

Universität
Rostock



Traditio et Innovatio

Lattice Boltzmann Simulationen zur Umströmung von Objekten am Meeresboden

Dissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieurin (Dr.-Ing.)

der Fakultät für Maschinenbau und Schiffstechnik
der Universität Rostock

Rostock, 2017

vorgelegt von:

Helen Elizabeth Morrison

aus Rostock

geboren am 25.03.1988 in Worms

Gutachter:

1. Gutachter:

Prof. em. Dr.-Ing. habil. Alfred Leder
Lehrstuhl Strömungsmechanik, Universität Rostock

2. Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. habil. Nikolai Kornev
Lehrstuhl für Modellierung und Simulation, Universität Rostock

Datum der Einreichung: 09. Dezember 2016

Datum der Verteidigung: 31. März 2017

Danksagung

Die Durchführung und erfolgreiche Fertigstellung der vorliegenden Arbeit habe ich zuallererst meinem Doktorvater Prof. Alfred Leder zu verdanken. Unter seiner Leitung wurde das Projekt zunächst als Machbarkeitsstudie gestartet und stellte sich schnell als ein promotionswürdiges Thema heraus. Insofern gilt ihm mein Dank vor allem für sein Vertrauen in meine Arbeit und für seine anhaltende Unterstützung. Ich danke auch Prof. Nikolai Kornev als Zweitgutachter dieser Arbeit. Sein Interesse an der Simulationsmethode und seine konstruktive Kritik waren äußerst hilfreich im Laufe der Promotion.

Mein Dank gilt außerdem ganz besonders Dr. Jonas Latt, dem Entwickler des open-source Codes Palabos. Er war von unserem ersten Telefonat an stets hilfsbereit, eröffnete mir den Weg in die Lattice Boltzmann Community und zeigte durchweg Interesse an meiner Arbeit. In dem Zusammenhang danke ich auch Prof. Bastien Chopard für die Möglichkeit einer Woche intensiven Austauschs mit seiner Arbeitsgruppe an der Universität Genf.

Ferner danke ich Fabian Bösch von der Arbeitsgruppe um Prof. Ilya Karlin an der ETH Zürich für den offenen Austausch, insbesondere im Bezug auf die Implementierung des KBC-Kollisionsmodells.

Mit ihren Abschlussarbeiten haben auch die Studenten Sebastian Eilek und Jacob Groß an dem Projekt mitgewirkt. Dafür danke ich ihnen ganz besonders.

Ich möchte außerdem den Kollegen am Lehrstuhl Strömungsmechanik für die guten Gespräche und Diskussionen danken. Insbesondere danke ich Dr. Peter Menzel für die Unterstützung innerhalb des Projekts. Auch Dr. Martin Brede gilt ein besonderer Dank für seine Hilfe und Diskussionsbereitschaft. Außerdem möchte ich Prof. Sven Grundmann für die problemlose Übernahme des Lehrstuhls nach der Emeritierung von Prof. Leder danken. Sein Interesse an meiner Arbeit war und ist eine große Ermutigung. Ferner möchte ich mich bei meinem ehemaligen Bürokollegen Tom Rückborn bedanken, der vor allem während der Endphase der Promotion zu einer angenehmen Arbeitsatmosphäre beigetragen hat.

Mein Dank gilt auch der finanziellen Unterstützung dieser Arbeit durch das Graduiertenkolleg ILWAO (International Leibniz Graduate School for Gravity Waves and Turbulence in the Atmosphere and Ocean) unter der Leitung von Prof. Franz-Josef Lübken und durch eine Zuwendung der Bundesrepublik Deutschland, vertreten durch die Wehrtechnische Dienststelle für Schiffe und Marinewaffen, Maritime Technologie und Forschung (WTD 71) in Eckernförde.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, insbesondere bei meinen Eltern für ihre Begeisterung an meiner Forschungsarbeit und ihre bedingungslose moralische Unterstützung, sowie bei meinem Mann, der immer an mich glaubt und mich immer wieder antreibt.

Rostock, im Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielstellung	3
1.3	Gliederung der Arbeit	4
2	Die Lattice Boltzmann Methode	5
2.1	Von der Boltzmann-Gleichung zu den Navier-Stokes-Gleichungen	5
2.1.1	Die Boltzmann-Gleichung	5
2.1.2	Der Kollisionsoperator	6
2.1.3	Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung	7
2.1.4	Erhaltungssätze	7
2.1.5	Die Euler-Gleichungen	10
2.1.6	Die Chapman-Enskog-Entwicklung	12
2.2	Diskretisierung	16
2.3	Approximation der Verteilungsfunktionen	20
2.4	Randbedingungen	21
2.4.1	Periodische Randbedingungen	22
2.4.2	no-slip Randbedingungen	23
2.4.3	free-slip Randbedingungen	25
2.4.4	Einlass	26
2.4.5	Auslass	27
2.4.6	Behandlung komplexer Geometrien	29
2.5	Kollisionsmodelle	31
2.5.1	Kollisionsmodell nach Bathnagar, Gross & Krook (BGK)	32
2.5.2	Regularized Lattice BGK (RLBGK) Kollisionsmodell	33
2.5.3	Multiple Relaxation Time (MRT) Kollisionsmodell	35
2.5.4	Entropic Lattice Boltzmann Model (ELBM)	37
2.5.5	Kollisionsmodell nach Karlin, Bösch & Chikatamarla (KBC)	38
2.5.6	Numerische Stabilität der Kollisionsmodelle	40
2.6	Der Palabos-Code	41
3	Umströmung von Objekten bei hohen Reynoldszahlen	43
3.1	Behandlung beliebig geformter Objektränder	43
3.1.1	Implementierung einer geeigneten Randbedingung	44
3.1.2	Testfall: zweidimensionale Zylinderumströmung	48
3.1.3	Testfall: bewegte Geometrien	50
3.2	Dreidimensionale Gitterverfeinerung	51
3.2.1	Darstellung der zweidimensionalen Gitterverfeinerung	51
3.2.2	Besonderheiten der dreidimensionalen Gitterverfeinerung	58
3.2.3	Parallelisierung	60
3.2.4	Testfall: dreidimensionale Zylinderumströmung	60
3.3	Numerische Stabilität bei hohen Reynoldszahlen	64
3.3.1	Das KBC-Kollisionsmodell für das D3Q27-Gitter	64

3.3.2	Testfall: Kanalströmung	66
3.4	Simulation eines stehenden Zylinders	70
3.4.1	Zusammenfassung bisheriger Arbeiten	70
3.4.2	Simulationsbedingungen	71
3.4.3	Vergleich der Ergebnisse mit Messdaten und LES	73
3.4.4	Beurteilung der Laufzeit	77
4	Simulationen eines liegenden Zylinders	79
4.1	Überblick der vorhandenen Messdaten	79
4.1.1	Messungen im Windkanal	80
4.1.2	Charakterisierung der Versandungsprozesse im Wasserkanal	82
4.2	Reproduktion der Messungen im Windkanal mit der Lattice Boltzmann Methode	84
4.2.1	Gitterkonvergenzstudie	85
4.2.2	Vergleich mit Windkanalmessungen	87
4.3	Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals	90
4.3.1	Simulationsbedingungen	90
4.3.2	Vergleich mit Windkanalmessungen	91
4.3.3	Beschreibung der dreidimensionalen Strömungsstrukturen	95
4.3.4	Wandschubspannung im Umfeld des Zylinders	97
5	Sedimenttransport mit der Lattice Boltzmann Methode	99
5.1	Das Lattice-Boltzmann/Advektions-Diffusions-Modell	100
5.1.1	Das LB/AD-Modell und Gitterverfeinerung	101
5.1.2	Das LB/AD-Modell und das KBC-Kollisionsmodell	102
5.1.3	Testfall: Advektion und Diffusion einer Gaußverteilung	103
5.2	Sedimenttransport im Umfeld eines liegenden Zylinders	104
5.2.1	Erosion und Sedimentation	105
5.2.2	Kopplung des Fluids an das Sediment	107
5.2.3	Randbedingungen	108
5.2.4	Änderungen am KBC-Modell für das D3Q7-Gitter	108
5.2.5	Simulationsbedingungen	109
5.2.6	Ergebnisse	110
6	Zusammenfassung und Ausblick	115

Nomenklatur

Abkürzungen

BFL	Bouzidi Firdaouss Lallemand
DES	Detached Eddy Simulation
DNS	Direkte Numerische Simulation
ELBM	Entropic Lattice Boltzmann Model
FHP	Frisch Hasslacher Pomeau
FVM	Finite Volumen Methode
HLRN	Norddeutscher Verbund für Hoch- und Höchstleistungsrechnen
IBM	Immersed Boundary Method
KBC	Karlin Bösch Chikatamarla
(L)BGK	(Lattice) Bathnagar Gross Krook
LB/AD-Modell	Lattice-Boltzmann/Advektions-Diffusions-Modell
LBM	Lattice Boltzmann Methode
LDA	Laser-Doppler-Anemometrie
LES	Large Eddy Simulation
MRT	Multiple Relaxation Time
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RLBGK	Regularized Lattice Bathnagar Gross Krook
STL	Standard Tessellation Language
TMS	Tamm Mott-Smith
TR-PIV	Time-Resolved Particle Image Velocimetry
VLM	Vortex Lattice Method

Griechische Formelzeichen

α	ELBM-Parameter; als Index: $\alpha = 1, 2, 3$
β	Index: $\beta = 1, 2, 3$
γ	Entropischer Stabilisator (KBC-Modell)
Δ	Normierter Abstand der letzten Fluidzelle zur Wand
$\delta_{\alpha\beta}$	Kronecker-Delta
ϵ	Knudsenzahl
κ	Kármán-Konstante
λ	Freie Weglänge
ν	Kinematische Viskosität
$\vec{\xi}$	Vektor der Eigengeschwindigkeit eines Teilchens
Π	Impulsstromtensor
ρ	Fluidichte
ρ_s	Sanddichte
σ	Spannungstensor
τ	Relaxationszeit
τ_w	Wandschubspannung
φ	Charakteristische Größe der Advektions-Diffusions-Gleichung

ψ_k	Kollisionsinvariante ($k = 0,1,2$)
$\bar{\Omega}$	Rotation
Ω	Kollisionsoperator
$\vec{\omega}$	Wirbelstärke

Lateinische Formelzeichen

A	Fläche
\vec{c}_i	Normierte Vektoren der diskretisierten Gittergeschwindigkeiten
$c = \Delta x / \Delta t$	Gittergeschwindigkeit
c_D	Widerstandsbeiwert
c_L	Auftriebsbeiwert
c_s	Schallgeschwindigkeit
D	Zylinderdurchmesser
D_0	Diffusionskonstante
\mathbf{D}	Drucktensor
d_*	Dimensionsloser Korndurchmesser
d_K	Korndurchmesser
e	Spezifische innere Energie
f	Verteilungsfunktion
\vec{F}	Kraft
f_{Sr}	Ablösefrequenz
g	(Schwere-)Beschleunigung
g_i	Verteilungsfunktionen des LB/AD-Modells
H	Analogon zur Entropie, welches über das H-Theorem definiert ist
h_i	Anteil höherer Momente der f_i (KBC-Modell)
i	Index zur Kennzeichnung von diskretisierten Variablen
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\vec{j}	Impuls
k_B	Boltzmann-Konstante
k_i	Kinetischer Anteil der f_i (KBC-Modell)
L	Länge
L_c	Charakteristische Länge
M	Transformationsmatrix (MRT-Modell)
m	Teilchenmasse
m_i	Momente der Verteilungsfunktionen f_i (MRT-Modell)
M_{pqr}	Momente der Verteilungsfunktionen (KBC-Modell, D3Q7-/D3Q27-Lattice)
M_{pq}	Momente der Verteilungsfunktionen (KBC-Modell, D2Q9-Lattice)
Ma	Mach-Zahl
N	Anzahl der Zellen pro charakteristische Länge (Auflösung)
n	Charakteristische Verteilungsdichte
P	Druck
Pe	Peclet-Zahl
Q	Q-Kriterium
q	Anzahl der diskretisierten Geschwindigkeitsvektoren
\vec{q}	Wärmefluss
Re	Reynoldszahl
\bar{S}	Scherung
\mathbf{S}	Kollisionsmatrix (MRT-Modell)
s_0, \dots, s_8	Eigenwerte der Kollisionsmatrix (MRT-Modell)

s_i	Scherspannungsanteil der f_i (KBC-Modell)
Sc	Schmidt-Zahl
Sh	Shields-Parameter
Sr	Strouhalzahl
T	Temperatur
Δt	Zeitschrittweite
t	Zeit
t_i	Gitterspezifische Konstanten
T_e	Charakteristische Zeit für die Erosion
T_s	Charakteristische Zeit für die Sedimentation
Tu	Turbulenzgrad
$\vec{u} = (u, v, w)^T$	Vektor der makroskopischen Geschwindigkeit
$u^+ = u/u_\tau$	Dimensionslose Geschwindigkeit
U_∞	Anströmgeschwindigkeit
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit
\dot{V}	Volumenstrom
\vec{v}	Vektor der mikroskopischen Teilchengeschwindigkeit
v_c	Charakteristische Geschwindigkeit
w_s	Sinkgeschwindigkeit
Δx	Gitterabstand
$\vec{x} = (x, y, z)^T$	Ortsvektor
y^+	Dimensionsloser Wandabstand

1 Einleitung

Das Verständnis der Umströmung von Objekten am Meeresboden ist für eine Vielzahl von Bereichen von großer Bedeutung. Für die Konzeption von Offshore-Windparks sowie den Bau von Unterwasser-Pipelines ist die Strömung vor allem im Bezug auf die daraus resultierende Auskolung des Sedimentbetts relevant. Durch ein besseres Verständnis des Einflusses der jeweiligen Geometrien könnten entsprechende bauliche Veränderungen durchgeführt werden, um erhebliche Folgeschäden an den Konstruktionen zu vermeiden. Aber auch zur Bergung von Objekten am Meeresboden ist es nützlich, deren Einfluss auf das umliegende Sediment zu verstehen.

1.1 Motivation

Das (Wieder-)Auffinden von Objekten am Meeresboden spielt bei verschiedenen Disziplinen der Meeresnutzung eine bedeutende Rolle. Vor allem die Detektion und die sichere Bergung von Munitionsaltlasten in den Meeren stellt eine wichtige und teilweise gefährliche Angelegenheit dar. So beschäftigt sich beispielsweise seit 2008 der Expertenkreis „Munition im Meer“ des „Bund/Länder-Ausschusses Nord- und Ostsee“ (BLANO), ehemals der Arbeitsgemeinschaft „Bund/Länder-Messprogramm für die Meeresumwelt von Nord- und Ostsee“ (ARGE BLMP), mit der Bestandsaufnahme und Beurteilung von konventioneller und chemischer Munition in der Nord- und Ostsee (Böttcher et al., 2011, 2015). Bevor jedoch solche Munition überhaupt geborgen werden kann, muss sie zunächst geortet werden. Mit einem Fächerecholot oder einem Seitenschichtsonar kann zwar großflächig die Beschaffenheit des Meeresbodens bestimmt werden, eine Aussage darüber, ob an der vermessenen Stelle ein potentiell gefährliches Objekt lagert oder nicht, bedarf jedoch einer entsprechenden Auswertung der Daten. Nur wenn die charakteristischen Strukturen im Umfeld der Objekte bekannt sind, kann eine solche Datenauswertung wirklich zielführend sein.

Dem Verständnis der Vorgänge, welche zur Versandung von Seeminen führen, ist ein komplettes Band eines Journals gewidmet, welches durch Wilkens & Richardson (2007) eingeleitet und zusam-

mengefasst wird. Demnach wird die Versandung eines Objektes durch Nah- und Fernfeldprozesse bestimmt. Die Prozesse im Nahfeld des Objektes werden dabei maßgeblich von dessen Geometrie und Beschaffenheit beeinflusst, während die Fernfeldprozesse unabhängig von dem Objekt stattfinden. Letzteres kann beispielsweise eine Veränderung der Bodenbeschaffenheit durch Wellen und Gezeiten sein. Das Ziel des in dem Band vorgestellten Programms lag daher auf einer umfassenden Beschreibung der Versandung von Seeminen unter der Betrachtung aller relevanten Vorgänge, wobei ein Hauptmerk auf die Versandung unter dem Einfluss von Wellen gelegt wurde. Eine Methode zur Simulation des Prozesses wurde dabei von Jenkins et al. (2007) vorgestellt. Dort wurde zur Simulation der Umströmung des Objektes am Meeresboden die sogenannte *Vortex Lattice Method* (VLM) herangezogen (*vortex lattice method* [engl.]: Wirbelgitterverfahren). Bei der Methode werden die relevanten Strömungsstrukturen als Wirbel vorgegeben und entsprechend simuliert. Eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung findet jedoch nicht statt, sodass jegliche Viskositätseffekte unberücksichtigt bleiben. Zur genauen Ermittlung der (zeitaufgelösten) Strömung im Umfeld des Objektes ist die Methode daher nicht geeignet.

Allgemein stellt die Simulation der Umströmung von Objekten am Meeresboden eine Herausforderung dar. Gängige Simulationsverfahren, wie die Finite Volumen Methode (FVM), welche auf die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen beruhen, stoßen dabei auf eine Reihe von Problemen. Zum einen ist die Vernetzung der betrachteten Objekte nicht trivial und kann unter Umständen erhebliche Zeit im Vorfeld der eigentlichen Simulation in Anspruch nehmen. Wenn nun das Objekt während der Simulation zusätzlich aufgrund von Erosion freigelegt oder sogar bewegt werden soll, muss die Vernetzung gegebenenfalls während der Simulation erneut durchgeführt werden, was wiederum die Laufzeit deutlich erhöhen kann. Zum anderen stellt aber auch die relativ hohe Reynoldszahl am Meeresboden eine Herausforderung dar. In Extremfällen können die Geschwindigkeiten am Meeresgrund ca. $U = 1$ m/s betragen, sodass bei Objekten mit einer charakteristischen Länge von $L = 0,6$ m mit der kinematischen Viskosität von Wasser ($\nu = 1 \times 10^{-6}$ m²/s) Reynoldszahlen von $Re = UL/\nu = 6 \times 10^5$ auftreten können. Im Zusammenhang mit dem nötigen Simulationsbereich von mehreren charakteristischen Längen in alle Raumrichtungen werden somit mehrere Millionen Zellen benötigt, um eine korrekte Darstellung der Strömung zu garantieren. Eine gezielte Einsparung der Zellenanzahl ist zwar in Kombination mit einer umfangreichen Gitterkonvergenzstudie möglich, erhöht dadurch aber auch zwangsläufig den modellierten Anteil der Strömung (Rückborn et al., 2014).

Die Lattice Boltzmann Methode (LBM), welche auf der kinetischen Gastheorie aufbaut, ist seit einigen Jahrzehnten eine vielversprechende Alternative zu den gängigen Verfahren der Strömungssi-

mulation. Chen & Doolen (1998) und Aidun & Clausen (2010) fassen den Stand der Entwicklungen zu den jeweiligen Zeitpunkten zusammen. Dabei betonen Chen & Doolen (1998) vor allem die interdisziplinäre Natur der Methode, da sie zur Lösung sowohl von makroskopischen als auch von mikroskopischen Skalen geeignet ist. Dadurch lassen sich beispielsweise Mehrphasensimulationen (z.B. Shan & Chen, 1993) und Fluid-Partikel-Interaktionen (z.B. Ladd, 1993) hervorragend umsetzen. Weiterhin betonen sie, dass die LBM von der Laufzeit her mindestens vergleichbar mit anderen Simulationsmethoden ist und nebenbei auch eine exzellente Skalierbarkeit bei der Parallelisierung aufweist. Ferner ist die LBM gut geeignet, um neue physikalische Modelle in die Simulation einzubauen, da die LBM an sich recht simpel zu implementieren ist. Aidun & Clausen (2010) bestätigen diese Beobachtungen nochmals und ergänzen unter anderem, dass die LBM auch in gewissem Maße für Simulationen im Bereich der Mikrofluidik geeignet ist (Kim et al., 2008). Weiterhin kann die LBM auch zur Simulation von Turbulenz (z.B. Dong & Sagaut, 2008; Vahala et al., 2009) und deformierbaren Partikeln (z.B. Dupin et al., 2007) verwendet werden.

Während der letzten Jahre lag ein Hauptmerk der Entwicklung der LBM auf die Ermöglichung von numerisch stabilen Simulationen bei hohen Reynoldszahlen (bis zu $Re \approx 10^6$). Dies äußerte sich vor allem in der Entwicklung geeigneter Modelle, welche auch ohne eine explizite Turbulenzmodellierung auskommen (z.B. Karlin et al., 2014; Geier et al., 2015; Dorschner et al., 2016). Diese Entwicklungen sind jedoch noch alle recht neu, sodass sie hauptsächlich nur von den jeweiligen Arbeitsgruppen verwendet wurden und dadurch bisher nur auf begrenzte Anwendungsgebiete beschränkt blieben.

1.2 Zielstellung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Lattice Boltzmann Methode zur Simulation der Umströmung von Objekten am Meeresboden zu verwenden. Dazu soll der *open source* Code Palabos¹ verwendet werden, dem die Lattice Boltzmann Methode zugrunde liegt. Das Hauptmerk der Arbeit liegt dabei auf der Entwicklung einer Umgebung, welche unter Eingabe einiger weniger Parameter die Simulation der Umströmung eines beliebig geformten Objektes mit der LBM ermöglicht. Außerdem soll gezeigt werden, dass die Lattice Boltzmann Methode auch zur Simulation des Sedimenttransports im Umfeld von Objekten am Meeresboden geeignet ist.

¹www.palabos.org

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit beginnt mit einer ausführlichen Darstellung der Theorie der Lattice Boltzmann Methode in Kapitel 2. Dabei wird zunächst auf die Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen aus der Boltzmann-Gleichung eingegangen, bevor einige weitere Aspekte, die für die Strömungssimulation von Bedeutung sind, näher erläutert werden. Am Ende des Kapitels werden verschiedene Kollisionsmodelle im Hinblick auf deren numerische Stabilität miteinander verglichen. Kapitel 3 stellt anschließend die nötigen Implementierungen zur Umströmung von Objekten bei hohen Reynoldszahlen dar. Diese sind zum einen eine geeignete Behandlung von beliebig geformten Objekten in der Simulation sowie die Einbindung der dreidimensionalen Gitterverfeinerung. Zum anderen wird aber auch auf die Implementierung eines geeigneten Kollisionsmodells für dreidimensionale Simulationen eingegangen. Das Kapitel endet mit der Simulation eines stehenden Zylinders, welche alle genannten Implementierungen miteinander vereint. In Kapitel 4 wird die Simulationsumgebung zur Abbildung der Umströmung eines liegenden Zylinders im Reynoldszahlbereich des Meeresbodens verwendet. Anhand vorhandener Messdaten wird die dreidimensionale Strömung im Umfeld des Zylinders charakterisiert und anschließend die resultierenden Wandschubspannungen am Boden ausgewertet. Kapitel 5 liefert einen ersten Ansatz zur Simulation des Sedimenttransportes im Umfeld eines liegenden Zylinders am Meeresboden. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowie ein Ausblick auf mögliche zukünftige Arbeiten ist schließlich in Kapitel 6 gegeben.

2 Die Lattice Boltzmann Methode

2.1 Von der Boltzmann-Gleichung zu den Navier-Stokes-Gleichungen

2.1.1 Die Boltzmann-Gleichung

Der Lattice Boltzmann Methode (LBM) liegt die 1872 von Ludwig Boltzmann (vgl. Boltzmann, 1970) eingeführte und nach ihm benannte Boltzmann-Gleichung der kinetischen Gastheorie zugrunde:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \Omega(f) \quad (2.1)$$

Dabei ist $f = f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ eine Verteilungsfunktion, sodass $f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v / \rho(\vec{x}, t)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein mikroskopisches Teilchen in einem Fluid der Dichte ρ zum Zeitpunkt t am Ort \vec{x} eine Geschwindigkeit hat, die sich zwischen \vec{v} und $\vec{v} + d^3v$ befindet. \vec{F} ist eine von außen wirkende Kraft und der Term auf der rechten Seite stellt den Kollisionsoperator $\Omega(f)$ dar, welcher die Interaktionen zwischen den Teilchen beschreibt.

Über die Verteilungsfunktion können die makroskopischen Größen des Fluids bestimmt werden. Dabei gilt allgemein, dass der Mittelwert einer beliebigen Größe χ über das entsprechende mathematische Moment der Verteilungsfunktionen berechnet werden kann:

$$\langle \chi(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \chi f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.2)$$

Die Dichte ρ wird dabei über das Moment nullter Ordnung bestimmt:

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} f d^3v \quad (2.3)$$

Den Impuls erhält man dagegen über das Moment erster Ordnung (mit $\alpha = 1, 2, 3$):

$$\rho u_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} v_\alpha f d^3v \quad (2.4)$$

Dabei ist $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle$ die makroskopische Geschwindigkeit des Fluids, welche über den Mittelwert der mikroskopischen Teilchengeschwindigkeiten \vec{v} gebildet wird. Weiterhin kann auch der Drucktensor \mathbf{D} als Moment der Verteilungsfunktionen dargestellt werden (mit zusätzlich $\beta = 1, 2, 3$):

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\alpha \xi_\beta f d^3v \quad (2.5)$$

Hierfür wird allerdings die Eigengeschwindigkeit der Teilchen

$$\vec{\xi} = \vec{v} - \vec{u} \quad (2.6)$$

herangezogen, um das Moment zu bilden. Dagegen ergibt das entsprechende Moment über die Geschwindigkeit \vec{v} den sogenannten Impulsstromtensor $\mathbf{\Pi}$:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} v_\alpha v_\beta f d^3v \quad (2.7)$$

$$= D_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta \quad (2.8)$$

2.1.2 Der Kollisionsoperator

Der Kollisionsoperator in Gleichung 2.1 ergibt sich unter gewissen Voraussetzungen zu

$$\Omega(f) = \frac{1}{m} \int \int |\vec{v} - \vec{v}_1| [f(\vec{v}')f(\vec{v}_1') - f(\vec{v})f(\vec{v}_1)] dA d^3v \quad (2.9)$$

Dabei entspricht m der Teilchenmasse und dA dem Kollisionsquerschnitt zweier Teilchen, welche vor der Kollision die Geschwindigkeiten \vec{v} bzw. \vec{v}_1 und anschließend die Geschwindigkeiten \vec{v}' bzw. \vec{v}_1' besitzen. Eine ausführliche Herleitung sowie die speziellen Voraussetzungen für diese Form des Kollisionsoperators können z.B. in Grad (1949) nachgeschlagen werden.

Gemäß Cercignani (1988) lassen sich für diese Form des Kollisionsoperators bestimmte Funktionen $\psi_k(\vec{v})$ bestimmen, für die gilt, dass

$$\int \psi_k(\vec{v}) \Omega(f) d^3v = 0 \quad (2.10)$$

Diese Funktionen, welche die allgemeine Form $\psi_k(\vec{v}) = a + b\vec{v} + c\vec{v}^2$ annehmen, werden als Kollisionsinvarianten bezeichnet. Im Wesentlichen sind dabei $\psi_0 = 1$, $\psi_\alpha = v_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) und $\psi_4 = \vec{v}^2$ von Bedeutung, da diese zur Herleitung der makroskopischen Erhaltungsgleichungen benötigt werden.

2.1.3 Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Befindet sich das Fluid im lokalen Gleichgewicht, so findet keine zeitliche Veränderung der Verteilungsfunktionen statt. Es gilt:

$$\frac{Df}{Dt} = \Omega(f) = 0 \quad (2.11)$$

Des Weiteren kann das Boltzmannsche H-Theorem (Boltzmann, 1970) herangezogen werden, welches besagt, dass

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \quad (2.12)$$

für

$$H = \frac{1}{m} \int f \ln(f) d^3v d^3x \quad (2.13)$$

ist, solange f eine Lösung der Boltzmann-Gleichung (Gleichung 2.1) ist. Im Gleichgewichtszustand muss auch hier gelten, dass $dH/dt = 0$. Aus diesen beiden Überlegungen heraus erhält man schließlich als Gleichgewichtsverteilung die Maxwell-Boltzmann-Verteilung (vgl. Wolf-Gladrow, 2000):

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{(2\pi c_s^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\vec{\xi}^2}{2c_s^2} \right] \quad (2.14)$$

Dabei ist $c_s = \sqrt{k_B T / m}$ die Schallgeschwindigkeit, welche über die Boltzmann-Konstante k_B , die Temperatur T und die Masse m gebildet wird.

2.1.4 Erhaltungssätze

Aus der Boltzmann-Gleichung und den Kollisionsinvarianten lassen sich die makroskopischen Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie herleiten. Dazu wird Gleichung 2.1 zunächst mit den jeweiligen Kollisionsinvarianten multipliziert und anschließend integriert. Die äußere Kraft \vec{F} wird dabei vernachlässigt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi_k(\vec{v}) f d^3v + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int \psi_k(\vec{v}) v_\beta f d^3v = 0 \quad (2.15)$$

Hier wurde die Komponentenschreibweise x_β und v_β verwendet.

Unter Hinzunahme der Gleichungen 2.3 und 2.4 und für $\psi_0 = 1$ erhält man somit die Massenerhaltungs-

bzw. Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f d^3v + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\beta f d^3v = 0 \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\beta) = 0 \quad (2.17)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0} \quad (2.18)$$

Dabei ist Gleichung 2.18 lediglich die Vektorschreibweise von Gleichung 2.17 mit dem Nabla-Operator ∇ .

Für $\psi_\alpha = v_\alpha$ ($\alpha = 1,2,3$) wiederum ergibt sich aus Gleichung 2.15 zusammen mit den Gleichungen 2.4, 2.7 und 2.8:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int v_\alpha f d^3v + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v_\alpha v_\beta f d^3v = 0 \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Pi_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} D_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\alpha u_\beta) = 0 \quad (2.21)$$

Der Drucktensor \mathbf{D} kann dabei auch durch den Druck P und den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ausgedrückt werden:

$$D_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

$\delta_{\alpha\beta}$ ist hier das Kronecker-Delta. Aus Gleichung 2.21 wird somit:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta) = 0 \quad (2.23)$$

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (Gleichung 2.18) fallen einige Terme weg, sodass man schließlich den makroskopischen Impulserhaltungssatz erhält:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\alpha + u_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} P + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.25)$$

Die Energieerhaltungsgleichung erhält man durch das Einsetzen von $\psi_4 = \vec{v}^2 = v_\alpha v_\alpha = v^2$ in

Gleichung 2.15:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int v^2 f d^3v + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int v^2 v_\beta f d^3v = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle v^2 \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho \langle v^2 v_\beta \rangle) = 0 \quad (2.27)$$

wobei hier zunächst Gleichung 2.2 verwendet wurde. Setzt man gemäß Gleichung 2.6 $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\xi}$ und berücksichtigt, dass $\langle \xi_\alpha \rangle = 0$, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (u^2 + \langle \xi^2 \rangle)] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} [\rho (u^2 u_\beta + \langle \xi^2 \rangle u_\beta + 2u_\alpha \langle \xi_\alpha \xi_\beta \rangle + \langle \xi^2 \xi_\beta \rangle)] = 0 \quad (2.28)$$

Verwendet man nun folgende Definitionen für die spezifische innere Energie e und den Wärmefluss \vec{q} :

$$e = \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle \quad (2.29)$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2} \rho \langle \xi \xi^2 \rangle \quad (2.30)$$

zusammen mit den Gleichungen 2.5 und 2.22, so wird Gleichung 2.28 zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) u_\beta + (P \delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}) u_\alpha + q_\beta \right] = 0 \quad (2.31)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right] + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} + \rho e \vec{u} + P \vec{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{u} + \vec{q} \right) = 0 \quad (2.32)$$

In dieser Gleichung steckt noch die Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie $\frac{1}{2} \rho u^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} \right) = \frac{1}{2} u^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] + \rho \vec{u} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] \quad (2.33)$$

$$= -\vec{u} \cdot \nabla P + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.34)$$

Dabei fällt der erste Ausdruck in Klammern auf der rechten Seite von Gleichung 2.33 gemäß der Kontinuitätsgleichung (Gleichung 2.18) weg und der zweite Ausdruck in Klammern lässt sich gemäß der Impulserhaltungsgleichung (Gleichung 2.25) entsprechend umschreiben. Subtrahiert man nun Gleichung 2.34 von Gleichung 2.32, so erhält man schließlich die makroskopische Erhaltungs-

gleichung für die spezifische innere Energie:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} e + \vec{u} \cdot \nabla e = \frac{1}{\rho} [-P \nabla \cdot \vec{u} + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \cdot \vec{u}^T) - \nabla \cdot \vec{q}]} \quad (2.35)$$

mit dem Frobenius-Skalarprodukt:

$$\boldsymbol{\sigma} : (\nabla \cdot \vec{u}^T) = \sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (2.36)$$

2.1.5 Die Euler-Gleichungen

Die in dem vorherigen Abschnitt hergeleiteten Erhaltungssätze gelten allgemein für jede Verteilungsfunktion f , welche die Boltzmann-Gleichung erfüllt. Verwendet man speziell die Maxwell-Boltzmann-Verteilung (Gleichung 2.14), ergeben sich einige weitere Zusammenhänge für die makroskopischen Größen.

