , \quad (6.9)$$

wobei (6.8) aus Theorem 1.24 und (6.9) aus der Unabhängigkeit von X_1, \dots, X_n folgt. \square

Die in diesem Abschnitt betrachteten Wahrscheinlichkeitsdichten stabiler α -symmetrischer Verteilungen stimmen mit Lemma 6.3 bis auf einen Normierungsfaktor mit der charakteristischen Funktion eines Zufallsvektors überein, welcher proportional zu einem $N_{n,\alpha}$ -verteilten Zufallsvektor ist. Aus den in Kapitel 4 angegebenen Darstellungen von $\tau_{n,\alpha}$ lassen sich somit auch Darstellungen der zu (6.5) gehörigen stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte herleiten. Im Hinblick auf stochastische Interpretationsmöglichkeiten einer Dichtedarstellung erweist sich hierbei insbesondere der in Lemma 4.7 aufgezeigte Zusammenhang zwischen den charakteristischen Funktionen $\tau_{n,p}$ und $\varphi_{n,m,p}$ als nützlich. Die daraus folgende Darstellung einer stetigen und stabilen α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte ist im folgenden Korollar festgehalten.

Korollar 6.4. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ und $\alpha \in (0, 2]$. Dann gilt für einen Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit der charakteristischen Funktion aus (6.5), dass

$$\frac{\partial^n P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi\alpha} \right)^n \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}(rx) dF(r) \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.10)$$

Hierbei ist F die Verteilungsfunktion einer P -f.s. positiven Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(r) = I_{(0,\infty)}(r) \frac{\alpha}{\Gamma(\frac{m}{\alpha})} r^{m-1} \exp(-r^\alpha) \quad , \quad r \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Aus Lemma 6.3 und Lemma 4.7 folgt, dass sich die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte f von X darstellen lässt als

$$f(x) = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi\alpha} \right)^n \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}(\alpha^{-1/\alpha}yx) \frac{\alpha^{1-\frac{m}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{m}{\alpha})} y^{m-1} \exp\left(-\frac{y^\alpha}{\alpha}\right) dy \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.11)$$

Die Substitution von $r = \alpha^{-1/\alpha}y$ in (6.11) ergibt nun, dass

$$f(x) = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi\alpha} \right)^n \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}(rx) \frac{\alpha}{\Gamma(\frac{m}{\alpha})} r^{m-1} \exp(-r^\alpha) dr \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.12)$$

wobei

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{m-1} \exp(-r^\alpha) dr &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty u^{\frac{m}{\alpha}-1} \exp(-u) du \\ &= \frac{\Gamma(\frac{m}{\alpha})}{\alpha}. \end{aligned}$$

□

Der in Korollar 6.4 dargelegte Zusammenhang zwischen den stetigen Wahrscheinlichkeitsdichten stabiler α -symmetrischer Verteilungen und der charakteristischen Funktion $\varphi_{n,m,\alpha}$ kann für die Herleitung einer stochastischen Darstellung der durch (6.5) charakterisierten Wahrscheinlichkeitsverteilung verwendet werden. So ergibt sich aus den Ausführungen in Abschnitt 3.4 und aus Theorem 1.46, dass die Funktion $\varphi_{n,m,\alpha}$ für $\alpha \in (0, 2)$ und genügend großes $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ nichtnegativ, integrierbar und daher proportional zu einer n -variaten Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Aus diesem Grund besitzt die rechte Seite in (6.10) die Struktur einer Quotientendichte

$$y \mapsto \int_0^\infty f_Y(ry) r^n f_R(r) dr \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

wobei f_Y die Wahrscheinlichkeitsdichte eines n -variaten Zufallsvektors Y und f_R die Wahrscheinlichkeitsdichte einer P -f.s. positiven und von Y unabhängigen Zufallsgröße R ist. Das folgende Theorem 6.5 beinhaltet in diesem Kontext eine neue und stochastisch interpretierbare Darstellung stabiler α -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten im Falle $\alpha \in (0, 2)$. Die hiermit verbundene stochastische Darstellung dieser Verteilungen ist ferner Gegenstand der Betrachtungen im anschließenden Korollar 6.6.

Theorem 6.5. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$, $\kappa(\alpha)$ wie in Theorem 3.16 und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit der charakteristischen Funktion aus (6.5). Sei überdies $m \in \mathbb{N}_{\geq 8}$ so gewählt, dass $m \geq 4n$, $\alpha \in (0, 1]$, bzw. $m \geq n\alpha(\kappa(\alpha) + 1) + n$, $\alpha \in (1, 2)$. Dann ist

$$\frac{\partial^n P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \int_0^\infty \nu_{n,m,\alpha}(rx) r^n dF(r) \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.13)$$

Hierbei ist $\nu_{n,m,\alpha}$ die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte eines n -variaten Zufallsvektors S mit der charakteristischen Funktion

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, S \rangle) = \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}((m/\alpha)^{1/\alpha})}(t) \left(1 - \frac{|t|_\alpha^\alpha}{m/\alpha}\right)^{\frac{m-n}{\alpha}-1}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (6.14)$$

und F ist die Verteilungsfunktion einer P -f.s. positiven Zufallsgröße R mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_R(r) = \mathbf{I}_{(0,\infty)}(r) \frac{\alpha^{1-\frac{m-n}{\alpha}} m^{\frac{m-n}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)} r^{m-n-1} \exp\left(-\frac{m}{\alpha} r^\alpha\right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

Korollar 6.6. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $\alpha \in (0, 2)$. Dann besitzt ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ genau dann die charakteristische Funktion aus (6.5), wenn

$$X \stackrel{d}{=} \frac{S}{R},$$

wobei $S = (S_1, \dots, S_n)^T$ und R unabhängige Zufallsvariablen mit den in Theorem 6.5 angegebenen Verteilungen sind.

Beweis. Wir nehmen an, dass $S = (S_1, \dots, S_n)^T$ ein absolutstetig verteilter Zufallsvektor mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m,\alpha}$ und R eine von S unabhängige und absolutstetig verteilte, P -f.s. positive Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion F ist. Dann folgt aus Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998) und dem Satz von Fubini, dass der Quotient S/R eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit der in (6.13) angegebenen Gestalt besitzt, vgl. mit dem Beweis von Theorem 6.5. Die Behauptung ergibt sich nun aus Theorem 6.5. □

In Analogie zum (in Theorem 1.1 dargestellten) Spezialfall $\alpha = 2$ lassen sich Zufallsvektoren mit einer stabilen α -symmetrischen Verteilung mit Korollar 6.6 auch für $\alpha \in (0, 2)$ als das Produkt einer P -f.s. positiven erzeugenden Zufallsgröße (R^{-1}) und eines hiervon unabhängigen n -variaten Basisvektors S auffassen. Das damit verbundene α -Analogon der stochastischen Darstellung stabiler 2-symmetrischer Verteilungen ist der Ausgangspunkt für die in Abschnitt 6.3 erfolgende Beschreibung nichtparametrischer Familien von α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen mithilfe eines α -Analogons von Darstellung (1.6). Es zeigt sich ferner anhand des folgenden Theorems, dass der in diesem Zusammenhang verwendete Basisvektor S eine α -symmetrische Verteilung sowie eine stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt und für genügend großes $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$ als Zeilensumme in einem Schemata von u.i.v. infinitesimalen Zufallsgrößen aufgefasst werden kann, dessen Grenzverteilung die stabile α -symmetrische Verteilung mit der in (6.5) angegebenen charakteristischen Funktion ist, vgl. mit Theorem 6.7 (i)-(iii). Darüber hinaus lässt sich S in Analogie zur in Korollar 2.13 angegebenen stochastischen Darstellung von $\omega_{n,m,p}$ mithilfe der auf $S_{n,\alpha}^+$ konzentrierten multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vartheta_{n,\alpha,m_1,\dots,m_n}$ stochastisch darstellen, vgl. mit Theorem 6.7 (iv)-(v).

Theorem 6.7. Seien n, m, α wie in Theorem 6.5 und $S = (S_1, \dots, S_n)^T$ ein Zufallsvektor mit der (in Theorem 6.5 definierten) Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m,\alpha}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) S besitzt eine α -symmetrische Verteilung im \mathbb{R}^n ;
- (ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp(i\langle t, S \rangle) = \exp(-|t|_\alpha^\alpha)$, $t \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\nu_{n,m,\alpha}(x) = \left(\frac{m^{1/\alpha} \Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\pi \alpha^{1+1/\alpha}}\right)^n \varphi_{n,m,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} x\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(iv) Für eine Zerlegung $m = m_1 + \dots + m_n$ mit $m_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ist

$$\nu_{n,m,\alpha}(x) = C_{\alpha,n,m} \int_{S_{n,\alpha}^+} \left(\prod_{i=1}^n \varphi_{1,m_i,\alpha} \left(\left(\frac{m}{\alpha} \right)^{1/\alpha} \theta_i x_i \right) \theta_i \right) \prod_{i=1}^n \theta_i^{m_i-2} \mathfrak{D}_{n,\alpha}(d\theta), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$C_{\alpha,n,m} = \frac{m^{n/\alpha} \Gamma^n \left(\frac{1}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{m-n}{\alpha} \right)}{\pi^n \alpha^{1+n/\alpha} \prod_{i=1}^n \Gamma \left(\frac{m_i}{\alpha} \right)} ;$$

(v) Für eine Zerlegung $m = m_1 + \dots + m_n$ mit $m_i \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, $\alpha \in (0, 1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, bzw. $m_i \in \mathbb{N}_{\geq \alpha(\kappa(\alpha)+1)+1}$, $\alpha \in (1, 2)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ist

$$S \stackrel{d}{=} \left(\frac{W_1}{\Theta_1}, \dots, \frac{W_n}{\Theta_n} \right)^T.$$

Hierbei sind $W_1, \dots, W_n, \Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\Theta \sim \vartheta_{n,\alpha,m_1-1,\dots,m_n-1}$ und

$$\mathbb{E} \exp(it W_j) = I_{[-(m/\alpha)^{1/\alpha}, (m/\alpha)^{1/\alpha}]}(t) \left(1 - \frac{|t|^\alpha}{m/\alpha} \right)^{\frac{m_j-1}{\alpha}-1}, \quad t \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweis. Siehe Anhang B. □

6.3 Ein α -Analogon der stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen

Der Fokus der Betrachtungen liegt in diesem Abschnitt auf einer für $\alpha \in (0, 2)$ nichtparametrischen Familie von α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, deren Vertreter in Analogie zu den in Abschnitt 6.2 untersuchten stabilen Verteilungen mithilfe einer α -symmetrisch verteilten Basisvariablen S und einer hiervon unabhängigen erzeugenden Zufallsgröße R stochastisch dargestellt werden können. Es erfolgt in diesem Zusammenhang erstmals auch für $\alpha \notin \{1, 2\}$ die Angabe eines α -Analogons der stochastischen Darstellung 2-symmetrischer Verteilungen in (1.6). Die Herleitung dieses Analogons basiert auf den Ausführungen in Abschnitt 6.2 und der folgenden Definition:

Definition 6.8. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$, $\kappa(\alpha)$ wie in Theorem 3.16 und

$$m := \begin{cases} 4n & , \alpha \in (0, 1] , \\ \lceil n \alpha (\kappa(\alpha) + 1) \rceil + n & , \alpha \in (1, 2) . \end{cases}$$

Sei zudem $S = (S_1, \dots, S_n)^T$ ein Zufallsvektor mit der (in Theorem 6.7 beschriebenen) Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m,\alpha}$. Dann ist

$$A_{n,\alpha} := \{ \mathcal{L}(RS) : R \text{ ist eine von } S \text{ unabhängige Zufallsgröße mit } P(R \geq 0) = 1 \} .$$

Mit Definition 6.8 erfüllt jeder Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit einer α -symmetrischen Verteilung aus $A_{n,\alpha}$ die zu (1.6) analoge stochastische Darstellung

$$X \stackrel{d}{=} RS, \tag{6.15}$$

wobei $S = (S_1, \dots, S_n)^T$ eine für alle Vertreter von $A_{n,\alpha}$ gleichbleibende α -symmetrisch verteilte Basisvariable mit den in Theorem 6.7 angegebenen Eigenschaften und R eine hiervon unabhängige und P -f.s. nichtnegative erzeugende Zufallsgröße ist. Durch die Wahl der erzeugenden Variablen R lassen sich hiermit innerhalb der Familie $A_{n,\alpha}$ sowohl Verteilungen mit schweren Enden als auch Verteilungen mit leichten Enden modellieren. Die Familie $A_{n,\alpha}$ enthält ferner wichtige Vertreter α -symmetrischer Verteilungen. Dies wird anhand der folgenden beiden Beispiele aber auch anhand der in Abschnitt 6.4 betrachteten Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen deutlich.

Beispiel 6.9. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$, $c > 0$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein α -symmetrisch verteilter Zufallsvektor mit der charakteristischen Funktion

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) = \exp(-c|t|_\alpha^\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n . \quad (6.16)$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 6.8, dass

$$X \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{\alpha}} R S ,$$

wobei S der Basisvektor der Familie $A_{n,\alpha}$ und R eine von S unabhängige, P -f.s. positive Zufallsgröße ist mit

$$\frac{\partial P(R^{-1} < r)}{\partial r} = \mathbf{I}_{(0,\infty)}(r) \frac{\alpha^{1-\frac{m-n}{\alpha}} m^{\frac{m-n}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)} r^{m-n-1} \exp\left(-\frac{m}{\alpha} r^\alpha\right) \quad , \quad r \in \mathbb{R} ,$$

vgl. mit Korollar 6.6. Es ist somit $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}$.

Beispiel 6.10. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$, $c > 0$ und m wie in Definition 6.8. Dann folgt aus Theorem 8 in (Williamson, 1956), dass für ein beliebiges $\beta \geq (m-n)/\alpha - 1$ durch

$$t \mapsto \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}(c^{-1/\alpha})}(t) (1 - c|t|_\alpha^\alpha)^\beta \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n , \quad (6.17)$$

die charakteristische Funktion eines Zufallsvektors X mit $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}$ gegeben ist. Damit ist insbesondere die Verteilung eines Zufallsvektors $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ mit der in Theorem 6.7 beschriebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m^*,\alpha}$ in $A_{n,\alpha}$ enthalten, sofern $m^* \in \mathbb{N}_{\geq m}$.

Die Bedeutung der Familie $A_{n,\alpha}$ bei der Untersuchung α -symmetrischer Verteilungen ist nicht zuletzt durch ein in (Gneiting, 2001) präsentierte α -Analogon von Askeys Kriterium 2-symmetrischer charakteristischer Funktionen (siehe Theorem 1.40) gegeben. In (Gneiting, 2001) wird in diesem Zusammenhang für $\alpha \in (0, 2)$ eine Familie von α -symmetrischen charakteristischen Funktionen betrachtet, deren Vertreter darstellbar sind als

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \varphi^*(rt) dF(r) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n . \quad (6.18)$$

Dabei ist F die Verteilungsfunktion einer P -f.s. positiven Zufallsgröße und φ^* ist eine α -symmetrische charakteristische Funktion, welche sich für ein $\lambda \in (0, \alpha]$ und eine geeignet gewählte Konstante $\kappa > 0$ darstellen lässt als

$$\varphi^*(t) = \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}}(t) \left(1 - |t|_\alpha^\lambda\right)^\kappa \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n .$$

Im Falle $\alpha = \lambda$ ist die zur charakteristischen Funktion φ gehörige Verteilung somit aus $A_{n,\alpha}$, wenn für die in Definition 6.8 angegebene Konstante m gilt, dass $\kappa \geq (m-n)/\alpha - 1$, vgl. mit Beispiel 6.10.

Die Relevanz von $A_{n,\alpha}$ ist darüber hinaus durch die im folgenden Abschnitt demonstrierte Adjungiertheit einer Teilmenge von $A_{n,\alpha}$ zu einer Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen gegeben. Mithilfe der dort gezeigten Paarbildung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist es möglich, aus bekannten Beispielen $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen geometrische Beschreibungen α -symmetrischer Dichteniveaus sowie neue Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen herzuleiten. Mit den Ausführungen dieses Kapitels ist in diesem Sinne auch eine Alternative zu Gneittings Kriterium für den Nachweis α -symmetrischer charakteristischer Funktionen verbunden.

Wir betrachten nun zum Ende dieses Abschnittes die Wahrscheinlichkeitsdichten absolutstetiger Verteilungen aus $A_{n,\alpha}$. Eine Verteilung aus $A_{n,\alpha}$ ist unter diesem Gesichtspunkt genau dann absolutstetig, wenn die zugehörige erzeugende Zufallsgröße P -f.s. positiv ist. Wie das folgende Korollar überdies zeigt, können die Wahrscheinlichkeitsdichten dieser Verteilungen stets auf die positiv definite Dichte $\nu_{n,m,\alpha}$ zurückgeführt werden.

Korollar 6.11. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit einer absolutstetigen Verteilung aus $A_{n,\alpha}$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 6.8, dass

$$\frac{\partial P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \int_0^\infty \nu_{n,m,\alpha}(x/r) r^{-n} dF(r) \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.19)$$

wobei F die Verteilungsfunktion der zu X gehörigen, P -f.s. positiven erzeugenden Zufallsgröße R ist.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch analoge Vorgehensweise wie im Beweis von Korollar 6.6 aus Definition 6.8, Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998) sowie aus dem Satz von Fubini. \square

Die Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung (6.19) absolutstetiger Verteilungen aus $A_{n,\alpha}$ spiegelt die zugehörige erzeugende stochastische Darstellung aus (6.15) wider. Neben dieser stochastischen Interpretationsmöglichkeit ist es für bestimmte absolutstetige Vertreter von $A_{n,\alpha}$ auch möglich, die Niveaumengen der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten in Analogie zur in Kapitel 5 erfolgten geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen mithilfe von verallgemeinerten Radiusfunktionalen in geometrischer Weise darzustellen. Es sei an dieser Stelle auf den folgenden Abschnitt verwiesen, in welchem derartige geometrische Dichtedarstellungen für spezielle Vertreter α -symmetrischer Verteilungen mit existenten adjungierten Verteilungen angegeben werden.

6.4 Beispiele adjungierter α -symmetrischer und $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen

In Abschnitt 1.5 wurde die Existenz einer Familie von α -symmetrischen Verteilungen angedeutet, deren Vertreter adjungierte Verteilungen von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen sind. So ist beispielsweise die in Kapitel 4 untersuchte charakteristische Funktion $\tau_{n,\alpha}$ im Falle $\alpha \in (0, 2]$ nichtnegativ, integrierbar und somit proportional zu einer α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte, vgl. mit Beispiel 1.49. Die Ausführungen in diesem Abschnitt zeigen nun, dass die multivariate p -verallgemeinerte Normalverteilung $N_{n,p}$ für $p \in (0, 2)$ ein spezieller Vertreter einer Familie adjungierter $l_{n,p}$ -symmetrischer und α -symmetrischer Verteilungen ist. Die in diesem Zusammenhang betrachteten α -symmetrischen Verteilungen sind Elemente der in Abschnitt 6.3 eingeführten Familie $A_{n,\alpha}$ und können anhand der zugehörigen erzeugenden Zufallsgröße gemäß (6.15) charakterisiert werden. Vermöge der angekündigten Paarbildung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist es zudem möglich, nach der spezifischen α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte aus Beispiel 6.1 nun eine Vielzahl derartiger Dichten mithilfe von assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionalen in geometrischer Weise zu beschreiben. Es wird darüber hinaus demonstriert, dass sich der Zusammenhang zwischen α -symmetrischen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen auch dazu verwenden lässt, um aus bekannten Beispielen $l_{n,p}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten neue Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen herzuleiten.

Wir definieren zunächst die in diesem Abschnitt betrachtete Familie von α -symmetrischen Verteilungen aus $A_{n,\alpha}$:

Definition 6.12. Unter den Voraussetzungen von Definition 6.8 wird die Familie multivariater Wahrscheinlichkeitsverteilungen $A_{n,\alpha}^*$ eingeführt als

$$A_{n,\alpha}^* := \{ \mathfrak{L}(RS) : R \text{ ist eine von } S \text{ unabhängige Zufallsgröße mit } 0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty \} .$$

Beispiel 6.13. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$ und $c > 0$. Dann gilt für den in Beispiel 6.9 betrachteten Zufallsvektor X , dass $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}^*$.

Die Familie $A_{n,\alpha}^*$ enthält genau die Verteilungen aus $A_{n,\alpha}$, deren zugehörige charakteristische Funktionen integrierbar sind. Wir betrachten hierfür einen Zufallsvektor $X = RS$ mit $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}^*$. Dann

folgt aus dem Satz von Fubini und Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E} \exp(i\langle t, S \rangle) dt &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E} \exp(i\langle t, S \rangle) r^{-n} dt \right) dF_R(r) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E} \exp(i\langle ry, S \rangle) dy dF_R(r) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \mathbb{E} \exp(i\langle y, rS \rangle) dF_R(r) \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E} \exp(i\langle y, X \rangle) dy, \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei sich Gleichung (6.20) durch die Substitution von $t = ry$ ergibt. Auf der anderen Seite folgt aber auch (durch analoge Umformungen wie in (6.21)) aus der Integrierbarkeit der charakteristischen Funktion von $X = RS$ mit $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}$, dass $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}^*$. Die Familie $A_{n,\alpha}^*$ kann daher als die Menge aller Verteilungen aus $A_{n,\alpha}$ mit integrierbaren charakteristischen Funktionen bezeichnet werden. Mit Korollar 1.48 existiert ferner für alle Verteilungen aus $A_{n,\alpha}^*$ eine adjungierte $l_{n,\alpha}$ -symmetrische Verteilung. Zum Zwecke der Beschreibung der hiermit verbundenen Familie von $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen wird die nun folgende Definition eingeführt:

Definition 6.14. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2)$, $\kappa(p)$ wie in Theorem 3.16 und

$$m := \begin{cases} 4n & , p \in (0, 1] , \\ \lceil np(\kappa(p) + 1) \rceil + n & , p \in (1, 2) . \end{cases}$$

Dann ist die Verteilungsfamilie $\Phi_{n,p}^*$ definiert als

$$\Phi_{n,p}^* := \{ \mathfrak{L}(RU) : R \text{ ist eine von } U \sim \omega_{n,m,p} \text{ unabhängige Zufallsgröße mit } 0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty \} .$$

Beispiel 6.15. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2)$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T \sim N_{n,p}$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_{>n}$, dass

$$X \stackrel{d}{=} RU ,$$

wobei $U \sim \omega_{n,m,p}$ und R eine von U unabhängige, P -f.s. positive Zufallsgröße ist mit

$$\frac{\partial P(R < r)}{\partial r} = \mathbb{I}_{(0,\infty)}(r) \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} r^{m-1} e^{-\frac{r^p}{p}} , \quad r \in \mathbb{R} ,$$

vgl. mit Lemma 4.7. Wir erhalten somit unabhängig von der Wahl von $m > n$, dass $0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty$, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R^{-n} &= \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} \int_0^\infty r^{m-n-1} e^{-\frac{r^p}{p}} dr \\ &= \frac{p^{-\frac{n}{p}} \Gamma\left(\frac{m-n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)} . \end{aligned}$$

Es ist daher $\mathfrak{L}(X) \in \Phi_{n,p}^*$.

Beispiel 6.16. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2)$ und m wie in Definition 6.14. Seien zudem $m^* \in \mathbb{N}_{> m}$ und $X \sim \omega_{n, m^*, p}$. Dann ist X verteilt wie $(Y_1, \dots, Y_n)^T$, sofern $Y = (Y_1, \dots, Y_m)^T \sim \omega_{m, m^*, p}$. Hiermit ist

$$X \stackrel{d}{=} RU,$$

wobei $U \sim \omega_{n, m, p}$ und R eine von U unabhängige, P -f.s. nichtnegative Zufallsgröße mit $R \stackrel{d}{=} |Y|_p$ ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} P(R < r) &= P(Y \in K_{m, p}(r)) \\ &= \int_{K_{m, p}(r)} \mathbb{I}_{K_{m, p}^\circ}(x) \frac{\Gamma\left(\frac{m^*}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^m}{\Gamma^m\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m^*-m}{p}\right)} (1 - |x|_p^p)^{\frac{m^*-m}{p}-1} dx \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$= \int_0^r \mathbb{I}_{(0,1)}(v) \frac{\Gamma\left(\frac{m^*}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^m}{\Gamma^m\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m^*-m}{p}\right)} \mathfrak{D}_{m, p}(S_{m, p}) v^{m-1} (1 - v^p)^{\frac{m^*-m}{p}-1} dv, \quad (6.23)$$

wobei sich (6.22) aus Beispiel 1.14 und (6.23) aus Gleichung (1.15) ergibt. Aus (6.23) folgt weiterhin, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R^{-n} &= \frac{\Gamma\left(\frac{m^*}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^m}{\Gamma^m\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m^*-m}{p}\right)} \mathfrak{D}_{m, p}(S_{m, p}) \int_0^1 r^{m-n-1} (1 - r^p)^{\frac{m^*-m}{p}-1} dr \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m^*}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^m}{\Gamma^m\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m^*-m}{p}\right)} \mathfrak{D}_{m, p}(S_{m, p}) \frac{1}{p} \int_0^1 r^{\frac{m-n}{p}-1} (1 - r)^{\frac{m^*-m}{p}-1} dr \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m^*}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^m \Gamma\left(\frac{m-n}{p}\right)}{p \Gamma^m\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m^*-n}{p}\right)} \mathfrak{D}_{m, p}(S_{m, p}). \end{aligned}$$

Der Zufallsvektor X besitzt daher bzgl. des Zufallsvektors U eine erzeugende Zufallsgröße R mit $0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty$, d.h. $\mathfrak{L}(X) \in \Phi_{n, p}^*$.

