


# **Evolution des Saturn auf der Basis von ab initio - Zustandsgleichungen**

**Dissertation**  
zur Erlangung des Grades  
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
Dipl.-Phys. Robert Püstow

Geboren am 20.04.1986  
in Grevesmühlen



Physikalisches Institut,  
Universität Rostock

1. Gutachter:

Prof. Dr. Ronald Redmer

Universität Rostock

2. Gutachter:

Prof. Dr. Heike Rauer

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)

Datum der Einreichung: 21.08.2015

Datum der Verteidigung: 18.12.2015

---

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2 Theoretische Grundlagen</b>                                      | <b>3</b>  |
| 2.1 Schichtenmodelle . . . . .  | 3         |
| 2.1.1 Zweischichtenmodell . . . . .                                   | 3         |
| 2.1.2 Dreischichtenmodell . . . . .                                   | 4         |
| 2.2 Die Bestandteile des Saturn und die Massenerhaltung . . . . .     | 4         |
| 2.3 Berechnung von Planetenmodellen . . . . .                         | 5         |
| 2.3.1 Das hydrostatische Gleichgewicht . . . . .                      | 5         |
| 2.3.2 Die Form des Gravitationsfeldes . . . . .                       | 7         |
| 2.4 Die Berechnung der Entropie . . . . .                             | 16        |
| 2.5 Der Energietransport . . . . .                                    | 21        |
| 2.5.1 Strahlungstransport . . . . .                                   | 21        |
| 2.5.2 Wärmeleitung . . . . .  | 24        |
| 2.5.3 Konvektion und Stabilität . . . . .                             | 25        |
| 2.6 Das Linear Mixing . . . . .                                       | 27        |
| 2.7 Verwendete Zustandsgleichungen . . . . .                          | 30        |
| 2.7.1 Chemisches und Physikalisches Bild . . . . .                    | 30        |
| 2.7.2 Die LM-REOS (Linear-Mixing-Rostock-Equation-of-State) . . . . . | 31        |
| 2.7.3 H-REOS.1 . . . . .  | 32        |
| 2.7.4 H-REOS.2 . . . . .  | 34        |
| 2.7.5 He-REOS . . . . .   | 35        |
| 2.7.6 H-REOS.3 and He-REOS.3 . . . . .                                | 35        |
| 2.7.7 H <sub>2</sub> O-REOS . . . . .                                 | 35        |
| 2.7.8 Die Saumon - Chabrier - van Horn - EOS (SCvH-EOS) . . . . .     | 35        |
| 2.7.9 H-SCvH . . . . .  | 36        |
| 2.7.10 He-SCvH . . . . .  | 37        |
| 2.7.11 Sesame-EOS . . . . .   | 37        |
| <b>3 Die Evolution des Saturn</b>                                     | <b>38</b> |
| 3.1 Die Kühlungsgleichung . . . . .                                   | 38        |
| 3.1.1 Gleichgewichtstemperaturen und Albedo . . . . .                 | 38        |
| 3.1.2 Die Herleitung der allgemeinen Kühlungsgleichung . . . . .      | 41        |
| 3.1.3 Evolutionsmodelle . . . . .                                     | 46        |
| 3.1.4 Die homogene Evolution . . . . .                                | 46        |
| 3.1.5 Die inhomogene Evolution . . . . .                              | 48        |
| 3.1.6 Die Behandlung der Kernkühlung . . . . .                        | 49        |
| 3.2 Die H-He-Entmischung . . . . .                                    | 50        |
| 3.2.1 Die Berechnung inhomogener Profile . . . . .                    | 54        |
| <b>4 Ergebnisse</b>   | <b>63</b> |
| 4.1 Strukturelle Berechnungen . . . . .                               | 63        |
| 4.2 Evolutionsberechnungen . . . . .                                  | 70        |
| 4.2.1 Der Einfluss der Kernkühlung . . . . .                          | 71        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.2.2    | LM-REOS vs SCvH-EOS . . . . .                                   | 72         |
| 4.2.3    | Verschiebungen des Phasendiagrams für H-He-Mischungen . . . . . | 76         |
| 4.3      | Wachstum der Heliumschicht . . . . .                            | 81         |
| 4.4      | Heliumtropfen im Saturn . . . . .                               | 86         |
| 4.4.1    | Oberflächenspannung und Sinkgeschwindigkeit . . . . .           | 86         |
| 4.4.2    | Bildung und Wachstum von Tropfen . . . . .                      | 95         |
| 4.4.3    | Tropfenwachstum durch Kondensation . . . . .                    | 95         |
| <b>5</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                             | <b>102</b> |

---

## 1 Einleitung

Saturn ist nach Jupiter der zweitgrößte Planet unseres Sonnensystems. In dieser Arbeit wird die innere Struktur des Ringplaneten und dessen Evolution untersucht. Observablen wie Saturs Effektivtemperatur, seine atmosphärische Zusammensetzung und die Form seines Gravitations- wie auch seines Magnetfeldes wurden bereits durch Raumsonden wie Voyager I (1980), Cassini-Huygens (2004) und Pioneer 10 und 11 (1979, 1973) gemessen ([1], [2], [15], [16], [17], [23], [25], [32], [82]). Im Fall von Jupiter konnten anhand der Galileo Entry Probe (1995) sogar in-situ Messungen vorgenommen werden [170], [107]. Die entsprechenden Daten können Aufschlüsse über die innere Struktur der solaren Gasriesen geben. Beispielsweise liefern Messdaten bezüglich der Form und der Stärke des äußeren Magnetfeldes von Jupiter oder Saturn Informationen über die Verteilung von elektrisch leitfähigem Material im Innern. Entsprechende Beschreibungen sind durch das Dynamomodell gegeben [17], [164]. Bei diesem Modell geht man von elektrischen Strömen in den Planeten aus, die ein Magnetfeld induzieren. Im Fall des Saturn handelt es sich, wie bei der Erde, um einen magnetischen Dipol [17], [22]. Entsprechende Berechnungen zu Leitfähigkeiten in Jupiter wurden bereits in [41] und [42] präsentiert. Die Form und die Stärke des Gravitationsfeldes geben Hinweise auf die Verteilung schwerer Elemente (in dieser Arbeit als Metalle bezeichnet) innerhalb eines Planeten. Entsprechende Strukturmodelle werden in Abschnitt 2.1 genauer beschrieben. Dabei handelt es sich um das Zwei- und das Dreischichtenmodell. Sie liefern Werte für die Metallgehalte in den Schichten und die Kernmassen. Entsprechende Untersuchungen wurden bereits für Jupiter und Saturn durchgeführt [35], [43], [48], [52], [52], [55], [89], [134], [133], [138], [135], [136], [168], [171]. Resultate zeigen, dass Jupiter ( $0 < m_{core} < 8M_E$  [133]) im Vergleich zum Saturn ( $0 < m_{core} < 20M_E$  [3]) einen viel kleineren Kern besitzt. Dieser Umstand wird in Abschnitt 4.2 genauer diskutiert. Die Kerngrößen sind dabei abhängig von der verwendeten Zustandsgleichung. Auf diese wird genauer in Kapitel 2.6 eingegangen. Die Ergebnisse zur Berechnung der Kernmassen für Saturn, in Abhängigkeit unterschiedlicher Zustandsgleichungen, werden in Abschnitt 4.1 gezeigt. Dort wird die Programmstruktur zur Berechnung der inneren Metallverteilung und der Kernmasse gezeigt. Außerdem wird dort auch die spezielle Lösung der verschwindenden Kernmasse im Zusammenhang mit planetaren Entstehungsmodellen diskutiert.

Den Hauptbestandteil meiner Arbeit bildet die Betrachtung der Evolution und des Kühlungsverhalten des Saturn. In Abschnitt 3 soll die homogene mit der inhomogenen Evolution auf der Basis von ab-inito Zustandsgleichungen ([109], [111], [128], [129]) für Wasserstoff-Helium Gemische verglichen werden. Dort wird gezeigt, dass Änderungen der Entmischungsregion auch unterschiedliche Zeitpunkte des Eintretens der Phasenseparation zur Folge haben. Die inhomogene Evolution stellt in aktuellen Berechnungen ein Problem dar, welches in dieser Arbeit untersucht wird. Bei heutigen Betrachtungen und aktuellen Messungen fällt auf, dass der Saturn etwa doppelt so viel Energie in den Weltraum abstrahlt wie er von der Sonne empfängt ([1], [2], [15], [16], [17], [23], [25], [32], [82]). Diese überschüssige Leuchtkraft des Saturn kann nicht allein durch den Entstehungsprozess erklärt werden ([1], [35]). Des Weiteren fällt bei Evolutionsrechnungen für den Saturn auf, dass dieser bezüglich eines homogenen Kühlungsprozesses, ein, im Vergleich zum Sonnensystem (4.56 Gyr), zu kurzes Alter von 2-3 Gyr erreicht ([35], [3], [36], [33], [135]). Unter bestimmten Bedingungen kann ein homogenes Gemisch aus Wasserstoff und Helium in eine Helium-reiche und eine Helium-arme Phase entmischen ([33], [109], [111], [128], [129]).

---

[33] modifizieren ihre verwendeten Phasendiagramme zur Beschreibung der H-He Mischungen, so dass das Alter des Saturn bei einem atmosphärischen Heliumgehalt von 0.185 (massenspezifisch) reproduziert wird. Dieser Heliumgehalt liegt fast in dem Fehlerintervall, des durch [23] vorhergesagtem, atmosphärischen Heliumgehalts von  $0.18 \pm 0.04$ . [23] geben einen atmosphärischen Heliumgehalt von  $0.06 \pm 0.05$ , an. Somit sind diese Daten noch sehr fehlerbehaftet und schwer zu bestimmen. Dies liegt unter anderem an Verunreinigungen bzw. Wolken( $NH_3$ ) in der Atmosphäre des Saturn. Dies beeinträchtigt die Verdunklungsmessungen (Occultation Data). Aufgrund dessen werden in dieser Arbeit Modelle mit den atmosphärischen Heliumanteilen von 0.1 und 0.18 miteinander verglichen. Der solare Heliumgehalt, welchen wir für die Saturnatmosphäre auch als ursprünglich ansetzen, beträgt 0.275 [6]. Diese Verarmung an Helium in der Planetenatmosphäre könnte ein Indiz für den Transport von Helium in die tieferen Regionen sein. Auch Jupiter weist eine Verarmung von Helium in der äußeren Atmosphäre auf, die nicht so stark ausgeprägt ist wie die des Saturn. Wir können anhand von Entmischungsrechnungen in Abschnitt 4.2 ebenfalls Werte für heutige Heliumanteile vorhersagen. Diese reichen von 0.061 bis 0.223. Die Planetenmodelle in dieser Arbeit basieren auf der Zwei- und der Dreischichtenbeschreibung. Das "Double-Diffusive Modell" ist eine weitere Möglichkeit zur Betrachtung. In [104] wird ein Modell vorgestellt, welches das Alter des Sonnensystems und die heutige Leuchtkraft des Saturn reproduzieren kann. Sie nehmen einen Gradienten des mittleren Molekulargewichts im Saturn an. Dieser wirkt einer großräumigen Konvektion entgegen und sorgt dafür, dass der Energiefluss aus dem Planeten an die Oberfläche gehemmt wird. Daher würde Saturn nicht so schnell auskühlen. Modelle zur inneren Struktur und Evolution sind auch für extrasolare Planeten (Exos) interessant. Heutzutage sind bereits fast 2000 Exoplaneten bekannt. Diese Planeten werden durch unterschiedliche Verfahren aufgespürt und charakterisiert. Dazu zählt auch die Transit-methode. Dabei spielt die Leuchtkraft des Muttersterns die Hauptrolle. Sie können unter anderem auch als Evaluation unserer Modelle verwendet werden ([45], [52], [60], [63], [122], [124]). Im letzten Teil meiner Arbeit widme ich mich dem genaueren Prozess des Herabsinkens von Heliumtropfen. Nach dem Prozess der Heliumentmischung bewegt sich dieses im Gravitationsfeld in Richtung des Planetenzentrums. Man spricht auch von Heliumregen ([103], [104]). Es wurde ein einfaches Modell zur Berechnung der Gesamtfallzeit eines kugelförmigen Tropfens in Anlehnung an [37] entwickelt. Dort wurde der Aufstieg von Eisensulfid(II)-tropfen im Erdkern untersucht. Die entsprechenden Kräfteverhältnisse werden in Abschnitt 4.4 für fallende, kugelförmige Tropfen gezeigt. Anhand der Oberflächenspannung und des Kohäsionsdruckes wird die Tropfenform erläutert. Des Weiteren werden Fallzeitberechnungen für unterschiedliche Luftwiderstandsbeiwerte präsentiert. Dabei erhalten wir Fallzeiten von der Planetenoberfläche bis auf den Kern von einigen Tagen. Im Moment sind mir keine vergleichbaren Berechnungen in der Literatur bekannt.

---

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie ein großer Gasplanet (z.B. Saturn) beschrieben werden kann, welche Gleichungen und Näherungen eine Rolle spielen und welche Modelle in dieser Arbeit verwendet werden, um heutige wie auch frühere Modelle zu beschreiben. Im Folgenden wird gezeigt wie ein Planet durch Schichtstrukturen beschrieben wird, wie sie auch in früheren Arbeiten bereits angewendet wurden ([4], [35], [43], [48], [52], [55], [89]). In dieser Arbeit werden speziell das Zwei- und Dreischichtenmodell verwendet. Letzteres beschreibt heutige Planetenprofile, welche an bereits gemessene Observablen ([1], [2], [15], [16], [17], [23], [25], [32], [82]) angepasst werden. Auch das Magnetfeld des Jupiter oder Saturn liefert Hinweise auf die innere Verteilung von elektrisch leitfähigem Material. Entsprechende Betrachtungen unter Verwendung des Dynamomodells wurden bereits von [17] und [22] durchgeführt. Außerdem werden in diesem Kapitel auch die Evolutionsmodelle miteinander verglichen. Während die homogene Evolution ein zu kurzes Alter im Vergleich zum Sonnensystems erreicht und für den heutigen Zeitpunkt eine zu hohe Leuchtkraft aufweist, liefert die inhomogene Evolution in Form von Heliumregen eine mögliche Lösung ([33]). Die theoretischen Grundlagen bezüglich dieser Beschreibung werden in diesem Kapitel beschrieben.

### 2.1 Schichtenmodelle

Große Gasriesen wie auch Gesteinsplaneten werden häufig mit Schichtstrukturen beschrieben. In dieser Arbeit wie auch in früheren Arbeiten [33], [34] werden das Zwei- und das Dreischichtenmodell verwendet. Dies liegt unter anderem in einem numerischen Problem begründet [92]. Aufgrund der Randbedingungen  $m(r = 0) = 0$  und  $\rho(r = R) = 0$  treten bei den Berechnungen Divergenzen auf. Somit startet man die Integrationsberechnungen mit endlichen Grenzwerten im Kern und an der Oberfläche. Folglich liefern diese Werte ein überbestimmtes Gleichungssystem. Beide Integrationswege treffen sich somit im Innern dieses Planeten. Die Lage dieses Treffpunktes ist frei wählbar und kann durch eine Übergangsmasse oder einen Übergangsdruck gesetzt werden. Anhand dessen ist es möglich, den Planeten in beliebig viele Schichten zu untergliedern. Häufig identifiziert man solche Grenzen mit Phasenübergängen der Materialien im Planeten. Beispielsweise liefern der Übergang zwischen isolierendem und metallischem Wasserstoff [95] oder der Beginn einer Mischungslücke mögliche Grenzen [111].

Beide Modelle werden durch die Außentemperatur  $T(1\text{bar})$  charakterisiert. Diese Temperatur wird in dieser Arbeit immer mit  $T_1$  bezeichnet. Außerdem besitzen beide Modelle einen Kern. Die Unterschiede werden im Folgenden diskutiert.

#### 2.1.1 Zweischichtenmodell

Diese Beschreibung eines Gasriesen wie Saturn oder Jupiter geht davon aus, dass der Planet aus einem Kern sowie einem homogenen und voll konvektiven Mantel zusammengesetzt ist. Der Kern besteht aus schweren Stoffen wie Wasser, Ammoniak (Eise) oder Gesteinen wie Magnesiumoxid. Der Mantel setzt sich aus leichteren Elementen wie Wasserstoff, Helium und ebenfalls einem Anteil  $z$  zusammen. Alle schwereren Stoffe als Helium werden in der Planetenphysik, wie auch in dieser Arbeit als Metalle bezeichnet. Dieses Planetenmodell

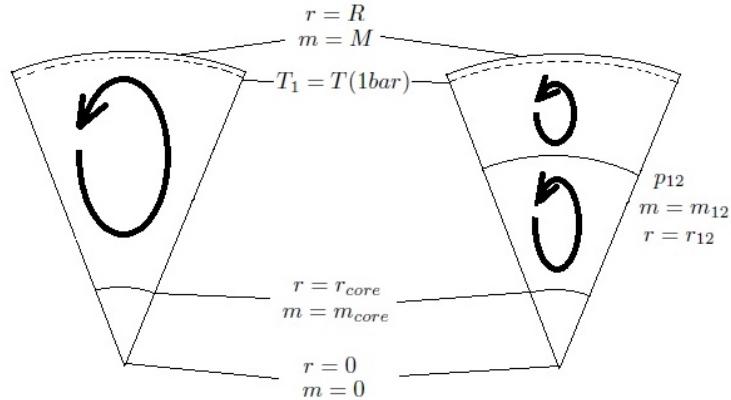


Abbildung 1: Vergleich von Zwei- und Dreischichtenmodell. Die linke Seite zeigt ein Planetenmodell bestehend aus einem Kern und einer homogenen, adiabatischen Hülle. Das Dreischichtenmodell rechts hingegen besitzt hingegen zwei äußere, homogene Mäntel. Die Grenze zwischen ihnen wird durch den Übergangsdruck  $p_{12}$  definiert.

wird zur Modellierung der homogenen Evolution eines Planeten verwendet, wie wir später noch sehen werden. Der entsprechende Aufbau ist in Abbildung 1 links dargestellt.

### 2.1.2 Dreischichtenmodell

Diese Art der Modellierung des Saturn wird verwendet, um die heutigen Planetenprofile zu bestimmen. Durch Raumsonden wie Voyager I / II und Cassini wurden Daten für das externe Gravitationsfeld gemessen. Diese gehen als sogenannte Gravitationsmomente in die Modellierung ein. Dies wird später in Kapitel 2.3.2 näher erläutert. Auch das Dreischichtenmodell enthält einen Kern aus Metallen, allerdings zwei adiabatische, komplett konvektive Mäntel. Die Grenze zwischen den äußeren beiden Schichten wird durch den Übergangsdruck  $p_{12}$ , die Radiuskoordinate  $r_{12}$  und die Massenkoordinate  $m_{12}$  bestimmt. Dieser Übergangsdruck ist ein freier Parameter in den Modellen.

## 2.2 Die Bestandteile des Saturn und die Massenerhaltung

Ein homogenes Gemisch aus Wasserstoff, Helium und Metallen kann durch deren Anteile beschrieben werden. In dieser Arbeit verwende ich die folgenden Bezeichnungen:

$$x = \frac{m_H}{m_H + m_{He}} \quad , \quad (1)$$

$$y = \frac{m_{He}}{m_H + m_{He}} \quad , \quad (2)$$

$$z = \frac{m_z}{m_H + m_{He} + m_z} \quad . \quad (3)$$

Die Gesamtmasse  $M$  eines solchen Systems ergibt sich damit zu:

$$M = m_H + m_{He} + m_z \quad . \quad (4)$$

---

Dabei beziehen sich der Wasserstoffgehalt  $x$  und der Heliumgehalt  $y$  nur auf das H-He Subsystem und es gilt:

$$x + y = 1 \quad . \quad (5)$$

Diese Größen sind also massenspezifisch. Häufig werden statt der Massenanteile die Teilchenanteile verwendet. Der Massenanteil des Heliums wird mit  $y$  bezeichnet, während der Index  $T$  den Teilchenanteil bezeichnen soll. Für das H-He Subsystem ergibt sich also mit  $m_H = N_H m_{proton}$  und  $m_{He} = 4m_{proton}N_{He}$ :

$$y_T = \frac{N_{He}}{N_H + N_{He}} \quad (6)$$

und

$$y = \frac{m_{He}}{m_H + m_{He}} = \frac{N_{He} \cdot 4m_{proton}}{N_H m_{proton} + N_{He} \cdot 4m_{proton}} = \frac{4}{3 + \frac{1}{y_T}} \quad . \quad (7)$$

Dabei ist  $m_{proton}$  die Masse eines Protons, die hier annähernd der Masse des Neutrons entspricht. Die Masse der Elektronen wird vernachlässigt. Durch Umformung erhält man außerdem folgende Gleichungen.

$$m_H = (1 - z)xM \quad , \quad (8)$$

$$m_{He} = (1 - z)yM \quad . \quad (9)$$

## 2.3 Berechnung von Planetenmodellen

Um das Innere des Saturn beschreiben zu können, benötigen wir Beziehungen zwischen Radius- und Massenkoordinaten sowie thermodynamischen Größen wie Druck, Temperatur und Dichte. Dieses Verfahren wird in [92] und [93] beschrieben, soll aber hier noch einmal genau betrachtet und aufgeschlüsselt werden. Es wird zunächst ein System von Differenzialgleichungen erzeugt, welche das Profil eines Planeten beschreiben. Als Profil wird in dieser Arbeit eine Tabelle aus Massenkoordinate, Druck, Radiuskoordinate, Temperatur und Dichte ( $m, p, r, T, \rho$ ) bezeichnet.

### 2.3.1 Das hydrostatische Gleichgewicht

Für die Modellierung eines Planeten nehmen wir die Gültigkeit des hydrostatischen Gleichgewichts an. Dazu betrachten wir ein Massenelement bestehend aus Wasserstoff, Helium und Metallen, welches die Grund- und Deckfläche  $A$  hat. Auf dieses Paket wirken die Gewichtskraft  $F_g$  und die Auftriebskraft  $F_A$ . Letztere entsteht durch den Druckunterschied  $dp = p(\vec{r} + d\vec{r}) - p(\vec{r})$ . Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2 dargestellt.

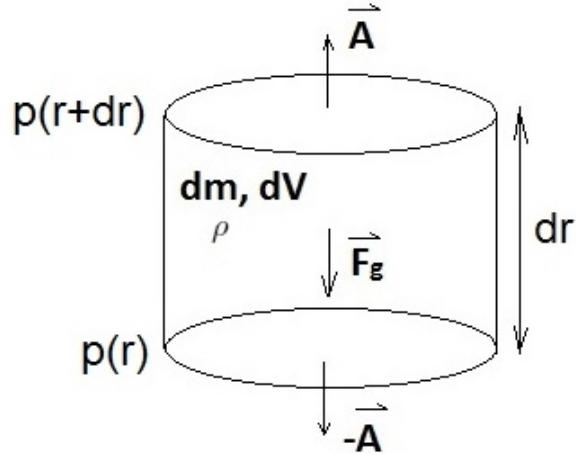


Abbildung 2: Das hydrostatische Gleichgewicht. Ein Massenpaket bestehend aus H, He und Metallen erfährt die Gewichtskraft  $\vec{F}_g(\vec{r})$ , welche in Richtung des Planetenzentrums gerichtet ist und eine Auftriebskraft, die durch den Druckunterschied  $dp(\vec{r}) = p(\vec{r} + d\vec{r}) - p(\vec{r})$  bestimmt ist. Die Boden- und Deckfläche ist  $|\vec{A}| = A$

Hydrostatisches Gleichgewicht bedeutet, dass die Summe der Kräfte, die auf dieses Paket wirken, gerade Null ist. Die Kräfte, die von der Seite auf die Mantelfläche des dargestellten Zylinders wirken, heben sich gegenseitig auf. Die Kraft, welche auf die Deckfläche des Zylinders wirkt, ist gegeben durch  $\vec{F}_{oben} = p(r + dr)\vec{A}$ . Die entgegengesetzte Kraft, welche auf die Bodenfläche wirkt, ist  $\vec{F}_{unten} = -p(r)\vec{A}$ . Die Summe aus beiden ergibt somit  $\vec{F}_{oben} + \vec{F}_{unten} = (p(r + dr) - p(r))\vec{A} = \vec{A}dp$ . Die Gewichtskraft auf das Paket ist durch  $\vec{F}_g = -dm\vec{g}$  gegeben. Durch Multiplikation mit  $dr$  und der Beziehung  $dm/dV = \rho$ , erhalten wir für das hydrostatische Gleichgewicht in Abhängigkeit vom Betrag der Radiuskoordinate:

$$dp(r) = -\rho(r)g(r)dr \quad . \quad (10)$$

Der Betrag der radiusabhängigen Fallbeschleunigung ist gegeben durch:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \quad , \quad (11)$$

mit der Gravitationskonstanten  $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ .

Des Weiteren lässt sich eine Beziehung zwischen Radius- und Massenkoordinate herstellen. Das in 2 dargestellte Volumenelement  $dV$  lautet in Kugelkoordinaten  $4\pi r^2 dr$  und besitzt die Masse  $dm$ . Die Massendichte an jeder Stelle des Planeten lautet in radialsymmetrischer Form:

$$\rho(r) = \frac{dm}{dV} \quad . \quad (12)$$

---

Durch Umformung erhalten wir die zweite Differenzialgleichung, nämlich die Beziehung zwischen Massen- und Radiuskoordinate.

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad (13)$$

wobei der Faktor  $4\pi r^2$  die Funktionaldeterminante ist, welche bei der Transformation von kartesischen in Kugelkoordinaten entsteht.

### 2.3.2 Die Form des Gravitationsfeldes

Um das Innere eines Planeten beschreiben zu können, ist es hilfreich, das äußere Gravitationspotenzial zu untersuchen. Das Gravitationsfeld wurde bereits von Raumsonden wie Cassini und Voyager I/II vermessen. So wird das Gravitationspotenzial des Saturn durch seine Monde, seine innere Massenverteilung  $\rho(\vec{r})$  und seine Rotation beeinflusst. Letzteres führt zur Verformung zu einem Rotationsellipsoiden. Eine Möglichkeit der Beschreibung des äußeren Gravitationsfeldes erfolgt mithilfe der sogenannten Gravitationsmomente. Diese sollen im Folgenden hergeleitet und beschrieben werden. Es handelt sich dabei um die Entwicklung des Gravitationspotenzials nach Legendre-Polynomen.

Zunächst lässt sich das Gravitationsfeld des Saturn in seinem Inneren wie auch im Äußeren durch das Newton'sche Gravitationsgesetz beschreiben. Auf eine Masse  $m$  wirkt die Kraft

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad (14)$$

wobei für den Betrag des Ortsvektors  $\vec{r}$  im Zentrum des Planeten  $|\vec{r}| = r = 0$  gilt. Dies ist in Abbildung 3 genauer dargestellt.

Das Innere des Planeten wird durch den Vektor  $\vec{r}'$  und das Äußere durch  $\vec{r}$  beschrieben.  $\theta$  und  $\theta'$  geben jeweils den Winkel der Ortsvektoren zur Rotationsachse  $\vec{\omega}$ , welche hier auch als z-Achse fungiert, an. Der Winkel zwischen beiden Ortsvektoren ist durch  $\psi$  gegeben. Transformation der Ortsvektoren in Kugelkoordinaten liefert:

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = r' \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \phi' \\ \sin \theta' \sin \phi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \quad . \quad (15)$$

Die Winkel  $\phi$  und  $\phi'$  sind in Abbildung 3 nicht dargestellt, beschreiben aber die Drehung der Vektoren in der x-y-Ebene. Durch Bildung des Skalarproduktes und anschließende Normierung kann man folgende Gleichung finden:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{rr'} &= \cos \psi \\ &= \sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta' \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

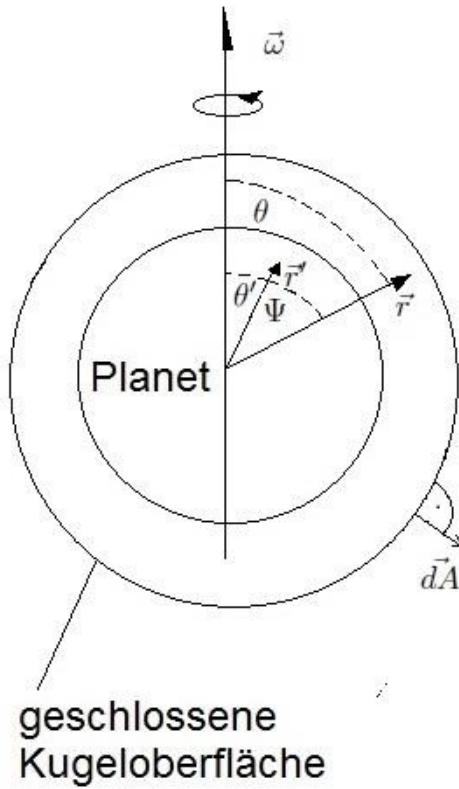


Abbildung 3: Koordinaten und Vektoren zur Beschreibung eines Planeten. Die Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  beschreiben den Innen- und Außenraum des Planeten. Eine gedachte, geschlossene Kugeloberfläche mit dem Normalenvektor  $d\vec{A}$  wird um den Planeten gelegt, um später den Satz von Stokes anwenden zu können. Der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  ist durch  $\psi$  gegeben, wobei  $\theta$  und  $\theta'$  die Azimutalwinkel zur Rotationsachse sind.

Diese Beziehung wird uns später noch einmal begegnen. In Abbildung 3 ist eine gedachte, geschlossene, kugelförmige Oberfläche um den Planeten mit dem Normalenvektor  $d\vec{A}$  dargestellt. Durch Integration über diese geschlossene Kugeloberfläche, welche den gesamten Planeten enthält, wird folgendes Integral erzeugt:

$$\iint_{\text{Kugeloberfläche}} \vec{F} d\vec{A} = -G \iint_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dA . \quad (17)$$

Dabei wurde die Beziehung  $d\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} dA$  verwendet, da  $\vec{r} \parallel d\vec{A}$  gilt. Als weitere Beziehung wollen wir hier die Normierungsbedingung der Ortsvektoren ( $\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 1$ ) anwenden und

erhalten somit:

$$\iint_{\text{Kugeloberfläche}} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -G \iint_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{m \cdot M}{r^2} dA . \quad (18)$$

Die Funktionaldeterminante für das Oberflächenintegral ist gegeben durch:

$$dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi . \quad (19)$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich nun das gesamte Oberflächenintegral auswerten.

$$\iint_{\text{Kugeloberfläche}} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -G \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{m \cdot M}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi GmM . \quad (20)$$

Wie bereits oben erwähnt, spielt die Massenverteilung im Inneren des Planeten eine wichtige Rolle, um das äußere Gravitationsfeld zu beschreiben. Diese ist durch die Massendichte  $\rho(\vec{r})$  gegeben. Da wir für unsere Berechnung die Massenerhaltung voraussetzen, muss folgende Beziehung für die Integration über den gesamten Planeten gelten:

$$\iiint_{\text{Kugelvolumen}} \rho(\vec{r}) dV = M . \quad (21)$$

In dieser Gleichung hängt die Massendichte von  $\vec{r}$  ab. Die Integration läuft über das Gesamtvolumen der gedachten Kugel. An dieser Stelle sei erwähnt, dass jede beliebige Oberfläche um den Planeten gezogen werden kann, solange sie nur geschlossen ist und den gesamten Planeten enthält. Nun lässt sich  $M$  durch Gleichung 20 ersetzen und folgendes Resultat entsteht:

$$-4\pi Gm \iiint_{\text{Kugelvolumen}} \rho(\vec{r}) dV = \iint_{\text{Kugeloberfläche}} \vec{F} d\vec{A} . \quad (22)$$

Anhand des Satzes von Gauß lässt sich ein Volumenintegral in ein Oberflächenintegral über eine geschlossene, dieses Volumen umschließende Fläche umwandeln. ( $\oint_A \vec{F} d\vec{A} = \oint_V \nabla \vec{F} dV$ ) Als Resultat erhalten wir somit:

$$-4\pi Gm \iiint_{\text{Kugelvolumen}} \rho(\vec{r}) dV = \iint_{\text{Kugeloberfläche}} \nabla \vec{F} dV . \quad (23)$$

Wie bereits erwähnt, darf die, den Planeten umschließende Fläche, eine beliebige Form haben. Infolge dessen müssen die Integranden dieselben sein und es gilt:

$$-4\pi Gm \rho(\vec{r}) = \nabla \vec{F} . \quad (24)$$

---

Ein konservatives Kraftfeld kann durch den Gradienten eines Potenzials ausgedrückt werden. Da es sich auch bei der Gravitation um ein konservatives Kraftfeld handelt, können wir folgende Gleichung aufschreiben:

$$\vec{F} = -\text{grad}U(\vec{r}) . \quad (25)$$

Wenn wir diese Beziehung in Gleichung 24 einsetzen, entsteht die sogenannte Poisson-Gleichung für das Gravitationspotenzial  $U(\vec{r})$ .

$$4\pi G m \rho(\vec{r}) = \Delta U(\vec{r}) \quad (26)$$

Wir dividieren nun beide Seiten durch die Masse  $m$  eines beliebigen Teilchens im Gravitationsfeld des Planeten, wie es bereits durch das Newton'sche Gesetz in Gleichung 14 beschrieben ist. Somit erhalten wir die massenspezifische Form des Gravitationspotenzials  $\Phi(\vec{r})$  und es gilt:

$$4\pi G \rho(\vec{r}) = \Delta \Phi(\vec{r}) . \quad (27)$$

mit

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m} . \quad (28)$$

Bereits aus der Elektrodynamik ist die Lösung dieser Differenzialgleichung bekannt. Sie wird mithilfe der Green-Funktion gelöst, die folgendermaßen definiert ist:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (29)$$

Der, in dieser Gleichung auftretende Vektor  $\vec{r}'$  ist derselbe, der bereits in Abbildung 3 das Innere des Planeten beschreibt. Als Lösung erhält man für die Green-Funktion:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (30)$$

Zunächst multiplizieren wir nun beide Seiten mit der Massenverteilung  $\rho(\vec{r}')$  und wenden außerdem auch auf beiden Seiten den Laplace - Operator an, welcher hier wie folgt aussieht:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (31)$$

Als Resultat erhalten wir zunächst:

$$\rho(\vec{r}') \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (32)$$

---

Nun integrieren wir auf beiden Seiten noch über das Innere des Planeten und erhalten folgende Beziehung:

$$\int \rho(\vec{r}') \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' = \int \Delta \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (33)$$

Durch Einsetzen der Definition der Green-Funktion in die linke Seite der Gleichung erzeugt man ein Integral über die Delta-distribution, welches bei Integration über den gesamten Definitionsbereich 1 ergibt. Als Folge entsteht für die Massenverteilung  $\rho(\vec{r})$ :

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int \Delta \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (34)$$

Nun nehmen wir die Dichteveilteilung näherungsweise als stetig differenzierbar an und vertauschen Integration und Differenziation, ziehen also den Laplace-Operator vor das Integral. Dabei bleibt unberücksichtigt, dass Dichtesprünge im Mantel auftreten, obwohl dies infolge der vereinfachten Schichtstruktur unabdingbar ist. Wir erhalten also folgende Gleichung:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \Delta \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (35)$$

Vergleichen wir nun dieses Ergebnis mit der Poissons-Gleichung für das massenspezifische Gravitationspotenzial, so erhalten wir die Lösung für dasselbe.

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (36)$$

Nun wollen wir den Betrag des Differenzvektors  $\vec{r} - \vec{r}'$  genauer betrachten. Er lässt sich über das Skalarprodukt und somit auch mithilfe des Winkels zwischen diesen beiden Vektoren  $\Psi$  beschreiben. Dies funktioniert wie folgt:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} . \quad (37)$$

Somit gilt außerdem:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = (r^2 - 2rr' \cos \Psi + r'^2)^{-\frac{1}{2}} . \quad (38)$$

Klammert man auf der rechten Seite  $r$  oder  $-r'$  aus, so entstehen zwei unterschiedliche Ausdrücke für die linke Seite der obigen Gleichung. Die beiden Fälle haben folgende Form:

---


$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{(1 - 2\frac{r'}{r} + (\frac{r'}{r})^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad (39)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{((\frac{r}{r'})^2 - 2\frac{r}{r'} + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad . \quad (40)$$

Ganz allgemein können wir diese Ausdrücke also wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = (1 - az + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (41)$$

Bei der rechten Seite handelt es sich um einen Ausdruck, der mithilfe einer binomischen Reihe dargestellt werden kann. Dieser Ausdruck ist gleichzeitig die Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome  $P_n(a)$  und es gilt:

$$(1 - 2az + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(a) \quad . \quad (42)$$

Diese Reihe konvergiert allerdings nur unter der Bedingung  $z < 1$ . Somit vergleichen wir hier beide Fälle ( $r < r'$  und  $r > r'$ ) miteinander.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \cdot \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) & : (r > r') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{-(n+1)} P_n(\cos \psi) & : (r < r') \end{cases} \quad . \quad (43)$$

Nun sieht man also, dass die Konvergenz für den Fall des inneren ( $r > r'$ ) und des äußeren Gravitationspotenzials ( $r < r'$ ) gegeben ist. Durch Einsetzen in Gleichung 36, welche das gesamte Gravitationspotenzial bezeichnet, ergibt sich:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{G}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int \rho(\vec{r}') \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_n(\cos \Psi) d^3 r' \quad . \quad (44)$$

In dieser Gleichung taucht der Exponent  $k$  auf, welcher den Wert  $n$  für den externen und  $-(n+1)$  für den internen Teil des Gravitationspotenzials annimmt. Nun werden wir versuchen, den Parameter  $\Psi$ , also den Winkel zwischen den Ortsvektoren, durch die Kugelkoordinatendarstellung der Ortsvektoren (15) zu ersetzen. Die entsprechende Umformung dazu ist bereits über das Skalarprodukt in Gleichung 16 vorgestellt worden. Somit setzen wir dieses Resultat in das Legendre-Polynom  $P_n(\cos \Psi)$  ein und erhalten somit folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \Psi) &= P_n(\cos \theta) \cdot P_n(\cos \theta') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\phi - \phi')] \cdot P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \quad . \end{aligned} \quad (45)$$

---

In dieser Gleichung treten zum ersten Mal die sogenannten assoziierten oder auch zugeordneten Legendre-Polynome  $P_n^m$  auf. Diese werden über die folgende Gleichung definiert:

$$P_n^m(z) = (-1)^m \cdot (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z). \quad (46)$$

Bevor wir fortfahren, soll zunächst Gleichung 45 bewiesen werden. Da das Gravitationsfeld radialsymmetrisch ist, kann dieses Problem wie auch in der Quantenmechanik anhand der Laplace-Gleichung beschrieben werden. Berechnet man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und stellt die Eigenwertgleichung auf, so entsteht folgende Beziehung:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad . \quad (47)$$

Die Eigenfunktionen sind die sogenannten Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ . Diese bilden ein vollständiges Orthonormalsystem und wir können daher schreiben:

$$P_l(\cos \psi) = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \quad , \quad (48)$$

Der Index  $m$  liegt im Intervall  $[-l, \dots, 0, \dots, +l]$ . In Analogie zur Quantenmechanik sind  $m$  und  $l$  Elemente der Ganzen Zahlen. Der Stern bezeichnet die komplexe Konjugation. Durch Lösung der Poissons-Gleichung erhält man folgenden Ausdruck für die Kugelflächenfunktionen, ausgedrückt durch Legendre-Polynome:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad . \quad (49)$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung 45 ein, so erhält man für die Legendre-Polynome:

$$P_l(\cos \psi) = \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta') e^{-im\phi'} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad . \quad (50)$$

An dieser Stelle wenden wir nun eine Indexverschiebung an, zerlegen die obige Summe und erhalten:

$$\begin{aligned} P_l(\cos \psi) &= \sum_{m=-l}^{-1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) e^{im(\phi-\phi')} + P_l(\cos \theta') P_l(\cos \theta) \\ &+ \sum_{m=+1}^{+l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) e^{im(\phi-\phi')} \quad . \end{aligned} \quad (51)$$

---

Im Folgenden verwenden wir eine Gleichung, auf deren Beweis hier aber verzichtet werden soll:

$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z) \quad . \quad (52)$$

Außerdem verwenden wir nun auch die Euler-Formel:

$$\frac{e^{im(\phi-\phi')} + e^{-im(\phi-\phi')}}{2} = \cos[m(\phi - \phi')] \quad . \quad (53)$$

Mithilfe dieser Beziehungen wandeln wir Gleichung 50 um und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos[m(\phi - \phi')] P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \quad . \end{aligned} \quad (54)$$

Somit haben wir Gleichung 45 bewiesen. Als nächstes verwenden wir das Additionstheorem  $\cos(x - y) = \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y)$  und zerlegen damit die Kosinusfunktion aus Gleichung 45 in drei Summanden.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( P_n(\cos \theta) \int_{V(r)} \rho(\vec{r}') P_n(\cos \theta') \left(\frac{r'}{r}\right)^k d^3 r' \right. \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\phi) \int_{V(r)} \rho(\vec{r}') P_n^m(\cos \theta') \cos(m\phi') \left(\frac{r'}{r}\right)^k d^3 r' \\ &\left. + 2 \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sin(m\phi) \int_{V(r)} \rho(\vec{r}') P_n^m(\cos \theta') \sin(m\phi') \left(\frac{r'}{r}\right)^k d^3 r' \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Als Folge der Eigenrotation des Saturn flacht dieser ab und verwandelt sich nach und nach in ein Rotationsellipsoid. Demnach hängt die Massendichte  $\rho(\vec{r}')$  des Planeten nur noch von der Radiuskoordinate  $r'$  und vom Azimutalwinkel  $\theta'$  ab. Aufgrund dessen lassen sich die Integrale über  $\phi'$  separieren und es folgt wegen der Symmetrieeigenschaften von Sinus und Kosinus:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi') d\phi' = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin(m\phi') d\phi' = 0 \quad . \quad (56)$$

Nun werfen wir noch einmal einen Blick auf Gleichung 55 und sehen, dass die letzten beiden Summanden verschwinden und für das Gravitationspotenzial lediglich folgender Term übrig bleibt:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_{V(r)} \rho(\vec{r}') P_n(\cos \theta') \left(\frac{r'}{r}\right)^k d^3 r' \quad . \quad (57)$$

---

Wie bereits oben erwähnt, wurde das Gravitationsfeld des Planeten von Raumsonden vermessen. Allerdings können diese nur den externen (ext) Teil des Feldes bestimmen. Aus diesem Grund werfen wir nun auch einen Blick auf diesen Teil und wählen, wie vorher erwähnt,  $k = -(n + 1)$  und erhalten:

$$\Phi^{(ext)}(r, \theta) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_0^{\pi} \int_{r>r'} \rho(r', \theta') P_n(\cos \theta') \left(\frac{r'}{r}\right)^{-(n+1)} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' . \quad (58)$$

Eine weitere Eigenschaft der Massendichte aufgrund der Ellipsoidform des Saturn sieht bezüglich des Azimutalwinkels wie folgt aus:

$$\rho(r', -\theta') = \rho(r', \theta') . \quad (59)$$

In Gleichung 58 verwenden wir noch die folgende Umformung, die durch die Ableitung des Kosinus entsteht:

$$d \cos \theta' = -\sin \theta' d\theta' . \quad (60)$$

Da durch diese Umformungen die Differenziale substituiert wurden, werden auch die Integrationsgrenzen angepasst und wir erhalten einen neuen Ausdruck für das externe Gravitationspotenzial:

$$\Phi^{(e)}(r, \theta) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_{-1}^1 \int_{r>r'} \rho(r', \theta') P_n(\cos \theta') \left(\frac{r'}{r}\right)^{-(n+1)} r'^2 dr' d\cos \theta' . \quad (61)$$

Eine weitere Möglichkeit zur Darstellung der Legendre-Polynome ist die Rodriguez-Formel:

$$P_n(\cos \theta') = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d \cos^n \theta'} (\cos^2 \theta' - 1)^n . \quad (62)$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich auch für die Legendre-Polynome eine Symmetrieeigenschaft finden. Diese sieht wie folgt aus:

$$P_n(\cos \theta') = (-1)^n P_n(-\cos \theta') . \quad (63)$$

Diese Beziehung zeigt uns, dass es sich bei den Legendre-Polynomen um gerade Funktionen bezüglich des Arguments  $\cos \theta'$  handelt. Setzen wir diese Symmetrieeigenschaft in das externe Potenzial ein, so erhalten wir wiederum eine neue Gleichung:

$$\Phi^{(ext)} = -\frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_{eq}}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right) . \quad (64)$$

---

In dieser Gleichung wurde mit dem Äquatorialradius  $R_{eq}$  des Planeten erweitert, um bezüglich des Radius' dimensionslos rechnen zu können. Man erhält die Gesamtmasse des Planeten über diese Beziehung:

$$\int_{r>r'} \rho(\vec{r}') d^3 r' = M \quad . \quad (65)$$

Wir haben gesehen, dass in Gleichung 64 neue Größen, nämlich die  $J_{2n}$  auftreten. Dies sind die Gravitationsmomente, welche folgendermaßen definiert sind:

$$J_{2n} = -\frac{1}{R_{eq}^{2n}} \int_V \rho(\vec{r}')(r')^{2n} P_{2n}(\cos\theta') d^3 r' \quad . \quad (66)$$

Für den Fall der nullten Ordnung der Gravitationsmomente ( $n = 0$ ) handelt es sich bei dem betrachteten Planeten um einen sphärischen Körper. Diese Näherung wird verwendet, um die Evolution des Saturn zu berechnen (Abschnitt 3.2.1).

## 2.4 Die Berechnung der Entropie

Sowohl beim Ein- als auch beim Zweischichtenmodell werden die Mäntel jeweils adiabatisch behandelt. Das bedeutet, dass wir uns ein infinitesimales Massenelement vorstellen, welches im Planeteninneren so schnell aufsteigt bzw. herabsinkt, dass es keine Zeit hat, mit der Umgebung Wärme auszutauschen. Dies manifestiert sich im ersten Hauptsatz der Thermodynamik mit  $\delta Q = 0$ . Man spricht in diesem Fall auch von einer adiabatischen Schichtung. Somit folgt für die Entropie  $dS = 0$  und es handelt sich um Isentropen, welche die Schichten des Planeten beschreiben.

Wie wir auch später in den Evolutionsrechnungen sehen werden, spielt die Entropie eine sehr entscheidende Rolle in der Modellierung des Evolutionsverhaltens großer Planeten. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie wir die Werte für die Entropie erhalten. Eine entsprechende Herleitung wurde bereits in [135] präsentiert, soll hier jedoch noch einmal genauer untersucht und erläutert werden.