Setzt man $a = (2c_s^2)^{-1}$, lassen sich zunächst die Gleichungen 2.3 und 2.4 schnell verifizieren:

$$\rho^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(0)} d^3 \xi \quad (2.37)$$

$$= \rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-a(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)] d^3 \xi \quad (2.38)$$

$$= \rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-a\xi_x^2] d\xi_x}_{=\sqrt{\pi/a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-a\xi_y^2] d\xi_y}_{=\sqrt{\pi/a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-a\xi_z^2] d\xi_z}_{=\sqrt{\pi/a}} \quad (2.39)$$

$$= \rho \quad (2.40)$$

$$(\rho \vec{u})^{(0)} = \rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v} \exp [-a\xi^2] d^3 \xi \quad (2.41)$$

$$= \rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{u} + \vec{\xi}) \exp [-a\xi^2] d^3 \xi \quad (2.42)$$

$$= \underbrace{\rho \vec{u} \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-a\xi^2] d^3 \xi}_{=1} + \underbrace{\rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\xi} \exp [-a\xi^2] d^3 \xi}_{=0} \quad (2.43)$$

$$= \rho \vec{u} \quad (2.44)$$

Weiterhin gilt für den Drucktensor gemäß Gleichung 2.5:

$$D_{\alpha\beta}^{(0)} = \rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_\alpha \xi_\beta \exp[-a\xi^2] d^3\xi}_{\substack{=0 \text{ für } \alpha \neq \beta \\ =\pi^{3/2}/(2a^{5/2}) \text{ für } \alpha=\beta}} = \frac{\rho}{2a} \delta_{\alpha\beta} = \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (2.45)$$

Außerdem gilt allgemein für den Druck folgende Beziehung:

$$P = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 f d^3\xi \quad (2.46)$$

Mit der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ergibt sich dadurch:

$$P^{(0)} = \frac{1}{3} \rho \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \exp[-a\xi^2] d^3\xi = \rho c_s^2 \quad (2.47)$$

Zusammen mit Gleichung 2.22 stellt sich also heraus, dass der Spannungstensor im Gleichgewichtszustand verschwindet:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = P^{(0)} \delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}^{(0)} = \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta} - \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.48)$$

Darüber hinaus ergeben sich noch folgende Ausdrücke für die spezifische innere Energie und den Wärmefluss im Gleichgewichtszustand:

$$e^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \exp[-a\xi^2] d^3\xi = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} c_s^2 \quad (2.49)$$

$$\vec{q}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\xi} \xi^2 \exp[-a\xi^2] d^3\xi = 0 \quad (2.50)$$

Nun können die hergeleiteten Beziehungen aus den Gleichungen 2.45, 2.48, 2.49 und 2.50 in die Erhaltungsgleichungen 2.18, 2.25 und 2.35 eingesetzt werden und man erhält schließlich die Euler-

Gleichungen für reibungsfreie Fluide:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e + (\vec{u} \cdot \nabla) e = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.53)$$

2.1.6 Die Chapman-Enskog-Entwicklung

Bei der Chapman-Enskog-Entwicklung (Chapman & Cowling, 1970) wird eine allgemeine Lösung der Boltzmann-Gleichung durch eine sukzessive Approximation der Verteilungsfunktion erreicht. Dadurch wird es auch möglich, die Boltzmann-Gleichung in die Navier-Stokes-Gleichungen zu überführen, im Zuge dessen man einen expliziten Ausdruck für den Spannungstensor erhält.

Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Kollisionsoperator gemäß Bathnagar, Gross & Krook (Bhatnagar et al., 1954) verwendet, welcher darauf beruht, dass sich die Verteilungsfunktionen über eine Relaxationszeit τ dem Gleichgewichtszustand $f^{(0)}$ annähern:

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau} (f - f^{(0)}) \quad (2.54)$$

Die Boltzmann-Gleichung nimmt somit folgende Form an:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{(0)}) \quad (2.55)$$

Nun kann diese Gleichung gemäß Krafczyk (2001) in eine dimensionslose Form gebracht werden. Dazu werden zunächst die charakteristische Längenskala L_c , die charakteristische Geschwindigkeit v_c sowie die charakteristische Verteilungsdichte n definiert, sodass folgende Beziehungen für die dimensionslosen Größen gelten:

$$\hat{f} = \frac{f}{n}, \quad \hat{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{v_c}, \quad \hat{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{L_c}, \quad \hat{t} = \frac{tv_c}{L_c} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{L_c} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \frac{v_c}{L_c} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \quad (2.58)$$

Die dimensionslose Form von Gleichung 2.55 lautet somit:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} = -\frac{1}{\epsilon} \left(\hat{f} - \hat{f}^{(0)} \right) \quad (2.59)$$

wobei hier die Knudsenzahl ϵ mit der freien Weglänge $\lambda = v_c \tau$ verwendet wurde:

$$\epsilon = \frac{v_c \tau}{L_c} \quad (2.60)$$

Für kleine Knudsenzahlen kann gemäß der Chapman-Enskog-Entwicklung die dimensionslose Verteilungsfunktion in eine Reihe entwickelt werden:

$$\hat{f} = \hat{f}^{(0)} + \epsilon \hat{f}^{(1)} + \epsilon^2 \hat{f}^{(2)} + \dots \quad (2.61)$$

Definiert man nun die Boltzmann-Gleichung als Operator $\mathcal{L}(f)$, so ist das besondere an der obigen Reihenentwicklung, dass man auch $\mathcal{L}(f)$ entsprechend unterteilen kann:

$$\mathcal{L}(\hat{f}) = \mathcal{L}(\hat{f}^{(0)} + \epsilon \hat{f}^{(1)} + \dots) = \mathcal{L}^{(0)}(\hat{f}^{(0)}) + \mathcal{L}^{(1)}(\hat{f}^{(0)}, \hat{f}^{(1)}) + \dots = 0 \quad (2.62)$$

Es wird also deutlich, dass alle $\mathcal{L}^{(n)}(\hat{f}^{(0)}, \dots, \hat{f}^{(n)})$ verschwinden müssen, um Gleichung 2.62 zu erfüllen. Dadurch kann die allgemeine Lösung für \hat{f} über die sukzessiven Berechnungen der Approximationen erhalten werden: $\hat{f}^{(0)}$ ist die Gleichgewichtsverteilung, wodurch $\mathcal{L}^{(0)}(\hat{f}^{(0)}) = 0$ automatisch erfüllt ist. $\hat{f}^{(1)}$ erhält man dann anschließend über die Bedingung $\mathcal{L}^{(1)}(\hat{f}^{(0)}, \hat{f}^{(1)}) = 0$, $\hat{f}^{(2)}$ dann über $\mathcal{L}^{(2)}(\hat{f}^{(0)}, \hat{f}^{(1)}, \hat{f}^{(2)}) = 0$, usw.

Um die Navier-Stokes-Gleichungen herleiten zu können, wird die explizite Darstellung von $f^{(1)}$, gegeben durch $\mathcal{L}^{(1)}(\hat{f}^{(0)}, \hat{f}^{(1)}) = 0$, benötigt. Dazu wird zunächst die Reihenentwicklung aus Gleichung 2.61 in die Gleichung 2.55 eingesetzt:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\hat{f}^{(0)} + \epsilon \hat{f}^{(1)} + \dots \right) + \hat{v} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{f}^{(0)} + \epsilon \hat{f}^{(1)} + \dots \right) = -\frac{1}{\epsilon} \left(\epsilon \hat{f}^{(1)} + \dots \right) \quad (2.63)$$

$\mathcal{L}^{(1)}(\hat{f}^{(0)}, \hat{f}^{(1)}) = 0$ erhält man dann über das Betrachten der Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^0)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{f}^{(0)} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \hat{f}^{(0)} = -\hat{f}^{(1)} \quad (2.64)$$

Um schließlich einen Ausdruck für $f^{(1)}$ zu erhalten, wird diese Gleichung wieder in die dimensions-behaftete Form überführt:

$$f^{(1)} = -\frac{\tau}{\epsilon} \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{x}} \right) \quad (2.65)$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen erhält man nun, indem man die Gleichungen 2.3, 2.4 und 2.5 unter Vernachlässigung der Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ approximiert:

$$\rho = \int \left(f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \dots \right) d^3v = \int f^{(0)} d^3v \quad (2.66)$$

$$\rho \vec{u} = \int \vec{v} \left(f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \dots \right) d^3v = \int \vec{v} f^{(0)} d^3v \quad (2.67)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int \xi_\alpha \xi_\beta \left(f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \dots \right) d^3v \quad (2.68)$$

$$= \int \xi_\alpha \xi_\beta f^{(0)} d^3v + \epsilon \int \xi_\alpha \xi_\beta f^{(1)} d^3v + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.69)$$

$$= D_{\alpha\beta}^{(0)} + \epsilon D_{\alpha\beta}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.70)$$

wobei die Dichte und der Impuls Erhaltungsgrößen sind, welche somit vollständig über die Gleichgewichtsverteilung gegeben sind. Setzt man nun die Gleichungen 2.22, 2.45 und 2.47 in Gleichung 2.70 ein, so erhält man folgende Approximation für den Spannungstensor:

$$\sigma_{\alpha\beta} \approx -\epsilon D_{\alpha\beta}^{(1)} = -\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_\alpha \xi_\beta f^{(1)} d^3v \quad (2.71)$$

Um diesen Term auswerten zu können, betrachtet man nochmals Gleichung 2.65. Da die Gleichgewichtsverteilungsfunktion $f^{(0)}$ für inkompressible Strömungen nur implizit von der Zeit über die Variablen ρ und \vec{u} abhängt, werden die zeitlichen und räumlichen Ableitungen entsprechend

umgeschrieben:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \quad (2.72)$$

$$= \frac{f^{(0)}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} + \frac{\xi_\delta}{c_s^2} f^{(0)} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_\gamma} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} \quad (2.74)$$

$$= -\frac{f^{(0)}}{\rho} \frac{\partial (\rho u_\gamma)}{\partial x_\gamma} - \frac{\xi_\delta}{c_s^2} f^{(0)} \left(u_\gamma \frac{\partial u_\delta}{\partial x_\gamma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\gamma} \right) \quad (2.75)$$

wobei im letzten Schritt die Gleichungen 2.51 und 2.52 verwendet wurden. Eingesetzt in Gleichung 2.65 erhält man somit:

$$f^{(1)} = -\frac{\tau}{\epsilon} \left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_\gamma \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_\gamma} \right] \quad (2.76)$$

$$= -\frac{\tau}{\epsilon} \left[\xi_\gamma \frac{f^{(0)}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} - f^{(0)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} + \xi_\gamma \xi_\delta \frac{f^{(0)}}{c_s^2} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_\gamma} - \xi_\delta \frac{f^{(0)}}{c_s^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\gamma} \right] \quad (2.77)$$

Nun kann Gleichung 2.77 in Gleichung 2.71 eingesetzt werden, wobei alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\xi)$ direkt unberücksichtigt bleiben, da diese bei der Integration verschwinden. Außerdem werden im Folgenden der Einfachheit halber die Integrationsgrenzen weg gelassen und die Integration über $d^3\xi$ statt über d^3v ausgeführt:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tau \left[-\int \xi_\alpha \xi_\beta f^{(0)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} d^3\xi + \int \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta \frac{f^{(0)}}{c_s^2} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_\gamma} d^3\xi \right] \quad (2.78)$$

$$= \tau \left[-\rho c_s^2 \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \rho c_s^2 \frac{\partial u_\delta}{\partial x_\gamma} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \right] \quad (2.79)$$

Mit der folgenden Definition der kinematischen Viskosität

$$\nu = \tau c_s^2 \quad (2.80)$$

erhält man somit den Spannungstensor der Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \rho \nu \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right] \quad (2.81)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \rho \nu \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right]} \quad (2.82)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung 2.25 ein, erhält man schließlich die Navier-Stokes-Gleichung für die Impulserhaltung.

Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass auch die Temperatur als zeitlich variabel angenommen werden kann. Dies hätte zur Folge, dass bei den entsprechenden Ableitungen der Gleichgewichtsverteilungsfunktion $f^{(0)}$ zusätzliche Terme in Abhängigkeit der inneren Energie e hinzugenommen werden müssten. Werden diese Terme bis zum Ende berücksichtigt, so erhält man den Spannungstensor für kompressible Strömungen:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \rho\nu \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.83)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \rho\nu \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} \right]} \quad (2.84)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt.

2.2 Diskretisierung

Nachdem ausführlich gezeigt wurde, dass die Boltzmann-Gleichung im kontinuierlichen Limit und bei kleinen Knudsenzahlen den Navier-Stokes-Gleichungen entspricht, soll im Folgenden näher auf die Diskretisierung eingegangen werden. Diese ist vor allem notwendig, um die kontinuierliche Boltzmann-Gleichung in die explizite Lattice-Boltzmann-Gleichung (*lattice* [engl.]: Gitter) umzuschreiben.

Als Ausgangspunkt wird daher zunächst die kontinuierliche Boltzmann-Gleichung unter Vernachlässigung einer von außen wirkenden Kraft gewählt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \Omega(f) \quad (2.85)$$

Nun wird eine geeignete Diskretisierung der Verteilungsfunktionen mittels der Geschwindigkeit \vec{v} gewählt, sodass aus den kontinuierlichen Verteilungsfunktionen $f(t, \vec{x}, \vec{v})$ diskrete Werte $f_i(t, \vec{x})$ werden:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_{i\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = \Omega_i \quad (2.86)$$

Die Anzahl q der benötigten Verteilungsfunktionen an einem Ort \vec{x} und zum Zeitpunkt t hängt dabei von der entsprechenden Auswahl der diskreten Geschwindigkeitsvektoren ab. Diese Diskretisierung muss zum einen gewährleisten, dass die Chapman-Enskog-Entwicklung weiterhin die Navier-

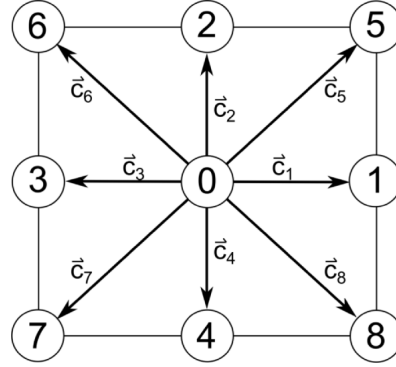
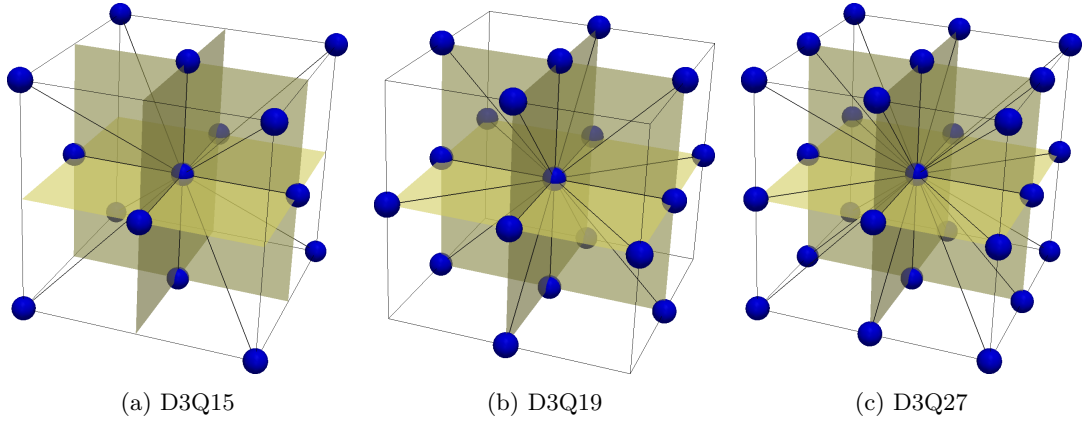
Abbildung 2.1: D2Q9-Gitter mit den jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren \vec{c}_i .

Abbildung 2.2: Die gängigsten 3D Gitter.

Stokes-Gleichungen liefert. Zum anderen muss sie aber auch so gewählt werden, dass die diskreten Geschwindigkeitsvektoren ein raumerfüllendes Gitter erzeugen. Im zweidimensionalen Raum sind daher mindestens neun und im dreidimensionalen Raum mindestens 15 diskrete Geschwindigkeitsvektoren nötig, wobei eine Geschwindigkeitskomponente jeweils der Nullvektor $\vec{v}_0 = (0, 0, 0)^T$ ist. Die Gitter, die diese Geschwindigkeiten im Raum aufspannen, werden gemäß Qian et al. (1992) als D2Q9 bzw. D3Q15 bezeichnet, wobei D die jeweilige Dimension angibt und Q die Anzahl der Geschwindigkeitsvektoren. Im dreidimensionalen ist es durchaus auch üblich ein D3Q19 oder D3Q27-Gitter zu verwenden. In den Abbildungen 2.1 und 2.2 sind diese Gitter graphisch dargestellt, wobei in Abbildung 2.1 zusätzlich die mit der Gittergeschwindigkeit c normierten Geschwindigkeitskomponenten $\vec{c}_i = \frac{1}{c} \vec{v}_i$ abgebildet sind.

Liegt eine geeignete Diskretisierung der Geschwindigkeiten und somit auch der Verteilungsfunktionen vor, muss noch die entsprechende räumliche und zeitliche Diskretisierung festgelegt werden.

Das von den diskreten und normierten Geschwindigkeitsvektoren \vec{c}_i aufgespannte Gitter liefert direkt auch ein geeignetes Gitter für die räumliche Diskretisierung. So kann von jedem diskretisierten Punkt \vec{x} aus ein benachbarter Gitterpunkt $\hat{\vec{x}}$ über $\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \vec{c}_i \Delta x$ erreicht werden, wobei Δx demnach der Gitterabstand ist. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt über die konstante Zeitschrittweite Δt . Damit kann nun das Finite-Differenzen-Schema auf Gleichung 2.86 angewandt werden:

$$\frac{f_i(t + \Delta t, \vec{x}) - f_i(t, \vec{x})}{\Delta t} + c \frac{f_i(t + \Delta t, \vec{x} + \vec{c}_i \Delta x) - f_i(t + \Delta t, \vec{x})}{\Delta x} = \Omega_i \quad (2.87)$$

Setzt man weiterhin $c = \Delta x / \Delta t$, so erhält man die Lattice-Boltzmann-Gleichung:

$$f_i(t + \Delta t, \vec{x} + \vec{c}_i \Delta x) - f_i(t, \vec{x}) = \Delta t \Omega_i \quad (2.88)$$

Für die Implementierung ist es ratsam, $\Delta x = 1$, $\Delta t = 1$ und somit auch $c = 1$ zu setzen, sodass die Lattice-Boltzmann-Gleichung folgendermaßen vereinfacht werden kann:

$$\boxed{f_i(t + 1, \vec{x} + \vec{c}_i) = f_i(t, \vec{x}) + \Omega_i} \quad (2.89)$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht der Advektion, während die rechte Seite die Kollision beschreibt. So kann die Lattice-Boltzmann-Gleichung allgemein in zwei Schritten gelöst werden:

1. Kollision: Alle an einem Gitterpunkt vorhandenen Verteilungsfunktionen werden gemäß des verwendeten Kollisionsoperators aktualisiert.
2. Advektion: Alle Verteilungsfunktionen werden gemäß des jeweils zugeordneten Geschwindigkeitsvektors zum nächsten Gitterpunkt advektiert. Im Zuge dieses Schrittes geht die Simulation auch in den nächsten Zeitschritt über.

Die makroskopischen Variablen werden meist nach dem Advektionsschritt evaluiert, sodass man beim Implementieren zusätzlicher Schritte darauf achten sollte, ob diese nach der Advektion oder vor der Kollision stattfinden sollen.

Durch die Diskretisierung gehen auch die Integrale zur Bestimmung der Momente der Verteilungsfunktionen in Summen über, sodass z.B. die Dichte und der Impuls folgendermaßen gegeben

sind:

$$\rho = \sum_{i=0}^{q-1} f_i \quad (2.90)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_{i=0}^{q-1} \vec{c}_i f_i \quad (2.91)$$

Verwendet man nun im Zusammenhang mit Gleichung 2.89 den Kollisionsoperator nach Bhatnagar et al. (1954) (vgl. Gleichung 2.54), so erhält man die als LBGK (Lattice Bhatnagar Gross Krook) bezeichnete Gleichung:

$$f_i(t+1, \vec{x} + \vec{c}_i) - f_i(t, \vec{x}) = -\frac{1}{\tau} \left(f_i(t, \vec{x}) - f_i^{(0)}(t, \vec{x}) \right) \quad (2.92)$$

Offensichtlich benötigt diese Gleichung eine explizite Darstellung der diskretisierten Gleichgewichtsterme $f_i^{(0)}$. Dazu wird zunächst die Maxwell-Boltzmann-Verteilung (Gleichung 2.14) im Geschwindigkeitsraum diskretisiert:

$$f_i^{(0)} = \frac{\rho}{(2\pi c_s^2)^{D/2}} \exp \left[-\frac{(\vec{c}_i - \vec{u})^2}{2c_s^2} \right] \quad (2.93)$$

wobei D die Dimension des verwendeten Gitters ist. Im Grunde genommen könnte diese Gleichung direkt verwendet werden, allerdings ist die Exponentialfunktion mit numerischen Methoden nur näherungsweise lösbar. Es bietet sich daher an, das Gleichgewicht in einer Taylorreihe um \vec{u} zu entwickeln. Für kleine Machzahlen $Ma = |\vec{u}|/c_s \ll 1$ genügt eine Reihenentwicklung bis zur zweiten Ordnung in \vec{u} , sodass man folgenden Ausdruck erhält:

$$f_i^{eq} = \rho t_i \left[1 + \frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})}{c_s^2} + \frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2 - c_s^2 (\vec{u} \cdot \vec{u})}{2c_s^4} \right] \quad (2.94)$$

Dabei sind t_i gitterspezifische Konstanten, die den folgenden Term ersetzen:

$$\frac{1}{(2\pi c_s^2)^{D/2}} \exp \left[-\frac{\vec{c}_i^2}{2c_s^2} \right] \rightarrow t_i \quad (2.95)$$

Diese Konstanten lassen sich konkret bestimmen, indem man voraussetzt, dass die diskretisierten Momente von $f_i^{eq}|_{(\vec{u}=0)} = \rho t_i$ den kontinuierlichen Momenten (vgl. Kapitel 2.1.5) entsprechen. Für das D2Q9-Gitter erhält man dadurch z.B. folgende Werte für t_i , sowie einen expliziten Ausdruck

für die Schallgeschwindigkeit in Gittereinheiten c_s :

$$t_0 = \frac{4}{9} \quad t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \frac{1}{9} \quad t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = \frac{1}{36} \quad (2.96)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (2.97)$$

Die Indizes hierzu wurden gemäß Abbildung 2.1 gewählt.

Auch für die Lattice-Boltzmann-Gleichung lässt sich analog zum kontinuierlichen Fall aus den Kapiteln 2.1.5 und 2.1.6 zeigen, dass sie im makroskopischen Limit in die Navier-Stokes-Gleichungen übergeht. Dabei gilt zwar nach wie vor für den Druck $P = \rho c_s^2$, für die kinematische Viskosität gilt aufgrund der Diskretisierung jedoch eine leicht abgeänderte Form im Vergleich zu Gleichung 2.80:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad (2.98)$$

2.3 Approximation der Verteilungsfunktionen

Gelegentlich, vor allem bei der Implementierung von Randbedingungen, kann es hilfreich sein, die Verteilungsfunktionen f_i direkt als Funktion der makroskopischen Variablen anzugeben. Dazu muss im isothermen Fall zunächst der Anteil der Verteilungsfunktionen ermittelt werden, der nötig ist, um die Erhaltungsgrößen der Dichte ρ und des Impulses $\vec{j} = \rho \vec{u}$ sowie den Spannungstensor σ korrekt abzubilden. So blieb bei der Chapman-Enskog-Entwicklung in Kapitel 2.1.6 beim Übergang von Gleichung 2.77 zu Gleichung 2.78 nur ein Teil der Terme von $f^{(1)}$ erhalten. Rekonstruiert man also im Gegenzug $f^{(1)}$ aus σ , so erhält man eine Approximation der Verteilungsfunktionen, welche ρ , \vec{j} und σ korrekt abbildet und keine Terme höherer Momente mehr enthält. Gemäß Latt & Chopard (2006) und Lätt (2007) ergibt sich dadurch für $f^{(1)}$ folgender Ausdruck:

$$f_i^{(1)} \approx \frac{t_i}{2c_s^4} (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) \Pi_{\alpha\beta}^{neq} \quad (2.99)$$

wobei hier statt des Spannungstensors σ das entsprechende Moment der Verteilungsfunktionen, der Impulsstromtensor Π , verwendet wurde. Gemäß der Chapman-Enskog-Entwicklung und den

Gleichungen 2.8, 2.22 und 2.98 sind beide Tensoren über folgende Beziehung miteinander verknüpft:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{\nu}{\tau c_s^2} \Pi_{\alpha\beta}^{(1)} \approx -\frac{\nu}{\tau c_s^2} \Pi_{\alpha\beta}^{neq} \quad (2.100)$$

$$= \left(\frac{1}{2\tau} - 1 \right) \Pi_{\alpha\beta}^{neq} = \left(\frac{1}{2\tau} - 1 \right) \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} (f_i - f_i^{eq}) \quad (2.101)$$

Weiterhin gilt:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{eq} = \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta \quad (2.102)$$

sodass das Gleichgewicht aus Gleichung 2.94 folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$f_i^{eq} = \rho t_i \left[1 + \frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{(\Pi_{\alpha\beta}^{eq} - \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta})}{2\rho c_s^4} \right] \quad (2.103)$$

Für die Approximation der gesamten Verteilungsfunktionen erhält man dadurch folgenden Ausdruck:

$$f_i \approx f_i^{eq} + f_i^{(1)} = \rho t_i \left[1 + \frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{(\Pi_{\alpha\beta} - \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta})}{2\rho c_s^4} \right] \quad (2.104)$$

Diese Approximation ist außerdem identisch mit der diskretisierten Variante der Approximation nach Grad (1949) mit zehn Momenten (Gorban & Karlin, 2005; Chikatamarla et al., 2006).

2.4 Randbedingungen

Zur Lösung strömungsmechanischer Problemstellungen reicht im Grunde genommen die Lattice-Boltzmann-Gleichung (Gleichung 2.89) mit einem geeigneten Kollisionsmodell aus. Allerdings benötigt man zur Simulation noch eine korrekte Behandlung der Ränder des Simulationsbereichs. Wie in Abbildung 2.3 deutlich wird, fehlen nach dem Advektionsschritt einige Verteilungsfunktionen in den Randzellen. Um diese zu rekonstruieren, ist eine geeignete Randbedingung nötig, die meistens über die makroskopischen Variablen definiert wird. Die Problematik besteht allerdings darin, die fehlenden Verteilungsfunktionen möglichst gut über die makroskopischen Variablen zu definieren, während die Information aus den anderen Verteilungsfunktionen erhalten bleiben soll. Im Folgenden werden mögliche Ansätze zur Behandlung einiger spezieller Randbedingungen vorgestellt.

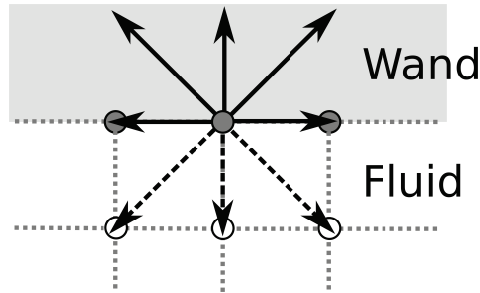
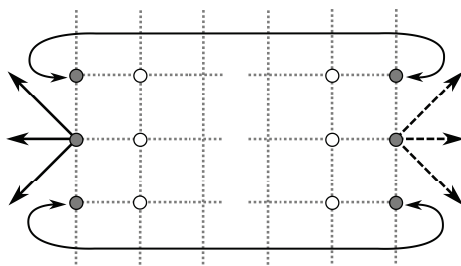


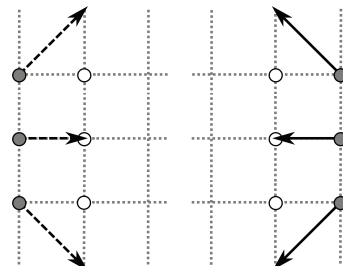
Abbildung 2.3: Verteilungsfunktionen einer Randzelle (gefüllte Kreise) nach einem Advektionsschritt. Die gestrichelten Verteilungsfunktionen fehlen, sodass hier eine geeignete Randbedingung nötig ist.

2.4.1 Periodische Randbedingungen

Periodische Randbedingungen stellen die einfachste Form der Behandlung der Simulationsränder dar. Hierzu werden die fehlenden Verteilungsfunktionen direkt durch die ausströmenden Verteilungsfunktionen auf dem gegenüberliegenden Rand ersetzt. In Abbildung 2.4 ist das Prinzip schematisch anhand eines Beispiels von zwei gegenüberliegenden Randzellen dargestellt: Die Verteilungsfunktionen, welche in Abbildung 2.4a mit durchgezogenen Linien dargestellt sind, repräsentieren Verteilungsfunktionen, welche auf der linken Seite den Simulationsbereich verlassen würden, während die gestrichelten Verteilungsfunktionen rechts aus dem Simulationsbereich strömen würden. Bei den periodischen Randbedingungen strömen diese Verteilungsfunktionen jeweils auf der gegenüberliegenden Seite wieder in die Simulation hinein, was in Abbildung 2.4b erkennbar wird.



(a) Vor dem Advektionsschritt



(b) Nach dem Advektionsschritt

Abbildung 2.4: Schema der periodischen Randbedingungen. Dargestellt sind nur Verteilungsfunktionen, welche im Advektionsschritt normalerweise den Simulationsbereich verlassen würden.

2.4.2 no-slip Randbedingungen

Hafttrandbedingungen, oder auch *no-slip* Randbedingungen, sind bei vielen strömungsmechanischen Simulationen von großer Bedeutung. Im Rahmen der LBM können solche Randbedingungen über das sogenannte *bounce-back* Verfahren implementiert werden (*to bounce back* [engl.]: abprallen). Dabei werden die Verteilungsfunktionen, welche im Normalfall den Simulationsbereich verlassen würden, lediglich zurück reflektiert. In Abbildung 2.5 ist das Prinzip schematisch dargestellt, wobei hier die Variante gewählt wurde, bei der gemäß Cornubert et al. (1991) die Wand zwischen der letzten Fluidzelle und einer fiktiven ersten Wandzelle liegt. Der Advektionsschritt für die fehlenden Verteilungsfunktionen lautet dabei folgendermaßen:

$$f_i(\vec{x}, t+1) = f_i^C(\vec{x}, t), \quad \vec{c}_i = -\vec{c}_i \quad (2.105)$$

wobei f_i^C die kollidierten Verteilungsfunktionen sind. Es findet also wie üblich der Kollisionsschritt statt, bevor anschließend auf den Randzellen die Advektion durchgeführt wird, die bei den ausgehenden Verteilungsfunktionen mit einem *bounce-back* Schritt ersetzt wird. Dadurch haben weder Verteilungsfunktionen den Simulationsbereich verlassen, noch fehlen anschließend welche.

Soll im Rahmen der *bounce-back* Methode die Wand jedoch genau auf der letzten Fluidzelle liegen, so müssen die Verteilungsfunktionen reflektiert werden, sobald sie im Zuge des Advektionsschritts an der Randzelle angekommen sind (Ziegler, 1993). Für die fehlenden Verteilungsfunktionen gilt somit:

$$f_i(\vec{x}, t+1) = f_i^C(\vec{x} - \vec{c}_i, t) \quad (2.106)$$

Es findet also zunächst die übliche Kollision und Advektion statt, bei der die ausgehenden Verteilungsfunktionen auf den Randzellen den Simulationsbereich verlassen. Erst anschließend wird der *bounce-back* Schritt für die fehlenden Verteilungsfunktionen durchgeführt.