Beispiel 6.17. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2)$, $c > 0$ und sei $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ ein Zufallsvektor, welcher der n -variaten p -verallgemeinerten t -Verteilung mit c Freiheitsgraden folgt, vgl. mit Beispiel 5.18 und (Arellano-Valle u. Richter, 2012). Dann ist

$$Y \stackrel{d}{=} V^{-\frac{1}{p}} X,$$

wobei $X \sim N_{n, p}$ und V eine von X unabhängige, P -f.s. positive Zufallsgröße mit $V \sim Ga(c/p, c/p)$ ist. Für die erzeugende Zufallsgröße von Y bzgl. des Zufallsvektors X gilt aus diesem Grund:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(V^{-\frac{1}{p}}\right)^{-n} &= \mathbb{E}V^{\frac{n}{p}} \\ &= \frac{\left(\frac{c}{p}\right)^{c/p}}{\Gamma\left(\frac{c}{p}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{c+n}{p}-1} \exp\left(-\frac{c v}{p}\right) dv \\ &= \frac{\left(\frac{c}{p}\right)^{-n/p}}{\Gamma\left(\frac{c}{p}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{c+n}{p}-1} \exp(-v) dv \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{c+n}{p}\right)}{\left(\frac{c}{p}\right)^{n/p} \Gamma\left(\frac{c}{p}\right)}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun aus Beispiel 6.15, dass $\mathfrak{L}(Y) \in \Phi_{n, p}^*$.

Es wurde bereits im Anschluss an Beispiel 6.13 angemerkt, dass $A_{n,\alpha}^*$ mit der Menge aller Verteilungen aus $A_{n,\alpha}$ mit existenten adjungierten Verteilungen gleichgesetzt werden kann. In analoger Weise lässt sich nun zeigen, dass auch zu jeder Verteilung aus $\Phi_{n,\alpha}^*$ eine adjungierte α -symmetrische Verteilung existiert. Das folgende Theorem macht in diesem Zusammenhang deutlich, dass $\Phi_{n,\alpha}^*$ der Familie aller zugehörigen adjungierten Verteilungen von $A_{n,\alpha}^*$ entspricht.

Theorem 6.18. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein absolutstetig verteilter Zufallsvektor mit der charakteristischen Funktion φ . Dann ist $\mathfrak{L}(X)$ genau dann in $A_{n,\alpha}^*$ enthalten, wenn φ proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte eines Zufallsvektors Y mit $\mathfrak{L}(Y) \in \Phi_{n,\alpha}^*$ ist.*

Beweis. Siehe Anhang B. □

Mithilfe der in Theorem 6.18 aufgezeigten Paarbildung zwischen Verteilungen aus $A_{n,\alpha}^*$ und $\Phi_{n,\alpha}^*$ lassen sich die in Kapitel 5 erfolgten geometrischen Betrachtungen zu $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen nun auch auf eine Vielzahl von α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichten übertragen. Es wird unter diesem Aspekt in Theorem 6.19 gezeigt, dass die Dichteniveaumengen einer Verteilung aus $A_{n,\alpha}^*$ als die Niveaumengen eines assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionals in geometrischer Weise interpretiert werden können, sofern die zugehörige stetige Wahrscheinlichkeitsdichte entlang eines jeden Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, streng monoton fallend ist. Aus den in Abschnitt 5.3 hergeleiteten Beispielen derartig beschreibbarer $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen können ferner auch im Falle der α -symmetrischen Verteilungen konkrete Teilfamilien und Vertreter von $A_{n,\alpha}^*$ angegeben werden, deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichten als Komposition eines assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionals und einer skalaren Funktion dargestellt werden können, welche das Abklingverhalten der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichte repräsentiert, vgl. mit den Korollaren 6.20 und 6.21 sowie mit Beispiel 6.22.

Der in Beispiel 6.22 aufgeführte und in der Literatur bisher nicht erwähnte Spezialfall einer α -symmetrischen charakteristischen Funktion zeigt überdies, dass der Zusammenhang zwischen α -symmetrischen Verteilungen aus $A_{n,\alpha}^*$ und $l_{n,\alpha}$ -symmetrischen Verteilungen aus $\Phi_{n,\alpha}^*$ auch für die Bestimmung explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen verwendet werden kann.

Theorem 6.19. *Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$ und sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte einer Verteilung aus $A_{n,\alpha}^*$, wobei*

$$f(rx) < f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \quad r > 1.$$

Dann ist f darstellbar als

$$f(x) = g(|x|_*) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $g(x) = f(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, und $|\cdot|_ := g^{-1} \circ f$ ist ein verallgemeinertes Radiusfunktional.*

Beweis. Die Funktion f ist unter den Voraussetzungen von Theorem 6.19 streng monoton fallend entlang eines jeden Strahles $\{\lambda \cdot x : \lambda \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, und somit insbesondere positiv auf \mathbb{R}^n . Da es sich bei f zudem um eine integrierbare Funktion handelt, gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(rt) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}.$$

Die zu f proportionale charakteristische Funktion $\hat{\varphi}$ der zugehörigen adjungierten Verteilung aus $\Phi_{n,\alpha}^*$ erfüllt daher die Voraussetzungen von Theorem 5.15, d.h. $\hat{\varphi}$ ist darstellbar als

$$\hat{\varphi}(t) = h(|t|_*) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist h eine streng monoton fallende Funktion mit $h(x) = \hat{\varphi}(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, und $|\cdot|_* = h^{-1} \circ \hat{\varphi}$ ist ein verallgemeinertes Radiusfunktional. Die Behauptung folgt nun aus der Proportionalität von f und $\hat{\varphi}$ mit $g(x) = f(0_n) \cdot h(x)$, $x \geq 0$. □

Korollar 6.20. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit der charakteristischen Funktion

$$\varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|_\alpha^\alpha}{\alpha}\right), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Sei überdies R eine P -f.s. positive und von X unabhängige Zufallsgröße mit $0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty$. Dann besitzt der Zufallsvektor $Y = RX$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = g(|x|_*) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $g(x) = f(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, und $|\cdot|_* := g^{-1} \circ f$ ist ein verallgemeinertes Radiusfunktional.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Korollar 6.21. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq 4n}$ und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit der in Theorem 6.7 beschriebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m,1}$. Sei zudem R eine P -f.s. positive und von X unabhängige Zufallsgröße mit $0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty$. Dann besitzt der Zufallsvektor $Y = RX$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = g(|x|_*) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $g(x) = f(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, und $|\cdot|_* := g^{-1} \circ f$ ist ein verallgemeinertes Radiusfunktional.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Beispiel 6.22. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha \in (0, 2)$ und $c > 0$. Dann folgt aus Theorem 6.18 und Beispiel 6.17, dass durch

$$\varphi(t) = \left(1 + \frac{|t|_\alpha^\alpha}{c}\right)^{-\frac{c+n}{\alpha}}, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad (6.24)$$

die charakteristische Funktion einer α -symmetrischen Verteilung aus $A_{n,\alpha}^*$ gegeben ist. Die zu φ gehörige stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte f ist mit Theorem 1.46 proportional zur charakteristischen Funktion der n -variater α -verallgemeinerten t -Verteilung mit c Freiheitsgraden. Aus Beispiel 5.18 folgt ferner, dass

$$f(x) = g(|x|_*) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine streng monoton fallende Funktion mit $g(x) = f(x \cdot e_1)$, $x \geq 0$, und $|\cdot|_* = g^{-1} \circ f$ ist ein verallgemeinertes Radiusfunktional. Die Niveaumengen von f können aus diesem Grund als die Niveaumengen des in Abbildung 15 (im Spezialfall $n = 2$ und $c = 10$) dargestellten verallgemeinerten Radiusfunktionals in geometrischer Weise interpretiert werden.

Anhang A: Zusammenfassung und Ausblick

A.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen untersucht. Die hierzu gehörigen Verteilungen sind im Hinblick auf die in (Richter, 2009) zum Ausdruck kommende geometrisch-verallgemeinerte Gleichverteilung des assoziierten Basisvektors (vgl. mit Bemerkung 1.9), die strukturelle Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichten aus (Gupta u. Song, 1997b) (vgl. mit Theorem 1.13) sowie auf die geometrische Maßdarstellung absolutstetiger $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen aus (Richter, 2009) bereits in vielerlei Hinsicht unter geometrischen Gesichtspunkten beschrieben worden. Die geometrischen Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen sind dagegen nur im (mit $p = 2$ gegebenen) Spezialfall der sphärischen charakteristischen Funktionen bekannt. So lässt sich jede sphärische charakteristische Funktion als Komposition des euklidischen Radius $|\cdot|_2$ und eines skalaren charakteristischen Generators darstellen, d.h. die charakteristischen Niveaumengen sphärischer Verteilungen können auch als Niveaumengen des euklidischen Radius aufgefasst werden. Die strukturelle Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen aus (Schoenberg, 1938) (vgl. mit Theorem 2.1) spiegelt ferner die (euklidische) Geometrie des gleichverteilten Basisvektors dieser Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen wider.

Mit dem in dieser Arbeit hergeleiteten Theorem 2.5 erhält die Methode der charakteristischen Funktionen auch für $p \neq 2$ Einzug in die Familie der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen. Der hier aufgezeigte Zusammenhang zwischen einer beliebigen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion und der charakteristischen Funktion der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ kann als p -Verallgemeinerung von Schoenbergs Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen bzw. als geometrische Darstellung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen bezeichnet werden. Dies ist dadurch begründet, dass sich die (i. Allg. nichteuklidische) Geometrie des Basisvektors der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen mit Theorem 2.5 auch in den zugehörigen charakteristischen Funktionen widerspiegelt, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 2.4 für eine ausführliche geometrische Interpretation von Theorem 2.5.

Neben den angedeuteten Interpretationsmöglichkeiten besitzt Theorem 2.5 darüber hinaus eine große Bedeutung bei der Berechnung und Untersuchung beliebiger $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen sowie für wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen im Zusammenhang mit $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen. In Abschnitt 2.5 wurden hierbei unter Verwendung von Theorem 2.5 stochastische Darstellungen partitionierter $l_{n,p}$ -symmetrisch verteilter Zufallsvektoren erstmals mithilfe der Methode der charakteristischen Funktionen hergeleitet und mit neuen geometrischen Interpretationen versehen. Bei der geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen in Kapitel 5 konnten zudem wichtige Aussagen über die charakteristische Funktion der p -verallgemeinerten Normalverteilung anhand von Theorem 2.5 verallgemeinert werden.

Es lässt sich somit zusammenfassend sagen, dass die in Theorem 2.5 angegebene p -Verallgemeinerung von Schoenbergs Theorem 2.1 eine Schlüsselrolle bei den in dieser Arbeit erfolgten Untersuchungen einnimmt und als deren Ausgangspunkt bezeichnet werden kann.

Im Hinblick auf die zusätzlich zur Verallgemeinerung und zur geometrischen Interpretation von Schoenbergs Darstellung sphärischer charakteristischer Funktionen angestrebte geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen hat es sich in dieser Arbeit überdies als hilfreich erwiesen, die charakteristischen Funktionen zweier bedeutender Vertreter $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen gesondert zu betrachten. Während sich die Relevanz der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ hierbei direkt aus Theorem 2.5 ergibt, ist die Rolle der p -verallgemeinerten Normalverteilung innerhalb der Familie $l_{n,p}$ -symmetrischer Verteilungen vergleichbar mit der Rolle der Normalverteilung innerhalb der Familie sphärischer Verteilungen. Dies wird nicht zuletzt dadurch deutlich, dass die Unabhängigkeit der Randverteilungen sowie die hiermit verbundene Faktorierbarkeit der charakteristischen Funktion einer $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilung nur im Falle einer p -verallgemeinerten Normalverteilung gegeben ist.

Für die charakteristische Funktion der p -verallgemeinerten Gleichverteilung und der p -verallgemeinerten Normalverteilung sind in diesem Kontext in den Kapiteln 3 und 4 Integral- und Reihendarstellungen sowie analytische Eigenschaften hergeleitet worden. Es ist dabei u.a. gelungen, die charakteristische Funktion der p -verallgemeinerten Normalverteilung in Ergänzung zu einem Resultat aus (Pogány u. Nadarajah, 2010) auch im Falle $0 < p < 1$ durch numerisch auswertbare Integrale sowie unendliche Reihen darzustellen. Darüber hinaus wurde die charakteristische Funktion der p -verallgemeinerten Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ nicht nur anhand derartiger Integrale und Reihen beschrieben, sondern es wurde

insbesondere auch die Darstellbarkeit dieser Funktion mithilfe einer aus der Literatur bekannten verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion gezeigt. Mit den angegebenen Charakterisierungen dieser Funktionen hinsichtlich des Nullstellenverhaltens, der Monotonie, der Analytizität, der Stabilität und der Teilbarkeit ist in den Kapiteln 3 und 4 zudem der Grundstein für die (in Kapitel 5 erfolgte) geometrische Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen sowie für statistische Anwendungsmöglichkeiten der betrachteten charakteristischen Funktionen gelegt worden, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 3.4.

Eine der wichtigsten Fragen bei der geometrisch motivierten Untersuchung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen ist, ob sich eine derartige Funktion φ auch im nichtsphärischen Fall als Komposition eines geometrisch interpretierbaren n -variaten Funktionals und einer skalaren Funktion darstellen lässt, welche das Abkling- und Oszillationsverhalten von φ repräsentiert. Die aufgeführte Problemstellung ist alternativ auch mit der Frage nach der Existenz $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Generatoren gleichzusetzen, welche in Kombination mit einem zu $|\cdot|_2$ analogen und geometrisch interpretierbaren Funktional nichtsphärische $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen erzeugen. Die Ausführungen in Kapitel 5 haben hierbei deutlich gemacht, dass die genannte Frage für eine große Zahl von wichtigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen mit nein zu beantworten ist, sofern bei der Suche nach assoziierten Verallgemeinerungen von $|\cdot|_2$ nur positiv homogene Funktionale betrachtet werden, vgl. mit Theorem 5.4 und Korollar 5.5.

Es konnte jedoch in Abschnitt 5.3 gezeigt werden, dass eine Vielzahl von nichtsphärischen $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen, darunter bedeutende Vertreter wie die p -verallgemeinerte Normalverteilung und die p -verallgemeinerte t -Verteilung im Falle $p \in (0, 2)$, von einem skalaren charakteristischen Generator sowie einem assoziierten geometrisch interpretierbaren (und i. Allg. inhomogenen) Funktional erzeugt werden. Dieses kann aufgrund seiner Bedeutung für Verallgemeinerungen der wohlbekannteren sphärischen Koordinatentransformation als verallgemeinertes Radiusfunktional bezeichnet und in vielen Fällen zumindest numerisch berechnet bzw. simuliert werden, vgl. mit den Abbildungen 14 und 15.

Die i. Allg. nicht gegebene Homogenität der assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionale $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen bewirkt, dass sich die Niveaumengen nichtsphärischer $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen im Gegensatz zum sphärischen Fall auch für gleichbleibende Werte von n und p i. Allg. nicht mit einem einheitlich gewählten verallgemeinerten Radiusfunktional beschreiben lassen, sondern in ihrer geometrischen Gestalt variieren. Mithilfe des in den Kapiteln 3 und 4 untersuchten und in diesem Zusammenhang wesentlichen Nullstellen- und Monotonieverhaltens $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen konnte ferner bewiesen werden, dass es im nichtsphärischen Fall auch $l_{n,p}$ -symmetrische Verteilungen gibt, deren zugehörige charakteristische Funktionen nicht global von einem charakteristischen Generator und einem assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktional erzeugt werden. Durch die Einführung des geometrisch motivierten Begriffs eines lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionals sowie eines lokal-charakteristischen Generators ist es in Abschnitt 5.4 aber gelungen, auch im Falle eines nicht existenten globalen charakteristischen Generators lokal-geometrische Beschreibungen der entsprechenden charakteristischen Funktion angeben zu können. So besitzt beispielsweise die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ der p -verallgemeinerten Normalverteilung im Falle $p > 2$ keinen globalen charakteristischen Generator, vgl. mit Theorem 5.20. Mit Theorem 5.24 wird $\tau_{n,p}$ jedoch auf dem gesamten Definitionsbereich von lokal-charakteristischen Generatoren und assoziierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionalen erzeugt.

Die in dieser Arbeit angegebenen Beschreibungen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen können u.a. auch dazu verwendet werden, um die Familie der $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen mit anderen Familien multivariater Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu vergleichen und auf gemeinsame Vertreter zu untersuchen. Dies gilt in erster Linie für solche Familien multivariater Wahrscheinlichkeitsverteilungen, deren zugehörige charakteristische Funktionen hinreichend bekannt sind. Als Beispiele seien hier die charakteristischen Funktionen der Familien symmetrisch α -stabiler und α -symmetrischer Verteilungen genannt, welche stets als Komposition eines positiv homogenen Funktionals und eines skalaren charakteristischen Generators darstellbar sind, vgl. mit den Abschnitten 1.5 und 1.6. Mithilfe von Theorem 5.4 konnte in diesem Zusammenhang erstmals gezeigt werden, dass eine Vielzahl von wichtigen $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen wie die p -verallgemeinerte Normalverteilung, die p -verallgemeinerte Gleichverteilung $\omega_{n,p}$ oder die p -verallgemeinerte t -Verteilung weder stabil noch α -symmetrisch sind. Die α -symmetrischen Verteilungen weisen stattdessen unter bestimmten Bedingungen eine Verwandtschaft zu $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen auf, welche sich aus der Proportionalität einer stetig positiv

definiten α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichte zu einer $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktion ergibt und als Adjungiertheit bezeichnet wird. In Kapitel 6 wurde eine solche Familie von adjungierten α -symmetrischen und $l_{n,p}$ -symmetrischen Verteilungen angegeben und u.a. für die Herleitung neuer Beispiele explizit darstellbarer α -symmetrischer charakteristischer Funktionen verwendet. Die Ausführungen in Abschnitt 6.4 haben ferner gezeigt, dass die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten der genannten Familie von α -symmetrischen Verteilungen in Analogie zu den $l_{n,p}$ -symmetrischen charakteristischen Funktionen von assoziierten verallgemeinerten Radiusfunktionalen sowie skalaren dichtegenerierenden Funktionen erzeugt werden. Die in Kapitel 5 aufgezeigten geometrischen Strukturen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen spiegeln sich somit auch in stetig positiv definiten α -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichten wider.

Mithilfe des probabilistischen Ansatzes der Adjungiertheit von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist in Kapitel 6 darüber hinaus auch erstmals im Falle $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ ein α -Analogon der erzeugenden stochastischen Darstellung sphärischer Verteilungen für eine Familie von α -symmetrischen Verteilungen hergeleitet worden, welche unter anderem die stabilen α -symmetrischen Verteilungen beinhaltet.

A.2 Ausblick

Aus den Betrachtungen dieser Arbeit haben sich einige offene Probleme und Anknüpfungspunkte ergeben, welche zum einen von Interesse für ein weitergehendes Studium der geometrischen Eigenschaften $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen sind, aber welche auch zum anderen den geometrisch geprägten Rahmen dieser Arbeit verlassen.

Zur zweiten Kategorie von zukünftigen Aufgaben bzw. Fragestellungen zählt die in Abschnitt 4.4 angesprochene Formulierung von Bedingungen, unter denen ein Schemata von u.i.v. infinitesimalen Zufallsgrößen für $p \in (0, 1]$ die p -verallgemeinerte Normalverteilung als Grenzverteilung besitzt. Aus der in diesem Fall gegebenen unbegrenzten Teilbarkeit der p -verallgemeinerten Normalverteilung entsteht zudem ein Anwendungspotential dieser Verteilung für die stochastische Modellbildung in Bereichen wie der Biologie oder der Versicherungsmathematik, in denen ein Interesse an Zufallsvariablen besteht, welche als Summen unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen aufgefasst werden können. Des Weiteren ist mit den erfolgten Nullstellenuntersuchungen charakteristischer Funktionen die Grundlage für die Verwendung von charakteristischen Funktionen wie z.B. $\varphi_{1,n,p}$ oder τ_p in statistischen Verfahren gelegt worden, vgl. hierzu auch mit Abschnitt 3.4. Die konkrete Anwendung dieser Funktionen ist aber ebenfalls als ein zukünftiger Anknüpfungspunkt anzusehen, welcher über den geometrisch bestimmten Leitgedanken dieser Arbeit hinausgeht.

Im Rahmen der geometrischen Beschreibung $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Niveaumengen ist die zukünftige Beantwortung der in Abschnitt 5.3 formulierten Frage wünschenswert, ob es auch nicht-sphärische $l_{n,p}$ -symmetrische charakteristische Funktionen gibt, welche nicht die Monotoniebedingungen aus Theorem 5.15 erfüllen und sich dennoch (global) in ein assoziiertes verallgemeinertes Radiusfunktional und einen charakteristischen Generator zerlegen lassen. Darüber hinaus stellt auch die explizite Angabe weiterer Beispiele $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen mit derartigen (global gültigen) Zerlegungseigenschaften ein wichtiges offenes Problem dar. Dies gilt ebenso für die Angabe von Beispielen $l_{n,p}$ -symmetrischer charakteristischer Funktionen, welche analog zu $\tau_{n,p}$ im gesamten Definitionsbereich von lokal-verallgemeinerten Radiusfunktionalen und lokal-charakteristischen Generatoren erzeugt werden.

Im Zusammenhang mit einer fortgeführten Untersuchung und Beschreibung der α -symmetrischen Verteilungen ist es überdies erstrebenswert, weitere Vertreter der in Abschnitt 6.4 betrachteten Familie adjungierter α -symmetrischer und $l_{n,\alpha}$ -symmetrischer Verteilungen durch die explizite Darstellung der zugehörigen α -symmetrischen charakteristischen Funktionen bzw. $l_{n,p}$ -symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichten zu spezifizieren.

Anhang B: Beweise

Beweis von Lemma 1.32. Zum Beweis der Behauptung durch Widerspruch nehmen wir an, dass (1.22) für $t_1 < t_2$ und ein $c \in \mathbb{C}$ gilt. Dann existiert ein maximales Intervall $[y_1, y_2] \supset [t_1, t_2]$ so, dass

$$\varphi(t) = c \quad , \quad t \in [y_1, y_2] . \quad (8.1)$$

Aus der Ganzheit von φ folgt

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(y_2)}{k!} (t - y_2)^k \quad , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

wobei φ auf \mathbb{R} mit der holomorphen Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(y_2)}{k!} (z - y_2)^k \quad , \quad z \in \mathbb{C} ,$$

übereinstimmt, vgl. mit Theorem 1.27. Für die erste Ableitung von φ gilt ferner

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k+1)}(y_2)}{k!} (t - y_2)^k \quad , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

d.h. φ' stimmt auf \mathbb{R} mit der holomorphen Funktion $f' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ überein, wobei

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k+1)}(y_2)}{k!} (z - y_2)^k \quad , \quad z \in \mathbb{C} .$$

Die Gültigkeit von (8.1) impliziert nun, dass sowohl φ' als auch f' eine Nullstelle in y_2 besitzen. Falls es sich hierbei nicht um eine isolierte Nullstelle von f' handelt, so sind f' und φ' mit Theorem 1.31 konstante Funktionen, womit ein Widerspruch zur Maximalität des Intervalls $[y_1, y_2]$ in (8.1) vorliegt. Im Falle der Isoliertheit von y_2 existiert ferner ein $\delta > 0$ so, dass

$$f'(z) \neq 0 \quad , \quad z \in B_\delta(y_2) \setminus \{y_2\} ,$$

bzw.

$$\varphi'(t) \neq 0 \quad , \quad t \in (y_2 - \delta, y_2 + \delta) . \quad (8.2)$$

Mit (8.2) liegt nun ein Widerspruch zur Konstanz von φ auf $[y_1, y_2]$ vor, vgl. mit (8.1). Die Gültigkeit von (1.22) ist somit widerlegt. □

Beweis von Lemma 2.8. Der Beweis der Behauptung ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil zeigen wir, dass durch $\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im \mathbb{R}^n definiert ist. Anschließend wird im zweiten Teil bewiesen, dass $(\Theta_1^p, \dots, \Theta_{n-1}^p)^T \sim D_n \left(\frac{m_1}{p}, \dots, \frac{m_{n-1}}{p}, \frac{m_n}{p} \right)$, falls $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$ die Verteilung $\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ besitzt.

1. Teil: Nach Voraussetzung ist $\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ nichtnegativ auf \mathfrak{B}_n sowie $\vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}(\emptyset) = 0$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\int_{S_{n,p}^+} \prod_{i=1}^n \theta_i^{m_i-1} \mathfrak{D}_{n,p}(d\theta) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)}{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{m_1+\dots+m_n}{p}\right)} .$$

Sei hierzu $U = (U_1, \dots, U_n)^T$ ein Zufallsvektor mit $U \sim \omega_{n,p}$. Dann ist

$$\int_{S_{n,p}^+} \prod_{i=1}^n \theta_i^{m_i-1} \mathfrak{D}_{n,p}(d\theta) = \mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}^+) \cdot \mathbb{E} \prod_{i=1}^n |U_i|^{m_i-1},$$

wobei aus (Richter, 2007) folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}^+) &= 2^{-n} \cdot \mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}) \\ &= \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)}{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun (durch analoge Vorgehensweise wie in Korollar 2.7 aus (Arellano-Valle u. Richter, 2012)) das gemischte Moment $\mathbb{E} \prod_{i=1}^n |U_i|^{m_i-1}$ und zeigen, dass

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n |U_i|^{m_i-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+\dots+m_n}{p}\right)} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right).$$

Sei hierzu $X = (X_1, \dots, X_n)^T \sim N_{n,p}$. Dann ist

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n |U_i|^{m_i-1} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n |X_i|^{m_i-1} / (\mathbb{E}|X|_p^{m_1+\dots+m_n-n}), \quad (8.3)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_1|^{m_1-1} &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty x^{m_1-1} \exp\left(-\frac{x^p}{p}\right) dx \\ &= \frac{p^{\frac{m_1-1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{m_1}{p}-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{p^{\frac{m_1-1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \Gamma\left(\frac{m_1}{p}\right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Hierbei wurde die Integrationsvariable x in (8.4) durch $y = x^p/p$ substituiert. Wir erhalten somit für die u.i.v. Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n , dass

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n |X_i|^{m_i-1} = \frac{p^{\frac{m_1+\dots+m_n-n}{p}}}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right). \quad (8.5)$$

Auf der anderen Seite gilt mit Theorem 1.10, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|_p^{m_1+\dots+m_n-n} &= \frac{p^{1-\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^\infty r^{m_1+\dots+m_n-1} \exp\left(-\frac{r^p}{p}\right) dr \\ &= \frac{p^{\frac{m_1+\dots+m_n-n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{m_1+\dots+m_n}{p}-1} e^{-y} dy \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$= \frac{p^{\frac{m_1+\dots+m_n-n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \Gamma\left(\frac{m_1+\dots+m_n}{p}\right), \quad (8.7)$$

wobei die Integrationsvariable r in (8.6) durch $y = r^p/p$ substituiert wurde. Der erste Teil der Behauptung folgt nun aus (8.3), (8.5) und (8.7).