Zunächst betrachten wir beispielsweise eine Massenschale innerhalb des Planeten und schreiben dessen Absolutwert für die Freie Energie  $F$  in Abhängigkeit von Volumen  $V$  und Temperatur  $T$ :

$$F(T, V, \{N_i\}) = U(T, V, \{N_i\}) - TS(T, V, \{N_i\}) \quad . \quad (67)$$

Der Ausdruck  $\{N_i\}$  steht repräsentativ für die Teilchenzahlen aller Konstituenten eines Gemisches. Für ein Gemisch aus Wasserstoff, Helium und Wasser würde also  $1 \leq i \leq 3$  gelten. Stellen wir diese Gleichung nach der Entropie um, erhalten wir:

$$S(T, V, \{N_i\}) = \frac{U(T, V, \{N_i\})}{T} - \frac{F(T, V, \{N_i\})}{T} \quad . \quad (68)$$

---

Als nächstes addieren wir eine Null, in dem wir den Term  $\frac{F(T_0, V_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0}$  addieren und wieder subtrahieren. Somit erhalten wir:

$$S(T, V, \{N_i\}) = \frac{U(T, V, \{N_i\})}{T} - \frac{F(T, V, \{N_i\})}{T} + \frac{F(T_0, V_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0} - \frac{F(T_0, V_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0} . \quad (69)$$

In dieser Gleichung steht nun eine Differenz, welche wir über ein Integral formulieren wollen und es gilt:

$$\frac{F(T, V, \{N_i\})}{T} - \frac{F(T_0, V_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0} = \int_{T_0, V_0, \{N_i^{(0)}\}}^{T, V, \{N_i\}} d \frac{F(T', V', \{N_i'\})}{T'} \quad (70)$$

Nun untersuchen wir das vollständige Differenzial  $d \frac{F(T', V', \{N_i'\})}{T'}$  in diesem Integral genauer. Demnach stellen wir dieses totale Differenzial auf und es folgt zunächst:

$$\begin{aligned} d \frac{F(T', V', \{N_i'\})}{T'} &= \left( \frac{\partial \frac{F(T', V', \{N_i'\})}{T'}}{\partial T'} \right)_{V', \{N_i'\}} dT' + \left( \frac{\partial \frac{F(T', V', \{N_i'\})}{T'}}{\partial V'} \right)_{T', \{N_i'\}} dV' \\ &+ \sum_i \left( \frac{\partial \frac{F(T', V', \{N_i'\})}{T'}}{\partial N_i'} \right)_{T', V'} dN_i' . \end{aligned} \quad (71)$$

Nun dividieren wir beide Seiten von Gleichung 69 durch eine mittlere Masse, welche die Mischung beschreibt und erhalten die massenspezifischen Größen. Außerdem wurde auch das Volumen  $V$  in die Massendichte  $\rho$  (gilt auch für die gestrichenen Größen) umgewandelt.

$$s(T, \rho, \{N_i\}) = \frac{u(T, \rho, \{N_i\})}{T} - \left[ \frac{f(T, \rho, \{N_i\})}{T} - \frac{f(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0} \right] - \frac{f(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0} . \quad (72)$$

Somit ist es uns nun möglich, beliebige Massenschalen zu beschreiben. Alle massenspezifischen Größen werden hier durch kleine Buchstaben gekennzeichnet. Entsprechend erhalten wir auch für das obige Differenzial diese Form:

$$\begin{aligned} d \frac{f(T', \rho', \{N_i'\})}{T'} &= \left( \frac{\partial \frac{f(T', \rho', \{N_i'\})}{T'}}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N_i\}} dT' + \left( \frac{\partial \frac{f(T', \rho', \{N_i'\})}{T'}}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N_i'\}} d\rho' \\ &+ \sum_i \left( \frac{\partial \frac{f(T', \rho', \{N_i'\})}{T'}}{\partial N_i'} \right)_{T', \rho'} dN_i' . \end{aligned} \quad (73)$$

---

Als nächstes wollen wir nun die Ableitungen, welche in dieser Darstellung des totalen Differenzials vorkommen, auswerten. Wir starten mit der Ableitung nach  $T'$ .

$$\left( \frac{\partial \frac{f(T', \rho', \{N'_i\})}{T'}}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} = \left( \frac{\partial \left( \frac{u(T', \rho', \{N'_i\})}{T'} - s(T', \rho', \{N'_i\}) \right)}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} . \quad (74)$$

In dieser Gleichung haben wir über die anfängliche Beziehung

$$\frac{f(T', \rho', \{N'_i\})}{T'} = \frac{u(T', \rho', \{N'_i\})}{T'} - s(T', \rho', \{N'_i\}) ,$$

eine Rücktransformation vorgenommen und können nun die Ableitung nach  $T'$  weiterführen. Es ergibt sich die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \left( \frac{u(T', \rho', \{N'_i\})}{T'} - s(T', \rho', \{N'_i\}) \right)}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} = \\ & - \frac{u(T', \rho', \{N'_i\})}{T'^2} + \frac{1}{T'} \left( \frac{\partial u(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} - \left( \frac{\partial s(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} . \end{aligned} \quad (75)$$

Um die Ableitung der Inneren Energie  $u(T', \rho', \{N'_i\})$  nach der Temperatur zu ersetzen, werfen wir einen Blick auf die massenspezifische Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik:

$$du(T', \rho', \{N'_i\}) = T' ds' + \frac{p}{\rho'^2} d\rho' + \sum_i \mu_i dN'_i . \quad (76)$$

Die  $\mu_i$  bezeichnen die chemischen Potenziale. Da bei der Ableitung nach  $T'$  die Massendichte  $\rho'$  und die Teilchenzahlen  $N'_i$  konstant gehalten werden, gilt hier  $d\rho' = 0$  und  $dN' = 0$ . Nach entsprechender Umformung erhalten wir:

$$\left( \frac{\partial u(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} = T' \left( \frac{\partial s(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} . \quad (77)$$

Setzen wir dieses Resultat in Gleichung 75 ein, so sehen wir hier, dass sich der Term  $\frac{\partial s(T', \rho')}{\partial T'}$  weghebt und somit erhalten wir als vorläufiges Zwischenresultat für die Ableitung nach der Temperatur  $T'$ :

$$\left( \frac{\partial \left( \frac{u(T', \rho')}{T'} - s(T', \rho') \right)}{\partial T'} \right)_{\rho', \{N'_i\}} = - \frac{u(T', \rho')}{T'^2} \quad (78)$$


---

---

Um fortzufahren betrachten wir nun noch die Ableitung von  $\frac{f(T', \rho')}{T'}$  nach der Massendichte  $\rho'$  und es entsteht:

$$\left( \frac{\partial \frac{f(T', \rho', \{N'_i\})}{T'}}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} = \left( \frac{\partial \left( \frac{u(T', \rho', \{N'_i\})}{T'} - s(T', \rho', \{N'_i\}) \right)}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} . \quad (79)$$

Auch hier haben wir die bereits weiter oben erwähnte Rücktransformation verwendet und die Freie Energie durch die Innere Energie und die Entropie ausgedrückt. Führen wir diese Differenziation aus, so erhalten wir:

$$\left( \frac{\partial \frac{f(T', \rho', \{N'_i\})}{T'}}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} = \frac{1}{T'} \left( \frac{\partial u(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} - \left( \frac{\partial s(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} . \quad (80)$$

Wir versuchen nun wieder per Anwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik eine Beschreibung für die Ableitung der Inneren Energie nach der Massendichte zu finden. Durch Division von Gleichung 76 durch die Temperatur  $T'$  und partieller Ableitung nach  $\rho'$  entsteht:

$$\frac{1}{T'} \left( \frac{\partial u(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} = \left( \frac{\partial s(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial \rho'} \right)_{T', \{N'_i\}} + \frac{p}{T' \rho'^2} . \quad (81)$$

Setzen wir Gleichung 81 in Gleichung 75 ein, fällt die Ableitung der Entropie nach der Dichte heraus und diese Gleichung liefert das zweite, wichtige Zwischenresultat: f

---


$$\left( \frac{\partial \left( \frac{u(T', \rho', \{N'_i\})}{T'} - s(T', \rho', \{N'_i\}) \right)}{\partial \rho'} \right)_{T', \rho', \{N'_i\}} = \frac{p}{T' \rho'^2} . \quad (82)$$


---

Zuletzt benötigen wir noch die partiellen Ableitungen nach den jeweiligen Teilchenzahlen  $N'_i$ . Durch Differenziation von Gleichung 76 nach der  $i$ -ten Teilchenzahl erhalten wir: und

$$\left( \frac{\partial u(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial N'_i} \right)_{T', \rho', \{N'_j\}} = T' \left( \frac{\partial s(T', \rho', \{N'_i\})}{\partial N'_i} \right)_{T_i, \rho_i, \{N'_j\}} + \mu_i . \quad (83)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $\{N'_j\}$  die Menge der Teilchenzahlen aller anderen Stoffe, außer der  $i$ -ten Komponente. Setzen wir Gleichungen 78, 82 und 83 in den Ausdruck für das totale Differenzial (Gleichung 73) ein, so erhalten wir:

$$d \frac{f(\rho', T')}{T'} = - \frac{u(T', \rho')}{T'^2} dT' + \frac{p}{T' \rho'^2} d\rho' + \sum_i \frac{\mu_i}{T'^2} dN_i . \quad (84)$$

Nun wird noch die Integration auf beiden Seiten von einem beliebigen, aber konstanten Startpunkt  $(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})$

bis zu einem beliebigen Punkt  $(T, \rho, \{N_i\})$  integriert und man erhält für den allgemeinen Fall:

$$\int_{\frac{f(\rho_0, T_0)}{T_0}}^{\frac{f(\rho, T)}{T}} d\frac{f(\rho', T')}{T'} = - \int_{T_0}^T \frac{u(T', \rho_0)}{T'^2} dT' + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p}{T' \rho'^2} d\rho' + \sum_i \int_{N_i^{(0)}}^{N_i} \frac{\mu_i}{T'^2} dN_i \quad . \quad (85)$$

Mit diesem Resultat entsteht für die Entropie nun der endgültige Ausdruck:

$$s(\rho, T, \{N_i\}) = \frac{u(\rho, T, \{N_i\})}{T} + \int_{T_0}^T \frac{u(T', \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T'^2} dT' - \frac{\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p}{T' \rho'^2} d\rho' - \frac{1}{T_0^2} \sum_i \int_{N_i^{(0)}}^{N_i} \mu_i dN_i - \frac{f(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0}}{\frac{f(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0}} \quad (86)$$

Die Ausführung dieses Integrals wird auch als thermodynamische Integration bezeichnet. Es ist bereits bekannt, dass sich bei der homogenen Evolution eines Planeten seine Zusammensetzung in den jeweiligen Schichten zeitlich nicht ändert. Dann gilt für die Änderung der Teilchenzahlen aller  $i$  Elemente  $dN_i = 0$ . Somit entfällt der Integralterm über die Teilchenzahlen in Gleichung 86. Es bleibt nur noch die Konstante  $\frac{f(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0}$ . Diese fällt sowohl für die homogene als auch für die inhomogene Evolution heraus. Dies liegt darin begründet, dass dieser Term, unabhängig von Teilchenzahlen und -konzentrationen nur von den Anfangswerten  $T_0, \rho_0$  und  $N_i^{(0)}$  abhängt. Daher ist diese Konstante für alle Planetenprofile dieselbe. Wir wollen nun den zusammengesetzten Term mit  $s_0$  bezeichnen und es gilt:

$$s_0 = -\frac{1}{T_0^2} \sum_i \int_{N_i^{(0)}}^{N_i} \mu_i dN_i - \frac{f(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T_0} \quad . \quad (87)$$

Folglich wird die homogene Evolution durch die thermodynamische Integration exakt beschrieben. Dies wird uns später bei der zeitlichen Behandlung der Kernkühlung begegnen. Der Planetenkern besitzt in unseren Modellen eine zeitlich konstante Masse und entwickelt sich daher homogen. Sobald der Planet von diesem Kühlungsverhalten abweicht und ein vertikaler Massentransport einsetzt, fällt das Integral über die Teilchenzahlen nicht mehr heraus. Als erste Näherung nehmen wir an, dass dies jedoch auch bei der inhomogenen Evolution der Fall ist. Es wird also lediglich der Term

$$\frac{u(\rho, T, \{N_i\})}{T} + \int_{T_0}^T \frac{u(T', \rho_0, \{N_i^{(0)}\})}{T'^2} dT' - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p}{T_0 \rho'^2} d\rho' \quad , \quad (88)$$

---

ausgewertet. Für die Berechnungen heutiger Profile mit Fit an die Beobachtungsdaten spielt der Absolutwert und damit dessen Abhängigkeit von den Teilchenkonzentrationen keine Rolle. Die Entropie muss lediglich einen konstanten Wert entlang der Isentropen annehmen. Interessant wird der wirkliche Absolutwert erst bei den inhomogenen Evolutionsrechnungen. Später wird uns bei der Involvierung der SCvH-Daten in die inhomogenen Evolutionsrechnungen noch die entsprechende Entropie aus [157] begegnen, mit der wir unsere, durch thermodynamische Integration erhaltene, abgleichen. Saumon et al. (1995) berechneten zunächst die Freie Energie über die  $F_{min}$ -Methode. Diese Methode zur Minimierung der Freien Energie wird sowohl für Wasserstoff als auch für Helium bezüglich der Teilchenzahl  $N_i$  bei konstantem Volumen und konstanter Temperatur angewandt. Anhand dieser kann die Extremstelle bestimmt werden und die Teilchenzahl ist damit festgelegt. Wir haben bereits gesehen, dass die Freie Energie  $F(T, V, N)$  über  $F(T, V, N) = U(S, V, N) - TS$  mit der Entropie zusammenhängt. Somit erhalten wir für die Entropie den Ausdruck:

$$S(T, V, \{N_i\}) = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, \{N_i\}} . \quad (89)$$

Saumon et al. (1995) liefern die Absolutwerte der Entropie für Wasserstoff und Helium in [157] und man erhält:

$$S(T, V, \{N_i\}) = - \left( \frac{\partial (F_H + F_{He})}{\partial T} \right)_{V, \{N_i\}} . \quad (90)$$

Für Mischungen aus Wasserstoff und Helium ist allerdings außerdem die Mischungsentropie erforderlich, da der Absolutwert der Entropie sich für die massenspezifischen, intensiven Größen wie folgt darstellt:

$$s(p, T) = (1 - y)s^H(p, T) + ys^{He}(p, T) + s_{mix}(p, T) . \quad (91)$$

Die Herleitung der Mischungsentropie wird in [157] gezeigt und kann dort genauer nachvollzogen werden.

## 2.5 Der Energietransport

Alternativ zur adiabatischen Schichtung des Planeteninneren, gibt es drei weitere Möglichkeiten, Wärmeenergie innerhalb eines Planeten zu transportieren. Sie sind die Folge von Temperaturgradienten ([50], [54], [92], [93]). Diese Möglichkeiten sind in [92] und [93] dargestellt. In diesem Kapitel soll erklärt werden, wie der Energietransport vonstatten geht und welche physikalischen Größen diesen beschreiben. Es werden Kriterien vorgestellt, welche darüber entscheiden, ob das Innere eines Planeten bzw. bestimmte Regionen konvektiv oder stabil geschichtet sind.

### 2.5.1 Strahlungstransport

Bei dieser Form des Energietransports wird selber durch Photonen realisiert. Die mittlere freie Weglänge der Photonen im Planeteninnern liegt im Zentimeterbereich ([92], [93]).

---

Im Vergleich zum Gesamtradius des Planeten ist dieser Wert sehr klein. Daher kann dieser Strahlungsprozess näherungsweise als Diffusionsprozess betrachtet werden ([92], [93]). Aufgrund dessen wird das Diffusionsgesetz verwendet.

$$\vec{j} = -D \nabla n \quad . \quad (92)$$

Dabei beschreibt  $\vec{j}$  den Diffusionsstrom der Photonen und  $D$  den Diffusionskoeffizienten. Ein Konzentrationsgradient der Photonen ist durch  $\nabla n$  gegeben. Für die Diffusionskonstante bei dieser Form des Energietransportes gilt nach [61] und [174]:

$$D = \frac{1}{3} \nu l_{ph} \quad . \quad (93)$$

Im allgemeinen beschreibt  $\nu$  die mittlere, thermische Geschwindigkeit der Teilchen. Im Fall des Energietransportes durch elektromagnetische Strahlung, handelt es sich um die Lichtgeschwindigkeit  $c$ .  $l_{ph}$  gibt die mittlere freie Weglänge der Photonen an. Sie ist nach [92], [93], [165], [61] und [174] gegeben durch

$$l_{ph} = \frac{1}{\kappa \rho} \quad , \quad (94)$$

$\kappa$  steht für die Opazität, welche angibt, wie durchlässig ein Material für Photonen ist. Bei ihr handelt es sich um eine massenspezifische Größe. Sie ist ein Maß für das Absorptionsvermögen eines bestimmten Materials. Je größer dieser Wert ist, desto dichter und undurchdringlicher ist das Material. Als Folge verringert sich die mittlere freie Weglänge  $l_{ph}$ , der Photonen.  $\rho$  beschreibt die Massendichte des Materials, durch das sich die elektromagnetische Strahlung ausbreitet. Auch hier gilt, dass je dichter das Material, je höher also die Dichte, ist,  $l_{ph}$  auch kleiner wird. Da wir Photonen nicht durch eine Massendichte beschreiben können (Ruhemasse von 0), wird hier eine Energiedichte  $U$  eingeführt, welche die Größe  $n$  ersetzt. Diese Energiedichte ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$U = a T^4 \quad . \quad (95)$$

$a$  ist die Strahlungsdichtekonstante mit  $a = \frac{4\sigma}{c} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3}$ .  $T$  bezeichnet die Temperatur. Unter Annahme von sphärischer Symmetrie, spielt nur noch der radiale Anteil des Strahlungsflusses eine Rolle und der Gradient verwandelt sich in die Ableitung nach der Radiuskoordinate  $r$ . Aufgrund dessen gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 4a T^3 \frac{\partial T}{\partial r} \quad . \quad (96)$$

Für die radiale Komponente des Strahlungsflusses  $F$  erhält man folglich:

$$F = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r} \quad . \quad (97)$$

---

Diese Gleichung kann für den vektoriellen Stahlungsfluss auch wie folgt geschrieben werden:

$$\vec{F} = -k_{rad} \nabla T \quad . \quad (98)$$

Bei  $k_{rad}$  handelt es sich um den Leitfähigkeitskoeffizienten des Energietransportes durch Photonen. Es gilt offensichtlich

$$k_{rad} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \quad . \quad (99)$$

Kehren wir zur radialen Darstellung ( $\nabla T \rightarrow \frac{\partial T}{\partial r}$  und  $\vec{F} \rightarrow F$ ) zurück und verwenden den Zusammenhang zwischen mittlere freier Weglänge und dem Strahlungsfluss  $l_{ph} = 4\pi r^2 F$ , so erhalten wir

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\kappa \rho l_{ph}}{16\pi a c r^2 T^3} \quad . \quad (100)$$

Bisher haben wir gesehen, dass die Größen  $U$ ,  $\kappa$ ,  $D$ ,  $F$  und  $l$  unabhängig von der Frequenz des Lichts bzw. der elektromagnetischen Strahlung betrachtet wurden. Diese können als Mittelwerte über das gesamte Frequenzspektrum betrachtet werden. Wie aber geht diese Mittelung vonstatten? Eine häufig in der Planeten- und Sternphysik verwendete Methode ist die der Rosseland Mittelung. Entsprechend bezeichnet man die zugehörige Opazität als "Rosseland Mean Opacity". Sie wurde in vorherigen Arbeiten bereits untersucht und angewendet ([7] [13], [38], [112]). Später wird uns ein Konvektionskriterium (Schwarzschild-Kriterium) begegnen. Anhand dessen wird erklärt, warum in dieser Arbeit Opazitäten nicht in unsere Modelle eingehen. Trotzdem soll das Verfahren der Rosseland Mittelung kurz erläutert werden. Das Diffusionsgesetz für Photonen ist vektoriell gegeben durch:

$$\vec{F}(\nu, T) = -D(\nu, T) \nabla U(\nu, T) \quad . \quad (101)$$

Die frequenzabhängige Diffusionskonstante ist gegeben durch:

$$D(\nu, T) = \frac{1}{3} c l(\nu, T) = \frac{c}{3\rho\kappa(\nu, T)} \quad . \quad (102)$$

Die Energiedichte  $U(\nu, T)$  ist nach [93] anhand der Planckfunktion definiert und es gilt:

$$U(\nu, T) = \frac{4\pi}{c} B(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad . \quad (103)$$

Um einen Ausdruck für den Temperaturgradienten zu erhalten, wird auf beiden Seiten der Nablaoperator angewendet und wir erhalten:

$$\nabla U(\nu, T) = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} \nabla T \quad . \quad (104)$$

---

Durch Integration über das gesamte Frequenzspektrum erhalten wir für den Strahlungsfluss den folgenden Ausdruck:

$$\vec{F} = - \left[ \frac{4\pi}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu \right] \nabla T \quad . \quad (105)$$

Zusammen mit dem Diffusionsgesetz erhalten wir für den Koeffizienten des Strahlungsflusses  $k_{rad}$ :

$$k_{rad} = \frac{4\pi}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu \quad . \quad (106)$$

Mithilfe von Gleichung 99 lässt sich diese Gleichung wie folgt umschreiben:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu \quad . \quad (107)$$

Diese Beziehung wird als sogenanntes Rosseland-Mean oder Rosseland-Mittel bezeichnet. Das Kappa ist somit die Rosseland-Mean-Opacity. In einem Planeten treten auch andere Formen des Energietransportes wie Wärmeleitung und Konvektion auf ([50], [54], [92], [93]). Diese sollen im folgenden erläutert werden. Aus diesem Grund werden wir die Opazität, welche den Strahlungstransport beschreibt mit  $\kappa_{rad}$  bezeichnet.

### 2.5.2 Wärmeleitung

Diese Form der Energieübertragung funktioniert mikroskopisch durch Stöße von Elektronen und Ionen bzw. Atomen und Molekülen ([92], [93]). In Analogie zum Energietransport durch Strahlung wird der Energiefluss auf dieselbe Weise definiert. Der Index  $cd$  bezeichnet den Energietransport durch Wärmeleitung. Für besagten Energiefluss gilt:

$$F_{cd} = -k_{cd} \nabla T \quad . \quad (108)$$

Der Gesamtfluss, welcher sich durch Strahlungstransport und Wärmeleitung zusammensetzt, ergibt sich zu:

$$\vec{F} = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{cd} = -(k_{rad} + k_{cd}) \nabla T \quad . \quad (109)$$

Ebenfalls wird der Koeffizient  $k_{cd}$  in Analogie zum Strahlungstransport definiert:

$$k_{cd} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho \kappa_{cd}} \quad . \quad (110)$$

---

Der Unterschied besteht in der Größe  $\kappa_{cd}$ . Dieser wird hier als Opazität der Wärmeleitung bezeichnet. Durch Anwendung dieser Gleichung, auf die Summe der Energieflüsse (115), erhält man das folgende Resultat:

$$\vec{F} = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{cd} = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho} \left( \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cd}} \right) . \quad (111)$$

Die Gesamtopazität ergibt sich somit zu:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cd}} . \quad (112)$$

Durch Kombination der Gleichung 100 und dem hydrostatischem Gleichgewicht lässt sich folgende Beziehung formulieren:

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial m}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial m}\right)} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l}{m T^3} . \quad (113)$$

Dabei bezeichnet  $m$  die Massenkoordinate und  $\kappa$  die Gesamtopazität. Man verwendet zur Beschreibung des zugehörigen Temperaturgradienten  $\nabla_{rad}$ . Er enthält sowohl die Konvektion als auch den Energietransport durch Strahlung und ist wie folgt definiert ([92], [93]):

$$\nabla_{rad} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{rad} . \quad (114)$$

Diese Gleichung lässt sich unter Verwendung der Logarithmusgesetze folgendermaßen umformen:

$$\nabla_{rad} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{rad} = \frac{p}{T} \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{p}{T} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)} . \quad (115)$$

Erneut verwenden wir nun das hydrostatische Gleichgewicht und Gleichung 100 und erhalten für den endgültigen Ausdruck für den Temperaturgradienten  $\nabla_{rad}$ :

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l p}{m T^4} . \quad (116)$$

### 2.5.3 Konvektion und Stabilität

Analog zur Beschreibung des Temperaturprofils durch den Planeten, kann man auch den Temperaturgradienten eines einzelnen Massenelements betrachten. Die Herleitungen der entsprechenden Gleichungen sind ebenfalls aus [92] und [93] entnommen. Dort wird angenommen, dass sich ein Massenpaket innerhalb des Planeten so schnell auf- oder abwärtsbewegt, dass es keine Zeit hat mit seiner Umgebung Wärmeenergie auszutauschen. Dabei

---

handelt es sich um eine adiabatische Zustandsänderung. Somit gilt nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik für das Massenelement:

$$\delta q = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p - \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right] dT + \frac{T}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p . \quad (117)$$

Da für den adiabatischen Fall  $\delta q = 0$  gilt, erhalten wir für den sogenannten, adiabatischen Temperaturgradienten folgenden Ausdruck:

$$\nabla_{ad} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_s = \frac{p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = -\frac{p}{\rho^2} \frac{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}{\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p - \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} .$$

Stimmt nun der Wert des adiabatischen Temperaturgradienten eines beliebigen Massenpaketts  $\nabla_{ad}$  mit dem der Umgebung  $\nabla_{rad}$  überein, so bezeichnet man das Medium als adiabatisch geschichtet. Im folgenden wollen wir uns die Stabilität innerhalb eines Planeten genauer ansehen. Bisher wurde immer angenommen, dass bei den Herleitungen eine sphärische Symmetrie vorausgesetzt wurde. Die thermodynamischen Größen wie Druck, Temperatur und Dichte sind folglich entlang einer Kugelfläche im Planeteninneren konstant. Allerdings ist es möglich, dass aufgrund der Eigenbewegung von Teilchen oder kleinen Massenelementen Fluktuationen auftreten. Die Herleitungen sollen hier nicht im Detail nachvollzogen werden. Allerdings kann man sich das Problem der Schichtung anhand einer Ungleichung klarmachen. Eine Schicht innerhalb eines Planeten ist somit stabil geschichtet, falls folgende Ungleichung gilt:

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \frac{\phi}{\delta} \nabla_{\mu} . \quad (118)$$

Dabei wurden die Größen  $\phi$  und  $\delta$  definiert als  $\phi = \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{T,p}$  und  $\delta = -\left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{\mu,p}$ . Das  $\mu$  gibt dabei das mittlere Molekulargewicht an. Dessen Änderung verschwindet bei einer homogenen Zusammensetzung der jeweiligen Schicht. Obige Ungleichung wird auch als Ledoux-Kriterium bezeichnet. Aus dieser Ungleichung ist außerdem ersichtlich, dass ein Konzentrationsgradient  $\nabla_{\mu}$  die Konvektion innerhalb eines Planeten verhindern kann. Für den Fall einer homogenen Schicht gilt, wie eben erläutert, die Ungleichung

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} , \quad (119)$$

für den Fall von dynamischer Instabilität. Diese Beziehung wird als Schwarzschild-Kriterium bezeichnet. Die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen gehen davon aus, dass das Innere von Planeten sind bzw. die einzelnen Schichten, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, vollständig konvektiv sind.

## 2.6 Das Linear Mixing

Wie wir bei der Erläuterung des hydrostatischen Gleichgewichts bereits gesehen haben, liefert die Zustandsgleichung  $\rho(T, p)$  sowohl für reine Stoffe als auch für Gemische einen wichtigen "Input" der Planetenmodellierung. In unseren Rechnungen verwenden wir das sogenannte Linear Mixing, um von den Eigenschaften der reinen Stoffe (Wasserstoff, Helium und schwereren Elementen) auf die der Mischung zu schließen. In diesem Abschnitt soll kurz darauf eingegangen werden, worum es sich dabei handelt. In der Thermodynamik unterscheidet man zwischen intensiven und extensiven Größen, wobei die letzteren linear mit der Größe des Systems anwachsen. Ein erstes Beispiel dazu liefert die absolute Innere Energie  $U$ . Im Allgemein gilt:

$$U = \sum_i U_i \quad . \quad (120)$$

Dabei sind die  $U_i$  die Absolutwerte der Inneren Energien der unterschiedlichen  $i$  Bestandteile. Ebenso gilt das für die Parzialvolumina

$$V = \sum_i V_i \quad ,$$

für die Teilmassen  $m_i$

$$m = \sum_i m_i \quad ,$$

und daher auch die Teilchenzahlen  $N_i$

$$N = \sum_i N_i \quad . \quad (121)$$

Die Partialdichten werden durch die Massen und die entsprechenden Teilvolumina, welche die jeweiligen Stoffe bei einem konstantem Druck einnehmen, bestimmt. Dies wird auch als Amagat'sches Gesetz bezeichnet, wobei aber vereinfacht angenommen wird, dass sich alle Konstituenten in derselben Phase befinden. Dies ist unter anderem durch die Näherung des idealen Gases gegeben.

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i} \quad . \quad (122)$$

Wir wollen nun schauen, wie sich die eben gezeigten Gleichungen auf die Gesamtdichte  $\rho$  des Systems auswirken. Zunächst gilt:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V}{m} = \frac{\sum_i V_i}{\sum_i m_i} \quad . \quad (123)$$

---

Im Zähler lösen wir das Volumen der  $j$ -ten Komponente  $V_j$  aus der Summe heraus. Zu beachten ist, dass sich als Folge die Summationsgrenze der oberen Summe immer um 1 verschiebt. Außerdem klammern wir im Nenner die Masse der besagten Komponente  $m_j$  aus der zugehörigen Summe aus und erhalten als Resultat:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V_j + \sum_{i \neq j} V_i}{m_j \left[ 1 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{m_j} \right]} . \quad (124)$$

Durch Aufspalten dieses Gesamtbruches entsteht:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V_j}{m_j \left[ 1 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{m_j} \right]} + \frac{\sum_{i \neq j} V_i}{m_j \left[ 1 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{m_j} \right]} . \quad (125)$$

Mit Gleichung 123 wird daraus

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_j} \frac{1}{1 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{m_j}} + \frac{\sum_{i \neq j} V_i}{m_j \left[ 1 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{m_j} \right]} . \quad (126)$$

Nun bilden wir im ersten Summanden den Hauptnenner und führen eine Rücktransformation des Nenners im zweiten Summanden durch und es ergibt sich:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_j} \frac{m_j}{m} + \frac{\sum_{i \neq j} V_i}{\sum_i m_i} . \quad (127)$$

Da die Größen  $x$  und  $y$  bereits für die massenspezifischen Anteile von Wasserstoff und Helium verwendet werden, bezeichnen wir hier die allgemeinen Massenkonzentrationen mit

$$c_j = \frac{m_j}{m_j + \sum_{i \neq j} m_i} = \frac{m_j}{m} . \quad (128)$$

Somit erhalten wir als Resultat für die Gesamtdichte die folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c_j}{\rho_j} + \frac{\sum_{i \neq j} V_i}{\sum_i m_i} . \quad (129)$$

Diese Summation wird soweit fortgesetzt, bis alle Komponenten abgearbeitet sind. Für zwei Komponenten würde dann  $V_3 = 0$  gelten. Somit gilt:

$$\frac{1}{\rho} = \sum_i \frac{c_i}{\rho_i} . \quad (130)$$

---

Die Summe der reziproken Massendichten multipliziert mit den Massenanteilen  $c_j$  ergeben also das Reziproke der Gesamtdichte. Da es sich bei der Entropie auch um eine extensive Größe handelt, nimmt auch diese mit der Größe des thermodynamischen Systems linear zu und es gilt:

$$S(p, T) = \sum_i S_i \quad . \quad (131)$$

Der Begriff der Mischungsentropie spielt in dieser Arbeit eine entscheidende Rolle. An dieser Stelle möchte ich kurz auf ein System aus  $K$  Elementen eingehen und dafür die Herleitung der idealen Mischungsentropie zeigen. Wir haben also ein System aus  $K$  idealen Gasen. Es existieren demnach keinerlei Wechselwirkungen zwischen den Teilchen. Jedes Element sei mit entsprechender Teilchenzahl  $N_i$  vorhanden. Zunächst seien alle Systeme unabhängig voneinander im thermodynamischen Gleichgewicht. Druck- und Temperaturausgleich haben stattgefunden, so dass  $p$  und  $T$  für alle Systeme dieselben Werte haben. Daher ergibt sich für die jeweiligen, thermischen Zustandsgleichungen:

$$p = \frac{N_i k_B T}{V_i} \quad . \quad (132)$$

Aus der Thermodynamik-Vorlesung [169] ist bereits bekannt, dass der Absolutwert der Entropie eines bestimmten Stoffes bis auf eine Konstante  $\sigma(T_0, p_0)$ , welche nicht von der Teilchenzahl abhängt, genau bestimmt ist. Es gilt die Gleichung:

$$s_i^{(ideal)}(T, p) = k_B \left[ \frac{5}{2} \ln(T) - \ln(p) + \sigma(T_0, p_0) \right] \quad . \quad (133)$$

Hier muss beachtet werden, dass es sich bei  $s_i^{(ideal)}(T, p)$  um eine intensive Größe handelt, welche bereits auf die jeweilige Teilchenzahl  $N_i$  bezogen ist. Die Gesamtentropie des Systems als extensive Größe ergibt sich als Summe der Einzelentropien und wir erhalten für den Zustand vor der Mischung:

$$S^{vorher} = \sum_i S_i^{ideal} = \sum_i N_i s_i^{ideal}(T, p) = k_B \sum_i \left[ \frac{5}{2} \ln(T) - \ln(p) + \sigma(T_0, p_0) \right] \quad . \quad (134)$$

Im nächsten Schritt werden die einzelnen Komponenten adiabatisch gemischt und alle Stoffe besetzen nun das Gesamtvolumen  $V$ , wobei jeder Stoff durch seinen Parzialdruck  $p_i$  charakterisiert ist und sich der Gesamtdruck  $p$  als Summe dieser ergibt.

$$p = \sum_i p_i \quad . \quad (135)$$

Nachdem die irreversible Vermischung adiabatisch stattgefunden hat, erhalten wir für den Gesamtwert der Entropie folgenden Ausdruck:

$$S^{nachher} = \sum_i N_i s_i^{ideal}(T, p_i) = \sum_i N_i \left[ \frac{5}{2} \ln(T) - \ln(p_i) + \sigma(T_0, p_0) \right] \quad . \quad (136)$$

---

Durch Addieren einer Null anhand von  $0 = +\ln(p) - \ln(p)$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 S^{nachher} &= \sum_i N_i \left[ \frac{5}{2} \ln(T) - \ln(p_i) + \ln(p) - \ln(p) + \sigma(T_0, p_0) \right] \\
 &= \sum_i N_i \left[ \frac{5}{2} \ln(T) - \ln(p) - \ln\left(\frac{p_i}{p}\right) + \sigma(T_0, p_0) \right] \\
 &= \sum_i N_i \left[ s_i^{ideal}(T, p) - \ln\left(\frac{p_i}{p}\right) \right] \quad .
 \end{aligned} \tag{137}$$

Anhand des Idealen-Gas-Gesetzes können wir folgende Umformung vornehmen:

$$\frac{p_i}{p} = \frac{N_i}{N} = x_i \quad . \tag{138}$$

Die sogenannte Mischungsentropie  $\Delta S(p, T)$  ist als die Differenz der Gesamtentropie nach und vor der Vermischung der Stoffe definiert und wir erhalten:

$$\Delta S(p, T) = -k_B \sum_i N_i \ln(x_i) \quad . \tag{139}$$

Somit hängt die Mischungsentropie des Idealen Gases nur noch von den jeweiligen Teilchenkonzentrationen der einzelnen Stoffe ab. Aufgrund der Tatsache, dass für ein Mehrkomponentensystem  $N_i < N$  gilt, handelt es sich bei  $\Delta S(p, T)$  um eine positive Größe. Dies zeigt, dass die Entropie gemäß des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik nach der Vermischung der einzelnen Komponenten ansteigt. Für den speziellen Fall nur zweier Elemente entsteht das folgende Resultat:

$$\Delta S(p, T) = -k_B [N_1 \ln(x_1) + N_2 \ln(x_2)] \quad . \tag{140}$$

Weiterhin ist an dieser Stelle zu beachten, dass es sich bei den Konzentrationen  $x_i$  um Teilchenanteile und nicht Massenanteile handelt, wie sie später in der Planetenmodellierung verwendet werden. Diese müssen bei Bedarf ineinander umgerechnet werden. Allerdings handelt es sich beim Linear Mixing lediglich um eine Idealisierung, welche annimmt, dass die Eigenschaften der Mischung von Stoffen lediglich durch die Eigenschaften der reinen Stoffe bestimmt sind. Dadurch werden in dieser Näherung die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen unterschiedlicher Stoffe vernachlässigt.

## 2.7 Verwendete Zustandsgleichungen

### 2.7.1 Chemisches und Physikalisches Bild

In der Physik von Vielteilchensystemen, insbesondere von dichten Plasmen, werden zur Beschreibung zwei grundlegende Prinzipien verwendet, das chemische und das physikalische

---

Bild. Bei ersterem wird ein System angenommen, bei dem zwischen gebundenen und freien Elektronen unterschieden wird. Diese Betrachtungsweise wird für niedrige Dichten angewendet. Das chemische Bild eine Betrachtungsweise, welche eine gewisse Anzahl aller möglichen Teilchenkonfigurationen (auch Moleküle, Atome Ionen aller Ionisationsstufen) vorgibt und diese unter allen Bedingungen unverändert bleiben. Die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander werden durch sogenannte Paarpotenziale beschrieben, welche in Experimenten bestimmt werden. Beispiele für derartige Zustandsgleichungen liefern die SCvH-EOS ([157]) und die FVT<sup>+</sup>-EOS ([72]). Moderne Zustandsgleichungen im chemischen Bild berücksichtigen sowohl das chemische als auch das Ionisationsgleichgewicht. Speziell für Wasserstoff lässt sich dies wie folgt über die chemischen Potenziale ausdrücken:

$$\mu_{H_2} = 2\mu_H$$

und

$$\mu_H = \mu_{Proton} + \mu_{Elektron} .$$

Noch detailliertere Beschreibungen zum chemischen Bild können aus [83] und [158] entnommen werden. Im Vergleich zum chemischen Bild bilden die Ionen und die Elektronen im physikalischen Bild die fundamentalen Teilchensorten. Diese Betrachtungsweise wird eingesetzt, wenn die Dichten zu hoch werden, als dass eine Unterscheidung zwischen freien und gebundenen Elektronen noch möglich wäre ([108]). Die Wechselwirkungen zwischen diesen grundlegenden Bestandteilen werden durch Coulomb-Potenziale beschrieben. Hier werden die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen so stark, dass Quanteneffekte eine Rolle spielen. Beispiele für Methoden zur Behandlung von Systemen im physikalischen Bild sind die Dichtefunktional-Theorie-Methoden wie die Car-Parrinello-Molekulardynamik ([18]) und die Born-Oppenheimer-Molekulardynamik ([26]). Auch Pfad Integral Monte Carlo Methoden ([120]) stellen eine Behandlungsweise dar. Unter anderem sind die Unterschiede zwischen diesen Methoden durch die Behandlung der Elektronentemperaturen bestimmt ([108]).

### 2.7.2 Die LM-REOS (Linear-Mixing-Rostock-Equation-of-State)

In großen Gasplaneten wie Jupiter und Saturn, aber auch in Sternen und weißen sowie brauen Zwergen, liegt Materie unter hohen Drücken, Dichten und Temperaturen vor. Für Saturn beispielsweise herrschen heute an seiner Schichtengrenze zwischen den äußeren Mänteln Temperaturen von etwa 6300 K bei Drücken von 300 GPa. Die Dichte an dieser Stelle beträgt  $1.6 \frac{g}{cm^3}$  ([3]). Am Übergang zwischen Kern und Mantel des Planeten werden diese Werte zu ca. 9000 K, 930 GPa und  $5.6 \frac{g}{cm^3}$ . Diese Werte wurden durch eigene Berechnungen erhalten und sind in Abbildung 4 dargestellt. Außerdem stellt sie das Dreischichtenmodell, dessen Parameter die Grundlage für meine Evolutionsberechnungen liefert, dar.

Die Abbildung zeigt auch die Anteile von Wasserstoff (rot), Helium (grün) und Wasser (blau) innerhalb des heutigen Planeten. Die Schichtengrenze wurde bei 300 GPa angesetzt. Durch Variation der Schichtengrenze können diese Werte bis hin zu noch extremeren Zuständen wandern. Um diese Bedingungen beschreiben zu können, benötigen wir akurate

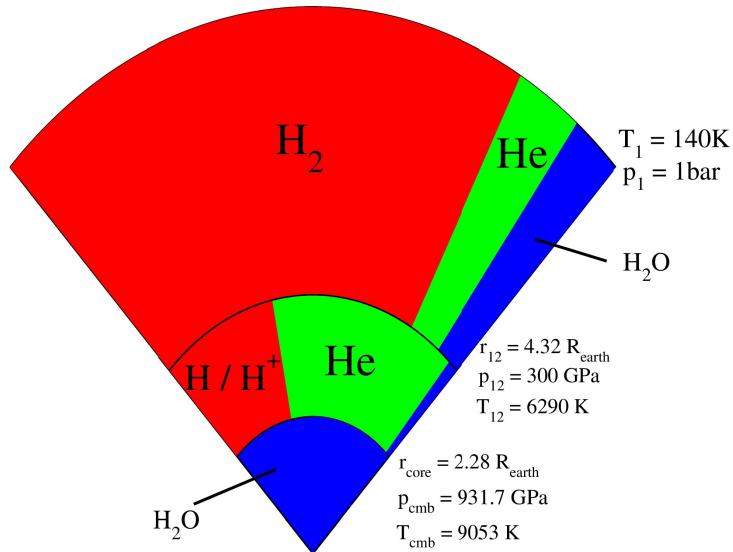


Abbildung 4: Dreischichtenmodell als Basis der Evolutionsberechnungen in dieser Arbeit. Die Farben rot, grün und blau bezeichnen die Anteile von Wasserstoff, Helium und Metallen(Wasser) ([3]). Die Daten in diesem Tortendiagramm sind über der Radiuskoordinate dargestellt.

Zustandsgleichungsdaten für Wasserstoff, Helium, schwerere Elemente (Gesteine, Eise und deren Mischungen). Auf diese EOS's soll nun im folgenden eingegangen werden. In allen durchgeführten Untersuchungen taucht die Linear-Mixing-Rostock-Equation-Of-State (LM-REOS) auf, welche in der Arbeitsgruppe "Statistische Physik" der Universität Rostock entwickelt wurde. Wie ihr Name bereits verrät, handelt es sich dabei um verschiedene Zustandsgleichungen zur Beschreibung von Wasserstoff, Helium und Wasser (in dieser Arbeit Repräsentant für schwere Elemente) unter extremen Bedingungen. Diese einzelnen Zustandsgleichungen werden anhand der Linear-Mixing-Regel miteinander kombiniert. Dies ist eine ideale Form der Mischung und vernachlässigt die Wechselwirkung verschiedener Teilchen untereinander oder nimmt an, dass die Wechselwirkungen zwischen allen Teilchen dieselbe ist. Im Folgenden möchte ich kurz auf die Eigenschaften dieser Zustandsgleichungen eingehen.

### 2.7.3 H-REOS.1

Diese Form der Wasserstoff-Zustandsgleichung wurde bereits in [133] und in [135] beschrieben. Die entsprechenden ab initio-Daten wurden von B. Holst unter Anwendung des "Vienna Ab initio Simulation Package (VASP)" ([98, 99]) erzeugt. Das Prinzip dieses Codes ist das Folgende. Man beginnt zunächst mit einer beliebigen Startverteilung von Ionen in einer entsprechenden Simulationsbox. Die Elektronen werden quantenmechanisch anhand der Dichtefunktional-Theorie beschrieben ([18], [26], [108], [120]). Dazu wird allgemein der Hamiltonoperator formuliert:

---


$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} + \hat{V} \quad .$$

Dabei ist  $\hat{T}$  der Operator der Translationsenergie der Elektronen.  $\hat{U}$  beschreibt die Wechselwirkungen der Elektronen mit einem externen Potenzial.  $\hat{V}$  enthält die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander. Das externe Potenzial enthält auch das Hintergrundpotenzial der Ionen unter Verwendung der Born-Oppenheimer-Näherung ([108]). Nachdem Aufstellen des Hamilton-Operators ist es nun im Prinzip möglich, die Wellenfunktion des Systems zu berechnen. Aus dieser können dann alle anderen Größen bestimmt werden. Allerdings ist es zu aufwendig, die Wellenfunktion numerisch zu bestimmen ([108]). Von Hohenberg und Kohn wurde nun eine Methode entwickelt, um dieses Problem einfacher zu behandeln ([71]). Diese ist als das Hohenberg-Kohn-Theorem bekannt. Aus der Wellenfunktion des Systems lässt sich eine Teilchendichte  $n(\vec{r})$  wie folgt definieren:

$$n(\vec{r}) = N \int d^3r_2 \dots \int d^3r_N \Psi(\vec{r}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad .$$

Der Stern steht für die komplexe Konjugation und  $N$  ist die Anzahl aller Elektronen. Dieses Theorem von Hohenberg und Kohn besagt nun, dass das externe Potenzial ein eindeutiges Funktional der Teilchendichte  $n(\vec{r})$  ist. Folglich sind auch die Wellenfunktion und alle Observablen Funktionale der Teilchendichte. Eine davon ist die Grundzustandsenergie des Systems. Nun wird für ein festes, externes Potenzial, eine Elektronendichte "geraten". Ist die Grundzustandsenergie erreicht, so entspricht die zugehörige Elektronendichte der tatsächlichen Elektronendichte. Eine wichtige Größe zur Bestimmung des Energiefunktional ist das Austauschkorrelationsfunktional  $E_{xc}$ . Das Problem besteht darin, die Energie in Abhängigkeit der Teilchendichte zu bestimmen. Allgemein wird das Energiefunktional  $E[n]$  wie folgt berechnet.

$$E[n] = T[n] + U[n] + V[n] \quad .$$

Da  $V[n]$  durch

$$V[n] = \int n(\vec{r}) v(\vec{r}) d^3r$$

gegeben ist, benötigt man für die anderen beiden Summanden weitere Ausdrücke. Dazu zerlegt man sie in einen wechselwirkungsfreien ( $s$ ) und in einen Korrelationsanteil ( $c$ ) und es gilt:

$$E[n] = T_s[n] + T_c[n] + U[n] + V[n] \quad .$$

Auch vom Wechselwirkungsterm  $U[n]$  kann noch die sogenannte Hartree-Energie  $U_H[n]$  abgespalten werden und es entsteht:

---


$$E[n] = T_s[n] + U_H[n] + V[n] + E_{xc}[n] \quad .$$

Hier ist erkennbar, dass das Funktional der Austauschkorrelationsenergie die Abweichungen der Translationsenergie und der Elektronenwechselwirkungen untereinander, vom idealen Anteil enthält. In dieser Größe steckt also die gesamte Information, die nötig ist, um das DFT-Problem zu lösen. Für diese Größe gibt es unterschiedliche Ansätze. Da sie nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, sollen hier nur zwei erwähnt werden. Es handelt sich dabei um die Local-Density-Approximation (LDA [19], [142], [143]) und die Generalized-Gradient Approximation (GGA [10], [105], [144]). Es folgt nach einem frei wählbaren, hinreichend kleinen Zeitintervall der MD-Schritt, in dem durch Verwendung des Hellman-Feynman-Theorems die Kräfte auf die Ionen berechnet werden. Anschließend werden diese bewegt. Dieses Verfahren wird über hinreichend viele Zeitschritte wiederholt, bis der resultierende Druck und die Innere Energie konvergiert sind. Diese, auf dem physikalischen Bild basierende, Vorgehensweise eignet sich gut für hohe Dichten (z.B.  $> 0.1 \frac{g}{cm^3}$  für Wasserstoff). Für kleinere Dichten, bei denen Wechselwirkungen und Entartung eine geringere Rolle spielen, eignet sich aufgrund der schnelleren Konvergenz das chemische Bild besser. Für Bedingungen mit Dichten  $< 0.1 \frac{g}{cm^3}$  verwendet die H-REOS.1 die Daten der FVT<sup>+</sup>-EOS. In [133] ist außerdem angegeben, dass die QMD (Quantenmolekulardynamik)-Daten und die FVT<sup>+</sup>-Daten anhand einer Spline-Interpolation miteinander kombiniert sind.