Obwohl die *bounce-back* Methode leicht zu implementieren ist und wenig Rechenleistung benötigt, werden für stationäre Wände, deren Position im Bezug auf die Randzellen genau festgelegt sein soll, üblicherweise andere Methoden herangezogen, die eine höhere Genauigkeit mit sich bringen. Eine detaillierte Beschreibung aller möglichen Methoden würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen, sodass an dieser Stelle auf Latt et al. (2008) und Nash et al. (2014) verwiesen wird, welche jeweils einige der gängigsten Methoden miteinander vergleichen. Dabei liegt bei Latt et al. das Hauptmerk auf Dirichlet-Randbedingungen, bei denen die Wand genau auf den Randzellen liegt. Diese Randbedingungen nennt man daher auch *on-lattice boundaries* ([engl.]:



Abbildung 2.5: Schema der *bounce back* Randbedingungen. Die Verteilungsfunktionen, welche den Simulationsbereich im Normalfall verlassen würden, sind unterschiedlich gekennzeichnet, um deren jeweiliges Verhalten beim Advektionsschritt zu verdeutlichen.

Ränder, welche auf dem Gitter liegen) oder ‘wet’ nodes ([engl.]: nasse Zellen). Die dort vorgestellten Dirichlet-Randbedingungen nach Inamuro et al. (1995), Zou & He (1997), Lätt (2007) und Skordos (1993) zielen außerdem darauf ab, die makroskopischen Variablen möglichst genau zu rekonstruieren, sodass sie nicht zwangsläufig auf *no-slip* Ränder beschränkt sind. Nash et al. vergleicht dagegen hauptsächlich die hier dargestellte „einfache“ *bounce-back* Methode mit den anspruchsvolleren *bounce-back* Methoden nach Bouzidi et al. (2001) und Guo et al. (2002a), bei denen die exakte Position der Wand beliebig gewählt werden kann und die somit auch für komplexere Geometrien geeignet sind. Obwohl Nash et al. diese Methoden nur für *no-slip* Ränder betrachtet, sind auch diese nicht zwangsläufig auf ruhende Wände beschränkt.

Ein Ansatz, welcher die „einfache“ *bounce-back* Methode numerisch stabiler macht, wurde von Chikatamarla & Karlin (2013) eingeführt. Dort wird die sogenannte Tamm-Mott-Smith (TMS) Methode vorgestellt, welche auf einer bimodalen Approximation der Verteilungen nach Mott-Smith (1951) und Tamm (1967) basiert. Dabei werden im Anschluss an den *bounce-back* Schritt, aber noch vor der Kollision, Zielwerte für die Dichte und die Geschwindigkeit bestimmt. Betrachtet man die fehlenden Verteilungsfunktionen als eine Teilmenge aller Verteilungsfunktionen $f_i, i \in \bar{D}$, so gilt mit $f_i^{bb} = f_{\bar{i}}$ und $\vec{c}_{\bar{i}} = -\vec{c}_i$:

$$\rho_{tgt} = \sum_{i \in \bar{D}} f_i^{bb} + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \quad (2.107)$$

$$\vec{u}_{tgt} = \frac{1}{\rho_{tgt}} \left(\sum_{i \in \bar{D}} f_i^{bb} \vec{c}_{\bar{i}} + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \vec{c}_i \right) \quad (2.108)$$

Die Verteilungsfunktionen werden daraufhin folgendermaßen modifiziert:

$$f_i = \begin{cases} 2f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) - f_i^{eq}(\rho^*, \vec{u}^*), & i \in \bar{D} \\ f_i + f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) - f_i^{eq}(\rho^*, \vec{u}^*), & i \notin \bar{D} \end{cases} \quad (2.109)$$

mit

$$\rho^* = \sum_{i \in \bar{D}} f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \quad (2.110)$$

$$\vec{u}^* = \frac{1}{\rho^*} \left(\sum_{i \in \bar{D}} f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) \vec{c}_i + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \vec{c}_i \right) \quad (2.111)$$

Dies hat zur Folge, dass die Verteilungsfunktionen, welche noch vor dem *bounce-back* Schritt fehlten, aus einer linearen Kombination aus den gewünschten Zielwerten und den tatsächlichen Dichte- und Geschwindigkeitswerten gewonnen werden. Gleichzeitig wird bei den anderen Verteilungsfunktionen ein Zusatzterm ergänzt, der die Differenz zwischen den Zielwerten und den tatsächlichen Werten kompensiert. Das so gewonnene Schema ist numerisch äußerst stabil und lässt sich problemlos als Zusatz zur „einfachen“ *bounce-back* Methode implementieren. Aber auch die TMS-Methode ist nicht zwangsläufig auf *no-slip* Randbedingungen beschränkt. Im Gegensatz zur Bestimmung der Zielwerte über den *bounce-back* Schritt, könnten diese vor allem bei den *on-lattice boundaries* auch direkt über die gewünschten makroskopischen Werte definiert werden.

2.4.3 free-slip Randbedingungen

Bei *free-slip* Randbedingungen wird die zur Wand tangentielle Geschwindigkeitskomponente beibehalten, während die normale Geschwindigkeitskomponente verschwindet. Eine Variante, diese Randbedingungen zu implementieren, wäre also wieder die makroskopische Geschwindigkeit entsprechend festzulegen und die Verteilungsfunktionen über die oben erwähnten *on-lattice boundaries* zu rekonstruieren. Dies ist jedoch insofern problematisch, als man dann die korrekte *free-slip* Geschwindigkeit zunächst zu jedem Zeitschritt neu bestimmen muss und an der Randzelle selbst keine eindeutig bestimmbare Geschwindigkeit vorliegt. Es wird bei dieser Variante daher meist die tangentielle Geschwindigkeit der nächsten Fluidzelle normal zur Wand verwendet.

Für viele Anwendungen genügt die obige Behandlung der *free-slip* Ränder. Allerdings bringt sie, gerade bei höheren Reynoldszahlen oder niedrigen Auflösungen, numerische Instabilitäten mit sich, was sie in solchen Fällen unbrauchbar macht. Eine häufig verwendete Alternative ist daher die



Abbildung 2.6: Schema der *free-slip* Randbedingungen, basierend auf dem Prinzip der *specular reflection*. Die Verteilungsfunktionen, welche den Simulationsbereich im Normalfall verlassen würden, sind unterschiedlich gekennzeichnet, um deren jeweiliges Verhalten beim Advektionsschritt zu verdeutlichen.

sogenannte *specular reflection* ([engl.]: Spiegelreflexion), wie sie schon von Frisch et al. (1986) für das nach ihnen benannte FHP-Modell - in gewissen Maßen ein Vorgänger der LBM - vorgeschlagen wurde. Das Prinzip ähnelt dem der *bounce-back* Methode und ist in Abbildung 2.6 verdeutlicht. Im Gegensatz zur *bounce-back* Methode werden die Verteilungsfunktionen nicht mehr in die Richtung zurück reflektiert, aus der sie kommen, sondern sie werden an der fiktiven „Wand“ gespiegelt:

$$f_i(\vec{x}, t+1) = f_i^C(\vec{x}, t), \quad \vec{c}_i = -\vec{c}_{i,\perp} + \vec{c}_{i,\parallel} \quad (2.112)$$

wobei $\vec{c}_{i,\perp}$ und $\vec{c}_{i,\parallel}$ jeweils die zur Wand normale bzw. tangentielle Geschwindigkeitskomponente von \vec{c}_i sind. Durch die Spiegelreflexion der Verteilungen verschwindet also die zur Wand normale Geschwindigkeitskomponente, während die tangentielle Geschwindigkeitskomponente unverändert beibehalten wird. Außerdem wird auch die komplette restliche Information aus der umgebenden Strömung beibehalten, da die Verteilungsfunktionen nicht erst aus den makroskopischen Größen rekonstruiert werden müssen.

2.4.4 Einlass

Bei der Einlassrandbedingung wird eine festgelegte makroskopische Geschwindigkeit, meist normal zur Wand, vorgegeben. Die Behandlung dieser Randbedingung erfolgt mit den Methoden der *no-slip* Randbedingung, allerdings nun mit einer Wandgeschwindigkeit $\vec{u}_b \neq 0$. Für die Methoden, welche auf dem Prinzip des *bounce-back* beruhen, werden daher gemäß Ladd (1994) die zurück reflektierten Verteilungsfunktionen zusätzlich mit einem Korrekturterm versehen:

$$f_i(\vec{x}, t+1) = f_i^C(\vec{x}, t) + \frac{1}{c_s^2} 2t_i \rho (\vec{c}_i \cdot \vec{u}_b), \quad \vec{c}_i = -\vec{c}_i \quad (2.113)$$

Bei den *on-lattice boundaries* dagegen kann \vec{u}_b zwar direkt als makroskopische Geschwindigkeit verwendet werden, allerdings muss dann auch die Dichte entsprechend vorgegeben werden. Dazu unterteilt man zunächst nach Latt et al. (2008) die Verteilungsfunktionen in Abbildung 2.3 in diejenigen, die nach außen zeigen (ρ_+), diejenigen, die auf der Wand liegen (ρ_0) und diejenigen, die zur Strömung hin zeigen und somit noch fehlen (ρ_-). Die gesamte makroskopische Dichte der Randzelle lautet somit

$$\rho = \rho_- + \rho_+ + \rho_0 \quad (2.114)$$

Zusätzlich gilt für den durch den Einlass vorgegebenen Impuls

$$\rho u_{b,\perp} = \rho_+ - \rho_- \quad (2.115)$$

sodass in Gleichung 2.114 die Unbekannte ρ_- entsprechend ersetzt werden kann. Dadurch erhält man gemäß Zou & He (1997) folgenden Ausdruck für die Dichte:

$$\rho = \frac{1}{1 + u_{b,\perp}} (2\rho_+ + \rho_0) \quad (2.116)$$

Mit den makroskopischen Variablen der vorgegebenen Geschwindigkeit \vec{u}_b und der nach Gleichung 2.116 berechneten Dichte ρ können somit auch die *on-lattice boundaries* am Einlass verwendet werden.

2.4.5 Auslass

Für die Behandlung des Auslasses finden sich in der Literatur wieder mehrere verschiedene Methoden. Es können beispielsweise erneut die *on-lattice boundaries* verwendet werden, für die nun allerdings die Dichte festgelegt wird und nicht, wie bisher, die Geschwindigkeit. Dies ist darin begründet, dass die gleiche vorgegebene Geschwindigkeit am Ein- und Auslass zu einer zeitlichen Erhöhung des Massenstroms führen würde, da die Dichte in der LBM über $\rho = P/c_s^2$ mit dem Druck zusammenhängt und somit auch bei inkompressiblen Strömungen nicht ganz konstant ist. Wäre also die Geschwindigkeit am Ein- und Auslass genau gleich vorgegeben, so müsste sich während der Simulation ein Druckabfall einstellen, sodass $P_A < P_E \rightarrow \rho_A < \rho_E$, wobei die Indizes A und E jeweils für den Auslass bzw. Einlass gelten. Für den Massenstrom würde somit $\rho_E u_b > \rho_A u_b$ gelten und es würde mehr Masse ein- als ausströmen.

Für *on-lattice boundaries* sind Dichte-Randbedingungen allgemein leicht zu realisieren, da ledig-

lich Gleichung 2.116 nach $u_{b,\perp}$ umgestellt werden muss:

$$u_{b,\perp} = 1 + \frac{(2\rho_+ + \rho_0)}{\rho} \quad (2.117)$$

Man erhält somit über die vorgegebene Dichte ρ auch den nötigen expliziten Ausdruck für die makroskopische Geschwindigkeit und kann die Verteilungsfunktionen wie gewohnt rekonstruieren.

Neben der Dichte-Randbedingung kann außerdem auch eine Art offene Randbedingung oder Neumann-Randbedingung verwendet werden, wie sie beispielsweise Mattila et al. (2009), Lou et al. (2013) oder Nash et al. (2014) vorschlagen. Hierbei wird meistens in irgendeiner Form zusätzlich der Gradient der Dichte oder der Geschwindigkeit berücksichtigt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch ausschließlich die Methode nach Chikatamarla et al. (2006) als Auslass-Randbedingung verwendet. Dabei werden zu Beginn eines Zeitschritts an den Randzellen zunächst die Dichte ρ_{t0} , die Geschwindigkeit \vec{u}_{t0} und der Impulsstromtensor Π_{t0} bestimmt. Anschließend folgt der gewöhnliche Kollisions- und Advektionsschritt. Die dann fehlenden Verteilungsfunktionen werden mittels Gleichung 2.104 ersetzt:

$$f_i(\vec{x}, t+1) = \rho_{t0} t_i \left[1 + \frac{c_{i\alpha} u_{t0,\alpha}}{c_s^2} + \frac{(\Pi_{t0,\alpha\beta} - \rho_{t0} c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta})}{2\rho_{t0} c_s^4} \right] \quad (2.118)$$

Nach Anwendung diesen Schrittes werden dann erneut die Variablen ρ_{t0} , \vec{u}_{t0} und Π_{t0} bestimmt, bevor die Kollision und Advektion für den nächsten Zeitschritt durchgeführt wird. Die Methode entspricht somit im Grunde genommen einer offenen Randbedingung am Auslass, welche jedoch keine finite Differenzen benötigt und somit lokal ist. Wie schon Chikatamarla et al. (2006) festgestellt haben, ist diese Behandlung des Auslasses besonders für Kanalströmungen geeignet.

Um zusätzlich die numerische Stabilität am Auslass zu erhöhen, kann außerdem eine sogenannte *sponge zone* (*sponge* [engl.]: Schwamm) verwendet werden. Innerhalb diesen Bereiches wird die Viskosität künstlich zum Auslass hin erhöht. Dadurch werden vor allem hohe Geschwindigkeitsgradienten etwas geglättet, sodass die Strömung, welche den Auslass erreicht, letztendlich homogener ist. Es hat sich gezeigt, dass die Verwendung dieser *sponge zone* im Zusammenhang mit der oben beschriebenen Behandlung des Auslasses nach Chikatamarla et al. (2006) selbst bei hohen Reynoldszahlen und niedriger Auflösung numerisch stabile Simulationen ermöglicht. Weiterhin führt die Kombination dazu, dass keine ungewollten Reflexionen erzeugt werden. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn die Kräfte an umströmten Objekten ausgewertet werden sollen.

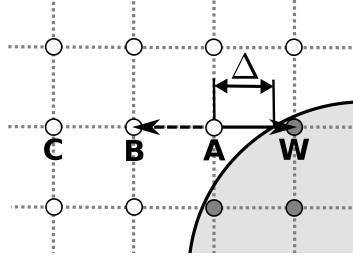
2.4.6 Behandlung komplexer Geometrien

Wie schon in Kapitel 2.4.2 erwähnt, basieren viele der bisher vorgestellten Methoden der Behandlung von Randbedingungen darauf, dass die Wand parallel zum verwendeten Rechengitter verläuft. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, sodass beispielsweise bei schrägen Wänden oder runden Rohren die verwendbaren Methoden stark eingeschränkt sind. Im Rahmen dieser Arbeit werden solche äußeren Randbedingungen zwar nicht betrachtet, jedoch sollen beliebig geformte Geometrien in die Strömung eingebaut werden können, welche ebenfalls entsprechend behandelt werden müssen. Da die Ränder dieser Objekte nicht zwangsläufig mit den Gitterpunkten übereinstimmen, spricht man hier auch von *off-lattice boundaries* ([engl.]: Ränder, welche nicht auf dem Gitter liegen).

Im Wesentlichen können die verschiedenen Ansätze für die Behandlung von *off-lattice boundaries* in zwei Kategorien eingeteilt werden: zum einen in Ansätze, welche auf der *immersed boundary method* (IBM) basieren (*immersed boundary* [engl.]: eingetauchter Rand), und zum anderen in Ansätze, welche eine modifizierte Variante der *bounce-back* Methode verwenden.

Die IBM geht ursprünglich auf Peskin (1972) zurück, der sie einführte, um bewegliche Herzklappen in Blut zu simulieren. Bei der Methode werden die festen Objekte oder Wände über lagrangesche Punkte definiert, die sich frei im Raum bewegen können, während die Strömung nach wie vor auf einem kartesischen eulerschen Gitter definiert ist. Um die Objekte mit der Strömung interagieren zu lassen, werden die entsprechenden Kräfte ausgewertet, sodass eine effektive zweiseitige Kopplung entsteht. Im Zusammenhang mit der LBM wurde die IBM beispielsweise von Feng & Michaelides (2004), Feng & Michaelides (2005), Shu et al. (2007), Inamuro (2012) und Suzuki & Inamuro (2013) verwendet und weiter entwickelt. Die Methode eignet sich besonders gut für flexible Objekte, bei denen die Fluid-Struktur-Interaktion von großer Bedeutung ist, sowie für filamentartige Objekte, die so dünn sind, dass sie mit dem Gitter des Fluids gar nicht aufgelöst werden können. Bei größeren Objekten ist allerdings zu beachten, dass die Zellen, welche eigentlich von dem Objekt „bedeckt“ werden, nach wie vor als Fluid simuliert werden. Dies hat aufgrund der Kopplung mit dem Objekt zwar keinen Effekt auf die eigentliche Strömung, kostet jedoch gegebenenfalls überflüssige Rechenzeit.

Vor allem für größere statische Objekte, aber auch für bewegte Geometrien, eignen sich die Methoden, welche auf dem Prinzip des *bounce-back* beruhen. Abbildung 2.7 stellt das grundlegende Schema dar: die Zellen werden zunächst in Wand- und Fluidzellen eingeteilt, je nachdem ob sie von der zu betrachtenden Geometrie überdeckt werden oder nicht. Die Verteilungsfunktionen, welche von den Wandzellen (W) zu den nächsten Fluidzellen (A) gelangen, fehlen nach dem Advektionsschritt, sodass sie über ein modifiziertes *bounce-back* bestimmt werden müssen. Um die genaue


 Abbildung 2.7: Verdeutlichung der *off-lattice boundaries* auf dem Prinzip des *bounce-back*.

Wandposition \vec{x}_w zwischen den Zellen A und W an den Positionen \vec{x}_A und \vec{x}_W abzubilden, wird dabei bei allen Methoden zunächst der Abstand Δ bestimmt:

$$\Delta = \frac{|\vec{x}_w - \vec{x}_A|}{|\vec{x}_W - \vec{x}_A|} \quad (2.119)$$

Dieser Abstand wird dann je nach Methode entsprechend zur Inter- oder Extrapolation verwendet, um die fehlenden Verteilungsfunktionen adäquat zu bestimmen.

Filippova & Hänel (1997) haben beispielsweise einen Ansatz vorgestellt, der auf einer Interpolation von Verteilungsfunktionen beruht. Dazu werden auf den ersten Objektzellen (W) geeignete Gleichgewichtsverteilungen definiert, mit denen die fehlenden Verteilungsfunktionen in Punkt A entsprechend interpoliert werden können. Der Ansatz wurde von Mei et al. (1999) weiterentwickelt, um die numerische Stabilität zu erhöhen. Allerdings bleibt die Methode aufgrund der Voraussetzungen, welche nötig sind, um die Gleichgewichtsverteilungen zu definieren, auf stationäre Strömungen beschränkt.

Bouzidi et al. (2001) verwenden ebenfalls eine Interpolation, um die fehlenden Verteilungsfunktionen zu bestimmen. Jedoch werden bei der Interpolation nur Verteilungsfunktionen verwendet, welche schon auf dem Gitter vorliegen. Es müssen also nicht erst an den Wandzellen fiktive Verteilungsfunktionen definiert werden. Die Autoren schlagen sowohl eine lineare als auch eine quadratische Interpolation vor und betonen weiterhin, dass auch bewegte Ränder mit der Methode berücksichtigt werden können. So gilt mit der linearen Interpolation und einer Wand, welche sich mit der Geschwindigkeit \vec{u}_b bewegt, für die fehlenden Verteilungsfunktionen f_i^* :

$$f_i^*(\vec{x}_A, t + 1) = \begin{cases} 2\Delta f_i^C(\vec{x}_A, t) + (1 - 2\Delta)f_i^C(\vec{x}_B, t) + \frac{2t_i}{c_s^2}(\vec{c}_i \cdot \vec{u}_b), & \Delta < 1/2 \\ \frac{1}{2\Delta}f_i^C(\vec{x}_A, t) + \frac{2\Delta - 1}{2\Delta}f_i^C(\vec{x}_W, t) + \frac{1}{c_s^2\Delta}(\vec{c}_i \cdot \vec{u}_b), & \Delta \geq 1/2 \end{cases} \quad (2.120)$$

mit $\vec{c}_i^* = -\vec{c}_i$. Weiterhin wurde der Ansatz der quadratischen Interpolation von Lallemand &

Luo (2003) weiterentwickelt und auf bewegte Objekte angewandt, die vollständig innerhalb des simulierten Simulationsbereichs liegen. Dies erfordert daher auch eine geeignete Behandlung von Zellen, die aufgrund der Bewegung der Geometrie von Wand- zu Fluidzellen werden, wofür die Autoren wiederum einen quadratischen Interpolationsansatz vorschlagen.

Im Gegensatz zu den bisherigen Methoden, welche auf einer geeigneten Interpolation der Verteilungsfunktionen beruhen, verwenden beispielsweise Guo et al. (2002a) einen Ansatz, welcher die fehlenden Verteilungsfunktionen über eine Extrapolation erhält. So werden, ähnlich wie bei Filippova & Hänel (1997) und Mei et al. (1999), Verteilungsfunktionen auf den Wandzellen (W) definiert, welche anschließend die fehlenden Verteilungsfunktionen auf den Fluidzellen (A) ersetzen. Dazu wird auf der Wandzelle der Gleichgewichtsterm mit einer extrapolierten Wandgeschwindigkeit und einer geeigneten Dichte ermittelt und der Nicht-Gleichgewichtsterm mithilfe der entsprechenden Terme der Fluidzellen ebenfalls extrapoliert.

Abschließend sei noch eine Methode erwähnt, welche auf eine direkte Inter- oder Extrapolation der Verteilungsfunktionen verzichtet: bei Dorschner et al. (2015) werden die fehlenden Verteilungsfunktionen über Gleichung 2.104 bestimmt. Die makroskopische Geschwindigkeit dafür wird wieder über eine Interpolation gewonnen, welche den genauen Wandabstand berücksichtigt, während die Dichte aus einem einfachen *bounce-back* gewonnen wird. Der Impulsstromtensor, welcher ebenfalls für Gleichung 2.104 benötigt wird, wird über die „makroskopische“ Definition gewonnen:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta} - \rho \tau c_s^2 \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \rho u_\alpha u_\beta \quad (2.121)$$

wobei die Geschwindigkeitsgradienten über ein Finite-Differenzen-Schema bestimmt werden. Dies sorgt zwar dafür, dass die Methode nicht mehr lokal ist, macht sie aber gleichzeitig genauer.

2.5 Kollisionsmodelle

Für die Behandlung des Kollisionsschritts gibt es in der Literatur eine Vielzahl von Kollisionsmodellen. Im Folgenden sollen einige Modelle kurz vorgestellt und anhand der Simulation einer Scherschichtströmung miteinander verglichen werden. In Anlehnung an Minion & Brown (1997)

wird dazu eine zweidimensionale Strömung über folgende Anfangsbedingung definiert:

$$u = \begin{cases} U \tanh [C_\rho(y/L - 1/4)], & y \leq L/2 \\ U \tanh [C_\rho(3/4 - y/L)], & y > L/2 \end{cases} \quad (2.122)$$

$$v = C_\delta U \sin [2\pi(x/L + 1/4)] \quad (2.123)$$

wobei $0 \leq x \leq L$ und $0 \leq y \leq L$. Die Konstanten $C_\rho = 80$ und $C_\delta = 0,05$ bestimmen jeweils die Dicke und die Stärke der Scherschicht und sind gemäß dem „dünnen“ Fall von Minion & Brown gewählt worden. In Abbildung 2.8 sind die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten dargestellt.

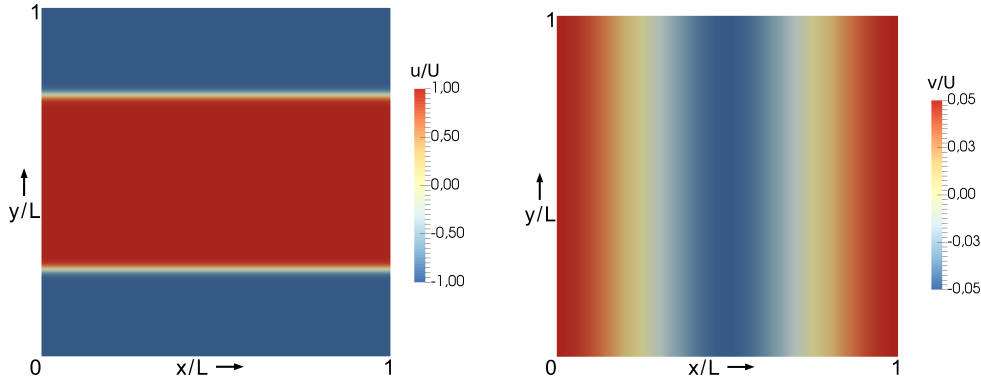


Abbildung 2.8: Horizontale (links) und vertikale (rechts) Geschwindigkeitskomponente der „dünnen“ Scherschichtströmung.

Die Reynoldszahl der Simulationen ist über $Re = UL/\nu$ definiert, wobei in Gittereinheiten $U = 0,04$ gewählt wurde und L über die gewählte Auflösung N bestimmt wird. Alle Ränder der Simulation sind periodisch, sodass allein das gewählte Kollisionsmodell die numerische Stabilität der Simulation bestimmt.

2.5.1 Kollisionsmodell nach Bathnagar, Gross & Krook (BGK)

Das Kollisionsmodell nach Bhatnagar et al. (1954) (BGK) wurde bereits im Rahmen der Chapman-Enskog-Entwicklung in Kapitel 2.1.6 vorgestellt und ist folgendermaßen definiert:

$$f_i^C = f_i - \frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{eq}) \quad (2.124)$$

$$= f_i^{eq} + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i^{neq} \quad (2.125)$$

wobei f_i^C wieder für die kollidierten Verteilungsfunktionen steht und $f_i^{neq} = f_i - f_i^{eq}$. Bei dem Modell wird die komplette Nicht-Gleichgewichtskomponente der Verteilungsfunktionen mit einer Relaxationszeit τ relaxiert. Trotz seiner Einfachheit liefert das Modell sehr zufriedenstellende Ergebnisse, solange die Auflösung für die gewählte Reynoldszahl groß genug ist.

Abbildung 2.9 zeigt die Wirbelstärke der Scherschichtströmung bei $t = 1L/U$ für verschiedene Reynoldszahlen und Auflösungen. Bei $Re = 1 \times 10^4$ und einer Auflösung von $N = 512$ Zellen pro L ist die Simulation numerisch stabil und zeigt das erwartete Verhalten (Abb. 2.9a). Bei der selben Reynoldszahl führt eine deutlich niedrigere Auflösung von $N = 128$ schon fälschlicherweise zu zusätzlichen Wirbeln neben den Hauptwirbeln (Abb. 2.9b). Dieses Verhalten wurde von Minion & Brown (1997) bei verschiedenen Ansätzen zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ebenfalls beobachtet und ist typisch für eine zu niedrige Auflösung. Abbildung 2.9c zeigt schließlich das Verhalten bei einer doppelten Reynoldszahl von $Re = 2 \times 10^4$ und einer Auflösung von $N = 128$. Dort sind eindeutig numerische Instabilitäten zu erkennen, welche im Laufe der Simulation anwachsen und diese somit unbrauchbar machen würden.

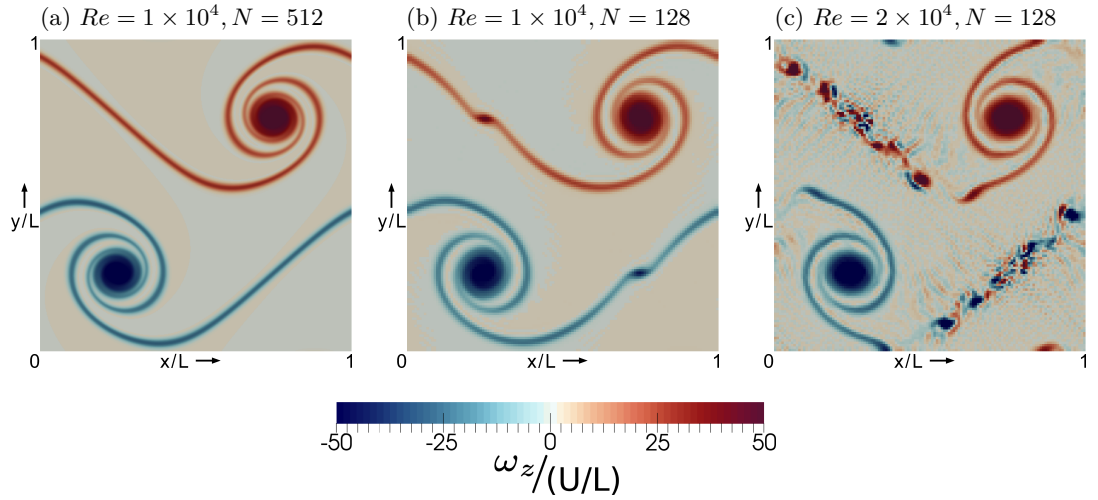


Abbildung 2.9: Entwicklung der Scherschichtströmung bis $t = 1L/U$ bei Verwendung des BGK-Kollisionsmodells.

2.5.2 Regularized Lattice BGK (RLBGK) Kollisionsmodell

Das *Regularized Lattice BGK*-Modell (RLBGK) nach Latt & Chopard (2006) kann als Erweiterung des BGK-Modells betrachtet werden (*regularized* [engl.]: regularisiert). Die Kollision ist dabei

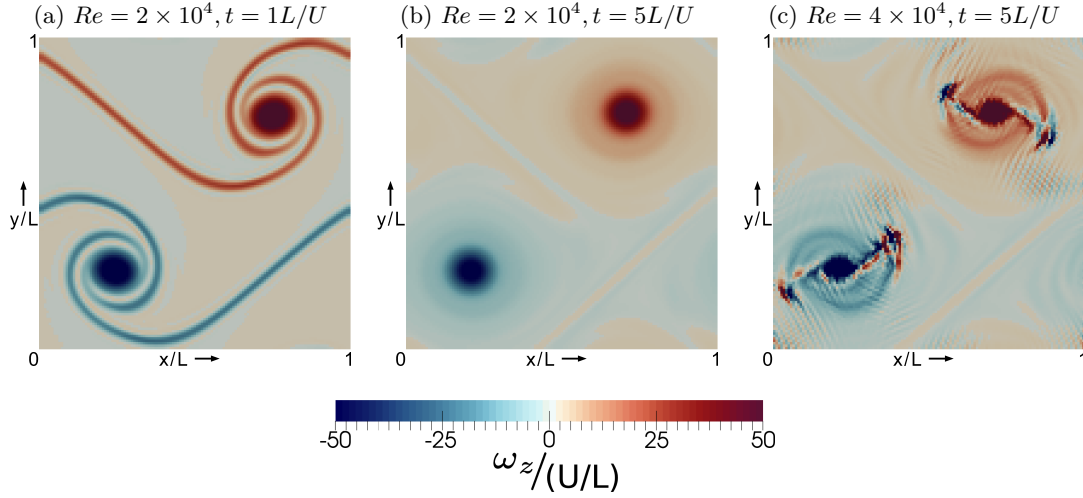


Abbildung 2.10: Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des RLBGK-Kollisionsmodells mit $N = 128$.

folgendermaßen gegeben:

$$f_i^C = f_i^{eq} + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \bar{f}_i^{neq} \quad (2.126)$$

wobei \bar{f}_i^{neq} analog zu Gleichung 2.99 gegeben ist:

$$\bar{f}_i^{neq} = \frac{t_i}{2c_s^4} (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) \Pi_{\alpha\beta}^{neq} \quad (2.127)$$

Nach jedem Kollisionsschritt werden also die Verteilungsfunktionen über ihre Approximationen gemäß Kapitel 2.3 bestimmt. Dies hat zur Folge, dass die hydrodynamischen Variablen der Dichte, der Geschwindigkeit und des Spannungstensors beibehalten werden, während alle Momente höherer Ordnung verschwinden.