2. Teil: Seien $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)^T$ und $U = (U_1, \dots, U_n)^T$ zwei Zufallsvektoren mit $\Theta \sim \vartheta_{n,p,m_1,\dots,m_n}$ und $U \sim \omega_{n,p}$. Seien zudem $m := m_1 + \dots + m_n$, $\Theta_{(n-1)} := (\Theta_1, \dots, \Theta_{n-1})^T$, $U_{(n-1)}^+ := (|U_1|, \dots, |U_{n-1}|)^T$ und $A \in \mathfrak{B}_{n-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(\Theta_{(n-1)} \in A) &= \frac{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} \int_{S_{n,p}^+} \mathbb{I}_A((\theta_1, \dots, \theta_{n-1})^T) \prod_{i=1}^n \theta_i^{m_i-1} \mathfrak{D}_{n,p}(d(\theta_1, \dots, \theta_n)^T) \\ &= \frac{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} \mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}^+) \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_A(U_{(n-1)}^+) \left(1 - |U_{(n-1)}^+|_p\right)^{\frac{m_{n-1}}{p}-1} \prod_{i=1}^{n-1} |U_i|^{m_i-1} \right] \\ &= \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_A(U_{(n-1)}^+) \left(1 - |U_{(n-1)}^+|_p\right)^{\frac{m_{n-1}}{p}-1} \prod_{i=1}^{n-1} |U_i|^{m_i-1} \right], \end{aligned}$$

denn

$$\mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p}^+) = \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)}{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)},$$

vgl. mit dem 1. Teil und (Richter, 2007). Hierbei folgt aus Beispiel 1.14, dass der Zufallsvektor $U_{(n-1)}^+$ absolutstetig verteilt ist mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(u) = \frac{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} (1 - |u|_p^p)^{\frac{1}{p}-1}, \quad u \in K_{n-1,p}^{+\circ}.$$

Wir erhalten somit

$$P(\Theta_{(n-1)} \in A) = \frac{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} \int_{A \cap K_{n-1,p}^{+\circ}} (1 - |u|_p^p)^{\frac{m_n}{p}-1} \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{m_i-1} du, \quad A \in \mathfrak{B}_{n-1},$$

d.h. der Zufallsvektor $\Theta_{(n-1)}$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\tilde{f}(u) = \frac{p^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} (1 - |u|_p^p)^{\frac{m_n}{p}-1} \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{m_i-1}, \quad u \in K_{n-1,p}^{+\circ}. \quad (8.8)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsvektors $(\Theta_1^p, \dots, \Theta_{n-1}^p)^T$ ergibt sich nun durch die Anwendung der Dichtetransformationsformel (siehe Abschnitt 2.2.5. in (Anderson, 2003)) auf die in (8.8) dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichte. Sei hierzu $T : K_{n-1,p}^{+\circ} \rightarrow K_{n-1,1}^{+\circ}$ definiert durch

$$T((x_1, \dots, x_{n-1})^T) := (x_1^p, \dots, x_{n-1}^p)^T, \quad (x_1, \dots, x_{n-1})^T \in K_{n-1,p}^{+\circ}.$$

Dann ist T bijektiv und die Funktionaldeterminante J_T von T genügt der Darstellung

$$J_T((x_1, \dots, x_{n-1})^T) = p^{1-n} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\frac{1}{p}-1}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1})^T \in K_{n-1,1}^{+\circ}.$$

Der Zufallsvektor $(\Theta_1^p, \dots, \Theta_{n-1}^p)^T$ besitzt daher die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\hat{f}(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{p}\right)} (1 - |u|_1)^{\frac{m_n}{p}-1} \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{\frac{m_i}{p}-1}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \in K_{n-1,1}^{+\circ},$$

d.h. $(\Theta_1^p, \dots, \Theta_{n-1}^p)^T \sim D_n\left(\frac{m_1}{p}, \dots, \frac{m_{n-1}}{p}, \frac{m_n}{p}\right)$. □

Beweis von Theorem 2.12. Wir verfahren analog zum Beweis von Theorem 2.9:

1. Schritt: Für die charakteristische Funktion von $Y = (\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T})^T$ gilt mit Satz 6.2.2 aus (Schürger, 1998), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, Y \rangle) &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left\langle t, \left(\Theta_1 U^{(1)T}, \dots, \Theta_k U^{(k)T} \right)^T \right\rangle \right) \middle| \Theta \right] \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^k \varphi_{n_i, m_i, p} \left(\Theta_i t^{(i)} \right) \\ &= \frac{p^{k-1} \Gamma \left(\frac{m}{p} \right)}{\prod_{i=1}^k \Gamma \left(\frac{m_i}{p} \right)} \int_{S_{k,p}^+} \prod_{i=1}^k \left(\varphi_{n_i, m_i, p} \left(\theta_i t^{(i)} \right) \theta_i^{m_i-1} \right) \mathfrak{D}_{k,p}(d\theta) \quad , t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \dots \\ t^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

2. Schritt: Sei $X \sim N_{n,p}$. Dann folgt aus den Theoremen 2.5 und 1.10, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma \left(\frac{m}{p} \right)} \int_0^\infty \varphi_{n,m,p}(rt) r^{m-1} \exp \left(-\frac{r^p}{p} \right) dr \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{p^{1-\frac{m_i}{p}}}{\Gamma \left(\frac{m_i}{p} \right)} \int_0^\infty \varphi_{n_i, m_i, p}(r t^{(i)}) r^{m_i-1} \exp \left(-\frac{r^p}{p} \right) dr \\ &= \frac{p^{k-\frac{m}{p}}}{\prod_{i=1}^k \Gamma \left(\frac{m_i}{p} \right)} \int_{\mathbb{R}_{>0}^k} \exp \left(-\frac{|y|_p^p}{p} \right) \prod_{i=1}^k \varphi_{n_i, m_i, p} \left(y_i t^{(i)} \right) y_i^{m_i-1} dy \quad , t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \dots \\ t^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

Die Einführung $l_{k,p}$ -sphärischer Koordinaten (und die Anwendung von (1.15)) im zuletzt betrachteten Integral ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp(i\langle t, X \rangle) &= \frac{p^{k-\frac{m}{p}}}{\prod_{i=1}^k \Gamma \left(\frac{m_i}{p} \right)} \int_0^\infty \int_{S_{k,p}^+} r^{m-1} \exp \left(-\frac{r^p}{p} \right) \prod_{i=1}^k \left(\varphi_{n_i, m_i, p} \left(r \theta_i t^{(i)} \right) \theta_i^{m_i-1} \right) \mathfrak{D}_{k,p}(d\theta) dr \\ &= \frac{p^{1-\frac{m}{p}}}{\Gamma \left(\frac{m}{p} \right)} \int_0^\infty \mathbb{E} \exp(i\langle rt, Y \rangle) r^{m-1} \exp \left(-\frac{r^p}{p} \right) dr \\ &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left(\exp(i\langle R_p t, Y \rangle) \middle| R_p \right) \\ &= \mathbb{E} \exp(i\langle t, R_p Y \rangle) \quad , t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \dots \\ t^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n , \end{aligned} \tag{8.9}$$

wobei R_p verteilt ist wie der p -verallgemeinerte Radius $|Z|_p$ eines Zufallsvektors $Z \sim N_{m,p}$ und R_p und Y stochastisch unabhängig sind. Hierbei wurde erneut Satz 6.2.2 aus (Schürger, 1998) angewendet.

3. Schritt: Für den p -verallgemeinerten Radius $R_p = |Z|_p$ eines Zufallsvektors $Z \sim N_{m,p}$ gilt mit (8.9), dass

$$R_p Y \stackrel{d}{=} R_p U ,$$

sofern $U \sim \omega_{n,m,p}$ und R_p stochastisch unabhängig von (U, Y) ist. Es ist zudem $P(|Y_i| \leq 1) = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, und

$$\mathbb{E} R_p^l = \frac{p^{\frac{l}{p}}}{\Gamma \left(\frac{m}{p} \right)} \Gamma \left(\frac{l+m}{p} \right) \quad , l \in \mathbb{N} ,$$

vgl. mit (8.7). Wir erhalten nun mit Lemma 2.7, dass

$$Y \stackrel{d}{=} U .$$

□

Beweis von Lemma 3.2. Gleichung (3.6) folgt sofort aus der in Beispiel 1.14 angeführten Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte von $\omega_{k,n,p}$. Darüber hinaus ergibt sich (3.5) aus der in Theorem 1.21 angegebenen Darstellung des p -verallgemeinerten Oberflächeninhaltes $\mathfrak{D}_{n,p}$ und der Tatsache, dass

$$\begin{aligned}\omega_{n,p}(D) &= \frac{\mathfrak{D}_{n,p}(D)}{\mathfrak{D}_{n,p}(S_{n,p})} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) p^{n-1}}{2^n \Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \mathfrak{D}_{n,p}(D) \quad , D \in \mathfrak{B}_{n,p} ,\end{aligned}$$

vgl. mit (Richter, 2007). Für den Beweis von (3.4) betrachten wir einen Zufallsvektor $U = (U_1, \dots, U_n)^T$ mit $U \sim \omega_{n,p}$. Für diesen ist

$$\begin{aligned}\varphi_{n,p}(t) &= \mathbb{E} \cos(t_1 U_1 + \dots + t_n U_n) \\ &= \mathbb{E} \cos(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \cos(t_n U_n) - \mathbb{E} \sin(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \sin(t_n U_n) \\ &= \mathbb{E} \cos(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \cos(t_n U_n) \quad , t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n ,\end{aligned}\tag{8.10}$$

wobei Gleichung (8.10) eine Folgerung aus der Invarianz von $\varphi_{n,p}$ gegenüber Multiplikationen des Funktionsargumentes mit Signaturmatrizen ist, vgl. mit (1.19). Hiermit ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sin(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \sin(t_n U_n) &= \mathbb{E} \sin(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \sin(-t_n U_n) \\ &= -\mathbb{E} \sin(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \sin(t_n U_n) \\ &= 0 \quad , t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n .\end{aligned}$$

Aus der Symmetrie des Kosinus (zur y -Achse), Gleichung (8.10) sowie aus der in Beispiel 1.14 angegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtedarstellung von $\omega_{n-1,n,p}$ ergibt sich nun für $t = (t_1, \dots, t_n)^T = (t_{(n-1)}^T, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned}\varphi_{n,p}(t) &= \mathbb{E} \cos(t_1 U_1 + \dots + t_{n-1} U_{n-1}) \cos\left(t_n \left(1 - |(U_1, \dots, U_{n-1})^T|_p^p\right)^{1/p}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1}}{\Gamma^n\left(\frac{1}{p}\right)} \int_{K_{n-1,p}^\circ} \cos(\langle t_{(n-1)}, u \rangle) \cos\left(t_n \left(1 - |u|_p^p\right)^{1/p}\right) \left(1 - |u|_p^p\right)^{\frac{1}{p}-1} du .\end{aligned}$$

□

Beweis von Theorem 3.7. Aus der in (1.12) dargestellten Verteilungsinvarianz p -verallgemeinert gleichverteilter Zufallsvektoren gegenüber Multiplikationen mit Signaturmatrizen und Lemma 3.6 folgt

$$\frac{\partial \varphi_{n,p}}{\partial t_i}(t) = 2^n \int_{M_n^{**}} \frac{\sin(\langle t, SPH_p(1, \phi) \rangle) J^*(SPH_p)(\phi)}{2 \cdot c(n, 1, n-1, p)} x_i(1, \phi) d\phi \quad , t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ,\tag{8.11}$$

sowie

$$\frac{\partial \varphi_{k,n,p}}{\partial y_j}(y) = 2^k \int_{K_{k,p}^{+\circ}} \frac{\sin(\langle y, u \rangle) \left(1 - |u|_p^p\right)^{\frac{n-k}{p}-1}}{c(n, 1, k, p)} u_j du \quad , y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k ,\tag{8.12}$$

falls $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ und $M_n^{**} := [0, \pi/2)^{\times(n-2)} \times [0, \pi)$. Mithilfe von (8.11) und (8.12) lässt sich nun in analoger Weise zum Beweis von Theorem 3.4 zeigen, dass für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, k\}$ die folgenden Aussagen gelten:

- (a) Für $p > 1$ ist $\frac{\partial \varphi_{n,p}}{\partial t_i}(t) < 0$, falls $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in K_{n,q(p)}^+(\pi) \setminus \{0_n\}$;

(b) Für $p \in (0, 1]$ ist $\frac{\partial \varphi_{n,p}}{\partial t_i}(t) < 0$, falls $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in (0, \pi]^n$;

(c) Für $p > 1$ ist $\frac{\partial \varphi_{k,n,p}}{\partial t_j}(t) < 0$, falls $t = (t_1, \dots, t_k)^T \in K_{k,q(p)}^+(\pi) \setminus \{0_k\}$;

(d) Für $p \in (0, 1]$ ist $\frac{\partial \varphi_{k,n,p}}{\partial t_j}(t) < 0$, falls $t = (t_1, \dots, t_k)^T \in (0, \pi]^k$.

Aus der Konvexität sowie der Invarianz gegenüber Multiplikationen mit Signaturmatrizen von $K_{l,q(p)}$ im Falle $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p > 1$ folgt zudem, dass mit $(t_1, \dots, t_l)^T \in K_{l,q(p)}^+$ auch $(rt_1, t_2, \dots, t_l)^T$, $(rt_1, rt_2, t_3, \dots, t_l)^T$, \dots , $(rt_1, \dots, rt_l)^T \in K_{l,q(p)}^+$, sofern $r \in [0, 1]$, $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $p > 1$. Für $p > 1$ gilt daher unter Berücksichtigung von (a), dass

$$\begin{aligned} \varphi_{n,p}(r(t_1, \dots, t_n)^T) &\geq \varphi_{n,p}((rt_1, \dots, rt_{n-1}, t_n)^T) \\ &\geq \varphi_{n,p}((rt_1, \dots, rt_{n-2}, t_{n-1}, t_n)^T) \\ &\quad \dots \\ &\geq \varphi_{n,p}((t_1, \dots, t_n)^T) \quad , \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in K_{n,q(p)}^+(\pi), r \in [0, 1), \end{aligned}$$

bzw. dass

$$\varphi_{n,p}(r(t_1, \dots, t_n)^T) > \varphi_{n,p}((t_1, \dots, t_n)^T) \quad , \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} \in K_{n,q(p)}^+(\pi) \setminus \{0_n\}, r \in [0, 1). \quad (8.13)$$

In Analogie hierzu ergibt sich für $p > 1$ aus (c), dass

$$\begin{aligned} \varphi_{k,n,p}(r(y_1, \dots, y_k)^T) &\geq \varphi_{k,n,p}((ry_1, \dots, ry_{k-1}, y_k)^T) \\ &\geq \varphi_{k,n,p}((ry_1, \dots, ry_{k-2}, y_{k-1}, y_k)^T) \\ &\quad \dots \\ &\geq \varphi_{k,n,p}((y_1, \dots, y_k)^T) \quad , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} \in K_{k,q(p)}^+(\pi), r \in [0, 1), \end{aligned}$$

bzw. dass

$$\varphi_{k,n,p}(r(y_1, \dots, y_k)^T) > \varphi_{k,n,p}((y_1, \dots, y_k)^T) \quad , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} \in K_{k,q(p)}^+(\pi) \setminus \{0_k\}, r \in [0, 1). \quad (8.14)$$

Die Behauptungen (i) und (iii) folgen nun aus (8.13), (8.14) sowie aus der Invarianz von $\varphi_{n,p}$ gegenüber Multiplikationen des Funktionsargumentes mit Signaturmatrizen, vgl. mit (1.19). Die Behauptungen (ii) und (iv) können überdies in analoger Weise aus den Aussagen (b) und (d) geschlussfolgert werden.

Für den Beweis der Behauptung (v) betrachten wir die in Lemma 3.6 mithilfe eines Integrals dargestellte zweite Ableitung der Funktion $\varphi_{1,n,p}$. Der zugehörige Integrand ist hierbei für $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ μ_1 -f.ü. negativ, denn

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)} \cos(ut) u^2 (1 - |u|^p)^{\frac{n-1}{p}-1} < 0 \quad , \quad u \in (-1, 1) \setminus \{0\}, t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,n,p}$ ist somit streng konkav auf $[-\pi/2, \pi/2]$. □

Beweis von Lemma 3.11. Der Beweis der Behauptung erfolgt unter Verwendung von Darstellung (3.14) durch vollständige Induktion für $m \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsanfang betrachten wir zunächst die Fälle $m = 0$ und $m = 1$. Während die Behauptung für $m = 0$ direkt aus (3.14) folgt, gilt im Falle $m = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{1,n,p}}{\partial t}(t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{1+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + l\right)} \frac{2l t^{2l-1}}{l! 4^l} \\ &= \frac{(-1) \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{2 \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \cdot t \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{3+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + l\right)} \frac{t^{2l}}{l! 4^l} \\ &= \frac{(-1) \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \cdot t \cdot {}_1\psi_2 \left(\left(\frac{m+2}{p}, \frac{2}{p} \right); \left(\frac{m+n+1}{p}, \frac{2}{p} \right), \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{t^2}{4} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Im Induktionsschritt wird nun zuerst der Fall betrachtet, dass $m/2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Hier ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \varphi_{1,n,p}}{\partial t^m}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{2 \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{m+1+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + l\right)} \frac{t^{2l+1}}{l! 4^l} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{m+1+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + l\right)} \frac{t^{2l}}{l! 4^l} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} {}_1\psi_2 \left(\left(\frac{m+1}{p}, \frac{2}{p} \right); \left(\frac{m+n}{p}, \frac{2}{p} \right), \left(\frac{1}{2}, 1 \right); -\frac{t^2}{4} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Im Falle $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $m/2 \notin \mathbb{N}$, gilt ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \varphi_{1,n,p}}{\partial t^m}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{m+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1+n+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + l\right)} \frac{t^{2l}}{l! 4^l} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{m+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1+n+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + l\right)} \frac{2l t^{2l-1}}{l! 4^l} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \sqrt{\pi}}{2 \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{m+2+2l}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1+n+2l}{p}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + l\right)} \frac{t^{2l+1}}{l! 4^l} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) t}{(-1)^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} {}_1\psi_2 \left(\left(\frac{m+2}{p}, \frac{2}{p} \right); \left(\frac{m+n+1}{p}, \frac{2}{p} \right), \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{t^2}{4} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Beweis von Theorem 3.13. Im Beweis von Theorem 3.4 wurde bereits gezeigt, dass

$$\text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) = 1, \quad t \in (0, \pi/2).$$

Wir betrachten daher für den Beweis der Behauptung nur das Vorzeichen von $\varphi_{1,n,p}(t)$ im Falle $t \in \cup_{j=1}^{\infty} (j\pi, j\pi + \frac{\pi}{2})$. Seien hierzu $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\theta \in (0, 1)$ und $t := (k + \frac{\theta}{2}) \pi$. Dann folgt aus (3.7), dass

$$\varphi_{1,n,p}(t) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)} \int_0^1 \cos \left(z \left(k + \frac{\theta}{2} \right) \pi \right) (1 - z^p)^{\frac{n-1}{p} - 1} dz. \quad (8.15)$$

Die Substitution von $u = (2k + \theta)z$ in (8.15) ergibt zudem

$$\varphi_{1,n,p}(t) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right) (2k + \theta)^{n-p}} \int_0^{2k+\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du ,$$

d.h. es ist

$$\text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) = \text{sign} \left[\int_0^{2k+\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du \right] . \quad (8.16)$$

Für die Berechnung des Vorzeichens von $\varphi_{1,n,p}(t)$ führen wir die Zerlegung

$$\int_0^{2k+\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du = \sum_{j=1}^k (-1)^j v_j + (-1)^k v'_k \quad (8.17)$$

ein, wobei

$$(-1)^j v_j := \int_{2j-2}^{2j} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du \quad , \quad j \in \{1, \dots, k\} ,$$

und

$$(-1)^k v'_k := \int_{2k}^{2k+\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du .$$

Hierbei ist v'_k größer als Null, denn $\text{sign}(\cos(\frac{\pi}{2}u)) = (-1)^k$, $u \in (2k, 2k + \theta)$. Das Integral $(-1)^j v_j$ lässt sich für $j \in \{1, \dots, k\}$ zudem in zwei Teilintegrale $I_{1,j}$ und $I_{2,j}$ so zerlegen, dass

$$(-1)^j v_j = \underbrace{\int_{2j-2}^{2j-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du}_{=: I_{1,j}} + \underbrace{\int_{2j-1}^{2j} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) ((2k + \theta)^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du}_{=: I_{2,j}} .$$

Die Substitution von $y = -u + 2j - 1$ im Integral $I_{1,j}$ ergibt nun auf der einen Seite, dass

$$\begin{aligned} I_{1,j} &= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}(2j-1-y)\right) ((2k + \theta)^p - (2j-1-y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy \\ &= (-1)^j \int_0^1 -\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) ((2k + \theta)^p - (2j-1-y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy \quad , \quad j \in \{1, \dots, k\} . \end{aligned} \quad (8.18)$$

Auf der anderen Seite erhalten wir durch die Substitution von $y = u - 2j + 1$ im Integral $I_{2,j}$, dass

$$\begin{aligned} I_{2,j} &= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}(2j-1+y)\right) ((2k + \theta)^p - (2j-1+y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy \\ &= (-1)^j \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) ((2k + \theta)^p - (2j-1+y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy \quad , \quad j \in \{1, \dots, k\} . \end{aligned} \quad (8.19)$$

Aus (8.18) und (8.19) folgt nun, dass

$$v_j = (-1)^j (I_{1,j} + I_{2,j}) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \eta(j, y) dy \quad , \quad j \in \{1, \dots, k\} ,$$

wobei η eine auf $A_k := [1, k] \times (0, 1)$ definierte nichtnegative Funktion ist mit

$$\eta(x, y) := ((2k + \theta)^p - (2x - 1 + y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} - ((2k + \theta)^p - (2x - 1 - y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1}, \quad (x, y) \in A_k.$$

Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y) &= 2(p+1-n) \left[(2x-1+y)^{p-1} ((2k+\theta)^p - (2x-1+y)^p)^{\frac{n-1}{p}-2} \right. \\ &\quad \left. - (2x-1-y)^{p-1} ((2k+\theta)^p - (2x-1-y)^p)^{\frac{n-1}{p}-2} \right] \\ &\geq 0, \quad (x, y) \in A_k, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\eta(j+1, y) \geq \eta(j, y) \geq 0$ für $y \in (0, 1)$ und $(j, j+1) \in \{1, \dots, k\}^{\times 2}$. Hiermit folgt aber auch, dass $v_k \geq v_{k-1} \geq v_{k-2} \geq \dots \geq v_1 \geq 0$. Wir erhalten nun aus (8.16) und (8.17), dass

$$\begin{aligned} \text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) &= \text{sign}\left((-1)^k (v'_k + (v_k - v_{k-1}) + (v_{k-2} - v_{k-3}) + \dots)\right) \\ &= (-1)^k. \end{aligned}$$

□

Beweis von Theorem 3.14. Für den Beweis der Behauptung betrachten wir das Vorzeichen von $\varphi_{1,n,p}(t)$ im Falle $t = (k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Hierbei folgt aus (3.7), dass

$$\varphi_{1,n,p}(t) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)} \int_0^1 \cos(z(k+1)\pi) (1-z^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dz.$$

Die Substitution von $u = (2k+2)z$ im zuletzt betrachteten Integral ergibt

$$\varphi_{1,n,p}(t) = \frac{p \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right) w^{n-p}} \int_0^{2k+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) (w^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du,$$

wobei $w := (2k+2)$. Es ist daher

$$\begin{aligned} \text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) &= \text{sign}\left(\int_0^{2k+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) (w^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du\right) \\ &= \text{sign}\left(\sum_{j=0}^k \underbrace{\int_{2j}^{2j+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) (w^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du}_{=: v_j}\right). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Wir bestimmen nun das Vorzeichen von v_j für $j \in \{0, \dots, k\}$ und nutzen hierbei aus, dass

$$\begin{aligned} v_j &= \underbrace{\int_{2j}^{2j+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) (w^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du}_{=: I_{1,j}} + \underbrace{\int_{2j+1}^{2j+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) (w^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du}_{=: I_{2,j}} \\ &= \int_0^1 \cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2} - y\frac{\pi}{2}\right) (w^p - (2j+1-y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy \\ &\quad + \int_0^1 \cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2} + y\frac{\pi}{2}\right) (w^p - (2j+1+y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy, \end{aligned} \quad (8.21)$$

wobei sich Gleichung (8.21) durch die Substitution von $y = 2j + 1 - u$ im Integral $I_{1,j}$ bzw. von $y = u - 2j - 1$ im Integral $I_{2,j}$ ergibt. Aus (8.21) folgt nun, dass

$$\text{sign}(v_j) = \cos(j\pi) = (-1)^j \quad , \quad j \in \{0, \dots, k\}, \quad (8.22)$$

denn

$$\cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2} - y\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2} + y\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad y \in (0, 1), \quad j \in \{0, \dots, k\},$$

und

$$(w^p - (2j+1-y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} > (w^p - (2j+1+y)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} \geq 0 \quad , \quad y \in (0, 1), \quad j \in \{0, \dots, k\}.$$

Im Falle $k = 0$ (d.h. $t = \pi$) folgt die Behauptung aus (8.22). Für $k \geq 1$ vergleichen wir nun die Beträge von v_0, v_1, \dots, v_k . Sei hierzu $j \in \{1, \dots, k\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} v_{j-1} &= \int_{2j-2}^{2j} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) (w^p - u^p)^{\frac{n-1}{p}-1} du \\ &= \int_{2j}^{2j+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}y - \pi\right) (w^p - (y-2)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy \\ &= - \int_{2j}^{2j+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) (w^p - (y-2)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} dy, \end{aligned} \quad (8.23)$$

wobei sich Gleichung (8.23) durch die Substitution von $y = u + 2$ ergibt. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} v_j + v_{j-1} &= \int_{2j}^{2j+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \eta_j(y) dy \\ &= \underbrace{\int_{2j}^{2j+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \eta_j(y) dy}_{=: I_{3,j}} + \underbrace{\int_{2j+1}^{2j+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \eta_j(y) dy}_{=: I_{4,j}}, \end{aligned}$$

wobei

$$\eta_j(y) = (w^p - y^p)^{\frac{n-1}{p}-1} - (w^p - (y-2)^p)^{\frac{n-1}{p}-1} < 0 \quad , \quad y \in (2j, 2j+2).$$

Es ist zudem

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial y}(y) = (n-p-1) \left[(y-2)^{p-1} (w^p - (y-2)^p)^{\frac{n-1}{p}-2} - y^{p-1} (w^p - y^p)^{\frac{n-1}{p}-2} \right] < 0 \quad , \quad y \in (2j, 2j+2).$$

In Analogie zum Vergleich der Integrale $I_{1,j}$ und $I_{2,j}$ ergibt sich nun für $I_{3,j}$ und $I_{4,j}$, dass

$$|I_{4,j}| > |I_{3,j}| > 0.$$

Hiermit ist $\text{sign}(v_j + v_{j-1}) = -\cos((j+1)\pi) = (-1)^j = \text{sign}(v_j)$, d.h. $|v_k| > |v_{k-1}| > \dots > |v_0|$. Aus den Gleichungen (8.20) und (8.22) folgt schließlich, dass

$$\text{sign}(\varphi_{1,n,p}(t)) = \text{sign}\left((-1)^k (|v_k| - |v_{k-1}|) + (|v_{k-2}| - |v_{k-3}|) + \dots\right) = (-1)^k.$$

□

Beweis von Theorem 3.17. Der Beweis der Behauptung erfolgt in 2 Schritten. Im ersten Schritt wird hierbei gezeigt, dass die charakteristische Funktion $\varphi_{1,4,1}$ positiv und streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist. Der zweite Schritt beinhaltet die Verallgemeinerung dieses Resultates für $n \geq 4$ mithilfe von Theorem 1 aus (Williamson, 1956).