#### 2.7.4 H-REOS.2

Diese Zustandsgleichung wurde von A. Becker und B. Holst erzeugt. Die genaue Beschreibung und die Produktion der entsprechenden EOS-Daten ist bereits in [137] gegeben, soll hier aber noch kurz erläutert werden. Im wesentlichen ist der Erzeugungsprozess derselbe wie der in der Beschreibung zur H-REOS.1. Zunächst wurde der Definitionsbereich der Wasserstoff-Zustandsgleichung in einen Niederdichtebereich ( $\rho \leq 0.1 \frac{g}{cm^3}$ ) und einen Bereich mit höheren Dichten ( $0.2 \frac{g}{cm^3} \leq \rho \leq 9 \frac{g}{cm^3}$ ) eingeteilt. [137] geben an, dass im Bereich niedriger Dichten die Druckionisation kaum ausschlaggebend ist und die Eigenschaften des Wasserstoffs in diesem Bereich durch die Modelle, basierend auf dem Chemischen Bild, ausreichend gut beschrieben sind. Eine solche EOS, welche dem chemischen Bild untersteht, ist die FVT-EOS, welche in [72] und [135] ausführlicher beschrieben wird. Hier wird die Druckionisation für Temperaturen unter 3000 K vernachlässigt. Um das Verhalten des Wasserstoffs bei höheren Dichten beschreiben zu können, wurden die Daten, wie auch bei der H-REOS.1, mittels

finite-temperature-density-functional-theory-molecular-dynamics-Simulationen (FT DFT MD) gewonnen. Dazu verwendeten [137] den VASP-Code. Des Weiteren wurden die eben benannten Berechnungen für 256 Teilchen in der Simulationsbox bis zu einer Temperatur von 50000 K hin untersucht. Eine hohe Teilchenzahl beansprucht aufgrund der Berücksichtigung der Wechselwirkungen aller Teilchen untereinander natürlich mehr Rechenzeit, liefert aber auch genauere Werte für die thermodynamischen Ausgangsparameter. Außerdem wurde für Temperaturen  $\leq 5000K$  ein Quantenkorrekturterm verwendet, der Vibrations- und Rotationszustände berücksichtigt. Bei höheren Temperaturen spielt dieser Korrekturterm keine Rolle mehr. Zusätzliche Erweiterungen der H-EOS sind ebenfalls in [137] angegeben.

---

## 2.7.5 He-REOS

Die He-REOS wurde von Nettelmann et al. (2008) konstruiert und ist in [135] beschrieben. Es handelt sich hier um eine Kombination von Daten, beruhend auf FT-DFT-MD-Simulationen [91] und Daten der Sesame-EOS 5761 [113]. Die Beschreibung des Heliums im Dichtebereich zwischen 0.16 und  $10 \frac{g}{cm^3}$  und dem Temperaturbereich zwischen 4000 K und 31600 K wird mithilfe der QMD durchgeführt. Die Sesame 5761 - Daten werden für die Beschreibung bei Dichten kleiner als 0.16 und größer als  $10 \frac{g}{cm^3}$  und Temperaturen außerhalb des besagten Bereiches verwendet. Um Daten für weitere Dichten zu erhalten, wurde zwischen beiden Datensätzen interpoliert (kubische Spline-Interpolation). Der genaue Vorgang ist in [135] gezeigt.

## 2.7.6 H-REOS.3 and He-REOS.3

Diese beiden Zustandsgleichungen wurden ebenfalls in der Arbeitsgruppe "Statistische Physik" der Universität Rostock entwickelt [8]. Die H-REOS.3 unterscheidet sich von der H-REOS.2 lediglich dadurch, dass der Datensatz hin zu höheren Temperaturen und Dichten bis zu  $70 \frac{g}{cm^3}$  erweitert wurde. Die He-REOS.3 ist ebenfalls in [8] beschrieben. Auch dieser EOS-Bereich wurde auf den Temperatur- und Dichtebereich von Braunen Zwergen erweitert. Es handelt sich hier um eine Kombination von SCvH-Daten [157], einer Virial-Zustandsgleichung und DFT-MD-Daten, welche im Gegensatz zur He-REOS mit 108 Teilchen berechnet wurde.

Da diese Erweiterungen für die Wasserstoff- und Helium-Zustandsgleichungen in dieser Arbeit nicht verwendet wurden, wird für genauere Ausführungen auf [8] verwiesen.

## 2.7.7 H<sub>2</sub>O-REOS

Da der Repräsentant für schwere Elemente sowohl im Kern als auch im Mantel des Saturn in dieser Arbeit ausschließlich Wasser ist, ist es umso wichtiger an dieser Stelle kurz zu erwähnen, wie die Daten dieser Zustandsgleichung berechnet wurden. Die DFT-MD-Zustandsgleichung selbst wurde von French et al. berechnet und ist in , in [39], [41] und in [137] schon gezeigt. Diese EOS beinhaltet QMD-Berechnungen für die Bereiche zwischen 1000 K und 10000 K bei Dichten zwischen  $2 \frac{g}{cm^3}$  und  $7 \frac{g}{cm^3}$  und für Temperaturen zwischen 10000 K und 24000 K in einem Dichteintervall zwischen 5 und  $15 \frac{g}{cm^3}$ . Für die Phasen Eis-I, wie man es unter Normalbedingungen auf der Erde beispielsweise von Eiswürfeln oder Schnee kennt und flüssigem Wasser wurden die Datensätze von [31] und [172] verwendet. Alle anderen Bereiche wurden mit dem bereits erwähnten Datensatz Sesame 5761 [113] aufgefüllt. Daten, welche nicht in diesem nun erhaltenen Gitter liegen, wurden von French et al. per Interpolation erzeugt.

## 2.7.8 Die Saumon - Chabrier - van Horn - EOS (SCvH-EOS)

Diese Zustandsgleichung beruht für Wasserstoff und Helium auf dem chemischen Bild, welches bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben wurde. Die Daten dieser EOS wurden von Saumon et al. (1995) berechnet. Die genauen Methoden werden in [155] präsentiert. Das Wasser als schweres Element wird durch die He-SCvH-EOS ausgedrückt. Dazu wird die Zustandsgleichung des Heliums bezüglich der Dichte mit dem Faktor 4 skaliert. Der Sauerstoff

---

im Wassermolekül hat eine Massenzahl von 16. Durch diese Modifikation wird also der Sauerstoff beschrieben. Daher werden in diesem Kapitel nur die Wasserstoff- und Helium-EOS aufgeführt. Diese beiden Zustandsgleichungen werden Anhand der Minimierung der freien Energie  $F(T, V, \{N_i\})$  berechnet ([157], [47], [81]). Die chemischen Modelle aus [157] nehmen für das Wasserstoffplasma die Bestandteile  $H_2$ ,  $H$ ,  $H^+$  und die freien Elektronen an. Andere Konstituenten wie  $H^-$ ,  $H_2^+$  und  $H_3^+$  werden dort vernachlässigt, da ihre Anteile so gering sind, dass sie auf das Gesamtsystem kaum einen Einfluss haben. Ähnlich sieht es für das reine Heliumsystem aus. Hier werden nur die Bestandteile  $He$ ,  $He^+$ ,  $He^{2+}$  und wieder die freien Elektronen berücksichtigt. Die SCvH-EOS geht sowohl für Wasserstoff als auch für Helium von Dissoziations- und Ionisationsgleichgewicht aus. Dies manifestiert sich speziell für Wasserstoff über die chemischen Potenziale als  $\mu_{H_2} = 2\mu_H$  und  $\mu_H = \mu_{H^+} + \mu_e$ . Das bedeutet, dass im betrachteten System Dissoziations- und Ionisationsprozesse gleich schnell ablaufen und somit ein Gleichgewicht im System entsteht. Das chemische Potenzial eines bestimmten Bestandteils  $i$  wird als Ableitung der freien Energie  $F(T, V, N_i)$  nach der Teilchenzahl  $N_i$  berechnet und es gilt:

$$\mu_i = \left( \frac{\partial F(T, V, N_i)}{\partial N_i} \right)_{T, V, \{N_j\}_{j \neq i}} . \quad (141)$$

Aus diesem Grund ist die Gleichgewichtsbedingung über die freie Energie als  $\delta F = 0$  gegeben. Das bedeutet also, dass diese minimiert werden muss, um den Gleichgewichtszustand zu erreichen. Dazu wird die Zustandssumme faktorisiert. Aufgrund des logarithmischen Zusammenhangs mit der freien Energie, lässt sich diese als Summe verschiedener Bestandteile darstellen. Genauere Informationen über diese Faktorisierung und weitere Techniken zur Minimierung sind in [157], [47] und [81] gegeben.

### 2.7.9 H-SCvH

Die Beschreibung dieser EOS wurde auch in [135] gegeben und die entsprechenden Berechnungen zur Erzeugung der EOS-Daten wurden von Saumon et al. (1995) durchgeführt. Die ausführliche Beschreibung der Methoden kann der Leser in [157] nachvollziehen. Die H-SCvH-EOS ist unterteilt in eine SCvH-i und SCvH-ppt. Beide Zustandsgleichungen stimmen, bis auf einen Temperaturbereich von  $10^3 < T < 2 \cdots 10^4 K$  und dem zugehörigen Druckbereich  $0.1 < p < 100 Mbar$ , überein. Saumon et al. (1995) finden in besagtem Bereich einen Übergang, 1. Ordnung, von molekularem zu metallischen Wasserstoff. Dieser Übergang ist als Plasma-Phase-Transition (ppt) bekannt. Da allerdings zur damaligen Zeit über diesen Phasenübergang noch sehr wenig bekannt war und experimentell nicht nachgewiesen werden konnte, wurde in [157] außerdem auch die SCvH-i Zustandsgleichung vorgestellt. Dabei handelt es sich um eine EOS, bei der über den Bereich des Phasenübergangs hinweginterpoliert wurde. Auch diese EOS enthält somit den Phasenübergang, nimmt allerdings an, dass die Ableitungen der thermodynamischen Größen an der Phasengrenze stetig sein sollen. Folglich würde es sich hier nicht um einen Phasenübergang erster Ordnung handeln, da die Ionisation dann allmählig statt apprapt einsetzt ([154], [155], [157]). Neuere Erkenntnisse sagen einen Phasenübergang zwischen metallischem und molekularem Wasserstoff erster Ordnung voraus ([110], [128], [129]). Die entsprechenden EOS-Tabellen liefern Daten für

---

den Druck  $p[\frac{dyn}{cm^2}]$ , die Anteile  $x_{H_2}$  und  $x_H$  für molekularen und atomaren Wasserstoff in Teilchenprozenten, die Massendichte  $\rho(p, T)[\frac{g}{cm^3}]$ , die massenspezifische Entropie  $s(p, T)[\frac{erg}{gK}]$  und die ebenfalls massenspezifische, innere Energie  $u(p, T)[\frac{erg}{g}]$ . Die Entropie, der Druck, die Massendichte und die Innere Energie werden in [157] logarithmisch angegeben. Die Einheiten, welche hier in Klammern aufgeführt sind, beziehen sich aber auf die eigentlichen Größen. Da die Einheiten erg und dyn ein wenig ungewöhnlich erscheinen mögen, möchte ich diese hier kurz in SI-Einheiten angeben. Es gilt also:  $1erg = 0.1\mu J$  und  $1dyn = 10\mu N$ . Außerdem sind auch die partiellen, logarithmischen Ableitungen  $\rho_T \frac{\partial \log \rho(p, T)}{\partial \log T}$ ,  $\rho_p \frac{\partial \log \rho(p, T)}{\partial \log p}$ ,  $s_T \frac{\partial \log s(p, T)}{\partial \log T}$  und  $s_p \frac{\partial \log s(p, T)}{\partial \log p}$  angegeben. Die jeweils andere Größe  $p$  bzw.  $T$  wird dann konstant gehalten. Wie auch in [135] unter anderem beschrieben wurde, umfasst die SCvH-i den Datenbereich für Bedingungen in braunen Zwergen, großen Gasplaneten (Jupiter, Saturn und Jupiter-ähnlichen Exoplaneten) und in den Atmosphären weißer Zwergen. Außerdem können hiermit auch sogenannte "Low-Mass-Stars" beschrieben werden. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Wasserstofffusion im Kern über Milliarden Jahre, wie bei unserer Sonne, ablaufen kann, bevor das Heliumbrennen einsetzt [102]. Sie besitzen die Masse  $\leq$  der Masse unserer Sonne. Bei schwereren Sternen bis hin zu roten Riesen geht dieser Prozess wesentlich schneller vonstatten.

### 2.7.10 He-SCvH

Die He-SCvH ist auf dieselbe Art und Weise in einer Datentabelle aufgelistet, wie es bereits für die H-SCvH beschrieben wurde. Ebenfalls wird an dieser Stelle auch die Methode zur Minimierung der Freien Energie des Systems verwendet, welche in diesen Modellen mit der Faktorisierung der Zustandssummen einher geht [157]. Dieses Helium-System ist aus den Teilchensorten He,  $He^+$  und  $He^{2+}$  zusammengesetzt. Allerdings enthält diese Zustandsgleichung nicht den Effekt der Druckionisation von Helium. Ein Problem bildet in diesem Modell das  $H^+$ -Ion, da es eine Netto-Ladung von +1 besitzt, allerdings kein vollständig ionisiertes Teilchen ist. Somit kann es nicht als Punktteilchen angesehen werden. Eine genauere Beschreibung dieses Problems ist in [157] gegeben. Aus diesem Grund interpolierten Sauvage et al. (1995) über die Region der Druckionisation hinweg. Sie verwendeten die "Fluid-Perturbation-Theory" [152] zur Minimierung der freien Energie für Helium.

### 2.7.11 Sesame-EOS

Auch diese Zustandsgleichung basiert auf dem chemischen Bild. Sie enthält Datensätze für Wasserstoff, Helium und Wasser [162]. Bei der Sesame-EOS für Wasserstoff handelt es sich um die Zustandsgleichung für Deuterium [86]. Im Vergleich zu natürlichem Wasserstoff wurde die Deuterium-EOS bezüglich der Dichte skaliert. Sie berücksichtigt drei Phasen des Wasserstoffs, die feste, molekulare Phase, die feste, atomare und die flüssige Phase. Letztere enthält sowohl das Dissoziations- wie auch das Ionisationsgleichgewicht. Eine weitere, verbesserte Version der Sesame-EOS ist in [88] vorgestellt. Diese Version enthält einen Phasenübergang erster Ordnung zwischen festem und flüssigem Wasserstoff. Außerdem beschreibt sie auch einen stetigen Übergang zwischen metallischer und nicht metallischer Phase.

---

### 3 Die Evolution des Saturn

Der Saturn entstand etwa zur selben Zeit wie die Sonne aus einer protoplanetaren Scheibe ([1], [148], [62]). Dieses Kapitel wird zeigen, wie wir die Evolution von Planeten wie Saturn handhaben und modellieren. Insbesondere gehen wir hier auf das seit langem bestehende Problem der gemessenen Leuchtkraft ein, welches sich nicht im Rahmen der Standardmodelle erklären lässt ([34], [35], [103], [104], [43], [48], [50], [135], [138], [3], [155]). Außerdem werden wir für Saturn ein zu kurzes Alter, welches viel geringer als das der Sonne sein wird, herausbekommen. Zusätzlich bieten wir hier eine mögliche Lösung in Form des Effekts der Entmischung von Wasserstoff und Helium an. Es könnten sich Heliumtropfen im Innern des Saturn bilden und unter Einwirkung der Schwerkraft tiefer in den Planeten hineinsinken, wobei potentielle Energie freigesetzt wird, die die hohe Leuchtkraft erklären könnte.

#### 3.1 Die Kühlungsgleichung

Für alle Planeten kann eine entsprechende Energiebilanz aufgestellt werden. Es lässt sich eine Gleichung herleiten, welche die intrinsische Luminosität (Eigenleuchtkraft) und die zugehörige Effektivtemperatur in Abhängigkeit der Zeit beschreibt. Dies ist die sogenannte Kühlungsgleichung. Es handelt sich dabei um eine, häufig in der Astrophysik verwendete, Beschreibung des Kühlungsverhaltens von großen Gasplaneten und Sternen ([33], [34], [35], [43], [48], [50], [92], [93], [131], [135], [138], [3], [156]).

##### 3.1.1 Gleichgewichtstemperaturen und Albedo

In dieser Arbeit wollen wir das Strahlungsverhalten des Planeten Saturn, wie auch dem der Sonne, durch schwarze Körper beschreiben. Daher werden wir auch für beide Körper das Stefan-Boltzmann Gesetz anwenden. Zunächst werfen wir einen Blick auf den Energiehaushalt und die Luminosität des Planeten. Die Leuchtkraft setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen. Zum einen aus dem Sonnenlicht, welches reflektiert, absorbiert und spektral unmodifiziert wieder reemittiert wird. Diese Leuchtkraft wollen wir hier mit  $L_*$  angeben. Zum anderen kann ein Planet auch durch innere Prozesse wie radioaktive Zerfälle oder, wie wir später sehen werden, die Entmischung von Wasserstoff und Helium geheizt werden ( $T\Delta S > 0$ ). Des Weiteren kann auch, wie z.B. bei der Kernerison, Energie verbraucht werden ([178], [179], [180]). Die Leuchtkraft, welche von derartigen inneren Prozessen herrührt, werden wir hier als  $L_{int}$  bezeichnen. Zunächst soll ein Zusammenhang gefunden werden, der die Gleichgewichtstemperatur  $T_{eq}$  beschreibt. Diese Größe ist die Effektivtemperatur des Planeten, sobald er sich im Strahlungsgleichgewicht mit der Sonne befindet. Eine entsprechende Gleichung wurde in [34] bereits präsentiert. In diesem Abschnitt wird eine mögliche Herleitung derselben gezeigt. Die Gesamtluminosität  $L_{Planet}$  setzt sich wie folgt zusammen:

$$L_{Planet} = L_* + L_{int} \quad . \quad (142)$$

Eine beliebige Leuchtkraft  $L_{Planet}$  ist über das Stefan-Boltzmann Gesetz mit einer entsprechenden Effektivtemperatur  $T_{eff}$  verknüpft. Demnach wird die Gesamtluminosität des

Planeten dargestellt als:

$$L_{\text{Planet}} = 4\pi\sigma R_p^2 T_{\text{eff}}^4 \quad . \quad (143)$$

$\sigma$  ist die Stefan-Boltzmann Konstante ( $5.670373 \frac{W}{m^2 K^4}$ ). Auf diese Art und Weise lässt sich nun auch eine Gleichgewichtstemperatur für den Planeten bestimmen, welche wir hier als  $T_{\text{eq}}$  bezeichnen. Dabei handelt es sich um die Effektivtemperatur des Planeten, falls er im Strahlungsgleichgewicht mit der Sonne steht. Ein entsprechender Ausdruck soll nun hergeleitet werden. Die absolute Leuchtkraft der Sonne ist, wie bereits oben erwähnt, durch das Stefan-Boltzmann Gesetz gegeben:

$$L_* = 4\pi\sigma R_*^2 T_*^4 \quad . \quad (144)$$

$R_*$  ist der Radius unseres Zentralgestirns. Als weiteren Parameter zur Beschreibung des Strahlungstransportes verwenden wir die flächenspezifische Strahlungsleistung  $\Phi$ . Somit erhält man für eben diese Strahlungsleistung an der Oberfläche der Sonne folgende Beziehung:

$$\Phi_*(R_*) = \frac{4\pi\sigma R_*^2 T_*^4}{4\pi\sigma R_*^2} = \sigma T_*^4 \quad . \quad (145)$$

Dabei ist  $T_*$  die Effektivtemperatur des Muttersterns bzw., wie in diesem Fall, unserer Sonne. Der orbitale Abstand ist in Abbildung 5 gezeigt und wird mit  $a$  bezeichnet. Nun sehen wir uns die flächenspezifische Strahlungsleistung der Sonne am Ort des Planeten an.

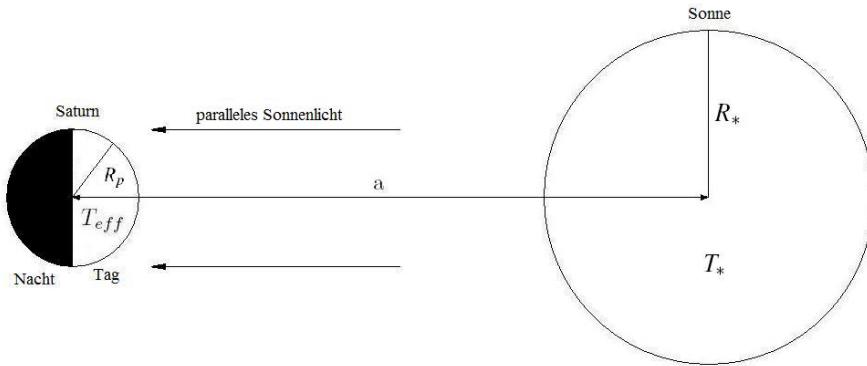


Abbildung 5: Abbildung zur Veranschaulichung der Geometrie zwischen Planet und Stern [149]. Der Abstand zwischen Planet und Sonne ist groß genug, um das Sonnenlicht am Ort des Planeten als parallel anzunehmen.

Die gesamte Leuchtkraft des Sterns ist auf eine Kugel mit der Oberfläche von  $4\pi a^2$  verteilt und wir erhalten dementsprechend folgende Beziehung:

$$\Phi_*(a) = \frac{4\pi\sigma R_*^2 T_*^4}{4\pi\sigma a^2} = \sigma \frac{R_*^2}{a^2} T_*^4 \quad . \quad (146)$$

Da wir einen Ausdruck für die Gleichgewichtstemperatur des Planeten erhalten wollen, müssen wir den Teil der Strahlungsleistung der Sonne betrachten, welcher die Planetenoberfläche auch tatsächlich erreicht. Diese Strahlungsleistung wollen wir an dieser Stelle mit  $\Phi_{in}$  bezeichnen. Dieses sieht folgendermaßen aus:

$$\Phi_{in} = (1 - A) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Phi_*(a) = \frac{1 - A}{4} \cdot \frac{\sigma R_*^2 T_*^4}{a^2} . \quad (147)$$

$A$  bezeichnet die Albedo, also das Rückstrahlvermögen des Planeten, so dass der Anteil von  $(1 - A)$ , der einfallenden Strahlung absorbiert wird. Des Weiteren treten in obiger Gleichung zwei Faktoren von jeweils  $\frac{1}{2}$  auf. Der erste ist ein Resultat dessen, dass immer nur die Tagseite des Planeten von der Sonne beschienen wird. Der Sachverhalt des zweiten Faktors ist in Abbildung 6 dargestellt.

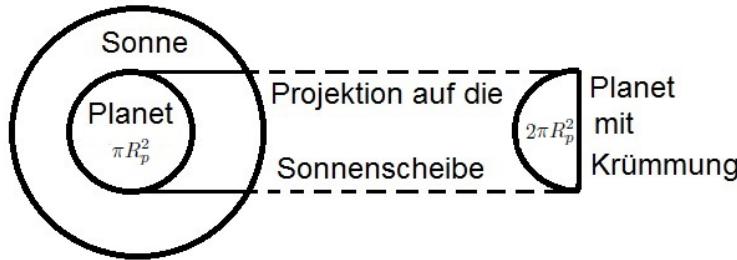


Abbildung 6: Projektion des Planeten auf die Sonnenscheibe. Da das Sonnenlicht parallel auf den Planeten trifft, wird nicht die gesamte Fläche der Kugel voll beschienen, sondern nur die Kreisfläche. Diese entsteht, wenn man den Planeten auf den Stern projiziert. Dadurch ergibt sich ein Faktor  $\frac{1}{2}$  für die Reduktion der effektiven Fläche.

Analog lautet im Gleichgewichtszustand der Ausdruck für die flächenspezifische Strahlungsleistung des Planeten an seiner Oberfläche:

$$\Phi_{out} = \frac{4\pi\sigma R_p^2 T_{eq}^4}{4\pi R_p^2} = \sigma T_{eq}^4 . \quad (148)$$

Da im Falle des Gleichgewichts der austretende mit dem einfallenden Strahlungsfluss des Planeten übereinstimmt, muss folglich gelten:

$$\Phi_{in} = \Phi_{out} \quad (149)$$

und somit

$$\frac{1 - A}{4} \cdot \frac{\sigma R_*^2 T_*^4}{a^2} = \sigma T_{eq}^4 . \quad (150)$$

---

Durch entsprechendes Auflösen dieser Gleichung entsteht ein Ausdruck für die Effektivtemperatur des Planeten. Im Falle des Strahlungsgleichgewichts mit dem Mutterstern ist diese  $T_{eq}$ :

$$T_{eq} = T_* \sqrt{\frac{R_*}{2a}} (1 - A)^{\frac{1}{4}} . \quad (151)$$

Mithilfe dieser Beziehung ist es nun möglich, die Berechnungen für den Energiehaushalt des Planeten auf innere Wärmequellen zu erweitern. Bei der Kühlungskurve handelt es sich um die Funktion  $T_{eff}(t)$ . Nach dem Berechnen von Planetenprofilen, die durch ihre Außentemperaturen  $T_1$  charakterisiert sind, benötigen wir noch einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen. Dieser ist durch entsprechende Atmosphärenmodelle gegeben. Graboske et al. [48] berechneten bereits Modellatmosphären auf einem, für Jupiter typischen,  $g - T_{eff}$  Gitter. Diese Modellatmosphären werden wie folgt gefittet [76]:

$$p = 0.236 \sqrt{g} T_{eff} T^3 . \quad (152)$$

Die oberflächennahe Fallbeschleunigung  $g$  wird dabei in  $\frac{cm}{s^2}$  angegeben. Für einen Druck von 1 bar ist die Oberflächentemperatur  $T_1$  definiert. Der vorgestellte Fit wurde bereits in [76] und [155] für Jupiter und Saturn verwendet. Umgestellt wird die vorherige Gleichung zu:

$$T_1 = K g^{-0.167} T_{eff}^{1.244} . \quad (153)$$

Die Konstante  $K$  wird dabei aus aktuellen Messdaten bestimmt. Guillot et al. (1995) [51] verwenden für Jupiter den Wert  $K = 1.519$  und für Saturn  $K = 1.511$ . Der letztere Wert wird in dieser Arbeit auch zur Beschreibung der Evolution des Saturn verwendet.

Wir widmen uns im nächsten Abschnitt der Herleitung der allgemeinen Kühlungsgleichung. Es soll nun vor allen Dingen darum gehen, die Größe  $L_{int}$ , welche die Luminosität durch innere Prozesse beschreibt, genauer zu untersuchen.

### 3.1.2 Die Herleitung der allgemeinen Kühlungsgleichung

Die Gesamtenergie des Planeten setzt sich aus der inneren  $U$  und der Gravitationsenergie  $E_g$  zusammen. Letztere wird freigesetzt, wenn der Planet während des Kühlungsprozesses schrumpft und sich somit Masse im Schwerfeld des Saturn zu seinem Zentrum hin bewegt. Allgemein gilt für die Gesamtenergie des Planeten  $E_{ges}$  somit:

$$E_{ges} = U + E_g . \quad (154)$$

Die Gravitationsenergie ist durch die folgende Integralgleichung gegeben:

$$E_g = - \int_0^M \frac{Gm(r)}{r(m)} dm . \quad (155)$$

---

Dabei läuft die Integration vom Zentrum bis zur Gesamtmasse des Planeten. Die gesamte innere Energie  $U$  kann als Integration über die massenspezifische innere Energie wie folgt geschrieben werden:

$$U = \int_0^M u(m) dm . \quad (156)$$

Hier soll noch einmal angemerkt werden, dass es sich bei  $m$  um die Massenkoordinate handelt, die bereits bei den Schichtenmodellen eingeführt wurde. Dabei stellt  $dm$  die Masse einer infinitesimalen Massenschale des Planeten dar. Die Luminosität des Planeten ist definiert als die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Planeten.

$$L_{int} = -\frac{d}{dt} (U + E_g) . \quad (157)$$

Setzen wir nun die obigen Gleichungen für  $U$  und  $E_g$  ein, so entsteht folgende Beziehung:

$$L_{int} = -\left[ \frac{d}{dt} \left( \int_0^M u(m) dm - \int_0^M \frac{Gm(r)}{r(m)} dm \right) \right] . \quad (158)$$

Nun ziehen wir die Zeitableitung in die Integrale hinein und erhalten:

$$L_{int} = -\left[ \int_0^M \frac{du}{dt} dm - \int_0^M \frac{d}{dt} \frac{Gm(r)}{r(m)} dm \right] . \quad (159)$$

Im ersten Integral taucht das totale Differenzial  $du$  der Inneren Energie auf. Durch Anwendung des ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und der Transformation vom Volumen zur Massendichte (in Kapitel 2 erläutert) erhalten wir:

$$L_{int} = -\left[ \int_0^M \frac{T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho}{dt} dm - \int_0^M \frac{d}{dt} \frac{Gm(r)}{r(m)} dm \right] \quad (160)$$

und somit

$$L_{int} = -\left[ \int_0^M T \frac{ds}{dt} dm + \int_0^M \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dm - \int_0^M \frac{d}{dt} \frac{Gm(r)}{r(m)} dm \right] . \quad (161)$$

Da die gesamte Integration aller Integranden über das komplette Planeteninnere läuft, können wir die Integrale zusammenziehen und erhalten zunächst als Zwischenresultat:

$$L_{int} = -\int_0^M \left[ T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{Gm(r)}{r(m)} \right] dm . \quad (162)$$

---

Die nächste Aufgabe wird sein, zu beweisen, dass die letzten beiden Summanden in der Klammer sich gegenseitig aufheben. So gilt:

$$\int_0^M \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dm = \int_0^M \frac{d}{dt} \frac{Gm(r)}{r(m)} dm . \quad (163)$$

Um diesen Beweis zu führen, nutzen wir zur Umformung dieses Integrals das hydrostatische Gleichgewicht und die Beziehung zwischen Massen- und Radiuskoordinate und erhalten als erstes Resultat:

$$dp = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) dr$$

und

$$\frac{dp}{dm} = \frac{Gm(r)}{4\pi r^4} . \quad (164)$$

Hiermit haben wir einen Ausdruck erhalten, der nun in die Gleichung für die Gravitationsenergie eingesetzt wird und mit  $dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$  folgendes Ergebnis liefert:

$$E_g = 4\pi \int_0^M r^3 \frac{dp}{dm} dm . \quad (165)$$

Außerdem haben wir an dieser Stelle erneut den Zusammenhang zwischen Radius- und Massenkoordinate ( $\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho(r)$ ) verwendet, um von  $dr$  nach  $dm$  zu transformieren. Anhand der Regl für die partielle Integration werden wir dieses Integral bezüglich  $dm$  nun auswerten. Die entsprechende Vorschrift lautet allgemein:

$$\int uv' = uv - \int u'v . \quad (166)$$

Die Zuordnungen zu den Funktionen  $u(m)$  und  $v(m)$  sehen wie folgt aus:

$$u(m) = r^3 \rightarrow u'(m) = 3r^2 \frac{dr}{dm} \quad (167)$$

und

$$v'(m) = \frac{dp}{dm} \rightarrow v(m) = p . \quad (168)$$

Dies wird in den Ausdruck für die Gravitationsenergie  $E_g$  eingesetzt. Zuvor soll hier aber kurz auf die entsprechenden Randbedingungen eingegangen werden. Die Radiuskoordinate erhält im Zentrum des Planeten den Wert Null, also gilt  $r(m = 0) = 0$ . Desweiteren wird der Druck am äußersten Rand der Atmosphäre, also beim Übergang zum Weltraum ebenfalls den Wert Null mit  $p(m = M) = 0$  annehmen. Aufgrund der Beziehungen  $r(m = M) = R$

---

und  $p(m = 0) = p_{zentrum}$  treten bei diesen Betrachtungen keinerlei Divergenzen auf und wir können fortfahren. Als nächsten Ausdruck der Gravitationsenergie erhalten wir:

$$E_g = 4\pi \left( [pr^3]_0^M - 3 \int_0^M r^2 p \frac{dr}{dm} dm \right) . \quad (169)$$

Durch erneute Verwendung der Beziehung zwischen Masse- und Radiuskoordinate, können wir die Ableitung  $\frac{dr}{dm}$  in vorherigem Integral ersetzen und erhalten als zusammengefassten Ausdruck:

$$E_g = -3 \int_0^M \frac{p(m)}{\rho(m)} dm . \quad (170)$$

Wie wir bereits bei der Definition der Leuchtkraft gesehen haben, handelt es sich dabei um die zeitliche Änderung der Energie. Aus diesem Grund betrachten wir nun entsprechend die Zeitableitung der Gravitationsenergie. Es ist zu beachten, dass in dieser Herleitung bzw. Beweisführung die explizite Zeitabhängigkeit nicht extra als Argument aufgeführt ist. Als Ergebnis entsteht unter Verwendung der Produktregel also:

$$\dot{E}_g = -3 \int_0^M \left( \frac{\dot{p}}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \dot{\rho} \right) dm . \quad (171)$$

Ebendso betrachten wir die zeitliche Änderung der Ableitung des Druckes von der Massenkoordinate

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} , \quad (172)$$

und wir erhalten:

$$\frac{d\dot{p}}{dm} = -\frac{d}{dt} \frac{Gm}{4\pi r^4} = 4 \frac{Gm}{4\pi r^5} \dot{r} . \quad (173)$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit  $4\pi r^3$  entsteht:

$$4\pi r^3 \frac{d\dot{p}}{dm} = 4 \frac{Gm}{r^2} \dot{r} . \quad (174)$$

Nun integrieren wir beide Seiten noch über die Massenkoordinate  $m$  und erhalten als Resultat:

$$4\pi \int_0^M r^3 \frac{d\dot{p}}{dm} dm = 4 \int_0^M \frac{Gm}{r^2} \dot{r} dm . \quad (175)$$

---

Bereits vorher haben wir die Grundgleichung für die partielle Integration gesehen, welche nun auf die linke Seite dieser Gleichung angewendet werden soll. Die entsprechenden Zuordnungen sehen wie folgt aus:

$$u(m) = r^3 \rightarrow u'(m) = 3r^2 \frac{dr}{dm} \quad , \quad (176)$$

$$v'(m) = \frac{d\dot{p}}{dm} \rightarrow v(m) = \dot{p} \quad . \quad (177)$$

Anhand dieser Substitutionen entsteht für die linke Seite von Gleichung 175 der Ausdruck

$$4\pi \int_0^M r^3 \frac{d\dot{p}}{dm} dm = [4\pi r^3 \dot{p}]_0^M - 4\pi \int_0^M 3r^2 \frac{dr}{dm} \dot{p} dm \quad . \quad (178)$$

Auch hier verschwindet, wie bereits bei der vorherigen partiellen Integration der Klammerterm aufgrund einer weiteren Randbedingung, nämlich  $\dot{p}(m = M) = 0$ . Hier soll angemerkt werden, dass diese Randbedingung der Herleitung dient und nichts mit unserer gewählten Randbedingung von 1 bar zu tun hat. Diese wurde lediglich eingeführt, um anhand der Atmosphärenmodellierung einen Wert zu haben, welcher vergleichbar mit der Erdatmosphäre sein soll. Denn ein verschwindender Druck am äußersten Radius des Planeten würde ebenso eine äußere Temperatur nahe des absoluten Nullpunktes bedeuten. In das übrige Integral setzen wir erneut die Gleichung 13 ein und erhalten als Ergebnis:

$$4 \int_0^M \frac{Gm}{r^2} \dot{r} dm = -4\pi \int_0^M \frac{3r^2 \dot{p}}{4\pi r^2 \rho} dm = -3 \int_0^M \frac{\dot{p}}{\rho} dm \quad . \quad (179)$$

Ein weiteres Mal betrachten wir die zeitliche Änderung der Gravitationsenergie und schreiben somit folgende Gleichung auf, um den Integralausdruck in vorangegangener Gleichung zu erhalten:

$$\dot{E}_g = -\frac{d}{dt} \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = \int_0^M \frac{Gm}{r^2} \dot{r} dm \quad . \quad (180)$$

Dieses Ergebnis setzen wir nun in Gleichung 179 ein und erhalten somit das folgende, wichtige Resultat:

$$4\dot{E}_g = -3 \int_0^M \frac{\dot{p}}{\rho} dm \quad . \quad (181)$$

Das hydrostatische Gleichgewicht lieferte  $\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$ . Wir verwenden nun diese Beziehung erneut und erhalten folgendes Resultat:

$$\dot{E}_g = \int_0^M \frac{p}{\rho^2} \dot{\rho} dm = \frac{dE_g}{dt} \quad . \quad (182)$$

---

Setzen wir diese Gleichung nun in die Definition der intrinsischen Luminosität für die Änderung der Gravitationsenergie ein, so erhalten wir zunächst:

$$L_{int} = \frac{dE_i}{dt} + \frac{dE_g}{dt} = - \int_0^M T \frac{ds}{dt} dm - \int_0^M \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dm + \int_0^M \frac{p}{\rho^2} \dot{\rho} dm . \quad (183)$$

Aufgrund der Beziehung  $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$  heben sich der zweite und der dritte Summand gegenseitig auf. Anhand dieses letzten Resultates lässt sich erkennen, dass die letzten beiden Terme sich gegenseitig aufheben und lediglich folgende Gleichung übrig bleibt:

$$L_{int} = - \int_0^M T(m, t) \frac{ds(m, t)}{dt} dm . \quad (184)$$

Nun haben wir die endgültig die Kühlungsgleichung hergeleitet. Mithilfe der Formeln aus Abschnitt 3.1.1 bezüglich der Gleichgewichts- und Effektivtemperatur lässt sich die intrinsische Leuchtkraft als Differenz der entsprechenden Strahlungsleistungen berechnen. Diese Differenz aus beiden Luminositäten liefert die intrinsische Leuchtkraft  $L_{int}$  des Planeten und die Kühlungsgleichung wird zu:

$$4\pi\sigma R^2 (T_{eff}^4 - T_{eq}^4) = - \int_0^M T(m, t) \frac{ds(m, t)}{dt} dm . \quad (185)$$

Somit haben wir die Grundgleichung gefunden, welche die Evolution von Planeten beschreibt. Sie wurde auch in weiteren Arbeiten bereits angewandt ([33], [34], [35], [43], [48], [50], [131], [135], [138], [3], [156]).

### 3.1.3 Evolutionsmodelle

Planeten können wie anfangs erwähnt, aus mehreren Schichten unterschiedlicher Größe und Zusammensetzung bestehen. In dieser Arbeit werden vor allen Dingen das Zwei- und das Dreischichtenmodell verwendet. Dabei können sich Planeten vollkommen entwickeln. Die Schichten können sich aber auch verändern und ihre Zusammensetzung kann variieren. Dies soll in den folgenden Abschnitten genauer erläutert werden.

### 3.1.4 Die homogene Evolution

Wie der Name schon vermuten lässt, handelt es sich bei diesem Typ um ein Modell, das eine homogene Entwicklung des Planeten voraussetzt. Dies kann sowohl im Zwei- wie auch im Dreischichtenmodell bewerkstelligt werden, solange sich die Zusammensetzung der Schichten nicht ändert. Um dies zu veranschaulichen soll Abbildung 7 die Querschnitte durch einen Planeten, bestehend aus Kern und Mantel, zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  darstellen.

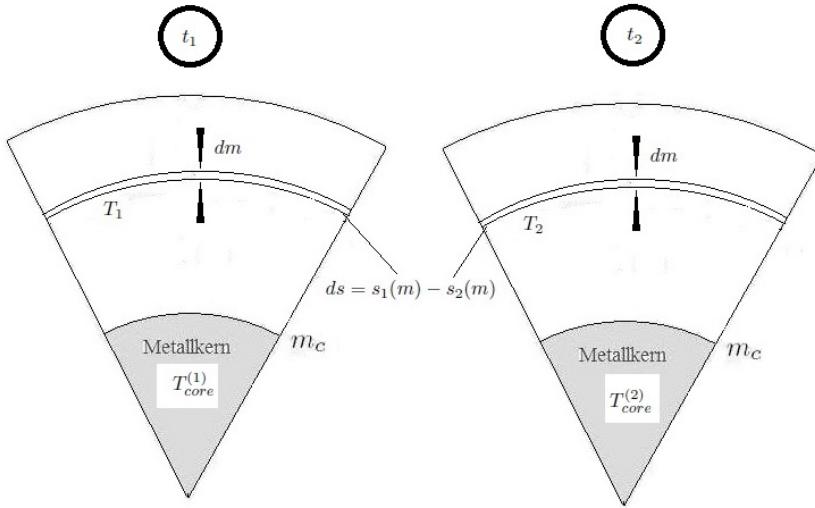


Abbildung 7: Vergleich von Planetenquerschnitten (hier des Zweischichtenmodells) bestehend aus Kern und Mantel. Die homogene Evolution setzt eine konstante Kernmasse  $m_c$  voraus und es gilt hier, für zwei verschiedene Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$ ,  $m_{core}(t_1) = m_{core}(t_2)$ . Außerdem gilt  $x(t_1) = x(t_2)$ ,  $y(t_1) = y(t_2)$  und  $z(t_1) = z(t_2)$ . In der Entropiedifferenz  $ds(m)$  fällt die Konstante  $s_0$  (Gleichung 87) aus der Kühlungsgleichung vollständig heraus.

Diese Abbildung soll außerdem verdeutlichen, dass die Kernmasse des Planeten bei einer homogenen Evolution gleich bleibt. Somit bleiben Kern und Mantel voneinander getrennte und abgeschlossene Systeme und sind somit identifiziert durch

$$x(t_1) = x(t_2) , \quad y(t_1) = y(t_2) , \quad z(t_1) = z(t_2) \quad (186)$$

und

$$m_{core}(t_1) = m_{core}(t_2) .$$

Eine Schwäche der Annahme der geschlossenen Systeme ist, dass die Strahlung des Kerns ungehindert die Grenze zwischen Kern und Mantel passieren kann, Teilchen allerdings nicht. Auf dieselbe Art und Weise lässt sich die homogene Evolution für drei oder beliebig viele Schichten definieren, solange auch dort die Massenkoordinaten, welche die Grenzen zwischen den Schichten beschreiben, konstant bleiben. Dies gewährleistet, dass auch die Gesamtmassen der einzelnen Schichten immer dieselben bleiben. Auch in diesem Fall würde in der Entropiedifferenz  $ds(m)$  die Konstante  $s_0$  aus Gleichung 185 für jede Schicht vollständig herausfallen. Diese Art der Beschreibung der Evolution eines Planeten verbietet jeglichen vertikalen Massentransport (z.B. Heliumregen, Kernerrosion). Die Kernerrosion, falls sie auftritt, sorgt dafür, dass sich der Kern auflöst und den Mantel mit schweren Metallen anreichert ([178], [179], [180]). Die homogene Evolution birgt jedoch einige Probleme.

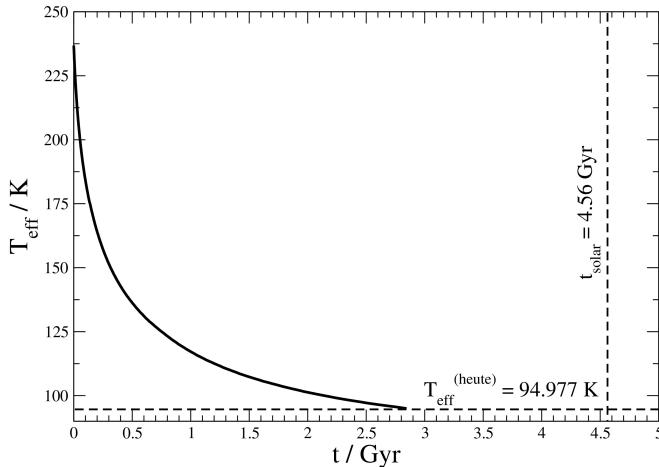


Abbildung 8: Homogenes Kühlungsverhalten des Saturn. Gezeigt ist die Effektivtemperatur des Planeten über der Zeit. Der Saturn erreicht seine heutige Effektivtemperatur schon nach fast 2.5 Milliarden Jahren und ist verglichen mit dem Alter unseres Sonnensystems von 4.56 Gyr zu jung.

So liefert sie für den Saturn ein zu kurzes Alter, verglichen mit dem Alter des Sonnensystems von 4.56 Milliarden Jahren. Homogene Evolutionsrechnungen liefern Werte zwischen zwei und drei Milliarden Jahren. Abbildung 8 zeigt eine erste Kühlungskurve für einen zweischichtigen Saturn mit einer Kernmasse von 14.545 Erdmassen und einem Heliumgehalt im Mantel von 0.275 (massenspezifisch), welcher dem solaren Wert entspricht. Es handelt sich um den Heliumgehalt, den der Planet noch aus der protoplanetaren Scheibe erhielt und bis heute hätte, wenn die homogene Evolution richtig wäre. Außerdem nehmen wir eine 1-bar Temperatur von 140 K an.

Das homogene Evolutionsmodell liefert nicht nur ein zu kurzes Alter, sondern auch eine zu hohe Luminosität, welche nicht allein durch den Entstehungsprozess des Planeten erklärt werden kann. Daher soll als nächstes geklärt werden, wobei es sich bei der inhomogenen Evolution handelt. Diese erlaubt den vertikalen Massentransport und bildet die Grundlage für weitere Untersuchungen.