Abbildung 2.10 zeigt die Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des RLBGK-Modells, wobei Abbildungen 2.10a und 2.10b das Verhalten bei $Re = 2 \times 10^4$ mit einer Auflösung von $N = 128$ zeigen, was somit den selben Voraussetzungen entspricht wie der schon instabile Fall in Abbildung 2.9c bei Verwendung des BGK-Modells. Offensichtlich ermöglicht also das RLBGK-Modell numerisch stabile Simulationen bei höheren Reynoldszahlen als das BGK-Modell. Ferner weist die Simulation auch keine falschen Nebenwirbel auf, wie sie schon deutlich früher bei der Verwendung des BGK-Modells auftraten. Allerdings zeigt Abbildung 2.10c, dass das Modell nicht unbegrenzt numerisch stabil läuft. Bei einer Reynoldszahl von $Re = 4 \times 10^4$ und einer Auflösung von $N = 128$ wird die Simulation bei $t = 5L/U$ im Bereich der Hauptwirbel instabil.

2.5.3 Multiple Relaxation Time (MRT) Kollisionsmodell

Ein sehr häufig verwendetes Kollisionsmodell ist das *Multiple Relaxation Time* (MRT) Modell (*multiple relaxation time* [engl.]: mehrere Relaxationszeiten) (D’Humières, 1992; Lallemand & Luo, 2000; D’Humières et al., 2002). Statt wie bisher nur eine Relaxationszeit τ für alle relevanten Momente der Verteilungsfunktion zu verwenden, wird eine Kollisionsmatrix \mathbf{S} der Größe $q \times q$ eingeführt, sodass die kollidierten Verteilungsfunktionen folgendermaßen gegeben sind:

$$f_i^C = f_i - \sum_j S_{ij} (f_j - f_j^{eq}) \quad (2.128)$$

$$= f_i - \sum_j \left(\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \right)_{ij} (m_j - m_j^{eq}) \quad (2.129)$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{S}}$ die Diagonalmatrix der Kollisionsmatrix, welche über die Transformation $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1}$ gegeben ist. Die Eigenwerte der Kollisionsmatrix sind unterschiedliche Relaxationsparameter für die Momente m_i der Verteilungsfunktionen, wobei nicht alle Parameter eine physikalische Bedeutung haben und diese somit beliebig gewählt werden können, um die numerische Stabilität der Simulation zu erhöhen. Das BGK-Modell bildet gewissermaßen einen Spezialfall des MRT-Modells mit $\hat{\mathbf{S}} = (1/\tau) \mathbf{I}$.

Nach Lallemand & Luo (2000) wird für das D2Q9-Gitter mit der Nummerierung der diskreten Geschwindigkeitsvektoren aus Abbildung 2.1 folgende Momentenbasis verwendet:

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

Dabei entspricht m_0 der Dichte ρ und m_3 und m_5 jeweils der x- bzw. y-Komponente des Impulses \vec{j} , sodass deren Relaxationsparameter jeweils verschwinden müssen, um sie als Erhaltungsgrößen zu bewahren. Außerdem gilt $m_7 = \Pi_{xx} - \Pi_{yy}$ und $m_8 = \Pi_{xy}$. Die Relaxationsparameter dieser Momente müssen daher nach wie vor über die Viskosität ν bzw. über τ bestimmt werden. Weiterhin

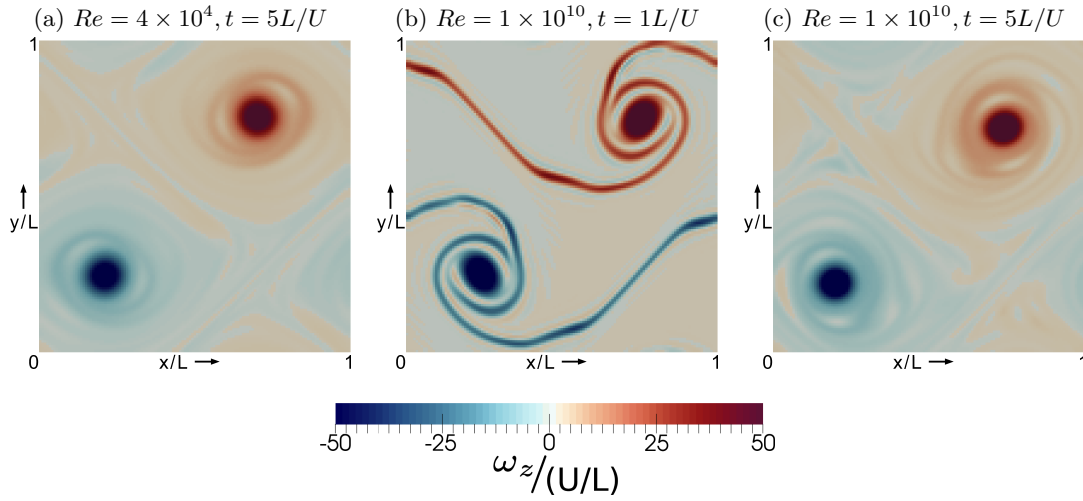


Abbildung 2.11: Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des MRT-Kollisionsmodells mit $N = 128$.

ist m_1 mit der Energie verknüpft, sodass dessen Relaxationsparameter die Volumenviskosität des Systems bestimmt. Die Parameter aller weiteren Momente haben keine physikalische Bedeutung und sind innerhalb eines gewissen Rahmens frei wählbar.

Für die Simulationen der Scherschichtströmungen wurde die folgende Kollisionsmatrix gewählt:

$$\hat{S} = \text{diag}(0; s_1; s_2; 0; s_4; 0; s_6; s_7; s_8) \quad (2.131)$$

mit $s_1 = 1,63$, $s_2 = 1,14$, $s_4 = s_6 = 1,92$ und $s_7 = s_8 = 1/\tau$. Abbildung 2.11 zeigt die Entwicklung der Scherschicht bei der Verwendung des MRT-Modells und einer Auflösung von $N = 128$. Dabei ist zunächst in Abbildung 2.11a der Fall bei $Re = 4 \times 10^4$ dargestellt, der bei der Verwendung des RLBGK-Modells schon numerisch instabil war. Das MRT-Modell liefert dagegen unter den selben Bedingungen numerisch stabile und zufriedenstellende Ergebnisse. Selbst bei einer sehr hohen Reynoldszahl von $Re = 1 \times 10^{10}$ (vgl. Abbildungen 2.11b und 2.11c) ist deutlich zu sehen, dass die Simulation mit dem MRT-Kollisionsmodell weiterhin numerisch stabil läuft. Tatsächlich wird das Kollisionsmodell aufgrund der guten Ergebnisse sehr häufig verwendet. Allerdings kann das Modell in der Gegenwart von Rändern nach wie vor numerische Instabilitäten aufweisen, wie sie beispielsweise von Freitas et al. (2011) beobachtet wurden. Außerdem ist das Modell sehr abhängig von der geeigneten Wahl der freien Relaxationsparameter, was in einigen Fällen zu einem zeitaufwändigen Optimierungsprozess führen kann.

2.5.4 Entropic Lattice Boltzmann Model (ELBM)

Die bisher vorgestellten Kollisionsmodelle können zusätzlich mit einer Turbulenzmodellierung ergänzt werden, wie sie auch bei anderen Solvern der Navier-Stokes-Gleichungen verwendet werden (Smagorinsky, k- ϵ , etc.). Es gibt aber auch Kollisionsmodelle, welche eine Art eingebaute Turbulenzmodellierung haben, wie beispielsweise das *Entropic Lattice Boltzmann Model* (ELBM) nach Karlin et al. (1999) (*entropic* [engl.]: entropisch). Das Modell berücksichtigt zusätzlich das H-Theorem, das nach Gleichung 2.12 besagt, dass die Gesamtentropie des Systems, welche über H definiert werden kann, nicht ansteigen darf. Das Kollisionsmodell ist folgendermaßen definiert:

$$f_i^C = f_i - \frac{\alpha}{2\tau}(f_i - f_i^{eq}) \quad (2.132)$$

wobei der zusätzliche Parameter α in jedem Zeitschritt für jede Zelle neu bestimmt wird, sodass folgende Bedingung erfüllt ist:

$$H(f_i - \alpha(f_i - f_i^{eq})) = H(f_i) \quad (2.133)$$

mit

$$H(f_i) = \sum_{i=0}^{q-1} f_i \ln \left(\frac{f_i}{t_i} \right) \quad (2.134)$$

Wenn die Auflösung hoch genug ist, ist $\alpha = 2$ und man erhält das einfache BGK-Modell. In den Bereichen, wo jedoch die Auflösung zu niedrig ist, stellt α eine Art Turbulenzparameter dar, welcher je nach Bedarf die effektive Viskosität der Strömung dämpft oder verstärkt, um eine numerisch stabile Lösung zu erzwingen.

Abbildung 2.12 zeigt die Ergebnisse der Simulation der Scherschichtströmung unter Verwendung des ELBM bei einer Auflösung von $N = 128$. Abbildungen 2.12a und 2.12b zeigen dabei erneut den Fall bei einer Reynoldszahl von $Re = 4 \times 10^4$. Wie auch bei der Verwendung des MRT-Kollisionsmodells ist die Simulation numerisch stabil, allerdings entstehen auch unphysikalische Nebenwirbel (vgl. Abbildung 2.12a). Wie in Abbildung 2.12b ersichtlich, fallen diese bei $t = 5L/U$ jedoch nicht mehr ins Gewicht und bewirken auch keine Instabilitäten im weiteren Verlauf der Simulation. Abbildung 2.12c zeigt dagegen die Entwicklung der Scherschicht bei $Re = 1 \times 10^{10}$. Obwohl auch hier die Simulation prinzipiell numerisch stabil bleibt, treten erhebliche numerische Artefakte auf. Es wird also deutlich, dass eine Netzkonvergenzstudie unverzichtbar ist, um zu garantieren, dass die Ergebnisse der Simulation auch wirklich physikalisch korrekt sind. Nichts-

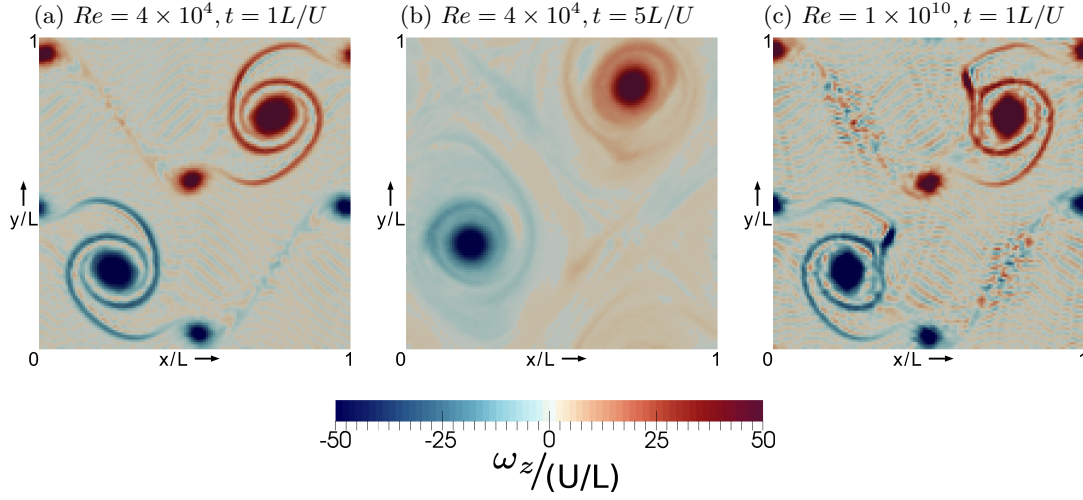


Abbildung 2.12: Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des ELBM mit $N = 128$.

destotrotz ist das ELBM insofern interessant, als es keine freien Parameter verwendet, welche zu Beginn der Simulation vorgegeben werden müssen. Weiterhin hat Chikatamarla & Karlin (2013) gezeigt, dass das ELBM im Zusammenhang mit der TMS-Randbedingung auch in der Gegenwart von Rändern zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

2.5.5 Kollisionsmodell nach Karlin, Bösch & Chikatamarla (KBC)

Das Kollisionsmodell nach Karlin et al. (2014) (KBC) verbindet im Grunde genommen den Ansatz des MRT-Modells mit dem des ELBM. Analog zu dem MRT-Modell wird zunächst eine Momentenbasis der Verteilungsfunktionen definiert. Nach Karlin et al. (2014) gilt für das D2Q9-Modell:

$$\rho M_{pq} = \sum_i f_i c_{ix}^p c_{iy}^q \quad (2.135)$$

und daher $M_{00} = 1$, $M_{10} = u_x$, $M_{01} = u_y$, $\rho M_{11} = \Pi_{xy}$, $\rho M_{20} = \Pi_{xx}$ und $\rho M_{02} = \Pi_{yy}$, während M_{21} , M_{12} und M_{22} keine physikalische Bedeutung haben. Die Verteilungsfunktionen können somit

über diese Momente ausgedrückt werden:

$$f_i = \begin{cases} \rho - \Pi_{xx} - \Pi_{yy} + \rho M_{22}, & \text{falls } c_{ix} = c_{iy} = 0 \\ \frac{1}{2} (\Pi_{xx} + c_{ix} \rho u_x - c_{ix} \rho M_{12} - \rho M_{22}), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} = 0 \\ \frac{1}{2} (\Pi_{yy} + c_{iy} \rho u_y - c_{iy} \rho M_{21} - \rho M_{22}), & \text{falls } c_{ix} = 0, c_{iy} \neq 0 \\ \frac{1}{4} (\rho M_{22} + c_{ix} c_{iy} \Pi_{xy} + c_{ix} \rho M_{12} + c_{iy} \rho M_{21}), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} \neq 0 \end{cases} \quad (2.136)$$

Weiterhin werden diese Ausdrücke so eingeteilt, dass die Verteilungsfunktionen aus einem kinetischen Teil k_i , einem Scherspannungsteil s_i und einem Anteil höherer Momente h_i bestehen:

$$f_i = k_i(\rho, \vec{u}) + s_i(\rho, \vec{u}, \mathbf{\Pi}) + h_i(\rho, \vec{u}, M_{20}, M_{02}, M_{22}) \quad (2.137)$$

Mit dieser Einteilung ist es möglich, dem Scherspannungsteil eine andere Relaxationszeit zuzuteilen als dem Anteil höherer Ordnung. Während s_i nach wie vor über τ relaxiert wird, wird die Relaxationszeit der höheren Momente über die Entropie bestimmt. Dazu werden zunächst die kollidierten Verteilungsfunktionen folgendermaßen definiert:

$$f_i^C = f_i - \frac{1}{\tau} \left[\Delta s_i + \frac{\gamma}{2} \Delta h_i \right] \quad (2.138)$$

Dabei gilt $\Delta s_i = s_i - s_i^{eq}$ und $\Delta h_i = h_i - h_i^{eq}$, wobei s_i^{eq} und h_i^{eq} die jeweiligen Anteile der Gleichgewichtsverteilungen sind. γ ist der „entropische Stabilisator“ und wird in jedem Zeitschritt für jede Zelle ausgewertet, indem $H(f_i^C)$ (Glg. 2.134) in Abhängigkeit von γ minimiert wird. Als Näherungslösung bietet sich laut Karlin et al. (2014) dafür folgender Ausdruck an:

$$\gamma = 2\tau - 2(1 - \tau) \frac{\langle \Delta s | \Delta h \rangle}{\langle \Delta h | \Delta h \rangle} \quad (2.139)$$

mit

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{X_i Y_i}{f_i^{eq}} \quad (2.140)$$

Erwähnenswert ist außerdem, dass Gleichung 2.138 für $\gamma = 2$ dem BGK-Modell entspricht, da $f_i - f_i^{eq} = \Delta s_i + \Delta h_i$.

Abbildung 2.13 zeigt das Verhalten der Scherschichtströmung bei der Verwendung des KBC-Kollisionsmodells und einer Auflösung von $N = 128$. Es wird deutlich, dass das Modell sowohl bei einer Reynoldszahl von $Re = 4 \times 10^4$ (vgl. Abbildung 2.13a) als auch bei einer Reynoldszahl

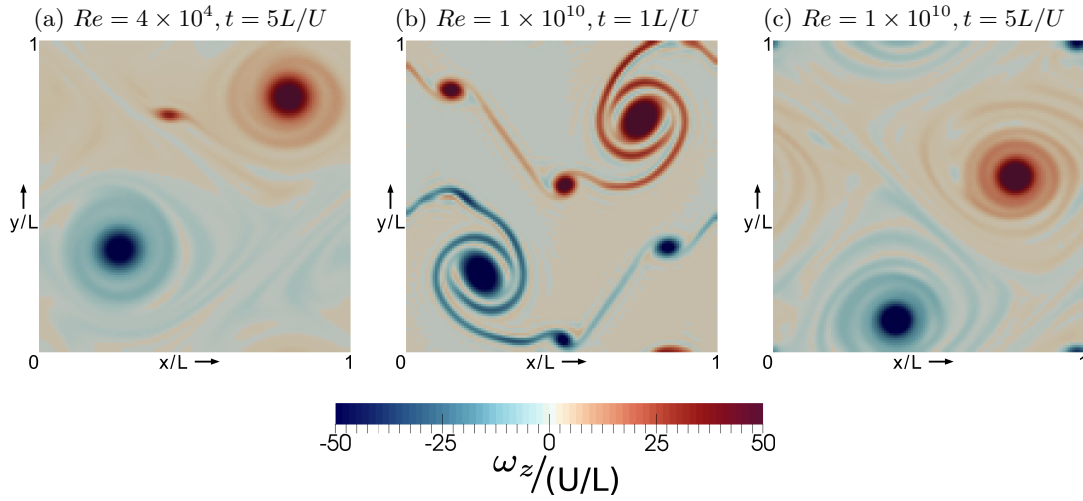


Abbildung 2.13: Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des KBC-Kollisionsmodells mit $N = 128$.

von $Re = 1 \times 10^{10}$ (vgl. Abbildungen 2.13b und 2.13c) numerisch stabile und weitestgehend zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Auch bei diesem Modell treten jedoch Nebenwirbel auf, welche sich durch eine geeignete Gitterverfeinerung vermeiden ließen. Nichtsdestotrotz ist das KBC-Kollisionsmodell somit eine Alternative zum MRT-Modell, welches wie bereits das ELBM ohne eine explizite Vorgabe von Parametern auskommt. Im Gegensatz zum ELBM verändert das KBC-Kollisionsmodell jedoch nicht die Viskosität der Simulation, sondern nutzt ähnlich zum MRT-Modell die Momente höherer Ordnung zur Regulierung der numerischen Stabilität. Außerdem ist das Modell recht einfach zu implementieren und benötigt nur wenig zusätzliche Rechenzeit im Vergleich zum einfachen BGK-Kollisionsmodell.

2.5.6 Numerische Stabilität der Kollisionsmodelle

Die numerischen Stabilitäten der vorgestellten Kollisionsmodelle am Beispiel der „dünnen“ Scherschichtströmung sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Es wird deutlich, dass das RLBGK-Kollisionsmodell bezüglich der möglichen Reynoldszahl bei gleich bleibender Auflösung eine deutliche Verbesserung zum einfachen BGK-Kollisionsmodell darstellt. Um jedoch bei beliebig hohen Reynoldszahlen numerische Instabilitäten zu vermeiden, muss idealerweise auf das MRT-Modell, das ELBM oder das KBC-Kollisionsmodell zurückgegriffen werden. Das ELBM generiert jedoch bei höheren Reynoldszahlen erhebliche numerische Artefakte, was bei dem MRT- und KBC-Kollisionsmodell in dem Maße nicht beobachtet werden konnte.

Es sei jedoch abschließend betont, dass das verwendete Beispiel zweidimensional und frei von jeglichen Rändern oder Gitterverfeinerung ist. Zur Simulation komplexerer Fälle werden dagegen zusätzliche Methoden benötigt, um weiterhin eine unbegrenzte numerische Stabilität zu garantieren. Inwiefern diese Methoden dann mit den jeweiligen Kollisionsmodellen vereinbar sind, muss im Einzelfall entsprechend überprüft werden.

Tabelle 2.1: Vergleich der numerischen Stabilität aller vorgestellten Kollisionsmodelle anhand des Beispiels einer „dünnen“ Scherschichtströmung mit $N = 128$. Grün: stabil, orange: Übergang von stabil zu instabil (BGK, RLBGK), bzw. dominierende numerische Artefakte (ELBM), rot: instabil.

	$Re = 1 \times 10^4$	$Re = 2 \times 10^4$	$Re = 4 \times 10^4$	$Re = 1 \times 10^{10}$
BGK	Abb. 2.9b	Abb. 2.9c		
RLBGK		Abb. 2.10b	Abb. 2.10c	
ELBM			Abb. 2.12b	Abb. 2.12c
MRT			Abb. 2.11a	Abb. 2.11c
KBC			Abb. 2.13a	Abb. 2.13c

2.6 Der Palabos-Code

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Palabos-Code¹ verwendet. Dieser ist ein *open source* C++ Solver, dem die Lattice Boltzmann Methode zu Grunde liegt. Der Code kann für eine Reihe von strömungsmechanischen Problemstellungen angewandt werden, wie beispielsweise Ein- und Mehrphasenströmungen, thermische Strömungen, Fluid-Struktur-Interaktionen oder Partikelinteraktionen. Er ist außerdem großskalig parallelisierbar und somit auch für das Rechnen auf einem Cluster geeignet. Weiterhin bildet die objektorientierte Implementierung eine ideale Basis, um eigene Methoden und Erweiterungen problemlos einzubauen. So wurde im Rahmen dieser Arbeit der Palabos-Code um einige maßgebliche Erweiterungen ergänzt, die nötig waren, um Simulationen zur Umströmung von beliebigen Geometrien bei höheren Reynoldszahlen sowie zur Versandung und Auskolkung von Objekten am Meeresboden zu ermöglichen.

¹www.palabos.org

3 Umströmung von Objekten bei hohen Reynoldszahlen

Um die Umströmung von beliebig geformten Objekten am Meeresboden mittels der Lattice Boltzmann Methode simulieren zu können, müssen numerisch stabile Simulationen bei hohen Reynoldszahlen ermöglicht werden. Hierzu sind dazu zunächst drei Punkte von Bedeutung:

1. eine möglichst genaue und gleichzeitig numerisch stabile Behandlung von beliebig geformten, eingebundenen Objekten, welche gegebenenfalls beweglich sind,
2. eine geeignete dreidimensionale lokale Gitterverfeinerung, mit der gewisse Bereiche der Simulation feiner aufgelöst werden können als andere,
3. die Implementierung eines geeigneten Kollisionsmodells.

Im Folgenden soll auf die Behandlung dieser Punkte näher eingegangen und die jeweiligen Implementierungen anhand ausgewählter Beispiele untersucht werden.

3.1 Behandlung beliebig geformter Objektränder

In Kapitel 2.4.6 wurden eine Reihe verschiedener Methoden zur Behandlung komplexer Geometrien dargestellt. Da die Objekte am Meeresboden, die im Rahmen dieser Arbeit von Interesse sind, recht groß und zu einem gewissen Teil versandet sind, kann davon ausgegangen werden, dass sie sich im Allgemeinen nicht sehr schnell bewegen. Aus diesem Grund wurde auf einen Ansatz auf der Grundlage des *bounce-back* zurück gegriffen, anstatt die *immersed boundary method* zu nutzen.

3.1.1 Implementierung einer geeigneten Randbedingung

Der zu implementierende Ansatz sollte möglichst lokal und effizient sein, gleichzeitig jedoch die genaue Wandposition ausreichend genau abbilden. Es wurde daher zunächst die Methode nach Bouzidi et al. (2001) (im Folgenden BFL) ausgewählt und als Post-Advektionsschritt implementiert (vgl. Gleichung 2.120). Ein Vorteil dieser Methode ist, dass sie lokal ist, sofern die kollidierten Verteilungsfunktionen lokal als $f_{i,prev} = f_i^C$ gespeichert werden und die Interpolation nach BFL erst nach dem regulären Advektionsschritt angewandt wird. Für die Implementierung gilt dann:

$$f_i^{bb} = f_i(\vec{x}, t+1) = \begin{cases} 2\Delta f_{i,prev}^C + (1 - 2\Delta) f_i^{C,S} + \frac{2t_i}{c_s^2} (\vec{c}_i \cdot \vec{u}_b), & \Delta < 1/2 \\ \frac{1}{2\Delta} f_{i,prev}^C + \frac{2\Delta - 1}{2\Delta} f_{i,prev}^C + \frac{1}{c_s^2 \Delta} (\vec{c}_i \cdot \vec{u}_b), & \Delta \geq 1/2 \end{cases} \quad (3.1)$$

wobei $f_{i,prev}^C$ die kollidierten aber noch nicht advektierten Verteilungsfunktionen sind, während $f_i^{C,S}$ sowohl kollidiert als auch schon entsprechend advektiert wurden. Zum besseren Verständnis ist das Verhalten der Verteilungsfunktionen um eine Randzelle (A) bei einem gewöhnlichen Advektionsschritt in Abbildung 3.1 dargestellt, wobei hauptsächlich nur diejenigen Verteilungsfunktionen eingezeichnet wurden, die zur Berechnung von $f_i(\vec{x}_A, t+1)$ mit $\vec{c}_i = (-1, 0)^T$ benötigt werden: $f_i^{C,S}$, welche vor dem Advektionsschritt $f_i^C(\vec{x}_A - \vec{c}_i, t) = f_i^C(\vec{x}_B, t)$ ist, $f_{i,prev}^C$, welche nach dem Advektionsschritt auf der Wandzelle W liegt, und $f_{i,prev}^C$, welche nach dem Advektionsschritt auf der Zelle B liegt.

Die so erhaltene Implementierung ist äußerst effizient und kann die genaue Position der Wand problemlos abbilden. Die Methode weist allerdings vor allem bei bewegten Objekten aufgrund der linearen Interpolation eine Tendenz zur numerischen Instabilität auf. Als zusätzlicher Schritt wurde daher die TMS-Behandlung der Ränder nach Chikatamarla & Karlin (2013) hinzugezogen. Wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben, werden dabei die „fehlenden“ Verteilungsfunktionen als Teilmenge aller Verteilungsfunktionen definiert, sodass sie über $f_i, i \in \bar{D}$ beschrieben werden können. Daraufhin wird folgende Modifikation der Verteilungen durchgeführt:

$$f_i = \begin{cases} 2f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) - f_i^{eq}(\rho^*, \vec{u}^*), & i \in \bar{D} \\ f_i + f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) - f_i^{eq}(\rho^*, \vec{u}^*), & i \notin \bar{D} \end{cases} \quad (3.2)$$

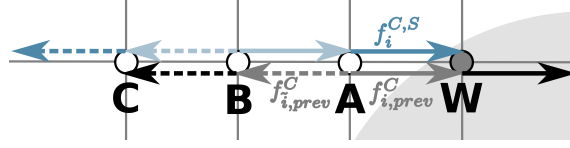


Abbildung 3.1: Advektion der Verteilungen um eine Randzelle (A). Die hellgrau und hellblau dargestellten Verteilungsfunktionen sind diejenigen der Zellen A bzw. B vor dem Advektionsschritt, während die schwarzen und blauen Verteilungsfunktionen diejenigen nach dem Advektionsschritt sind.

mit

$$\rho_{tgt} = \sum_{i \in \bar{D}} f_i^{bb} + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \quad (3.3)$$

$$\rho_{tgt} \vec{u}_{tgt} = \sum_{i \in \bar{D}} f_i^{bb} \vec{c}_i + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \vec{c}_i \quad (3.4)$$

$$\rho^* = \sum_{i \in \bar{D}} f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \quad (3.5)$$

$$\rho^* \vec{u}^* = \sum_{i \in \bar{D}} f_i^{eq}(\rho_{tgt}, \vec{u}_{tgt}) \vec{c}_i + \sum_{i \notin \bar{D}} f_i \vec{c}_i \quad (3.6)$$

Anstatt jedoch ρ_{tgt} und \vec{u}_{tgt} über das „einfache“ *bounce-back* zu erhalten, ergeben sich die Zielwerte der Dichte und der Geschwindigkeit nun über das interpolierte *bounce-back* nach Gleichung 3.1. Gleichung 3.2 wird dabei jedoch vor dem Kollisionsschritt implementiert, damit eine eventuelle Auswertung der makroskopischen Variablen nach dem Advektionsschritt und der Interpolation nach BFL nach wie vor die gewünschten Zielwerte für die Dichte und Geschwindigkeit liefert.