1. Schritt: Aus Gleichung (3.7) folgt

$$\begin{aligned}\varphi_{1,4,1}(t) &= 3 \int_0^1 (1-z)^2 \cos(zt) \, dz \\ &= 3 \int_0^1 (1-2z+z^2) \cos(zt) \, dz \\ &= 3 \left(\int_0^1 \cos(zt) \, dz - 2 \underbrace{\int_0^1 z \cos(zt) \, dz}_{=: I_1} + \underbrace{\int_0^1 z^2 \cos(zt) \, dz}_{=: I_2} \right), \quad t > 0.\end{aligned}$$

Die partielle Integration ($u = z^2$, $v' = \cos(zt)$) im Integral I_2 ergibt hierbei, dass

$$\begin{aligned}I_2 &= \left[\frac{z^2}{t} \sin(zt) \right]_0^1 - \underbrace{\frac{2}{t} \int_0^1 z \sin(zt) \, dz}_{=: I_3} \\ &= \frac{1}{t} \sin(t) - \frac{2}{t} I_3.\end{aligned}$$

Wir erhalten nun mit erneuter partieller Integration ($u = z$, $v' = \sin(zt)$) im Integral I_3 , dass

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{t} \sin(t) - \frac{2}{t} \left(\left[-\frac{\cos(zt)}{t} z \right]_0^1 + \frac{1}{t} \int_0^1 \cos(zt) \, dz \right) \\ &= \frac{1}{t} \sin(t) + \frac{2 \cos(t)}{t^2} - \frac{2 \sin(t)}{t^3}.\end{aligned}\tag{8.24}$$

In analoger Weise ergibt sich

$$\begin{aligned}I_1 &= \left[\frac{z}{t} \sin(zt) \right]_0^1 - \frac{1}{t} \int_0^1 \sin(zt) \, dz \\ &= \frac{\sin(t)}{t} + \frac{\cos(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2}.\end{aligned}\tag{8.25}$$

Es folgt somit insgesamt aus (8.24) und (8.25), dass

$$\begin{aligned}\varphi_{1,4,1}(t) &= 3 \left(-\frac{2 \sin(t)}{t^3} + \frac{2}{t^2} \right) \\ &= -\frac{6}{t^3} (\sin(t) - t), \quad t > 0.\end{aligned}$$

Hiermit wird deutlich, dass $\varphi_{1,4,1}$ positiv auf \mathbb{R} ist, vgl. mit Theorem 3.15. Für die zugehörige erste Ableitung gilt zudem

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{1,4,1}}{\partial t}(t) &= -6 \frac{(\cos(t) - 1)t^3 - 3t^2(\sin(t) - t)}{t^6} \\ &= -\frac{6}{t^4} (t \cos(t) + 2t - 3 \sin(t)), \quad t > 0,\end{aligned}\tag{8.26}$$

wobei

$$\begin{aligned} t \cos(t) + 2t - 3 \sin(t) &\geq -t + 2t - 3 \\ &> 0 \quad , t > 3. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,4,1}$ ist daher mit Theorem 3.7, (8.26) und (8.27) streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

2. Schritt: Sei nun $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$. Dann folgt aus den Betrachtungen im Beweis von Theorem 3.15, dass $\varphi_{1,n,1}$ proportional zur stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte f einer Verteilung ist, deren zugehörige charakteristische Funktion ϕ die folgende Darstellung besitzt:

$$\phi(t) = I_{[-1,1]}(t) (1 - |t|)^{n-2} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Aus Theorem 1 in (Williamson, 1956) lässt sich ferner die Existenz einer nichtfallenden Funktion $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\gamma(0) = 0$ schlussfolgern, für welche

$$\phi(t) = \int_0^\infty I_{[0,1]}(ut) (1 - u|t|)^2 d\gamma(u) \quad , t \in \mathbb{R}_{\neq 0}.$$

Die Funktion $\varphi_{1,n,1}$ ist somit auf $\mathbb{R}_{>0}$ proportional zu

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(zx) \phi(z) dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(zx) I_{[0,1]}(uz) (1 - uz)^2 dz d\gamma(u) \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{(0,\infty)} \underbrace{\left(\int_0^\infty \cos\left(\frac{x}{u}y\right) I_{[0,1]}(y) (1 - y)^2 dy \right)}_{=1/2 \cdot \varphi_{1,4,1}(x/u)} u^{-1} d\gamma(u) \quad , x > 0, \quad (8.29)$$

wobei sich (8.29) durch die Substitution von $y = uz$ im inneren Integral von (8.28) ergibt. Die Behauptung folgt nun aus (8.29), Schritt 1 und den in (1.18) dargestellten Symmetrieeigenschaften von $\varphi_{1,n,1}$. □

Beweis von Lemma 4.2. Die Behauptung wird zunächst im Spezialfall $a \in \{e_1, \dots, e_n\}$ mithilfe von Theorem 1.29 gezeigt. Seien hierzu auf der einen Seite $p > 1$, $r > 0$, $\epsilon \in (0, 1)$ und $Y \sim N_p$. Dann ist

$$\epsilon \frac{x^p}{p} \geq rx, x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \left(\frac{rp}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r|Y|) &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(rx - \frac{x^p}{p}\right) dx \\ &\leq \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^{(rp/\epsilon)^{1/(p-1)}} \exp\left(rx - \frac{x^p}{p}\right) dx + \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_{(rp/\epsilon)^{1/(p-1)}}^\infty \exp\left(-(1-\epsilon)\frac{x^p}{p}\right) dx \\ &\leq \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^{(rp/\epsilon)^{1/(p-1)}} \exp\left(rx - \frac{x^p}{p}\right) dx + \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-(1-\epsilon)\frac{x^p}{p}\right) dx \\ &\leq \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{rp}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} \exp\left(r\left(\frac{rp}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right) + (1-\epsilon)^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Die charakteristische Funktion τ_p ist daher mit Theorem 1.29 ganzanalytisch. Seien nun auf der anderen Seite $\tilde{p} \in (0, 1]$, $\tilde{r} > 1/\tilde{p}$, $b \in \mathbb{R}$ und $Z \sim N_{\tilde{p}}$. Dann gilt

$$\exp\left(\tilde{r}x - \frac{(x-b)^{\tilde{p}}}{\tilde{p}}\right) = \exp\left(\tilde{r}x \left(1 - \frac{(x^{1-\frac{1}{\tilde{p}}} - bx^{-\frac{1}{\tilde{p}}})^{\tilde{p}}}{\tilde{r}\tilde{p}}\right)\right) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty. \quad (8.31)$$

Hiermit folgt, dass der Erwartungswert von $\tilde{r}Z$ nicht existiert. Die Funktion $\tau_{\tilde{p}}$ ist somit nicht ganzanalytisch, vgl. mit Theorem 1.29.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Seien hierzu $p > 1$, $r > 0$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T \sim N_{n,p}$. Dann folgt die Existenz von $\mathbb{E} \exp(r|a, Y|)$ aus (8.30) und der Tatsache, dass Y_1, \dots, Y_n u.i.v. sind. Hierbei ist

$$0 \leq \mathbb{E} \exp(r|a, Y|) \leq \mathbb{E}(r(|a_1||Y_1| + \dots + |a_n||Y_n|)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \exp(r|a_i||Y_i|).$$

Die charakteristische Funktion von $\langle a, Y \rangle$ ist daher mit Theorem 1.29 ganzanalytisch. Für einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T \sim N_{n,\tilde{p}}$, $\tilde{p} \in (0, 1]$, impliziert die Existenz von $\mathbb{E} \exp(\tilde{r}|\langle a, Z \rangle|)$ im Falle $\tilde{r} > 1/\tilde{p}$, dass die bedingte Erwartung von $\exp(\tilde{r}|\langle a, Z \rangle|)$ bei gegebener Zufallsvariable $(Z_1, \dots, Z_{n-1})^T$ P -f.s. existiert. Es folgt nun jedoch aus (8.31) und aus Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998), dass die genannte bedingte Erwartung nicht existieren kann. Die charakteristische Funktion von $\langle a, Z \rangle$ ist somit nicht ganzanalytisch. \square

Beweis von Theorem 4.5. Wir beweisen zunächst die Behauptung (i) im Spezialfall $n = 1$. Hierbei folgt aus Lemma 4.3, dass

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) \cos(tz) dz = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{t \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz, \quad t > 0. \quad (8.32)$$

Im Falle $t \in \left(0, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}\right]$ erhalten wir zudem

$$\begin{aligned} \int_0^{3\pi/2} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz &= \underbrace{\int_0^\pi \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz}_{=: I} + \int_\pi^{3\pi/2} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz \\ &= \int_0^\pi \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \frac{z^{p-1} \sin(z)}{t^p} dz + \int_\pi^{3\pi/2} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} &> \int_{\pi/2}^\pi \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \sin(z) dz + \int_\pi^{3\pi/2} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz \\ &= \int_{\pi/2}^\pi \left(\exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) - \exp\left(-\frac{(z+\pi/2)^p}{t^p p}\right) \right) \sin(z) dz > 0, \end{aligned} \quad (8.34)$$

wobei sich Gleichung (8.33) durch partielle Integration $\left(u' = \cos(z), v = \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right)\right)$ im Integral I

ergibt. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned}
\int_{3\pi/2}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{\frac{(4j+3)\pi}{2}}^{\frac{(4j+5)\pi}{2}} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(y) dy}_{=:I_{1,j}} + \underbrace{\int_{\frac{(4j+5)\pi}{2}}^{\frac{(4j+7)\pi}{2}} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(y) dy}_{=:I_{2,j}} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \left[\exp\left(-\frac{((4j+5)\pi/2 - x)^p}{t^p p}\right) - \exp\left(-\frac{((4j+5)\pi/2 + x)^p}{t^p p}\right) \right] \\
&\quad \cdot \cos\left(\frac{(4j+5)\pi}{2} - x\right) dx \quad , t \in \left(0, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}\right], \tag{8.35}
\end{aligned}$$

wobei (8.35) durch die Substitution von $y = (4j+5)\pi/2 - x$ im Integral $I_{1,j}$ bzw. von $y = (4j+5)\pi/2 + x$ im Integral $I_{2,j}$ folgt. Da der Integrand in (8.35) somit für alle $j \in \mathbb{N}$ größer oder gleich Null ist, erhalten wir

$$\int_{3\pi/2}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^p}{t^p p}\right) \cos(z) dz \geq 0 \quad , t \in \left(0, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}\right]. \tag{8.36}$$

Die Behauptung (i) ergibt sich nun im Spezialfall $n = 1$ aus (8.32), (8.34) und (8.36). Die Behauptung im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ folgt zudem aus (4.1).

Für den Beweis der Behauptung (ii) betrachten wir wiederum zunächst den Spezialfall $n = 1$. In diesem gilt mit Lemma 4.4, dass

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial t}(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) t} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) (z^p - 1) \cos(tz) dz \quad , t \in \mathbb{R}_{\neq 0}.$$

Hierbei ist

$$\int_0^{\pi/(2t)} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) (z^p - 1) \cos(tz) dz < 0 \quad , t \in \left(0, (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2\right], \tag{8.37}$$

denn mit partieller Integration ($u' = \cos(tz)$, $v = \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right)$) gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/(2t)} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) \cos(tz) dz &= \left[\exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) \frac{\sin(tz)}{t} \right]_0^{\pi/(2t)} + \int_0^{\pi/(2t)} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) z^p \frac{\sin(tz)}{tz} dz \\
&> \int_0^{\pi/(2t)} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) z^p \cos(tz) dz.
\end{aligned}$$

Darüber hinaus besitzt die Funktion

$$h(z) := (z^p - 1) \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) \quad , z \geq 0,$$

die Ableitung

$$\frac{\partial h}{\partial z}(z) = z^{p-1} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) (1 + p - z^p) \quad , z \geq 0,$$

d.h. h ist monoton fallend auf $(\pi/(2t), \infty)$, sofern $t \in \left(0, (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2\right]$. Es ist weiterhin

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/(2t)}^{\infty} h(z) \cos(tz) dz &= \frac{1}{t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} h(y/t) \cos(y) dy \\
&= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{\frac{(4j-3)\pi}{2}}^{\frac{(4j-1)\pi}{2}} h(y/t) \cos(y) dy}_{=: I_{3,j}} + \underbrace{\int_{\frac{(4j-1)\pi}{2}}^{\frac{(4j+1)\pi}{2}} h(y/t) \cos(y) dy}_{=: I_{4,j}} \right) \\
&= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left[h\left(\frac{\left(\frac{(4j-1)\pi}{2} - x\right)}{t}\right) - h\left(\frac{\left(\frac{(4j-1)\pi}{2} + x\right)}{t}\right) \right] \\
&\quad \cdot \cos\left(\frac{(4j-1)\pi}{2} - x\right) dx \quad , t \in \left(0, (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2\right] , \tag{8.38}
\end{aligned}$$

wobei (8.38) durch die Substitution von $y = (4j-1)\pi/2 - x$ im Integral $I_{3,j}$ bzw. von $y = (4j-1)\pi/2 + x$ im Integral $I_{4,j}$ folgt. Da der Integrand in (8.38) somit für alle $j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ kleiner oder gleich Null ist, erhalten wir

$$\int_{\pi/(2t)}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) (z^p - 1) \cos(tz) dz \leq 0 \quad , t \in \left(0, (p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \pi/2\right] . \tag{8.39}$$

Die Behauptung (ii) ergibt sich nun im Spezialfall $n = 1$ aus (8.37) und (8.39). Die Behauptung im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ folgt erneut aus (4.1). \square

Beweis von Korollar 4.6. Die Behauptung wird zunächst im Spezialfall $n = 1$ bewiesen. Hierbei folgt aus Satz 3.3 1 in (Laue, Riedel et al., 1999), dass

$$\tau_p(t) > \cos(\sigma_p t) \quad , t \in [-\pi/\sigma_p, \pi/\sigma_p] ,$$

wobei σ_p^2 die Varianz von N_p bezeichnet. Hiermit ergibt sich unter Berücksichtigung von Lemma 1.15, dass $M = \left[-\frac{\pi}{2\sigma_p}, \frac{\pi}{2\sigma_p}\right]$ und

$$\tau_p(t) > \cos(\sigma_p t) \geq 0 \quad , t \in M . \tag{8.40}$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $\left[-(\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}\right] \subset M$. Wir betrachten hierfür die zu τ_p gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{1,p}$. Für diese existiert genau ein $x_0 > 0$ so, dass $f_{1,2}(x) < f_{1,p}(x)$, $x \in [0, x_0)$, und $f_{1,2}(x) > f_{1,p}(x)$, $x \in (x_0, \infty)$, vgl. mit Definition 1.7. Da es sich bei $f_{1,2}$ und $f_{1,p}$ zudem um gerade Funktionen handelt, gilt

$$A := \int_0^{x_0} (f_{1,p}(x) - f_{1,2}(x)) dx = \int_{x_0}^{\infty} (f_{1,2}(x) - f_{1,p}(x)) dx > 0 .$$

Wir erhalten hiermit für die Varianz σ_2^2 von N_2 , dass

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 - \sigma_2^2 &= 2 \int_0^{\infty} x^2 (f_{1,p}(x) - f_{1,2}(x)) dx \\
&= 2x_0^2 \left(\int_0^{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 (f_{1,p}(x) - f_{1,2}(x)) dx + \int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 (f_{1,p}(x) - f_{1,2}(x)) dx \right) \\
&< 2x_0^2 (A - A) = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

d.h. $\sigma_p < \sigma_2 = 1$, vgl. hierzu auch mit Lemma 1.15. Dies impliziert insbesondere auch

$$\left[-(\pi/2)^{1-\frac{1}{p}}, (\pi/2)^{1-\frac{1}{p}} \right] \subset \left[-\pi/2, \pi/2 \right] \subset M. \quad (8.41)$$

Die Behauptung ergibt sich nun im Fall $n = 1$ aus (8.40) sowie (8.41) und im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ aus (4.1). \square

Beweis von Theorem 4.11. Für $p \in (0, 1)$ folgt die Behauptung aus Theorem 4.10. Wir setzen daher im Folgenden $p \geq 1$ voraus. Sei außerdem $t > 0$. Dann folgt aus Lemma 4.3, dass

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^p}{p}\right) \exp(-itz) dz \right). \quad (8.42)$$

Die Substitution von $z = y \cdot \exp(-i\pi/(2p)) / t$ in (8.42) ergibt

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{t \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \operatorname{Re} \left(\exp(-i\phi_0) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{r \cdot \exp(i\phi_0)} \exp\left(-\frac{y^p}{t^p p} \exp(-i\pi/2) - y \exp\left(i\pi \frac{p-1}{2p}\right)\right) dy \right),$$

wobei $\phi_0 := \pi/(2p)$. Es wird nun gezeigt, dass der Integrationsbereich im zuletzt betrachteten Integral durch die reelle Halbachse $[0, \infty)$ ersetzt werden kann. Wir betrachten hierzu für fest gewähltes $r > 0$ das geschlossene Gebiet $G_1(r) = \{\gamma_{1,r}(x) : x \in [0, 1]\}$, wobei

$$\gamma_{1,r}(x) := \begin{cases} 3xr \exp(i\phi_0) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ r \exp(i(2-3x)\phi_0) & , \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 3(1-x)r & , \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist $G_1(r) = \{x \exp(i\phi_0) : x \in [0, r]\} \cup \{r \exp(i\phi) : \phi \in [0, \phi_0]\} \cup [0, r]$, vgl. mit Abbildung 20 (a).

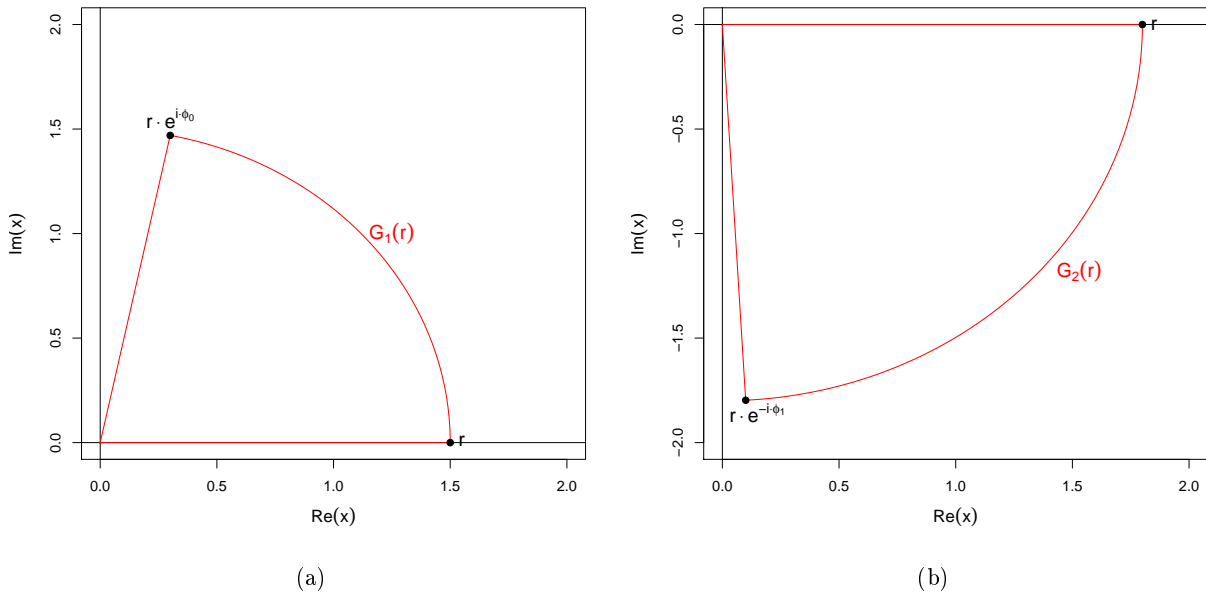


Abbildung 20: (a) Das geschlossene Gebiet $G_1(r)$ für $r = 1.5$ und $\phi_0 = \arccos(1/5)$.
 (b) Das geschlossene Gebiet $G_2(r)$ für $r = 1.8$ und $\phi_1 = \arccos(1/18)$.

Da zudem durch

$$\eta_{1,t}(y) = \exp\left(-\frac{y^p}{t^p p} \exp(-i\pi/2) - y \exp\left(i\pi \frac{p-1}{2p}\right)\right), \quad y \in \mathbb{C},$$

eine holomorphe Funktion gegeben ist und $\gamma_{1,r}$ eine stückweise glatte Funktion ist, folgt aus dem Integralsatz von Cauchy (vgl. mit Korollar 3.21 in (Salamon, 2012)), dass

$$\int_{G_1(r)} \eta_{1,t}(y) dy = 0. \quad (8.43)$$

Für $\phi \in [0, \phi_0]$ gilt darüber hinaus

$$\begin{aligned} \left| \eta_{1,t}(r e^{i\phi}) \right| &\leq \left| \exp\left(-\frac{r^p (\sin(p\phi) - i \cos(p\phi))}{t^p p}\right) \right| \\ &\quad \cdot \left| \exp\left(-r \left(\cos\left(\frac{\pi p - 1}{2} + \phi\right) + i \sin\left(\frac{\pi p - 1}{2} + \phi\right)\right)\right) \right| \\ &\leq \underbrace{\exp\left(-\frac{r^p \sin(p\phi)}{t^p p}\right) \cdot \exp\left(-r \cos\left(\frac{\pi p - 1}{2} + \phi\right)\right)}_{=: h(r, \phi)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{r \exp(i\phi): \phi \in [0, \phi_0]\}} \eta_{1,t}(y) dy \right| &\leq r \int_{\{\exp(i\phi): \phi \in [0, \phi_0]\}} |\eta_{1,t}(rz)| dz \\ &\leq r \max_{\phi \in [0, \phi_0]} (h(r, \phi)) \int_{\{\exp(i\phi): \phi \in [0, \phi_0]\}} \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(z) dz \\ &\rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (8.44)$$

Es folgt nun aus (8.43) und (8.44), dass

$$\tau_p(t) = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{t \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \operatorname{Re} \left(\exp(-i\phi_0) \int_0^\infty \eta_{1,t}(y) dy \right). \quad (8.45)$$

Im nächsten Beweisschritt wird die für $y > 0$ definierte Funktion

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{y^p}{p} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) x\right), \quad x > 0,$$

mithilfe des zugehörigen Taylorpolynoms m -ter Ordnung mit Entwicklungspunkt 0 dargestellt. Hierzu verwenden wir die Lagrange'sche Restglieddarstellung, vgl. mit Formel (7.97b) in (Bronshtein, Semendyayev et al., 2004). Dann ist

$$\exp\left(-\frac{y^p}{p} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) x\right) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k y^{pk} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}k\right)}{p^k k!} x^k + \theta(y, x) \frac{y^{p(m+1)} x^{m+1}}{p^{m+1} (m+1)!}, \quad x > 0, \quad (8.46)$$

wobei

$$\theta(y, x) = (-1)^{m+1} \exp\left(-i\frac{(m+1)\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^p}{p} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \xi(x)\right)$$

und $\xi(x) \in (0, x)$, d.h. $|\theta(y, x)| \leq 1$, $x > 0$, $y > 0$. Es ergibt sich nun aus (8.46), dass

$$\eta_{1,t}(y) = \exp\left(-y e^{i\pi\frac{p-1}{2p}}\right) \left(\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k y^{pk} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}k\right)}{p^k k!} t^{-pk} + \theta(y, t^{-p}) \frac{y^{p(m+1)} t^{-p(m+1)}}{p^{m+1} (m+1)!} \right), \quad y > 0,$$

bzw.

$$\int_0^\infty \eta_{1,t}(y) dy = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k t^{-pk} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}k\right)}{p^k k!} A_k + \frac{t^{-p(m+1)}}{p^{m+1} (m+1)!} H_m(t), \quad (8.47)$$

wobei

$$A_k := \int_0^\infty y^{pk} \exp\left(-y \exp\left(i\pi \frac{p-1}{2p}\right)\right) dy \quad , k \in \{1, \dots, m+1\}, \quad (8.48)$$

und

$$H_m(t) := \int_0^\infty y^{p(m+1)} \theta(y, t^{-p}) \exp\left(-y \exp\left(i\pi \frac{p-1}{2p}\right)\right) dy.$$

An dieser Stelle sei hervorgehoben, dass $|H_m(t)| \in [0, |A_{m+1}|]$, $t > 0$. Im Falle $p = 1$ ist ferner $A_k = \Gamma(pk + 1)$, $k \in \{1, \dots, m+1\}$.