### 3.1.5 Die inhomogene Evolution

Im Gegensatz zur homogenen Evolution können sich bei dieser Art der Modellierung die Konzentrationen in den einzelnen Schichten und somit auch deren absolute Massen ändern. Man sagt auch, dass hier das mittlere Molekulargewicht nicht konstant bleiben muss [33]. Daher können sich also auch die Massenkoordinaten ändern, welche die Schichten voneinander trennen. Somit ist es nun möglich, Heliumregen innerhalb des Planeten zu betrachten und den Effekt der Wasserstoff-Helium-Entmischung zu untersuchen. Trotz dieser zusätzlichen Freiheitsgrade zur Beschreibung der Evolution liefert diese Herangehensweise doch Probleme beim Lösen der Kühlungsgleichung. Da sich hier die Konzentrationen und damit

---

auch die Teilchenzahlen ändern, fällt die Entropiekonstante  $s_0(T_0, \rho_0, \{N_i^{(0)}\})$  nicht mehr aus der Kühlungsgleichung heraus. Da auch der Kern zum Kühlungsverhalten des Planeten beiträgt, wird im folgenden die Methode der thermodynamischen Integration auf diesen angewandt und soll mit einer einfacheren Beschreibung verglichen werden.

### 3.1.6 Die Behandlung der Kernkühlung

Betrachtet man das Evolutionsverhalten eines Planeten, so muss auch der Energiegehalt des Kerns berücksichtigt werden. Dazu werden in dieser Arbeit drei Möglichkeiten unterschieden. In jedem Fall wird für den planetaren Kern für jeden Zeitpunkt eine isotherme Näherung verwendet. Das bedeutet, dass sich die Kerntemperatur zwar zeitlich ändert, zu einem festen Zeitpunkt allerdings überall konstant ist. Wir wollen nun diese drei Typen näher erläutern. Später werden ihre Einflüsse in den Ergebnissen diskutiert. Zunächst werfen wir noch einmal einen genaueren Blick auf die Kühlungsgleichung. Das Integral kann unter Beachtung der Integrationsgrenzen auf die unterschiedlichen Bereiche des Planeten bezogen werden.

$$4\pi\sigma R^2 \left( T_{eff}^4 - T_{eq}^4 \right) = - \int_0^{m_{core}} T(m, t) \frac{ds(m, t)}{dt} dm - \int_{m_{core}}^M T(m, t) \frac{ds(m, t)}{dt} dm \quad . \quad (187)$$

Hier haben wir also die Kühlungsgleichung in einen Summanden zur Beschreibung des Mantels und einen weiteren Summanden zur Beschreibung der Kernkühlung zerlegt. Für den Fall eines fehlenden Kernbeitrags fällt also der erste Summand weg und nur der Mantelterm verbleibt.

Die zweite Variante, sie wird in dieser Arbeit auch als einfache Kernkühlung bezeichnet und ist über die zeitlich konstante, isochore Wärmekapazität  $c_v$  bestimmt. Diese Konstanz ist gerechtfertigt (M. French, persönliche Mitteilungen). Diese Näherung wurde unter anderem in den Arbeiten von ([33], [34], [135], [138]) angewandt. Wir vergleichen zwei zeitlich benachbarte Planetenprofile miteinander. Da ein älteres Planetenprofil heißer ist als Jüngeres, spiegelt sich das auch in der Kerntemperatur wider. Da der Kern des Saturn zu allen Zeiten als isotherm angenommen wird, können wir zwei unterschiedliche Kerntemperaturen  $T_{core}(t_1)$  und  $T_{core}(t_2)$  zu verschiedenen Zeiten definieren. Allgemein gilt die Relation

$$T_{core}(t_2) < T_{core}(t_1) \quad falls \quad t_2 > t_1 \quad .$$

An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass die Kühlungsgleichung als Differenzgleichung behandelt wird und wir somit  $ds$  als  $\Delta s$  und  $dt$  als  $\Delta t$  betrachten. Daher kann die Gleichung umgeschrieben werden und es gilt:

$$\Delta t = - \frac{\int_0^M T(m, t) \Delta s(m, t) dm}{4\pi\sigma R^2 \left( T_{eff}^4 - T_{eq}^4 \right)} \quad . \quad (188)$$

---

In den Zähler gehen somit alle Energiebeiträge des Planeten ein und nach der obigen Zerlegung können wir hier schreiben:

$$\Delta t = - \frac{\int_0^{m_{core}} T(m, t) \Delta s(m, t) dm + \int_{m_{core}}^M T(m, t) \Delta s(m, t) dm}{4\pi\sigma R^2 (T_{eff}^4 - T_{eq}^4)} . \quad (189)$$

Somit können wir nun den ersten Summanden durch die einfache Kernkühlung und die Temperaturen des Kerns zu unterschiedlichen Zeiten ersetzen. Dieser Summand ergibt sich anhand der konstanten Wärmekapazität:

$$\Delta Q_{core} = c_v m_{core} (T_{core}(t_1) - T_{core}(t_2)) . \quad (190)$$

Da es sich hier um den Absolutwert der frei werdenden Kernwärme handelt, sieht man sehr schön, dass diese Näherung nur für den Fall funktioniert, dass die Kernmasse für alle Zeiten auch konstant bleibt. Das bringt uns zum dritten Fall der Kernbehandlung (thermodynamischen Integration). Wir nehmen an, dass der Kern aus reinem Wasser besteht und verwenden dafür die Zustandsgleichung aus [39], [41] und [137]. Zur Berechnung der Entropiewerte des Kerns verwenden wir Gleichung 86. Da die Masse  $m_{core}$  des Kerns zeitlich konstant bleibt, fällt also die Betrachtung des planetaren Kerns komplett unter das Modell der homogenen Evolution und wir müssen uns nicht um den Offset  $s_0$  (Gleichung 87) kümmern. Dieser fällt bei der Lösung der Kühlungsgleichung für den Kern immer heraus. Wir wählen den zeitlich konstanten Anfangspunkt von  $(1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, 8000 \text{ K})$ . Diese Wahl liegt darin begründet, dass dieser Punkt sehr dicht an den planetaren Bedingungen liegt. Zum einen wird somit Rechenzeit gespart und zum anderen die Integration über Phasengrenzen vermieden.

### 3.2 Die H-He-Entmischung

Die homogene Evolution liefert auf der einen Seite ein zu kurzes Alter und kann außerdem nicht die überschüssige Luminosität erklären. Aufgrund dessen betrachten wir nun einen Effekt, der eine zusätzliche Energiequelle im Saturn darstellen könnte. Als Folge würde der Saturn nicht so schnell auskühlen, wie es die homogene Beschreibung vorgibt, sondern eine flachere Kühlungskurve und damit ein längeres Alter erzeugen. Untersuchungen dieses Effekts wurden bereits von Lorenzen et al. ([109], [111]) und Morales et al. ([127], [128], [129]) vorgenommen, aber auch in [77], [116], [115], [153], [160], [161] [166] und [167] betrachtet. Die Ergebnisse aus [109] und [111] werden in dieser Arbeit verwendet und sollen zunächst dargestellt werden. Diese Daten lieferten neue Ergebnisse bezüglich der Entmischungsregionen für die Drücke von 1 Mbar und 2 Mbar, wobei die älteren Daten aus [109] letzteres noch gar nicht enthielten. Für die Entmischungsrechnungen zur Berechnung des Alters des Saturn, wurde der Datensatz aus [109] verwendet. Dieser ist in Abbildung 11 für die Drücke von 1, 4, 10 und 24 Mbar dargestellt. Lorenzen et al. (2009) verwendeten die FT-DFT-MD (Finite-Temperature-Density-Functional-Theory) Simulationen. Dabei wird den Elektronen, eine von 0 K verschiedene, endliche Temperatur zugeordnet. Die Besetzung der Elektronenzustände wurde durch eine Fermiverteilung bei konstanter Temperatur  $T$

---

durchgeführt ([108], [109]). Die Besetzung der Elektronenzustände wurde anhand des Ansatzes von Mermin et al. ([119]) durchgeführt. Unter Verwendung von periodischen Randbedingungen wurde die GGA (Generalized Gradient Approximation [171]) mit der PBE-Parametrisierung [144] gewählt. Um das Verhalten oder auch das Auftreten der Phasentrennung von Wasserstoff und Helium zu untersuchen benötigt man die freie Enthalpie  $G$  in Abhängigkeit der Konzentration von Wasserstoff bzw. Helium. Hier beschreibt  $x$  die Teilchenkonzentration des Heliums und ist mit  $x = \frac{N_{He}}{N}$  bestimmt. Diese wird minimiert, um beide Konzentrationen nach der Entmischung zu bestimmen. Allerdings ist die freie Enthalpie nicht direkt durch die in [109] vorgestellten Simulationen zugänglich. Aufgrund dessen berechnen sie die Mischungsenthalpie  $H(x)$ . Sie ist wie folgt bestimmt:

$$\Delta H(x) = H(x) - xH(x=1) - (1-x)H(x=0). \quad (191)$$

Dabei beschreibt  $x$  die Teilchenkonzentration vom Helium im H-He Gemisch. Nun wird ebenfalls in [109] die Enthalpie  $H(x)$  durch die innere Energie  $U(x)$ , den Druck  $p$  und das Volumen  $V(x)$  ausgedrückt. Die entsprechenden Ergebnisse für die Mischungsenthalpie werden durch die Redlich-Kister-Entwicklung [151] wie folgt gefittet:

$$\Delta H_{RK}(x) = (x^2 - x) \sum_{i=1}^n A_i (2x - 1)^{(i-1)} . \quad (192)$$

Um nun einen Ausdruck für die freie Mischungsenthalpie zu erhalten, wird die ideale Mischungsentropie ([94], [146]), multipliziert mit der Temperatur  $T$ , subtrahiert und es entsteht:

$$\Delta G(x) = \Delta H_{RK}(x) - T \Delta S_{ideal}(x) . \quad (193)$$

Die Daten für konstante Drücke von 1, 4, 10 und 24 Mbar sind in Abbildung 11 gezeigt. Die Daten zum ersten Wert wurden nicht veröffentlicht, sondern wurden persönlich von Winfried Lorenzen erhalten. Dazwischen liegende Drücke wurden per Interpolation bestimmt. Dazu wurden von einem Mittelpunkt von  $x = 0.3$  und  $T = 1000 K$  Strahlen radial konstruiert. Die Länge dieser Strahlen  $l$  wurde in Abhängigkeit von den gegebenen Drücken  $p$  bestimmt. Für die interpolierten Werte wie z.B. für 1 Mbar wurde die Strahlänge  $l(1 \text{ Mbar})$  linear interpoliert. In Abbildung 9 werden die Daten aus [111] dargestellt. Dort wurden die Entmischungsdaten aus [109] um die Drücke von 1 und 2 Mbar erweitert. Die Methode zur Berechnung dieser Daten ist dieselbe wie in [109]. Später vergleichen wir die Daten aus [109] und [111] mit denen von Morales et al. ([128], [129]). Auch sie verwenden DFT-MD-Simulationen zur Untersuchung des Mischungsverhaltens von Wasserstoff und Helium. Sie verwenden die QMC (Quantum Monte-Carlo)-Simulationen. Um die Heliumkonzentrationen nach der Entmischung zu bestimmen, minimieren sie auch die freie Enthalpie  $G(x)$ . Allerdings wird dort die Mischungsentropie anhand der thermodynamischen Integration bestimmt. Sie verwenden somit nicht die ideale Mischungsentropie. Als Folge dessen liegt deren Entmischungskurve für den heutigen, solaren Heliumgehalt um etwa 1000 K tiefer als die von Lorenzen et al. vorhergesagte Entmischungsgrenze. Dieser Unterschied wird später

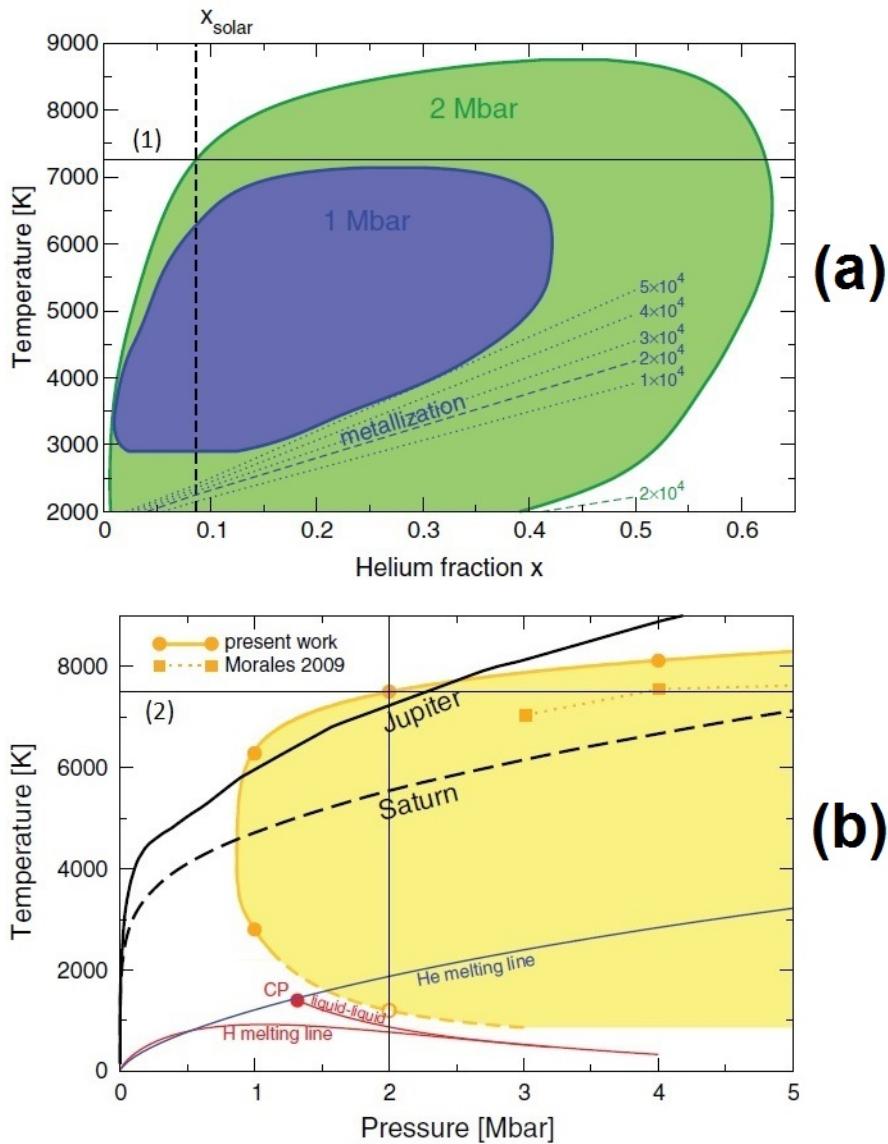


Abbildung 9: Abbildungen von Lorenzen et al. (2011) [111]. In Abbildung (a) sind die Entmischungsinseln für 1 Mbar (violett) und 2 Mbar (grün) dargestellt. Der obere Schnittpunkt für den solaren Heliumgehalt bei 2 Mbar (1) weicht vom Stützpunkt in Abbildung (b), (2) um ca. 166 K ab. Dies führt zu einem früheren Einsetzen der Entmischung.

in den Abbildung 24 und 25 noch einmal aufgegriffen. Dort wird gezeigt, dass sich durch eine Erniedrigung der Entmischungskurve auch das Eintrittsalter des Saturn in das Entmischungsgebiet ergibt.

Wir sehen also in Abbildung 9, dass für die Drücke 1 und 2 Mbar Entmischungsinseln entstehen. Die Abszisse des Graphen in Abbildung 9(a) ist hier in Teilchenprozenten angegeben. Somit entspricht der solare Heliumgehalt an dieser Stelle  $x_{solar} = 0.0846$ . Die entsprechenden Umrechnungen wurden bereits in den theoretischen Grundlagen beschrieben. Für Drücke kleiner als 1 Mbar wurden explizit keine Daten berechnet. In dieser Arbeit werden die entsprechenden Werte anhand einer Interpolation berechnet, welche durch einen Kreis bestimmt ist. Die Stützpunkte einer solchen Interpolation werden durch die Punkte  $(x, T)$  für die jeweiligen Drücke gegeben. Ein solcher Punkt ist für 2 Mbar in Abbildung 3.5(b) gezeigt. Sehen wir uns dort zunächst diesen Stützpunkt genauer an. Die dargestellte Entmischungsregion wurde für den solaren Heliumgehalt berechnet. Die waagerechte, durchgezogene Linie, welche mit (2) bezeichnet ist, zeigt für den Druck von 2 Mbar einen Temperaturwert von 7462 K. Die Originaldaten auf der linken Seite liefern für die 2 Mbar jedoch eine Temperatur von 7295.67 K (dargestellt durch die waagerechte Linie (1)). Es fällt also auf, dass diese Punkte leicht voneinander abweichen. Abbildung 10 zeigt diese Abweichung ein weiteres Mal und es handelt sich dabei um eine Temperaturdifferenz von  $dT = 166.32$  K. Hier soll kurz erwähnt sein, dass es sich an dieser Stelle bei  $dT$  nicht um ein Differenzial, sondern nur um die Temperaturabweichung handelt.

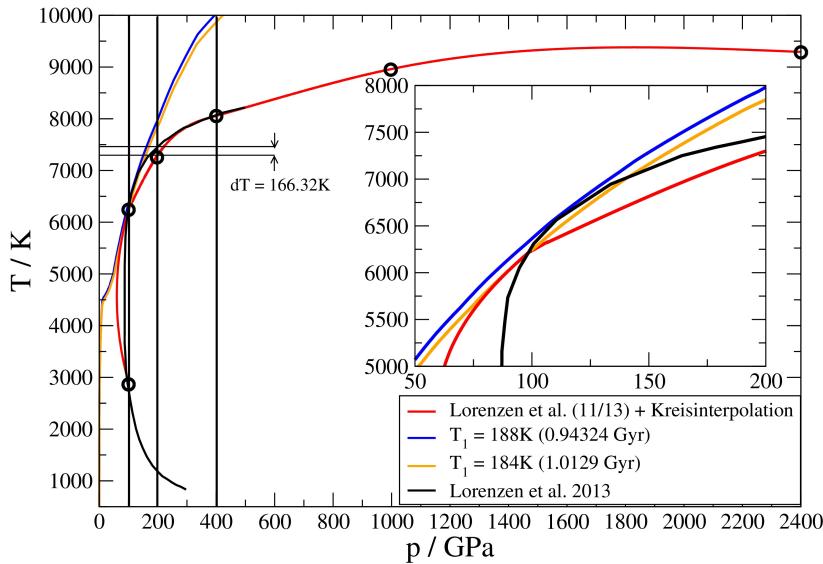


Abbildung 10: Einsetzen der Entmischung in Abhängigkeit von der Interpolation der Originaldaten von Lorenzen et al. 2011 [111]). Deren Interpolation weicht vom Originalstützpunkt, welcher in Abbildung 3.5 gezeigt ist, um ca. 166.31 K ab. Unterschiedliche Isentropen mit  $T_1 = 188$  K und  $T_1 = 184$  K schneiden die jeweilige Entmischungsregion bei unterschiedlichen Zeitpunkten.

---

Aus diesem Grund verwende ich meine eigene Interpolation, welche in Abbildung 10 durch die rote Kurve gegeben ist. Dabei werden die Stützpunkte für 1, 2, 4, 10 und 24 Mbar durch eine kubische Spline-Interpolation verbunden. Die Verbindung des oberen und des unteren Punktes für 1 Mbar wurde durch eine Kreisgleichung genähert. Hier wird der Radius des Kreises solange verändert, bis dessen Anstieg mit dem der Spline-Interpolation übereinstimmt. Die schwarze Kurve zeigt die Interpolation von Lorenzen et al. (2011), welche den 2 Mbar - Wert um  $dT$  nur knapp verfehlt. Im Zoomfenster, welches ebenfalls in Abbildung 10 gezeigt ist, ist auch der Unterschied beider Interpolationen genauer dargestellt. Außerdem sehen wir auch eine blaue und eine orange Kurve. Dies sind Isentropen für die Außentemperaturen von  $T_1 = 188 \text{ K}$  und  $T_1 = 184 \text{ K}$  durch den Planeten, wobei es sich um Tangenten zu den jeweiligen Entmischungsregionen handelt. Dies sind somit Planetenprofile, welche noch einen homogenen Planeten beschreiben. Aufgrund der unterschiedlichen Oberflächentemperaturen entstehen auch verschiedene Eintrittspunkte des Planeteninneren in die Entmischungsregionen. Diese sind abhängig von der verwendeten Interpolation. Die Zeitpunkte sind somit 0.94 und 1.013 Gyr. Daher verwende ich hier meine eigene Interpolation, welche den Stützpunkt für 2 Mbar den Originaldaten von Lorenzen et al. in Abbildung 9(a) entspricht. Es wird bis zum Druck von 1 Mbar eine kubische Spline-Interpolation verwendet. Eine Kreisinterpolation beinhaltet beide Stützpunkte für 1 Mbar. Am Berührpunkt stimmen dann die Ableitungen überein und es entsteht die rote Kurve, welche bereits in Abbildung 10 für den solaren Heliumgehalt gezeigt ist und begegnet uns auch in Abbildung 24 erneut.

### 3.2.1 Die Berechnung inhomogener Profile

Um nun den Einfluss der inhomogenen Evolution und der Wasserstoff - Helium - Entmischung darzustellen, ist es zunächst erforderlich, zu klären, wie genau die entsprechenden Planetenmodelle und -profile erzeugt werden. Wir haben bei der Erläuterung der homogenen Evolution bereits gesehen, dass diese durch ein Zweischichtenmodell beschrieben ist. Der gesamte Mantel besitzt dabei eine feste Heliumkonzentration. Diese variiert zeitlich mit der fortschreitenden Entmischung. Je mehr Helium in den Planeten hineinfällt, desto mehr verarmt die äußere Schicht an Helium ([33], [34], [35], [36], [3] und weitere, in diesen Veröffentlichungen angegebene Verweise). Zum Beginn der Entmischung besitzt der planetare Mantel noch die solare Heliumkonzentration. Natürlich kann die homogene Modellierung auch Planetenmodelle mit mehreren Schichten beschreiben, solange die Konzentrationen der Bestandteile nur zeitlich konstant bleiben. Und genau diese wollen wir nun variieren. Um also den vertikalen Massentransport (hier Heliumregen) zu untersuchen, verwenden wir das Dreischichtenmodell.

Wir starten zunächst mit den homogenen Zweischichtenmodellen. Für diese Planetentypen lassen sich entsprechende Isentropen berechnen. Der Heliumgehalt entspricht dem solaren Wert von 0.275, solange noch keine Bedingungen vorliegen, die eine Entmischung von Wasserstoff und Helium begünstigen würden. In Anlehnung an die Daten aus Abbildung 11 schauen wir uns eine sogenannte Entmischungskurve an. Diese ist in Abbildung 12 gezeigt (rote, durchgezogene Linie). Sie wurde zunächst für den solaren Heliumgehalt erzeugt und entspricht genau dem Beispiel, welches in Abbildung 11 diskutiert wird. Die Punkte dieser Kurve entsprechen den Schnittpunkten der Druckregionen für 1 Mbar, 4 Mbar, 10 Mbar und 24 Mbar mit der vertikalen Linie, welche die anfängliche Konzentration von 0.275 vor der

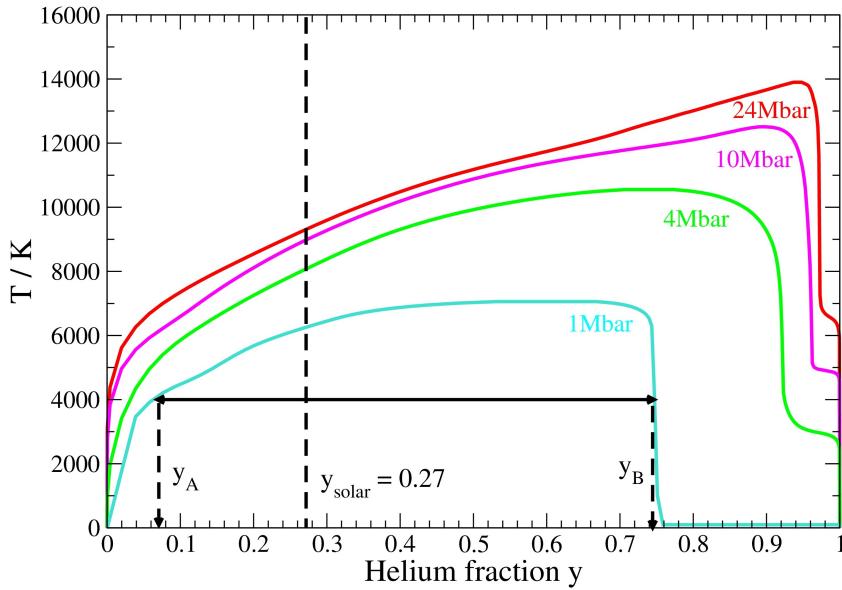


Abbildung 11: Entmischungsdiagramm. Gezeigt ist das Entmischungsverhalten einer homogenen Mischung aus Wasserstoff und Helium für unterschiedliche Drücke von 1 Mbar bis 24 Mbar. Für eine feste Ausgangskonzentration (hier der solare Heliumgehalt) tritt Entmischung unter bestimmten Bedingungen auf und aus dem System entsteht eine He-arme ( $y_A$ ) und eine He-reiche ( $y_B$ ) Phase. Während die Kurven für 4, 10 und 24 Mbar bereits in [109] veröffentlicht wurden, resultiert die 1 Mbar Kurve bereits aus einer Interpolation (siehe Text).

Entmischung widerspiegelt.

In Abbildung 12 sind außerdem Isentropen von Saturn eingezeichnet, welche auf der Basis der homogenen Evolution berechnet wurden. Die heißeste Isentrope entspricht einer Außentemperatur von 300 K und liegt weit entfernt von der Entmischungsregion. Diese entspricht der Region, welche unterhalb der bereits beschriebenen Entmischungsgrenze liegt. Auch eine Außentemperatur von 200 K liefert ein immer noch zu heißes Profil, um Bedingungen zu erreichen, die eine Phasentrennung des H-He-Gemisches hervorrufen könnten. Die Isentrope für  $T_1 = 184$  K entspricht gerade einer Tangente, wohingegen die Kurve für 183 K das Entmischungsgebiet zum ersten Mal schneidet. Für eine Außentemperatur von 140 K entsteht eine Isentrope, welche sehr tief in besagter Region liegt. Da wir anhand der Daten von [109, 111] den Eintrittspunkt bestimmen können, ist es möglich, mit einem Blick auf die Kurve der homogenen Evolution den Eintrittszeitpunkt ebenfalls zu bestimmen. Dies ist in Abbildung 13 gezeigt.

Abbildung 13 zeigt anhand der vertikalen Linie, sowie des schwarzen Kreises, dass der Eintrittszeitpunkt bei einer Außentemperatur von 183 K bei einer Zeit von 1.035 Gyr nach der Entstehung des Planeten zu finden ist.

Wir werden nun das Dreischichtenmodell anwenden, welches uns erlaubt, eine vereinfachte Beschreibung des vertikalen Massentransportes von Helium in die tieferen Regionen des Planeten zu beschreiben. Wir identifizieren nun den äußeren Mantel des Plane-

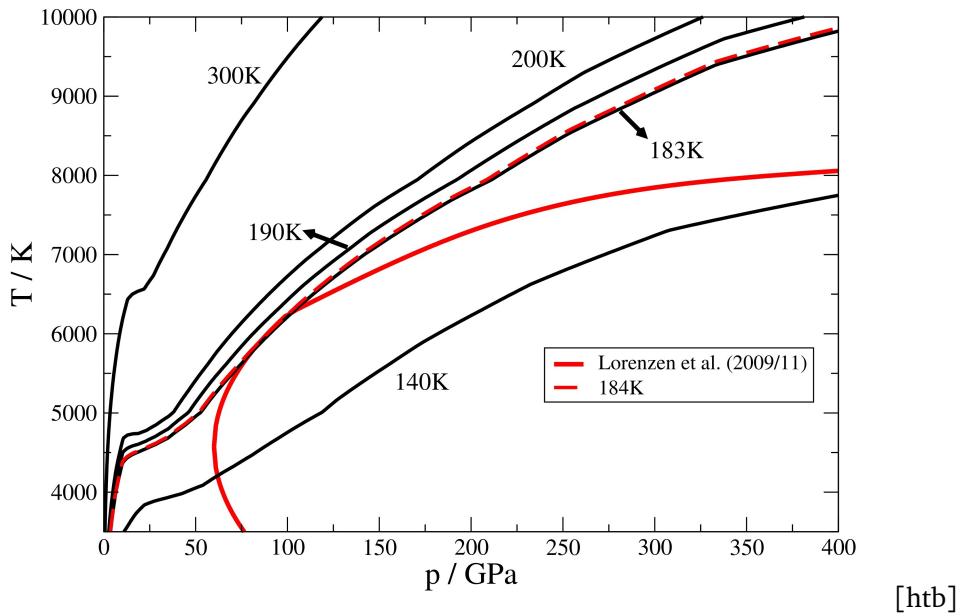


Abbildung 12: Entmischungskurve entsprechend der Grafiken 9(a) und 11 (durchgezogene, rote Kurve). Die Isentropen eines homogenen Planeten werden mit der Zeit kälter und schneiden die Entmischungsregion für 183 K das erste Mal. Dies entspricht einem Alter von 1.035 Gyr.

ten mit der heliumverarmten Phase und die innere Schicht mit der heliumreichen Phase, entsprechend Abbildung 11. Um ein solches Evolutionsprofil zu bestimmen, ist es notwendig, den Heliumgehalt in der äußeren Schicht nach einem vollständig abgeschlossenen Entmischungsvorgang zu bestimmen. Entsprechend Abbildung 12 entstehen unterschiedliche Entmischungskurven für verschiedene Anfangskonzentrationen des Wasserstoff-Helium-Gemisches. Dies bedeutet, dass falls eine Isentrope einer bestimmten Außentemperatur in eine Entmischungsregion eindringt, dieser Vorgang solange vorangetrieben wird, bis die besagte Isentrope eine Tangente an das Entmischungsgebiet bildet. Nun soll gezeigt werden, wie genau ein Entmischungsprozess behandelt wird. Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst die Entmischungsregion, welche durch die Schnittpunkte einer Isentropen mit der Entmischungskurve bestimmt ist. Dies ist bekannterweise in Abbildung 12 dargestellt. Anhand der Daten aus Abbildung 11 wird die Kurve zur Abgrenzung einer Entmischungsregion für eine Anfangsheliumkonzentration des Systems vor der Entmischung berechnet. Des Weiteren berechnen wir eine planetare Isentrope, welche besagter Anfangskonzentration entspricht und durch ein Zweischichtenprofil bestimmt ist. Somit starten wir den ersten Entmischungsprozess mit der solaren Konzentration von 0.275. In Abbildung 3.2.1 ist ein solches Zweischichtenprofil mit den entsprechenden Parametern dargestellt.

Anhand der Entmischungsdaten kann die Lage der Entmischungsregion im Planeten bestimmt werden. Diese ist durch die Massenkoordinaten  $m_{in}$  und  $m_{out}$ , welche den Ein- und den Austritt aus diesem Bereich kennzeichnen, bestimmt. Die Masse, die die Entmischungs-

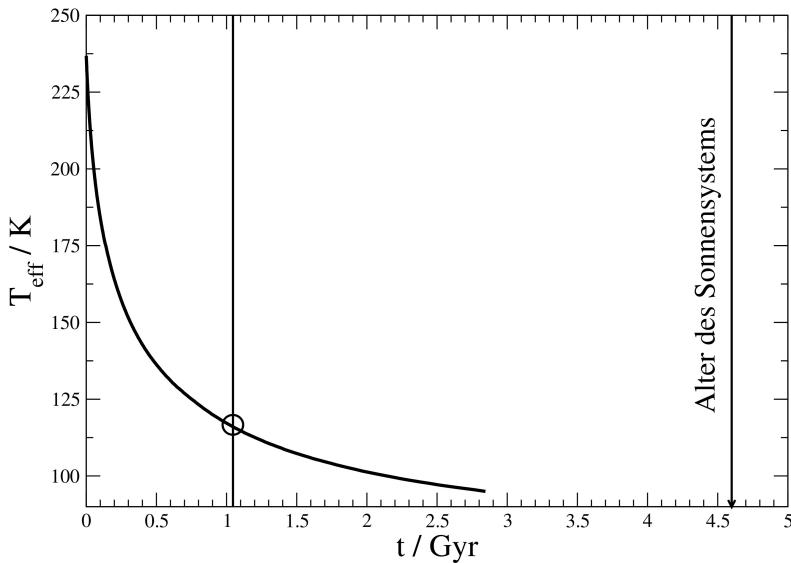


Abbildung 13: Nachdem eine Isentrope mit einer Außentemperatur von 183 K die Region der Phasentrennung zum ersten Mal schneidet, kann der entsprechende Zeitpunkt bestimmt werden. Dieser ist hier durch den Schnittpunkt der vertikalen Linie mit der Kühlungskurve für die homogene Evolution gegeben und liegt bei 1.03 Gyr. Das Alter des Sonnensystems beträgt 4.56 Milliarden Jahre.

region vor der ersten Phasentrennung enthält, ist gegeben durch

$$m_{demix} = m_{in} - m_{out} \quad . \quad (194)$$

Da uns aber die resultierende Heliumkonzentration in der gesamten äußeren Hülle interessiert, müssen wir zusätzlich die Masse berücksichtigen, die sich über der Entmischungsregion befindet. Somit ergibt sich die Gesamtmasse vor der Phasentrennung als:

$$m_{ges} = M - m_{out} \quad . \quad (195)$$

Nun ist eine Isentrope nicht durch einen konstanten Druck oder eine konstante Temperatur bestimmt. Diese variiert entlang der Radius- bzw. der Massenkoordinate des Planeten, so auch innerhalb der Entmischungsregion. Um dieses Problem zu lösen, werden die Daten aus 11 interpoliert, um die Phasentrennung für beliebige Paare  $(p, T)$  bei einer Ausgangskonzentration zu bestimmen. Wie in Abbildung 3.2.1 gezeigt, ist die Ausgangskonzentration durch  $y_0$  gegeben.

Um die Phasentrennung über das gesamte Entmischungsgebiet beschreiben zu können,

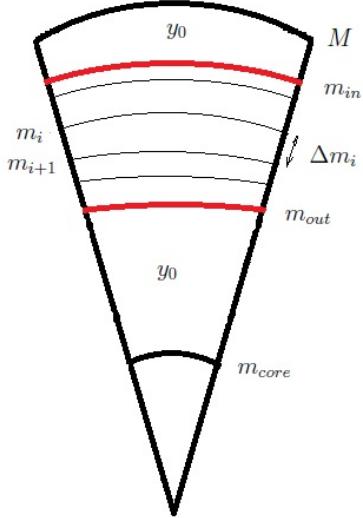


Abbildung 14: Darstellung eines Zweischichtenprofils mit den Parametern zur Beschreibung eines Entmischungsprozesses mit der Startkonzentration  $y_0$ .

zerlegen wir es in hinreichend kleine Schalen der Massen  $\Delta m_i$ . Dabei gilt:

$$\Delta m_i = m_i - m_{i+1} \quad . \quad (196)$$

Außerdem muss aufgrund der Massenerhaltung ebenso der folgende Ausdruck entstehen:

$$m_{demix} = m_{in} - m_{out} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \quad . \quad (197)$$

Für sehr große  $N$  bzw. im Limes  $N \rightarrow \infty$  werden die Massenschalen sehr klein und wir können den  $\Delta m_i$  genau ein Paar  $(p, T)$  zuordnen. Nun lässt sich anhand der Daten aus Abbildung 11 und deren Interpolation auch die Masse des Heliums bestimmen, welches aus der Entmischungsregion unter ihre untere Grenze  $m_{out}$  fällt, berechnen:

$$m_{He}^{(aus)} = \frac{\sum_{i=1}^N y_B^i \Delta m_i}{1-z} \quad . \quad (198)$$

Der Faktor  $1-z$  taucht in dieser Gleichung auf, da sich die Konzentrationen  $y_A$ ,  $y_B$ ,  $y_0$  und deren gestrichene Größen immer auf das Wasserstoff-Helium-Subsystem beziehen. Nun können wir auch die Masse des Heliums bestimmen, welches noch in der äußeren Hülle des Planeten verbleibt. Sie ist gegeben durch:

$$m'_{He} = y_0(1-z)(M - m_{in}) + (1-z) \sum_{i=1}^N y_A^i \Delta m_i \quad . \quad (199)$$

Der erste Summand gibt hier die Masse des Heliums an, das sich anfangs bereits über der Entmischungsregion befunden hat. Nun nehmen wir also an, dass der Entmischungsprozess

---

hinreichend schnell abläuft und das Helium über dieser Entmischungsregion nachsackt und sich mit dem übrigen Helium zu einer resultierenden Konzentration  $y'_0$  als Folge von Konvektionsprozessen im Planeten vermengt. Nach dem Ausfallen des Heliums ist die Restmasse gegeben durch:

$$m'_{ges} = m_{ges} - m_{He}^{(aus)} = m_{ges} - \sum_{i=1}^N y_B^i \Delta m_i \quad . \quad (200)$$

Zur Berechnung des resultierenden Heliumgehalts nutzen wir dessen Definition und dividieren die übrige Heliummasse durch die übrige Gesamtmasse des Wasserstoff-Helium-Gemisches und erhalten:

$$y'_0 = \frac{m'_{He}}{(1-z)m'_{ges}} = \frac{y_0(1-z)(M - m_{in}) + (1-z) \sum_{i=1}^N y_A^i \Delta m_i}{(1-z)(m_{ges} - \sum_{i=1}^N y_B^i \Delta m_i)} \quad . \quad (201)$$

Da die Bestimmung dieses neuen Heliumgehaltes anhand des Zweischichtenmodells erfolgt, kann der Faktor  $(1-z)$  herausgekürzt werden und als Endresultat ergibt sich die folgende Gleichung:

$$y'_0 = \frac{y_0(M - m_{in}) + \sum_{i=1}^N y_A^i \Delta m_i}{m_{ges} - \sum_{i=1}^N y_B^i \Delta m_i} \quad . \quad (202)$$

Nun ist die erste Stufe eines vollständigen Entmischungsprozess abgeschlossen. Durch diese neue Ausgangskonzentration ergibt sich eine neue Entmischungskurve. Bei derselben Außentemperatur  $T_1$  entsteht aber auch eine andere Isentrope durch den Planeten. Im Allgemeinen kann diese Isentrope nun wieder die neue Entmischungskurve schneiden und der Vorgang der Phasentrennung schreitet weiter voran. Unter diesen Umständen muss die obige Prozedur nun solange wiederholt werden, bis die Isentrope eine Tangente zur Entmischungsregion bildet. Unser Ziel ist es nun, den Heliumgehalt zu bestimmen, den der äußere Mantel nach einem vollständigen Entmischungsprozess besitzt. Dazu untersuchen wir diesen Heliumgehalt anhand eines Iterationsverfahrens, welches, wie bereits oben beschrieben, darin besteht, den Prozess der Phasentrennung soweit voranzutreiben, bis die Isentrope eine Tangente an die Entmischungsregion bildet. Wie sich in Abbildung 15 zeigt, tritt für den äußeren Heliumgehalt tatsächlich eine Konvergenz auf.

Abbildung 15 zeigt das Konvergenzverhalten des atmosphärischen Heliumgehaltes für unterschiedliche Außentemperaturen von  $T_1 = 140$  K,  $150$  K,  $160$  K,  $170$  K und  $183$  K. Die letzte Oberflächentemperatur wurde hier aufgeführt, da, dies das erste Profil ist, das kalt genug ist, um eine Phasentrennung von Wasserstoff und Helium das erste mal hervorzuufen. Wir erkennen hier auch, dass, je heißer das Profil ist, desto schneller der konvergierte Wert des äußeren Heliumanteils erreicht wird. Somit wird der Wert für  $T_1 = 183$  K schon viel früher, also nach sieben Iterationsschritten erreicht. Für  $T_1 = 140$  K, konvergiert dieser Wert erst nach dreizehn Iterationen. Dies liegt darin begründet, dass, je kälter eine planetare Isentrope ist, sie umso tiefer in ein Entmischungsgebiet eindringt. Die Eigenschaft einer Isentrope, eine Tangente an die entsprechende Entmischungsregion zu bilden, wird

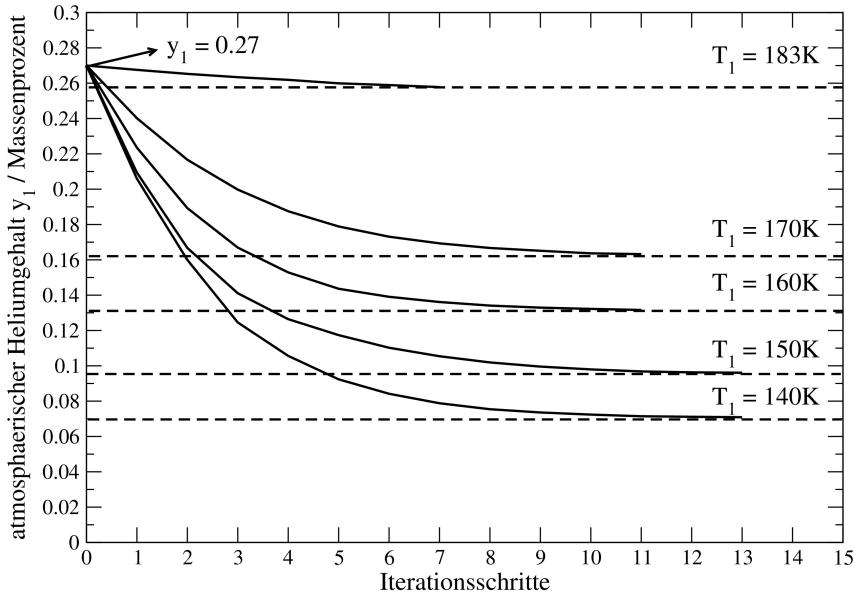


Abbildung 15: Bestimmung des konvergierten Heliumgehaltes in der äußeren Schicht. Bei derselben Außentemperatur  $T_1$  einer planetaren Isentropen konvergiert der atmosphärische Heliumgehalt bis der Entmischungsprozess vollständig abgeschlossen ist. Je größer die Oberflächentemperatur und somit je heißer die Isentrope, desto schneller konvergiert der Heliumgehalt.

folglich umso später erreicht, je kühler die Oberflächentemperatur ist. Dementsprechend werden auch die Werte der Heliumgehalte immer geringer, je kälter der Planet wird, da mehr Zeit seit dem Start der Phasentrennung für die Entmischung zur Verfügung steht. Anhand der Daten von [109, 111] ergibt sich für den heutigen Heliumgehalt ein Wert von  $y(T_1 = 140 \text{ K}) = 0.071$ . Dieser ist, verglichen mit den Messungen von Cassini und Voyager zu klein. Demnach werden in dieser Arbeit die Daten von [109, 111] in der Form manipuliert, dass sie bezüglich der Temperatur verschoben werden, um so das Einsetzen der Entmischung zu verspäten. Dies wird im Abschnitt *Ergebnisse* noch genauer erläutert. Ein fertiges Evolutionsprofil wird erzeugt, in dem wir den konvergierten Heliumgehalt einsetzen und anhand dessen ein neues Dreischichtenprofil berechnen. Allerdings fehlt uns noch ein freier Parameter, welcher durch den Übergangsdruck gegeben ist. Diesen müssen wir noch in eine Massenkoordinate übersetzen. Dazu nutzen wir den konvergierten Heliumgehalt in der äußeren Schicht und bestimmen per Massenerhaltung den inneren Heliumanteil. Da dieser nach der Phasentrennung in der äußeren Schicht fast vollständig aus Helium besteht, wird der innere Mantel auch als Heliumschicht bezeichnet. Anhand der Massenerhaltung werden wir die Massenkoordinate bestimmen, welche die Grenze zwischen dem äußeren

---

Mantel und besagter Heliumschicht bildet. Somit können wir zunächst schreiben:

$$y_{solar}(1-z)(M - m_{core}) = y_1(1-z_1)(M - m_{12}) + y_2(1-z_2)(m_{12} - m_{core}) \quad . \quad (203)$$

Es sei hier noch einmal erwähnt, dass für unsere Rechnungen die Metallizitäten in den jeweiligen Schichten übereinstimmen und außerdem auch zeitlich konstant bleiben und es gilt:

$$z = z_1 = z_2 = const. \quad . \quad (204)$$

Die erste Gleichung der Massenerhaltung vereinfacht sich nach Division durch  $(1-z)$  zu:

$$y_{solar}(M - m_{core}) = y_1(M - m_{12}) + y_2(m_{12} - m_{core}) \quad . \quad (205)$$

Da sich die Massen der Schichten immer als Differenzen der entsprechenden Massenkoordinaten ergeben, entsteht für die Übergangsmasse:

$$m_{12} = \frac{y_{solar}M - y_1M + y_2m_{core}}{y_2 - y_1} \quad . \quad (206)$$

Die Prozedur zum Auffinden der Übergangsmasse nach dem Ablauf eines kompletten Entmischungsprozesses ist in Abbildung 16 gezeigt.

Anhand der Daten von [109, 111] bestimmen wir zu den entsprechenden Drücken die Temperaturen und interpolieren diese für den konvergierten Heliumgehalt. Diese Kurven sind für 140 K, 160 K und 183 K gezeigt. Somit kann nun die Heliumkonzentration bestimmt werden, welche durch die Entmischungsdaten für die Heliumtropfen entsteht. Durch Variation der Übergangsmasse entstehen die unteren, gestrichelten Kurven, da  $y_2 = y_2(m_{12})$  gilt. Durch Umstellung der obigen Gleichung erhalten wir:

$$y_2 = \frac{y_{solar}(M - m_{12}) - y_1(m_{12} - m_c)}{m_{12} - m_c} \quad . \quad (207)$$

$y_2$  gibt die Heliumkonzentration in der inneren Schicht an. Da die Übergangsmasse direkt mit dem Übergangsdruck  $p_{12}$  korreliert, welche in Abbildung 16 auf der Abszisse aufgetragen ist, variiert mit ihr auch der zuletzt genannte Parameter und es gilt:

$$y_2(m_{12}) = y_2(p_{12}) \quad , \quad (208)$$

mit

$$p_{12} = p_{12}(m_{12}) \quad . \quad (209)$$

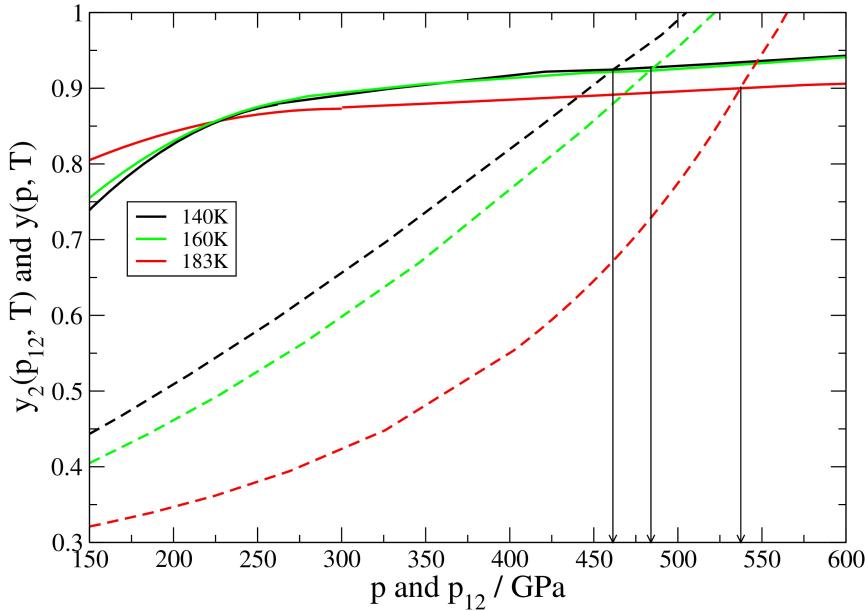


Abbildung 16: Bestimmung der Grenze zwischen den Mänteln des Dreischichtenprofils. Die an den Schnittpunkten auftretenden Übergangsdrücke übersetzen sich in entsprechende Übergangsmassen, bei denen die He-konzentration gleich der, der Heliumschicht auf dem Kern ist. Die genaue Prozedur zur Bestimmung des finalen Planetenprofils  $(m, p, r, T, \rho)$  ist in Abbildung 17 erklärt.