Der im Folgenden beschriebene Programmablauf zur Behandlung komplexer Geometrien ist in Abbildung 3.2 zusammengefasst. Zu Beginn der Simulation wird die gewünschte Geometrie im STL-Format eingelesen. Anschließend werden die Zellen des Gitters jeweils in Fluid-, Objekt- und Randzellen eingeteilt, wobei Randzellen diejenigen Zellen sind, die noch zum Fluid gehören, jedoch auch Verteilungsfunktionen besitzen, welche in einem regulären Advektionsschritt zu einer Objektzelle hin propagieren würden. Für jene Verteilungsfunktionen wird im nächsten Schritt jeweils der genaue Wandabstand Δ ermittelt und gespeichert. Dazu wird aus der eingelesenen Geometrie das Dreieck gesucht, welches von der jeweiligen Verbindung zwischen der Rand- und der Objektzelle gekreuzt wird. Anschließend wird der normierte Abstand zwischen dem Schnittpunkt und der Randzelle bestimmt. Danach beginnt die reguläre Lattice Boltzmann Simulation, wobei zunächst alle Zellen mittels einer vorgegebenen Dichte und Geschwindigkeit über $f_i^{eq}(\rho, \vec{u})$ initialisiert wer-

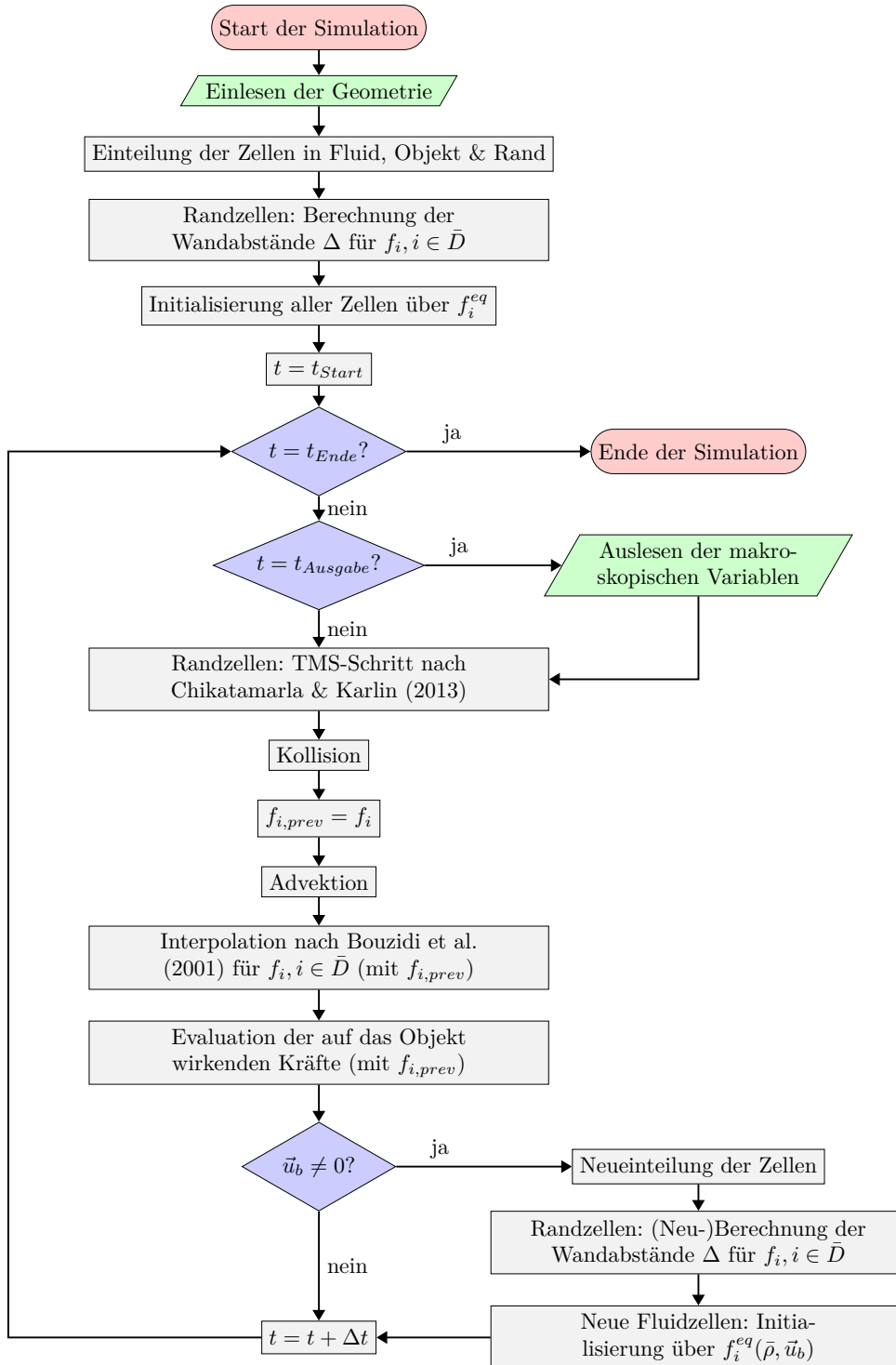


Abbildung 3.2: Programmablauf zur Behandlung komplexer Geometrien

den müssen. Für die Randzellen kommen neben der üblichen Kollision und Advektion die oben beschriebenen Schritte hinzu, sodass zunächst der TMS-Schritt nach Gleichung 3.2 durchgeführt wird, bevor die Kollision erfolgt. Daraufhin werden die Verteilungsfunktionen auf den Randzellen als $f_{i,prev}$ zwischengespeichert, bevor der reguläre Advektionsschritt für alle Verteilungsfunktionen durchgeführt wird. Dabei propagieren Verteilungsfunktionen von den Randzellen auf die Objektzellen und diejenigen, die von den Objektzellen auf die Randzellen propagieren müssten, fehlen zunächst. Diese Verteilungsfunktionen werden bei der anschließenden Interpolation nach BFL und Gleichung 3.1 wiederum hinzu gewonnen. Im Programmablauf folgt daraufhin die Berechnung der auf das Objekt wirkenden Kräfte. Hierzu wird die sogenannte *momentum exchange method* nach Ladd (1994) herangezogen (*momentum exchange* [engl.]: Impulsaustausch). Diese Methode basiert darauf, dass die Kraft über die zeitliche Impulsänderung $\vec{F} = \partial \vec{j} / \partial t$ definiert werden kann. Da bei der LBM $\Delta t = 1$ gilt, kann die gesamte auf den Körper wirkende Kraft über die Summe aller Impulsströme der Randzellen \vec{x}_b bestimmt werden:

$$F = \sum_{(\forall \vec{x}=\vec{x}_b)} \sum_{(i \in \bar{D})} f_i(\vec{x}, t) \vec{c}_i - f_i(\vec{x}, t+1) \vec{c}_i \quad (3.7)$$

$$= \sum_{(\forall \vec{x}=\vec{x}_b)} \sum_{(i \in \bar{D})} [f_i(\vec{x}, t) + f_i(\vec{x}, t+1)] \vec{c}_i \quad (3.8)$$

$$= \sum_{(\forall \vec{x}=\vec{x}_b)} \sum_{(i \in \bar{D})} [f_{i,prev} + f_i^{bb}] \vec{c}_i \quad (3.9)$$

Bewegt sich das betrachtete Objekt nicht, endet die Programmschleife anschließend und beginnt, sofern die eingestellte maximale Anzahl an Iterationen t_{Ende} noch nicht erreicht wurde, wahlweise mit der Ausgabe der makroskopischen Variablen oder einem erneuten TMS- bzw. Kollisionsschritt. Etwas aufwendiger wird die Simulation jedoch, wenn sich das Objekt bewegt und somit $u_b \neq 0$ gilt. In diesem Fall wird zunächst die Geometrie entsprechend bewegt, sodass eine Neueinteilung der Zellen erforderlich wird. In den (ggf. neuen) Randzellen müssen dann wieder die Wandabstände Δ ermittelt werden. Ferner kann es vorkommen, dass neue Fluid- oder Randzellen entstehen, welche zuvor Objektzellen waren. Diese müssen entsprechend initialisiert werden, wobei hierzu die benötigte Dichte über diejenigen benachbarten Zellen gemittelt wird, welche vorher auch schon Fluid- oder Randzellen waren. Für die Geschwindigkeit wird die Objektgeschwindigkeit \vec{u}_b gewählt, sodass die Initialisierung schließlich über $f_i^{eq}(\rho, \vec{u}_b)$ erfolgt.

3.1.2 Testfall: zweidimensionale Zylinderumströmung

Um zu zeigen, dass die Kombination aus der Interpolation nach BFL und dem stabilisierenden TMS-Schritt nach Chikatamarla & Karlin (2013) korrekte Ergebnisse liefert, wurden mehrere zweidimensionale Simulationen eines Kreiszylinders durchgeführt. Die Strömung um einen Kreiszylinder des Durchmessers D ist stark von der betrachteten Reynoldszahl $Re = U_\infty D / \nu$ abhängig und eignet sich daher besonders gut zur Bewertung der implementierten Methode. Außerdem wurde der Fall des „unendlich“ langen Zylinders sowohl experimentell als auch numerisch ausführlich untersucht, sodass umfangreiche Vergleichsdaten vorliegen. Es wurden Simulationen im Reynoldszahlbereich $4 \leq Re \leq 300$ durchgeführt und jeweils im Bezug auf den Widerstandskoeffizienten

$$c_D = \frac{2F_x}{\rho U_\infty^2 D} \quad (3.10)$$

untersucht. Dieser spiegelt die horizontal auf den Zylinder wirkende Kraft F_x wider. Weiterhin bildet sich bei Reynoldszahlen ab $Re \geq 50$ eine Kármánsche Wirbelstraße aus. Dies bedeutet, dass eine wechselseitige Ablösung der Strömung mit einer bestimmten Frequenz f_{Sr} stattfindet, welche sich durch die dimensionslose Strouhal-Zahl angeben lässt:

$$Sr = \frac{f_{Sr} D}{U_\infty} \quad (3.11)$$

Der Simulationsbereich erstreckte sich über $-10 \leq x/D \leq 30$ und $-10 \leq y/D \leq 10$, wobei der Zylinder bei $x/D = 0$ und $y/D = 0$ platziert und mit mindestens $N = 20$ Zellen aufgelöst wurde. Als Kollisionsmodell wurde das einfache BGK-Modell verwendet. Am Einlass wurden die Verteilungsfunktionen über $f_i^{eq}(\rho, \vec{u})$ vorgegeben mit einer Dichte von $\rho = 1$ und einer Geschwindigkeit von $\vec{u} = (U_\infty, 0)^T$ mit $U_\infty = 0,05$ in Gittereinheiten, sodass die Anströmung in positive x -Richtung erfolgte. Für den Auslass wurde der in Kapitel 2.4.5 vorgestellte Ansatz nach Chikatamarla et al. (2006) verwendet, während die Ränder oben und unten als *free-slip* definiert wurden. Weiterhin wurde bei der Initialisierung das Geschwindigkeitsfeld mit einer leichten Störung versehen, um das Entstehen der Kármánschen Wirbelstraße zu fördern. In Abbildung 3.3 ist der Widerstandskoeffizient bei verschiedenen Reynoldszahlen dargestellt. Zum Vergleich sind zusätzlich die Messdaten von Wieselsberger (1921) und Tritton (1959) sowie die numerischen Daten von Lima E Silva et al. (2003) und Shu et al. (2007) aufgetragen. Dabei sei angemerkt, dass beide numerische Arbeiten die *immersed boundary method* zur Abbildung der Zylindergeometrie verwendet haben. Es wird deutlich, dass die implementierte Randbedingung (BFL + TMS) das zu erwartende Verhalten sehr

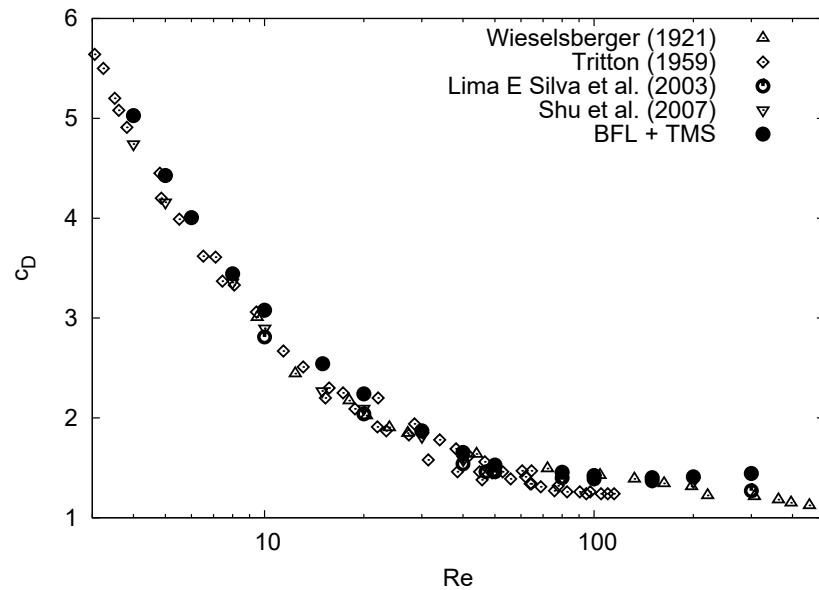
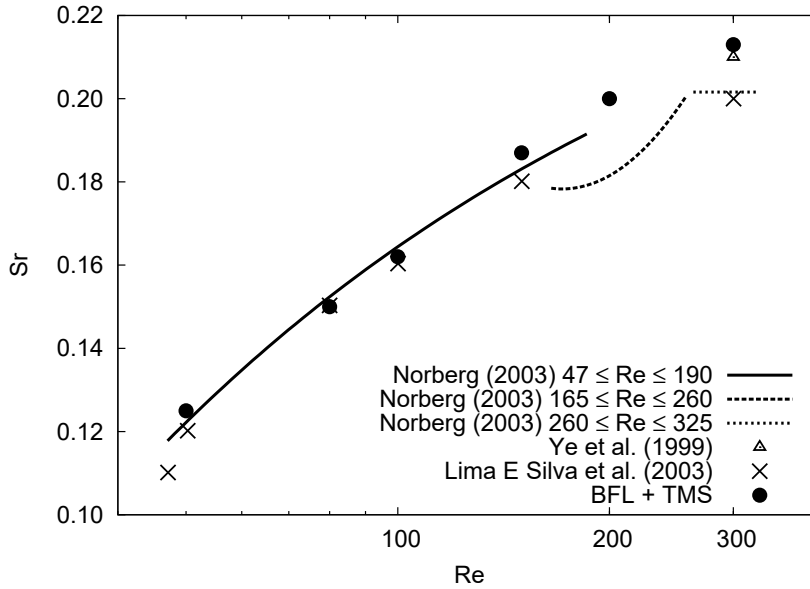


Abbildung 3.3: Widerstandskoeffizient bei der Umströmung eines Zylinders bei verschiedenen Reynoldszahlen.

gut abbildet und dass sich außerdem die *momentum exchange method* zur Ermittlung der auf den Körper wirkenden Kräfte hervorragend eignet.

Abbildung 3.4 zeigt die Strouhalzahl für diejenigen Reynoldszahlen, bei denen sich eine Kármán-sche Wirbelstraße ausgebildet hat. Zum Vergleich sind die entsprechenden empirischen Funktionen $Sr(Re)$ aus Norberg (2003) eingezeichnet, welche sich aus diversen experimentellen Daten ergaben. Des Weiteren sind noch numerische Ergebnisse von Ye et al. (1999) und Lima E Silva et al. (2003) dargestellt. Auch hier bildet die Kombination aus BFL und TMS das erwartete Verhalten gut ab, auch wenn die Strouhalzahl bei $Re = 300$ scheinbar leicht überschätzt wird. Nichtsdestotrotz zeigt der Vergleich, dass die vorgestellte Methode auch zur Simulation von instationären Vorgängen geeignet ist.



Abbildungung 3.4: Strouhalzahl der Kármánschen Wirbelstraße hinter einem Zylinder bei verschiedenen Reynoldszahlen.

3.1.3 Testfall: bewegte Geometrien

Um zu zeigen, dass die implementierte Methode auch bei bewegten Objekten angewandt werden kann, wurde weiterhin der Fall eines bewegten zweidimensionalen Zylinders betrachtet. Hierbei wurde ein Simulationsbereich der Länge $L_x = 30D$ und der Höhe $L_y = 4D$ simuliert. Der Zylinder wurde zu Beginn der Simulation bei $x/D = 27,5$ und $y/D = 2,5$ platziert und bewegte sich anschließend mit einer Geschwindigkeit von $\vec{u}_b = (-U, 0)^T$ mit $U = 0,1$, während die Anströmgeschwindigkeit des Fluids auf $U_\infty = 0$ gesetzt wurde. Die Reynoldszahl betrug $Re = 200$. Zum Vergleich wurde eine Simulation aufgesetzt, bei der der Zylinder bei $x/D = 2,5$ und $y/D = 2,5$ platziert wurde und sich anschließend nicht bewegt hat. Stattdessen betrug aber die Anströmgeschwindigkeit des Fluids $U_\infty = 0,1$, sodass die Relativgeschwindigkeit zwischen Zylinder und Fluid erhalten blieb und somit lediglich das Inertialsystem gewechselt wurde. Abbildung 3.5 zeigt die Wirbelstärke beider Simulationen zu dem Zeitpunkt, an dem der bewegte Zylinder die Position des ruhenden Zylinders erreicht hat. Wie zu erwarten war, verhält sich die Strömung und die Ausbildung der Kármánschen Wirbelstraße bei beiden Simulationen nahezu identisch. Der Vergleich zeigt also, dass die implementierte Behandlung bewegter Geometrien einwandfrei funktioniert.

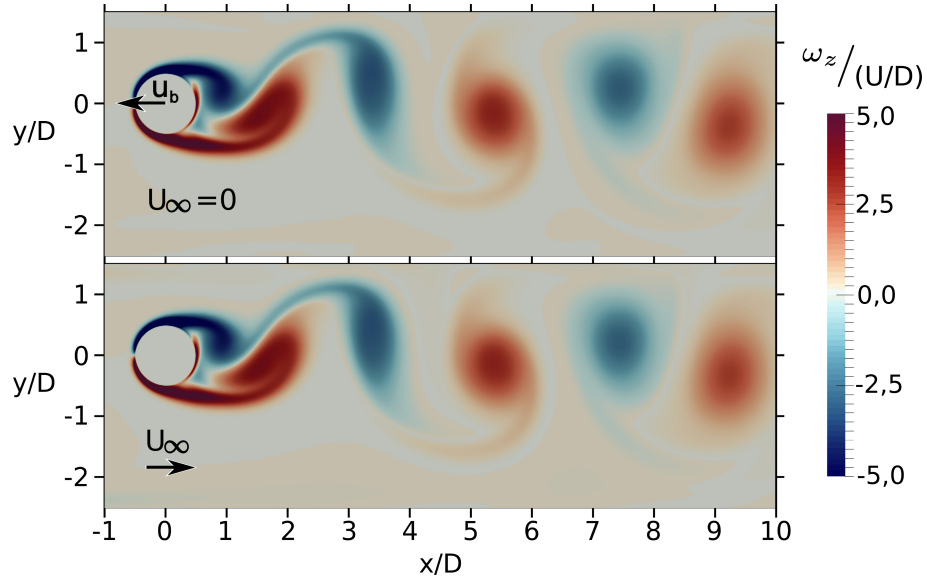


Abbildung 3.5: Wirbelstärke eines bewegten (oben) bzw. angeströmten (unten) Zylinders bei $Re = 200$ im Vergleich.

3.2 Dreidimensionale Gitterverfeinerung

Vor allem bei Strömungen in Wandnähe ist eine lokale Gitterverfeinerung von großer Bedeutung. Dies resultiert daraus, dass Bereiche, die größeren Geschwindigkeitsgradienten ausgesetzt sind, höher aufgelöst werden müssen als jene Bereiche, die keinem Einfluss der Wand ausgesetzt sind bzw. in denen keine größeren Geschwindigkeitsgradienten zu erwarten sind. Mit der Implementierung einer Gitterverfeinerung können also deutlich weniger Zellen benutzt werden, ohne die strömungsphysikalischen Vorgänge zu beeinträchtigen. Im verwendeten Palabos-Code wurde bereits eine lokale Gitterverfeinerung für zweidimensionale Strömungen implementiert (Lagrava et al., 2012; Lagrava Sandoval de Sucre, 2012), jedoch bisher nicht offiziell auf dreidimensionale Strömungen ausgeweitet. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die nötigen Implementierungen zur dreidimensionalen Gitterverfeinerung durchgeführt, wobei die Methode weiterhin der von Lagrava et al. (2012) entspricht. Im Folgenden soll diese Methode daher kurz dargestellt werden, bevor auf die Besonderheiten im dreidimensionalen Fall näher eingegangen wird.

3.2.1 Darstellung der zweidimensionalen Gitterverfeinerung

Die Methode von Lagrava et al. (2012) ist im Grunde genommen eine Weiterentwicklung der Ansätze von Filippova & Hänel (1998) und Dupuis & Chopard (2003). Sie basiert auf einen sogenannten

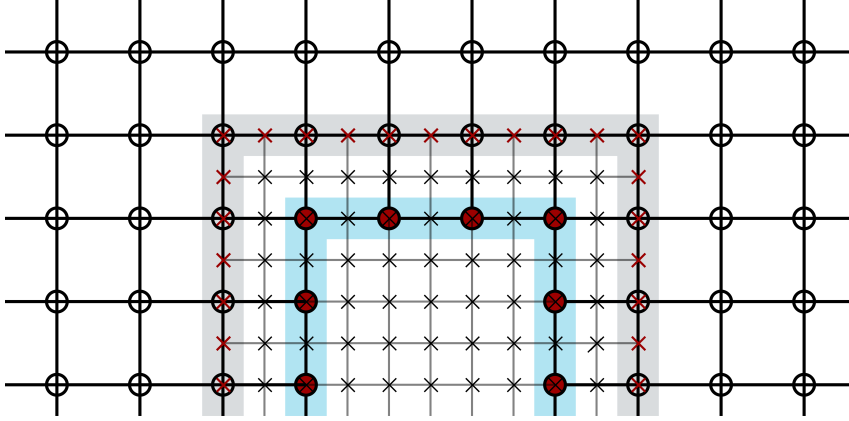


Abbildung 3.6: Veranschaulichung des *multi-domain* Ansatzes zur lokalen Gitterverfeinerung. Die Kreise repräsentieren Punkte auf dem groben Gitter, während die Kreuze die Gitterpunkte auf dem feinen Gitter darstellen. Grau markiert ist der Übergangsbereich von grob auf fein. Hellblau markiert ist der Übergangsbereich von fein auf grob.

multi-domain Ansatz. Dies bedeutet, dass effektiv mehrere Gitter unterschiedlicher Auflösung vorliegen, welche sich nur in den Übergangsbereichen überlappen. In Abbildung 3.6 ist exemplarisch ein solches Gitter dargestellt. Nach dem Prinzip von Lagrava et al. müssen sich das grobe und das feine Gitter zum Teil überlappen, um die jeweiligen Übergangsbereiche abzudecken. In der zuvor genannten Abbildung ist daher der Übergangsbereich von grob auf fein in grau dargestellt, während der Übergangsbereich von fein auf grob hellblau markiert ist. Es wird deutlich, dass nach einem üblichen Kollisions- und Advektionsschritt sowohl an den Zellen des groben Gitters im hellblauen Bereich als auch an den Zellen des feinen Gitters im grauen Bereich Verteilungsfunktionen fehlen würden, weshalb hier eine spezielle Behandlung von Nöten ist. Zum besseren Verständnis werden im Folgenden die Zellen des feinen Gitters im (grauen) Übergangsbereich von grob zu fein mit $\bar{x}_{c \rightarrow f}^f$ und analog die Zellen des groben Gitters im (hellblauen) Übergangsbereich von fein zu grob mit $\bar{x}_{f \rightarrow c}^c$ gekennzeichnet. Weiterhin wird die Menge aller Zellen auf dem feinen Gitter mit F und die Menge aller Zellen auf dem groben Gitter mit C bezeichnet.

Im Wesentlichen besteht die Behandlung der Gitterverfeinerung aus drei Aspekten: der korrekten Skalierung, einem geeigneten Übergang von fein zu grob und einem ebenso geeigneten Übergang von grob zu fein.

Skalierung

Nach Lagrava et al. wird das feine Gitter doppelt so hoch aufgelöst wie das grobe Gitter, sodass für die Gitterweite gilt:

$$\Delta x_f = \Delta x_c / 2 \quad (3.12)$$

Dabei steht der Index f für das feine Gitter und der Index c für das grobe Gitter. Für die zeitliche Skalierung kann sowohl die diffusive Skalierung ($\Delta t \sim \Delta x^2$) also auch die konvektive Skalierung ($\Delta t \sim \Delta x$) verwendet werden. Um die numerische Effizienz zu steigern, ist jedoch die konvektive Skalierung vorzuziehen, sodass:

$$\Delta t_f = \Delta t_c / 2 \quad (3.13)$$

Daraus folgt, dass für jede Iteration auf dem groben Gitter zwei Iterationen auf dem feinen Gitter durchgeführt werden müssen. Dies bedeutet aber auch, dass die Geschwindigkeit zwischen den jeweiligen Gittern nicht skaliert werden muss. Weiterhin soll auch die Reynoldszahl auf beiden Gittern konstant bleiben:

$$Re_c = Re_f \quad (3.14)$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_c L_c}{\nu_c} = \frac{U_f L_f}{\nu_f} \quad (3.15)$$

wobei $U_c = U \Delta t_c / \Delta x_c$ bzw. $U_f = U \Delta t_f / \Delta x_f$ die jeweilige entdimensionierte charakteristische Geschwindigkeit ist und $L_c = L / \Delta x_c$ bzw. $L_f = L / \Delta x_f$ die jeweilige entdimensionierte charakteristische Länge ist. Somit liefert obige Gleichung zusammen mit den Gleichungen 3.12 und 3.13 eine Skalierung der Viskosität ν :

$$\frac{UL\Delta t_c}{\Delta x_c^2 \nu_c} = \frac{UL\Delta t_f}{\Delta x_f^2 \nu_f} \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow \nu_f = 2\nu_c \quad (3.17)$$

Nach Gleichung 2.98 folgt für die Relaxationszeit τ :

$$\tau_f = 2\tau_c - \frac{1}{2} \quad (3.18)$$

Schließlich können noch die Verteilungsfunktionen der jeweiligen Gitter betrachtet werden:

$$f_i = f_i^{eq}(\rho, \vec{u}) + f_i^{neq}(\rho, \vec{u}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.19)$$

Unter der Bedingung, dass $\rho_c = \rho_f$ und $\vec{u}_c = \vec{u}_f$ ist, gilt für den Gleichgewichtsterm f_i^{eq} :

$$f_{i,f}^{eq} = f_{i,c}^{eq} \quad (3.20)$$

Der Nicht-Gleichgewichtsterm f_i^{neq} hängt dagegen auch von dem Spannungstensor $\sigma \sim \nabla \vec{u}$ ab und muss somit entsprechend beim Übergang zwischen den Gittern skaliert werden. Hierzu wird die Approximation gemäß Gleichung 2.99 zusammen mit den Gleichungen 2.81 und 2.100 herangezogen:

$$f_i^{neq} \approx -\frac{\tau t_i \rho}{2c_s^2} (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (3.21)$$

Für die Skalierung zwischen den Gittern gilt daher mit $\nabla \vec{u} = (\nabla \vec{u})_c / \Delta t_c = (\nabla \vec{u})_f / \Delta t_f$:

$$f_{i,f}^{neq} = \frac{\tau_f \Delta t_f}{\tau_c \Delta t_c} f_{i,c}^{neq} = \frac{\tau_f}{2\tau_c} f_{i,c}^{neq} \quad (3.22)$$

Daraus ergibt sich für die Skalierung der Verteilungsfunktionen beim Übergang zwischen den Gittern jeweils folgende Beziehung:

$$f_{i,f} = f_{i,c}^{eq} + \frac{\tau_f}{2\tau_c} f_{i,c}^{neq} \quad (3.23)$$

$$f_{i,c} = f_{i,f}^{eq} + \frac{2\tau_c}{\tau_f} f_{i,f}^{neq} \quad (3.24)$$

Übergang vom feinen zum groben Gitter

Der Übergang vom feinen zum groben Gitter gestaltet sich eher unkompliziert. Da an jedem Punkt des groben Gitters auch ein Punkt auf dem feinen Gitter existiert und im betrachteten Übergangsbereich diese auch zu jedem Zeitpunkt einen vollständigen Satz Verteilungsfunktionen besitzen, könnte man lediglich die Verteilungsfunktionen vom feinen Gitterpunkt skalieren und auf den entsprechenden groben Gitterpunkt übertragen. Lagrava et al. (2012) zeigen jedoch, dass dies nicht ausreicht, da dann numerische Instabilitäten am Übergang entstehen. Stattdessen schlagen sie vor, die Nicht-Gleichgewichtsterme der Verteilungsfunktionen zu filtern und begründen dies damit, dass auf dem feinen Gitter mehr Skalen aufgelöst werden als auf dem groben Gitter. Für die Filterung genügt dabei eine Mittelung über alle direkt benachbarten feinen Gitterpunkte. Somit gilt schließlich für die Verteilungsfunktionen des groben Gitters im Übergangsbereich vom feinen zum groben

Gitter folgender Zusammenhang:

$$f_{i,c}(\vec{x}_{f \rightarrow c}^c, t) = f_{i,f}^{eq}(\vec{x}_{f \rightarrow c}^c, t) + \frac{2\tau_c}{\tau_f} \left[\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f_{i,f}^{neq}(\vec{x}_{f \rightarrow c}^c + \vec{c}_{i,f}, t) \right] \quad (3.25)$$

wobei $\vec{c}_{i,f}$ die jeweiligen Gittergeschwindigkeitsvektoren des feinen Gitters sind.

Übergang vom groben zum feinen Gitter

Beim Übergang vom groben zum feinen Gitter sind zwei unterschiedliche Fälle zu betrachten. Liegt der betrachtete feine Gitterpunkt auf einem groben Gitterpunkt ($\vec{x}_{c \rightarrow f}^f \in C$), so genügt es, die Verteilungsfunktionen entsprechend zu skalieren und zu kopieren:

$$f_{i,f}(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f, t) = f_{i,c}^{eq}(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f, t) + \frac{\tau_f}{2\tau_c} f_{i,c}^{neq}(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f, t) \quad \forall \vec{x}_{c \rightarrow f}^f \in C \quad (3.26)$$

Allerdings gibt es auch feine Gitterpunkte im Übergangsbereich, die nicht mit einer Zelle auf dem groben Gitter zusammenfallen. Um hier die nötigen Informationen zu erhalten, ist eine Interpolation der relevanten Größen ($\bar{\rho}$, \bar{u} und $\bar{f}_{i,c}^{neq}$) nötig, bevor die Verteilungsfunktionen skaliert werden können:

$$f_{i,f}(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f, t) = f_i^{eq}(\bar{\rho}, \bar{u}) + \frac{\tau_f}{2\tau_c} \bar{f}_{i,c}^{neq} \quad \forall \vec{x}_{c \rightarrow f}^f \notin C \quad (3.27)$$

Lagrava et al. (2012) zeigen, dass eine lineare Interpolation nicht ausreicht, um die Massenerhaltung zu garantieren, weshalb nach Möglichkeit eine kubische Interpolation verwendet werden sollte. So gilt dann beispielsweise für die interpolierte Dichte $\bar{\rho}$:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f, t) = & \frac{9}{16} \left[\rho_c(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f - \vec{c}_{i,f}, t) + \rho_c(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f + \vec{c}_{i,f}, t) \right] \\ & - \frac{1}{16} \left[\rho_c(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f - 3\vec{c}_{i,f}, t) + \rho_c(\vec{x}_{c \rightarrow f}^f + 3\vec{c}_{i,f}, t) \right] \quad \forall \vec{x}_{c \rightarrow f}^f \notin C \end{aligned} \quad (3.28)$$

wobei ρ_c jeweils auf dem groben Gitter evaluiert wird und das geeignete $\vec{c}_{i,f}$ durch die Orientierung des Übergangsbereichs von dem groben zum feinen Gitter gegeben ist.

Problematisch bei der Interpolation ist allerdings, dass nicht immer alle nötigen Gitterpunkte auf dem groben Gitter vorhanden sind, um eine kubische Interpolation durchführen zu können. Abbildung 3.7 zeigt einen solchen Fall, bei dem das feine Gitter und somit auch der entsprechende Übergangsbereich bis zum Rand des Simulationsbereichs reicht. Die mit einem Pfeil gekennzeichnete Zelle auf dem feinen Gitter bräuchte für die kubische Interpolation Informationen einer Zelle auf dem groben Gitter, welche außerhalb des Simulationsbereichs liegt. Um also an dieser Stel-

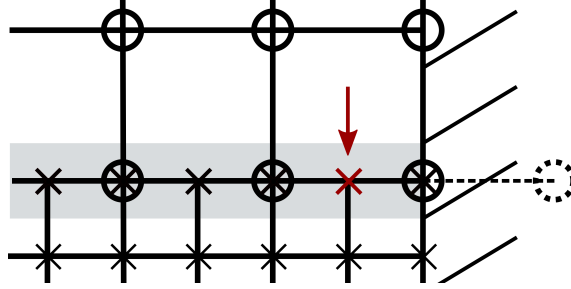


Abbildung 3.7: Problemfall bei der kubischen Interpolation beim Übergang vom groben zum feinen Gitter. Die problematische Zelle ist mit einem Pfeil gekennzeichnet. Für die kubische Interpolation der relevanten Größen würde hierfür eine Zelle auf dem groben Gitter benötigt, welche außerhalb des Simulationsbereichs liegt (hier gestrichelt eingezeichnet).

le dennoch die benötigten Informationen zu erhalten, muss auf eine asymmetrische Interpolation zurück gegriffen werden.