Für die Berechnung von A_1, \dots, A_{m+1} im Falle $p > 1$ wird im Folgenden gezeigt, dass der Integrationsbereich in (8.48) für $p > 1$ durch die Menge $\{r \exp(-i(p-1)\pi/(2p)), 0 \leq r < \infty\}$ ersetzt werden kann. Wir betrachten hierzu für fest gewähltes $r > 0$ und $\phi_1 := (p-1)\pi/(2p)$ das geschlossene Gebiet $G_2(r) = \{\gamma_{2,r}(x) : x \in [0, 1]\}$, wobei

$$\gamma_{2,r}(x) := \begin{cases} 3xr \exp(-i\phi_1) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} , \\ r \exp(-i(2-3x)\phi_1) & , \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} , \\ 3(1-x)r & , \frac{2}{3} \leq x \leq 1 . \end{cases}$$

Dann ist $G_2(r) = \{x \exp(-i\phi_1) : x \in [0, r]\} \cup \{r \exp(-i\phi) : \phi \in [0, \phi_1]\} \cup [0, r]$, vgl. mit Abbildung 20 (b). Es ist zudem für $k \in \{1, \dots, m+1\}$ durch

$$\tilde{\eta}_{t,k}(y) := y^{pk} \exp(-y \exp(i\phi_1)) \quad , y \in \mathbb{C},$$

eine holomorphe Funktion gegeben und $\gamma_{2,r}$ stückweise glatt. Die Anwendung des Integralsatzes von Cauchy (vgl. mit Korollar 3.21 in (Salamon, 2012)) führt somit auf

$$\int_{G_2(r)} \tilde{\eta}_{t,k}(y) dy = 0 \quad , k \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (8.49)$$

Für $\phi \in [0, \phi_1]$ und $k \in \{1, \dots, m+1\}$ gilt darüber hinaus

$$\left| \tilde{\eta}_{t,k}(re^{-i\phi}) \right| \leq \underbrace{r^{pk} \exp(-r \cos(\phi_1 - \phi))}_{=: \tilde{h}(r,k,\phi)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

sowie

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{r \exp(-i\phi) : \phi \in [0, \phi_1]\}} \tilde{\eta}_{t,k}(y) dy \right| &\leq r \int_{\{\exp(-i\phi) : \phi \in [0, \phi_1]\}} |\tilde{\eta}_{t,k}(rz)| dz \\ &\leq r \tilde{h}(r, k, 0) \int_{\{\exp(-i\phi) : \phi \in [0, \phi_1]\}} \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(z) dz \\ &\rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) . \end{aligned} \quad (8.50)$$

Aus (8.48), (8.49) und (8.50) folgt nun im Falle $p > 1$, dass

$$A_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{r \exp(-i\phi_1)} y^{pk} \exp(-y \exp(i\phi_1)) dy \quad , k \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (8.51)$$

Die Substitution von $z = y \exp(i\phi_1)$ in (8.51) ergibt

$$A_k = \exp(-i(1+kp)\phi_1) \int_0^\infty z^{pk} \exp(-z) dz \quad , k \in \{1, \dots, m+1\}.$$

Für $p \geq 1$ ist aus diesem Grund

$$A_k = \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \left(\frac{p-1}{p} + (p-1)k\right)\right) \Gamma(pk+1) \quad , k \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (8.52)$$

Wir erhalten schließlich aus (8.45), (8.47) und (8.52), dass

$$\begin{aligned} \tau_p(t) &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{t \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \operatorname{Re} \left(\exp\left(-i \frac{\pi}{2}(1+pk)\right) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k t^{-pk}}{p^k k!} \Gamma(1+pk) + \frac{t^{-p(m+1)} e^{-i\phi_0}}{p^{m+1} (m+1)!} H_m(t) \right) \\ &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{t \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+kp)\right) \Gamma(pk+1)}{p^k k!} t^{-pk} + \varepsilon(t) \\ &= \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{t \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}kp\right) \Gamma(pk+1)}{p^k k!} t^{-pk} + \varepsilon(t) \quad , t > 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon(t) = \frac{t^{-p(m+1)-1} \operatorname{Re}(e^{-i\phi_0} H_m(t))}{p^{m+\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (m+1)!} \quad , t > 0,$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon(t)|}{|t^{-p(m+1)-1}|} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|H_m(t)|}{p^{m+\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (m+1)!} \leq \frac{|A_{m+1}|}{p^{m+\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (m+1)!}.$$

Die Behauptung ist hiermit für $t > 0$ bewiesen. Im allgemeinen Fall $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ folgt die Aussage nun aus (1.18). \square

Beweis von Theorem 5.3. Die Behauptung wird zunächst für die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ der p -verallgemeinerten Normalverteilung bewiesen. Wir werden hierfür ausnutzen, dass die charakteristische Funktion eines nichtentarteten Zufallsvektors X mit u.i.v. Komponenten und existenten zweiten Momenten nur dann die in (5.7) angegebene Struktur besitzen kann, wenn X normalverteilt ist. Seien hierzu $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ und

$$\tau_{n,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , t \in \mathbb{R}^n, \quad (8.53)$$

für eine skalare Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine positiv homogene Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist notwendigerweise $\phi(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, und es gilt analog zum Beweis von Theorem 5.1, dass

$$\begin{aligned} h(\phi(t)) &= \prod_{i=1}^n h(\phi(t_i \cdot e_1)) \\ &= \prod_{i=1}^n h(c |t_i|) \quad , t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (8.54)$$

wobei $c := \phi(e_1)$. Es wird nun gezeigt, dass dann für alle $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine positiv homogene Funktion $\phi_l : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ so existiert, dass

$$\begin{aligned} \tau_{l,p}(t) &= h(\phi_l(t)) \\ &= \prod_{i=1}^l h(c |t_i|) \quad , t = (t_1, \dots, t_l)^T \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Im Falle $l \in \{2, \dots, n\}$ folgt (8.55) direkt aus (8.53). Im Falle $l > n$ setzen wir o.B.d.A. voraus, dass $l \in \{n+1, \dots, 2n-1\}$. Dann folgt aus (8.54), dass

$$\begin{aligned} \pi_{l,p}(t) &= h\left(\phi\left((t_1, \dots, t_n)^T\right)\right) \cdot h\left(\phi\left((t_{n+1}, \dots, t_l, 0_{2n-l}^T)^T\right)\right) \\ &= h\left(\phi\left(\left(\frac{1}{c}\phi\left((t_1, \dots, t_n)^T\right), \frac{1}{c}\phi\left((t_{n+1}, \dots, t_l, 0_{2n-l}^T)^T\right), 0_{n-2}^T\right)^T\right)\right), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

wobei durch

$$t \mapsto \phi\left(\left(\frac{1}{c}\phi\left((t_1, \dots, t_n)^T\right), \frac{1}{c}\phi\left((t_{n+1}, \dots, t_l, 0_{2n-l}^T)^T\right), 0_{n-2}^T\right)^T\right), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l,$$

ein positiv homogenes Funktional gegeben ist. Die Gültigkeit von (8.55) kann daher angenommen werden. Aus (8.55) folgt nun, dass

$$h(t) = h(c_k t)^k, \quad t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \quad (8.56)$$

wobei $c_1 = 1$ und

$$c_k = \frac{c}{\phi_k(1_k)}, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Für die Bestimmung der Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, in (8.56) betrachten wir die zweite Ableitung von $h(t) = \tau_p(t/c)$, $t \geq 0$. Hierbei folgt aus Lemma 1.15 und Theorem 1.23, dass $h'(0) = 0$ und $h''(0) \neq 0$. Darüber hinaus ergibt sich aus (8.56), dass

$$h'(t) = k c_k h(c_k t)^{k-1} h'(c_k t), \quad t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 2},$$

und

$$h''(t) = k(k-1)c_k^2 h(c_k t)^{k-2} h'(c_k t) + k c_k^2 h(c_k t)^{k-1} h''(c_k t), \quad t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Es ist daher insbesondere

$$h''(0) = k c_k^2 h''(0), \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 2},$$

d.h. $c_k = 1/\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir erhalten somit

$$h(t)^k = h(\sqrt{k}t), \quad t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

sowie

$$\begin{aligned} h(t)^{\frac{a}{b}} &= h(\sqrt{a}t)^{\frac{1}{b}} \\ &= h\left(\sqrt{b}\sqrt{\frac{a}{b}}t\right)^{\frac{1}{b}} \\ &= h\left(\sqrt{\frac{a}{b}}t\right), \quad t \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Sei nun $\lambda \geq 0$. Dann lässt sich durch die Betrachtung einer Folge von positiven rationalen Zahlen $(q_k)_{k \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \lambda$ aus (8.57) und der Stetigkeit von h weiter schlussfolgern, dass

$$h(t)^\lambda = h(\sqrt{\lambda}t), \quad t \geq 0.$$

Die Funktion $\tilde{h} := (\ln \circ h)$ ist somit eine positiv homogene Funktion vom Grad 2, denn

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\lambda t) &= \ln(h(\lambda t)) \\ &= \ln\left(h(t)^{\lambda^2}\right) \\ &= \lambda^2 \tilde{h}(t), \quad t \geq 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\begin{aligned}\tilde{h}'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} t^2 \tilde{h}(1) \\ &= 2t \tilde{h}(1) \\ &= \frac{2}{t} \tilde{h}(t) \quad , t \geq 0.\end{aligned}\tag{8.58}$$

Die in (8.58) dargestellte homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzt eine Lösung der Gestalt $\tilde{h}(t) = \gamma t^2$, $t \geq 0$, wobei $\gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Es ist daher

$$h(t) = \exp(\gamma t^2) \quad , t \geq 0.\tag{8.59}$$

Wir erhalten nun aus (8.59), dass τ_p die charakteristische Funktion einer Normalverteilung ist. Damit liegt ein Widerspruch zu Theorem 4.15 vor. Die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ kann deshalb für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ nicht die in (5.7) angegebene Struktur besitzen. Die Behauptung für $\varphi_{n,m,p}$ folgt ferner aus Lemma 4.7 und den Betrachtungen zu $\tau_{n,p}$. □

Beweis von Korollar 5.5. Es erfolgt zunächst der Beweis der Behauptung (i). Hierzu wird die Annahme, dass $\varphi_{n,m,p}$ für $p \neq 2$ die in (5.11) angegebene Darstellung besitzt, zu einem Widerspruch geführt. Sei also $\varphi_{n,m,p}$ für $p \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ wie in (5.11). Dann ist notwendigerweise $\phi(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, und es existiert ein $v_0 \in S_{n,2}(\varepsilon)$ so, dass $\{\phi(\lambda v_0) : \lambda \in [0, 1]\} = \{\phi(v) : v \in K_{n,2}(\varepsilon)\}$. Es ist daher

$$\varphi_{n,m,p}(\lambda v_0) = h(\lambda \phi(v_0)) \quad , \lambda \in [0, 1],$$

bzw.

$$h(x) = \varphi_{n,m,p}(x v^*) \quad , x \in [0, \phi(v_0)] ,\tag{8.60}$$

wobei $v^* := v_0/\phi(v_0)$. Aus (5.11) und (8.60) folgt nun, dass

$$\varphi_{n,m,p}(t) = h_0(\phi(t)) \quad , t \in K_{n,2}(\varepsilon),\tag{8.61}$$

sofern h_0 eine skalare Funktion ist, welche auf $[0, \phi(v_0)]$ mit h übereinstimmt. Wir wählen hierfür die spezielle Funktion

$$h_0(x) := \varphi_{n,m,p}(x v^*) \quad , x \geq 0.$$

Sei zudem $t_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ein beliebig gewählter Vektor. Dann existiert ein Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ und eine Konstante $x_1 \geq 0$ so, dass $t_1 = x_1 v_1$ und $\phi(v_1) = 1$. Wir definieren hierfür die Funktion

$$h_1(x) := \varphi_{n,m,p}(x v_1) \quad , x \geq 0.$$

Für einen Zufallsvektor $U \sim \omega_{n,m,p}$ gilt ferner

$$\begin{aligned}h_0(x) &= \mathbb{E} \cos(x \langle v^*, U \rangle) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x \langle v^*, U \rangle)^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E} \left[(\langle v^*, U \rangle)^{2k} \right]}{(2k)!} x^{2k} \quad , x \geq 0,\end{aligned}\tag{8.62}$$

wobei die Vertauschbarkeit von Integration und Summation in (8.62) im Beweis von Theorem 2.6 demonstriert wurde. Die Funktion h_0 stimmt daher auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der zugehörigen Taylorreihe mit

Entwicklungspunkt 0 überein, vgl. mit Theorem 1.23. In analoger Weise ergibt sich für die Funktion h_1 , dass

$$h_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E} \left[(\langle v_1, U \rangle)^{2k} \right]}{(2k)!} x^{2k} \quad , \quad x \geq 0, \quad (8.63)$$

d.h. die Funktion h_1 entspricht ebenfalls auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ der zugehörigen Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0. Mit (8.61) existiert darüber hinaus eine Konstante $\varepsilon_1 > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} h_0(x) &= h_0(\phi(x v_1)) \\ &= \varphi_{n,m,p}(x v_1) \\ &= h_1(x) \quad , \quad x \in [0, \varepsilon_1]. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Die Ableitungen der unendlich oft differenzierbaren Funktionen h_0 und h_1 (vgl. mit Theorem 1.23) stimmen hiermit im Nullpunkt stets überein. Es folgt nun aus (8.62), (8.63) sowie aus (8.64), dass

$$h_0(x) = h_1(x) \quad , \quad x \geq 0.$$

Dies impliziert insbesondere, dass $\varphi_{n,m,p}(t_1) = h_1(x_1) = h_1(\phi(t_1)) = h_0(\phi(t_1))$. Da die Wahl von $t_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ beliebig war, liegt nun ein Widerspruch zu Theorem 5.3 vor. Die charakteristische Funktion $\varphi_{n,m,p}$ kann somit nicht die in (5.11) angegebene Struktur besitzen.

Die Behauptung (ii) lässt sich für $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ analog zur Behauptung (i) beweisen. Wir können hierfür ausnutzen, dass die Funktion

$$h_v(x) := \tau_{n,p}(x v) \quad , \quad x \geq 0,$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der zugehörigen Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 übereinstimmt, denn für einen p -verallgemeinert normalverteilten Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ gilt

$$\begin{aligned} h_v(x) &= \mathbb{E} \cos(x \langle v, X \rangle) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x \langle v, X \rangle)^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E} \left[(\langle v, X \rangle)^{2k} \right]}{(2k)!} x^{2k} \quad , \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (8.65)$$

wobei die Vertauschbarkeit von Integration und Summation in (8.65) bereits in (Pogány u. Nadarajah, 2010) demonstriert wurde, vgl. hierzu auch mit Theorem 4.8.

Sei nun $p = 1$ und $\tau_{n,p}$ wie in (5.12) darstellbar. Dann ist

$$\begin{aligned} h(\phi(t \cdot 1_n)) &= \tau_1(c \phi(t \cdot 1_n)) \\ &= \frac{1}{1 + (c \phi(t \cdot 1_n))^2} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^{2k}} \quad , \quad t \in [-\varepsilon/\sqrt{n}, \varepsilon/\sqrt{n}] \quad , \end{aligned} \quad (8.66)$$

wobei $c := 1/\phi(e_1)$. Da die Funktion τ_1 zudem streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, folgt aus (8.66), dass

$$c \cdot \phi(t \cdot 1_n) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^{2k}} \quad , \quad t \in [-\varepsilon/\sqrt{n}, \varepsilon/\sqrt{n}] \quad . \quad (8.67)$$

Die rechte Seite in (8.67) ist auf keiner Nullumgebung positiv homogen. Hiermit liegt ein Widerspruch vor. Die charakteristische Funktion $\tau_{n,1}$ kann daher nicht die in (5.12) angegebene Struktur besitzen. \square

Beweis von Korollar 5.6. Die Behauptung im Falle $p \in [1, 2) \cup (2, \infty)$ folgt aus Korollar 5.5. Sei daher im Folgenden $p \in (0, 1)$. Seien zudem $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $q > 0$, $\tilde{h} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\tau_{n,p}(t) = \tilde{h}(|t|_q^q) \quad , \quad t \in K_{n,2}(\varepsilon). \quad (8.68)$$

Dann kann in analoger Weise zum Beweis von Theorem 5.1 gezeigt werden, dass

$$\tilde{h}(x) = \exp(-cx) \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\varepsilon^q}{n}\right],$$

wobei c eine positive Konstante ist. Es ist daher

$$\tau_p(t) = \exp(-c|t|^q) \quad , \quad t \in \left[-\varepsilon/n^{1/q}, \varepsilon/n^{1/q}\right]. \quad (8.69)$$

Im Falle $q > 2$ strebt die rechte Seite in (8.69) für $t \rightarrow 0$ schneller als mit quadratischer Ordnung gegen 1, wodurch ein Widerspruch zu Theorem 1.38 vorliegt. Im Falle $q \in (0, 2)$ ist die rechte Seite in (8.69) im Gegensatz zu τ_p nicht beliebig oft differenzierbar, vgl. mit Theorem 1.23 und Lemma 1.15. Im verbliebenen Fall $q = 2$ impliziert die Gültigkeit von (8.69), dass τ_p auf $[-\varepsilon/\sqrt{n}, \varepsilon/\sqrt{n}]$ mit der charakteristischen Funktion von $\tilde{Y} = \sqrt{2c}Y$ übereinstimmt, wobei $Y \sim N_2$. Es stimmen daher insbesondere die Momente von $X \sim N_p$ und \tilde{Y} überein. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned} \tau_p(t) &= \mathbb{E} \cos(tX) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (tX)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \right) \\ &= \mathbb{E} \lim_{l \rightarrow \infty} Z_l(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8.70)$$

wobei

$$Z_l(t) := \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (tX)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \quad , \quad t \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}.$$

Sei nun

$$\tilde{Z}_l(t) := \sum_{k=0}^l \frac{(tX)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \quad , \quad t \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}.$$

Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $(\tilde{Z}_l(t))_{l \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von P -integrierbaren Zufallsgrößen gegeben. Wir erhalten somit aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe Satz 11.4 in (Bauer, 1992)), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \right) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^l \frac{(tX)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y^{2k})}{\Gamma(2k+1)} (\sqrt{2c}t)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \Gamma(\frac{2k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2k+1)} (2ct^2)^k \end{aligned} \quad (8.71)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct^2)^k}{\Gamma(k+1)} \quad (8.72)$$

$$= \exp(ct^2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8.73)$$

wobei (8.71) aus Lemma 1.15 und (8.72) aus der Verdopplungsformel von Legendre folgt, vgl. mit Formel 6.1.18 in (Abramowitz u. Stegun, 1972). Die für $t \in \mathbb{R}$ definierte Folge P -integrierbarer Zufallsgrößen $(Z_l(t))_{l \in \mathbb{N}}$ besitzt daher eine P -integrierbare Majorante. Hiermit ergibt sich aus (8.70) sowie

aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (siehe Satz 15.6 in (Bauer, 1992)), dass

$$\begin{aligned}\tau_p(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E}(X^{2k})}{\Gamma(2k+1)} t^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y^{2k})}{\Gamma(2k+1)} (-2ct^2)^k \\ &= \exp(-ct^2) \quad , t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es liegt nun ein Widerspruch zu Theorem 4.15 vor, d.h. die Annahme in (8.68) ist für $p \in (0, 1)$ falsch. \square

Beweis von Lemma 5.10. Sei zunächst M eine beliebige Niveaumenge der charakteristischen Funktion von X . Wir nehmen nun an, dass $x_1, x_2 \in M$ so existieren, dass $|x_1|_* \neq |x_2|_*$. Dann ist

$$h(y) = h(|x_1|_*) \quad , y \in [\min(|x_1|_*, |x_2|_*), \max(|x_1|_*, |x_2|_*)],$$

da M zusammenhängend und $|\cdot|_*$ stetig ist. Hiermit existiert aber für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ein nichtleeres offenes Intervall, auf welchem die charakteristische Funktion von $\langle a, X \rangle$ konstant ist. Es liegt daher ein Widerspruch zu den Voraussetzungen von Lemma 5.10 vor. Die Niveaumengen der charakteristischen Funktion von X sind somit auch Niveaumengen von $|\cdot|_*$. Die umgekehrte Behauptung gilt hierbei aufgrund der Tatsache, dass die charakteristische Funktion von X durch $h \circ |\cdot|_*$ gegeben ist. \square

Beweis von Korollar 5.12. Unter den Voraussetzungen von Korollar 5.12 existiert ein verallgemeinertes Radiusfunktional $|\cdot|_*$ so, dass

$$\varphi(t) = \varphi(|t|_* \cdot e_1) \quad , t \in \mathbb{R}^n. \quad (8.74)$$

Sei nun $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ beliebig und

$$\eta_a(t) := |t \cdot a|_* \quad , t \geq 0.$$

Dann ist η_a stetig, streng monoton wachsend, unbeschränkt und es ist $\eta_a(t) = 0$ g.d.w. $t = 0$. Es existiert daher die streng monoton wachsende, stetige und unbeschränkte Umkehrabbildung $\eta_a^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ von η_a , wobei $\eta_a^{-1}(t) = 0$ g.d.w. $t = 0$. Die Abbildung

$$\phi_a(t) := \eta_a^{-1}(|t|_*) \quad , t \in \mathbb{R}^n,$$

ist daher ein verallgemeinertes Radiusfunktional. Aus (8.74) folgt zudem, dass

$$\varphi(t \cdot a) = \varphi(\eta_a(t) \cdot e_1) \quad , t \geq 0,$$

d.h.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(|t|_* \cdot e_1) \\ &= \varphi(\eta_a(\phi_a(t)) \cdot e_1) \\ &= \varphi(\phi_a(t) \cdot a) \quad , t \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

\square

Beweis von Korollar 5.16. Die charakteristische Funktion φ von X genügt mit Satz 6.2.2 aus (Schürger, 1998) der Darstellung

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathbb{E} \mathbb{E} (\exp (i \langle Rt, Y \rangle) | R) \\ &= \mathbb{E} (\tau_{n,p}(Rt)) \\ &= \int_0^\infty \tau_{n,p}(rt) P^R(dr) \quad , t \in \mathbb{R}^n .\end{aligned}$$

Es folgt daher aus Theorem 4.1, dass $\varphi(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}^n$, und

$$\varphi(t) > \varphi(rt) \quad , t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, r > 1 .$$

Aus der Absolutstetigkeit von $N_{n,p}$ folgt ferner für $r > 0$ und $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, dass $r \langle t, Y \rangle$ absolutstetig verteilt ist. Hiermit gilt für eine beliebige μ_1 -Nullmenge A , dass

$$\begin{aligned}P(\langle t, X \rangle \in A) &= P(R \langle t, Y \rangle \in A) \\ &= \mathbb{E} P(R \langle t, Y \rangle \in A | R) \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Es ist somit $\langle t, X \rangle$ absolutstetig verteilt, d.h.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(rt) = 0 \quad , t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} ,$$

vgl. mit Theorem 1.25. Die Behauptung ergibt sich nun aus Theorem 5.15. □

Beweis von Korollar 5.17. Die Behauptung ergibt sich in analoger Weise zum Beweis von Korollar 5.16 aus Beispiel 1.14, Korollar 3.18 und Theorem 5.15, wobei

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \varphi_{n,m,1}(rt) P^R(dr) \quad , t \in \mathbb{R}^n .$$

□

Beweis von Theorem 5.20. Die Behauptung wird zunächst im Spezialfall $n = 2$ bewiesen. Wir nehmen hierzu an, dass $\tau_{2,p}$ für $p > 2$ wie in (5.20) als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktional $|\cdot|_* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann.