Der Schnittpunkt wird an der Stelle gefunden, an der die Konzentration von Heliumtropfen und -schicht genau übereinstimmen. Diese sind durch die schwarzen Pfeile angegeben. Hier möchte ich noch einmal hervorheben, dass diese Kurven und die entsprechenden Schnittpunkte nur für den konvergierten, äußeren Heliumgehalt entstanden sind und somit die finalen Profile festlegen. Diese Profile bilden anschließend, mithilfe der Kühlungsgleichung, die inhomogene Evolutionskurve. Der Vorgang zur Bestimmung eines finalen Evolutionsprofils ist anhand der Programmstruktur, des in dieser Arbeit verwendeten Codes in Abbildung 17 noch einmal zusammengefasst. Zunächst wird ein konvergierter Heliumgehalt für  $y_1$  bestimmt. Dazu wird zunächst eine Isentrope (Zweischichtenmodell 2L) für den solaren Heliumgehalt berechnet. Anhand der Daten aus [109] werden immer wieder neue Isentropen berechnet, bis der Heliumgehalt konvergiert ist. Um den vertikalen Massentransport zu simulieren wird das Dreischichtenmodell verwendet. Durch Angabe einer Übergangsmasse  $m_{12}$  wird der Heliumgehalt der inneren Schicht berechnet. Anhand der Entmischungsdaten wird die Konzentration  $y_{He}^{(B)}$  der Helium-reichen Phase bestimmt. Die Übergangsmasse wird dann solange variiert (und damit der zugehörige Übergangsdruck), bis die Heliumkonzentration in der inneren Schicht mit der der Helium-reichen Phase übereinstimmt. Für diesen Fall wurde das finale Evolutionsprofil gefunden.

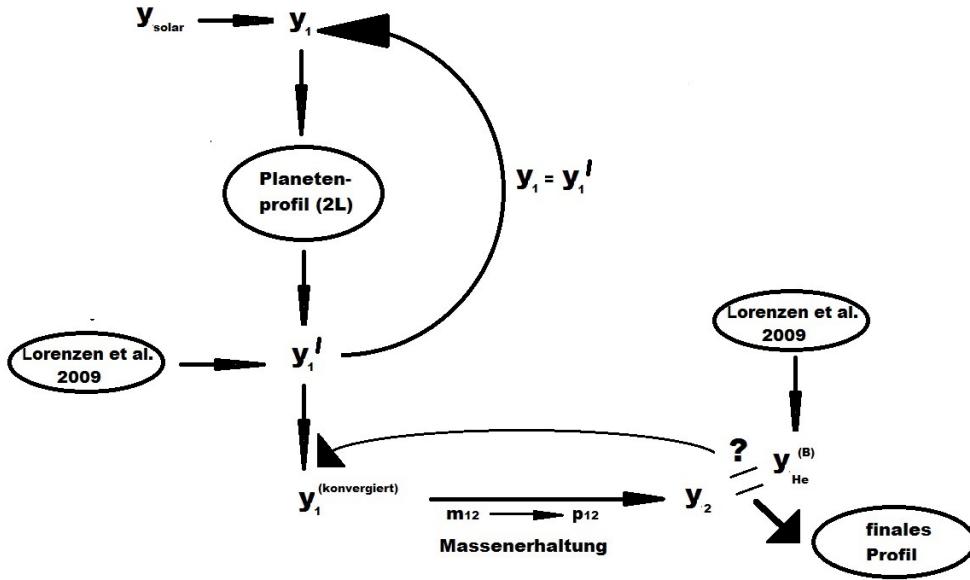


Abbildung 17: Programm zur Berechnung eines finalen Evolutionsprofils.

## 4 Ergebnisse

### 4.1 Strukturelle Berechnungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse präsentiert, welche die heutige Struktur des Planeten darstellen. Dabei werden die Einflüsse unterschiedlicher Zustandsgleichungen und Parameter wie dem Übergangsdruck  $p_{12}$ , dem äußeren Heliumgehalt  $y_1$  und der 1-bar Temperatur  $T_1$  untersucht. Zur Berechnung der heutigen, sogenannten Basisprofile wird ein von Nadine Nettelmann entwickeltes Programmpaket verwendet, dessen Vorgehensweise in Abbildung 18 dargestellt ist.

Zunächst werden die vorgestellten Zustandsgleichungen für Wasser, Wasserstoff und Helium durch Anwendung des Linear Mixing gemischt. Dies geschieht bei konstantem Druck. Die Reziproken der Parzidaldichten werden entsprechend addiert und es gilt in diesem speziellen Fall dasselbe, was wir bereits in Abschnitt 2.6 gesehen haben, nämlich:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_H} + \frac{1}{\rho_{He}} + \frac{1}{\rho_z} . \quad (210)$$

Die so erhaltene Zustandsgleichung zur Beschreibung der Mischung wird nun in das Planetenmodell eingesetzt. Dies geschieht, wie bereits in den theoretischen Grundlagen dargestellt wurde, in der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts. Als Observablen geben wir noch die Oberflächentemperatur  $T_1$  und den atmosphärischen Heliumgehalt  $y_1$  vor. Nun wird mit einer beliebigen Startverteilung von Metallen ein Planetenmodell berechnet und anhand von Gleichung 66 die entsprechenden Gravitationsmomente bestimmt. Stimmen die berechneten Momente mit den gemessenen überein, wurde ein entsprechendes Basisprofil gefunden. Ist dies nicht der Fall, beginnt die Iteration erneut und die Metallverteilung wird solange verändert, bis die gemessenen Werte für die Gravitationsmomente getroffen

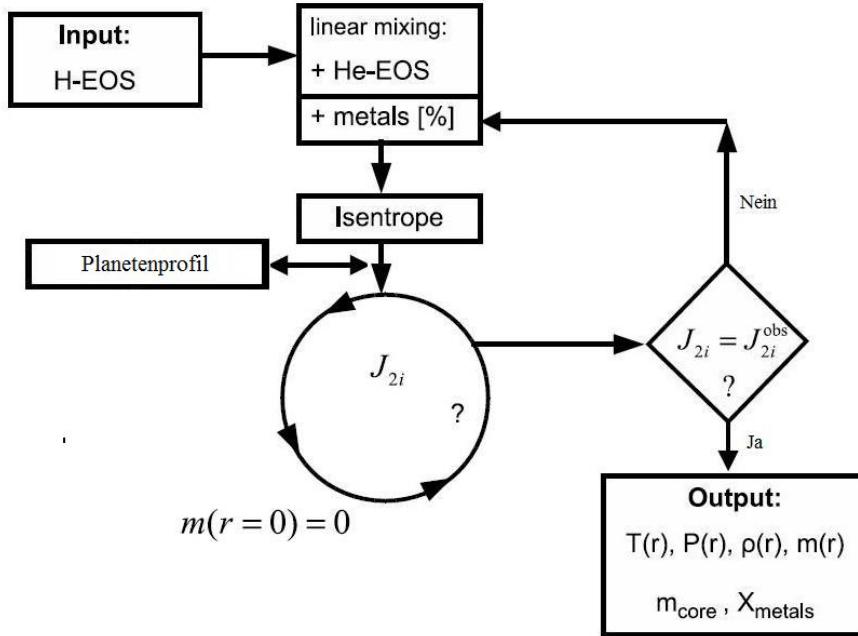


Abbildung 18: Schema zur Darstellung des verwendeten Programmpaket's. Durch Anpassung der Metallizitäten in den äußereren Mänteln des Dreischichtenmodells werden die gemessenen Gravitationsmomente reproduziert. Der atmosphärische Heliumgehalt und die Außentemperatur sind vorgegeben.

werden. Es wurde bereits in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, dass auch der Übergangsdruck  $p_{12}$ , welcher die beiden äußeren Mäntel voneinander trennt, ebenfalls ein freier Parameter ist. Als Folge entsteht eine Vielzahl von Lösungen für ein Basisprofil, wobei für unterschiedliche Übergangsdrücke sowohl die Metallizitäten und die Kernmassen mit  $p_{12}$  variieren. Die entsprechenden Funktionen  $z_1(p_{12})$ ,  $z_2(p_{12})$  und  $m_{core}(p_{12})$  werden nun in den Abbildungen 20 (a), (b), (c) und (d) dargestellt. Zu beachten ist, dass die Lösungsmenge auf einen bestimmten Definitionsbereich begrenzt ist. Die linke Grenze wird durch negative Metallizitäten und die rechte Grenze durch eine negative Kernmasse bestimmt, da diese für Planetenmodelle nicht relevant sind. Unsere Strukturmodelle zeigen aber auch Lösungen für eine Kernmasse von Null.

Doch ist diese Lösung auch sinnvoll? Im Moment gibt es keine Entstehungsmodelle (Kernakkretion, Scheibeninstabilität [163]), welche einen fehlenden Kern vorhersagen würden. Allerdings könnte ein Planet auch zu früheren Zeiten einen Kern gehabt haben, der sich dann in der planetaren Hülle aufgelöst hat. So geben Mizuno et al. [125] an, dass Gasriesen wie Jupiter und Saturn durch Kernakkretion entstanden sind. Daher muss ein protoplanetarer Kern eine Mindestmasse erreicht haben, um gravitativ, umliegendes Gas aufgesammelt zu haben. Vermessungen des Gravitationsfeldes von Jupiter zeigen, dass der heutige Kern zu leicht ist, um diese kritische Masse zu erreichen ([55], [158]). Somit muss sich der Kern mit der Zeit verkleinert haben. Wilson et al. untersuchten die Löslichkeit von Wasser in metallischem Wasserstoff ([178], [179], [180]). Dabei verwendeten sie ebenfalls DFT-MD-Simulationen zur Bestimmung der freien Enthalpie der Lösung. Zur Berechnung der Mi-

---

schungsentropie verwendeten sie CCI-Methoden [128]. Anhand der Minimierung der freien Enthalpie wird untersucht, ob es möglich ist, dass sich Wasser unter Bedingungen, die an der Kern-Mantel-Grenze (cmb) im Jupiter und Saturn vorherrschen, in metallischem Wasserstoff lösen kann. Wilson et al. erhielten Daten, wonach die Auflösung eines Wasserkerns im Jupiter wie auch im Saturn thermodynamisch favorisiert ist. An dieser Stelle soll die Methode zur Bestimmung der hier präsentierten Daten spezifiziert werden.

Zunächst sei nochmal darauf hingewiesen, dass Saturn aufgrund seiner hohen Rotationsperiode (ca. 10 h 32 min bis 10 h 39 min [138], [67]) abgeflacht und zu einem Rotationsellipsoiden geworden ist. Aufgrund dessen weicht seine Form von der Kugel ab und auch das Gravitationsfeld ist nicht mehr radialsymmetrisch. Daher wird der externe Teil des Gravitationsfeldes in Legendre-Polynome entwickelt. Die Entwicklungskoeffizienten sind die Gravitationsmomente. Um das Problem dennoch radial beschreiben zu können, wird der Radiusvektor durch einen radialen Abstand  $l$ , vom Planetenzentrum aus, ersetzt. Diese Radialkoordinate beschreibt nun Geoiden. Dabei handelt es sich um gedachte Flächen, auf denen das Gravitationspotenzial überall denselben Wert hat. Auf der Erde beschreibt der Meeresspiegel eine Geoide. Somit werden die Gravitationsmomente  $J_{2n}(\vec{r})$  zu  $J_{2n}(l)$ . Diese Koeffizienten nehmen vom Planeteninnern nach außen stetig zu. Daher wird die Massenverteilung im Planeten solange variiert, bis die berechneten Gravitationsmomente die gemessenen Werte an einem mittleren Geoidradius  $R_m$  reproduzieren. Geoide müssen nicht zwangsläufig kugelförmig sein, da sie von der Form des Gravitionspotenzials bestimmt sind. Aufgrund dessen wird ein mittlerer Radius bestimmt. Wie bereits erwähnt, wird die Massenverteilung innerhalb des Planeten anhand von Kernmasse und Metallgehalten festgelegt. In dem hier vorgestellten Modell, werden die Metallizitäten  $z_1$  und  $z_2$  an die Gravitationsmomente  $J_2$  und  $J_4$  angepasst. Um Informationen darüber zu erhalten, wie stark die einzelnen, infinitesimalen Schichten innerhalb des Planeten zur Form des Gravitationsfeldes beitragen, werden die sogenannten "Contribution functions"  $c_{2n}$ , als die Änderungen der Gravitationsmomente mit der Tiefe  $l$ , definiert. In normierter Form sehen sie wie folgt aus:

$$c_{2n}(l) = \frac{\frac{dJ_{2n}(l)}{dl}}{\int_0^{R_m} \frac{dJ_{2n}(l')}{dl'} dl'} \quad . \quad (211)$$

Die entsprechenden Kurven für Saturn aus [138] sind in Abbildung 19 dargestellt. Diese Abbildung zeigt, dass die Empfindlichkeit der Gravitationsmomente mit der Tiefe abnimmt. Das bedeutet, dass vor allem die äußeren Schichten die Form des Gravitationspotenzials beeinflussen. Kurz bevor der mittlere Geoidradius  $R_m$  erreicht wird, nehmen die "Contribution functions" ihr Maximum an. Dies ist umso größer, je höher die Ordnung ist. Für den speziellen Fall der Nullten Ordnung  $c_0$ , die eine Kugel beschreibt, sieht man deutlich die Schichtengrenzen im Planeten.

Im Wesentlichen sind die "Contribution Functions" durch den Integranden der Gravitionsmomente in Gleichung 66 gegeben. Daher gilt folgende Proportionalitätsbeziehung:

$$c_{2n}(r) \sim \rho(r) r^{2n} \quad . \quad (212)$$

Wir haben hier statt  $l$ ,  $r$  verwendet, was dadurch gerechtfertigt ist, dass auch zwischen ihnen eine Proportionalitätsbeziehung besteht ( $r \sim l$ ) ([135], [136], [3]). In Abbildung 19 ist

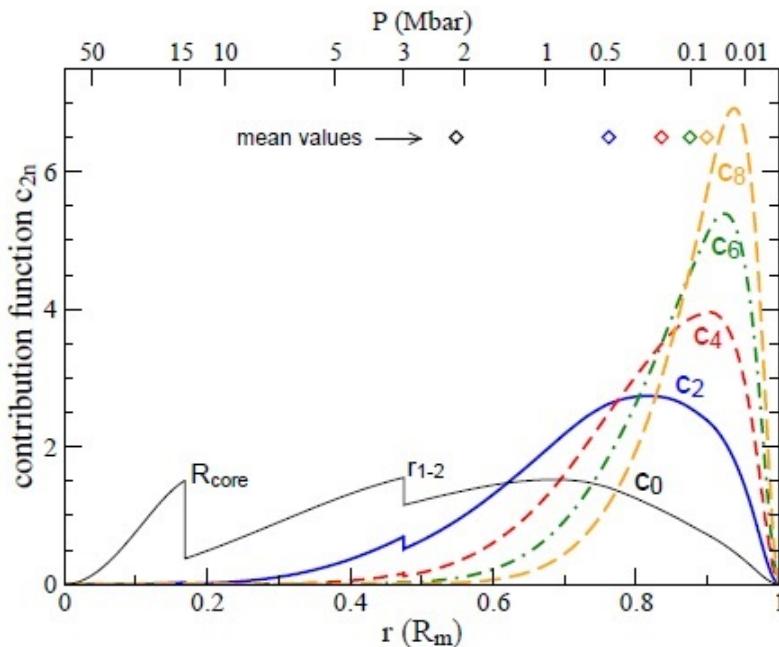


Abbildung 19: "Contribution functions" für Saturn [138]. Diese Kurven zeigen das Änderungsverhalten der Gravitationsmomente  $J_{2n}$  mit der Tiefe  $l$ . Interessant für diese Arbeit sind die Kurven für  $c_2$  und  $c_4$ . Die Größe  $c_0$  beschreibt die niedrigste Ordnung und somit eine Kugel. Es ist erkennbar, dass die Empfindlichkeit der Gravitationsmomente mit der Tiefe immer kleiner wird. Allerdings wird sie umso größer, je größer  $l$  wird. Kurz unter dem mittleren Geoidradius  $R_m$  (siehe Text) nehmen sie ihr Maximum an. Ist dieser Geoidradius erreicht, nehmen alle Kurven den Wert Null an. Der Zusammenhang zwischen den "Contribution functions" und den Gravitationsmomenten ist durch Gleichung 211 gegeben. Die Rautensymbole zeigen an, bei welchem Radius die Hälfte des maximalen Funktionswertes der jeweiligen Contribution function erreicht wird.

zu sehen, dass die "Contribution functions" zum Planetenzentrum hin abfallen und bei  $r = 0$  eine Nullstelle besitzt. Dies liegt daran, dass die Dichte  $\rho(r)$  im Planetenzentrum einen endlichen Wert annimmt, wohingegen  $r$  Null wird. An der Oberfläche des Planeten verhält es sich ebenso, nur ist der Radius ein endlicher Wert und die Dichte verschwindet. Obwohl die Dichteverteilung im Planeten vom Zentrum nach außen kontinuierlich abnimmt, entsteht durch Multiplikation mit dem Term  $r^{2n}$  ein Maximum. Dieses wird für höhere Ordnungen der Gravitationsmomente und damit der "Contribution functions" auch höher. Dieses Verhalten wurde bereits durch Zharkov et al. (1978) [182] bestätigt. Die nullte Ordnung beschreibt eine Kugel. Durch Ableitung der Dichteverteilung entstehen Unstetigkeiten, welche die Dichtesprünge an den Schichtengrenzen zeigen. Die Druckeinteilung auf der oberen Abszisse in Abbildung 19 stammt von dem Modell, welches in Abbildung 20(c) mit S12 – 3a bezeichnet ist.

Bevor wir uns die strukturellen Ergebnisse für den Verlauf von Kernmasse und Metallizitäten genauer ansehen, soll hier noch einmal kurz auf die Daten und Observablen eingegangen werden, welche das Innere des Saturn bestimmen. Aus Gleichung 66 ist ersichtlich, dass der

---

Äquatorialradius nötig ist, um die Gravitationsmomente zu berechnen. Außerdem wird er auch benötigt, um die Oberfläche des Saturn zu definieren und die mittlere Dichte zu bestimmen. Die gemessenen Daten der Äquatorialradien von Voyager I/II und Pioneer 11 [107] liefern Werte für ein Drucklevel von 100 mbar. Da wir, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, das 1 bar-Level als Referenz nutzen, müsste auch der Radius entsprechend angepasst werden. Daher verwenden wir einen berechneten Äquatorialradius aus [56] und [107] für 1 bar von 60268 km. Da auch die Gravitationsmomente für das 100 mbar-Level gegeben sind, benötigen wir noch entsprechende Werte, welche sich auf das 1 bar-Level beziehen. Dazu wurde mit den Daten von Jacobson et al (2006 [82]) verglichen und die neuen, skalierten Daten für die Gravitationsmomente über die folgende Relation bestimmt [138]:

$$R_{eq}^{2n} J_{2n} = R'^{2n}_{eq} J'^{2n} . \quad (213)$$

Auch der atmosphärische Heliumgehalt  $y_1$  des Saturn spielt eine wichtige Rolle bei der Modellierung des Planeteninneren. So werden dieser und der mittlere solare Heliumgehalt  $y_{solar}$  verwendet, um den Heliumanteil  $y_2$  im inneren Mantel des Saturn zu bestimmen. Bahcall et al. (1995) bestimmten diesen anhand solarer Evolutionsmodelle auf 0.278 [6]. In dieser Arbeit verwenden wir einen solaren Heliumgehalt von 0.275 bezüglich des H-He-Subsystems. Der atmosphärische Heliumgehalt konnte sowohl für Jupiter als auch für Saturn gemessen werden ([23], [24], [141], [170]). Die gemessenen Werte sind jedoch sehr fehlerbehaftet. So wichen die Voyager Daten für Jupiter stark von denen der Galileo-Entry-Probe ab. In dieser Arbeit wurden Untersuchungen für  $y_1 = 0.1$  und  $y_1 = 0.18$  durchgeführt. Da wir davon ausgehen, dass der Saturn unterhalb des 1 bar-Levels voll konvektiv ist, ist es gerechtfertigt, den Heliumanteil in der oberen Atmosphäre auch für den gesamten äußeren Mantel anzunehmen.

In Abschnitt 2.2 wurde bereits gezeigt, dass ein Planetenprofil auch durch eine Oberflächentemperatur  $T_1$  bestimmt wird. Sie wurde in [107] auf  $135 \pm 4 K$  für einen Druck von 1 bar bestimmt. Allerdings ist diese Oberflächentemperatur kein direkt zugänglicher Messwert sondern basiert auf Messungen des Brechungsindex der Atmosphäre. Dieser ist abhängig von der Zusammensetzung des Materials. Aufgrund der Unsicherheit der Oberflächentemperatur aus [107] werden in dieser Arbeit Modelle mit  $T_1 = 135 K$  und  $T_1 = 140 K$  untersucht.

Alle in dieser Arbeit verwendeten Observablen und Randbedingungen bezüglich der inneren Struktur des Saturn und seines Gravitationsfeldes sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Die entsprechenden Ergebnisse wurden bereits in [138] dargestellt und sollen anhand von Abbildung 20 erläutert werden. Sie enthält die Daten, welche für die LM-REOS, die SCvH-EOS und die Sesame-EOS gewonnen wurden. Gezeigt sind vier Bilder (a, b, c, d), welche sich dieselbe Abszisse, nämlich die  $p_{12}$ -Achse teilen. Abbildung 20(a) zeigt die Metallizität im äußersten Mantel des Planeten in Einheiten des solaren Metallgehaltes von 0.15. Hier gilt wie auch in (b), (c) und (d) dieser Abbildung, dass fett dargestellte Kurven ein Planetenmodell mit Gesteinskern darstellen, wohingegen die dünnen Linien einen reinen Wasserstoffkern repräsentieren. Alle Planetenmodelle sind sowohl für die Anwendung der SCvH-EOS, der Sesame-EOS, als auch für die der LM-REOS, für einen äußeren Heliumgehalt von 0.18 berechnet worden. Um auch den Einfluss der Außentemperatur zu untersuchen, sind die offenen Symbole für  $T_1 = 135 K$  eingezeichnet. Der offene Kreis in Abbildung 20 bezeichnet

|      | $T_1$ /K  | $y_1$      | Rotationsdauer $\frac{2\pi}{\omega}$ | $J_2$                    | $J_4$                   |
|------|-----------|------------|--------------------------------------|--------------------------|-------------------------|
| NN13 | 135 & 140 | 0.1 & 0.18 | 10h:39min                            | $1.63242 \cdot 10^{-02}$ | $-9.396 \cdot 10^{-04}$ |
| AS07 | 140       | 0.1        | 10h:32min                            | $1.629 \cdot 10^{-02}$   | $-9.35 \cdot 10^{-04}$  |

Tabelle 1: Beobachtungsdaten und Randbedingungen zur Berechnung heutiger Basisprofile aus [138] (NN13). Die Ergebnisse sind in Abbildung 20 dargestellt. Die zweite Zeile gibt die Randbedingungen von Anderson-Schubert (2007) [2] (AS07). Letztere liefern ein Modell für LM-REOS, das in Abbildung 20 mit einem schwarzen Kreis gekennzeichnet ist. Dieses Modell liefert die Basis, auf der alle Evolutionsrechnungen in Abschnitt 4.2 aufbauen.

jedoch das LM-REOS Basismodell ( $T_1 = 140\text{ K}$  und  $y_1 = 0.1$ ), welches die Grundlage für die Evolutionsmodelle im nächsten Kapitel liefert.

Bei der Betrachtung der Metallizitäten in der äußeren, wie auch der inneren Schicht fällt auf, dass der Metallgehalt des inneren Mantels mit wachsendem Übergangsdruck stark anwächst, wobei derjenige in der äußeren Schicht nahezu konstant bleibt. Dies liegt darin begründet, dass der zunehmende Übergangsdruck sich in Richtung des Kerns verlagert und damit die Schicht über dem Kern immer kleiner wird. Da aber der äußere Heliumgehalt als fester Parameter vorgegeben wird, muss laut Massenerhaltung der Metallgehalt in der unteren Schicht anwachsen. Dass dieser in der äußeren Schicht fast konstant bleibt, ist eine Folge dessen, dass dort eine wesentlich geringere Dichte als tief im Inneren des Planeten vorherrscht. An dieser Stelle muss beachtet werden, dass, um beide Metallizitäten miteinander zu vergleichen, die Kurven für  $z_2$  auch bereits in Abbildung 20(a) zu sehen sind. Wir können daher erkennen, dass für einen reinen Wasserkern und der Anwendung der LM-REOS-Daten bei besagten Observablen die Metallgehalte bei einem Übergangsdruck von ca. 315 GPa übereinstimmen. Dies ist ein guter Anhaltspunkt dafür, ein bestimmtes Basisprofil auszuwählen, um in die Evolutionsrechnungen einzusteigen, bei denen die Metallizität zeitlich konstant gehalten wird. Bereits bei der Behandlung der Kernkühlung haben wir gesehen, dass dieser Effekt sehr schwach ist und daher auch ein beliebiges Basisprofil verwendet werden kann. Dazu wird per Massenerhaltung einfach der Gesamtmetallgehalt berechnet und als Input für die Evolutionsrechnungen verwendet. Die Modelle zur LM-REOS sind die einzigen, welche einen Punkt besitzen, an dem die Metallgehalte in beiden Schichten übereinstimmen. Für die anderen beiden Zustandsgleichungen ist dies nicht der Fall. Später werden uns Evolutionsrechnungen für die SCvH-EOS begegnen. Dafür gelten natürlich auch andere Randbedingungen. Allerdings ist der Effekt einer anderen Kernmasse auf die Evolutionsrechnung sehr klein. Daher wird in dieser Arbeit nicht weiter auf die Evolution zur Sesame-EOS eingegangen.

Eine ebenfalls sehr interessante Größe bei der Betrachtung der heutigen Grundprofile des Saturn ist dessen Kernmasse  $m_c$ , welche auch eine Funktion des Übergangsdrucks  $p_{12}$  ist. Wir sehen hier, dass die Kernmasse unabhängig von der verwendeten Zustandsgleichung mit wachsendem Übergangsdruck abnimmt. Wir haben bereits erwähnt, dass der Definitionsbereich der gezeigten Funktionen bei hohen Übergangsdrücken durch eine negative Kernmasse abgegrenzt ist. Die Abnahme der Kernmasse ist ebenfalls eine Folge der Massenerhaltung. Durch ein Herabsinken der Schichtengrenze in den Planeten hinein wird die

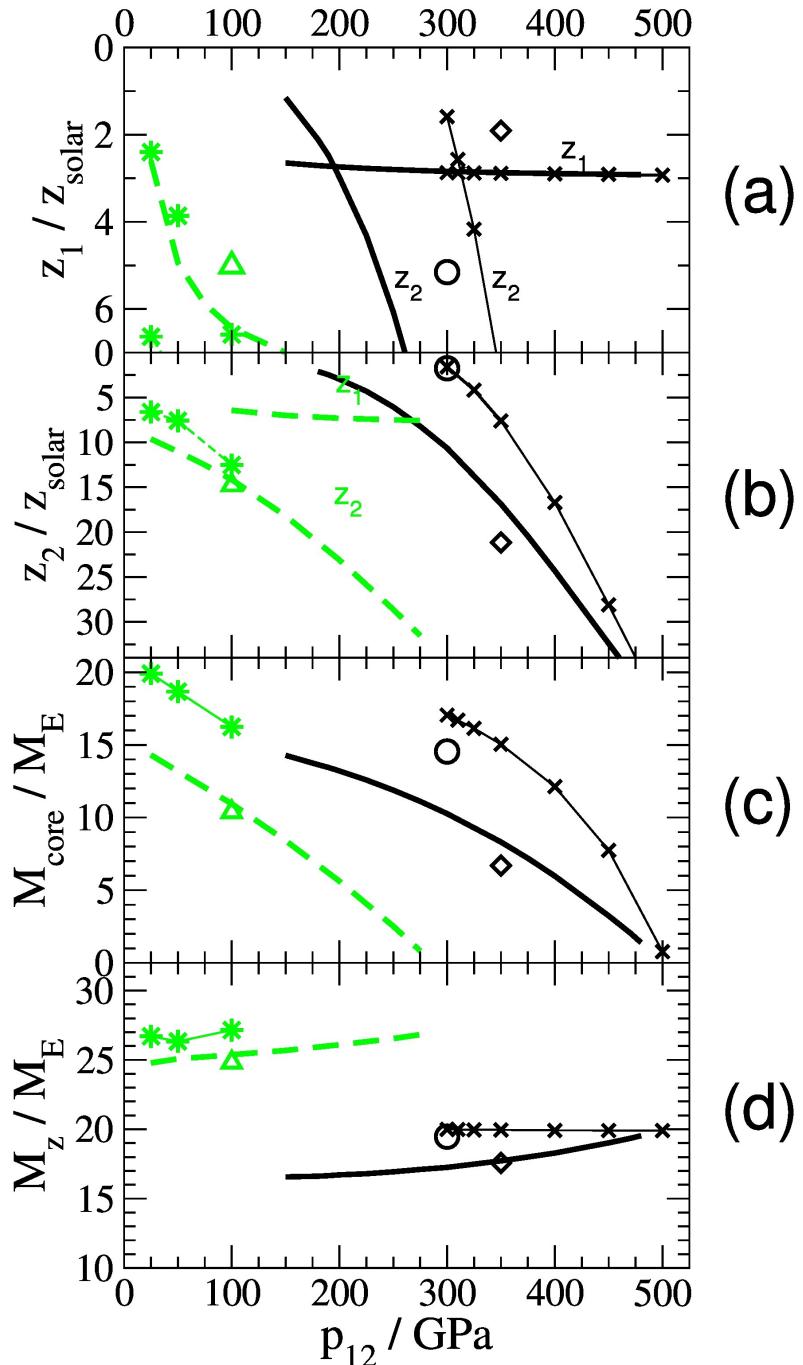


Abbildung 20: Strukturmodelle für Saturn [138]. Gezeigt sind die Metallizitäten der äußeren Mantel, die Kernmasse und die Absolutmasse der Metalle im gesamten Planetenmantel über dem Übergangsdruck  $p_{12}$ . Die Metallizitäten sind in Einheiten des solaren Wertes  $z_{solar} = 0.015$  angegeben. Die schwarzen Kreise zeigen das berechnete Grundprofil, welches als Grundlage der Evolutionsberechnungen mit ebenfalls einer Außentemperatur von 140 K und einem atmosphärischen Heliumgehalt von 0.1 dient. Die Absolutmasse der Metalle enthält bereits die Kernmasse. Der schwarze Kreis in (a), (b), (c), (d) markiert ein Modell, welches ebenfalls für die LM-REOS berechnet wurde. Dies geschah jedoch zu den Randbedingungen aus [2] (Tabelle 1). Dieses Modell liefert die Grundlage für alle folgenden Evolutionsberechnungen.

---

innere Schicht durch Metalle stark angereichert. Um nun aber die Gravitationsmomente wieder zu reproduzieren und somit das berechnete Gravitationspotenzial anzupassen, ist es notwendig, die Kernmasse zur verringern. Dies kann sogar soweit gehen, dass der Kern völlig verschwindet. Ein komplettes Verschwinden der Kernmasse ist aufgrund der heute bekannten Entstehungsszenarien der äußeren Planeten unseres Sonnensystems aber nicht möglich, obwohl sie Lösungen unserer Berechnungen sind. Diese Lösungen treten für alle drei Zustandsgleichungen auf, sind aber in Abbildung 20 nicht dargestellt. Außerdem ist dort auch erkennbar, dass der Definitionsbereich für unterschiedliche EOS's auch einen anderen Bereich abdeckt. Während die LM-REOS tiefe Schichtengrenzen (hohe Drücke) aufweist, liegen diese für die auf dem chemischen Bild basierenden Modelle, näher an der Planetenoberfläche.

Zuletzt zeigt uns Abbildung 20 Absolutmassen  $m_z$  der Metalle im Saturn in Einheiten der Erdmasse. Diese Werte werden ganz einfach aus der Massenerhaltung berechnet:

$$m_z = z_1(M - m_{12}) + z_2(m_{12} - m_c) + m_c \quad . \quad (214)$$

Anhand dieser Gleichung sehen wir auch, dass die Kernmasse zur Gesamtmetallmasse in Abbildung 20 hinzugezählt wird. Nun werfen wir noch einen Blick auf die offenen Symbole in Abbildung 20. Diese geben spezielle Modelle für eine Außentemperatur von nur 135 K an. Wir können also erkennen, dass eine geringere Außentemperatur eine kleinere Kernmasse hervorruft. Ebenfalls ergibt sich eine verringerte Metallizität im inneren Mantel. Lediglich die äußere Metallizität wächst mit abnehmender Oberflächentemperatur. Dieses Verhalten gilt sowohl für die SCVH-EOS als auch für die LM-REOS. Modelle, welche mit den offenen Symbolen dargestellt sind, wurden ebenfalls mit einem atmosphärischen Heliumgehalt von 0.18 berechnet. Abbildung 20 enthält ein Modell, welches durch schwarze Kreise gekennzeichnet ist. Es wurde ebenfalls für die LM-REOS erzeugt. Dies geschah aber auf der Basis der Daten von Anderson et al. (2007) [2] (Tabelle 1). Auch für diese Lösung wird ein reiner Wasserkern angenommen. Dieses Modell entstand vor denen aus [138] und liefert nun die Grundlage für die Evolutionsrechnungen. Die entsprechenden Daten, wie Metallizitäten und Kernmasse sind in Tabelle 2 gezeigt. Im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse dargestellt, welche für die zeitliche Entwicklung des Saturn erhalten wurden.

## 4.2 Evolutionsberechnungen

Wir haben in Abbildung 8 bereits erkannt, dass die homogene Evolution für die Zustandsgleichung LM-REOS ein Alter von fast 2.5 Milliarden Jahren liefert. Unsere Sonne und somit das Sonnensystem haben allerdings ein Alter von 4.56 Gyr ( [1], [62], [148] ). Außerdem kann man bei Saturn eine überschüssige Leuchtkraft beobachten. Er emittiert doppelt so viel Energie, wie er von der Sonne erhält ( [33], [167], [168] ). Leconte et al. (2013 [104]) fanden eine Möglichkeit, diese Überschussstrahlungsleistung zu erklären. Sie verzichten vollständig auf den Effekt der Entmischung von Wasserstoff und Helium ( [33], [79], [109], [111], [127], [128] ) und erklären die Leuchtkraft durch einen Konzentrationsgradienten innerhalb des Saturn. Dabei handelt es sich um eine superadiabatische Schicht. Sie hemmt den Wärme- und Teilchentransport. Außerdem würde dadurch auch großräumige Konvektion verhindert, welche die Grundlage dieser Arbeit ist. Aufgrund dessen würde Saturn nicht so schnell auskühlen, wie es durch die homogene Evolution vorhergesagt wird.

---

Da heutige Messungen zeigen, dass der atmosphärische Heliumgehalt nicht mehr dem solaren entspricht, sondern darunter liegt ([57], [64], [167]), muss es einen Effekt geben, der dieses veranlasst. Aufgrund dessen liegt die Entmischung von Wasserstoff und Helium sehr nahe. Diese würde dafür sorgen, dass Helium in den Planeten hineinfällt. Als Folge dessen, gäbe es eine Verarmung an Helium in der äußeren Atmosphäre des Saturn. Ebenfalls wurde eine solche Verarmung bereits in der Jupiter - Atmosphäre nachgewiesen, auch wenn dieser Effekt nicht so ausgeprägt ist ([1], [5]). Eine homogene Evolution für diesen Planeten liefert eine vernünftige Reproduktion des Alters unseres Sonnensystems ([48], [80]), [135]). Demnach sollen nun die Resultate unseres Modells zur Entmischung von Wasserstoff und Helium, sowie dessen Effekt auf die Evolution des Saturn gezeigt und diskutiert werden.

#### 4.2.1 Der Einfluss der Kernkühlung

Bevor wir den Einfluss der Entmischung auf die Entwicklung von Saturn untersuchen, soll zunächst der Einfluss der Kernkühlung auf die homogene Evolution genauer untersucht werden. Somit können wir Rückschlüsse auf das Verhalten der Kernkühlung, auch für die inhomogene Evolution, ziehen. Dazu betrachten wir Abbildung 21. Auch hier ist wieder die Effektivtemperatur über der Zeit aufgetragen. Wir sehen hier drei Kurven. Die Schwarze wurde schon in Abbildung 8 präsentiert. Sie zeigt das Ergebnis der Anwendung der einfachen Kernkühlung, welche durch Gleichung 190 beschrieben wird. Diese findet häufig auch in anderen Arbeiten Anwendung ([33], [34], [36], [80], [131], [135], [137], [138], [156]). Dazu ist es notwendig, die Masse des Kerns zeitlich konstant zu halten. Als Folge muss auch die Gesamtmasse der Metalle im Mantel aufgrund der Massenerhaltung zeitlich konstant bleiben. Für den Fall des Zweischichtenmodells bleibt folglich auch die Metallizität im Mantel zeitlich konstant. Die einfache Kernbehandlung geht laut Gleichung 190 von einer konstanten Wärmekapazität  $c_v$  aus. Für einen Wasserkern ist dies eine gerechtfertigte Annahme ([133], [39]). In dieser Arbeit wird  $c_v = 4 \frac{J}{gK}$  verwendet. In Abbildung 21 wurde das Zweischichtenmodell mit dem solaren Heliumgehalt von 0.275 verwendet. Die Anwendung der einfachen Kernkühlung liefert ein Alter von 2.759 Gyr.

Außerdem können wir, wie wir in Abschnitt 3.1.3 schon genauer untersucht haben, den Kernbeitrag auch anhand der Thermodynamischen Integration beschreiben. Die dort entstandene Konstante  $s_0$  hebt sich aufgrund der konstanten Kernmasse und damit auch dessen homogener Entwicklung in der Kühlungsgleichung heraus. Das Resultat ist ebenfalls in Abbildung 21 durch die rot gestrichelte Kurve dargestellt. Um den Einfluss des Energiebudgets des Planetenkerns im Vergleich zum Abkühlverhalten der Hülle zu untersuchen, haben wir hier noch eine weitere Kurve (grün gestrichelt) dargestellt. Hier trägt der Kern weder positiv noch negativ zum Gesamtenergiehaushalt des Planeten bei. Die rote und die schwarze Fläche unterhalb der Linie, welche die heutige Effektivtemperatur darstellt, sollen die Unterschiede verdeutlichen. Wir erkennen, dass die Kühlungskurve aufgrund fehlender Kernkühlung am kürzesten ist, sich aber kaum von den anderen unterscheidet. Außerdem lernen wir aus Abbildung 21, dass die einfache Beschreibung des Kerns das Ergebnis für die thermodynamische Integration, beinahe perfekt reproduziert. Für alle folgenden Berechnungen, seien sie homogener oder inhomogener Natur, wird die Variante der thermodynamischen Integration verwendet, um eine selbstkonsistente Beschreibung beizubehalten.

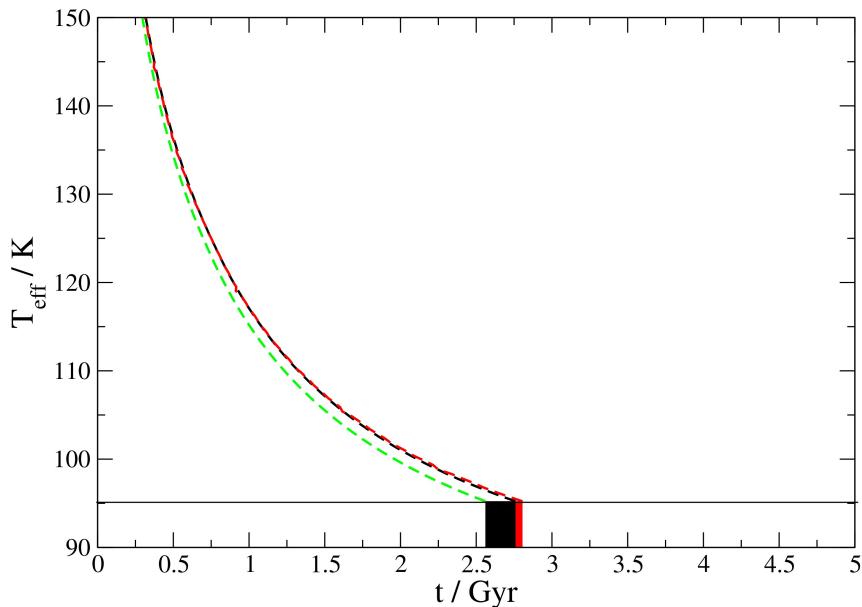


Abbildung 21: Einfluss der Kernkühlung auf die homogene Evolution. Die grün-gestrichelte Kurve beschreibt das Kühlverhalten ohne jeglichen Kerneinfluss, ob positiv oder negativ. Die schwarz gestrichelte Linie zeigt die Evolution für die Näherung der einfachen Kernkühlung, wohingegen die rot Gestrichelte das Resultat für die Behandlung des Kerns mit thermodynamischer Integration zeigt. Die schwarze und rote Fläche verdeutlichen die Unterschiede.

#### 4.2.2 LM-REOS vs SCvH-EOS

Wie wir bereits in Abbildung 13 gezeigt haben, liegt der Ansatzpunkt der H-He-Entmischung bei etwa einer Milliarde Jahren nach der Entstehung des Planeten. Bis zum Einsetzen der Phasentrennung kann die Evolution immer noch homogen beschrieben werden. In Anlehnung an die strukturellen Berechnungen verwenden wir für die folgenden Evolutionberechnungen die Randbedingungen aus Tabelle 2.

Das bedeutet, dass das Grundprofil für einen Übergangsdruck von 300 GPa erzeugt wurde, da für diese Lösung die Metallizitäten beider Mäntel annähernd gleich sind. Die Gesamtmetallizität, welche auch in Tabelle 1 angegeben ist, wurde per Massenerhaltung wie folgt

| $T_1/K$ | $y_1$ | $p_{12}/\text{GPa}$ | $m_{\text{core}}/M_E$ | $z$   | $c_v/\frac{J}{gK}$ |
|---------|-------|---------------------|-----------------------|-------|--------------------|
| 140     | 0.1   | 300                 | 14.54                 | 0.061 | 4                  |

Tabelle 2: Parameter zur Beschreibung der Evolution auf der Basis der LM-REOS-daten.

---

berechnet:

$$z = \frac{z_1(M - m_{12}) + z_2(m_{12} - m_{core})}{M - m_{core}} . \quad (215)$$

Im nächsten Schritt wenden wir die Entmischungsdaten aus [109] an und berechnen die konvergierten Heliumgehalte für die entsprechenden, inhomogenen Planetenprofile anhand der Beschreibung aus Abschnitt 3.2.1. So erhalten wir für die homogene Kurve (LM-REOS) eine Verlängerung, welche ein Alter von 3.85 Milliarden Jahren liefert. Dies ist in Abbildung 22 gezeigt. Diese Berechnung geht davon aus, dass der Entropiesummand aus Gleichung 2.93 auch für die inhomogene Evolution aus der Kühlungsgleichung herausfällt. Die SCvH-EOS enthält allerdings Absolutwerte für die Entropie (Abschnitt 2.7.3). Somit kann die Kühlungsgleichung auch für sich ändernde Konzentrationen gelöst werden. Das Resultat ist ebenfalls in Abbildung 22 gezeigt. Die inhomogene Verlängerung für die SCvH-EOS wird durch die durchgezogene, schwarze Kurve gekennzeichnet. Während die Entmischungsrechnungen für LM-REOS ein kürzeres Alter als das des Sonnensystems liefern, wird es durch Anwendung der SCvH-EOS genau getroffen.

Natürlich wurden die, auf der SCvH-EOS basierenden, Modelle mit anderen Parametern durchgeführt. Dies folgt aus dem Einfluss der Zustandsgleichung auf die innere Struktur für ein heutiges Basisprofil (Abbildung 20). Wir verwenden für die Berechnungen der inhomogenen Evolution bzgl. der SCvH-EOS eine Kernmasse von 12 Erdmassen. Aufgrund einer verschobenen Massenkoordinate zur Trennung der äußeren Schichten ergibt sich eine andere Gesamtmetallizität. Ebenso verwenden wir hier einen reinen, bzgl. der Masse konstanten Wasserkern und einen heutigen atmosphärischen Heliumgehalt von 0.1, damit sich dieser von den Observablen unserer Betrachtungen zur LM-REOS nicht unterscheidet. Allerdings haben wir in der vorherigen Untersuchung bereits festgestellt, dass der Einfluss der Kernkühlung auf die Evolution des Saturn nur einen, im Vergleich zur Hülle, sehr geringen Einfluss hat.