Algorithmus

Die vorgestellten Übergänge zwischen den jeweiligen Gittern gehen davon aus, dass sich beide Gitter am gleichen Zeitpunkt t befinden. Da jedoch auf dem feinen Gitter gemäß Gleichung 3.13 zwei Iterationen pro Iteration auf dem groben Gitter erfolgen müssen, muss zusätzlich noch eine zeitliche Interpolation durchgeführt werden. Der komplette Algorithmus der Gitterverfeinerung bei der Verwendung von zwei Gittern bzw. zwei Verfeinerungsstufen ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Wie üblich werden zu Beginn alle Zellen mit der gewünschten Dichte und Geschwindigkeit über die Gleichgewichtsverteilungsfunktion initialisiert. Bevor dann der Kollisions- und Advektionsschritt auf dem groben Gitter durchgeführt wird, müssen im Übergangsbereich vom groben zum feinen Gitter die Größen $\rho_c(t)$, $\vec{u}_c(t)$ und $f_{i,c}^{neq}(t)$ für alle $\vec{x}_{c \rightarrow f}^f \in C$ zwischengespeichert werden. Diese werden später für die zeitliche Interpolation benötigt. Nach dem Kollisions- und Advektionsschritt befindet sich das grobe Gitter effektiv am Zeitpunkt $t + \Delta t_c$ und es werden wieder die Größen $\rho_c(t + \Delta t_c)$, $\vec{u}_c(t + \Delta t_c)$ und $f_{i,c}^{neq}(t + \Delta t_c)$ zwischengespeichert. Außerdem fehlen an den Gitterpunkten $\vec{x}_{f \rightarrow c}^c$ noch Verteilungsfunktionen. Bevor diese jedoch ergänzt werden können, müssen erst die entsprechenden Schritte auf dem feinen Gitter durchgeführt werden. Zunächst findet daher auf diesem Gitter ein üblicher Kollisions- und Advektionsschritt statt. Das feine Gitter befindet sich dann am Zeitpunkt $t + \Delta t_c/2$. Um die daraufhin zum Teil fehlenden Verteilungsfunktionen an den Gitterpunkten $\vec{x}_{c \rightarrow f}^f$ bestimmen zu können, muss dann eine lineare zeitliche Interpolation erfolgen, um die Größen $\rho_c(t + \Delta t_c/2)$, $\vec{u}_c(t + \Delta t_c/2)$ und $f_{i,c}^{neq}(t + \Delta t_c/2)$ zu erhalten. So gilt beispielsweise

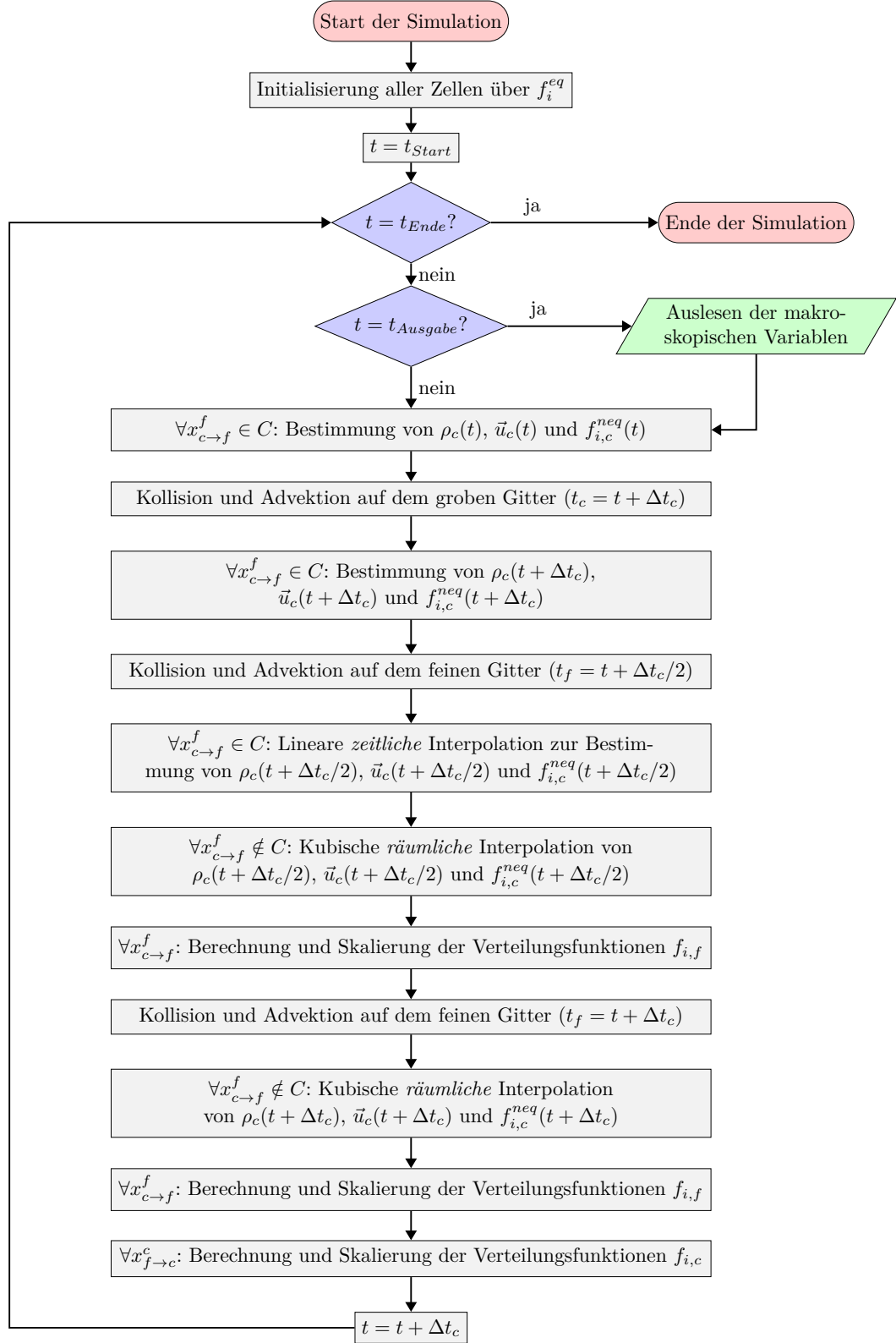


Abbildung 3.8: Programmablauf der Gitterverfeinerung.

für die Dichte:

$$\rho_c(t + \Delta t_c/2) = \frac{1}{2} [\rho_c(t) + \rho_c(t + \Delta t_c)] \quad (3.29)$$

Anschließend erfolgt für $\vec{x}_{c \rightarrow f}^f \notin C$ die kubische räumliche Interpolation, woraufhin die Verteilungsfunktionen im Übergangsbereich vom groben zum feinen Gitter gemäß den Gleichungen 3.26 und 3.27 rekonstruiert werden können. Danach erfolgt erneut ein Kollisions- und Advektionsschritt auf dem feinen Gitter, sodass sich dieses anschließend - wie das grobe Gitter auch schon - beim Zeitpunkt $t + \Delta t_c$ befindet. Die zeitliche Interpolation entfällt an dieser Stelle, sodass nun nur noch eine kubische räumliche Interpolation der relevanten Größen nötig ist, bevor die erneut zum Teil fehlenden Verteilungsfunktionen an den Gitterpunkten $\vec{x}_{c \rightarrow f}^f$ rekonstruiert werden können. Schließlich werden noch gemäß der Gleichung 3.25 die Verteilungsfunktionen im Übergangsbereich vom feinen zum groben Gitter an den Gitterpunkten $\vec{x}_{f \rightarrow c}^c$ rekonstruiert, sodass auf jedem Gitter wieder überall ein vollständiger Satz Verteilungsfunktionen definiert ist und gegebenenfalls die makroskopischen Größen ausgelesen werden können.

3.2.2 Besonderheiten der dreidimensionalen Gitterverfeinerung

Bei der dreidimensionalen Gitterverfeinerung ist der Algorithmus identisch zu dem im zweidimensionalen Fall, allerdings sind die Übergänge zwischen den Gittern nun keine eindimensionalen Linien mehr, sondern zweidimensionale Flächen. Beim Übergang vom feinen zum groben Gitter bleibt die Gleichung 3.25 erhalten, wobei die Filterung nun in alle drei Raumrichtungen erfolgt. Nach wie vor gelten auch die Gleichungen 3.26 und 3.27 beim Übergang vom groben zum feinen Gitter. Der entscheidende Unterschied liegt jedoch in der räumlichen Interpolation für die feinen Gitterpunkte, welche nicht mit dem groben Gitter überlappen. Da der Übergang nun eine Fläche ist, kann auch die Interpolation zweidimensional erfolgen. Liegen alle relevanten groben Gitterzellen vor, so erfolgt die Interpolation bikubisch, sodass bis zu 16 grobe Gitterpunkte verwendet werden. In Abbildung 3.9 liegt die Übergangsfläche beispielsweise in der x - y -Ebene. Betrachtet man nun den feinen Gitterpunkt A bei $\vec{x}_{c \rightarrow f}^f = (x_f, y_f, z_f)^T$ mit $x_f, y_f \notin C$, so wird zunächst an den Positionen $(x_f - 3\Delta x_f, y_f, z_f)^T$, $(x_f - \Delta x_f, y_f, z_f)^T$, $(x_f + \Delta x_f, y_f, z_f)^T$ und $(x_f + 3\Delta x_f, y_f, z_f)^T$ jeweils entlang der y -Achse kubisch interpoliert und die so erhaltenen interpolierten Werte schließlich entlang der x -Achse kubisch interpoliert. In Summe gilt dadurch beispielsweise für die interpolierte

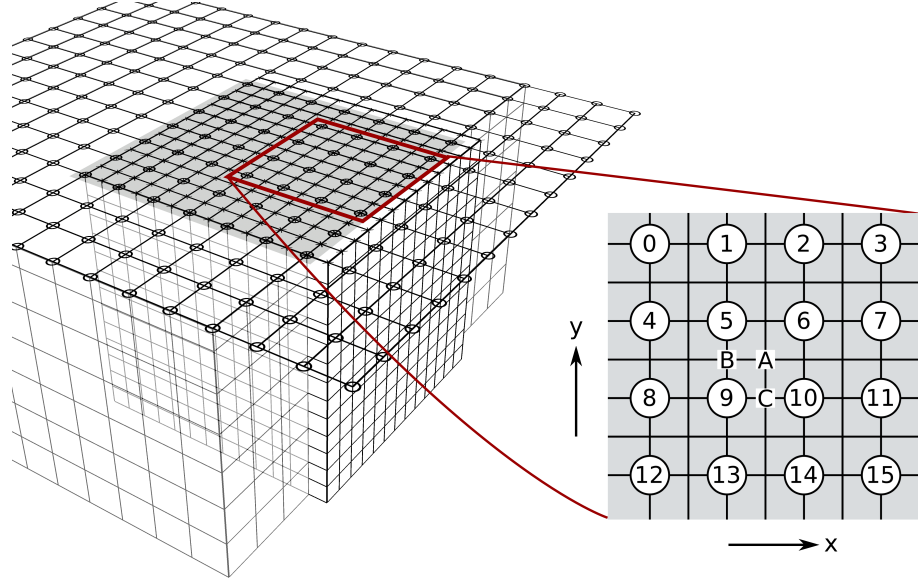


Abbildung 3.9: Übergangsfläche vom groben zum feinen Gitter bei der dreidimensionalen Gitterverfeinerung.

Dichte am Punkt A mit der Notation aus Abbildung 3.9:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{f,A}(x_f, y_f) = & \frac{1}{256} [\rho_{c,0} + \rho_{c,3} + \rho_{c,12} + \rho_{c,15}] \\ & - \frac{9}{256} [\rho_{c,1} + \rho_{c,2} + \rho_{c,4} + \rho_{c,7} + \rho_{c,8} + \rho_{c,11} + \rho_{c,13} + \rho_{c,14}] \\ & + \frac{81}{256} [\rho_{c,5} + \rho_{c,6} + \rho_{c,9} + \rho_{c,10}] \quad \text{für } x_f, y_f \notin C \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die feinen Gitterpunkte B und C stimmen jeweils nur entlang einer Koordinatenachse nicht mit dem groben Gitter überein, sodass hier wiederum eine einfache kubische Interpolation genügt:

$$\bar{\rho}_{f,B}(x_f, y_f) = \frac{9}{16} [\rho_{c,5} + \rho_{c,9}] - \frac{1}{16} [\rho_{c,1} + \rho_{c,13}] \quad \text{für } x_f \in C, y_f \notin C \quad (3.31)$$

$$\bar{\rho}_{f,C}(x_f, y_f) = \frac{9}{16} [\rho_{c,9} + \rho_{c,10}] - \frac{1}{16} [\rho_{c,8} + \rho_{c,11}] \quad \text{für } x_f \notin C, y_f \in C \quad (3.32)$$

Darüber hinaus können jedoch auch auf diesen Übergangsflächen Fälle auftreten, bei denen nicht alle nötigen groben Gitterpunkte vorhanden sind. Je nachdem welche Gitterpunkte vorhanden sind, wird dann auf eine entsprechende asymmetrische Interpolation zurückgegriffen. Für den Fall des Gitterpunktes A entstehen dadurch gegebenenfalls diverse Kombinationen aus asymmetrischer und symmetrischer Interpolation. Um diese verschiedenen Fälle abzudecken, könnte man zu Beginn der

Simulation für jeden feinen Gitterpunkt der Sorte A festlegen, welche Variante der zweidimensionalen Interpolation verwendet werden muss. Dies ist jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden, weshalb im Rahmen dieser Arbeit eine Variante implementiert wurde, bei der zur Laufzeit die Sonderfälle abgefragt werden. Damit lassen sich dann auch problemlos beliebige Kombinationen von (benachbarten) Blöcken definieren, innerhalb derer eine Gitterverfeinerung stattfinden soll.

3.2.3 Parallelisierung

Komplett uniforme kartesische Gitter lassen sich problemlos auf viele Prozessoren verteilen. Außerdem ist die Skalierbarkeit der LBM aufgrund ihrer fast ausschließlich lokalen Operationen bis zu mehreren Tausend Prozessoren exzellent (Aidun & Clausen, 2010). Bei der Verwendung der Gitterverfeinerung ist die Verteilung der Zellen auf die jeweiligen Prozessoren jedoch nicht mehr so trivial. Eine gleichmäßige Verteilung aller vorhandenen Zellen auf die Prozessoren wäre wenig sinnvoll, da die feinen Gitterzellen mehr Iterationsschritte durchlaufen müssen als die groben. Aus diesem Grund wurde die Parallelisierung im Falle der Gitterverfeinerung in Palabos angepasst: Zunächst werden die Blöcke des feinsten Gitters möglichst gleichmäßig auf alle Prozessoren verteilt. Dabei ist zu beachten, dass möglichst quadratische Blöcke entstehen sollen. Anschließend werden die Blöcke des nächstfeineren Gitters aufgeteilt, solange bis alle Gitter verschiedener Verfeinerungsstufen verteilt sind. Wichtig ist außerdem, dass die Übergangsbereiche, welche sowohl Gitterpunkte vom feinen Gitter als auch Gitterpunkte vom groben Gitter enthalten, jeweils auf dem selben Prozessor liegen. Dadurch kann es vorkommen, dass ein Gitter nicht ganz so gut auf die Prozessoren verteilt werden kann wie das andere. Da aber das feine Gitter mehr Iterationsschritte durchlaufen muss als das grobe, ist es sinnvoller, das feine Gitter bei der Verteilung gegenüber dem groben Gitter zu bevorzugen, weshalb bei der oben dargestellten Lastenverteilung auch mit dem feinsten Gitter begonnen wird. Mit der so gewonnenen Verteilung der Gitterpunkte ist schließlich eine effektive Parallelisierung mit guter Skalierbarkeit auch im Falle der Gitterverfeinerung möglich.

3.2.4 Testfall: dreidimensionale Zylinderumströmung

Ein geeigneter Testfall für die dreidimensionale Gitterverfeinerung ist die Umströmung eines unendlich langen Zylinders bei einer moderaten Reynoldszahl von $Re = 500$. Dieser Fall kann mit Hilfe der Gitterverfeinerung noch mittels einer direkten numerischen Simulation (DNS) simuliert werden. Außerdem liegen in der Literatur genügend experimentelle und numerische Daten vor, um das auftretende Verhalten hinreichend bewerten zu können. Das folgende Beispiel der Zylinderum-

Tabelle 3.1: Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation der Zylinderumströmung.

N	x/D	y/D	z/D
14	$-5 \dots +20$	$-5 \dots +5$	$-2,65 \dots +2,65$
28	$-4 \dots +10$	$-2 \dots +2$	$-2,65 \dots +2,65$
56	$-2 \dots +5$	$-1,5 \dots +1,5$	$-2,65 \dots +2,65$
112	$-1 \dots +1$	$-1 \dots +1$	$-2,65 \dots +2,65$

strömung wurde bereits veröffentlicht (Morrison et al., 2016).

Um eine DNS zu ermöglichen, muss das feinste Gitter mindestens so hoch aufgelöst sein, dass alle Skalen der turbulenten Strömung bis zur Kolmogorov-Längenskala abgebildet werden können. Somit sind $N \geq Re^{3/4} \approx 106$ Zellen pro Zylinderdurchmesser D nötig. Für die Simulation der Zylinderumströmung wurden daher insgesamt vier Verfeinerungsstufen verwendet, deren Abmaße in Tabelle 3.1 zusammengefasst sind. Der Zylinder ist dabei entlang der z -Achse ausgerichtet und bei $(x/D, y/D, z/D) = (0, 0, 0)$ zentriert. Insgesamt ergeben sich dadurch 55,2 Millionen Zellen.

Als Kollisionsmodell wurde das RLBGK-Modell verwendet, da dieses ausreichend numerisch stabil ist und gleichzeitig zuverlässige Ergebnisse liefert, ohne dass zusätzliche Parameter vorgegeben werden müssen. Die Behandlung des Zylinders erfolgt mittels der zuvor dargestellten Kombination aus der Interpolation nach Bouzidi et al. (2001) und dem TMS-Schritt nach Chikatamarla & Karlin (2013). Die Anströmung des Zylinders erfolgte in positiver x -Richtung mit einer Geschwindigkeit von $\vec{u} = (U_\infty, 0, 0)^T$ mit $U_\infty = 0,05$ in Gittereinheiten. In z -Richtung wurden periodische Randbedingungen gewählt, um einen unendlichen Zylinder möglichst gut abzubilden, während die Ränder in y -Richtung als *free-slip* definiert wurden. Am Auslass wurde die Methode von Chikatamarla et al. (2006) verwendet, zusammen mit einer *sponge zone* ab $x \approx 19,1D$.

Zur Charakterisierung der Wirbelstrukturen im Nachlauf des Zylinders bietet sich das sogenannte Q-Kriterium an, welches positive Werte liefert, wenn die Rotation $\bar{\Omega} = 1/2 \left((\nabla \vec{u})^T - \nabla \vec{u} \right)$ größer ist als die Scherung $\bar{S} = 1/2 \left((\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u} \right)$:

$$Q = \frac{1}{2} (||\bar{\Omega}||^2 - ||\bar{S}||^2) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.33)$$

In Abbildung 3.10 sind die Strömungsstrukturen im Nachlauf des Zylinders mit dem Q-Kriterium visualisiert worden. In der x - y -Ebene ist die Kármánsche Wirbelstraße deutlich zu erkennen. Gleichzeitig sind auch Sekundärwirbel sichtbar, die die jeweiligen Wirbel der Kármánschen Wirbelstraße miteinander verbinden. Gemäß Brede et al. (1996) ist zu erwarten, dass diese Sekundärwirbel eine Wirbelstärke in Strömungsrichtung, in diesem Fall also in x -Richtung, besitzen. Abbildung 3.10

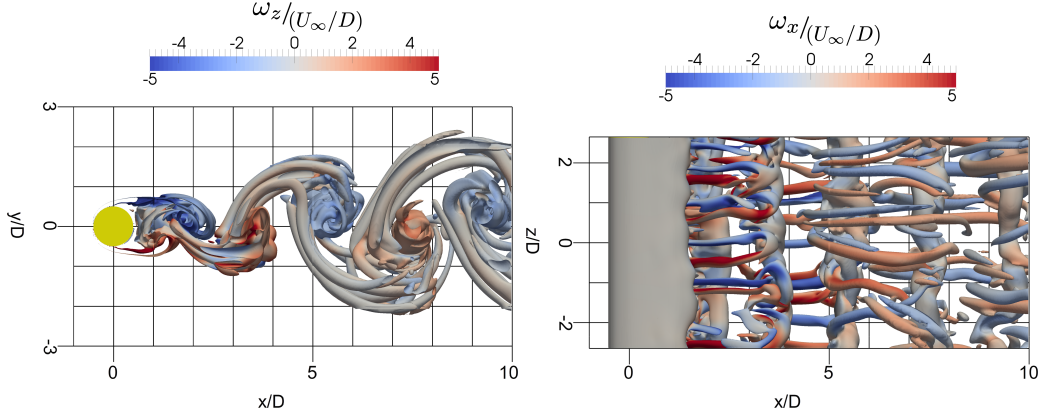


Abbildung 3.10: Strömungsstrukturen im Nachlauf eines unendlichen Zylinders. Die Konturen des Q-Kriteriums bei $Q = 0,5(D/U_\infty)^2$ sind mit der z -Komponente (links) bzw. x -Komponente (rechts) der Wirbelstärke eingefärbt.

rechts zeigt, dass dies auch in der Simulation der Fall ist.

Neben den Strömungsstrukturen sind auch die auf den Zylinder wirkenden Kräfte von Bedeutung. Dazu werden der Widerstandsbeiwert c_D und der Auftriebsbeiwert c_L definiert:

$$c_D = \frac{2F_x}{\rho U_\infty^2 A} \quad (3.34)$$

$$c_L = \frac{2F_y}{\rho U_\infty^2 A} \quad (3.35)$$

wobei F_x und F_y jeweils die auf den Körper wirkende Kraft in x - bzw. y -Richtung ist und A die angeströmte Fläche darstellt. Abbildung 3.11 zeigt die zeitliche Entwicklung beider Kraftbeiwerte für die hier dargestellte Zylinderumströmung. Der Widerstandsbeiwert beträgt im Mittel $c_D = 1,051 \pm 0,041$ und stimmt somit hervorragend mit den Messdaten aus der Literatur überein (Wieselsberger, 1921; Panton, 2013). Der Auftriebsbeiwert schwankt aufgrund der wechselseitigen Strömungsablösung um den Nullwert, sodass hier nur eine Angabe der Standardabweichung sinnvoll ist. Diese wird auch als dynamischer Auftriebsbeiwert bezeichnet und liegt hier bei $c'_L = 0,24$, was ebenfalls innerhalb des zu erwartenden Bereichs liegt (Norberg, 2003).

Weiterhin wurde für die Simulation die charakteristische Strouhalzahl (Glg. 3.11) bestimmt. Dazu wurden stromab des Zylinders bei $x = 2,5D$, $y = 1,2D$ und $z = 0D$ die Geschwindigkeitsfluktuationen über insgesamt ca. 39 200 Iterationen des größten Gitters aufgezeichnet. Nach jeweils 19 600 Iterationen wurden die Geschwindigkeitsfluktuationen Fourier-transformiert und die so entstandenen zwei Fourier-Transformationen anschließend gemittelt. Diese Mittelung ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Das Maximum der Fourier-Transformation entspricht der für die Strömung

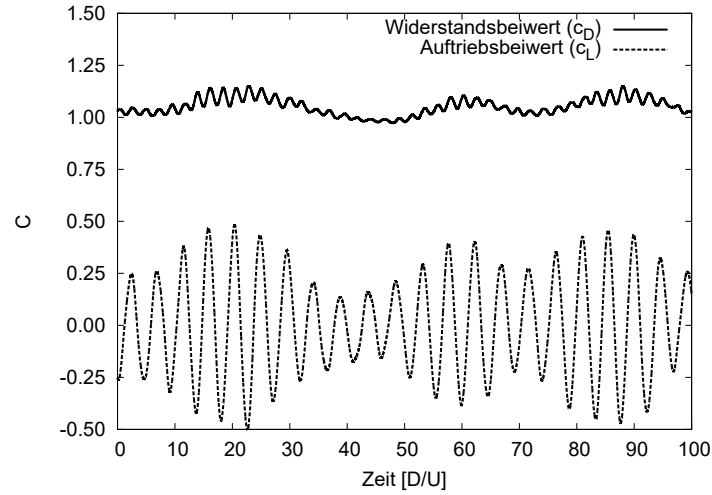


Abbildung 3.11: Zeitliche Entwicklung des Widerstands- und Auftriebsbeiwertes bei der Umströmung eines unendlichen Zylinders.

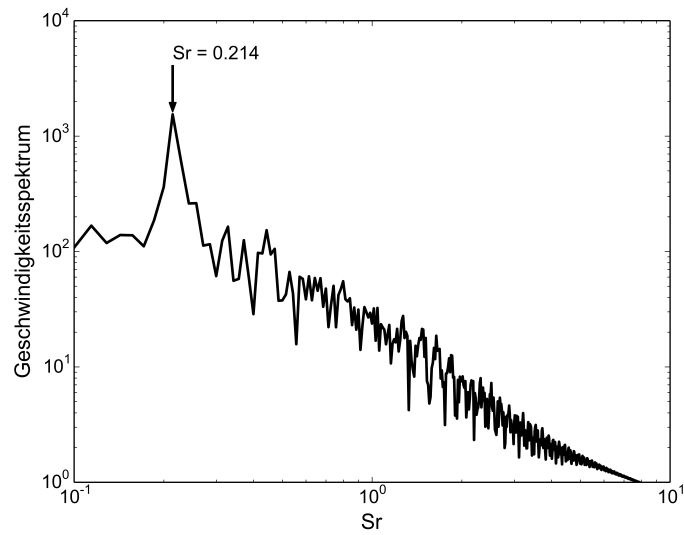


Abbildung 3.12: Geschwindigkeitsspektrum im Nachlauf des Zylinders. Das Maximum des Spektrums entspricht der charakteristischen Strouhalzahl und ist gesondert gekennzeichnet.

charakteristischen Strouhalzahl und liegt bei $Sr = 0,214$. Dies überschätzt zwar den gemäß Norberg (2003) zu erwartenden Wert von $Sr \approx 0,206$ etwas, allerdings kann die Frequenz, die durch die Strouhalzahl gegeben ist, lediglich ca. 14 Mal innerhalb von 19 600 Iterationen auf dem groben Gitter abgebildet werden. Basierend auf der daher sehr geringen Datenmenge, ist der gewonnene Wert für die Strouhalzahl durchaus akzeptabel.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das instationäre Verhalten der Strömung im Nachlauf des Zylinders bei einer Reynoldszahl von $Re = 500$ aufgrund der dreidimensionalen Gitterverfeinerung sehr gut abgebildet werden kann. In Morrison et al. (2016) finden sich noch weitere Beispiele, die sowohl von der dreidimensionalen Gitterverfeinerung als auch von der zuvor dargestellten Behandlung (bewegter) komplexerer Objektgeometrien Gebrauch machen. Auf diese soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht zusätzlich eingegangen werden.

3.3 Numerische Stabilität bei hohen Reynoldszahlen

Wie bereits in Kapitel 2.5 erwähnt, sind nicht alle Kollisionsmodelle bedingungslos numerisch stabil. Obwohl die Auflösung in gewissen Bereichen einer Simulation, wie etwa um Objekte herum oder in den Bereichen hoher Turbulenz, hoch genug sein muss, um die Strömungsablösung und die relevanten Strömungsstrukturen abzubilden, gibt es auch Bereiche, die weniger hoch aufgelöst sein müssen. Vor allem wenn der Simulationsbereich an den Rändern verlängert wird, um unerwünschte Randeffekte zu vermeiden, ist es eher nicht gewünscht, dass die Auflösung dort sehr hoch ist. Bei numerisch instabilen Kollisionsmodellen ist jedoch, vor allem bei hohen Reynoldszahlen, die minimale Auflösung stark begrenzt (vgl. Kapitel 2.5), sodass diese für typische technische Anwendungen der Strömungssimulation ungeeignet sind. Das Kollisionsmodell nach Karlin et al. (2014), welches bereits für den zweidimensionalen Fall in Kapitel 2.5.5 als das KBC-Modell vorgestellt wurde, ist dagegen ein Modell, welches zumindest in der Abwesenheit von Rändern bedingungslos numerische Stabilität aufweist. Im Folgenden soll das Modell für den dreidimensionalen Fall kurz vorgestellt werden, bevor alle in diesem Kapitel erwähnten Implementierungen kombiniert werden, um die Umströmung eines auf einer Bodenplatte stehenden Zylinders zu simulieren.

3.3.1 Das KBC-Kollisionsmodell für das D3Q27-Gitter

Das KBC-Kollisionsmodell für den dreidimensionalen Fall wurde in Bösch et al. (2015a) und Bösch et al. (2015b) vorgestellt und an verschiedenen Testfällen ausführlich validiert. Weiterhin zeigten Dorschner et al. (2016), dass das Modell auch für komplexe Strömungsfälle geeignet ist. Für das

D3Q27-Gitter sind die relevanten Momente folgendermaßen definiert:

$$\rho M_{pqr} = \sum_{i=0}^{26} f_i c_{ix}^p c_{iy}^q c_{iz}^r, \quad p, q, r \in 0, 1, 2 \quad (3.36)$$

mit $M_{000} = 1$, $M_{100} = u_x$, $M_{010} = u_y$, $M_{001} = u_z$, $\rho M_{200} = \Pi_{xx}$, $\rho M_{020} = \Pi_{yy}$, $\rho M_{002} = \Pi_{zz}$, $\rho M_{110} = \Pi_{xy}$, $\rho M_{101} = \Pi_{xz}$ und $\rho M_{011} = \Pi_{yz}$. Die Momente dritter Ordnung oder höher haben im isothermen Fall keine physikalische Bedeutung. Zusätzlich definieren Bösch et al. (2015b) allerdings noch die Spur des Impulsstromtensors $T = \Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}$. Gemäß den Gleichungen 2.8 und 2.22 muss dieser nicht zwangsläufig berücksichtigt werden muss, um den Spannungstensor zu erhalten:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -(\Pi_{\alpha\beta} - P\delta_{\alpha\beta}) + \rho u_\alpha u_\beta \quad (3.37)$$

$$= -\left(\Pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}T\delta_{\alpha\beta}\right) + \rho u_\alpha u_\beta \quad (3.38)$$

wobei im letzten Schritt die Definition des Drucks gemäß Gleichung 2.46 herangezogen wurde. Zu erwähnen ist an dieser Stelle, dass die hier gewählte Notation etwas von der Notation von Bösch et al. (2015b) abweicht. Dies ist insbesondere der Fall, was die Definition des Impulsstromtensors betrifft. Um die Konsistenz der Definitionen innerhalb dieser Arbeit zu wahren, wurden die Formeln entsprechend angepasst.

Für die Verteilungsfunktionen ergeben sich mit der zuvor definierten Momentenbasis folgende Ausdrücke:

$$f_i = \begin{cases} \rho - T + \tilde{h}_i, & \text{falls } c_{ix} = c_{iy} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{6} (3\rho c_{ix} u_x + 2\Pi_{xx} - \Pi_{zz} - \Pi_{yy} + T + \tilde{h}_i), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{6} (3\rho c_{iy} u_y + 2\Pi_{yy} - \Pi_{xx} - \Pi_{zz} + T + \tilde{h}_i), & \text{falls } c_{iy} \neq 0, c_{ix} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{6} (3\rho c_{iz} u_z + 2\Pi_{zz} - \Pi_{xx} - \Pi_{yy} + T + \tilde{h}_i), & \text{falls } c_{iz} \neq 0, c_{ix} = c_{iy} = 0 \\ \frac{1}{4} (c_{ix} c_{iy} \Pi_{xy} + \tilde{h}_i), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} \neq 0, c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{4} (c_{ix} c_{iz} \Pi_{xz} + \tilde{h}_i), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iz} \neq 0, c_{iy} = 0 \\ \frac{1}{4} (c_{iy} c_{iz} \Pi_{yz} + \tilde{h}_i), & \text{falls } c_{iy} \neq 0, c_{iz} \neq 0, c_{ix} = 0 \\ \tilde{h}_i, & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} \neq 0, c_{iz} \neq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

wobei \tilde{h}_i die jeweiligen Momente dritter Ordnung oder höher beinhaltet. Da die explizite Dar-

stellung der Anteile dieser Momente für die Implementierung des Modells irrelevant sind, werden sie nicht näher spezifiziert. Analog zum zweidimensionalen Fall werden die Verteilungsfunktionen anschließend wieder in verschiedene Anteile aufgeteilt, wobei Bösch et al. (2015b) hierfür grundsätzlich vier verschiedene Ansätze vorstellen. Im Folgenden wird allerdings nur auf das dort als KBC-N1 bezeichnete Modell eingegangen, da dieses für die isothermen Simulationen der Objektumströmung bei hohen Reynoldszahlen ausreichend ist. Somit gilt folgende Einteilung:

$$f_i = k_i(\rho, \vec{u}) + s_i(\rho, \vec{u}, \mathbf{\Pi}) + h_i(\rho, \vec{u}, T, \tilde{h}) \quad (3.40)$$

Die restlichen Schritte entsprechen dem zweidimensionalen Fall (vgl. Kapitel 2.5.5) und bedürfen daher keiner gesonderten Behandlung.

Das KBC-Modell für das D3Q27-Gitter wurde in Zusammenarbeit mit der Gruppe von Prof. Ilya Karlin an der ETH Zürich in Palabos implementiert.

3.3.2 Testfall: Kanalströmung

Ein geeigneter Testfall für Randbedingungen, aber auch für die Simulation von Strömungen bei hohen Reynoldszahlen ist die turbulente Durchströmung eines rechteckigen Kanals. Da für diese Strömung die Entwicklung des Grenzschichtprofils an der Wand von Bedeutung ist, wird die Reynoldszahl üblicherweise auf die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ bezogen. Diese wiederum ist über die Wandschubspannung τ_w definiert:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.41)$$

Die Reynoldszahl ergibt sich dadurch zu $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$, wobei δ der halben Kanalhöhe in y -Richtung entspricht. Im Folgenden wird die Kanalströmung bei $Re_\tau = 180$ betrachtet. Diese wurde bereits von Kim et al. (1987) mittels einer hochaufgelösten DNS (bis zu einem Wandabstand von $y^+ \approx 0,05$) simuliert. Moser et al. (1999) wiederholten diese DNS in leicht abgeänderter Form und stellten ihre gewonnenen Daten der Allgemeinheit zur Verfügung. Damit ist diese Strömung besonders gut als Testfall geeignet.