Aus Theorem 4.1 und $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_p(t) = 0$ (vgl. mit Abschnitt 4.1) folgt die Existenz eines lokalen Minimierers t_0 von τ_p mit $\tau_p(t_0) < 0$. Mit Lemma 1.32 und Lemma 4.2 sind ferner alle lokalen Extremstellen von τ_p isoliert. Dadurch ist insbesondere $x_0 := (t_0, 0)^T$ ein isolierter Minimierer von $\tau_{2,p}$, vgl. mit (4.1). Es existiert daher ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\tau_{2,p}(x) \neq \tau_{2,p}(x_0) \quad , 0 < |x - x_0|_2 < \varepsilon . \tag{8.75}$$

Dies impliziert aber auch

$$|x|_* \neq |x_0|_* \quad , 0 < |x - x_0|_2 < \varepsilon . \tag{8.76}$$

Seien insbesondere $\lambda_1 \in (0, 1)$ und $\lambda_2 \in (1, \infty)$ so gewählt, dass

$$|\lambda_i \cdot x_0 - x_0|_2 < \varepsilon \quad , i \in \{1, 2\} .$$

Dann ergibt sich aus der strengen Monotonie von $|\cdot|_*$ entlang des Strahles $\{\lambda \cdot x_0 : \lambda \geq 0\}$, dass $|x_1|_* < |x_0|_*$ und $|x_2|_* > |x_0|_*$, wobei $x_1 := \lambda_1 \cdot x_0$ und $x_2 := \lambda_2 \cdot x_0$. Sei nun $y \in \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - x_0|_2 < \varepsilon\}$, wobei $y \notin \{\lambda \cdot x_0 : \lambda \geq 0\}$. Dann ist entweder $|y|_* < |x_0|_*$ oder $|y|_* > |x_0|_*$, vgl. mit (8.76). Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass $|y|_* < |x_0|_*$. In diesem folgt aus der Stetigkeit von $|\cdot|_*$ die Existenz eines Vektors $z \in \{x_2 + \lambda \cdot (y - x_2) : \lambda \in (0, 1)\}$ so, dass

$$|z|_* = |x_0|_* \quad , \quad (8.77)$$

wobei $0 < |z - x_0|_2 < \varepsilon$. Es liegt nun ein Widerspruch zu (8.76) vor. Die Annahme, dass $\tau_{2,p}$ für $p > 2$ wie in (5.20) als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktional $|\cdot|_* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann ist somit falsch.

Im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ nehmen wir wiederum zunächst an, dass $\tau_{n,p}$ für $p > 2$ global als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktional $|\cdot|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Dann ist durch

$$\phi(t) := \left| \begin{pmatrix} t^T \\ 0_{n-2}^T \end{pmatrix} \right|_* \quad , \quad t \in \mathbb{R}^2 \quad ,$$

ein verallgemeinertes Radiusfunktional auf \mathbb{R}^2 gegeben. Die charakteristische Funktion

$$\tau_{2,p}(t) = \tau_{n,p} \left(\begin{pmatrix} t^T \\ 0_{n-2}^T \end{pmatrix} \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^2 \quad ,$$

ist zudem darstellbar als

$$\tau_{2,p}(t) = h(\phi(t)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Hiermit liegt ein Widerspruch zur im Falle $n = 2$ bereits bewiesenen Aussage von Theorem 5.20 vor. Die Funktion $\tau_{n,p}$ kann somit auch im Falle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ nicht global als Komposition eines verallgemeinerten Radiusfunktional $|\cdot|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer skalaren Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden, sofern $p > 2$. \square

Beweis von Theorem 5.24. Im Falle $p \in (0, 2]$ folgt die Behauptung mit $t_0 = 0_n$, $h_0 = \tau_{p|_{[0, \infty)}}$ und $\phi_{t_0} = |\cdot|_{*p}$ aus Theorem 5.13. Der Beweis im Falle $p \in (2, \infty)$ wird in zwei Schritten erfolgen. Im ersten Schritt wird hierbei gezeigt, dass die Menge M_0 o.B.d.A. als ein n -dimensionaler Quader gewählt werden kann, auf welchem die Funktion $\tau_{n,p}$ entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend ist entlang einer beliebigen Strecke $\{t_0 + \lambda \cdot (a - t_0) : \lambda \in [0, 1]\}$, $a \in M_0 \setminus \{t_0\}$, wobei t_0 die in diesem Fall eindeutig bestimmte Maximalstelle der Einschränkung des Betrages von $\tau_{n,p}$ auf M_0 ist. Im zweiten Schritt wird dann bewiesen, dass $\tau_{n,p}$ auf M_0 von einem lokal-charakteristischen Generator erzeugt wird.

Aufgrund der in (1.19) hervorgehobenen Invarianzeigenschaften von $\tau_{n,p}$ nehmen wir im Folgenden o.B.d.A. an, dass $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

1. Schritt: Die Funktion τ_p besitzt mit Lemma 1.32, Theorem 4.1 sowie Lemma 4.2 abzählbar viele Nullstellen und lokale Extremstellen, welche jeweils isoliert sind. Aus Lemma 1.32, Theorem 4.1 und Lemma 4.2 folgt zudem auch, dass τ_p zwischen zwei benachbarten lokalen Extremstellen streng monoton ist. Sei nun x_1, x_2, \dots die (u.U. endliche) geordnete Folge der nichtnegativen Nullstellen und lokalen Extremstellen von τ_p . Im Falle der Existenz eines maximalen Elementes x_m von $\{x_1, x_2, \dots\}$ sei überdies $x_{m+1} := \max(x_m, K)$, wobei K eine positive Konstante ist mit $K > y_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann existieren Konstanten $k_1 \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \dots, k_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ so, dass $x_{k_i} \leq y_i \leq x_{k_i+1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Der Vektor y ist somit ein Element des n -dimensionalen Quaders

$$M_0 := \{(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_{k_i} \leq t_i \leq x_{k_i+1}, i \in \{1, \dots, n\}\} \quad .$$

Da die Einschränkung des Betrages von τ_p auf ein beliebiges Intervall (x_{k_i}, x_{k_i+1}) , $i \in \{1, \dots, n\}$, ferner positiv und streng monoton ist, existiert die eindeutig bestimmte Maximalstelle t_0 der Einschränkung des Betrages von $\tau_{n,p}$ auf M_0 , wobei

$$|\tau_{n,p}|_{M_0}(t) = \prod_{i=1}^n \left| \tau_p|_{[x_{k_i}, x_{k_i+1}]}(t_i) \right|, \quad t = (t_1, \dots, t_n)^T \in M_0, \quad (8.78)$$

vgl. mit (4.1). Hierbei wird aus (8.78) auch deutlich, dass $t_0 = (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})^T$, wobei $j_i \in \{k_i, k_i + 1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, d.h. t_0 stimmt mit einem der Eckpunkte von M_0 überein, vgl. mit Abbildung 21 (a). Seien nun $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in M_0 \setminus (M_0^\circ \cup \{t_0\})$ ein beliebiger von t_0 verschiedener Vektor auf dem Rand von M_0 und $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$. Dann folgt aus dem streng monotonen Verhalten von τ_p auf $[x_{k_i}, x_{k_i+1}]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, und der Eigenschaft von t_0 als Betragsmaximierer von $\tau_{n,p}$ auf M_0 , dass

$$|\tau_p(x_{j_i} + \lambda_1 \cdot (a_i - x_{j_i}))| > |\tau_p(x_{j_i} + \lambda_2 \cdot (a_i - x_{j_i}))|, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

d.h.

$$\begin{aligned} |\tau_{n,p}(t_0 + \lambda_1 \cdot (a - t_0))| &= \prod_{i=1}^n |\tau_p(x_{j_i} + \lambda_1 \cdot (a_i - x_{j_i}))| \\ &> |\tau_p(x_{j_1} + \lambda_2 \cdot (a_1 - x_{j_1}))| \cdot \prod_{i=2}^n |\tau_p(x_{j_i} + \lambda_1 \cdot (a_i - x_{j_i}))| \\ &\dots \\ &> \prod_{i=1}^n |\tau_p(x_{j_i} + \lambda_2 \cdot (a_i - x_{j_i}))| \\ &= |\tau_{n,p}(t_0 + \lambda_2 \cdot (a - t_0))|. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Die charakteristische Funktion $\tau_{n,p}$ ist daher entweder streng monoton fallend entlang einer beliebigen Strecke $\{t_0 + \lambda \cdot (a - t_0) : \lambda \in [0, 1]\}$, $a \in M_0 \setminus \{t_0\}$, oder streng monoton wachsend entlang einer beliebigen Strecke $\{t_0 + \lambda \cdot (a - t_0) : \lambda \in [0, 1]\}$, $a \in M_0 \setminus \{t_0\}$.

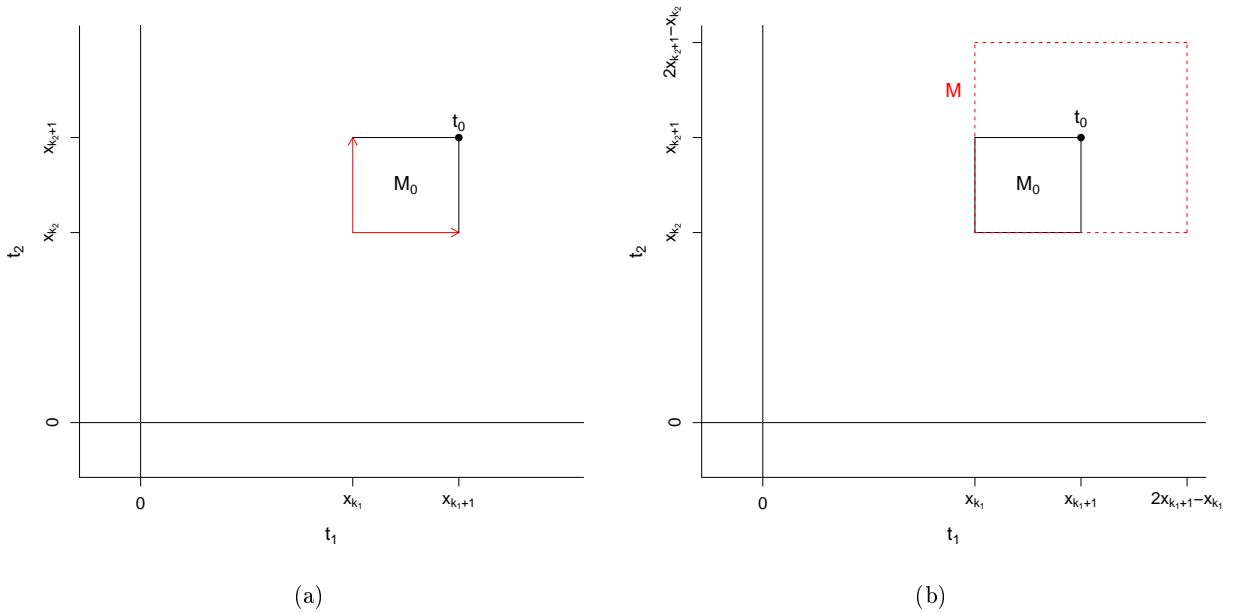


Abbildung 21: (a) Der Betragsmaximierer t_0 von $\tau_{n,p}|_{M_0}$ ergibt sich aus der (rot dargestellten) Wachstumsrichtung des Betrages von $\tau_p|_{[x_{k_i}, x_{k_i+1}]}$, $i = 1, \dots, n$. (b) Die Menge M ergibt sich durch die Transformation der Menge M_0 mit einer Abbildung \mathcal{S} , welche als Hintereinanderausführung von Spiegelungen an Hyperebenen $\{(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n : t_i = t_{0,i}\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, aufgefasst werden kann.

2. Schritt: Die Funktion $\tau_{n,p|M_0}$ besitzt ein Betragsmaximum in t_0 und weist keine Vorzeichenwechsel auf. Aufgrund des streng monotonen Verhaltens von $\tau_{n,p}$ entlang einer beliebigen Strecke

$$\{t_0 + \lambda \cdot (a - t_0) : \lambda \in [0, 1]\} \quad , \quad a \in M_0 \setminus \{t_0\} ,$$

besitzt $\tau_{n,p|M_0}$ zudem einen (u.U. nicht eindeutig bestimmten) Betragsminimierer a_0 auf dem Rand von M_0 . Das Bild $W_0 := \{h_0(x) : x \in [0, 1]\}$ der skalaren Funktion

$$h_0(x) := \tau_{n,p}(t_0 + x \cdot (a_0 - t_0)) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0} , \quad (8.80)$$

stimmt somit überein mit dem Bild von $\tau_{n,p|M_0}$. Da h_0 mit Schritt 1 darüber hinaus streng monoton wachsend oder streng monoton fallend auf $[0, 1]$ ist, existiert die streng monotone Umkehrabbildung $h_{0|[0,1]}^{-1} : W_0 \rightarrow [0, 1]$. Wir erhalten hiermit

$$\tau_{n,p}(t) = h_0 \left(\tilde{\phi}_{t_0}(t) \right) \quad , \quad t \in M_0 , \quad (8.81)$$

wobei $\tilde{\phi}_{t_0}(t) := h_{0|[0,1]}^{-1}(\tau_{n,p}(t))$, $t \in M_0$. Hierbei ist $\tilde{\phi}_{t_0}$ als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen stetig. Es ist überdies

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{t_0}(t) = 0 &\Leftrightarrow \tau_{n,p}(t) = \tau_{n,p}(t_0) \\ &\Leftrightarrow t = t_0 \quad . \end{aligned}$$

Seien nun $a \in M_0 \setminus \{t_0\}$ und $\lambda \in (0, 1)$. Dann ist $|\tau_{n,p}(t_0 + \lambda \cdot (a - t_0))| > |\tau_{n,p}(a)|$. Hiermit gilt aber auch, dass

$$h_{0|[0,1]}^{-1}(\tau_{n,p}(t_0 + \lambda \cdot (a - t_0))) < h_{0|[0,1]}^{-1}(\tau_{n,p}(a)) .$$

Die Funktion $\tilde{\phi}_{t_0}$ besitzt aus diesem Grund auf M_0 die Eigenschaften (i)-(iii) eines in t_0 zentrierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktional. Dies gilt ebenso für die Funktion $\phi_{t_0} : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei

$$M := \{t_0 + \text{diag}(d_1, \dots, d_n)(t - t_0) : t \in M_0, |d_i| = 1, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

und

$$\phi_{t_0}(t_0 + \text{diag}(d_1, \dots, d_n)(t - t_0)) := \tilde{\phi}_{t_0}(t) \quad , \quad t \in M_0 ,$$

vgl. mit Abbildung 21 (b). Da der Vektor t_0 im Inneren von M liegt, ist durch ϕ_{t_0} ein in t_0 zentriertes lokal-verallgemeinertes Radiusfunktional definiert, welches auf M_0 mit $\tilde{\phi}_{t_0}$ übereinstimmt. Die Behauptung folgt nun aus (8.80) und (8.81). \square

Beweis von Theorem 5.25. In Analogie zu Schritt 2 des Beweises von Theorem 5.24 ist $\varphi|_{M_0}$ darstellbar als

$$\varphi(t) = h_0 \left(\tilde{\phi}_{t_0}(t) \right) \quad , \quad t \in M_0 , \quad (8.82)$$

wobei $\tilde{\phi}_{t_0} := h_{0|[0,1]}^{-1} \circ \varphi$ und

$$h_0(x) = \varphi(t_0 + x \cdot (a_0 - t_0)) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

Der Vektor a_0 ist hierbei ein globaler Minimierer von $\varphi|_{M_0}$, falls t_0 der globale Maximierer von $\varphi|_{M_0}$ ist, bzw. ein globaler Maximierer von $\varphi|_{M_0}$, falls t_0 der globale Minimierer von $\varphi|_{M_0}$ ist. Es lässt sich zudem in analoger Weise zum Beweis von Theorem 5.24 zeigen, dass $\tilde{\phi}_{t_0}$ auf M_0 die Eigenschaften (i)-(iii) eines in t_0 zentrierten lokal-verallgemeinerten Radiusfunktional besitzt. Da t_0 darüber hinaus im Inneren von M_0 enthalten ist, folgt die Behauptung mit $\phi_{t_0} = \tilde{\phi}_{t_0}$ aus (8.82). \square

Beweis von Theorem 6.5. Es wird zunächst gezeigt, dass durch f_R die Dichte einer P -f.s. positiven Zufallsgröße R gegeben ist. Hierbei ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{m-n-1} \exp\left(-\frac{m}{\alpha} r^\alpha\right) dr &= \alpha^{\frac{m-n}{\alpha}-1} m^{\frac{n-m}{\alpha}} \int_0^\infty y^{\frac{m-n}{\alpha}-1} e^{-y} dy \\ &= \alpha^{\frac{m-n}{\alpha}-1} m^{\frac{n-m}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right), \end{aligned} \quad (8.83)$$

wobei sich Gleichung (8.83) durch die Substitution von $y = (m/\alpha) r^\alpha$ ergibt. Da f_R zudem nichtnegativ ist und auf $(-\infty, 0]$ verschwindet, kann f_R als die Wahrscheinlichkeitsdichte einer P -f.s. positiven Zufallsgröße R angesehen werden. Die Substitution von $y = (m/\alpha)^{-1/\alpha} r$ in (6.12) führt ferner für die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte f von X auf die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}\right)^n \frac{m^{\frac{m}{\alpha}} \alpha^{1-\frac{m}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)} \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} r x\right) r^{m-n-1} e^{-\frac{m r^\alpha}{\alpha}} r^n dr \\ &= \left(\frac{m^{1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi \alpha^{1+1/\alpha}}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)} \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} r x\right) r^n f_R(r) dr \\ &= \int_0^\infty \nu_{n,m,\alpha}(r x) r^n f_R(r) dr \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (8.84)$$

wobei

$$\nu_{n,m,\alpha}(x) := \left(\frac{m^{1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi \alpha^{1+1/\alpha}}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)} \varphi_{n,m,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} x\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.85)$$

Im nächsten Beweisschritt wird nun gezeigt, dass durch $\nu_{n,m,\alpha}$ eine positiv definite n -variate Wahrscheinlichkeitsdichte definiert ist. Hierbei folgt im Falle $\alpha \in (0, 1]$ aus der in (3.1) angegebenen Darstellung von $\varphi_{n,m,\alpha}$ mithilfe der univariaten charakteristischen Funktionen $\varphi_{1,m_1,\alpha}, \dots, \varphi_{1,m_n,\alpha}$ und den Ausführungen im Beweis von Theorem 3.15, dass $\varphi_{n,m,\alpha}$ analog zu den Funktionen $\varphi_{1,m_1,\alpha}, \dots, \varphi_{1,m_n,\alpha}$ nichtnegativ und integrierbar ist, sofern $m = m_1 + \dots + m_n$, $m_i \geq 4$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Im Falle $\alpha \in (1, 2)$ wurde zudem bereits im Beweis von Korollar 3.18 (ii) ausgenutzt, dass $\omega_{n,m,\alpha}$ eine stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt und $\varphi_{n,m,\alpha}$ somit nichtnegativ und integrierbar ist, vgl. hierzu auch mit Theorem 1.46. Die Funktion $\nu_{n,m,\alpha}$ ist aus diesem Grund analog zu $\varphi_{n,m,\alpha}$ nichtnegativ und integrierbar und stimmt bis auf einen Normierungsfaktor mit der stetig positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte eines n -variaten Zufallsvektors $S = (S_1, \dots, S_n)^T$ überein. Sei nun o.B.d.A. S unabhängig von der P -f.s. positiven Zufallsgröße R . Dann existiert eine Konstante $c > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S}{R} \in A\right) &= \mathbb{E} P\left(\frac{S}{R} \in A \mid R\right) \\ &= c \int_0^\infty \left(\int_A \nu_{n,m,\alpha}(r x) r^n dx\right) f_R(r) dr \\ &= c \int_0^\infty \int_A \nu_{n,m,\alpha}(r x) r^n f_R(r) dr dx \quad , \quad A \in \mathfrak{B}_n, \end{aligned}$$

vgl. mit Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998) und dem Satz von Fubini. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von S/R ist daher proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte f . Dies impliziert insbesondere, dass $c = 1$ und $\nu_{n,m,\alpha}$ die stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsvektors S ist. Aus (8.85) ergibt sich weiterhin, dass $\nu_{n,m,\alpha}$ proportional zur charakteristischen Funktion eines Zufallsvektors \tilde{U} ist, wobei $(\alpha/m)^{\frac{1}{\alpha}} \tilde{U}$ die Verteilung $\omega_{n,m,\alpha}$ besitzt. Hiermit folgt aus Theorem 1.46, dass die charakteristische Funktion von S proportional zur stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte von \tilde{U} ist, d.h.

$$\mathbb{E} \exp(i\langle t, S \rangle) = \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}((m/\alpha)^{1/\alpha})}(t) \left(1 - \frac{|t|_\alpha^\alpha}{m/\alpha}\right)^{\frac{m-n}{\alpha}-1} \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

□

Beweis von Theorem 6.7. Die Behauptungen (i) und (ii) folgen sofort aus der in (6.14) angegebenen Darstellung der charakteristischen Funktion von S . Darüber hinaus wurde die Behauptung (iii) bereits im Beweis von Theorem 6.5 gezeigt, vgl. hierzu mit (8.85). Für den Beweis der Behauptung (iv) wird die in (3.1) angegebene Darstellung von $\varphi_{n,m,p}$ verwendet, welche aus Korollar 2.13 folgt. Mit dieser ist

$$\begin{aligned} \nu_{n,m,\alpha}(x) &= \left(\frac{m^{1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi \alpha^{1+1/\alpha}} \right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)} \varphi_{n,m,\alpha}\left((m/\alpha)^{1/\alpha} x\right) \\ &= \left(\frac{m^{1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi \alpha^{1+1/\alpha}} \right)^n \frac{\alpha^{n-1} \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{\alpha}\right)} \int_{S_{n,\alpha}^+} \prod_{i=1}^n \left[\varphi_{1,m_i,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \theta_i x_i\right) \theta_i^{m_i-1} \right] \mathfrak{D}_{n,\alpha}(d\theta) \\ &= \underbrace{\frac{m^{n/\alpha} \Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\pi^n \alpha^{1+n/\alpha} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{\alpha}\right)}}_{=C_{\alpha,n,m}} \int_{S_{n,\alpha}^+} \prod_{i=1}^n \left[\varphi_{1,m_i,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \theta_i x_i\right) \theta_i^{m_i-1} \right] \mathfrak{D}_{n,\alpha}(d\theta) \quad , x \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

Im Zuge des Beweises der Behauptung (v) betrachten wir für $j \in \{1, \dots, n\}$ zunächst die charakteristische Funktion von W_j , welche gegeben ist durch

$$\mathbb{E} \exp(it W_j) = \mathbb{I}_{[-(m/\alpha)^{1/\alpha}, (m/\alpha)^{1/\alpha}]}(t) \left(1 - \frac{|t|^\alpha}{m/\alpha}\right)^{\frac{m_j-1}{\alpha}-1} \quad , t \in \mathbb{R} . \quad (8.86)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die rechte Seite in (8.86) unter den gegebenen Voraussetzungen sowie unter Berücksichtigung der Theoreme 3.15 und 3.16 eine univariate charakteristische Funktion ist. Da es sich bei der charakteristischen Funktion von W_j zudem für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ um eine integrierbare und nichtnegative Funktion handelt, ist $\varphi_{1,m_j,\alpha}$ mit Theorem 1.46 proportional zur stetig positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte von $(m/\alpha)^{1/\alpha} W_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Hierbei gilt mit Beispiel 1.14 und Theorem 1.46, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial P\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} W_j < x\right)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{m_j-1}{\alpha}\right)}{\alpha \Gamma\left(\frac{m_j}{\alpha}\right)} \varphi_{1,m_j,\alpha}(x) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{m_j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_j}{\alpha}\right) \alpha \pi} \varphi_{1,m_j,\alpha}(x) \quad , x \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, n\} . \end{aligned}$$

Die Zufallsgröße W_j besitzt daher für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ eine stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte mit

$$\frac{\partial P(W_j < x)}{\partial x} = \gamma_j \cdot \varphi_{1,m_j,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} x\right) \quad , x \in \mathbb{R} ,$$

wobei

$$\gamma_j := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{m_j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_j}{\alpha}\right) \alpha \pi} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} .$$

Wir erhalten somit für die Verteilungsfunktion F des Zufallsvektors $\left(\frac{W_1}{\Theta_1}, \dots, \frac{W_n}{\Theta_n}\right)^T$, dass

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{E} P\left(\frac{W_1}{\Theta_1} < x_1, \dots, \frac{W_n}{\Theta_n} < x_n \mid \Theta\right) \\ &= \frac{\alpha^{n-1} \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i-1}{\alpha}\right)} \int_{S_{n,\alpha}^+} \left[\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^n \gamma_i \cdot \varphi_{1,m_i,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \theta_i y_i\right) \theta_i dy \right] \prod_{i=1}^n \theta_i^{m_i-2} \mathfrak{D}_{n,\alpha}(d\theta) \end{aligned} \quad (8.87)$$

$$= \gamma \cdot \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \left[\int_{S_{n,\alpha}^+} \prod_{i=1}^n \varphi_{1,m_i,\alpha}\left(\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \theta_i y_i\right) \theta_i^{m_i-1} \mathfrak{D}_{n,\alpha}(d\theta) \right] dy \quad , x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n , \quad (8.88)$$

wobei (8.87) aus Satz 6.2.2 in (Schürger, 1998) und (8.88) aus dem Satz von Fubini folgt. Für die in (8.88) eingeführte Konstante γ gilt ferner

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\alpha^{n-1} \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i-1}{\alpha}\right)} \prod_{i=1}^n \gamma_i \\
&= \frac{\alpha^{n-1} \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i-1}{\alpha}\right)} \frac{m^{n/\alpha} \Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i-1}{\alpha}\right)}{\pi^n \alpha^{n+n/\alpha} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{\alpha}\right)} \\
&= \frac{m^{n/\alpha} \Gamma^n\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{m-n}{\alpha}\right)}{\pi^n \alpha^{1+n/\alpha} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{m_i}{\alpha}\right)} \\
&= C_{\alpha,n,m}.
\end{aligned}$$

Der Zufallsvektor $\left(\frac{W_1}{\Theta_1}, \dots, \frac{W_n}{\Theta_n}\right)^T$ besitzt daher die Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m,\alpha}$, vgl. mit (iv). Hiermit ist die Behauptung (v) gezeigt. \square

Beweis von Theorem 6.18. Wir nehmen zunächst an, dass

$$\varphi(t) = \gamma_1 \cdot g(|t|^\alpha) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

wobei γ_1 eine positive Konstante und $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die dichtegenerierende Funktion eines Zufallsvektors Y mit $\mathfrak{L}(Y) \in \Phi_{n,\alpha}^*$ ist. Dann gilt mit Theorem 1.24 und den Bezeichnungen aus Definition 6.8, dass

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\gamma_1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(|t|^\alpha) e^{-itx} dt \\
&= \frac{\gamma_1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(|t|^\alpha) e^{itx} dt \\
&= \gamma_2 \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}(rx) dF(r) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

wobei γ_2 eine positive Konstante und F die Verteilungsfunktion der P -f.s. positiven erzeugenden Zufallsgröße R von Y bzgl. des Basisvektors $U \sim \omega_{n,m,\alpha}$ ist, vgl. mit Definition 6.14. Es ist somit insbesondere $0 < \mathbb{E}R^{-n} < \infty$. Hiermit ist ferner durch

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}R^{-n}} \int_0^x r^{-n} dF(r) \quad , \quad x \geq 0,$$

die Verteilungsfunktion einer P -f.s. positiven Zufallsgröße R_2 definiert. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von X ist in diesem Zusammenhang auch darstellbar als

$$f(x) = \gamma_2 \cdot \mathbb{E}R^{-n} \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}(rx) r^n d\tilde{F}(r) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.89)$$

Die Substitution von $r = (m\alpha)^{1/\alpha} v$ in (8.89) ergibt nun weiterhin, dass

$$\begin{aligned}
f(x) &= \gamma_2 \cdot \mathbb{E}R^{-n} \cdot \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \int_0^\infty \varphi_{n,m,\alpha}\left((m/\alpha)^{1/\alpha} vx\right) v^n d\tilde{F}\left((m\alpha)^{1/\alpha} v\right) \\
&= \gamma_3 \int_0^\infty \nu_{n,m,\alpha}(vx) v^n d\hat{F}(v) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \quad (8.90)$$

wobei γ_3 eine positive Konstante und \hat{F} die Verteilungsfunktion der P -f.s. positiven Zufallsgröße $R_3 = (m/\alpha)^{-1/\alpha} R_2$ ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichte f ist nun mit (8.90) proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte von $R_3^{-1} S$, wobei S der zu $A_{n,\alpha}$ gehörige und von R_3 unabhängige Basisvektor mit Dichte $\nu_{n,m,\alpha}$ ist, vgl. mit Korollar 6.11. Es ist daher $\gamma_3 = 1$ und

$$X \stackrel{d}{=} R_3^{-1} S,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (R_3^{-1})^{-n} &= \mathbb{E} R_3^n \\ &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{-n/\alpha} \int_0^\infty v^n d\tilde{F}(v) \\ &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{-n/\alpha} \frac{1}{\mathbb{E} R^{-n}} \int_0^\infty v^n v^{-n} dF(v) \\ &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{-n/\alpha} \frac{1}{\mathbb{E} R^{-n}}. \end{aligned}$$

Die Verteilung des Zufallsvektors X ist aus diesem Grund in $A_{n,\alpha}^*$ enthalten.