Wie bereits in Abschnitt 2.6 beschrieben, wurde die SCvH-EOS anhand des chemischen Bildes erzeugt und beschreibt keine Mischungen, sondern nur die Eigenschaften der reinen Stoffe. Allerdings besteht der Planet offensichtlich aus einer Mischung von Wasserstoff, Helium und Metallen. Da die Anwendung der Entmischungsdaten von [109] auf die SCvH-EOS aber, wie erwähnt, das richtige Alter liefert, versuchen wir nun die Entropiewerte der LM-REOS an die der SCvH-EOS anzupassen, da die Entropiewerte der LM-REOS nur bis auf einen konzentrationsabhängigen Summanden genau bestimmt werden können (Gleichungen 86, 87). Dies liegt daran, dass die Entropie aus DFT-MD Simulationen nicht direkt zugänglich ist [8]. Die Vorgehensweise ist in [3] gezeigt, soll hier noch einmal genauer dargestellt werden. Die Gesamtentropie des Gemisches von Wasserstoff, Helium und schweren Elementen ist bestimmt durch folgende Gleichung:

$$s(T, p) = (1 - y)s^H(T, p) + ys^{He}(T, p) + s_{mix}(T, p, y) . \quad (216)$$

Es sei hier erwähnt, dass diese Entropiebehandlung sich lediglich auf das Subsystem aus Wasserstoff und Helium bezieht. Wie wir aber bereits gesehen haben, lässt sich auch die Entropie für einzelne Bestandteile nur bis auf entsprechende Konstanten  $s_0^H$  und  $s_0^{He}$  bestimmen und es gilt:

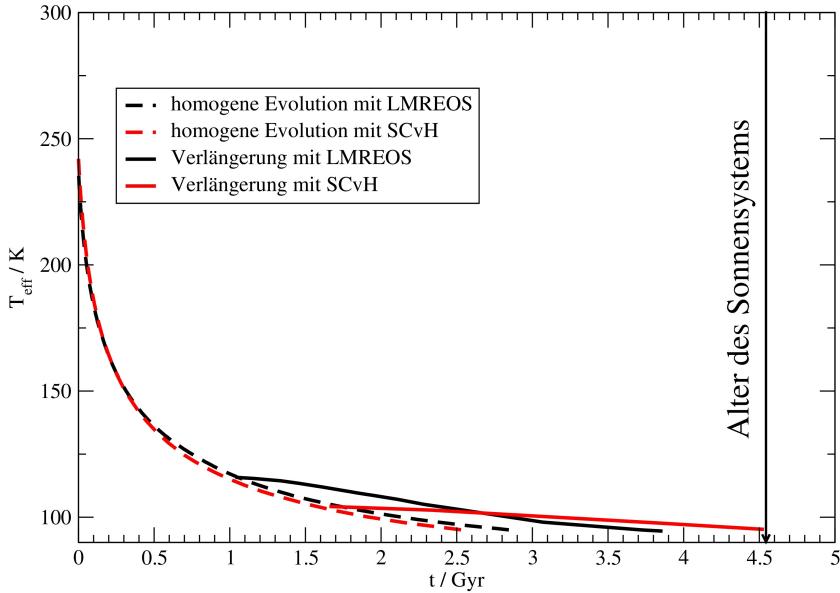


Abbildung 22: Vergleich von homogener und inhomogener Evolution für die LM-REOS (schwarz) und die SCvH-EOS (rot) [157]. Beide homogenen Kühlungskurven treffen nicht das Alter des Sonnensystems, sondern erreichen ihren heutigen Zustand schon bei 2.5 und 2.85 Gyr. Man kann sehen, dass durch Einbeziehung des Entmischungseffektes von Wasserstoff und Helium eine Verlängerung der Kurven erreicht werden kann. Während die Verwendung der LM-REOS ein Alter von 3.85 Millarden Jahren liefert, lässt sich durch Anwendung der SCvH-EOS das Alter des Sonnensystems von 4.56 Gyr reproduzieren. Die Verlängerung für die LM-REOS geschah in diesem Bild unter der Annahme, dass die Entropiekonstante aus Gleichung 86, trotz inhomogener Evolution, immer aus der Kühlungsgleichung herausfällt.

$$s^H(T, p) = s_{T_{dyn}}^H + s_0^H \quad , \\ s^{He}(T, p) = s_{T_{dyn}}^{He} + s_0^{He} \quad . \quad (217)$$

Der Index "Tdyn" bedeutet, dass der jeweilige Summand durch thermodynamische Integration bestimmt wird, wobei er nicht die unbestimmte Konstante enthält. Diese sind durch die  $s_0$  gegeben.  $s_{mix}(T, p, y)$  ist die ideale Mischungsentropie, welche Elektronen,  $H_2$ -Moleküle, Wasserstoffatome, Heliumatome und Protonen enthält. Die ideale Mischungsentropie lässt sich analytisch herleiten. Nun gilt es die unbestimmten Konstanten zu berechnen. Zur Berechnung der Isentropen durch den Planeten ist der Wert der Entropie beliebig, solange er nur konstant ist. Daher wurde für alle vorangegangenen Modelle die thermodynamische Integration für die Mischung durchgeführt, wobei wir davon ausgehen, dass die unbestimmte Konstante nicht existiert bzw. Null ist. An der Oberfläche des Planeten ist ein

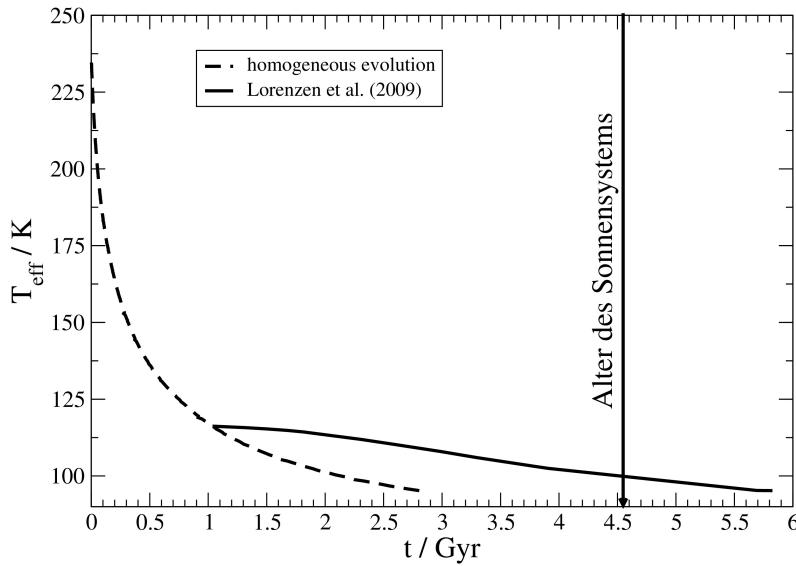


Abbildung 23: Aufgrund des Entropieabgleichs der Werte, welche durch die thermodynamische Integration erhalten werden, mit denen aus den EOS-Tabellen aus [157], ergibt sich eine neue Verlängerung der Kühlungskurve, welche allerdings ein zu großes Alter liefert.

Punkt  $(p, T)$  mit 1 bar und 140 K genau definiert. Daher lässt sich anhand der Tabellen aus [157] der Entropie-Absolutwert für Wasserstoff und Helium jeweils genau bestimmen. Je weiter man jedoch in den Planeten hineingeht, lässt sich der Abgleich nicht mehr anhand einer Konstanten regeln. Da wir aber wissen, dass der Druck und die Temperatur an der Schichtengrenze stetig sind, haben wir dort einen weiteren Referenzpunkt für den inneren Mantel und können die Entropie dort vollständig per thermodynamischer Integration bestimmen.

Die folgenden Berechnungen werden wieder mit der LM-REOS durchgeführt, wobei die berechnete Entropie immer mit der SCvH-EOS abgeglichen wird. Als Resultat dieser Berechnung erhalten wir eine weitere Verlängerung, die ein zu großes Alter liefert. Dies ist in Abbildung 23 gezeigt. Die homogene Evolution ist wie bereits vorher durch die gestrichelte, schwarze Kurve repräsentiert. Die Verlängerung ist durch die rote, durchgezogene Kurve dargestellt. Durch die Entropieanpassung erhalten wir nun ein Alter von ca. 5.8 Milliarden Jahren. Allerdings ist auch dieser Wert viel zu groß, um das Alter des Sonnensystems zu reproduzieren. Dazu wurden die Entmischungsdaten von [109, 111] so manipuliert, dass die Phasentrennung erst später und nicht bereits bei einer Milliarde Jahren einsetzt. Diese Manipulation der Entmischungsdaten soll im nächsten Abschnitt erläutert werden.

---

### 4.2.3 Verschiebungen des Phasendiagrams für H-He-Mischungen

In den vorangegangenen Berechnungen zur Evolution haben wir gesehen, dass durch die Entropieanpassung, bezüglich der SCvH-Daten, das Alter des Sonnensystems übertroffen wurde. Aufgrund dessen wurden die Daten von [109, 111] in Bezug auf die Temperatur verschoben. Die Idee dabei ist, dass diese originalen Entmischungsdaten die Situation möglicherweise, bezüglich der Temperatur, aber auch des Drucks über- bzw. unterschätzen. Die Originaldaten aus [109, 111] wurden um Temperaturoffsets von -1000 K, -1300 K und +500 K verschoben. Abbildung 24 zeigt die Entmischungskurven für die Originaldaten (fett rot) und die Verschiebungen von -1000 K (weinrot und durchgezogen) und -1300 K (pink und durchgezogen). Morales et al. (2010) [128] berechneten, wie auch Lorenzen et al. (2009, 2011) ([109, 111]) die Entmischungsdaten anhand von DFT-Rechnungen. Sie berechnen die freie Mischungsenthalpie  $\Delta g(x)$  in Abhängigkeit der Heliumkonzentration  $x$ . Sie wird wie folgt bestimmt [108]:

$$\Delta g(x) = \Delta u(x) + p \Delta v(x) - T \Delta s(x) . \quad (218)$$

Im Falle der Entmischung besitzt diese Größe zwei Stellen mit horizontaler Tangente. Um die beiden Konzentrationen nach der Entmischung zu bestimmen, wird eine Doppeltangentialkonstruktion verwendet. Im Ausdruck für die freie Mischungsenthalpie taucht auch die Mischungsentropie  $\Delta s(x)$  auf. Lorenzen et al. ([109, 111]) verwenden die ideale Mischungsentropie. Da Morales et al. ([126], [128]) die Mischungsentropie anhand von thermodynamischer Integration bestimmen, ergibt sich für  $\Delta s(x)$  ein anderer Wert. Aus diesem Grund verschieben sie die Extrempunkte der freien Mischungsenthalpie und die Entmischungsgrenze aus Morales et al. um etwa 1000 K niedriger als die von Lorenzen et al.. In dieser Arbeit wurde, um das Alter des Saturn zu reproduzieren sogar noch eine weitere Absenkung der Originaldaten von Lorenzen et al. (2009, 2011) um 1300 K vorgenommen.

Knudson et al. (2015) [95] fanden einen abrupten Isolator-Metallübergang in dichtem und flüssigem Deuterium. Die Entmischung von Wasserstoff und Helium wird mit einem solchen Phasenübergang identifiziert [111]. Somit hätte die Lage dieses Phasenübergangs einen Einfluss auf das Entmischungsverhalten des Saturn oder auch anderer großer Gasplaneten. Knudson et al. verglichen die Anwendung unterschiedlicher Austausch-korrelationsfunktionale. Die, in dieser Arbeit verwendeten Daten von Lorenzen et al. ([109, 111]) wurden anhand des PBE-funktionalen [144] berechnet. Diese Berechnungen liefern kritische Punkte zwischen 1500 K und 2000 K bei Drücken um 1 Mbar ([95], [110], [128], [130]). Der Phasenübergang tritt somit in einem Druckbereich zwischen etwa 100 GPa und 200 GPa auf. Weitere Berechnungen dieser Phasengrenze mithilfe anderer Funktionale liefern stark abweichende Ergebnisse. So liefern die Anwendungen des HSE-Funktionalen [70] oder der van-der-Waals-Funktionale vdW-DF2 und vdW-DF1 ([27], [95]) Phasengrenzen von nicht metallischem zu metallischem Deuterium zwischen 200 und 400 GPa. Knudson et al. präsentieren ihre Experimente, welche mithilfe der Sandia-Z-Machine durchgeführt wurden. Dabei wird ein Plasmastrom aufgrund der Lorenzkraft durch sein eigenes Magnetfeld zusammengezogen. Die Messungen der Vorgänge innerhalb der Deuteriumprobe werden anhand von Reflektivitätsmessungen vorgenommen. Bei niedrigen Drücken ( $\leq 120 \text{ GPa}$ ), ist das Deuterium noch optisch dünn. Mit steigendem Druck wird das Material immer undurchsichtiger. Ein abruptes Anwachsen der Reflektivität liefert einen Indikator für einen Phasen-

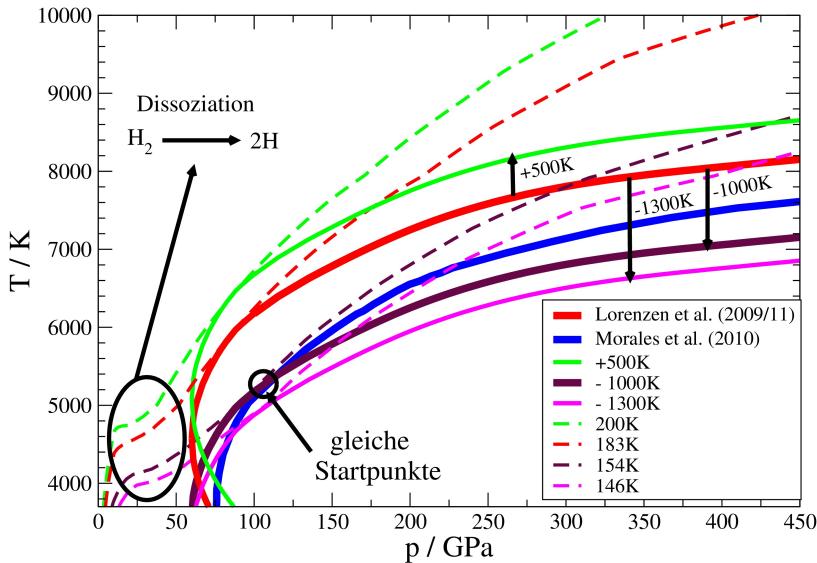


Abbildung 24: Verschiebung der Entmischungsgrenze von Lorenzen et al. (fett rot) um Temperaturoffsets von -1000 K (weinrot und durchgezogen), -1300 K (pink und durchgezogen) und +500 K (grün und durchgezogen). Die gestrichelten Kurven sind Isentropen, welche den Eintritt des Planeteninneren in die Entmischungsregion zeigen. Je tiefer die Entmischungsgrenze liegt, desto mehr muss der Planet abkühlen um diese zu schneiden. Bei einer Verschiebung um -1000 K stimmen die Startpunkte der Entmischung der Daten von Lorenzen et al. mit denen von Morales et al. überein (schwarzer Kreis). Die schwarze Ellipse zeigt eine Region des Saturn, in denen die Dissoziation von Wasserstoff auftritt ([135], [136]). Daher verläuft dort die Temperatur flach.

übergang zwischen nicht metallischen und metallischem Deuterium. Bezuglich des Drucks geben Knudson et al. (2015) an, dass die unterste Grenze der Entmischung von Wasserstoff und Helium bei wenigstens 300 GPa liegt. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der Einfluss einer Druckverschiebung der Originaldaten von Lorenzen et al. ([109], [111]) um 1 Mbar und 2 Mbar untersucht.

Je tiefer die Grenze zum Entmischungsgebiet liegt, desto mehr muss das Innere des Saturn abkühlen, damit Entmischung einsetzen kann. Die Daten von Lorenzen et al. (2009, 2011) und die von Morales et al. (2010) liefern verschiedene Eintrittspunkte in die Entmischungsregion. Die erste Verschiebung von -1000 K sorgt für eine Übereinstimmung dieser Punkte. In Abbildung 25 entspricht dies der weinroten, inhomogenen Kühlungskurve. Sie erreicht ein Alter von etwa 5 Milliarden Jahren und überschätzt somit das Alter des Sonnensystems um 0.44 Gyr. Der vorhergesagte, atmosphärische Heliumgehalt von 0.178 liegt allerdings im gemessenen Rahmen. Es sei erwähnt, dass die Rechnungen, welche dieser Kurve zugrunde liegen, auf der Basis der Daten von Lorenzen et al. (2009) durchgeführt wurden. Da Morales et al. lediglich Entmischungsdaten für den solaren Heliumgehalt er-

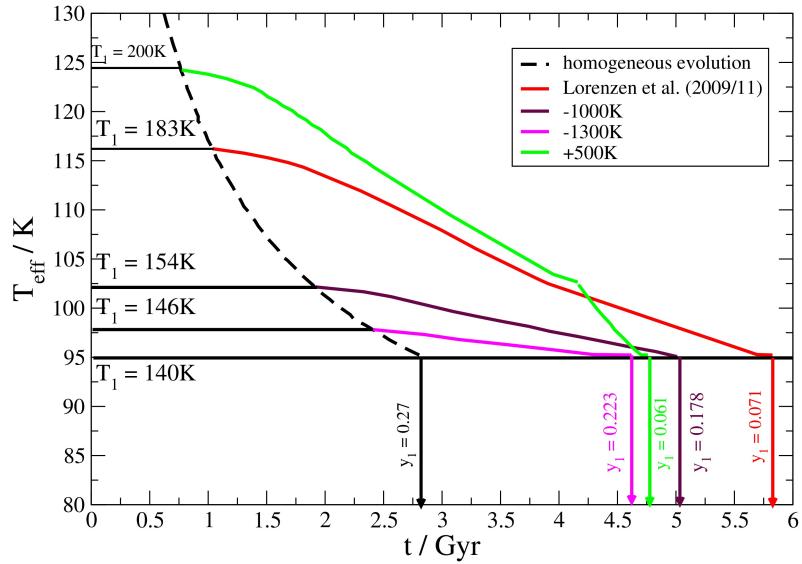


Abbildung 25: Inhomogene Verlängerungen der homogenen Kühlungskurve. Die waagerechten Linien zeigen die Eintrittspunkte der Entmischung für verschiedene Verschiebungen aus Abbildung 24. Die Temperaturen von 146 K, 154 K, 168 K und 200 K sind die Oberflächentemperaturen der Isentropen, welche die jeweiligen Eintrittspunkte charakterisieren. Bei einer Erhöhung der Originaldaten aus Abbildung 24 setzt die Entmischung bei etwa 4.2 Milliarden Jahren aus und die homogene Evolution setzt erneut ein. Der Farbcode dieser Abbildung ist derselbe wie in Abbildung 24.

zeugten, können wir in dieser Arbeit auch nur die Eintrittspunkte miteinander vergleichen. Der Unterschied zwischen beiden Datensätzen besteht darin, dass Lorenzen et al. (2009, 2011) für ihre Berechnungen die ideale Mischungsentropie verwenden, wohingegen Morales et al. (2010) die Entropie durch thermodynamische Integration erhalten (Abschnitt 3.2). Die Daten aus [111] liefern, den nach meiner Kenntnis, ersten Datensatz, welcher für ein kontinuierliches Spektrum von Heliumkonzentrationen existiert.

Aus diesem Grund ist es unbedingt notwendig, genauere Daten zur Beschreibung der Phasentrennung von Wasserstoff und Helium durch zukünftige Rechnungen zu erhalten. Des Weiteren ist es von außerordentlicher Bedeutung, für z.B. die Daten von Lorenzen et al. (2009, 2011), die Absolutwerte für die Entropie zu bestimmen.

Bei der Berechnung der Kühlungsgleichung fällt die Konstante  $s_0$  (Gleichung 87) bei inhomogener Evolution nicht mehr heraus. Außerdem spielt nicht nur die Mischungsentropie für reine Wasserstoff-Helium-Gemische eine Rolle. Sowohl der Kern als auch die Hülle enthalten nämlich schwerere Stoffe (in dieser Arbeit Wasser). Außerdem könnte man Berechnungen anstellen, welche die Kernerosion berücksichtigen (Abschnitt 3.1.1). An dieser Stelle sei allerdings bemerkt, dass diese beginnen würde, solange noch kein Heliumregen eingesetzt hat. Das liegt daran, dass der chemisch reaktive, metallische Wasserstoff den Kern auflösen würde, bis das Helium eine schützende Schicht um ihn herum gebildet hat

---

( [178], [179], [180]). Der Prozess der Kernerrosion hängt mit der Löslichkeit des Kernmaterials im metallischen Wasserstoff zusammen. Speziell die Löslichkeit von Wasser wurde bereits in [178] und [179] untersucht. Trotz Kernerrosion kann sich der homogene Zweig um höchstens eine Milliarde Jahre verkürzen. Dabei handelt es sich um einen Extremfall, bei dem eine Heliumschicht seit der Entstehung des Saturn vorhanden gewesen sein müsste, so dass der Kern nie die Möglichkeit gefunden hätte, sich aufzulösen. Ein frühes Einsetzen der Entmischung in diesem Planeten ist dadurch gerechtfertigt, dass der Kern des Saturn (10 – 25 Erdmassen) heute einen wesentlich größeren Kern als Jupiter (0 – 10 Erdmassen) besitzt( [52], [53], [138], [158]). Durch Berücksichtigung der Kernerrosion würde sich auch der Metallgehalt im Mantel hin zu höheren Werten verändern, welcher ebenfalls in der Berechnung der Entropie berücksichtigt werden sollte. Des Weiteren könnte auch die Lösung oder, der Einschluss schwererer Bestandteile wie Neon in Heliumtropfen eine gewisse Rolle spielen ( [36], [177]). Diese Bestandteile würden somit von fallenden Heliumtropfen aufgesammelt werden und beim Hineinfallen in den Planeten ebenfalls Gravitationsenergie freisetzen. Dies würde auch zur Heizung des Saturn beitragen. Dieser Effekt ist in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

In den bisher gezeigten Modellen war es nicht möglich, das passende Alter des Sonnensystems zu erreichen und gleichzeitig den, heute gemessenen, atmosphärischen Heliumgehalt zu reproduzieren. Aufgrund dessen nehmen wir noch eine weitere Verschiebung der Originaldaten von Lorenzen et al. von +500 K vor. Die daraus resultierende Kühlungskurve stellen wir in Abbildung 24 grün dar. Wir sehen dort, dass die Entmischung des Wasserstoff-Helium-Gemisches schon bei einer Außentemperatur von 200 K startet. Dies entspricht einem Alter von etwa 0.8 Milliarden Jahren. Wir können beobachten, dass die Kurve, welche die inhomogene Evolution und somit das Herabsinken des Heliums beschreibt, bei einem Alter von 4.2 Gyr nach der Entstehung des Saturn aussetzt. Zu diesem Zeitpunkt ist seine Atmosphäre so sehr an Helium verarmt, dass nur noch ein Anteil von  $y_1 = 0.061$  bzgl. der Masse übrig bleibt. Nachdem nun diese inhomogene Entwicklung abgeschlossen und keine weitere Entmischung mehr möglich ist, können wir in Abbildung 25 auch beobachten, dass ab einem Zeitpunkt von ca. 4.2 Milliarden Jahren wieder die homogene Evolution mit einer atmosphärischen, massenspezifischen Heliumkonzentration von 0.061 das Kühlungsverhalten des Saturn beschreibt. Aufgrund dieses veränderten Kühlungsverhaltens ändert sich logischerweise auch der Wachstumsvorgang der Heliumschicht. Ab dem erneuten Einsetzen der homogenen Evolution bei 4.2 Milliarden Jahren verändern sich die Heliumgehalte in den Schichten nicht mehr. Diese positive Verschiebung konnte das Alter des Sonnensystems genau reproduzieren. Allerdings ist auch der hier vorhergesagte Heliumgehalt zu gering.

Zuletzt soll noch auf weitere Messergebnisse eingegangen werden, die ebenfalls von Stefanie Brygoo (persönliche Mitteilung) vorhergesagt wurden. Eine entsprechende Veröffentlichung ist in Vorbereitung. Brygoo et al. verwenden Diamantstempelzellen zu sogenannten "pre-compression". Um Bedingungen im Saturn zu simulieren, wird ein Gemisch aus Wasserstoff und Helium auf einen Druck von 4 GPa vorkomprimiert [12]. Diese Anfangsbedingungen legen den Verlauf der Hugoniot-Kurve fest. Aufgrund der Transparenz des Diamanten, wird das Material in kurzen, energiereichen Laserpulsen weiter aufgeheizt. Eine Größe zur Untersuchung der Metallisierung von Wasserstoff ist die elektrische Leitfähigkeit. Sie kann über die Reflektivität ermittelt werden. Zunächst wird sie anhand von Röntgenstreuung ermittelt [30]. Wir untersuchen nun die Druckverschiebung der Entmischungsdaten um 1 Mbar bzw. sogar 2 Mbar. Aus diesem Grund schauen wir uns ein letztes Mal die Daten von

Lorenzen et al. (2009, 2011) und deren Verschiebung hin zu höheren Drücken an. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 26 dargestellt. Die Entmischungsregion, welche auf den Originaldaten von Lorenzen et al. (2009, 2011) basiert, ist durch die rote durchgezogene Kurve dargestellt, während die grüne durchgezogene Kurve die um 100 GPa verschobene Grenze für die Phasentrennung zeigt. Beide wurden für den solaren Heliumgehalt berechnet, da sie den Ersteintritt der Entmischung charakterisieren. Die gestrichelten Kurven zeigen die Isentropen, welche gerade Tangenten an die jeweiligen Regionen bilden. Wie wir bereits vorher erkannt haben, ist es für die rote Kurve die Außentemperatur von 184 K, welche die Tangente beschreibt. Die grüne Isentrope entspricht einem Zweischichtenmodell mit solarem Heliumgehalt und einer Außentemperatur von 140 K. Diese schneidet die neue, verschobene Kurve nur sehr leicht und kann hier als Tangente angesehen werden. Demnach können wir von den neuen Daten behaupten, dass diese das Kühlungsverhalten des Saturn nicht wiedergeben können. Als Konsequenz müsste die Entmischung gerade zur heutigen Zeit einsetzen. Da allerdings Messungen zeigen, dass die Atmosphäre des Saturn stark an Helium verarmt ist, kann dies keine Lösung sein und muss somit verworfen werden. Weitere Verschiebungen zu noch höheren Drücken sind somit nicht zielführend.

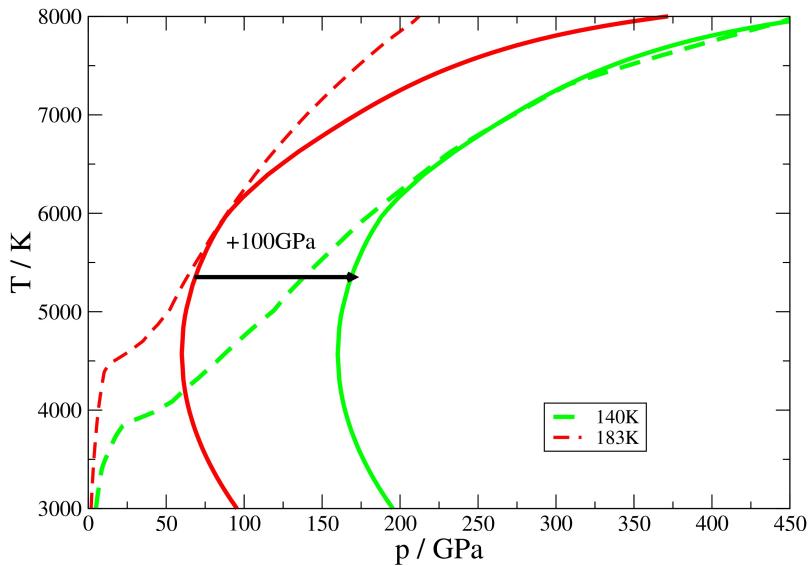


Abbildung 26: Verschiebung der Entmischungsgrenze von Lorenzen et al. um 1 Mbar. Die Entmischungszone gilt für den solaren Heliumgehalt. Bei einer Verschiebung um 1 Mbar(100 GPa) tritt selbst die heutige Isentrope mit  $T_1 = 140K$  nicht in das Entmischungsgebiet ein.

Diese Bildung und Entwicklung der besagten Heliumschicht soll nun im folgenden Abschnitt für unser Modell, das auf den Originaldaten von Lorenzen et al. ([109, 111]) basiert, genauer untersucht werden.

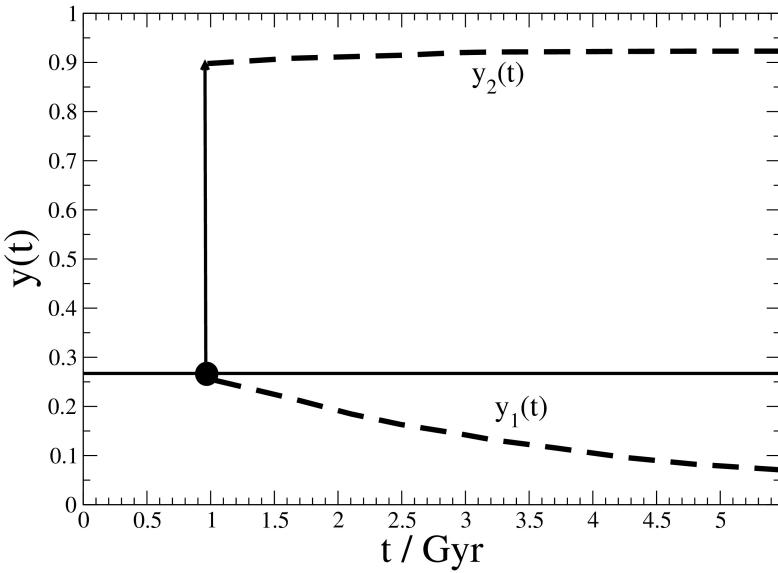


Abbildung 27: Verhalten der Heliumgehalte im äußeren und inneren Mantel. Während der atmosphärische Heliumanteil  $y_1$  zeitlich sinkt, springt der Innere instantan auf über 90 Prozent (massenspezifisch) und bleibt dann nahezu konstant.

#### 4.3 Wachstum der Heliumschicht

Sobald die Phasentrennung von Wasserstoff und Helium im Saturn eingesetzt hat, beginnt beinahe reines Helium (enthält auch geringe Anteile von schwereren Elementen und auch Wasserstoff [177]) in den Planeten hineinzusinken. Dort bildet es eine ebenso fast reine Heliumschicht auf dem planetaren Kern aus. Diese wächst mit der Zeit sowohl bezüglich der Masse als auch ihrer Dicke. Darauf wollen wir in diesem Kapitel genauer eingehen. Außerdem werden wir sehen, wie sich der Übergang zwischen den äußeren Mänteln, also der atmosphärischen und der Heliumschicht mit der Zeit verändert. Wie wir bereits in Abbildung 15 gesehen haben, entstehen bei der Betrachtung kompletter Entmischungsvorgänge konvergierte Werte für den atmosphärischen Heliumgehalt  $y_1$ . Die folgenden Ergebnisse werden speziell für die Originaldaten von Lorenzen et al. (2009, 2011) inklusive des Entropieabgleichs mit den Entropiewerten der SCvH-EOS präsentiert. Wir wollen uns nun die Zeitabhängigkeit der Heliumgehalte anschauen. Dies ist in Abbildung 27 dargestellt.

$y_1$  und  $y_2$  teilen sich in dieser Abbildung dieselbe Ordinate. Wir können nun beobachten, dass der für jeden Zeitpunkt konvergierte, atmosphärische Heliumgehalt  $y_1$  sinkt, wohingegen die Konzentration der Heliumschicht  $y_2$  instantan auf einen Wert springt, welcher bei über 90 Prozent der Schichtmasse liegt. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass auch die Tropfen, welche auf den Kern hinunterfallen und sich aufgrund ihrer sehr hohen Dichte nicht mit der Umgebung vermischen, unter die anfangs heliumarme Schicht fallen und sich dort ablagern. Da immer mehr Tropfen der beinahe selben Konzentration in den Planeten hineinfallen, ändert sich die Konzentration nur sehr gering. Die Heliumanteile der Tropfen

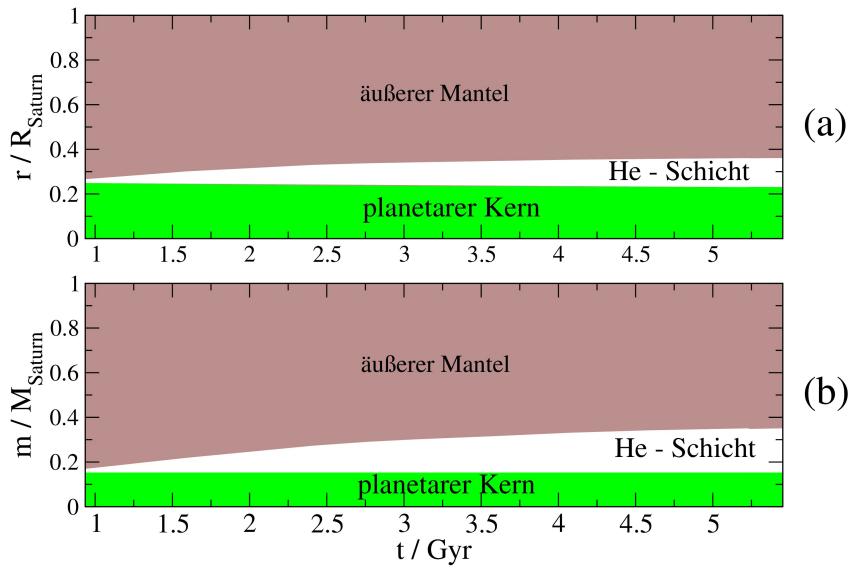


Abbildung 28: Wachstum der Heliumschicht über dem Kern in Einheiten der Saturnmasse bzw. des Saturnradius'. In beiden Darstellungen (a) und (b) ist zu sehen, dass der innere Mantel sowohl bzgl. der Absolutmasse als auch der Dicke zeitlich wächst.

sind durch die Thermodynamik, welche die Entmischung beschreibt, vorgegeben. Da wir nun wissen, wie sich die Heliumgehalte in den beiden Schichten verändern, wollen wir nun einen Blick auf die genaue Form der jeweiligen Mäntel werfen. Diese verändert sich logischerweise, da auch die Übergangsmasse und die entsprechende Radiuskoordinate  $r_{12}(m_{12})$  zeitlich variieren. Dieses Verhalten ist in Abbildung 28 in Einheiten der Saturnmasse beziehungsweise des Saturnradius' dargestellt. Die Abbildung 28 zeigt, dass nach dem Einsetzen der Entmischung bei etwa einer Milliarde Jahren nach der Entstehung des Saturn, die Heliumschicht zu wachsen beginnt. Diese Schicht ist jeweils weiß dargestellt. Die untere Grenze dieser Region bildet den Übergang zwischen dem Planetenkern und dem inneren Mantel, wohingegen die obere Grenze wieder durch Übergangsradius bzw. -masse gegeben ist. Die untere Grenze bleibt in Abbildung 28(b) konstant bei 14.454 Erdmassen. Daher ist diese untere Grenze durch eine waagerechte Gerade vollständig bestimmt.

Werfen wir allerdings einen Blick auf die radiusspezifische Darstellung in Abbildung 28(a), so sehen wir, dass die Heliumschicht in ihrer Dicke von 0 bis 0.16 Saturnradien bis zum heutigen Zeitpunkt anwächst. Natürlich ist mit dem heutigen Zeitpunkt jener gemeint, bei dem der Planet die heute gemessene Effektivtemperatur erreicht. In diesen Bildern passiert dies erst nach ca. sechs Milliarden Jahren. Der Kernradius wird mit der Zeit immer kleiner. Das liegt darin begründet, dass der Druck innerhalb des Kerns mit der Zeit (mit abnehmender Oberflächentemperatur) immer größer wird. Daher schrumpft der Kern, woraufhin sich das Material verdichtet und das Druckprofil durch den Kern höher liegt. Der Planetenkern kontrahiert somit durch die zeitliche Abkühlung des gesamten Planeten. Dies ist jedoch nicht

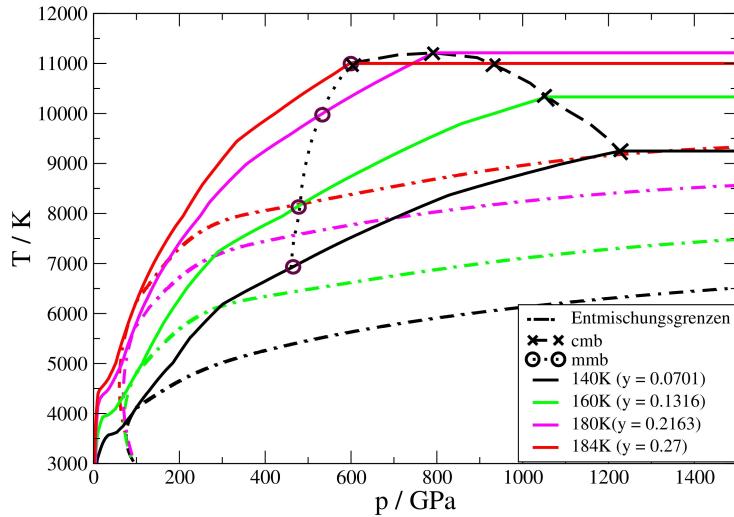


Abbildung 29: Abrenzung der Heliumschicht anhand der Druckkoordinaten. Bei der Isentropen mit einer Oberflächentemperatur von 184 K existiert noch kein innerer Mantel und der Übergangsdruck  $p_{12}$  stimmt mit dem Druck an der Grenze zwischen Mantel und Kern überein. Die Strich-Punkt-Kurven (rot, weinrot, grün, schwarz) bezeichnen die Entmischungsgrenzen, die sich für die jeweiligen Heliumgehalte (0.275, 0.2163, 0.1316, 0.0701) ergeben. Die durchgezogenen Linien beschreiben die Isentropen durch den Saturn für die entsprechenden Außentemperaturen und Heliumgehalte, bei denen der Entmischungsprozess gerade vollständig beendet ist ( $T_1 = 184$  K (rot),  $T_1 = 180$  K (weinrot),  $T_1 = 160$  K (grün),  $T_1 = 140$  K (schwarz)). Die mit den  $x$ -Symbolen bezeichnete Kurve beschreibt die Grenze zwischen Kern und Mantel des Planeten (cmb = core-mantle-boundary). Die Kurve mit den Kreissymbolen zeigt die Lage der Grenze zwischen den beiden Mänteln (mmb = mantle-mantle-boundary).

alles, was wir aus dem Wachstumsverhalten lernen können. Wie bereits erwähnt, können wir den Übergang zwischen Innen- und Außenschicht ebenfalls durch den Übergangsdruck  $p_{12}$  beschreiben.

Abbildung 29 zeigt eine schwarze gepunktete Kurve (Kreise) und eine schwarze gestrichelte Kurve (Kreuze). Erstere gibt die Lage der Übergangsdrücke  $p_{12}$  in Abhängigkeit der Temperatur an. Sie zeigt die Grenze zwischen den beiden Mänteln des Planeten (mmb = mantle-mantle-boundary). Letztere spiegelt die Kernranddrücke  $p_{core}$  wider (cmb = core-mantle-boundary). Dargestellt sind außerdem die Isentropen mit den Außentemperaturen von 140 K, 160 K, 180 K und 184 K.

Wir erinnern uns an dieser Stelle noch einmal daran, dass für die Originaldaten von [109, 111] die 183 K-Isentrope zum ersten Mal das Entmischungsgebiet schneidet. Bei einer Oberflächentemperatur von  $T_1 = 184$  K stimmen also der Kernranddruck und der Übergangsdruck überein, da es sich hier noch um ein Zweischichtenprofil bestehend aus Kern und einer einzigen, äußeren Schicht handelt. Startet nun die Phasentrennung, wächst die Heliumschicht und der Übergangdruck sinkt mit abnehmender Außentemperatur. Dies ist eine

---

Folge des Zusammenhangs zwischen Radiuskoordinate und Druck (hydrostatisches Gleichgewicht), welcher bereits in den theoretischen Grundlagen gezeigt wurde. Betrachten wir jedoch die schwarze gestrichelte Kurve, so sehen wir, dass die Temperatur des isothermen Kerns zunächst leicht ansteigt und dann absinkt. Dies ist eine Folge der Abhängigkeit einer Isentropen von der entsprechenden Zusammensetzung und der Nebenbedingung unseres Modells, dass Temperatur und Druck am Kernrand stetig sein sollen. Die Kreise in Abbildung 29 zeigen die entsprechenden Übergänge für die besagten Isentropen an, welche die jeweiligen Kurven erzeugen. Wir haben bereits gezeigt, dass nach einem vollständigen Entmischungsprozess konvergierte Heliumgehalte in der Atmosphäre des Planeten entstehen. Ist dies der Fall, so bilden die finalen Isentropen Tangenten an die jeweiligen Entmischungsgrenzen. Dies ist auch in Abbildung 29 gezeigt. Die Strich-Punkt-Kurven beschreiben die Grenze zum Gebiet, welches eine Phasentrennung begünstigt. Hier kann noch einmal gesehen werden, dass diese Grenze von der jeweiligen Ausgangskonzentration eines Wasserstoff-Helium-Gemisches abhängt. Die zugehörigen Heliumanteile zu den jeweiligen Grenzkurven sind ebenfalls in Abbildung 29 gegeben. Die Isentropen bilden Tangenten, sobald der atmosphärische Heliumgehalt konvergiert ist. Um einen weiteren Entmischungsprozess zu starten, müsste der Planet erst weiter abkühlen. Sehen wir uns nun das, zunächst überraschende, Verhalten der Kerntemperatur an und untersuchen dessen Einfluss auf die Form der inhomogenen Kühlungskurve. Der Planetenkern ist in Abbildung 29 am waagerechten Temperaturprofil aufgrund der Isothermie zu sehen. Beim Übergang von 180 K nach 179 K kippt das Verhalten der Kerntemperatur, obwohl der Übergangsdruck zwischen Kern und Hülle immer weiter steigt. Die Erklärung hierfür wurde bereits weiter oben geliefert. Jedoch werfen wir noch einen Blick auf die Form der inhomogenen Verlängerung unserer Kühlungskurve. In allen vorangegangenen Kurven ist ein Wendepunkt in der inhomogenen Verlängerung der Kühlungskurve zu sehen. Solche Wendepunkte treten ebenfalls bei den Berechnungen von [33] auf. In Abbildung 30 zeigen wir noch einmal die Verlängerung, welche mit den originalen Entmischungsdaten von [109, 111] berechnet wurde.

Nach dem Einsetzen der Phasentrennung des Wasserstoff-Helium-Gemisches in der Atmosphäre beginnt die inhomogene Evolution. Die zugehörige Kühlungskurve, welche gesondert in Abbildung 30 dargestellt ist, hat zum Beginn der Entmischung einen negativen Anstieg von  $-3.145 \frac{K}{Gyr}$  bzgl. der Effektivtemperatur. Die Kurve ist in drei Abschnitte gegliedert. Der erste reicht vom Beginn der Entmischung bis zu dem Punkt, an dem die Kerntemperatur kippt ( $T_1 = 180 K$ ). Anschließend wird die Kurve steiler, der Anstieg nimmt einen Wert von ca.  $-5.312 \frac{K}{Gyr}$  an und der Planet kühlt schneller. Am Ende des zweiten Bereichs taucht der Wendepunkt bei einem Alter von etwa 3.25 Gyr auf.

Nach Passieren dieses Wendepunktes bei einem Alter von etwa 3.25 Milliarden Jahren wird der Anstieg wieder flacher und der Planet kühlt nun wieder langsamer mit einer Kühlungsrate von etwa  $-4.025 \frac{K}{Gyr}$ . Wir haben bereits in Abschnitt 3.1.3 gesehen, wie die einfache Kernkühlung beschrieben wird (Gleichung 190). Daher folgt aus dem Resultat in Abbildung 29, dass der Kern bis zur Oberflächentemperatur von 180 K geheizt wird und somit negativ in das Energiebudget des Planeten eingeht. Erst später kühlt der planetare Kern wie auch der gesamte Mantel des Saturn. Der Bereich in dem die Kerntemperatur kippt, ist in Abbildung 30 durch die waagerechten Linien, welche mit 179 K, 180 K und 181 K bezeichnet sind, abgegrenzt. Diese Temperaturen charakterisieren die Evolutionsprofile dieser Kühlungskurve entsprechend Gleichung 153. Allerdings können wir erkennen, dass das Maximum der gestrichelten Kurve in Abbildung 29 nicht mit der Lage des Wendepunktes in

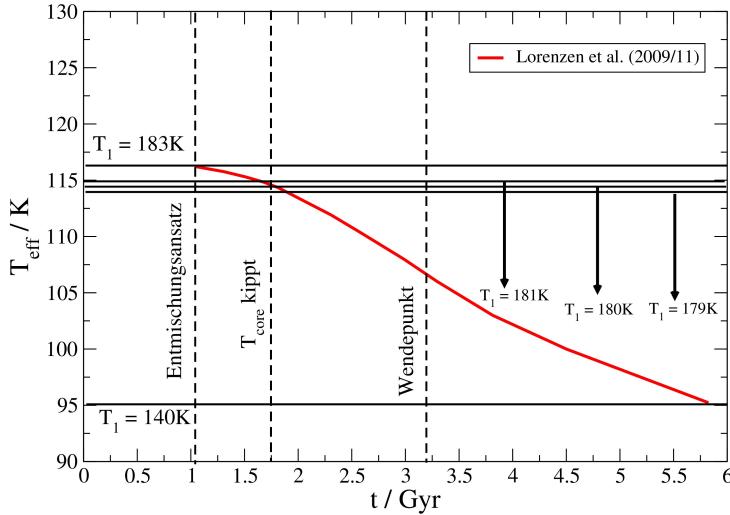


Abbildung 30: Verlauf der inhomogenen Verlängerung der Kühlungskurve für die Originaldaten aus [109] (auch rote Kurve in Abbildung 25). Nachdem die Abkühlung anfangs flach verläuft, tritt sie in einen Bereich steileren Anstiegs ein. Ein Wendepunkt markiert die Änderung der Krümmung der Kurve. Er liegt bei etwa 3.25 Gyr. Die waagerechten Linen, die mit 179 K, 180 K, 181 K und 183 K bezeichnet sind, zeigen die Lage der Funktionswerte  $T_{eff}$  für die entsprechenden Profile. Jedem Evolutionsprofil, welches durch seine Außentemperatur  $T_1$  charakterisiert ist, ist eine Effektivtemperatur zugeordnet (Abschnitt 3.1.1). Die Entmischung beginnt bei  $T_1 = 183$  K. Entsprechend Abbildung 29 kippt die Kerntemperatur bei einer Außentemperatur von 180 K. Die Evolutionsprofile vor und nach dem Kippen sind durch die Oberflächentemperaturen 179 K, 181 K gegeben. Dieser "Kipppunkt" und der Wendepunkt haben nichts miteinander zu tun.

Abbildung 30 übereinstimmt und sich trotz veränderter Kernkühlung die Form der Kurve nicht verändert. Dies wurde in Testrechnungen bestätigt, in denen die inhomogene Evolutionsrechnung auch völlig ohne Kernbeitrag durchgeführt wurde. Die dazugehörigen Resultate sind in dieser Arbeit nicht explizit aufgeführt. Hier sei an Abbildung 21 erinnert, welche dies bereits für die homogene Entwicklung zeigte. Als Resultat können wir also festhalten, dass der Kern zu der Beschreibung der Planetenkühlung nur sehr schwach beiträgt, solange wir nur den Wärmeverlust  $T_{ds}$  berücksichtigen. Andere Einflüsse, wie der Zerfall schwerer Elemente ([14], [118], [9]), ist in diesen Modellen noch nicht berücksichtigt.