Mit der dimensionslosen Geschwindigkeit $u^+ = u/u_\tau$ und dem dimensionslosen Wandabstand $y^+ = y u_\tau / \nu$ lässt sich gemäß Schlichting & Gersten (2006) die maximale Geschwindigkeit u_{max} in

der Kanalmitte über das logarithmische Wandgesetz abschätzen:

$$\lim_{y^+ \rightarrow \infty} u^+(y^+) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+ \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow u_{max} = u_\tau \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) + C^+ \right] \quad (3.43)$$

Dabei ist die Kármán-Konstante über $\kappa = 0,41$ gegeben. Die Integrationskonstante C^+ wird im Folgenden gemäß Kim et al. (1987) auf $C^+ = 5,5$ gesetzt. Dies steht zwar im Widerspruch zu dem Wert von 5,0, der normalerweise für das logarithmische Wandgesetz bei turbulenten Strömungen verwendet wird (Schlichting & Gersten, 2006), allerdings lässt sich dies dadurch erklären, dass die Strömung bei $Re_\tau = 180$ noch nicht vollkommen turbulent ist und somit laminare Effekte durchaus noch eine Rolle spielen. Setzt man die Konstanten in die obige Gleichung ein, ergibt sich für die maximale Geschwindigkeit:

$$u_{max} = u_\tau \left[\frac{1}{0,41} \ln(180) + 5,5 \right] \approx 18,2 u_\tau \quad (3.44)$$

Auf die Geschwindigkeit in der Kanalmitte bezogen, ergibt sich somit eine Reynoldszahl von $Re_{max} \approx 18,2 Re_\tau \approx 3300$.

Zur Simulation der Kanalströmung werden die Ränder in y -Richtung als *no-slip* Randbedingungen definiert, bei denen die Wand genau auf den Randzellen liegt. Dazu werden zunächst gemäß der Dirichlet-Randbedingung eine Wandgeschwindigkeit von $\vec{u}_b = 0$ und eine Dichte gemäß Gleichung 2.116 von $\rho_b = (2\rho_+ + \rho_0)$ definiert. Um die numerische Stabilität zu erhöhen und eine Randbedingung zu erhalten, die sich analog zu der in Kapitel 3.1 vorgestellten Behandlung von beliebig geformten Objekträndern verhält, werden diese makroskopischen Werte anschließend als Zielwerte für die TMS-Methode nach Chikatamarla & Karlin (2013) verwendet. Alle übrigen Ränder des Simulationsbereiches werden als periodische Randbedingungen definiert.

Um eine Kanaldurchströmung in positiver x -Richtung zu erhalten, welche der gewünschten Reynoldszahl entspricht, wird eine konstante Kraft vorgegeben. Diese Kraft, welche über die Beschleunigung g gegeben ist, muss den Druckabfall im Kanal kompensieren, der sich aufgrund der Reibungskraft einstellt, sodass eine konstante Geschwindigkeit beibehalten werden kann:

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\tau_w}{\rho \delta} = \frac{u_\tau^2}{\delta} \quad (3.45)$$

Um die Kraft $\vec{F} = \rho(g, 0, 0)^T$ auf die Strömung wirken zu lassen, wird diese wie folgt zur Lattice-

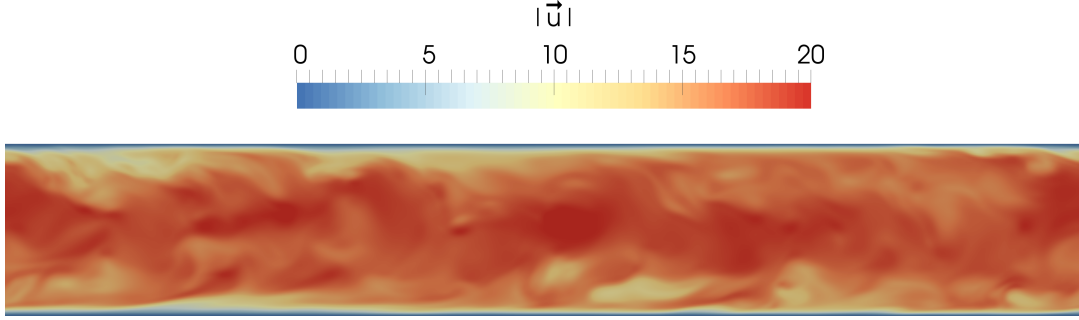


Abbildung 3.13: Magnitude der Geschwindigkeit bei der turbulenten Kanaldurchströmung bei $Re_\tau = 180$.

Boltzmann-Gleichung ergänzt:

$$f_i(t + \Delta t, \vec{x} + \vec{c}_i \Delta x) - f_i(t, \vec{x}) = \Delta t \Omega_i + \Delta t F_i \quad (3.46)$$

wobei die diskretisierte Kraft F_i gemäß Guo et al. (2002b) folgendermaßen gegeben ist:

$$F_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) t_i \left[\frac{\vec{c}_i - \vec{u}}{c_s^2} + \frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})}{c_s^4} \vec{c}_i \right] \vec{F} \quad (3.47)$$

Weiterhin muss für die Berechnung der Gleichgewichtsverteilung f_i^{eq} eine leicht veränderte Geschwindigkeit \vec{u}^{eq} verwendet werden:

$$\vec{u}^{eq} = \frac{1}{\rho} \left[\sum_i \vec{c}_i f_i + \frac{\Delta t}{2} \vec{F} \right] \quad (3.48)$$

Analog zu Moser et al. (1999) wurde hier ein Simulationsbereich von $L_x = 4\pi\delta$, $L_y = 2\delta$ und $L_z = 4/3\pi\delta$ gewählt. Die Simulation wurde mit dem gemittelten Geschwindigkeitsprofil von Moser et al. (1999) mit $u_\tau = 0,005$ in Gittereinheiten initialisiert. Um eine turbulente Entwicklung der Kanalströmung zu garantieren, musste jedoch zusätzlich eine Störung in Form von künstlichen Wirbeln eingebaut werden. Die Auflösung der Simulation betrug 50 Zellen pro δ , sodass insgesamt ca. 13,4 Millionen Zellen verwendet wurden.

Abbildung 3.13 zeigt die Magnitude der Geschwindigkeit in der Mittelebene des Simulationsbereichs nach $t = 30\delta/u_\tau$. Zu diesem Zeitpunkt hat sich die turbulente Strömung vollständig ausgebildet. Weiterhin zeigt Abbildung 3.14 den Wert des entropischen Stabilisators γ (Glg. 2.139). Wie erwartet, schwankt dieser um einen Wert von $\gamma = 2$, bei dem das KBC-Modell auf das BGK-Modell zurückfällt. Dennoch wird auch deutlich, dass der Wert keineswegs konstant ist und somit

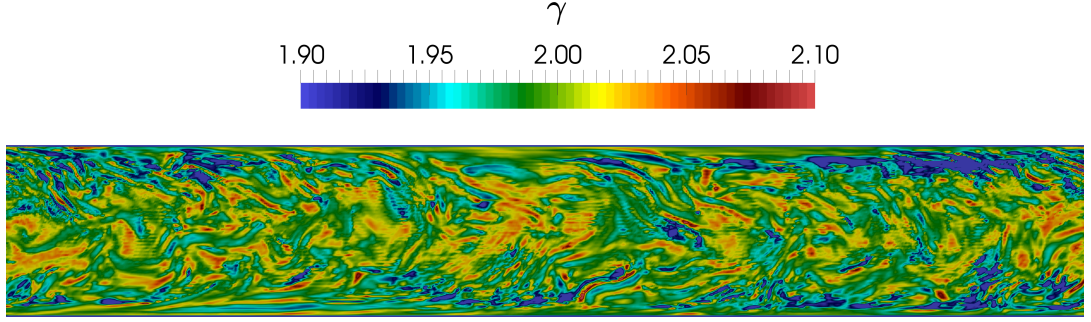


Abbildung 3.14: Entropischer Stabilisator bei der turbulenten Kanaldurchströmung bei $Re_\tau = 180$.

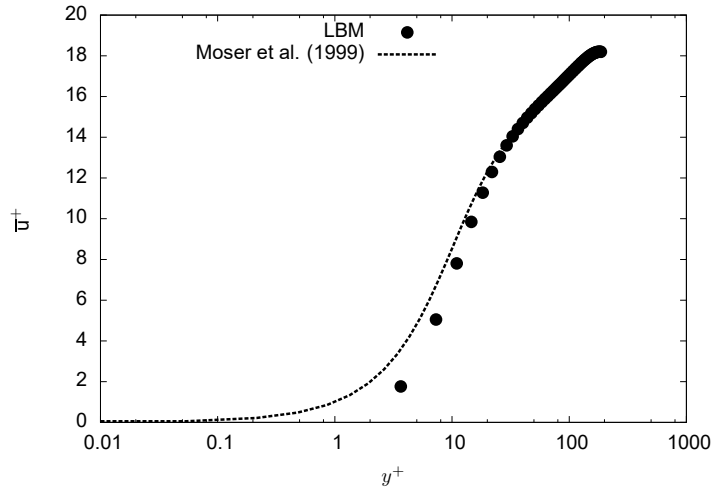


Abbildung 3.15: Vergleich der gemittelten Geschwindigkeit \bar{u} mit den Daten von Moser et al. (1999) bei $Re_\tau = 180$.

eine lokale Bestimmung von γ unabdingbar für die Simulation der turbulenten Kanalströmung ist.

Abbildung 3.15 zeigt die gemittelte x -Komponente der Geschwindigkeit im Vergleich zu den Daten von Moser et al. (1999). Obwohl der erste Gitterpunkt abseits der Wand bei $y^+ \approx 4$ liegt und keine Wandfunktion verwendet wurde, stimmt der Verlauf der Geschwindigkeitsprofile sehr gut überein. Lediglich in absoluter Wandnähe wird die Geschwindigkeit von der LBM-Simulation etwas unterschätzt. Weiterhin sind in Abbildung 3.16 die quadratischen Mittel der Geschwindigkeitsschwankungen $u'^+ = \sqrt{u'^2}/u_\tau$, $v'^+ = \sqrt{v'^2}/u_\tau$ und $w'^+ = \sqrt{w'^2}/u_\tau$ im Vergleich zu den Daten von Moser et al. (1999) dargestellt. Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten.

Anhand dieses Testfalls kann festgehalten werden, dass das implementierte dreidimensionale KBC-Modell nach Bösch et al. (2015b) einwandfrei funktioniert und sich außerdem, gemeinsam

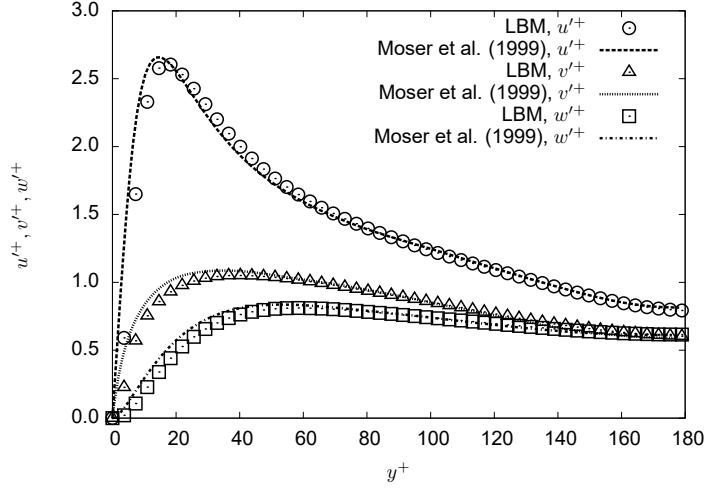


Abbildung 3.16: Vergleich der jeweiligen quadratischen Mittel der Geschwindigkeitsschwankungen u'^+ , v'^+ und w'^+ mit den Daten von Moser et al. (1999) bei $Re_\tau = 180$.

mit der Verwendung des TMS-Modells für Randbedingungen nach Chikatamarla & Karlin (2013), hervorragend für die Simulation turbulenter Strömungen eignet, die stark von der Entwicklung eines Grenzschichtprofils abhängen.

3.4 Simulation eines stehenden Zylinders

Bisher wurden die vorgenommenen Implementierungen individuell mittels geeigneter Testfälle untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die Behandlung von beliebig geformten Objekträndern, die dreidimensionale Gitterverfeinerung sowie das KBC-Modell jeweils die erwarteten Ergebnisse erzielen konnten. Im Folgenden werden alle drei Aspekte miteinander vereint, um die Simulation eines auf einer Bodenplatte stehenden Zylinders zu ermöglichen.

3.4.1 Zusammenfassung bisheriger Arbeiten

Im Rahmen vorheriger Arbeiten am Lehrstuhl Strömungsmechanik der Universität Rostock wurde ausführlich auf die Umströmung eines stehenden Zylinders mit einem Längen-zu-Durchmesser-Verhältnis von $L/D = 2$ bei einer Reynoldszahl von $Re = U_\infty D/\nu = 2 \times 10^5$ eingegangen. So beschreiben Leder (2003) und Richter & Leder (2004) die dreidimensionalen Strömungsstrukturen oberhalb des Zylinderkopfs sowie im Nachlauf des Zylinders, die sich durch die Mittelung von 3D Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) Messungen ergaben. Dabei stellte sich heraus, dass das Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des Zylinders stark von der Ablösung an der Kopfseite des Zy-

linders geprägt ist, wo sich aufgrund des Übergangs zwischen der Umströmung der Endfläche und der seitlichen Umströmung des Zylinders ein gegenläufiges Wirbelpaar ablöst. Gemeinsam mit der charakteristischen Ablösung an den Seiten des Zylinders bildet sich dadurch ein Rezirkulationsgebiet mit einer stark ausgeprägten Talstruktur aus. Weiterhin wurde die Zylinderumströmung mittels des *Time Resolved Stereo Particle Image Velocimetry* (TR-PIV) Messverfahrens zeitlich und räumlich hoch aufgelöst vermessen (Jensch et al., 2006). Das Ziel dabei war, eine Datenbasis zu schaffen, anhand derer Simulationen und neuere Messverfahren validiert werden können. In diesem Zusammenhang zeigten Jensch et al. (2008, 2009) auch, dass das TR-PIV Messverfahren eine statistische Auswertung der Daten mittels der *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) ermöglicht. Die POD ist eine Hauptkomponentenanalyse, die darauf abzielt, zusammenhängende Strukturen in einer instationären Strömung ausfindig zu machen. Dabei zeigte sich, dass das instationäre Strömungsverhalten vor allem von der wechselseitigen Ablösung am Zylindermantel geprägt ist, welche sich durch eine Strouhalzahl von $Sr = 0,16$ charakterisieren lässt. Im Rahmen des selben Projektes wurden auch *Large-Eddy* Simulationen (LES) sowie *Detached-Eddy* Simulationen (DES) durchgeführt und mit den Messungen verglichen (Frederich et al., 2007, 2008, 2009). Hierbei zeigte sich, dass die DES nicht in der Lage war, die Strömung im Nachlauf korrekt abzubilden. Die LES eignete sich dagegen sehr gut, allerdings waren dazu 12,3 Millionen Gitterpunkte und eine hohe Auflösung in Wandnähe ($y^+ < 1$) nötig.

3.4.2 Simulationsbedingungen

Im Folgenden soll der auf einer Bodenplatte stehende Zylinder ($L/D = 2$) mit der Lattice Boltzmann Methode simuliert werden. Dafür wird der Boden des Zylinders bei $\vec{x} = (0,0,0)^T$ positioniert. Der gesamte Simulationsbereich erstreckt sich von $-1,5 \leq x/D \leq 10,5$, $-5,0 \leq y/D \leq 5,0$ und $0,0 \leq z/D \leq 7,0$. Die Bodenplatte bei $z/D = 0$ wird mit einer *no-slip* Randbedingung versehen, die wie in Kapitel 3.3.2 mit einer Dirichlet-Randbedingung und der anschließenden Anwendung der TMS-Methode realisiert wird. Die seitlichen Wände in y -Richtung sowie der obere Simulationsrand bei $z/D = 7$ werden als *free-slip* Ränder definiert und sind weit genug von dem Zylinder entfernt, um eine Beeinflussung der Strömung durch die Ränder zu verhindern. Die Anströmung verläuft in positiver x -Richtung mit einer Geschwindigkeit von $\vec{u} = (U_\infty, 0, 0)^T$ mit $U_\infty = 0,05$ in Gittereinheiten fernab des Zylinders. Da die Strömungsstrukturen im Nachlauf des Zylinders stark von der Anströmung abhängen, wurde am Einlass ein laminares Profil vorgegeben, welches im Rahmen der zuvor beschriebenen Experimente von Mario Jensch vermessen wurde und als vollständiger Datensatz am Lehrstuhl Strömungsmechanik vorliegt. Das gemessene Profil wurde

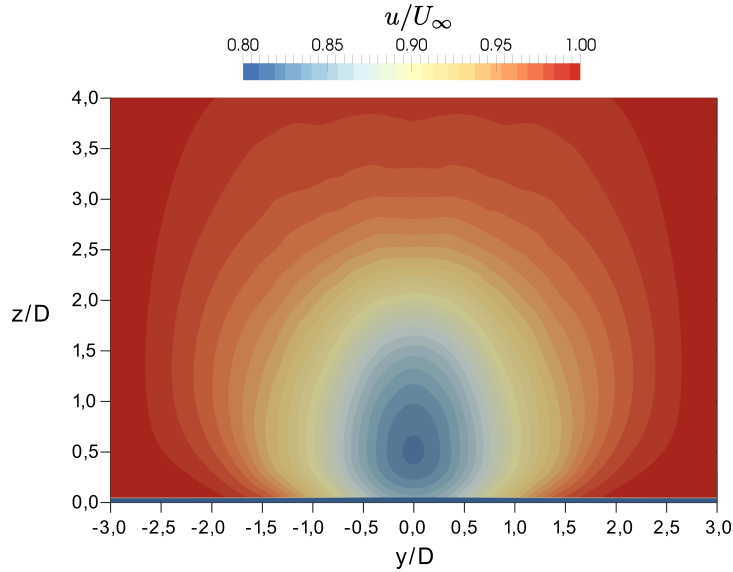


Abbildung 3.17: Vorgegebenes Einlassprofil bei $x/D = -1,5$, normiert auf die Anströmgeschwindigkeit fernab des Zylinders.

Tabelle 3.2: Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines stehenden Zylinders.

N	x/D	y/D	z/D
10	$-1,5 \dots +10,5$	$-5 \dots +5$	$0 \dots +7$
20	$-1,5 \dots +10,5$	$-5 \dots +5$	$0 \dots +4$
40	$-1,5 \dots +3,5$	$-2 \dots +2$	$0 \dots +3,5$
80	$-1,5 \dots +3,0$	$-1 \dots +1$	$0 \dots +3,0$

für die Simulation zu den Rändern hin extrapoliert und ist in Abbildung 3.17 dargestellt. Es wird deutlich, dass die Verblockung durch den Zylinder einen erheblichen Einfluss auf die Anströmung hat, was sich ohne Weiteres mit einer Simulation allein nicht rekonstruieren ließe. Schließlich wird am Auslass erneut die Behandlung nach Chikatamarla et al. (2006) verwendet. Zur Verbesserung der numerischen Stabilität wird außerdem eine *sponge zone* definiert, welche $1D$ vor dem Auslass beginnt.

Um die Strömung in Zylindernähe gut abbilden zu können, wurden insgesamt vier Verfeinerungsstufen verwendet, deren Abmaße in Tabelle 3.2 zu finden sind. Zur Visualisierung sind die Verfeinerungsstufen außerdem in Abbildung 3.18 dargestellt. Der Zylinder befindet sich vollständig innerhalb des feinsten Gitters und wird mit $N = 80$ Zellen pro Durchmesser aufgelöst. Insgesamt wurden somit ca. 21,6 Millionen Zellen simuliert. Der Zylinder an sich wurde über eine STL-Datei vorgegeben und entsprechend dem Algorithmus aus Kapitel 3.1 behandelt.

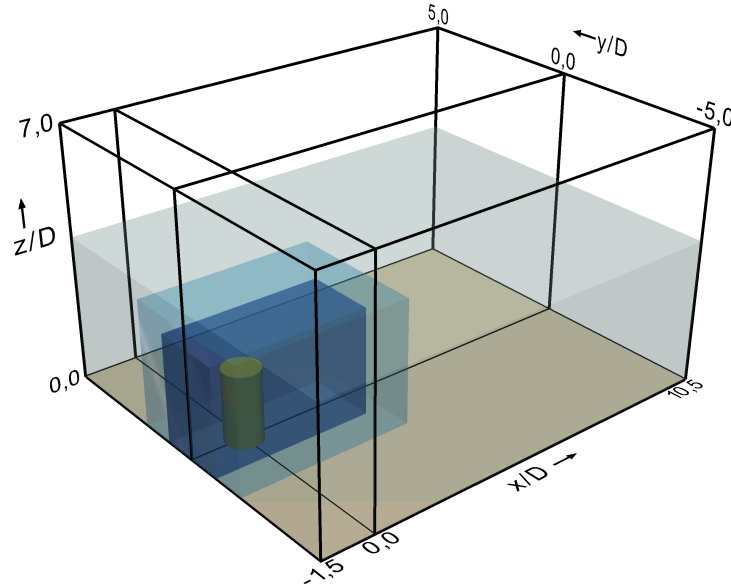


Abbildung 3.18: Darstellung der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines stehenden Zylinders mit $L/D = 2$ bei $Re = 2 \times 10^5$.

3.4.3 Vergleich der Ergebnisse mit Messdaten und LES

Abbildung 3.19 zeigt die Wirbelstrukturen im Nachlauf des Zylinders, die sich aus den gemittelten Geschwindigkeitsprofilen ergeben. Es wird deutlich, dass die Wirbelbildung im Nachlauf sowohl von der Überströmung des Zylinderkopfes als auch von der seitlichen Umströmung des Zylinders geprägt ist. Die entstehenden Wirbel stoßen im Bereich des Rezirkulationsgebietes aufeinander. Dort bilden sich anschließend zwei gegenläufige Wirbelpaare, die sich stromauf fortbewegen.

In Abbildung 3.20 ist das Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des Zylinders dargestellt, welches sich aus der Kontur der gemittelten Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei $\bar{u} = 0$ ergibt. Es weist die erwartete Form, insbesondere was die charakteristische Talstruktur in der Symmetrieebene bei $y/D = 0$ betrifft, auf. Das Rezirkulationsgebiet erstreckt sich bis maximal $x/D = 3,2$ und wird daher im Vergleich zu den LES Daten, bei denen sich das Rezirkulationsgebiet bis ca. $x/D = 2,9$ erstreckt (Frederich et al., 2007), etwas überschätzt. Dies könnte jedoch an der hier fehlenden Wandauflösung liegen, da sich die Kontur zum Boden hin offensichtlich etwas verbreitert. Wie in Abbildung 3.21 deutlich wird, stimmen die mit der LBM gewonnenen Simulationsdaten des Rezirkulationsgebiets im Allgemeinen sehr gut mit den TR-PIV Messungen von Jensch et al. (2006) und den LES-Daten von Frederich et al. (2008) überein.

Weiterhin wurden die gemittelten Geschwindigkeitsprofile der LBM Simulation entlang zweier

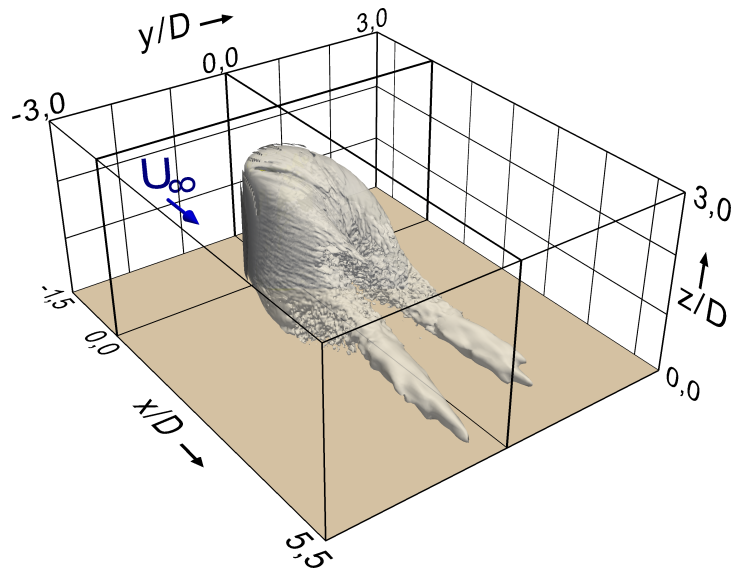


Abbildung 3.19: Wirbelstrukturen im Nachlauf des stehenden Zylinders, gekennzeichnet durch das Q-Kriterium bei $Q = 0,2(D/U_\infty)^2$.

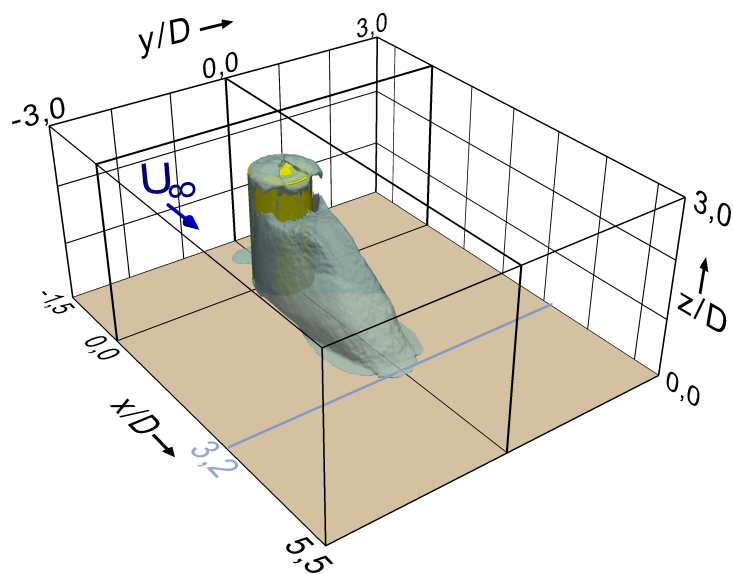


Abbildung 3.20: Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des stehenden Zylinders.

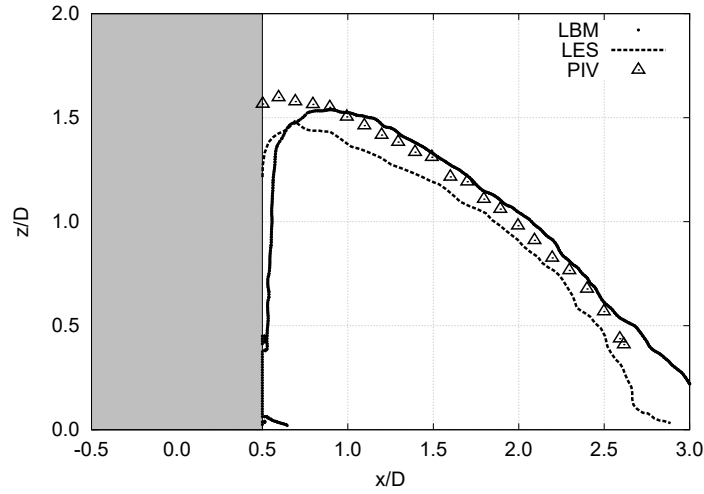


Abbildung 3.21: Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des stehenden Zylinders in der Schnittebene bei $y/D = 0$.

Linien im Nachlauf mit den mittels TR-PIV (Jensch et al., 2006) und LDA (Richter, 2005) gemessenen Profilen sowie den Profilen aus der LES (Frederich, 2010) verglichen. Zum einen wurde eine vertikale Linie bei $y/D = 0$ und $x/D = 2,2$ gewählt, sodass die Profile zum Teil noch in das Rezirkulationsgebiet hineinreichen (Abbildung 3.22). Zum anderen wurde eine horizontale Linie gewählt, welche bei $x/D = 2,2$ und $z/D = 1$ liegt. Für den letzteren Vergleich, welcher in Abbildung 3.23 dargestellt ist, liegen keine TR-PIV Messungen vor, sodass die Simulationsdaten lediglich mit den LDA-Daten verglichen werden können. Hierbei sollte bedacht werden, dass die LDA-Daten unter etwas anderen Rahmenbedingungen entstanden sind als die TR-PIV Messungen und dass daher in einem gewissen Rahmen Abweichungen zu erwarten sind. Nichtsdestotrotz sind die LDA-Daten genauer, da sie nicht so abhängig vom Auswerteverfahren sind wie die TR-PIV Messdaten. In beiden Abbildungen zeigt sich, dass die LBM in der Lage ist, die Strömungsstrukturen im Nachlauf des Zylinders gut abzubilden. Vor allem entlang der vertikalen Linie bei $y/D = 0$ und $x/D = 2,2$ fügen sich die LBM-Profile sehr gut in die bisherigen Daten ein. Bei den Reynoldsspannungen entlang der Linie bei $x/D = 2,2$ und $z/D = 1$ über- bzw. unterschätzt die LBM allerdings an einigen Stellen die jeweiligen Werte im Vergleich zu den LDA Messungen und der LES. Dies könnte daran liegen, dass die Verfeinerungsstufen in y -Richtung recht eng gewählt wurden. So beginnt das nächst gröbere Gitter schon bei jeweils $y/D = -1$ und $y/D = +1$. Es wäre daher denkbar, dass die deutlich niedrigere Auflösung des gröberen Gitters ($N = 40$ Zellen pro Durchmesser) die korrekte Ausbildung der Geschwindigkeitsprofile in dem feinen Gitter etwas beeinträchtigt.

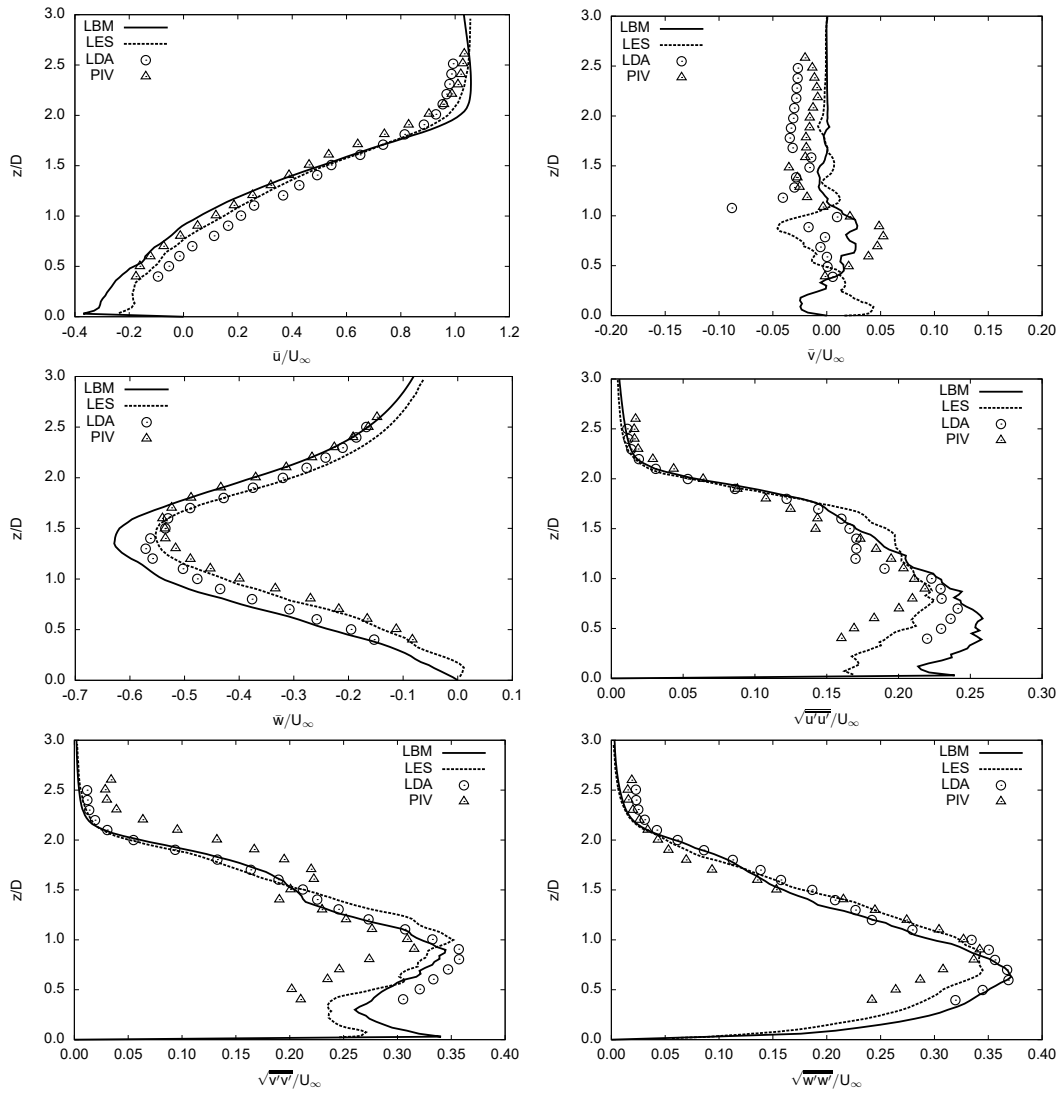


Abbildung 3.22: Gemittelte Geschwindigkeitsprofile entlang einer Linie im Nachlauf bei $y/D = 0$ und $x/D = 2,2$ im Vergleich mit Messungen (TR-PIV und LDA) und einer LES.