Sei nun auf der anderen Seite vorausgesetzt, dass $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}^*$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 6.8, dass

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}((m/\alpha)^{1/\alpha})}(rt) \left(1 - \frac{|rt|^\alpha}{m/\alpha}\right)^{\frac{m-n}{\alpha}-1} dF(r), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

wobei F die Verteilungsfunktion der P -f.s. positiven erzeugenden Zufallsgröße R von X bzgl. des Basisvektors S von $A_{n,\alpha}$ ist. Hiermit ist insbesondere $0 < \mathbb{E} R^{-n} < \infty$, d.h. die Funktion

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ (\mathbb{E} R^{-n})^{-1} \int_0^x r^{-n} dF(r) & , x > 0, \end{cases}$$

kann als die Verteilungsfunktion einer P -f.s. positiven Zufallsgröße R_2 angesehen werden. Die charakteristische Funktion von X ist überdies darstellbar als

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathbb{E} R^{-n} \int_0^\infty \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}((m/\alpha)^{1/\alpha})}(rt) \left(1 - \frac{|rt|^\alpha}{m/\alpha}\right)^{\frac{m-n}{\alpha}-1} r^n d\tilde{F}(r) \\ &= \mathbb{E} R^{-n} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \int_0^\infty \mathbf{I}_{K_{n,\alpha}}(vt) (1 - |vt|^\alpha)^{\frac{m-n}{\alpha}-1} v^n d\hat{F}(r), \quad t \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (8.91)$$

wobei \hat{F} die Verteilungsfunktion der P -f.s. positiven Zufallsgröße $R_3 = (m/\alpha)^{-1/\alpha} R_2$ ist. Aus (8.91) folgt nun, dass φ proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte eines Zufallsvektors $Y \stackrel{d}{=} R_3^{-1} U$ ist, wobei U ein von R_3 unabhängiger Zufallsvektor mit $U \sim \omega_{n,m,\alpha}$ ist. Hierbei gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (R_3^{-1})^{-n} &= \mathbb{E} R_3^n \\ &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{-n/\alpha} \int_0^\infty v^n d\tilde{F}(v) \\ &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{-n/\alpha} \frac{1}{\mathbb{E} R^{-n}} \int_0^\infty v^n v^{-n} dF(v) \\ &= \left(\frac{m}{\alpha}\right)^{-n/\alpha} \frac{1}{\mathbb{E} R^{-n}}. \end{aligned}$$

Die Verteilung des Zufallsvektors Y ist somit in $\Phi_{n,\alpha}^*$ enthalten. □

Beweis von Korollar 6.20. Der Zufallsvektor X besitzt mit Theorem 1.46 eine stetig positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte \tilde{f} , welche proportional zu $\tau_{n,\alpha}$ ist. Wir erhalten daher aus Theorem 4.1, dass

$$\tilde{f}(rx) < \tilde{f}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \quad r > 1. \quad (8.92)$$

Aus Beispiel 6.13 folgt zudem, dass $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,\alpha}^*$. Hiermit ist insbesondere auch $\mathfrak{L}(Y) \in A_{n,\alpha}^*$. Für die zu Y gehörige stetige Wahrscheinlichkeitsdichte f gilt dabei mit Satz 6.2.2 aus (Schürger, 1998), dass

$$f(x) = \int_0^\infty \tilde{f}(x/r) r^{-n} dF(r) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8.93)$$

wobei F die Verteilungsfunktion von R ist. Aus den Gleichungen (8.92) und (8.93) ergibt sich ferner, dass

$$f(rx) < f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \quad r > 1.$$

Die Behauptung folgt nun aus Theorem 6.19. □

Beweis von Korollar 6.21. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\nu_{n,m,1}$ ist mit Theorem 6.7 proportional zur Funktion

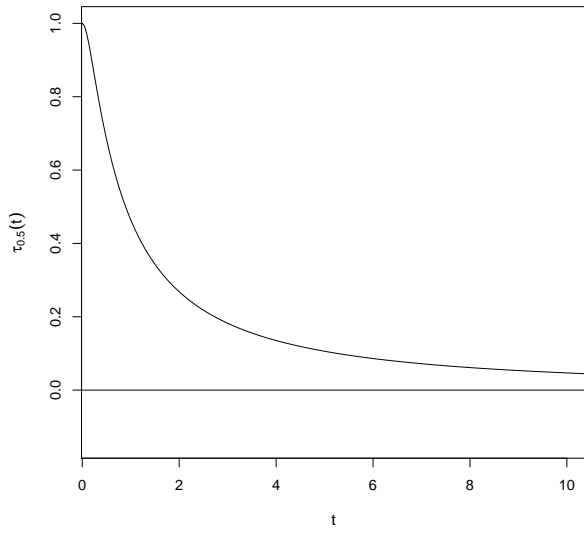
$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_{n,m,1}(mx) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Es folgt daher aus Korollar 3.18 (iii), dass

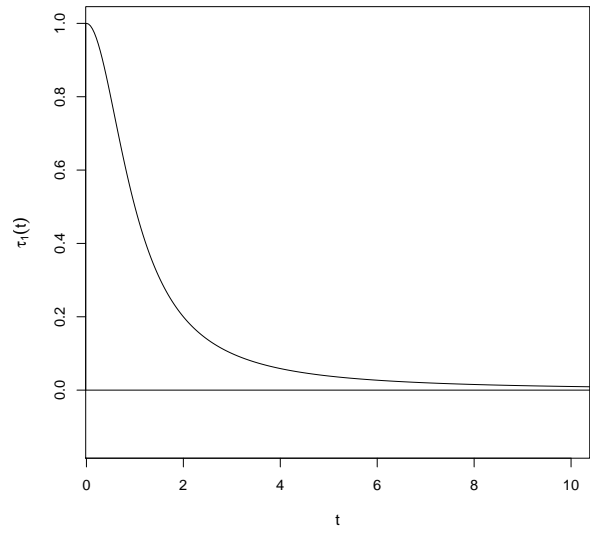
$$\nu_{n,m,1}(rx) < \nu_{n,m,1}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \quad r > 1.$$

Da die zu $\nu_{n,m,1}$ gehörige und in Theorem 6.5 beschriebene charakteristische Funktion von X zudem integrierbar ist erhalten wir insbesondere, dass $\mathfrak{L}(X) \in A_{n,1}^*$. Die Behauptung ergibt sich somit in analoger Weise zum Beweis von Korollar 6.20 aus Theorem 6.19. □

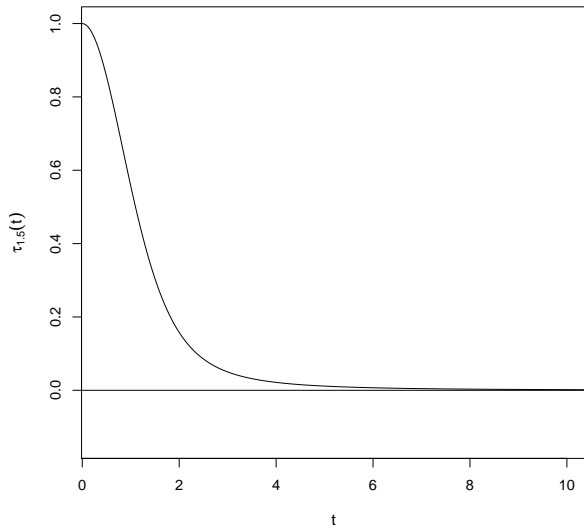
Anhang C: Abbildungen



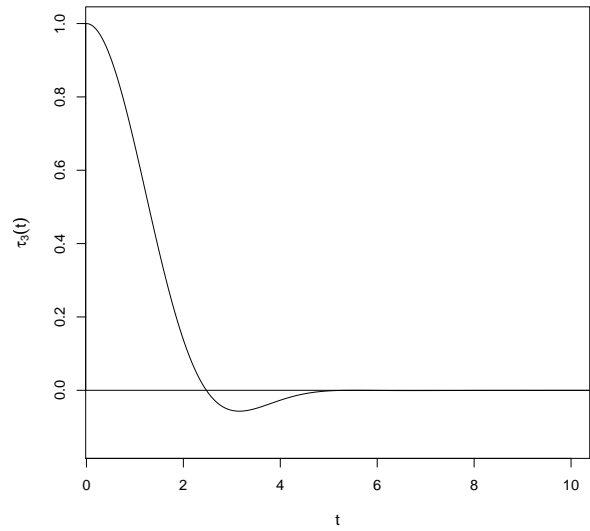
(a)



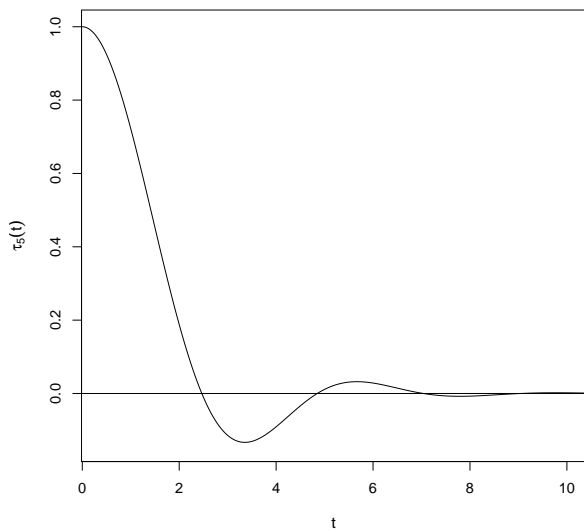
(b)



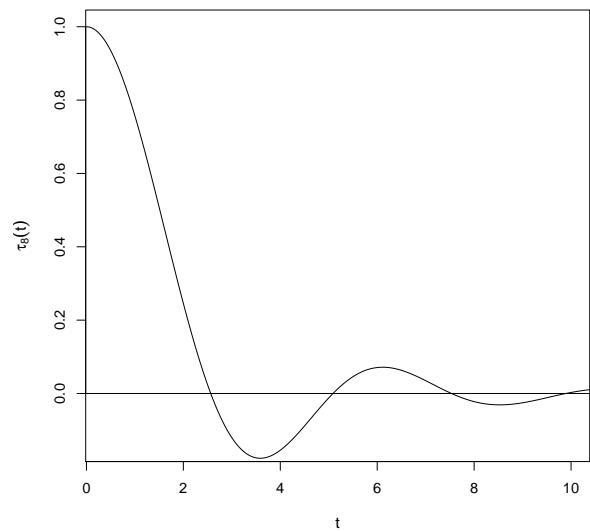
(c)



(d)

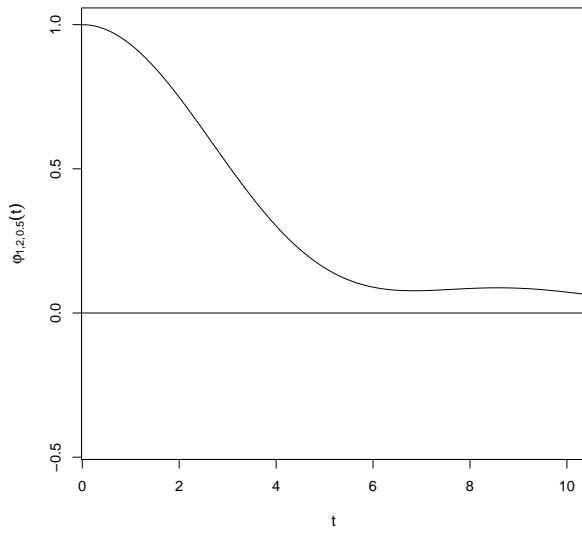


(e)

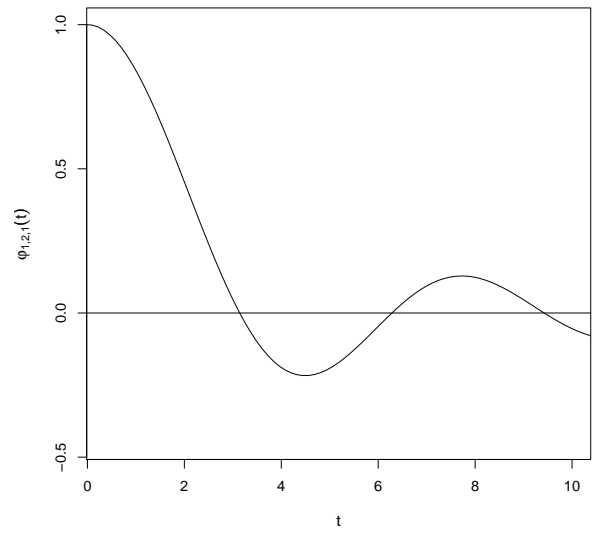


(f)

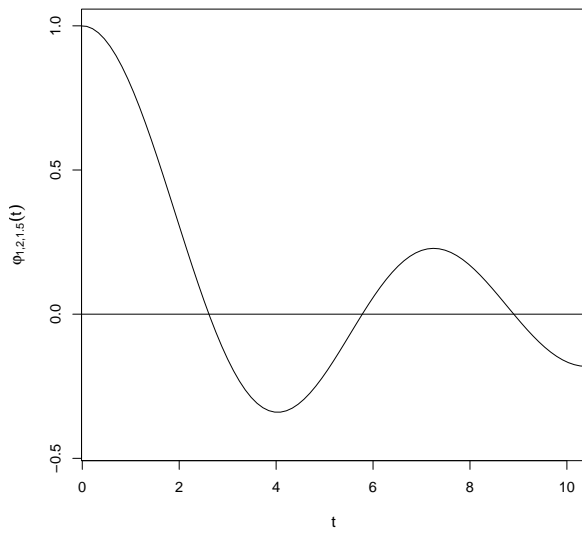
Abbildung 22: Die charakteristische Funktion τ_p in den Fällen (a) $p = 1/2$, (b) $p = 1$, (c) $p = 3/2$, (d) $p = 3$, (e) $p = 5$ und (f) $p = 8$.



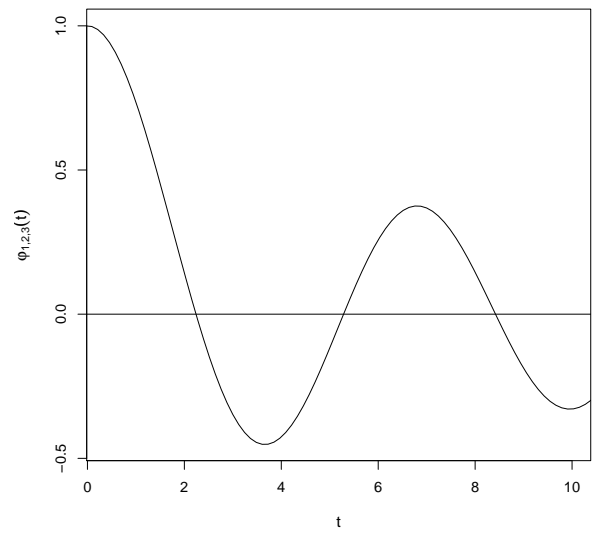
(a)



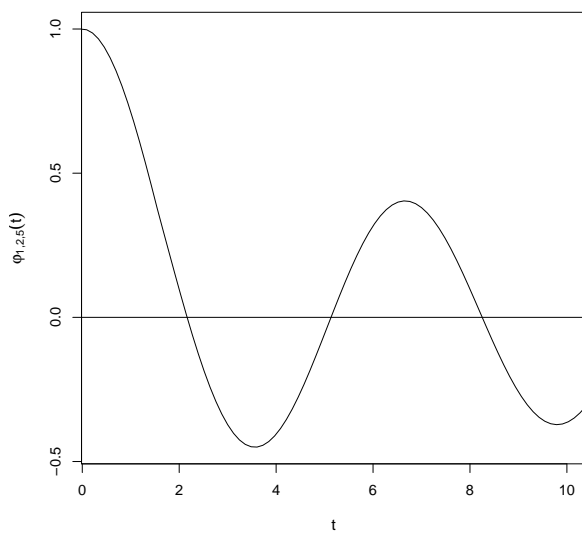
(b)



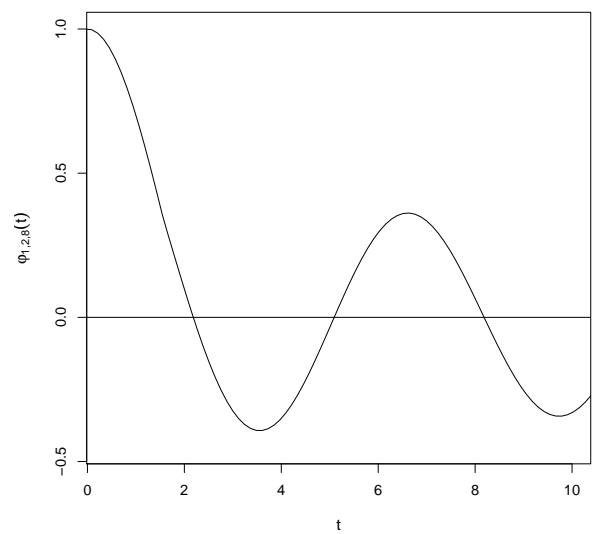
(c)



(d)

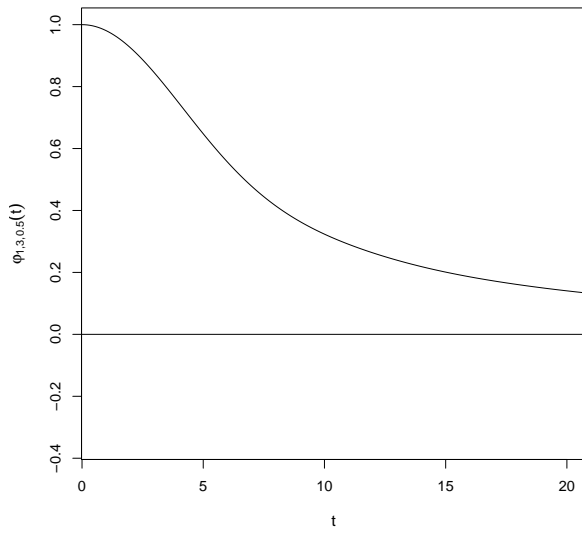


(e)

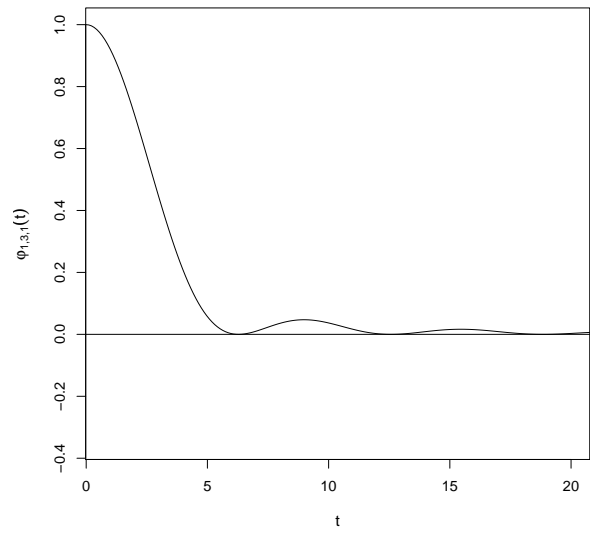


(f)

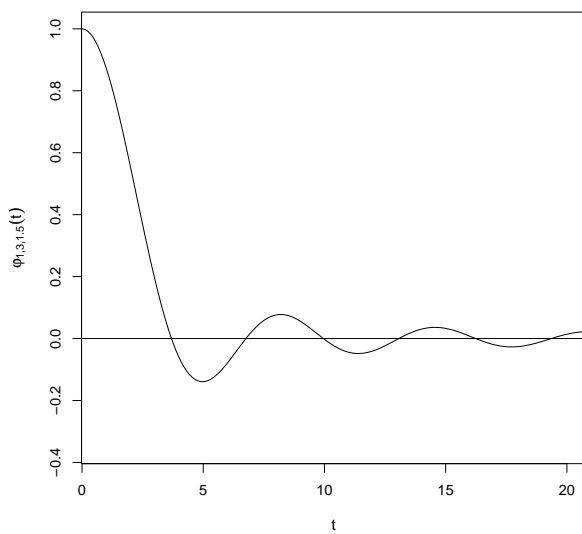
Abbildung 23: Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,2,p}$ in den Fällen (a) $p = 1/2$, (b) $p = 1$, (c) $p = 3/2$, (d) $p = 3$, (e) $p = 5$ und (f) $p = 8$.