Anhand der Ergebnisse bezüglich des Wachstums der Heliumschicht auf dem Kern haben wir nun gesehen, wie schnell diese bzgl. des Drucks, des Radius' und der Masse wachsen können. Dies beruht auf der Annahme, dass die Heliumtropfen, welche im Entmischungsgebiet entstehen, auch instantan auf den Planetenkern herunterfallen und sich dort ablagern. Im Folgenden soll dieser Prozess des Herabsinkens genauer betrachtet werden, um die entsprechenden Zeitskalen abschätzen zu können.

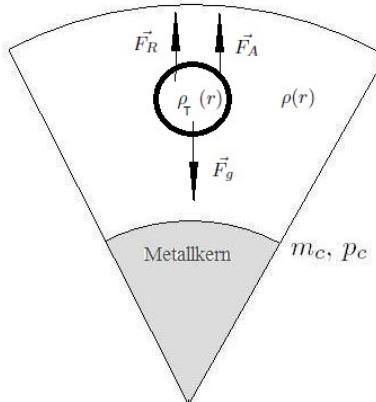


Abbildung 31: Auf einen herabsinkenden Heliumtropfen wirkende Kräfte. Die Gewichtskraft zeigt zum Planetenzentrum, während die Reibungskraft  $\vec{F}_R$  der Fallbewegung entgegen und damit aufwärts wirkt. Auch die Auftriebskraft  $\vec{F}_A$  wirkt aufwärts. Nach hinreichend langer Fallzeit stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein.

## 4.4 Heliumtropfen im Saturn

### 4.4.1 Oberflächenspannung und Sinkgeschwindigkeit

Nachdem sich im Saturn die heliumreiche Phase per Entmischung gebildet hat, könnten Tröpfchen entstehen und in den Planeten hineinfallen. Zur Bildung entsprechender Tropfen sind Kondensationskeime vonnöten, an denen sich das Helium durch Adhäsionskräfte anlagert. Diese können unter anderem durch Dichteschwankungen im Inneren des Saturn entstehen, so auch bei der Bildung von Wassertropfen in der Erdatmosphäre [159]. Des Weiteren können kleine Ansammlungen von Metallen solche Kondensationskeime bilden. Im Folgenden soll die Frage geklärt werden, wie schnell solche Heliumtropfen durch den Saturn, in Richtung dessen Zentrums, fallen. Dazu sehen wir uns Abbildung 4.4.1 an.

Diese zeigt einen Querschnitt durch ein im Allgemeinen homogenes Planetenprofil mit Metallkern und H-He-z - Hülle. Der Tropfen selbst hat die Dichte  $\rho_T(r)$  und wird in unseren Rechnungen als Gebilde aus purem Helium angenommen. Die Dichte der Umgebung ist, wie bereits bei der Beschreibung von Planetenmodellen erwähnt, durch  $\rho(r)$  gegeben. Auf einen Tropfen wirken drei Kräfte, welche aus dem Reibungswiderstand  $\vec{F}_R$ , der Gewichtskraft  $\vec{F}_g$  und der Auftriebskraft  $\vec{F}_A$  resultieren. Wir betrachten nun die Beträge der entsprechenden Vektoren. Wenn ein Tropfen hinreichend lange durch die Atmosphäre fällt, so entsteht zwischen allen drei Kräften ein Gleichgewicht. Dies liegt darin begründet, dass die Reibungswiderstandskraft mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt [100] und diese zusammen mit der Auftriebskraft die Gewichtskraft aufhebt. Wir können somit die folgende Gleichung formulieren:

$$F_g = F_A + F_R \quad . \quad (219)$$

Die Gewichtskraft ist natürlich innerhalb des Planeten, wie man bei der Herleitung der Gravitationsmomente schon gesehen hat, abhängig von der Radiuskoordinate  $r$ . Die Masse des Tropfens wollen wir hier mit  $M_T$  angeben und erhalten mit der radiusabhängigen Fallbeschleunigung  $g(r)$  folgenden Ausdruck:

$$F_g = M_T \cdot g(r) = \frac{GM_T m(r)}{r^2} \quad . \quad (220)$$

---

Den Strömungswiderstand des Tropfens beschreiben wir anhand des Widerstandsbeiwerts  $c_w$  nach [100] wie folgt:

$$F_R = \frac{1}{2} \cdot c_w \rho u^2 A \quad . \quad (221)$$

$u$  ist die Sinkgeschwindigkeit und  $A$  die Querschnittsfläche des Tropfens. Diese ist, da wir den Tropfen als kugelförmig annehmen, gegeben durch die Kreisfläche  $A = \pi R_T^2$ . Der Tropfenradius ist durch  $R_T$  gegeben. Somit lässt sich als Gesamtausdruck des Strömungswiderstandes schreiben:

$$F_R = \frac{1}{2} \cdot c_w \rho u^2 \pi R_T^2 \quad . \quad (222)$$

An dieser Stelle wird folgende Substitution verwendet:

$$\pi R_T^2 = \frac{3}{4R_T} \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3 \quad . \quad (223)$$

Somit entsteht der Ausdruck für das Volumen des Tropfens und wir werden hier ebenfalls die Dichte des Tropfens  $\rho_T$  unterbringen:

$$A = \pi R_T^2 = \frac{3M_T}{4R_T} \cdot \frac{1}{\rho_T} \quad . \quad (224)$$

Nun benötigen wir noch einen Ausdruck für die Auftriebskraft. Dies ergibt sich bekanntlich aus der Masse des verdrängten Umgebungsmaterials und es gilt:

$$F_A = \rho(r)g(r)V \quad . \quad (225)$$

Durch die Gleichung für das Tropfenvolumen  $V = \frac{4}{3}\pi R_T^3 = \frac{M_T}{\rho_T}$  wird der Ausdruck für die Auftriebskraft umgeformt und wir erhalten:

$$F_A = \rho(r)g(r)M_T \frac{1}{\rho_T} \quad . \quad (226)$$

Durch Einsetzen der Resultate für  $F_A$ ,  $F_R$  und  $F_g$  in Gleichung 219 entsteht zunächst folgendes Ergebnis:

$$M_T g(r) = \rho(r)g(r)M_T \frac{1}{\rho_T} + \frac{1}{2} \cdot c_w \rho(r)u^2 \frac{3M_T}{4R_T} \frac{1}{\rho_T} \quad . \quad (227)$$

Wir dividieren zunächst durch  $M_T g(r)$  und klammern anschließend auf der rechten Seite den Term  $\frac{\rho(r)}{\rho_T}$  aus und es entsteht:

$$1 = \left[ \frac{3c_w u^2}{8g(r)R_T} + 1 \right] \frac{\rho(r)}{\rho_T} \quad . \quad (228)$$

---

Erneutes Umstellen nach der Sinkgeschwindigkeit  $u$  ergibt ein vorläufiges Endresultat:

$$u = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left[ \frac{\rho_T}{\rho(r)} - 1 \right] \frac{8g(r)R_T}{3c_w}} . \quad (229)$$

Die Geschwindigkeit kann bekanntermaßen durch die zeitliche Änderung der Ortskoordinate angegeben werden. Diese Differenzialgleichung lösen wir nun durch Trennung der Variablen und integrieren auf beiden Seiten wie folgt:

$$\int_0^{t_{fall}} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left( \left[ \frac{\rho_T}{\rho(r)} - 1 \right] \frac{8g(r)R_T}{3c_w} \right)^{-\frac{1}{2}} dr . \quad (230)$$

$t_{fall}$  gibt die Fallzeit eines Tropfens an. Die Integrationsgrenzen  $r_1$  und  $r_2$  beschreiben Anfangs- und Endpunkt der Fallstrecke eines Tropfens. Außerdem können wir aus der Gleichung sehen, wie diese Punkte charakterisiert werden müssen. Ein Heliumtropfen beginnt nämlich dann in den Planeten hineinzusinken, sobald seine Dichte größer ist, als die seiner Umgebung. Außerdem schwebt ein Tropfen, sobald er eine Region erreicht, in der seine Dichte genauso groß ist wie die seiner Umgebung. Werfen wir einen Blick auf den Integranden, wird dieser Sachverhalt klarer. Sehen wir nämlich den Term

$$\sqrt{\frac{\rho_T}{\rho(r)} - 1} \quad (231)$$

an, so nimmt hier der Radikant einen negativen Wert an, wenn die Dichte des Tropfens  $\rho_T$  kleiner wird als die seiner Umgebung. Damit würde das Ergebnis komplex, was für dieses Modell nicht sinnvoll wäre. Um nun die Fallzeit zu berechnen, müssen wir beachten, dass die Größen  $\rho_T$ ,  $R_T$  und  $g$  von der Radiuskoordinate abhängen. Dabei gilt:

$$R(r) = \left[ \frac{3M_T}{4\pi\rho_T} \right]^{\frac{1}{3}} . \quad (232)$$

Die Werte für die Tiefenabhängigkeit der Dichte des Tropfens werden für eine analytische Handhabung, zunächst anhand des einfachen Modells des idealen Gases, bestimmt. Wir wählen die Masse als freien Parameter, welcher während der gesamten Fallzeit konstant bleiben soll. Der Effekt des Wachstums des Tropfens durch Aufsammeln von Helium aus der Umgebung ist in meinem Modell noch nicht enthalten. Damit ein Tropfen in den Planeten hineinregnen kann, muss er sich zunächst bilden. Im Folgenden soll auch dieser Prozess beschrieben werden.

Das Wachstum beginnt durch Kondensation. Damit dies geschehen kann, müssen zunächst sogenannte Kondensationskeime vorhanden sein, an denen sich Helium durch Adhäsion anlagern kann. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen können dies Aerosole, wie sie auch in der Erdatmosphäre zu finden sind (z.B. Rußpartikel und Teilchen, die durch Vulkanausbrüche in die Atmosphäre geschleudert wurden), zum anderen genügen aber auch

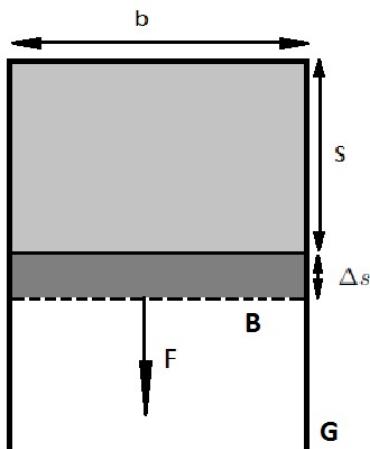


Abbildung 32: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung und Veranschaulichung der Oberflächenspannung. Zwischen dem festen Gestänge  $G$  und dem beweglichen Bügel  $B$  hat sich ein Flüssigkeitsfilm gebildet. Dieser Bügel wird mit einer Kraft  $F$  um eine Strecke  $\Delta s$  nach unten gezogen. Dazu ist die Arbeit  $\Delta W$  erforderlich.

kleinskalige Dichteschwankungen [176]. Allerdings können auch in die Atmosphäre eingedrungene und zerfallenen Meteoriten Kondensationskeime liefern. Dies ist auch auf der Erde der Fall. Dieser Effekt wird unter anderem für Radarmessungen in der Atmosphärenphysik genutzt ( [3] und darin enthaltene Referenzen). Im nächsten Kapitel werden wir noch genauer auf die Kondensation und den Wachstumsprozess von Tropfen eingehen. Die folgenden Berechnungen gehen zunächst davon aus, dass sich im Saturn im Entmischungsgebiet solche Kondensationskeime bereits befinden. Um jedoch in den Planeten hineinfallen zu können, muss ein Tropfen eine entsprechende kritische Masse  $M_k$  und den zugehörigen kritischen Radius  $R_k$  erreichen. An dieser Stelle soll eine Herleitung präsentiert werden, welche eine Gleichung liefert, um beide kritischen Größen zu bestimmen. Zu Beginn dieser Herleitung möchte ich zunächst auf die Oberflächenspannung  $\sigma$  eines beliebigen Materials eingehen. Zunächst wollen wir auf die Oberflächenenergie einer Flüssigkeit eingehen. Dazu begeben wir uns auf die molekulare/atomare Ebene. Um ein Molekül/Atom aus der Oberfläche einer Flüssigkeit herauszulösen, benötigt man eine gewisse Energie, die Oberflächenenergie  $E_O$ . Betrachtet man diese für nur einen Tropfen, bezieht sie sich auf dessen Oberfläche  $A$ . Somit gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen der Fläche und der Oberflächenenergie, wobei der Proportionalitätsfaktor die Oberflächenspannung oder auch flächenspezifische Oberflächenenergie ist.

$$E_O = \sigma A \quad . \quad (233)$$

Somit benötigt man Energie bzw. muss Arbeit aufwenden, um die Oberfläche in beliebiger Form zu ändern. Zur Veranschaulichung zeige ich hier einen möglichen, experimentellen Aufbau zur Bestimmung der Oberflächenspannung in Abbildung 4.4.1.

Verschiebt man den beweglichen Bügel um eine Strecke  $\Delta s$  mit einer Kraft  $F$ , so wird eine Arbeit von  $\Delta W = \Delta s F$  aufgewendet. Diese wird der Oberflächenenergie zugeführt. Aus Gleichung 233 ist aber ersichtlich, dass sich die Änderung der Oberflächenenergie auch

---

über die Änderung der Fläche ausdrücken lässt und wir diese schreiben können als:

$$\Delta E_O = \sigma \Delta A \quad . \quad (234)$$

Die Oberfläche des Films verändert sich bei einer Verschiebung um  $\Delta s$  um  $2b\Delta s$ . Die 2 taucht deshalb auf, weil der Flüssigkeitsfilm eine Vorder- und eine Rückseite hat und somit nicht nur zweidimensional ist, sondern als dünner Quader verstanden werden kann. Durch Gleichsetzen der Oberflächenenergieänderung und der aufgewendeten Arbeit gilt

$$\Delta E_O = \Delta W \quad , \quad (235)$$

und damit

$$\sigma \Delta A = \sigma \cdot 2b\Delta s = F \Delta s \quad . \quad (236)$$

Die aufgewendete Kraft beträgt also  $F = 2b\sigma$  und die Oberflächenspannung könnte nun per Kraftmesser bestimmt werden. Ein weiterer wichtiger Aspekt den schon Gleichung 233 zeigt, ist, dass jede Oberfläche einen möglichst kleinen Wert annehmen möchte, um seine Energie zu minimieren. Für einen Tropfen bedeutet dies Folgendes: Bei gegebener Dichte ist die Kugel derjenige Körper mit der geringsten Oberfläche. Daher nehmen Tropfen immer kugelförmige Gestalten an und werden in dieser Arbeit auch als Kugeln behandelt, welche sich nicht verformen sollen. Wir wollen nun versuchen, den Radius  $R_T$  eines Tropfens durch seine Oberflächenspannung auszudrücken. Beschreiben wir einen Tropfen aus lediglich einem Material, so wird dieser statt zwei Flächen wie beim Flüssigkeitsfilm im experimentellen Aufbau nur durch eine begrenzt. Dazu betrachten wir zunächst ein infinitesimales Flächenelement  $dA = dx dy$  auf der gekrümmten Außenhaut des Tropfens in Abbildung 33. Der Flächennormalenvektor ist mit  $\vec{dA}$  dargestellt.

Dieses Element ist in Abbildung 33 auf der rechten Seite anhand der Draufsicht dargestellt. Auf jede Kante des Flächenelements  $dx$  bzw.  $dy$  wirkt eine Kraft mit dem Betrag  $dF^{(x)}$  bzw.  $dF^{(y)}$ . Aus den vorherigen Betrachtungen haben wir erkannt, dass die Beträge der Kräfte auf eine der  $dx$ -Kanten gegeben ist durch  $\sigma dy$  auf eine der  $dy$ -Kanten durch  $\sigma dx$ . In Abbildung 33 ist das Beispiel für die  $dy$ -Kanten gezeigt. Angegeben sind die beiden Kraftvektoren  $dF_1^{(y)}$  und  $dF_2^{(y)}$ . Dabei greift die erste Kraft an der linken und die zweite Kraft an der rechten Seite des Flächenelements an.

Das Bogenelement beträgt gerade  $dx$  und kann durch den Winkel  $d\phi$  und den Radius ausgedrückt werden. Es gilt  $dx = rd\phi$ . Die  $\alpha$  in Abbildung 33 zeigen die Scheitelwinkel an und sollen zum besseren Verständnis der Geometrie beitragen. Da die Kraft tangential wirkt, steht sie senkrecht auf dem Radius. Dieser rechte Winkel ist ebenfalls dargestellt. Somit können wir feststellen, dass aufgrund der Geometrie zwischen beiden Kraftvektoren  $dF_1^{(y)}$  und  $dF_2^{(y)}$  der Winkel  $d\phi$  liegt. Nun soll uns die senkrechte Komponente der Kraft  $dF_2^{(y)}$  interessieren, indem sie auf die Flächennormale projiziert wird und es gilt:

$$dF^{(y)_N} = 2dF_2^{(y)} \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \quad . \quad (237)$$

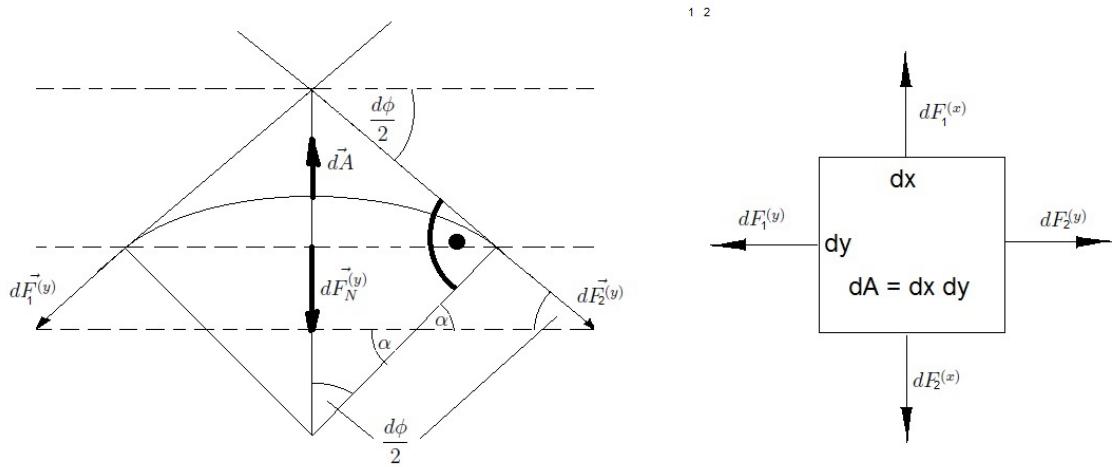


Abbildung 33: Infinitesimal kleines Flächenelement  $dA = dx dy$  auf der Außenhaut eines Tropfens, bestehend aus nur einem Material. Zu beachten sind die Lagen der entsprechenden Winkel. Die Krümmung des Flächenelementes ist zum besseren Verständnis übertrieben dargestellt. Tangential greift an beiden Seiten der Länge  $dx$  und an beiden Seiten der Länge  $dy$  eine Kraft  $\vec{F}$  an. Die Normalenkraft, welche zur Mitte wirkt, ist durch  $\vec{F}_N$  dargestellt.

Für infinitesimale Größen können wir im Grenzfall sehr kleiner  $d\phi$  auch  $\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \leftarrow \frac{d\phi}{2}$  schreiben. Die 2 in der vorherigen Gleichung entsteht dadurch, dass beide Kräfte  $dF_1^{(y)}$  und  $dF_2^{(y)}$  eine Normalenkomponente haben und beide gleich groß sind. Zusammenfassend gilt für die Kraftnormalen der  $dy$ -Kante:

$$dF_N^{(y)} = 2dF_2^{(y)} \frac{d\phi}{2} \quad , \quad (238)$$

und somit

$$dF_N^{(y)} = dF_2^{(y)} d\phi \quad . \quad (239)$$

Nun drücken wir die Kraftbeträge wieder durch die Oberflächenspannung aus und erhalten:

$$dF_N^{(y)} = \sigma dy d\phi \quad . \quad (240)$$

Greifen wir nun außerdem nochmal auf die Beziehung zwischen Winkel, Bogenelement und Tropfenradius zurück, so entsteht folgender Ausdruck:

$$dF_N^{(y)} = \sigma dy \frac{dx}{R_T} \quad . \quad (241)$$

---

Diese Kraftnormale für die  $dy$ -Kante existiert, wie in Abbildung 33 auf der rechten Seite gezeigt, ebenso für die  $dx$ -Seiten, so dass sich die Gesamtkraftnormale  $dF_N^{ges}$  durch die entsprechende Addition aller vier Kraftnormalen ergibt:

$$dF_N^{ges} = \sigma \left[ dx \frac{dy}{R_T} + dy \frac{dx}{R_T} \right] = 2 \frac{\sigma}{R_T} dx dy . \quad (242)$$

Wir haben den Betrag des infinitesimalen Flächenelements bereits mit  $dA = dx dy$  definiert. Da außerdem Druck als der Quotient von Kraft und Fläche definiert ist, gilt Folgendes:

$$\Delta p = 2 \frac{\frac{\sigma}{R_T} dx dy}{dA} = 2 \frac{\frac{\sigma}{R_T} dx dy}{dx dy} = 2 \frac{\sigma}{R_T} . \quad (243)$$

Dieser Term für  $\Delta p$  beschreibt nun den Druckunterschied zwischen dem Innern und der Umgebung des Tropfens. Dieser wird als Kohäsionsdruck bezeichnet. Der Absolutdruck ist somit im Innern größer als außen. Dies sorgt dafür, dass der Tropfen aufgrund seiner Oberflächenspannung nicht in sich zusammenfällt. Sein Radius beträgt

$$R_T = \frac{2\sigma}{\Delta p} . \quad (244)$$

Um das reine Helium im Tropfen zu beschreiben, wird für ein einfaches Modell die Gleichung des Van-der-Waals-Gases verwendet. Die entsprechende thermische Zustandsgleichung ist:

$$p = \frac{RT}{\frac{V}{n} - b} - \frac{a}{\left(\frac{V}{n}\right)^2} . \quad (245)$$

Umgeschrieben in die Massendichte erhält man den folgenden Ausdruck:

$$p = \frac{RT}{\frac{M}{\rho_T} - b} - \frac{a}{\left(\frac{M}{\rho_T}\right)^2} . \quad (246)$$

In dieser Gleichung beschreibt  $M$  die molare Masse des Heliums und  $T$  die Umgebungstemperatur, die der Tropfen nach hinreichend langer Zeit annehmen soll, und  $p$  den Umgebungsdruck. Der vorher beschriebene Kohäsionsdruck ist in dieser Gleichung bereits aufgeführt und eine Funktion der Dichte.  $b$  ist das Eigenvolumen der Heliumteilchen.  $a$  ist ein Maß für den Kohäsionsdruck. In dieser Arbeit wird die Beschreibung des Van-der-Waals-Gases gewählt, da der zweite Summand  $\frac{a}{\left(\frac{M}{\rho_T}\right)^2}$  den Kohäsionsdruck beschreibt und eine einfache, analytische Herangehensweise liefert.

$$\Delta p = \frac{a}{\left(\frac{M}{\rho_T}\right)^2} = a \left(\frac{\rho_T}{M}\right)^2 . \quad (247)$$

---

Die Parameter  $a$  und  $b$  für Helium sind aus [4] entnommen und betragen  $a = 3.45 \cdot 10^{-3} \frac{Pam^6}{mol^2}$  und  $b = 0.0237 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$ . Diese Parameter beschreiben lediglich ein Heliumgas und sind durch die kritischen Größen bestimmt, welche den Phasenübergang zwischen gasförmigem und flüssigem Helium bestimmen. Das Van-der-Waals-Modell ist somit eine gute Näherung zur Beschreibung von Heliumtropfen in den obersten Schichten des Saturn. Allerdings wird diese Beschreibung schlechter, je weiter wir in den Planeten hineingehen, da hier die Bedingungen immer extremer werden und die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen nicht mehr so einfach beschrieben werden können. Jedoch nutzen wir die Van-der-Waals-Gleichung, da sie einen einfachen, analytischen Term für den Kohäsionsdruck liefert. Ein beliebiger Körper erfährt eine Auftriebskraft, die so groß ist wie die Gewichtskraft des verdrängten Materials seiner Umgebung. Ist seine Dichte also kleiner als die der Umgebung, so steigt er auf, ist sie größer, sinkt er und bei gleichen Dichten schwebt er. Der letzte Fall definiert den kritischen Radius  $R_k$  und die kritische Masse  $M_k$ . Daher setzen wir in die Beziehung zwischen Kohäsionsdruck und Radius für die Dichte  $\rho_T$  des Tropfens die Umgebungsdichte  $\rho$  ein und erhalten den kritischen Radius eines Tropfens, von

$$R_k = \frac{2\sigma}{\frac{a}{\left(\frac{M}{\rho}\right)^2}} = \frac{2\sigma}{a} \left(\frac{M}{\rho}\right)^2 . \quad (248)$$

Über die Dichte des Tropfens lässt sich die kritische Masse  $M_k$  ebenso einfach schlussfolgern und berechnen.

$$M_k = \rho \frac{4}{3} \pi R_k^3 . \quad (249)$$

Für die Oberflächenspannung verwenden wir einen Wert von  $\sigma = 0.37 \frac{erg}{cm^2} = 3.7 \cdot 10^{-4} \frac{J}{m^2}$  [11]. Dies wird zunächst als Wert verwendet, um eine erste Abschätzung für diese Rechnungen zu erhalten. Zur Berechnung der Fallzeit eines Tropfens nutzen wir ein Planetenprofil, bei dem die Wasserstoff-Helium-Entmischung gerade einsetzt und lassen den Tropfen von der Oberfläche des Planeten ( $\rho = 1.65 \cdot 10^{-4} \frac{g}{cm^3}$ ) bis auf den Kern fallen, auf dem dann die He-Schicht zu wachsen beginnt. Die entsprechenden Daten des Profils sind in Tabelle 2 angegeben. Die Entmischung soll gerade beginnen und somit hat die obere Atmosphäre den solaren Heliumgehalt von 0.275 bezüglich der Masse. Der Tropfen enthält laut Abbildung 27 bis zu 93 Prozent Helium. Im Folgenden wollen wir annehmen, dass der Tropfen aus reinem Helium besteht. Für die folgenden Untersuchungen stellt dies eine numerische Vereinfachung dar. Aufgrund der sehr hohen Heliumkonzentration des Tropfens, ist dies gerechtfertigt. Zu dieser Zeit handelt es sich noch um ein Zwei-Schichtenmodell und es existiert somit auch noch keine Schichtengrenze.

Wir berechnen zunächst den kritischen Radius eines Tropfens, der sich an der Oberfläche des Planeten bildet, und erhalten einen Wert von

$$R_k = \frac{2 \cdot 3.7 \cdot 10^{-4} \frac{J}{m^2}}{3.45 \cdot 10^{-3} \frac{Pam^6}{mol^2}} \cdot \left( \frac{4 \frac{g}{mol}}{1.64 \cdot 10^{-4} \frac{g}{cm^3}} \right) = 1.26 \cdot 10^{-4} m . \quad (250)$$

| $T_1/K$ | $m_{core}/M_E$ | $r_{core}/R_E$ | $R_{Saturn}/R_E$ | $\rho(R_{Saturn})/ \frac{g}{cm^3}$ |
|---------|----------------|----------------|------------------|------------------------------------|
| 183     | 14.54          | 2.4136         | 9.5862           | $1.65 \cdot 10^{-04}$              |

Tabelle 3: Parameter zur Beschreibung der Tropfenfallzeit. Bei diesem Profil der Außentemperatur von 183 K setzt die Entmischung gerade ein. In dieser Arbeit wird angenommen, dass sich der Tropfen an der Oberfläche des Planeten bildet und dann in den Planeten hineinfällt.

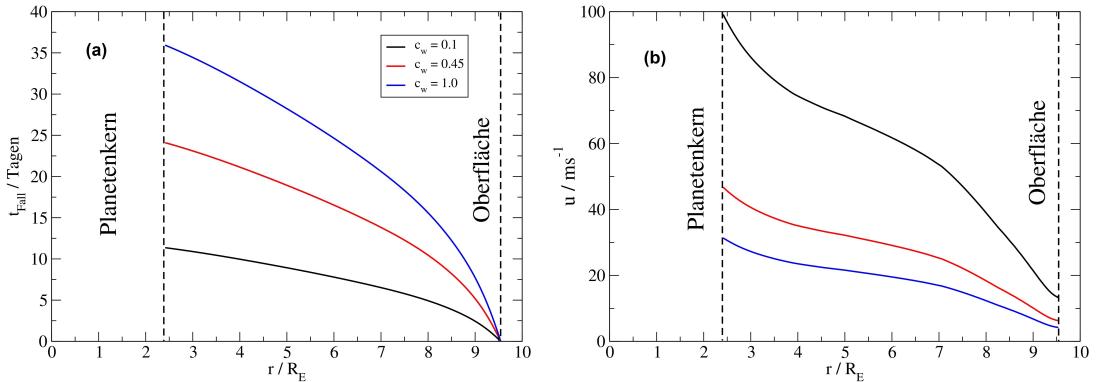


Abbildung 34: Fallverhalten eines Heliumtropfens im Saturn. (a):  $t_{Fall}(r)$  (b):  $u(r)$ . Nachdem sich ein Tropfen an der Oberfläche gebildet hat, fällt er von dort bis auf den planetaren Kern. Die Rechnungen wurden für verschiedene Reibungswiderstandskoeffizienten durchgeführt. Je größer der Widerstand, desto größer der  $c_w$ -Wert.

Da der Entstehungsort nun an der Oberfläche des Saturn angenommen wurde, kommt die dortige Temperatur von 183 K, der  $T = 0$ -Bedingung für die Oberflächenspannung aus [11], am nächsten. Untersuchungen von Regentropfen in der Erdatmosphäre zeigen, dass die Wassertropfen Durchmesser von einigen Mikrometern bis zu einigen Millimetern erreichen können ([21], [117] und dortige Referenzen).

Um eine Vorstellung von der Fallzeit eines Tropfens zu bekommen, wird mithilfe des kritischen Radius', die zugehörige kritische Masse von  $M_k = 1.37 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$  bestimmt. Wir nehmen also an, dass die Tropfenmasse für die gesamte Fallzeit erhalten bleibt und sich lediglich der Radius aufgrund der Umgebungsbedingungen ändert. Durch Anwendung von Gleichung 230 erhalten wir die Fallzeit in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg des Tropfens. Die Ergebnisse sind in Abbildung 34 gezeigt.

Die Fallstrecke beginnt an der Planetenoberfläche und reicht bis auf den Planetenkern. In der Literatur ([46], [100]) werden für eine Kugel unterschiedliche Widerstandsbeiwerte  $c_w$  angegeben. Außerdem hängt dieser Wert auch von der Viskosität des Umgebungsmaterials ab. Daher habe ich diesen Einfluss für die Werte von 0.1, 0.45 und 1 untersucht. Je größer dieser Wert ist, desto stärker ist die Widerstandskraft (Gleichung 222). Diese Gesamtfallzeiten liegen zwischen 10 und 40 Tagen. Diese Zeitwerte sind durchaus gerechtfertigt, da der Weg von der Oberfläche zum Kern mehrere Erdradien beträgt und das Umgebungsmaterial viel dichter als das der Erdatmosphäre ist. Ebenfalls kann man anhand von Gleichung 229

---

die Momentangeschwindigkeit in Abhängigkeit des zurückgelegten Weges ansehen. Dies ist ebenfalls in Abbildung 34 dargestellt. Wie erwartet, zeigt sich, dass bei höhrenen  $c_w$ -Werten, also stärkeren Widerstandskräften, die Geschwindigkeit der Heliumtropfen geringer ist, als bei Kleineren. Eine weitere, offensichtliche Eigenschaft der Ergebnisse ist, dass die Fallzeit umso länger ist, je größere Werte die Momentangeschwindigkeiten  $u(r)$  annehmen. Diese reichen je nach Widerstandskoeffizient von 30 bis  $100 \text{ ms}^{-1}$ .

Die Genauigkeit muss in zukünftigen Rechnungen weiter verbessert werden, da sowohl die verwendete EOS durch genauere Daten ersetzt werden und die Randparameter wie die Oberflächenspannung genauer bekannt sein sollten. Allerdings konnte anhand dieser Rechnungen eine Abschätzung für die Fallzeiten von Tropfen gefunden werden. Stevenson et al. (1977) [167] gaben für typische Konvektionsgeschwindigkeit in Jupiter und Saturn einen Wert von  $10 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Dieser Wert ist im Vergleich, der in dieser Arbeit berechneten Fallgeschwindigkeiten von bis zu  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sehr klein. Daher können wir aufgrund der hier erhaltenen Ergebnisse annehmen, dass das Helium im Saturn in den Planeten hineinsinken kann, ohne signifikant durch Konvektion gehemmt zu werden.

#### 4.4.2 Bildung und Wachstum von Tropfen

In diesem Abschnitt wird eine Herleitung präsentiert, welche das Wachstum eines Heliumtropfens bezüglich seiner Masse und seines Radius' beschreibt. Die Herleitung ist einem Vorlesungsskript des Instituts für Atmosphärenforschung der University of Dublin entnommen und wird hier nachempfunden [29]. Ein Tropfen kann auf zwei Weisen wachsen. Dies sind das Wachstum durch Kondensation und durch Kollision mit anderen Tropfen. Zunächst soll die erste Möglichkeit genauer untersucht und beschrieben werden.

#### 4.4.3 Tropfenwachstum durch Kondensation

In der Natur gibt es zwei Formen der Kondensation, die homogene und die heterogene ([29], [117], [21]). Im ersten Fall handelt es sich um ein System eines übersättigten Gemisches zweier Substanzen. Im Falle dieser Arbeit handelt es sich um ein Wasserstoff-Heliumgemisch mit  $y = 0.93$ . Die homogene Kondensation setzt ein reines Gemisch voraus, welches keinerlei Störungen wie Schmutzpartikel, oder begrenzende Oberflächen besitzt. Tropfen bilden sich, bei dieser Form der Kondensation, in dem sich zunächst kleine "Embryos" formen. Diese dienen dann als Kondensationskeime. Die heterogene Kondensation beschreibt dann folglich ein System, welches Verunreinigungen enthält oder durch Dichteschwankungen gestört wird. In der Erdatmosphäre können dies Rußpartikel oder Staubteilchen von Vulkanausbrüchen sein. Auch Meteorstaub kann solche Kondensationskeime liefern. Ungeachtet einer homogenen oder heterogenen Kondensation wollen wir in dieser Arbeit annehmen, dass das Tropfenwachstum bereits eingesetzt hat. Dieses wollen wir nun genauer untersuchen. Auch in dieser Betrachtung wird der Tropfen als kugelförmig angenommen. Daher handelt es sich, bei jedem einzelnen Tropfen, um ein radialsymmetrisches System, welches durch die Beträge der Radiusvektoren beschrieben werden kann. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 35 dargestellt.

In [29] wird ein System aus Wassertropfen und Wasserdampf angenommen. In dieser Arbeit entspricht das Wasserdampf-Luft-Gemisch dem übersättigten Gemisch aus Wasserstoff und Helium von  $y = 0.93$  (Abbildung 27). Die Abstandsordinate zur Beschreibung des

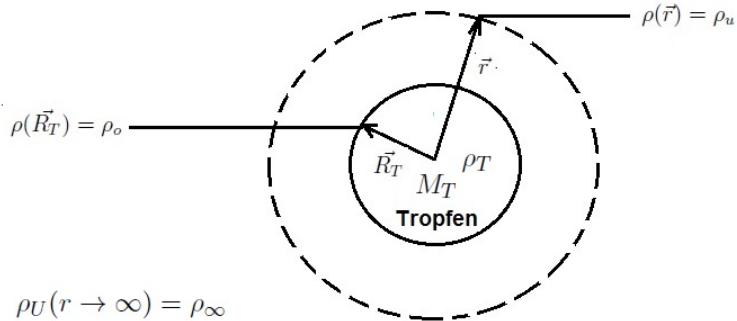


Abbildung 35: Koordinaten zur Beschreibung des Tropfenwachstums.  $R_T$  ist der Radius des Tropfens in Abhängigkeit von der Zeit. Der Vektor  $\vec{r}$  beschreibt den Außenraum des Tropfens. Der gestrichelte Kreis gibt eine gedachte, beliebige Kugelfläche an, welche den Tropfen enthält und denselben Mittelpunkt, wie die Tropfenkugel, besitzt. Die Massendichten  $\rho_o$  (Oberfläche) und  $\rho_U$  (Umgebung) liegen an den jeweiligen Punkten vor. Die Masse des Tropfens ist mit  $M_T$  bezeichnet. In einem hinreichend großen Abstand vom Tropfen ( $r \rightarrow \infty$ ) liegt die Massendichte  $\rho_\infty$  vor.

Außenraumes ist durch  $r$  gegeben und der Tropfenradius durch  $R_T$ . Der Tropfen hat die Dichte  $\rho_T$ . Aufgrund der eigenen Oberflächenspannung nimmt der Tropfen die Kugelform an (Gleichung 233 und deren Erläuterung). Durch die Adhäsionskräfte können sich immer mehr Heliumatome an der Oberfläche des Tropfens anlagern. Auf diese Weise vergrößert sich die Masse des Tropfens. Der Außenraum eines Tropfens ist nicht zwangsläufig homogen. Nur in hinreichend weiter Entfernung vom Tropfen ist die Homogenität durch  $\rho_\infty$  wieder gegeben. Der Kondensationsprozess wird durch einen Massenstrom auf die Oberfläche des Tropfens betrachtet. Dabei handelt es sich um einen Massenfluss durch eine beliebige, geschlossene Kugelfläche um den Tropfen. Die mathematische Beschreibung liefert das zweite Fick'sche Gesetz:

$$\frac{\partial \rho_U(r)}{\partial t} = D \Delta \rho_U(r) \quad . \quad (251)$$

$D$  bezeichnet hier die Diffusionskonstante. Transformieren wir den Laplace-Operator nun in Kugelkoordinaten und dividieren durch  $D$ , so erhalten wir:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \rho_U(r)}{\partial r} \right) = 0 \quad . \quad (252)$$

In dieser Gleichung haben wir die Steady-State-Näherung verwendet. Dies bedeutet, dass die gesamte Dichteverteilung  $\rho_U$  nur noch von der Radiuskoordinate und nicht von der Zeit abhängt. Somit gilt die Näherung  $\frac{d\rho_U}{dt} = 0$ . Nun lösen wir diese Differenzialgleichung durch zweimaliges Integrieren. Als Resultat entsteht folgende Gleichung:

$$\rho_U(r) = C_1 - \frac{C_2}{r} \quad . \quad (253)$$

---

Auf die Umbenennung von  $r$  nach  $r'$  während des Integrationsvorgangs wurde verzichtet. Diese hier auftretenden Integrationskonstanten müssen durch entsprechende Randbedingungen bestimmt werden. Diese lauten wie folgt.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_U(r) = \rho_\infty \quad , \quad \lim_{r \rightarrow R_T} \rho_U(r) = \rho_U(R_T) = \rho_O \quad . \quad (254)$$

Für die Konstanten erhalten wir  $C_1 = \rho_\infty$  und  $C_2 = R_T(\rho_O - \rho_\infty)$ . Als Gesamtlösung erhalten wir somit für die Dichteverteilung der Umgebung:

$$\rho_U(r) = \rho_\infty + \frac{R_T}{r}(\rho_\infty - \rho_O) \quad . \quad (255)$$

Nun schauen wir uns die Wachstumsgeschwindigkeit des Tropfens bezüglich seiner Masse an. Dieser Massenstrom  $J$  auf die Oberfläche des Tropfens ist durch das erste Fick'sche Gesetz gegeben:

$$J = -D \left( \frac{\partial \rho_U(r)}{\partial r} \right)_{r=R_T} = D \frac{\rho_\infty - \rho_O}{R_T} \quad . \quad (256)$$

Da der Diffusionskoeffizient die Einheit  $\frac{m^2}{s}$  hat, handelt es sich bei diesem Fluss um eine flächenspezifische Größe. Multipliziert man sie mit der Kugeloberfläche  $4\pi R_T^2$ , erhält man somit die absolute, zeitliche Rate der Massenzunahme und es gilt:

$$\frac{dM_T}{dt} = 4\pi R_T^2 D \left( \frac{\partial \rho_U(r)}{\partial r} \right)_{r=R_T} \quad . \quad (257)$$

$M_T$  ist die absolute Masse des Tropfens. Anhand der Auswertung der radialen Ableitung der Dichte und dem Hineinziehen der molaren Masse erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\frac{dM_T}{dt} = 4\pi R_T D(\rho_\infty - \rho_O) \quad . \quad (258)$$

Wir können in dieser Gleichung den Radius über das Volumen der Kugel umschreiben und erhalten somit

$$R_T = \left[ \frac{3M_T}{4\pi\rho_T} \right]^{\frac{1}{3}} \quad . \quad (259)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Gleichung für die Massenwachstumsrate  $\frac{dM_T}{dt}$  (Gleichung 262) ein und es ergibt sich:

$$\frac{dM_T}{dt} = 4\pi D \left[ \frac{3M_T}{4\pi\rho_T} \right]^{\frac{1}{3}} (\rho_\infty - \rho_O) \quad . \quad (260)$$

---

Diese Gleichung lösen wir durch Trennung der Variablen und erhalten als Ergebnis diese Gleichung:

$$\int_0^{M_T} M_T'^{-\frac{1}{3}} dM_T' = K \times \frac{\rho_\infty - \rho_o}{\rho_T^{\frac{1}{3}}} D \int_0^t dt' \quad . \quad (261)$$

Die Lösung der Integralgleichung liefert:

$$M_T(t) = K \times \sqrt{\frac{D^3(\rho_\infty - \rho_o)^3}{\rho_T}} t^{\frac{3}{2}} \quad . \quad (262)$$

Alle auftretenden Konstanten wurden in  $K = 11.848$  zusammengefasst. Diese Gleichung zeigt, was uns das erste Fick'sche Gesetz bereits vorgibt. Es kann sich nur solange neues Helium an der Oberfläche des Tropfens anlagern, bis die Heliumdichten an der Oberfläche und der Umgebung dieselben sind. Sobald sich das Vorzeichen umkehrt, wird der Radikant negativ und wir erhalten komplexe Ergebnisse. In diesem Fall würde sich der Massenstrom umkehren und der Tropfen wieder auflösen. Betrachtungen der Zeitspanne für Heliumtropfen eines solchen Kondensationsprozesses sind in dieser Arbeit noch nicht untersucht worden, liefern aber Stoff für zukünftige Berechnungen. Im nächsten Schritt wollen wir einen Blick auf das Verhalten der Tropfenwachstums bzgl. des Radius'  $R_T$  ansehen. Dazu betrachten wir noch einmal Gleichung 262 und ersetzen die Tropfmasse durch die Dichte und das Volumen des Tropfens und erhalten:

$$R_T \frac{\partial R_T}{\partial t} = \frac{D}{\rho_T} (\rho_\infty - \rho_o) \quad . \quad (263)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die Wachstumsrate des Tropfens bezüglich seines Radius', umgekehrt proportional zum selbigen ist. Das bedeutet, dass die Wachstumsrate, bei zeitlich konstantem Dichtefeld um den Tropfen, um so langsamer wird, je größer der Tropfen ist. Demnach wachsen kleine Tropfen schneller als große.

Eine weitere Form des Tropfenwachstums ist die, des Aufsammelns anderer Tropfen während des Fallvorganges. Auch diese Ableitung stammt aus [29] und soll hier nachvollzogen werden. Es wird zunächst ein Szenario angenommen, in dem ein größerer Tropfen einen kleineren aufsammelt. Anhand dessen soll der Mechanismus mithilfe von Abbildung 4.4.3 veranschaulicht werden.

Trifft ein großer Tropfen (rot) auf einen kleineren (blau), so kann der kleinere den größeren entweder mit seiner gesamten Fläche treffen oder, den Stromlinien um den großen tropfen folgen und ihn verfehlten. Anhand eines Flächenverhältnisses wird eine Kollisionseffizienz  $E$  definiert:

$$E = \frac{\pi y^2}{\pi(r_1 + r_2)^2} = \frac{y^2}{(r_1 + r_2)^2} \quad . \quad (264)$$

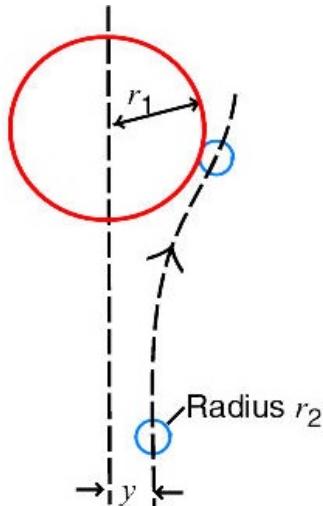


Abbildung 36: Aufsammungsmechanismus eines kleineren (blau) durch einen größeren Tropfen (rot) [29]. Der kleinere Tropfen kann im Extremfall den Stromlinien um den großen Tropfen folgen und ihn verfehlen. Eine andere Möglichkeit ist, dass er vom großen Tropfen vollständig getroffen wird. Der Parameter  $y$  ist somit ein Maß für den Wirkungsquerschnitt.