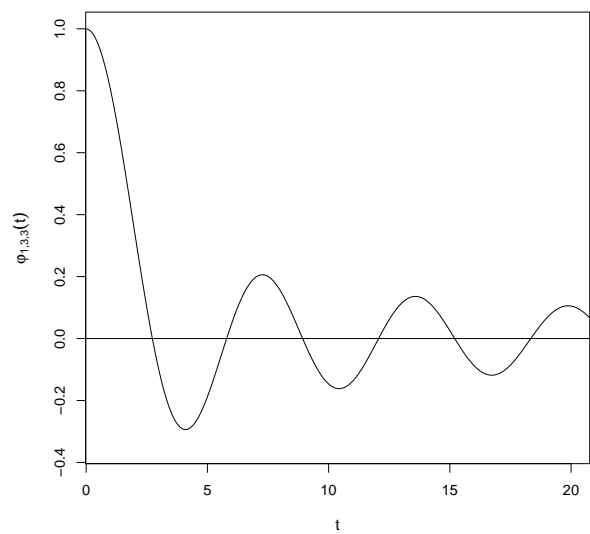
(a)



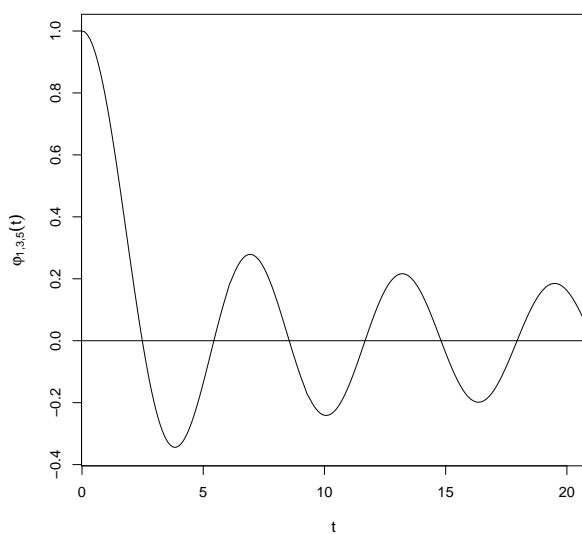
(b)



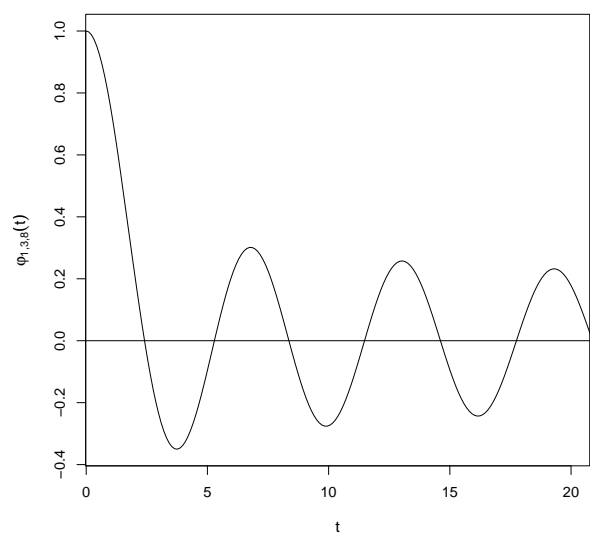
(c)



(d)

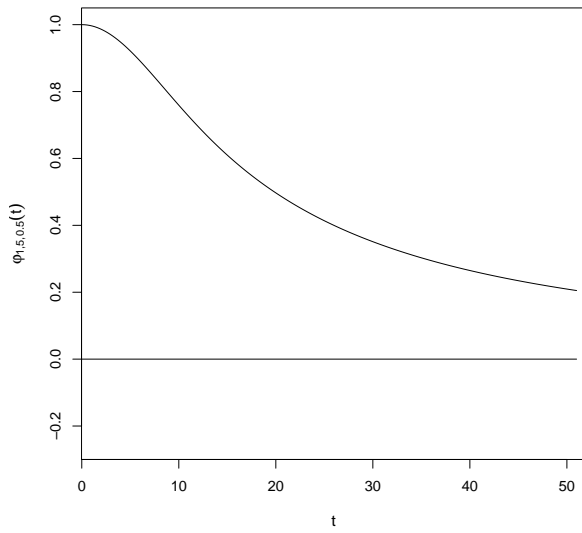


(e)

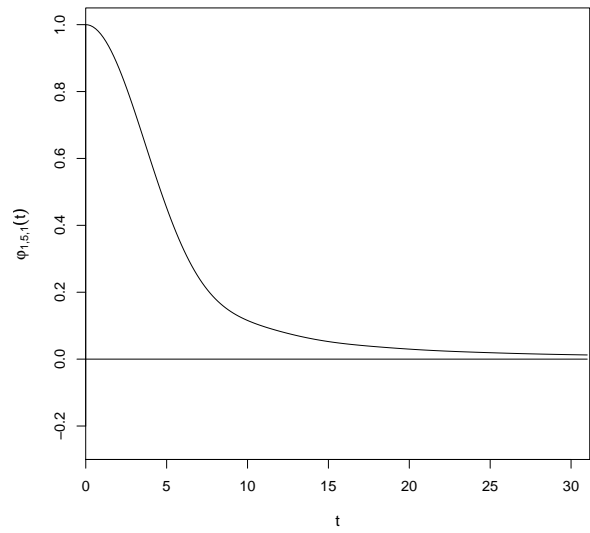


(f)

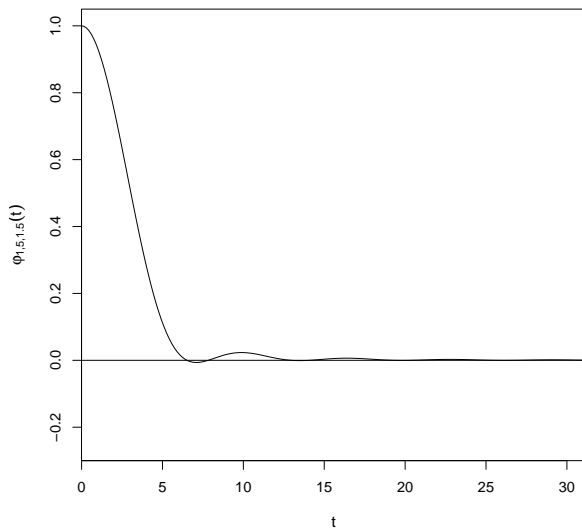
Abbildung 24: Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,3,p}$ in den Fällen (a) $p = 1/2$, (b) $p = 1$, (c) $p = 3/2$, (d) $p = 3$, (e) $p = 5$ und (f) $p = 8$.



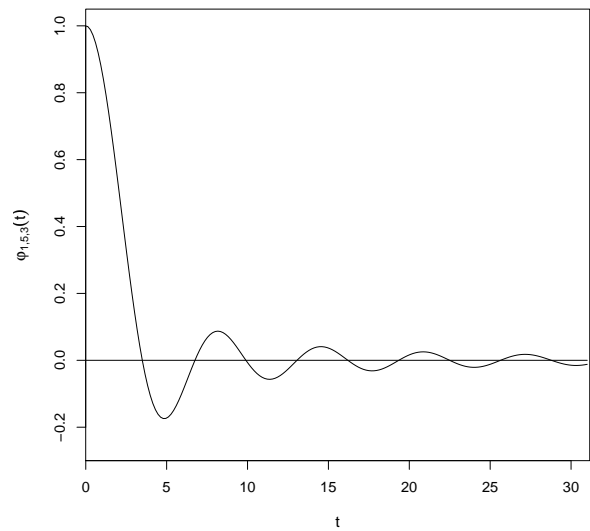
(a)



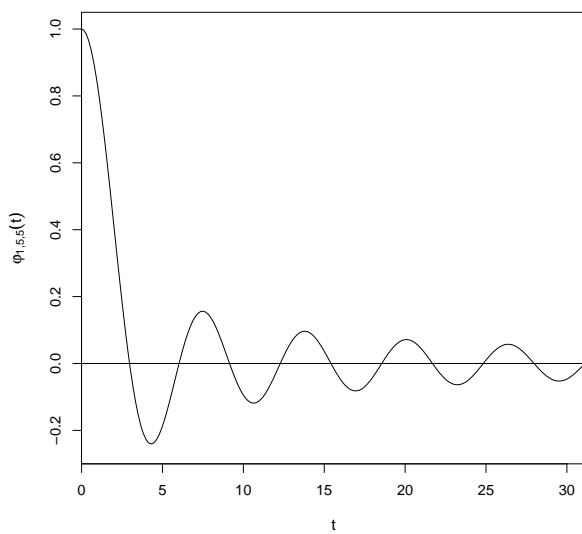
(b)



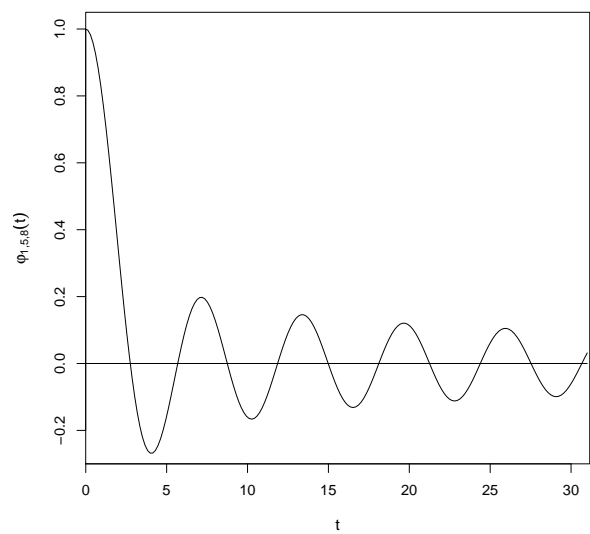
(c)



(d)

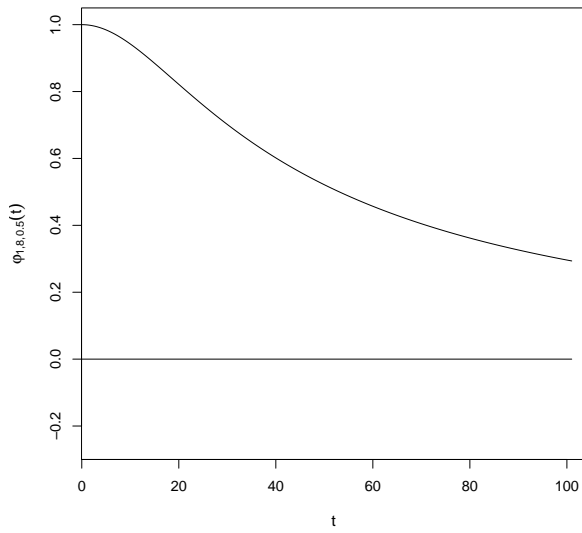


(e)

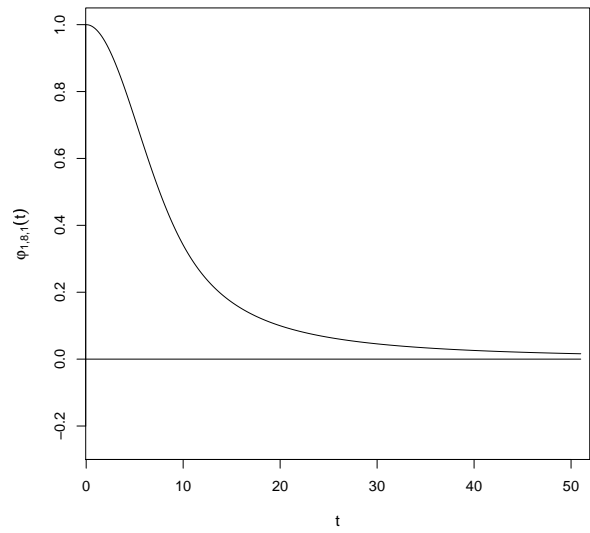


(f)

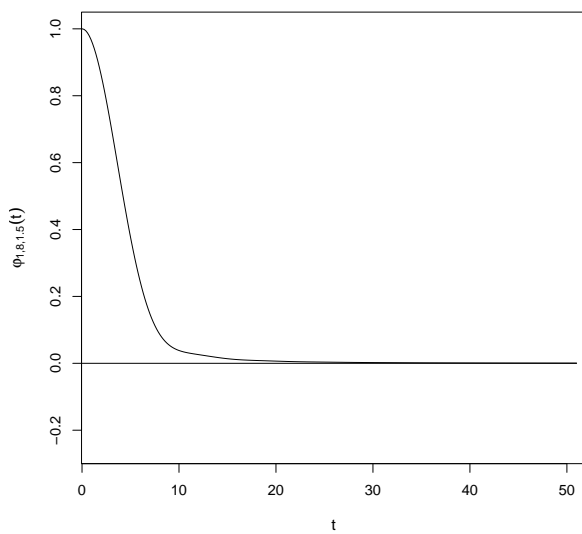
Abbildung 25: Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,5,p}$ in den Fällen (a) $p = 1/2$, (b) $p = 1$, (c) $p = 3/2$, (d) $p = 3$, (e) $p = 5$ und (f) $p = 8$.



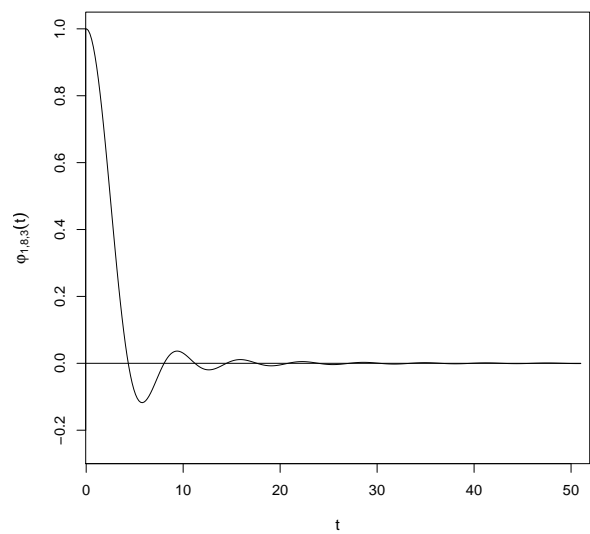
(a)



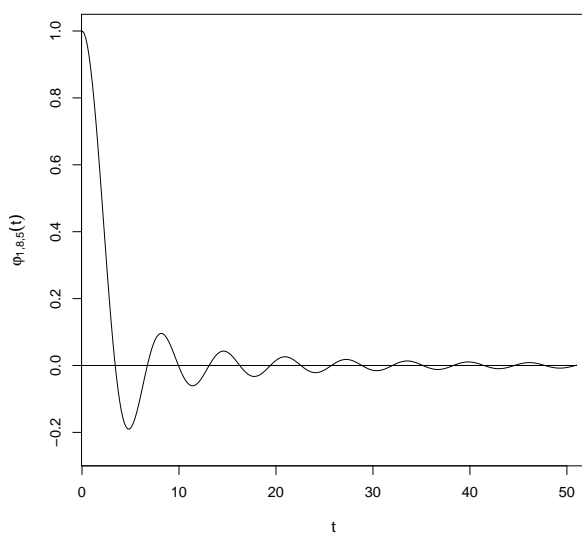
(b)



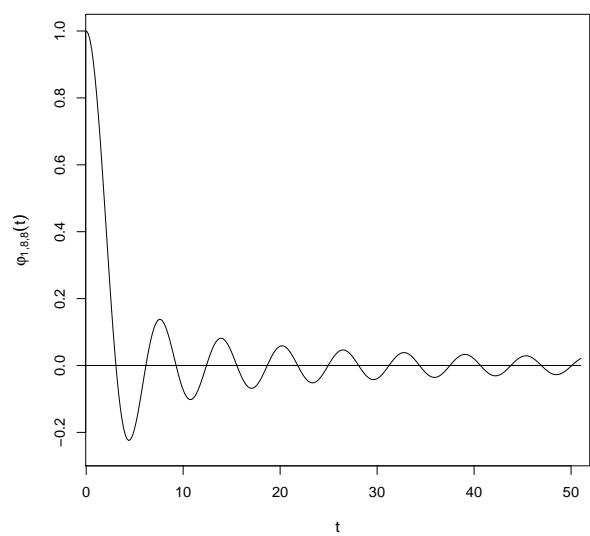
(c)



(d)



(e)



(f)

Abbildung 26: Die charakteristische Funktion $\varphi_{1,8,p}$ in den Fällen (a) $p = 1/2$, (b) $p = 1$, (c) $p = 3/2$, (d) $p = 3$, (e) $p = 5$ und (f) $p = 8$.

Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M. u. Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. 10. Aufl. New York: Wiley.
- Ahlfors, L. V. (1966). *Complex analysis*. 2. Aufl. Maidenhead: McGraw-Hill Publishing Company.
- Anderson, T. W. (2003). *An introduction to multivariate statistical analysis*. 3. Aufl. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken: Wiley.
- Anderson, T. W. u. Fang, K. T. (1990). “On the theory of multivariate elliptically contoured distributions and their applications”. In: *Statistical inference in elliptically contoured and related distributions*. New York: Allerton Press, S. 1–23.
- Arellano-Valle, R. B. u. Richter, W.-D. (2012). “On skewed continuous $l_{n,p}$ -symmetric distributions.” In: *Chil. J. Stat.* 3.2, S. 368–385.
- Askey, R. (1973). *Radial characteristic functions*. Defense Technical Information Center.
- Bauer, H. (1992). *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Aufl. Berlin: de Gruyter.
- Berg, L. (1968). *Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Bisgaard, T. M. u. Sasvári, Z. (2000). *Characteristic functions and moment sequences. Positive definiteness in probability*. Huntington: Nova Science Publishers.
- Bronshstein, I. N., Semendyayev, K. A., Musiol, G. u. Muehlig, H. (2004). *Handbook of mathematics*. 4. Aufl. Berlin: Springer.
- Cambanis, S., Huang, S. u. Simons, G. (1981). “On the theory of elliptically contoured distributions”. In: *J. Multivariate Anal.* 11, S. 368–385.
- Cambanis, S., Keener, R. u. Simons, G. (1983). “On α -symmetric multivariate distributions”. In: *J. Multivariate Anal.* 13, S. 213–233.
- Daoust, C. M. u. Srivastava, H. M. (1969). “On Eulerian integrals associated with Kampe de Fériet’s function”. In: *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* 9.23, S. 199–202.
- Davis, P. J. u. Rabinowitz, P. (1984). *Methods of numerical integration*. 2. Aufl. Orlando: Academic Press.
- Delaigle, A., Hall, P. u. Meister, A. (2008). “On deconvolution with repeated measurements”. In: *Ann. Stat.* 36.2, S. 665–685.
- Fang, K.-T., Kotz, S. u. Ng, K.-W. (1990). *Symmetric multivariate and related distributions*. London: Chapman and Hall.
- Fang, K.-T. u. Zhang, Y.-T. (1990). *Generalized multivariate analysis*. Berlin: Springer.
- Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*. 2. Aufl. Bd. 2. New York: Wiley.
- Fox, C. (1928). “The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions”. In: *Proceedings L. M. S.* 27, S. 389–400.
- Gnedenko, B. V. u. Kolmogorov, A. N. (1954). *Limit distributions for sums of independent random variables*. Cambridge: Addison-Wesley.
- Gneiting, T. (1998). “On α -symmetric multivariate characteristic functions”. In: *J. Multivariate Anal.* 64.2, S. 131–147.
- (2001). “Criteria of Pólya type for radial positive definite functions”. In: *Proc. Am. Math. Soc.* 129.8, S. 2309–2318.
- Goodman, I. R. u. Kotz, S. (1973). “Multivariate θ -generalized normal distributions”. In: *J. Multivariate Anal.* 3, S. 204–219.
- Günzel, T., Richter, W.-D., Scheutzwow, S., Schicker, K. u. Venz, J. (2012). “Geometric approach to the skewed normal distribution”. In: *J. Stat. Plann. Inference* 142.12, S. 3209–3224.
- Gupta, A. K. u. Song, D. (1997a). “Characterization of p -generalized normality”. In: *J. Multivariate Anal.* 60.1, S. 61–71.
- (1997b). “ L_p -norm spherical distribution”. In: *J. Stat. Plann. Inference* 60.2, S. 241–260.
- (1997c). “ L_p -norm uniform distribution”. In: *Proc. Am. Math. Soc.* 125.2, S. 595–601.
- Heathcote, C. R. u. Csörgö, S. (1987). “Testing for symmetry”. In: *Biometrika* 74, S. 177–184.
- Henschel, V. u. Richter, W.-D. (2002). “Geometric generalization of the exponential law”. In: *J. Multivariate Anal.* 81.2, S. 189–204.
- Ittrich, C., Krause, D. u. Richter, W.-D. (2000). “Probabilities and large quantiles of noncentral generalized chi-square distributions”. In: *Statistics* 34.1, S. 53–101.

- Johnson, M. E. (1987). *Multivariate statistical simulation*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Applied Probability and Statistics. New York: Wiley.
- Johnson, N. L. u. Kotz, S. (1970). *Distributions in statistics: Continuous univariate distributions*. Bd. 2. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: Wiley.
- Kalke, S. (2012). *pgnorm: The p-generalized normal distribution*. URL: <http://cran.r-project.org/>.
- Kalke, S. u. Richter, W.-D. (2013). “Simulation of the p -generalized Gaussian distribution”. In: *J. Stat. Comput. Simulation* 83.4, S. 639–665.
- Kalke, S., Richter, W.-D. u. Thauer, F. (2013). “Linear combinations, products and ratios of simplicial or spherical variates”. In: *Commun. Stat., Theory Methods* 42.3, S. 505–527.
- Kelker, D. (1970). “Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization”. In: *Sankhyā, Ser. A* 32, S. 419–430.
- Kilbas, A. A. (2005). “Fractional calculus of the generalized Wright function”. In: *Fract. Calc. Appl. Anal.* 8.2, S. 113–126.
- Kilbas, A. A., Saigo, M. u. Trujillo, J. J. (2002). “On the generalized Wright function”. In: *Fract. Calc. Appl. Anal.* 5.4, S. 437–460.
- Koldobsky, A. L. (1992). “Generalized Levy representation of norms and isometric embeddings into L_p -spaces”. In: *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* 28.3, S. 335–353.
- Kuttner, B. (1944). “On the Riesz means of a fourier series (II)”. In: *J. Lond. Math. Soc.* 19, S. 77–84.
- Laue, G., Riedel, M. u. Roßberg, H.-J. (1999). *Unimodale und positiv definite Dichten*. Leipzig: Teubner.
- Lévy, P. (1923). “Sur les lois stable en calcul des probabilités”. In: *C. R. Acad. Sci., Paris* 176, S. 1284–1286.
- (1937). *Théorie de l’addition des variables des variables aléatoires*. Paris: Gauthier-Villars.
- Liapunoff, A. (1902). “Neue Form des Theorems über die Grenze der Wahrscheinlichkeit”. In: *St. Pétersb. Mém.* (8) 12.5, S. 1–24.
- Lukacs, E. (1970). *Characteristic functions*. London: Charles Griffin and Company.
- Maturi, T. A. u. Elsayigh, A. (2009). “The correlation between variate-values and ranks in samples from complete fourth power exponential distribution”. In: *J. Math. Res.* 1.1, S. 14–18.
- Meister, A. u. Neumann, M. H. (2010). “Deconvolution from non-standard error densities under replicated measurements”. In: *Stat. Sin.* 20.4, S. 1609–1636.
- Molchanov, I. (2009). “Convex and star-shaped sets associated with multivariate stable distributions. I: Moments and densities”. In: *J. Multivariate Anal.* 100.10, S. 2195–2213.
- Moore, C. N. (1908). “Note on the roots of Bessel functions”. In: *Annals of Math.* 9.2, S. 156–162.
- Moszyńska, M. u. Richter, W.-D. (2012). “Reverse triangle inequality. Antinorms and semi-antinorms”. In: *Stud. Sci. Math. Hung.* 49.1, S. 120–138.
- Naor, A. (2007). “The surface measure and cone measure on the sphere of ℓ_p^m ”. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 359.3, S. 1045–1079.
- Nardon, M. u. Pianca, P. (2009). “Simulation techniques for generalized Gaussian densities”. In: *J. Stat. Comput. Simulation* 79.11, S. 1317–1329.
- Ng, K. W. u. Tian, G. (2001). “Characteristic functions of \mathfrak{L}_1 -spherical and \mathfrak{L}_1 -norm symmetric distributions and their applications”. In: *J. Mult. Anal.* 76.2, S. 192–213.
- Osiewalski, J. u. Steel, M. F. J. (1993). “Robust Bayesian inference in l_q -spherical models”. In: *Biometrika* 80.2, S. 456–460.
- Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E., Überhuber, C. W. u. Kahaner, D. K. (1983). *Quadpack*. Berlin: Springer.
- Pogány, T. K. (2010). “Closed expression for characteristic function of CEPE distribution”. In: *J. Math. Res.* 2.2, S. 49–50.
- Pogány, T. K. u. Nadarajah, S. (2010). “On the characteristic function of the generalized normal distribution”. In: *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* 203.3, S. 203–206.
- Pólya, G. (1949). “Remarks on characteristic functions”. In: *Proc. Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.* S. 115–123.
- Press, S. J. (1972). “Estimation in univariate and multivariate stable distribution.” In: *J. Am. Stat. Assoc.* 67, S. 842–846.
- Rachev, S. T. u. Rüschendorf, L. (1991). “Approximate independence of distributions on spheres and their stability properties”. In: *Ann. Probab.* 19.3, S. 1311–1337.
- Richter, W.-D. (1985). “Laplace-Gauss integrals, Gaussian measure asymptotic behaviour and probabilities of moderate deviations”. In: *Z. Anal. Anwend.* 4, S. 257–267.
- (1991). “Eine geometrische Methode in der Stochastik”. In: *Rostocker Math. Kolloq.* 44, S. 63–72.

- Richter, W.-D. (2007). “Generalized spherical and simplicial coordinates”. In: *J. Math. Anal. Appl.* 336.2, S. 1187–1202.
- (2009). “Continuous $L_{n,p}$ -symmetric distributions”. In: *Lith. Math. J.* 49.1, S. 93–108.
- (2012). “Exact distributions under non-standard model assumptions”. In: *AIP Conf. Proc.* Bd. 1479, S. 442–445.
- (2013). “Geometric and stochastic representations for elliptically contoured distributions”. In: *Commun. Stat., Theory Methods* 42.4, S. 579–602.
- Salamon, D. A. (2012). *Funktionentheorie*. Basel: Birkhäuser.
- Samorodnitsky, G. u. Taqqu, M. S. (1994). *Stable non-Gaussian random processes*. New York: Chapman and Hall.
- Sasvári, Z. (1994). *Positive definite and definitizable functions*. Bd. 2. Berlin: Akademie Verlag.
- (2013). *Multivariate characteristic and correlation functions*. Berlin: de Gruyter.
- Sato, K.-I. (1973). “A note on infinitely divisible distributions and their Lévy measures”. In: *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A* 12, S. 101–109.
- (2005). “Remarks on Pólya’s theorem on characteristic functions”. In: *Institute of Statistical Mathematics, Cooperative Res. Rep.* 175, S. 133–145.
- Schechtman, G. u. Zinn, J. (1990). “On the volume of the intersection of two L_p^n balls”. In: *Proc. Am. Math. Soc.* 110.1, S. 217–224.
- Schilov, G. E. (1972). *Mathematical analysis. Functions of several real variables*. Moskau: Nauka.
- Schoenberg, I. J. (1938). “Metric spaces and completely monotone functions”. In: *Ann. Math.* 39, S. 811–841.
- Schürger, K. (1998). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. München: Oldenbourg.
- Simon, T. (2011). “A multiplicative short proof for the unimodality of stable densities”. In: *Electron. Commun. Probab.* 16, S. 623–629.
- Sirjaev, A. N. (1988). *Wahrscheinlichkeit*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Steutel, F. W. u. v. Harn, K. (2004). *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*. New York: Dekker.
- Subbotin, M. T. (1923). “On the law of frequency error”. In: *Mat. Sb.* 31.2, S. 296–301.
- Szablowski, P. J. (1998). “Uniform distributions on spheres in finite dimensional L_α and their generalizations.” In: *J. Multivariate Anal.* 64.2, S. 103–117.
- Taguchi, T. (1978). “On a generalization of Gaussian distribution”. In: *Ann. Inst. Stat. Math.* 30, S. 211–242.
- Ushakov, N. G. (1999). *Selected topics in characteristic functions*. Utrecht: VSP.
- Watson, G. N. (1995). *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Williamson, R. E. (1956). “Multiply monotone functions and their Laplace transforms”. In: *Duke Math. J.* 23, S. 189–207.
- Wright, E. M. (1935). “The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function”. In: *J. Lond. Math. Soc.* 10, S. 286–293.
- Zastavnyi, V. P. (1993). “Positive definite functions depending on the norm”. In: *Russ. J. Math. Phys.* 1.4, S. 511–522.
- Zolotarev, V. M. (1986). *One-dimensional stable distributions*. Providence: AMS.
- v. Lommel, E. C. (1868). “Studien über die Bessel’schen Funktionen”. In: *Leipzig*, S. 65–67.