Beide Tropfen können nun zwar kollidieren, müssen sich aber nicht zwangsläufig vereinigen. Bei Wassertropfen in der Erdatmosphäre könnte sich ein Luftpolster zwischen beiden entstehen und die Tropfen aneinander abprallen. Dies hängt mit dem Winkel zusammen, unter welchem beide Tropfen aufeinandertreffen. Um diesen Effekt zu beschreiben, definiert man zusätzlich eine Vereinigungswahrscheinlichkeit  $E'$ . Das Produkt  $E_c = EE'$  bezeichnen wir als Aufsammelwahrscheinlichkeit oder Aufsammelleffizienz (coalescence efficiency). Nun wird angenommen, dass ein großer Tropfen mit dem Radius  $r_1$  und einer Fallgeschwindigkeit  $v_1$  durch ein Feld aus homogen verteilten kleineren Tropfen  $(r_2, v_2)$  fällt. Diese Annahme wird auch als "durchgehendes Aufsammelmodell" bezeichnet. Natürlich muss für die Relativgeschwindigkeit  $v_1 > v_2$  gelten, damit beide Tropfen sich überhaupt begegnen. Der Massenzuwachs eines Tropfens mit dem Radius  $r_1$  kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dM_T}{dt} = \pi r_1^2 (v_1 - v_2) \rho_\infty E_c \quad . \quad (265)$$

Die Größe  $\rho_U$  entspricht, wie bereits bei der Kondensation, der Umgebungsdichte des Heliums (Partialdichte) um den Tropfen (In der Erdatmosphäre handelt es sich um die Wasserdampfdichte). Daher kann diese Größe im Saturn mit der Heliumreichen Phase und deren partieller Heliumdichte identifiziert werden. Der Heliumtropfen würde nämlich aus reinem Helium bestehen, wie auch ein Wassertropfen aus reinem Wasser besteht. Lufteinschlüsse oder Einschlüsse anderer Materialien werden in diesem Modell nicht berücksichtigt. Durch erneute Substitution der Tropfenmasse anhand von  $M_T = \rho_T \frac{4\pi r_1^3}{3}$  erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{(v_1 - v_2) \rho_U E_c}{4\rho_T} \quad . \quad (266)$$

Für den Fall, dass  $v_1 \gg v_2$  gilt, lässt sich diese Gleichung nähern und wir können schrei-

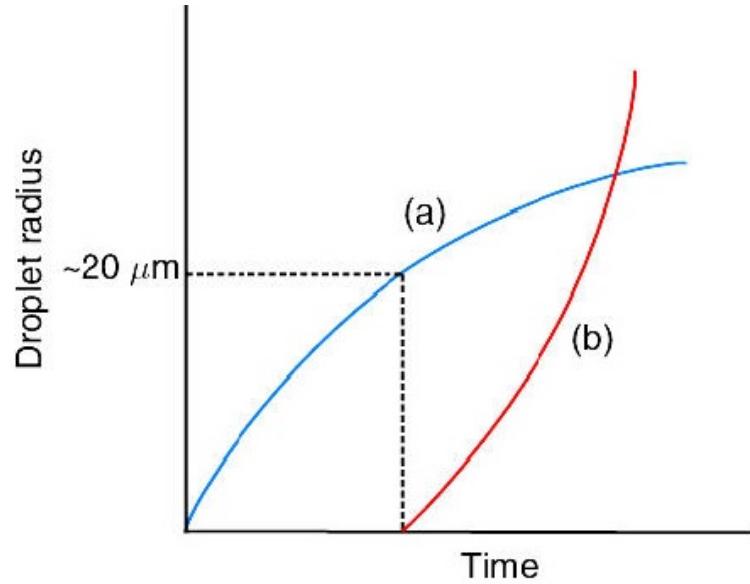


Abbildung 37: Wachstumsvergleich eines Wassertropfens in der Erdatmosphäre durch Kondensation (blau) und Aufsammlung (rot). Zum Beginn des Wachstums spielt die Kondensation eine wichtige Rolle. Erreicht der Tropfen einen kritischen Radius, so wächst er schneller durch Aufsammlung. Für die Erdatmosphäre ist ein typischer Wert  $20\mu\text{m}$

ben:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{v_1 \rho_U E_c}{4\rho_T} . \quad (267)$$

Da wir wissen, dass sowohl die Fallgeschwindigkeit  $v_1$  und auch die Aufsammlungseffizienz mit dem Radius  $r_1$  oder auch wieder  $R_T$  wachsen, können wir schlussfolgern, dass das Tropfenwachstum anhand des Aufsammelns kleinerer Tropfen ein stetig beschleunigter Prozess ist. Abbildung 37 zeigt einen Vergleich der beiden Wachstumsmöglichkeiten für Tropfen speziell für Wassertropfen in der Erdatmosphäre [29].

Dort ist zu sehen, dass zu Beginn des Tropfenwachstums die Kondensation eine wichtige Rolle spielt. Da die Wachstumsrate bzgl. des Radius' mit dem selben abnimmt, wird diese Kurve immer flacher. Ist der Tropfen groß genug um den Aufsammlungsprozess zu starten, übernimmt diese Form des Tropfenwachstums auch schnell die Überhand und die Kondensation spielt kaum noch eine Rolle. In der Erdatmosphäre entspricht dies einem Wassertropfenumfang von ca  $20\mu\text{m}$ . Dieser Wert entspricht im Saturn dem in Abschnitt 4.4.1 berechneten, kritischen Radius  $R_K$ , bei dem der Tropfen zu fallen beginnt. Dort erreichte der Heliumtropfen an der Oberfläche einen kritischen Radius von  $126\mu\text{m}$ . Dieser Wert gilt allerdings in Erdatmosphäre nur für kontinentale Wolken. Über dem Meer können Tropfen Radien von  $100 - 1000\mu\text{m}$  erreichen. Dies liegt an der höheren Luftfeuchtigkeit und somit am höheren Wasserdampfgehalt in der Atmosphäre. Somit vergrößert sich der Wert von  $\rho_U$ . Als Folge würden auch die Dichtewerte von  $\rho_O$  und  $\rho_\infty$  steigen

In diesem Kapitel haben wir gesehen, wie anhand einfacher Überlegungen und atmosphärenphysikalischer Modelle die Bildung und das Herabsinken von Tropfen in einem belie-

---

bigen Umgebungsmaterial zu beschreiben. Diese bildeten sich unter der Bedingung einer überättigten Umgebung. Die Oberflächenspannung bestimmt die Form und den kritischen Radius des Tropfens. Wir konnten die Fallzeit eines Tropfens bestimmen, die er benötigt um von der Oberfläche des Saturn bis auf dessen Kern zu fallen. Die erhaltenen Zeitskalen zeigen, dass deren Größenordnung im Vergleich der Planetenentwicklung und dem Zeitintervall zwischen zwei Evolutionsprofilen (Myr), sehr klein und somit die Annahme einer instantan wachsenden Heliumschicht gerechtfertigt ist. Spätere Untersuchungen müssten für das Innere und die Entmischungsregion bestimmt werden, da nur diese Umgebung eine Übersättigung liefert. Als Folge würden noch kürzere Fallzeiten entstehen, da auch die Fallstrecke abnimmt. Außerdem sind genaue Kenntnisse der Oberflächenspannung von reinem Helium nötig in diesen Regionen vonnöten. In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie der Kondensationsprozess eines Tropfens vonstatten geht und dass dieser durch die Diffusion beschrieben wird. Für zukünftige Berechnungen und genauere Abschätzungen dieses Effekts ist die Kenntnis von Diffusionskonstanten innerhalb der Entmischungsregion im Saturn unerlässlich. Ungeachtet des Wachstums eines Tropfens konnten wir erkennen, dass eine stärkere Widerstandskraft die Fallzeit eines Tropfens ebenfalls verlangsamt. Um diesen Widerstand besser zu beschreiben müsste der  $c_w$ -Wert bekannt sein. Dazu muss die Viskosität des Umgebungsmaterials bestimmt werden [100], [175] um zukünftig vollständige und selbstkonsistente Modelle zu liefern.

---

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Nach der Präsentation aller Modelle und deren Ergebnissen möchte ich meine Arbeit an dieser Stelle zusammenfassen. Es wurden zunächst strukturelle Untersuchungen des Saturn vorgenommen und dabei die Unterschiede zwischen den Zustandsgleichungen Sesame, SCvH-EOS und der LM-REOS erläutert und untersucht. Somit konnte man sehen, dass diese sehr unterschiedliche Einflüsse auf das Innere des Saturn, dessen Kernmasse und -metallizitäten haben. Eines dieser Basisprofile, welches für die heutige Zeit berechnet wurde, lieferte die Randbedingungen für weitere Evolutionsrechnungen. Die heutigen Planetenmodelle wurden unter Berücksichtigung aktueller Messergebnisse von Raumsonden und spektralen Untersuchungen erstellt. Somit wurde anhand von Gravitationsmomenten auch das externe Gravitationsfeld und dessen Form einbezogen, um die innere Verteilung schwerer Elemente zu berechnen.

Im zweiten Teil meiner Arbeit ging ich genauer auf die Evolution und damit auf das Kühlungsverhalten des Saturn ein. Dabei wurden sowohl die homogene als auch der Einfluss der inhomogenen Evolution untersucht. Während die homogene Betrachtung für Jupiter das richtige Alter liefert, funktioniert dies für Saturn nicht. Daher wurde das Herabsinken von Helium untersucht und somit ein vertikalen Massentransport in das Modell eingefügt. Aufgrund der Simplizität des Modells und der unzureichenden Kenntnis des Absolutwertes der Entropie, kann auch die inhomogene Evolution für LM-REOS das Alter des Sonnensystems nicht reproduzieren. Da es aber für die SCvH-EOS funktionierte, wurde mit deren Entropiewerten abgeglichen. Doch auch dies funktionierte nicht. Außerdem wurden für die SCvH-EOS-Rechnungen ab-initio-Daten auf die eines chemischen Modells angewendet. Aus diesem Grund fehlt auch die Selbstkonsistenz. Folglich verglich ich mit anderen Entmischungsdaten von Morales et al. (2010) und verschob die Entmischungsgrenzen von Lorenzen et al. um -500 K, +500 K, -1000 K und -1300 K. Die dritte Verschiebung liefert das richtige Alter, aber für den, heute gemessenen Heliumgehalt, einen zu geringen Wert. Ein weiterer Punkt zur Behandlung des Kühlungsverhaltens beschäftigte sich mit der Frage der Kernkühlung. Es wurde der Unterschied des Einflusses eines einfachen Modells (konstante Wärmekapazität des Kerns) mit dem eines verbesserten Modells (selbstkonsistente Beschreibung durch Thermodynamische Integration) verglichen.

Der dritte Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Bildung und dem Herabsinken von Heliumtropfen innerhalb des Saturn. Durch simple Modelle wurde die kritische Masse und der kritische Radius eines Tropfens anhand seiner Oberflächenspannung bestimmt. Durch eine Beschreibung des Kräfteverhältnisses und des Fallvorgangs konnten Fallzeiten von 10 bis 40 Tagen, je nach Widerstandskraft, berechnet werden.

Nach Einführung der homogenen und der inhomogenen Kondensation, wurden Modelle aus [29] vorgeführt, welche das Wachstum eines Tropfens allgemein beschreiben. Dabei wurde das Wachstum durch Kondensation mit dem durch Aufsammlung kleinerer Tropfen verglichen. Für Modelle bezüglich der Erdatmosphäre gab die Literatur für Tropfenradien in der Atmosphäre Werte von 20 bis 1000  $\mu\text{m}$  vor. Nach der Annahme dieses Modells, die Heliumtropfen würden sich bereits an der Oberfläche des Saturn bilden, erhielten wir einen Wert von 100  $\mu\text{m}$ .

Für zukünftige Berechnungen ist es aus meiner Sicht sehr wichtig, die Absolutwerte der Entropie von Mischungen zu bestimmen. Dies stellt einen sehr einflussreichen Faktor dar. Weitere Effekte sind sowohl die Kernerosion, welche Energie verbrauchen würde, als auch

---

das Herabsinken schwerer Elemente. Letzteres würde analog zum Helium auch Gravitationsenergie freisetzen. Im Moment verwendet, das in dieser Arbeit präsentierte, Modell noch zeitlich konstante Metallizitäten. Diese würden sich im Fall der Kernerrosion und herabsinkender, schwererer Elemente ändern. Dies könnte dadurch geschehen, dass sich Metalle während des Fallvorgangs in Heliumtropfen einlagern.

Um die Fallzeiten von Heliumtropfen genauer zu bestimmen, benötigen wir akkurate Werte für die Oberflächenspannung und Viskositäten im Saturn. Diese legen sowohl die Größe des Tropfens als auch die Zähigkeit des Umgebungsmaterials fest.

Zuletzt wäre ein weiterer, wichtiger Schritt, das Modell in Hinsicht auf mögliche Heliumgradienten innerhalb des Planeten zu erweitern. Dies könnte eine wichtige Grundlage für Dynamomodelle darstellen. Somit müsste das Modell in zukünftigen Rechnungen auf inhomogene und beliebig viele Schichten erweitert werden.

---

## Literatur

- [1] Alibert, Y., Mousis O., Mordasini C., Benz, W., 2005, ApJ 626:L57.  
*New Jupiter and Saturn formation models meet observations.*
- [2] Anderson J., Schubert G., (2007) , Science 317, 1384 bis 1387  
*Saturn's Gravitational Field, Internal Rotation, and Interior Structure.*
- [3] Anderson J., Schubert G., (2015) , Atmos. Solar-Terr. Phys., im Druck, doi:10.1016/j.jastp.2014.07.010, 2015.  
*Charge balance for the mesosphere with meteoric dust particles*
- [4] Atkins P. W., (2001), Physikalische Chemie. Wiley-VCH, Weinheim 43  
*Radioactive decay rate depends on chemical environment*
- [5] Atreya, S. K., Mahaffy, P. R., Niemann, H. B., Wong, M. H., Owen, T. C., 2003, Planet. Space Sci. 51, 105.  
*Composition and origin of the atmosphere of Jupiter - an update, and implications for the extrasolar giant planets.*
- [6] Bahcall J.N. and Pinsonneault M.H. (1995), Rev. Mod. Phys. 67, 781  
*Solar models with helium and heavy-element diffusion.*
- [7] Basecu V. (2011), Central European Journal of Physics, Volume 8, Issue 3, pp.463 bis 479  
*Tables of Rosseland mean opacities for candidate atmospheres of life hosting free-floating planets*
- [8] Becker A., Lorenzen W., Fortney J.J., Nettelmann N., SchÄlottler M., Redmer R. (2014). ApJS 215:14  
*Ab initio equations of state for hydrogen (H-REOS.3) and helium (He-REOS.3) and their implications for the interior of brown dwarfs*
- [9] Beer. H., Walter, G.. Macklin. R.L. and Patchett, P.J., (1984), 17hL . Phys. Rev. C, 30: 464 to 478  
*analysis of the radionuclide*
- [10] Blöchl P.E. (1994), Phys. Rev. B 50 (1994), no. 24, 17953 bis 17979.  
*Projector augmented-wave method*
- [11] Brouwer W., Pathria R. K., Phys. Rev. 163, 200 Published 5.12.1967  
*On the Surface Tension of Liquid Helium II*
- [12] Levashov P. (2013), 18th Biennial Intl. Conference of the APS Topical Group on Shock Compression of Condensed Matter held in conjunction with the 24th Biennial Intl. Conference of the Intl. Association for the Advancement of High Pressure Science and Technology (AIRAPT), Volume 58, Number 7, <http://meetings.aps.org/Meeting/SHOCK13/Session/V5.5>  
*Abstract: Observation of H/He Demixing Under Deep Jovian Planetary Conditions*

- 
- [13] Burger P, Lamers H. J. G. L. M. (1989), *Astronomy. and Astrophys.* 218, 161 bis 166  
*Analytical expression for the Rosseland-Mean Opacity and electron scattering in stellar atmospheres*
  - [14] Cameron A.G.W. (1973), 1973SSRv...15..121C  
*ABUNDANCES OF THE ELEMENTS IN THE SOLAR SYSTEM*
  - [15] Campbell J.K., Synnott S.P.(1985), *Astronom. Journal*, 90, 364  
*Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data*
  - [16] Campbell J.K., Anderson(1989), *Astronom. Journal*, 90, 364  
*Gravity field of the Saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data*
  - [17] Cao H., Russell C.T., Wicht J., Christensen U.R., Dougherty M.K., 2012, *Icarus* 221:388.  
*Saturns high degree magnetic moments: Evidence for a unique planetary dynamo*
  - [18] Car R., Parrinello M., *Physical Review Letters* 55 (1985), no. 22, 2471 bis 2474.  
*Unified approach for molecular dynamics and density functional theory*
  - [19] Ceperley D.M., Alder B.J. (1980), *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980), no. 7, 566 bis 569.  
*Ground state of the electron gas by a stochastic method*
  - [20] Chabrier G., Baraffe I., 2007. *ApJ* 661:L81.  
*Heat transport in giant (exo)planets: a new perspective.*
  - [21] Chodes N., Warner J., Gagin A. (1973), Department of atmospheric science, University of Jerusalem, Israel  
*A Determination of the Condensation Coefficient of Water from the Growth Rate of Small Cloud Droplets*
  - [22] Christensen, U.R., Wicht, J., 2008. *Icarus* 196, 1634.  
*Models of magnetic field generation in partly stable planetary cores: applications to Mercury and Saturn*
  - [23] Conrath, B. J., Gautier, D., Hanel, R. A., Hornstein, J. S., 1984., *Astrophys. J* 282, 807 bis 815.  
*The helium abundance of Saturn from Voyager measurements.*
  - [24] Conrath B.J., Gautier D. (2000), *Icarus*, 144 (1), pp. 124-134  
*Saturn Helium Abundance: A Reanalysis of Voyager Measurements*
  - [25] Desch M. D., Kaiser M. L. (1981), *Geophys. Res. Lett.* 8, 253  
*Voyager measurement of the rotation period of Saturns magnetic field.*
  - [26] Desjarlais M. D., Kress J. D., Collins L. A. (2002), *Phys. Rev. E* 66 (2002), no. 2, 025401.  
*Electrical conductivity for warm, dense aluminum plasmas and liquids*
  - [27] Dion M., Rydberg H., E. Schröder E., Langreth D. C., Lundqvist B. I. (2004), *Phys. Rev. Lett.* 92, 246401  
*Van der Waals Density Functional for General Geometries*

- 
- [28] Quelle: Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt/ Institut für Planetenforschung  
<http://www.dlr.de/pf/desktopdefault.aspx/>
- [29] University College Dublin, Meteorology and Climate Centre  
<http://maths.ucd.ie/met/msc/fezzik/Synop-Met/Ch06-4-Slides.pdf>
- [30] Eggert J. (2009), 51st Meeting of the Division of Plasma Physics Atlanta, GA, November 2, 2009 through November 6, 2009  
*Shock Experiments on Pre-Compressed Fluid Helium and Hydrogen*
- [31] Feistel R., Wagner W., (2006), J. Phys. Chem. Ref. Data, 35, 1021  
*A New Equation of State for H<sub>2</sub>O Ice II*
- [32] Fletcher, L. N., Orton, G., Teanby, N., Irwin, P., Bjomaker, G., (2009), Icarus 199, 351 bis 367.  
*Methane and its isotopologues on Saturn from Cassini/CIRS observations.*
- [33] Fortney J. J., Hubbard W.B. (2003), Icarus 164 (2003) 228 to 243  
*Phase Separation in Giant Planets: Inhomogeneous Evolution of Saturn*
- [34] Fortney J.J., Hubbard W.B. (2004), Astrophys.J. 608 (2004) 1039 to 1049  
*Effects Of Helium Phase Separation On The Evolution Of Extrasolar Giant Planets*
- [35] Fortney J.J., Nettelmann N. (2010) Springer SSRv, 152, 423 to 447  
*The Interior Structure, Composition, and Evolution of Giant Planets*
- [36] Fortney J. J., Ikoma M., Nettelmann N., Guillot T. and Marley M.S. (2011). Astrophys. J. 729, 32.  
*Self-consistent model atmospheres and the cooling of the solar system giant planets*
- [37] Franck S., Physics of the Earth and Planetary Interiors, Volume 27, Issue 4, January 1982, Pages 249 bis 254  
*Ascending droplets in the earth's core*
- [38] Freedman R.S., Lustig-Yeager J., Forney J.J., Lupu R.E., Marley M.S., Lodders K. (2014), Draft for ApJS  
*GASEOUS MEAN OPACITIES FOR GIANT PLANET AND ULTRACOOL DWARF ATMOSPHERES OVER A RANGE OF METALLICITIES AND TEMPERATURES*
- [39] French M., Mattsson T.R., Nettelmann N., Redmer R. (2009), Physical Review B, 79, 054107  
*Equation of state and phase diagram of water at ultrahigh pressures as in planetary interiors*
- [40] French M. (2010), Dissertation, Universität Rostock  
*Thermodynamische und Transporteigenschaften von Wasser bei hohen Drücken und hohen Temperaturen*
- [41] French M., Mattsson T.R., Redmer R. (2010) Phys. Rev. B 82, 174108  
*Diffusion and electrical conductivity in water at ultrahigh pressures*

- 
- [42] French, M., Becker, A., Lorenzen, W., Nettelmann, N., Bethkenhagen, M., Wicht, J., Redmer, R., 2012., arXiv:1304.4707v1  
*Ab initio simulations for material properties along the Juptier adiabat.* *ApJS* 202, A5.
  - [43] Fuller J., Lai D., (2014) Springer SSRv, 152, 423-447  
*The Interior Structure, Composition, and Evolution of Giant Planets*
  - [44] Fuller J. (2014), Icarus 242, 283.  
*Saturn Ring Seismology: Evidence for Stable Stratification in the Deep Interior of Saturn*
  - [45] Gandolfi D., Hebrard G., Alonso R.(2010), Astronomy and Astrophysics no. Co-RoT11b.v3  
*Transiting exoplanets from the CoRoT space mission XII*
  - [46] Gerthsen Physik, 22. Auflage, Springer Verlag, ISBN:3-540-02622-3  
*Gerthsen Physik - Auflage 22*
  - [47] Grabske H.C., Harwood D.J.Jr., Rogers F.J. (1969), Physical Review  
*Thermophysic properties of non ideal Gases.warm dense hydrogen using quantum molecular dynamics simulations, Free-Energy Minimization Method*
  - [48] Grabske H.C., Pollack J.B.Jr., Grossman A.S.(1975), The Astrophysical Journal 199: 265 to 281  
*The structure and evolution of Jupiter: The fluid Contraction stage*
  - [49] Guillot T., Gautier, D. To be published in Treatise in Geophysics <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00991246v2/document>  
*The Giant Planets*
  - [50] Guillot T., Chabrier G., Morel P., Gautier D. (1994), Icarus, Volume 112, Issue 2, December 1994, Pages 354 to 367  
*TNonadiabatic Models of Jupiter and Saturn*
  - [51] Guillot T., Chabrier G., Gautier D., Morel P, 1995. *Astrophys. J.* 450, 463.  
*Effect of radiative transport on the evolution of Jupiter and Saturn.*
  - [52] Guillot T., Review, (1999), *Science*, Vol. 286 no. 5437 pp. 72 to 77  
*Interiors of Giant Planets Inside and Outside the Solar System*
  - [53] Guillot T. (1999), *Planetary and Space Science*, 47,1183  
*A Comparison of the Interiors of Jupiter and Saturn*
  - [54] Guillot T., Stevenson D.J., Hubbard W.B., Saumon D. (2003) In: Bagenal F, Dowling T.E., McKinnon W.B. (Eds.), *Jupiter: The Planet, Satellites, and Magnetosphere*, Cambridge University Press, Cambridge, UK,  
*The interior of Jupiter*
  - [55] Guillot T.(2005),*Ann. Rev. Earth & Plan. Sciences* 33, 493  
*The Interiors of Giant Planets: Models and Outstanding Questions*

- 
- [56] Guillot, T., Gautier, D., 2007. The Giant Planets. In: Schubert, G., Spohn, T. (Eds.), *Treatise of Geophysics*, vol. 10, Amsterdam: Elsevier, p. 439 (arXiv:0912:2019). *Planets and Moons*.
- [57] Guillot T, Atreya S. (2009), Springer, pp. 745-761  
*24 Saturn's Exploration Beyond Cassini-Huygens*
- [58] Gurnett, D. A., Persoon, A. M., Kurth, W. S., Groene, J. B., Averkamp, T. F., Dougherty, M. K. and Southwood, D. J., 2007., *Science* 316, 442 to 445.  
*The Variable Rotation Period of the Inner Region of Saturn's Plasma Disk.*
- [59] Hanel R.A., Conrath B.J., Kunde V.G.(1983), *Icarus*, Volume 53, Issue 2, February 1983, Pages 262–285  
*Albedo, internal heat flux, and energy balance of Saturn*
- [60] Hatzes A.P., Dvorak R., Wuchterl G.(2010), *Astronomy and Astrophysics*, arXiv:1006.5476v1  
*An investigation into the radial velocity variations of CoRoT-7*
- [61] Heise M. (2007), Skript Ausbildungsseminar (Kerne und Sterne) Universität Regensburg  
*Grundgleichungen des Sternenaufbaus*
- [62] Helled R. & Schubert G., 2008. *Icarus* 198, 156  
*Core formation in giant gaseous protoplanets*
- [63] Helled, R., Schubert, G., Anderson, J. D., 2009a., *Icaus* 199, 368 bis 377.  
*Empirical models of pressure and density in Saturns interior: Implications for the helium concentration, its depth dependence, and Saturns precession rate.*
- [64] Helled, R., Schubert, G., Anderson, J. D., 2009b., *Planet. Space Sci.* 57, 1467 bis 1473.  
*Jupiter and Saturn Rotation Periods.*
- [65] Helled, R., Schubert, G., 2009., *ApJ* 697, 1256.  
*Heavy element enrichment of a Jupiter-mass protoplanet as a function of orbital distance.*
- [66] Helled, R., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., 2010., Proceeding IAU symp. 276, 119.  
*Composition of massive planets.*
- [67] Helled, R., 2011., *ApJ* 735, L16.  
*Constraining Saturns core properties by a measurement of its moment of inertia-implications to the Cassini Solstice Mission.*
- [68] Helled R., Guillot T., 2013, *ApJ* 767, 113.  
*Interior models of Saturn: including the uncertainty in shape and rotation*
- [69] Henry J.(2001), *TJ*(now *Journal of Creation*) 15, no 3 (December 2001): 85 to 91.  
*The energy balance of Uranus: implication for special creation*
- [70] Heyd J., Scuseria G. E., Ernzerhof M. (2003), *The Journal of Chemical Physics* 118, 8207  
*Hybrid functionals based on a screened Coulomb potential*

- 
- [71] Hohenberg P, Kohn W. (1964), Phys. Rev. 136 (1964), no. 3B, B864 bis B871.  
*P. Hohenberg and W. Kohn, Inhomogeneous electron gas*
  - [72] Holst B., Nettelmann N., Redmer R. (2007), Contrib. Plasma Physics, 47, 368 - 374  
*Equation of State for Dense Hydrogen and Plasma Phase Transition*
  - [73] Holst B., Redmer R., Desjarlais M.P. (2008), Physical Review, PRB 77, 184201  
*Thermophysical properties of warm dense hydrogen using quantum molecular dynamics simulations*
  - [74] Holst, B., Redmer, R., Gryaznov, V. K., Fortov, V. E., Iosilevskiy, I. L., 2012., Eur. Phys. J. D 66, 104.  
*Hydrogen and helium in shock wave experiments, ab initio simulations and chemical picture modeling.*
  - [75] Hori, Y., Ikoma, M., 2010., ApJ 714, 1343.  
*Critical core masses for gas giant formation with grain free-envelopes.*
  - [76] Hubbard W.B.(1977), Icarus 30 305-310  
*The Jovian Surface Condition and Cooling Rate*
  - [77] Hubbard W.B., DeWitt H.E., 1985. ApJ 290, 388.  
*Statistical mechanics of light elements at high pressure. VII. A perturbative free energy for arbitrary mixtures of H and He.*
  - [78] Hubbard, W. B., Marley, M. S., 1989., Icarus 78, 102.  
*Optimized Jupiter, Saturn and Uranus interior models.*
  - [79] Hubbard, W. B., 1999., Icarus 137, 357 bis 359.  
*Gravitational Signature of Jupiters Deep Zonal Flows.*
  - [80] Hubbard W.B., Guillot T., Marley M.S., Burrows A., Lunine J.I., Saumon D.S., 1999. Planet. Sp. Sci 47, 1175  
*Comparative evolution of Jupiter and Saturn*
  - [81] Hummer D. G., Mihalas D. (1988), ApJ, 331, 794 - 814  
*The Equation Of State For Stellar Envelopes. I. An Occupation Probability Formalism For The Truncation Of Internal Partition Functions.*
  - [82] Jacobson R. A., Antresian P. G., Bordi J. J., Criddle K. E., Ionasescu R., Jones J. B., Mackenzie R. A., Meek M. C., Parcher D., and Pelletier F. J., 2006. Astronom. J. 132, 2520.  
*The gravity field of the Saturnian system from satellite observations and spacecraft tracking data*
  - [83] Juranek H. (2004), Dissertation, Universität Rostock  
*Zustandsgleichung von Wasserstoff bei hohen Drücken im Mbar-Bereich*
  - [84] Juranek H., Nettelmann N., Kuhlbrodt S.(2005), Contrib. Plasma Phys. Volume 45, Issue 5-6, pages 432â€¢440, August 2005  
*Metal-Nonmetal Transition in Dense Plasmas*

- 
- [85] Kerley G.I. (1971), Los Alamos Scientific Laboratory report LA-4760  
*A New Model of Fluids*
  - [86] Kerley G.I. (1972), Los Alamos Scientific Laboratory report LA-4776  
*A Theoretical Equation of State for Deuterium*
  - [87] Kerley G.I. (1972), Phys. Earth Planet. Interiors 6, 78-82  
*Equation of State and Phase Diagram of Dense Hydrogen*
  - [88] Kerley G.I. (2003), Sandia Report, SAND2003-3613  
*Equations of State for Hydrogen and Deuterium*
  - [89] Kerley, G., 2004a., rep., Kerley Tech. Services, Report KTS04-1.  
*Structures of the planets Jupiter and Saturn. Tech.*
  - [90] Kerley, G., 2004b., Tech. rep., Kerley Tech. Services, Report KTS04-2.  
*An Equation of State for Helium.*
  - [91] Kietzmann A., Holst B., Redmer R., Desjarlais M. P., Mattsson T. R. (2007), Physical Review Letters 98, 190602  
*Quantum Molecular Dynamics Simulations for the Nonmetal-to-Metal Transition in Fluid Helium*
  - [92] Kippenhahn R. und Weigert A. (1990), A&A Library, Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
*Stellar Structure and Evolution*
  - [93] Kippenhahn R. und Weigert A. (2012), Springer Heidelberg New York Dordrecht London  
*Stellar Structure and Evolution-Second Edition*
  - [94] Klepeis J.E., Schafer K.J., Barbee T.W., Ross M. (1991), Science Vol. 254  
*Hydrogen-Helium Mixtures at Megabar Pressures: Implication for Jupiter and Saturn*
  - [95] Knudson M. D., Desjarlais M. P., Becker A., Lemke R. W., Cochrane K. R., Savage M. E., Bliss D. E., Mattsson T. R., Redmer R. (2015), Science, VOL 348, ISSUE 6242  
*Direct observation of an abrupt insulator-to-metal transition in dense liquid deuterium*
  - [96] Kobayashi, H., Ormel, C. W., Ida, S., 2012., ApJ submitted.  
*Rapid formation of Saturn after Jupiter completion.*
  - [97] Kramm U. (2010), Diplomarbeit, Universität Rostock  
*Die Love Number  $k_2$  in der Planetenmodellierung*
  - [98] Kresse G., Hafner J., (1993), Phys. Rev. B, 47, 558  
*Ab initio molecular dynamics for liquid metals*
  - [99] Kresse G., Furthmüller J. (1996), Phys. Rev. B, 54, 11169  
*Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set*
  - [100] Kuchling H., 18. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, ISBN: 3-446-22883-7  
*Taschenbuch der Physik*

- 
- [101] Lam (July 4th,received 1983), Z. Phys. -Condensed Matter B 53, 245-247  
*First-order liquid-liquid phase transition in dense hydrogen*
  - [102] Las Cumbres Observatory (Global Telescope Network)  
<http://lcogt.net/spacebook/low-mass-star>
  - [103] Leconte, J., Chabrier, G., 2012., A&A 540, A20.  
*A new vision on giant planet interiors: the impact of double-diffusive convection.*
  - [104] Leconte & Chabrier, (2013), Nature Geosci. 6, 347  
*Layered convection as the origin of Saturns luminosity anomaly*
  - [105] Lee C., Yang W., Parr R.G. (1988), Phys. Rev. B 37 (1988), no. 2, 785 bis 789.  
*Development of the Colle-Salvetti correlation-energy formula into a functional of the electron density*
  - [106] Lee K., Murray E.D., Kong L., Lundquist B.L., Langreth D.C., 2010, Phys. Rev. B 82, 081101.  
*Higher-accuracy van der Waals density functionals*
  - [107] Lindal G. F, Sweetnam D. N., Eshleman V. R., 1985. Astronom. J. 90, 1136. )  
*The atmosphere of Saturn: An analysis of the Voyager radio occultation measurements.*
  - [108] Lorenzen W.(2008), Diplomarbeit  
*Wasserstoff-Helium-Mischungen unter hohem Druck: Zustandsgleichung und Mischungslücke*
  - [109] Lorenzen W., Holst B., Redmer R. (2009), Physical Review Letters 102, 115701  
*Demixing of Hydrogen and Helium at Megabar Pressures*
  - [110] Lorenzen W., Holst B., Redmer R. (2010), Phys. Rev. B 82, 195107  
*First-order liquid-liquid phase transition in dense hydrogen*
  - [111] Lorenzen W., Holst B., Redmer R., 2011. Phys. Rev. B 84, 235109.  
*Metallization in hydrogen-helium mixtures*
  - [112] Lustig-Yaeger J.A., Fortney, J. J., Freedman, R.; Marley M. S., Lupu, R. E. (2014), American Astronomical Society, AAS Meeting 223, 347.0  
*Gaseous Mean Opacities for Giant Planet and Brown Dwarf Atmospheres*
  - [113] Lyon P., Johnson J. D., Los Alamos National Lab. (1992), LANL Rep. LA-UR-92-3407  
*Equation of State Database*
  - [114] Lodders, K., 2003., ApJ 591, 1220.  
*Solar System Abundances and Condensation Temperatures of the Elements.*
  - [115] Marley M.S., Hubbard W.B. (1988), Icarus 73, 536 to 544  
*Thermodynamics of dense molecular hydrogen-helium mixtures at high pressure*
  - [116] McMahon J. M., Morales M. A., Pierleoni C., Ceperley D., 2012. Rev. Mod. Phys. 84, 1607-1653.  
*The properties of hydrogen and helium under extreme conditions.*

- 
- [117] McDonald J.E. (1962), Institute of atmospheric physics, University of Arizona, Tucson, Arizona, received Feb. 2. 1962  
*Homogeneous Nucleation of Vapor Condensation. I. Thermodynamic Aspects*
- [118] McDonough W.F, Sun S.s.(1994), Chemical Geology 120 (1995) 223 to 253  
*The composition of the Earth*
- [119] Mermin N.D.(1990), Phys. Rev. Lett. 65, 3373  
*Simple Unified Form for the Major No-Hidden-Variables Theorems*
- [120] Militzer B. Ceperley D. M., (2000), Phys. Rev. Lett. 85 (2000), no. 9, 1890 bis 1893.  
*Path integral Monte Carlo calculation of the deuterium hugoniot*
- [121] Militzer B., Hubbard W.B.(2007), AICP 955, 1395  
*Implications of shock wave experiments with precompressed materials for giant planet interiors*
- [122] Militzer B., Hubbard W. B., 2013. ApJ 774:148.  
*Ab initio EOS for H-He mixtures with recalibration of the giant planet Mass-Radius relationship*
- [123] Militzer B., 2013. Phys. Rev. B 87:014202.  
*Equation of state calculations of hydrogen-helium mixtures in solar and extrasolar giant planets.*
- [124] Miller, N., Fortney, J. J., 2011., ApJ 736, L29. Mizuno, H., 1980. Formation of the giant planets. Prog. Theo. Phys. 64, 544.  
*The heavy-element masses of extrasolar giant planets, revealed.*
- [125] Mizuno H.(1980), Prog. Theoret. Phys. 64, 544  
*Formation of the Giant planets*
- [126] Morales M. A., Schwegler E., Ceperley D., Pierleoni C., Hamel S., Caspersen K., 2008. Journal of the American Chemical Society, 106:1324-1329.  
*Phase separation in hydrogen-helium mixtures*
- [127] Morales, M. A., Schwegler, E., Ceperley, D., Pierleoni, C., Hamel, S., Caspersen, K., 2009. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 106:1324.  
*Phase separation in hydrogen-helium mixtures at Mbar pressures*
- [128] Morales, A., Pierleoni, C., Schwegler, E., Ceperley, D. M. (2010), Proc. Natl. Acad. Sci. USA 107:12799
- [129] Morales, M. A., Hamel, S., Caspersen, K., and Schwegler, E., 2013a. Phys. Rev. B 87:174105.  
*Hydrogen-helium demixing from first principles: From diamond anvil cells to planetary interiors.*
- [130] Morales, A., McMahon, J.M., Pierleoni, C., Ceperley, D. M., 2013b. Phys. Rev. Lett. 110:065702.

---

*Nuclear Quantum Effects and nonlocal exchange-correlation Functionals Applied to Liquid Hydrogen at High Pressure*

- [131] Mordasini C., Alibert Y., Klahr H., Henning T. (2012): A & A 547, A111  
*Characterization of exoplanets from their formation I. Models of combined planet formation and evolution*
- [132] Nellis W.J., Mitchell A.C., van Thiel M. (1983), J. Chem. Phys. 79  
*Equation-of-state data for molecular hydrogen and deuterium at shock pressures in the range of 2 – 76 GPa*
- [133] Nettelmann N., Holst B., Kietzmann A., French M., Redmer R., Blaschke, D., 2008. Astroph. J. 683:1217.  
*Ab initio equation of state data for hydrogen, helium and water and the internal structure of Jupiter*
- [134] Nettelmann N., Kramm U., Redmer R., Neuhäuser R. (2009), Astronomy & Astrophysics, arXiv:1002.4447v1  
*Interior structure models of GJ 436b*
- [135] Nettelmann N. (2009), Dissertation  
*Matter under extreme conditions: modelling giant planets*
- [136] Nettelmann N., Becker A., Holst B., Redmer R. (2012), Astroph. Journal, arXiv:1109.5644v2  
*JUPITER MODELS WITH IMPROVED AB INITIO HYDROGEN EOS (H-REOS.2)*
- [137] Nettelmann, N., Fortney, J., Kramm, U., Redmer, R., 2011., ApJ 750, A52.  
*Thermal evolution and structure models of the transiting super-Earth GJ1214b.*
- [138] Nettelmann N., Püstow R., Redmer R. (2013), Icarus, 225 548 - 557  
*Saturn layered structure and homogeneous evolution models with different EOSs*
- [139] Nettelmann N., Fortney J.J., Moore K., Mankovich C., arXiv:1412.4202v1  
*An Exploration of Double Diffusive Convection in Jupiter as a Result of Hydrogen-Helium Phase Separation*
- [140] Nettelmann N., Fortney J. J., Moore K., Manckovich C., 2015. MNRAS, 447:3422.  
*An exploration of double diffusive convection in Jupiter as a result of H/He phase separation.*
- [141] Orton, G. S., Ingersoll, A. P., 1980., J. Geophys. Res. 85, 5871.  
*Saturns atmospheric temperature structure and heat budget.*
- [142] Perdew J.P., Zunger A. (1981), Phys. Rev., Vol. 23, Iss. 10 – 15 May 1981 no. 10, 5048 bis 5079.  
*Self-interaction correction to densityfunctional approximations for many-electron systems*
- [143] Perdew J.P., Wang Y. (1992), Phys. Rev. B 45, no. 23, 13244 to 13249.  
*Accurate and simple analytic representation of the electron-gas correlation energy*

- 
- [144] Perdew J.P, Burke K., Ernzerhof M. (1996), Phys. Rev. Lett. 77 (1996), no. 18, 3865 bis 3868.  
*Generalized gradient approximation made simple*
- [145] Das Periodensystem der Elemente online  
<http://www.periodensystem-online.de/index.php?id=isotope&el=92&mz=238&show=nuklid>
- [146] Pfaffenzeller O., Hohl D., Ballone P(1995), Phys. Rev. Lett. 74, 2599-2602  
*Miscibility of hydrogen and helium under astrophysical conditions*
- [147] Pollack, J. B., Grossman, A. S., Moore, R., Grabske, H. C., 1977., Icarus 30, 111 to 128.  
*A calculation of Saturns gravitational contraction history.*
- [148] Pollack J.B., Hubickyj O., Bodenheimer P., Lissauer J.J., Podolak M., and Greenzweig Y. (1996), Icarus 124, 62  
*Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas*
- [149] Püstow R.(2010) Diplomarbeit  
*Die innere Struktur und Evolution von Saturn*
- [150] Püstow R., Nettelmann N., Lorenzen W., Redmer R., Icarus Journal (2015) - submitted  
*H/He demixing and the cooling behavior of Saturn*
- [151] Redlich O., Kister A.T. (1948), Ind. Eng. Chem., 1948, 40 (2), pp 345  
*Algebraic Representation of Thermodynamic Properties and the Classification of Solutions*
- [152] Ross M. (1979), Chem. Phys., 71, 1567  
*The physics of fast Z pinches*
- [153] Salpeter E.E. (1973), The Astrophysical Journal, 181: L83 to L86,  
*On convection and gravitational layering in Jupiter and in stars of low mass*
- [154] Saumon D., Chabrier G. (1991), Phys. Rev. A, 44, 5122  
*Fluid hydrogen at high density: Pressure dissociation*
- [155] Saumon D., Chabrier G. (1992a), Phys. Rev. A, 46, 2084  
*Fluid hydrogen at high density: Pressure ionization*
- [156] Saumon D., Hubbard W.B., Chabrier G., van Horn H.M.(1992), ApJ. 391, 827  
*The role of the molecular-metallic transition of hydrogen in the evolution of Jupiter, Saturn, and brown dwarfs*
- [157] Saumon D., Chabrier G. und Van Horn H. M.(1995), The Astrophysical Journal Supplement Series, 99:713-741  
*An equation of state for low-mass stars and giant planets*
- [158] Saumon D. und Guillot T.(2004), The Astrophysical Journal 609:1170 to 1180  
*Shock compression of deuterium and the interiors of Jupiter and Saurn*

- 
- [159] Scheindlin A.E., Fortov V.T., USSR Academy of Sciences, Moscow (1989), Volume 2, Part3  
*Condensation of Supersaturated Vapor in a Field of Electromagnetic Radiation*
- [160] Schouten J.A., de Kuijper A., Michels J.P.J.(1991), Physical Review B, Vol. 44, Iss. 13  
*Critical line of He-H<sub>2</sub> up to 2500K and the influence of attraction on fluid-fluid separation*
- [161] Schwarz V., Juraneck H., Redmer R. (2005), Chem Phys. 2005 May 7;7(9):1990-5.  
*Noble gases and hydrogen at high pressures*
- [162] Stanford P Lyon, James D. Johnson, Group T1, La - Ur -92 - 3407  
*Sesame: The Los Alamos National Laboratory Equation of State Data Base*
- [163] Strom, S. E., Edwards, S., Skrutskie, M. F. 1993., In: Levy, E. H., Lunine, J. I. (Eds.), Protostars and Planets III. Amsterdam: Elsevier, pp. 837 bis 866.  
*Evolutionary time scales for circumstellar disks associated with intermediate- and solar-type stars.*
- [164] Stanley S., Glatzmaier A.(2009), Space Sci. Rev., DOI 10.1007/s11214-009-9573-y  
*Dynamo Models for Planets Other Than Earth*
- [165] <http://www-star.st-and.ac.uk/> kw25/teaching/stars/STRUC7.pdf (Vorlesungs-skript)  
*Stellar Opacity*
- [166] Stevenson D.J.(1975),Physical Review B, 12, 3999  
*Thermodynamics and phase separation of fully ionized hydrogen-helium fluid mixtures*
- [167] Stevenson, D. J., Salpeter, E. E., 1977., ApJS 35, 239 bis 261.  
*The dynamics and helium distribution in hydrogen-helium fluid planets.*
- [168] Stevenson D. J., 1982. Ann. Rev. Earth Planet Sci. 10:257 bis 95.  
*Interiors of the giant planets*
- [169] Redmer R., Universität Rostock Institut für Physik D-18051 Rostock  
*Theoretische Physik V: Thermodynamik Vorlesungsskript*
- [170] von Zahn, U., Hunten, D. M., Lehmacher, G., 1998, JGR 103, 22815.  
*Helium in Jupiters atmosphere: Results from the Galileo probe helium interferometer experiment*
- [171] Vorberger J., Tamblyn I., Militzer B., Bonev S. A., (2007), Phys. Rev. B 75, 024206.  
*Hydrogen-helium mixtures in the interiors of giant planets.*
- [172] Wagner W., Prusz A., (2002), J. Phys. Chem. Rev. Data, 31, 387  
*Radioactive decay rate depends on chemical environment*
- [173] Wahl S.M., Wilson H.F., Militzer B., 2013, ApJ 773, 95.  
*Solubility of iron in metallic hydrogen and stability of dense cores in giant planets*

- 
- [174] Weiss, A., Hillebrandt, W., Thomas, H.-C., Ritter, H. (2004), (Cambridge Scientific Publishers, Cambridge)  
*Cox & Giulis Principles of Stellar Structure, second edition*
- [175] Williams F. A. (2015), 1926.DOI: 10.1098/rspa.1926.0150  
*The Effect of Temperature on the Viscosity of Air*
- [176] Wilms H., Strelnikov B., Rapp M. (2014), Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, Volume 118, Part B, 180 bis 189  
*On the heterogeneous nucleation of mesospheric ice on meteoric smoke particles: Microphysical modeling*
- [177] Wilson, H. F., Militzer, B., 2010., Phys. Rev. Lett. 104, 121101.  
*Sequestration of noble gases in giant planet interiors.*
- [178] Wilson, H. F., Militzer, B., 2011., arXiv:1012.5413 [astro-ph.EP]  
*Erosion of icy cores in giant gas planets*
- [179] Wilson H.F, Militzer M., 2012, ApJ 745:54.  
*Solubility of water ice in metallic hydrogen: consequences for core erosion in gas giant planets*
- [180] Wilson H.F, Militzer M., 2012, PRL 108:111101.  
*Rocky Core Solubility in Jupiter and Giant Exoplanets*
- [181] Wood, T. S., Garaud, P., Stellmach, S., 2012., arXiv:1212.1218v1 [astro-ph].  
*A new model for mixing by double-diffusive convection (semi-convection). II. The transport of heat and composition through layers.*
- [182] Zharkov V.N., Trubitsyn V.P. (1978), Tucson, AZ: Parchart, ISBN-13: 978-0912918150  
*Physics of Planetary Interiors.*

---

## **Danksagung**

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ronald Redmer für die Möglichkeit, meine Dissertation in der AG Statistische Physik an der Universität Rostock anzufertigen, bedanken. Desweiteren danke ich der gesamten Arbeitsgruppe für das sehr schöne und angenehme Arbeitsklima. Danke sage ich an dieser Stelle auch Frau Dulinski, unserer, uns immer zur Seite stehenden, Sekretärin. Besonderer Dank gilt an dieser Stelle Nadine Nettelmann, die mir ihr Programm für einige meiner Berechnungen zur Verfügung gestellt hat und mir trotz weiter Entfernung während ihres USA-Aufenthaltes mit Rat und Tat zur Seite stand. Auch das Administratorenteam soll nicht vergessen werden. Vielen Dank an Andreas Becker, Mandy Bethkenhagen, Manuel Schöttler und Clemens Kellermann. Ebenfalls danke ich Winfried Lorenzen und Martin French für jederzeit gute Ratschläge und Anregungen. Besonderer Dank gilt auch meiner Familie für jede erdenkliche Unterstützung.

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine, außer den angegebenen Hilfsmitteln und Quellen verwendet habe.

Rostock, den 22.07.2015

Robert Püstow



---

## Wissenschaftliche Publikationen

[1] Petzsch D., Barth R., Matschos R., Steinwehr R., Püstow R., Strelnikov B., Rapp M. (2009), ESA REXUS-Program

*MONDARO STUDENT EXPERIMENT ON THE REXUS SOUNDING ROCKET*

[2] Nettelmann N., Püstow R., Redmer R., Icarus, **225**, 548 - 557, (2013)  
*Saturn layered structure and homogeneous evolution models with different EOSs*

[3] Püstow R., Nettelmann N., Lorenzen W., Redmer R., accepted to Icarus, 4-Dec-2015  
*H/He demixing and the cooling behavior of Saturn*