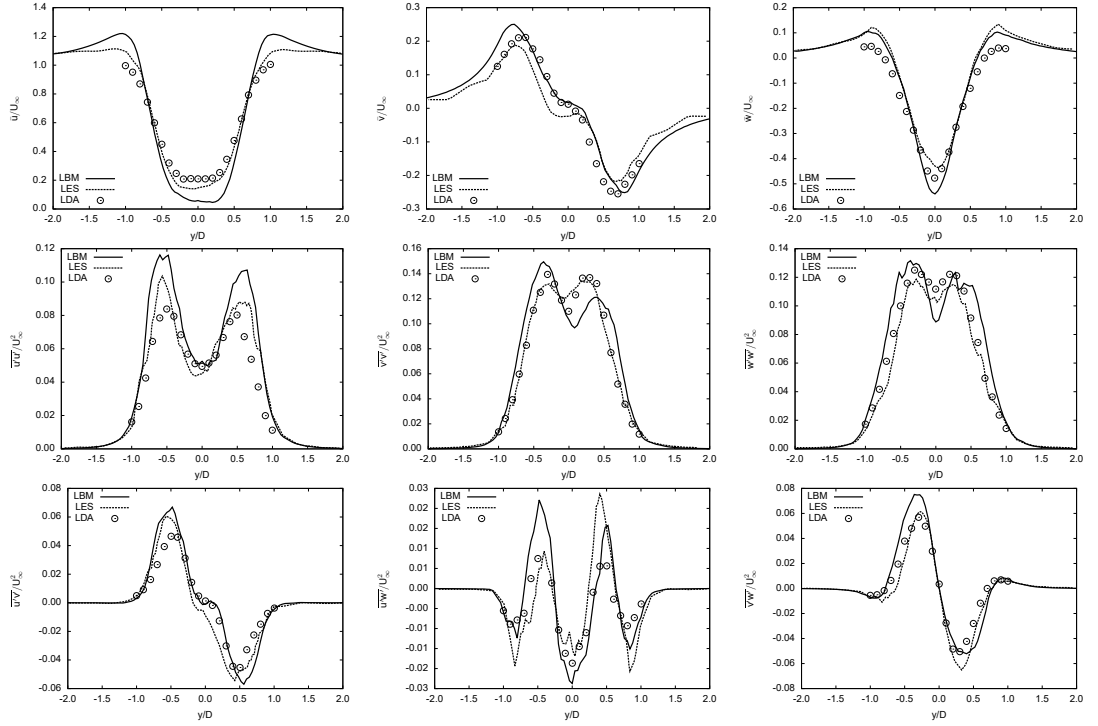


Abbildung 3.23: Gemittelte Geschwindigkeitsprofile entlang einer Linie im Nachlauf bei $z/D = 1$ und $x/D = 2,2$ im Vergleich mit LDA-Messungen und einer LES.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Kombination aus der vorgestellten Behandlung von beliebig geformten Objekträndern, der implementierten dreidimensionalen Gitterverfeinerung sowie der Verwendung des KBC-Kollisionsmodells auch bei sehr hohen Reynoldszahlen und geringer Wandauflösung zufriedenstellende Ergebnisse liefern kann. Erwähnenswert ist auch, dass für die hier dargestellte Simulation des stehenden Zylinders kein explizites Turbulenzmodell verwendet wurde. Dennoch verhält sich die Simulation offensichtlich wie eine Art LES und liefert sogar vergleichbare Ergebnisse. Dies unterstreicht somit den *subgrid-scale* Charakter des KBC-Modells, wie er bereits auch von Dorschner et al. (2016) beschrieben wurde (*subgrid-scale* [engl.]: Feinstruktur-Skala, welche nicht vom Gitter aufgelöst wird).

3.4.4 Beurteilung der Laufzeit

Ein wesentlicher Aspekt der Simulation bei hohen Reynoldszahlen ist die benötigte Laufzeit. Da diese sehr stark von der verwendeten Hardware abhängt und sich von Fall zu Fall durchaus stark unterscheiden kann, ist eine allgemeine Aussage zur Laufzeit von Simulationen mit der Lattice Boltzmann Methode eher schwierig. Auch ein direkter Vergleich zu Simulationen mit der Finite

Volumen Methode ist problematisch, da verschiedene Solver unterschiedliche Maßnahmen verwenden, um eine gezielte Verbesserung der Laufzeit zu erreichen. Dennoch kann an dieser Stelle festgehalten werden, dass die hier dargestellte Simulation des stehenden Zylinders mit ca. 21,6 Millionen Zellen auf 60 Kernen (AMD OpteronTM 6172) ca. 40 Stunden Laufzeit für 10 000 Iterationen auf dem gröbsten Gitter benötigte. Für die gemittelten Geschwindigkeitsfelder wurden insgesamt 98 000 Iterationen auf dem groben Gitter simuliert, wobei die ersten 10 000 Iterationen verworfen wurden, da sich die Simulation zunächst entsprechend einstellen muss. Eine Mittelung über 88 000 Iterationen entspricht bei einem Zylinderdurchmesser von $D = 0,12$ m und einer Anströmgeschwindigkeit von $U_\infty = 26$ m/s, wie sie jeweils bei den Experimenten und der LES verwendet wurden, einer simulierten Echtzeit von $t = 2$ s. Somit wurden auf einer noch recht geringen Anzahl von Kernen unter Verwendung einer mittlerweile 6 Jahre alten Hardware insgesamt knapp unter 15 Tage Laufzeit benötigt, um $t = 2$ s simulieren. Im Vergleich dazu benötigte Frederich (2010) laut eigenen Angaben für die Simulation eines Zeitschritts mit $\Delta t = 0,005D/U_\infty = 2,3 \times 10^{-5}$ s auf dem IBM pSeries 690 Server des HLRN 4 Minuten Simulationszeit. Für die Simulation von $t = 2$ s wären ca. 87 000 Iterationen nötig gewesen, was somit zu einer Gesamtlaufzeit von ca. 242 Tagen geführt hätte. Dabei wurde jedoch nicht spezifiziert, wie viele Kerne benutzt wurden. Außerdem ist nicht ganz ersichtlich, auf welche Simulation sich diese Laufzeit bezieht. So könnte es sich um eine fein aufgelöste Simulation mit ca. 12 Millionen Zellen handeln oder aber auch um ein reduziertes Rechengitter mit nur knapp über 2 Millionen Zellen. Die Laufzeit ist somit zwar erheblich länger gewesen als bei der jetzigen Verwendung der Lattice Boltzmann Methode, der Vergleich sollte aber mit äußerster Vorsicht betrachtet werden, da sich die verwendete Hardware in beiden Fällen ganz wesentlich unterscheidet.

Insgesamt kann lediglich festgehalten werden, dass die Lattice Boltzmann Methode in der Lage ist, Simulationen bei hohen Reynoldszahlen innerhalb relativ geringer Laufzeiten und mit verhältnismäßig hoher Zellenanzahl zu realisieren. Im Umfeld der eingebetteten Geometrie oder in Wandnähe könnte eine optimalere Gitterverfeinerung, welche beispielsweise nicht auf die Vorgabe von Blöcken beschränkt ist, außerdem dazu führen, dass die benötigte Zellenanzahl und damit auch die resultierende Laufzeit deutlich reduziert werden könnte.

4 Simulationen eines liegenden Zylinders

Ein endlicher liegender Zylinder kann als vereinfachende Geometrie für eine Vielzahl am Meeresboden lagernder Objekte betrachtet werden. So sind viele der noch am Grund der Nord- und Ostsee befindlichen Munitionsaltlasten aus dem Zweiten Weltkrieg zylinderförmig (Böttcher et al., 2011, 2015). Aber auch Atommüllfässer, wie sie beispielsweise im Ärmelkanal lagern (Ministry of Defence, 2006), können durch einfache endliche Zylinder approximiert werden. Weiterhin können auch Offshore-Pipelines oder Monopiles in Offshorebauwerken durch Zylinder abgebildet werden, wobei diese dann eher unendlich lang bzw. stehend sind. Gemeinsam mit diesen bilden endliche liegende Zylinder einen Großteil der nicht-biologischen Objekte im Meer ab.

Das Verständnis der Prozesse der Versandung und Auskolkung dieser Objekte ist von großer Bedeutung. Diese ist beispielsweise nötig, um die Objekte gegebenenfalls wieder bergen zu können. Sie können aber auch hilfreich sein, um gegebenenfalls einer Beschädigung der Objekte entgegen zu wirken. Die Versandungsprozesse sind dabei stark von den Strömungsstrukturen um die Objekte herum abhängig. Um daher die Versandung und Auskolkung mittels numerischer Methoden untersuchen zu können, ist zuvor eine genaue Abbildung der Strömung nötig. Im Folgenden wird die Umströmung eines liegenden Zylinders unter Verwendung der Lattice Boltzmann Methode und den im vorherigen Kapitel vorgestellten Implementierungen vorgestellt.

4.1 Überblick der vorhandenen Messdaten

Im Rahmen vorheriger Arbeiten am Lehrstuhl Strömungsmechanik der Universität Rostock wurde die Strömung um einen endlichen, liegenden Zylinder vermessen. Dazu wurden zum einen unter Einhaltung der Reynoldszahl, welche unter Extremfällen am Meeresboden zu erwarten ist, TR-PIV

Messungen im Windkanal des Lehrstuhls durchgeführt und in Menzel et al. (2012) sowie in Menzel & Leder (2013a) zusammengefasst. Zum anderen wurden aber auch Versuche im Wasserkanal des Lehrstuhls durchgeführt, die vor allem auf die fotografische Analyse der Versandung des Zylinders bei gleichmäßiger Anströmung (Menzel & Leder, 2013b) und unter Einfluss von Oberflächenwellen (Menzel & Leder, 2015) abzielten. Die Ergebnisse der Versuche, welche unter einer gleichmäßigen Anströmung erfolgten, sollen im Folgenden kurz dargestellt werden, da diese als Grundlage für die numerischen Simulationen mit der LBM dienen.

4.1.1 Messungen im Windkanal

Bei dem Windkanal des Lehrstuhls Strömungsmechanik, welcher für die Messungen von Menzel et al. (2012) und Menzel & Leder (2013a) verwendet wurde, handelt es sich um einen Kanal Göttinger Bauart mit einer offenen Messstrecke, welche 1,4 m lang ist und einen Querschnitt von $0,65 \times 0,65 \text{ m}^2$ aufweist. Der Aufbau des Kanals ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Mit dem vorhandenen Axialgebläse kann eine maximale Strömungsgeschwindigkeit von $U_\infty = 54 \text{ m/s}$ erzeugt werden, wodurch sich der Kanal vor allem für Messungen bei höheren Reynoldszahlen eignet.

Für die Messung der Umströmung eines liegenden Zylinders am Meeresboden wurde ein Zylinder mit einem Durchmesser von $D = 0,058 \text{ m}$ und einer Länge von $L = 0,19 \text{ m}$ bei einer Anströmgeschwindigkeit von $U_\infty = 40 \text{ m/s}$ vermessen. Je nach Temperatur der Umgebungsluft führt dies zu einer Reynoldszahl von $Re = 1,5 \times 10^5$ bis $Re = 2 \times 10^5$ und entspricht somit laut Menzel et al. (2012) den Bedingungen im Ozean. Am Meeresboden sind solche zylinderförmigen Objekte im Normalfall zu mindestens 10% versandet. Aus diesem Grund wurde der Zylinder für die Windkanalmessungen so konstruiert, dass die unteren 10% des Durchmessers entlang der Zylinderachse abgeschnitten wurden. Der Zylinder wurde dann senkrecht zur Anströmung auf einer $1,3 \times 0,7 \text{ m}^2$ großen Kunststoffplatte platziert.

Um die gemittelten Strömungsstrukturen im Vor- und Nachlauf des Zylinders zu charakterisieren, wurden verschiedene horizontale und vertikale Messebenen vermessen. Einige der vermessenen Strömungsstrukturen sind exemplarisch in den Abbildungen 4.2 und 4.3 dargestellt. So wird in Abbildung 4.2 der sogenannte Hufeisenwirbel deutlich, welcher sich dadurch bildet, dass die Grenzschicht auf den Zylinder trifft und sich infolgedessen aufrollt. Die Strömung weicht anschließend zu den Seiten des Zylinders hin aus, wo sie über die seitlichen Hufeisenwirbel weiter stromab fließen kann. In Rückborn et al. (2014) wird die Position der Mitte des Hufeisenwirbels bei $y/D = 0$ über das Maximum der Wirbelstärke $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ angegeben. Demnach befindet sich der Hufeisenwirbel im Vorlauf des Zylinders bei $x/D = -0,72$ und $z/D = 0,19$. Weiterhin ist in Abbildung 4.3 das

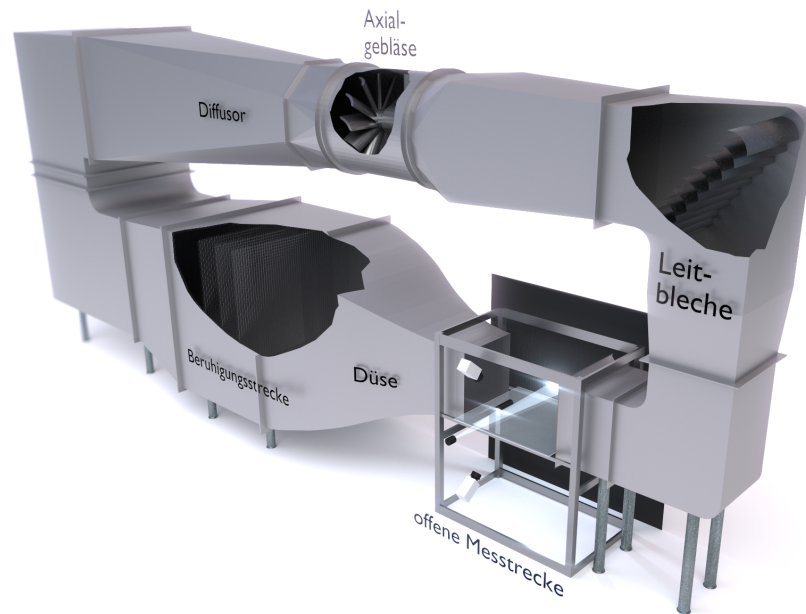


Abbildung 4.1: Aufbau des Windkanals am Lehrstuhl Strömungsmechanik der Universität Rostock.

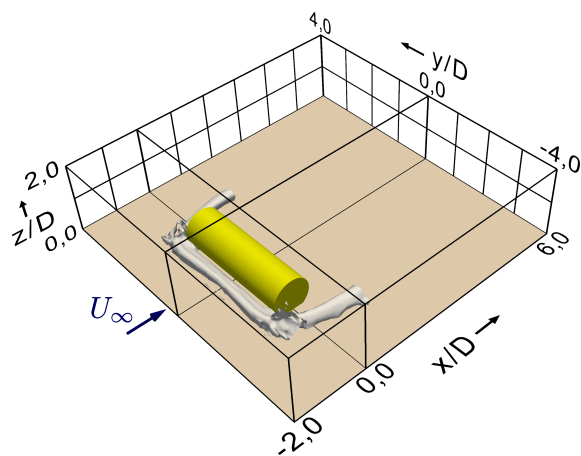


Abbildung 4.2: Im Windkanal vermessener Hufeisenwirbel im Vorlauf eines liegenden Zylinders bei $Re \approx 1,6 \times 10^5$, dargestellt mittels des Q-Kriteriums. Nach Menzel & Leder (2015).

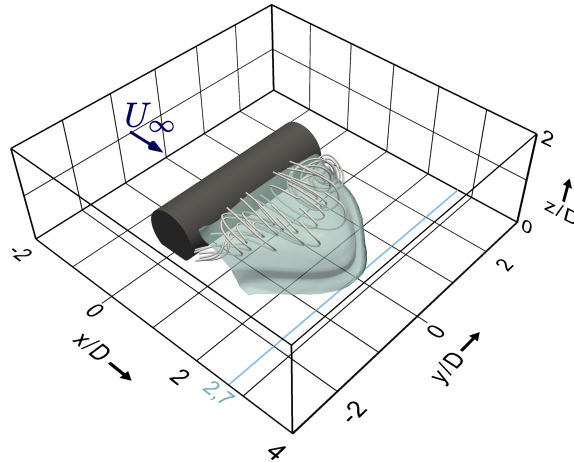


Abbildung 4.3: Im Windkanal vermessenenes Rezirkulationsgebiet im Nachlauf eines liegenden Zylinders bei $Re \approx 1,6 \times 10^5$, dargestellt als Kontur bei $\bar{u} = 0$. Weiterhin sind einige Stromlinien im Bereich des Rezirkulationsgebiets visualisiert. Nach Menzel et al. (2012).

Rezirkulationsgebiet abgebildet, welches durch die Kontur der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei $\bar{u} = 0$ gegeben ist. Das Rezirkulationsgebiet erstreckt sich bis zu einer Länge von ca. $x/D = 2,7$. Es sind außerdem einige Stromlinien im Bereich des Rezirkulationsgebiets dargestellt. Diese deuten im Nachlauf des Zylinders auf einen Bogenwirbel hin, der gemäß Menzel et al. (2012) eine Wirbelachse in y -Richtung aufweist und letztendlich die Ausdehnung des Rezirkulationsgebiets bestimmt.

Für die Versandung und Auskolkung im Bereich des Zylinders sind die beiden dargestellten Strömungsstrukturen von entscheidender Bedeutung. Im Bereich des Hufeisenwirbels ist aufgrund der dadurch auftretenden relativ hohen Wandschubspannung eine starke Erosion stromauf des Zylinders zu erwarten (Menzel & Leder, 2015). Im Gegensatz dazu ist das Rezirkulationsgebiet für die Anhäufung von Sediment von Bedeutung, da hier die Wandschubspannungen eher gering ausfallen. Außerdem werden Sandpartikel durch den Bogenwirbel in das Rezirkulationsgebiet hinein transportiert. Gerade bei größeren Partikeln reicht dort die Strömungsgeschwindigkeit in positiver z -Richtung nicht aus, um deren Gewichtskraft zu überwinden. Somit verhält sich das Rezirkulationsgebiet effektiv als Sedimentfalle für größere Partikel (Menzel & Leder, 2013a).

4.1.2 Charakterisierung der Versandungsprozesse im Wasserkanal

Der Aufbau des Wasserkanals am Lehrstuhl Strömungsmechanik ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Messstrecke ist 0,8 m breit und insgesamt 3,5 m lang. Allerdings werden ca. die ersten 0,5 m der

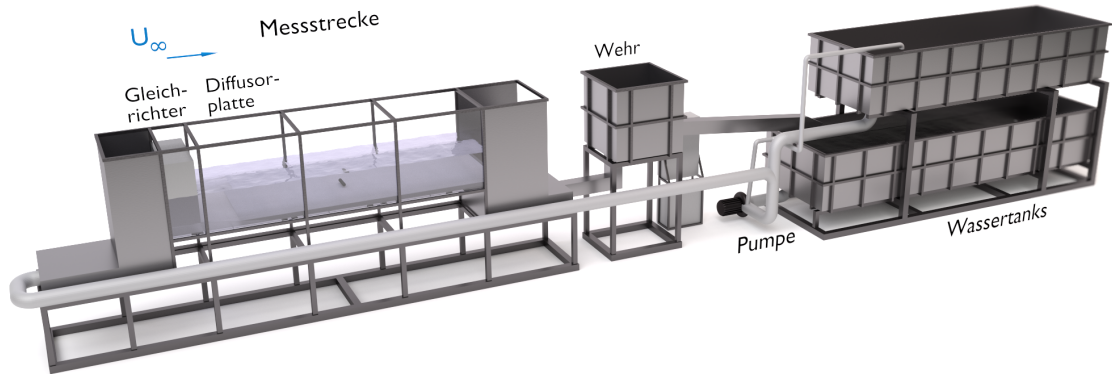


Abbildung 4.4: Aufbau des Wasserkanals am Lehrstuhl Strömungsmechanik der Universität Rostock.

Länge zum Einstellen des gewünschten Einstromprofils verwendet, sodass die Länge der tatsächlich zur Verfügung stehenden Messstrecke 3,0 m beträgt. Am Einlass wurde ein Gleichrichter sowie ein Diffusor eingebaut, welche laut Menzel & Leder (2013a) den Turbulenzgrad der freien Strömung auf $Tu = 8\%$ begrenzen. Insgesamt ist der Kanal auf eine Wassertiefe von ca. 1,0 m ausgelegt. Der maximale Volumenstrom ist jedoch auf $\dot{V} = 120 \text{ m}^3/\text{h}$ begrenzt, sodass beispielsweise bei einer Anströmgeschwindigkeit von $U_\infty = 0,3 \text{ m/s}$ die Wassertiefe lediglich 0,14 m beträgt.

Für die Versandungsexperimente, welche in Menzel & Leder (2013a), Menzel & Leder (2013b) und Menzel & Leder (2015) beschrieben sind, wurde der Boden des Kanals mit Quarzsand bedeckt, welcher Korndurchmesser von $0,1 \text{ mm} < d_K < 0,3 \text{ mm}$ aufweist und eine Dichte von ca. $\rho_s = 2600 \text{ kg/m}^3$ besitzt. Der Zylinder mit einem Durchmesser von $D = 0,058 \text{ m}$ und einer Länge von $L = 0,19 \text{ m}$ wurde um 10% vorversandet und quer zu Anströmung platziert. Zur Untersuchung der Versandungsprozesse unter gleichmäßiger Anströmung wurde die Geschwindigkeit nach und nach bis auf ca. $U_\infty = 0,3 \text{ m/s}$ erhöht, sodass eine Reynoldszahl von ca. $Re = 1,7 \times 10^4$ erreicht werden konnte.

Obwohl die Reynoldszahl eine Größenordnung kleiner ist als im Windkanal, betonen Menzel & Leder (2013b) und Menzel & Leder (2015) die Übertragbarkeit der charakteristischen Strömungsstrukturen. So bildet sich bei gleichmäßiger Anströmung im Vorlauf des Zylinders innerhalb weniger Minuten ein Kolkgraben aus, welches in Form und Größe mit dem im Windkanal vermessenen Hufeisenwirbel übereinstimmt. Der Zylinder rollt währenddessen stromauf in den Kolkgraben hinein bis ein quasi-stationärer Zustand erreicht wird, bei dem die weitere Erosion von Sediment durch lawinenartige Hangabrutschungen kompensiert wird (Rückborn & Leder, 2016). Weiterhin zeigen



Abbildung 4.5: Quasi-stationärer Endzustand der Versandung eines liegenden Zylinders im Wassserkanal.

Menzel & Leder (2015), dass sich im Nachlauf des Zylinders Sediment anhäuft, was aufgrund des Rezirkulationsgebietes ebenfalls zu erwarten war. In Abbildung 4.5 ist der quasi-stationäre Endzustand der Versandung des Zylinders im Wassserkanal zu sehen.

4.2 Reproduktion der Messungen im Windkanal mit der Lattice Boltzmann Methode

Um die Windkanalmessungen mit der Lattice Boltzmann Methode reproduzieren zu können, musste zunächst ein geeignetes Gitter mit entsprechenden Verfeinerungsstufen definiert werden. Aufgrund der zu erwartenden Strömungsstrukturen wurde das Gitter vor allem im Vorlauf des Zylinders entsprechend verfeinert. Weiterhin liegt kein vollständig vermessenes Anströmprofil aus den Windkanalmessungen vor, sodass außerdem die Grenzschicht am Boden möglichst fein aufgelöst werden musste. Aufgrund dieser Überlegungen wurden die Verfeinerungsstufen gemäß Tabelle 4.1 gewählt, wobei die Mitte des Zylinders bei $x/D = 0$ und $y/D = 0$ positioniert ist und bei $z/D = 0$ auf dem Boden aufliegt. Das Besondere an dieser Zusammensetzung der Verfeinerungsstufen ist, dass verschiedene Blöcke einer Stufe jeweils aufeinander treffen. Für die Implementierung, aber auch für die Parallelisierung, stellt dies aufgrund der auftretenden Ecken und Kanten einen Sonderfall dar, welcher entsprechend behandelt werden muss.

Die Simulationsränder wurden jeweils wie bei der Simulation des stehenden Zylinders, welche in Kapitel 3.4 beschrieben wurde, behandelt. Als Einlassprofil wurde ein Geschwindigkeitsprofil vorgegeben, welches sich entlang einer vertikalen Linie bei $x/D = -2,07$ aus den vorhandenen Messdaten ermitteln lies. Die Geschwindigkeit der freien Strömung wurde dabei als $\vec{u} = (U_\infty, 0, 0)^T$ vorgege-

Tabelle 4.1: Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines liegenden Zylinders unter Windkanalbedingungen.

Stufe	x/D	y/D	z/D
0	$-4 \dots +10$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +5$
1	$-4 \dots +10$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +2,5$
2	$-4 \dots +10$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +0,2$
2	$-2 \dots +3$	$-3 \dots +3$	$+0,2 \dots +1,5$
3	$-4 \dots +10$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +0,1$
3	$-1 \dots +0,7$	$-2,5 \dots +2,5$	$+0,1 \dots +1,2$

ben mit $U_\infty = 0,05$ in Gittereinheiten bzw. $U_\infty = 40$ m/s in physikalischen Einheiten. Gemäß den Bedingungen im Windkanal wurde die Reynoldszahl auf $Re = 1,5 \times 10^5$ festgelegt.

4.2.1 Gitterkonvergenzstudie

Im Rahmen einer Gitterkonvergenzstudie wurden zunächst vier Simulationen mit jeweils unterschiedlichen Auflösungen durchgeführt und für $t = 0,08$ s gemittelt. Für die zwei größten Gitter wurden dabei jeweils nur drei Verfeinerungsstufen verwendet, indem die größte Stufe (Stufe 0) aus Tabelle 4.1 effektiv in die nächstfeinere (Stufe 1) integriert wurde. Die größte Simulation lief bei einer Auflösung von $N_1 = 10$, $N_2 = 20$ und $N_3 = 40$ Zellen pro Zylinderdurchmesser D , wobei der Index jeweils die Verfeinerungsstufe angibt. Da die erste Stufe theoretisch eine Auflösung von $N_0 = 5$ hätte, wird die gesamte Auflösung der größten Simulation der Einfachheit halber mit $N = (5) - 10 - 20 - 40$ gekennzeichnet. Analog dazu wurden außerdem folgende drei Auflösungen verwendet: $N = (8) - 16 - 32 - 64$, $N = 10 - 20 - 40 - 80$ und $N = 16 - 32 - 64 - 128$.

Die aus der zeitlichen Mittelung resultierenden Wirbel in unmittelbarer Zylindernähe aller Simulationen sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Bei allen vier Simulationen scheint die Umströmung am oberen Ende des Zylinders sehr ähnlich zu sein. Es entstehen offensichtlich aufgrund der Ablösung der Strömung am Zylindermantel und der seitlichen Umströmung an den Zylinderenden zwei Flanken, die jeweils in der x - y -Ebene tendenziell etwas von der Zylindermitte weggedreht sind und sich stromab zu zwei gegenläufigen Wirbelpaaren ausbilden. Ein entscheidender Unterschied zwischen den jeweiligen Auflösungen ist jedoch der Ablösepunkt am Zylindermantel. Mit höherer Auflösung scheint sich dieser immer weiter nach hinten zu verschieben, wobei nicht klar ist, ob eine noch feinere Simulation den Ablösewinkel weiter verändern würde. Für die Versandung und Auskolkung des Zylinders ist jedoch hauptsächlich der Hufeisenwirbel von Bedeutung, weshalb die genaue Abbildung des Ablösewinkels an dieser Stelle eine eher untergeordnete Rolle spielen soll.

Im Bezug auf den Hufeisenwirbel wird deutlich, dass die größte Simulation nicht in der Lage ist,

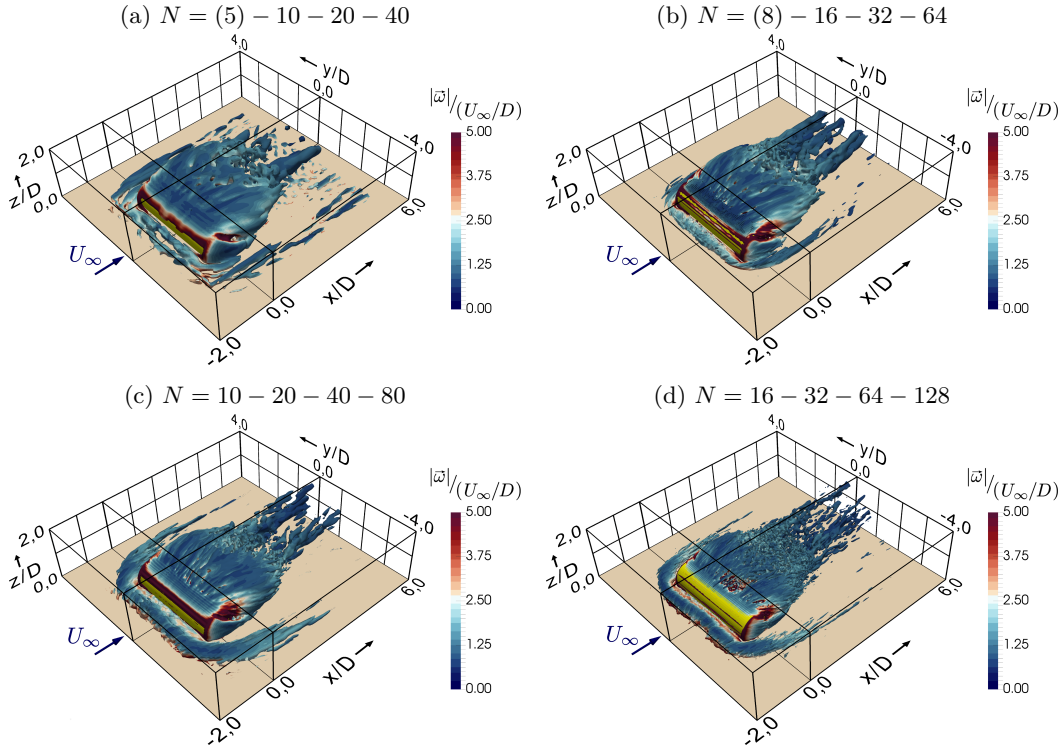


Abbildung 4.6: Hufeisenwirbel im Vorlauf des liegenden Zylinders bei Verwendung unterschiedlicher Auflösungen, dargestellt mittels des Q-Kriteriums bei $Q = 0,2(D/U_\infty)^2$.

diesen korrekt darzustellen. Bei der nächstfeineren Simulation ist der Hufeisenwirbel dagegen dem vermessenen Wirbel aus Abbildung 4.2 schon sehr ähnlich. Allerdings zeigen die feineren Simulationen, dass dieser Zustand noch nicht auskonvergiert ist. Dort ist der Hufeisenwirbel jeweils noch deutlich größer und ausgeprägter, wobei sich die Form und Größe des Wirbels zwischen den zwei feinsten Simulationen nur noch wenig unterscheidet. In Abbildung 4.7 wird für die drei feinsten Simulationen in einer Schnittebene bei $y/D = 0$ die Position und Ausdehnung des Hufeisenwirbels im Vorlauf des Zylinders genauer verglichen. Auch hier wird deutlich, dass die größte der drei Simulationen zwar die Lage des Hufeisenwirbels im Vergleich zum Windkanalexperiment gut abzubilden scheint, allerdings ist vor allem die horizontale Ausdehnung im Vergleich zu den zwei feineren Simulationen deutlich geringer. Zwischen den zwei feinsten Simulationen unterscheidet sich die Lage und die Größe des Hufeisenwirbels nur noch gering. Da also die Simulation mit einer Auflösung von $N = 10 - 20 - 40 - 80$ und einer gesamten Zellenanzahl von ca. 25,5 Millionen offensichtlich im Bezug auf den Hufeisenwirbel ebenso zufriedenstellende Ergebnisse liefern kann wie die feinste Simulation mit insgesamt ca. 93 Millionen Zellen, wird diese bis $t = 1$ s weiter gemittelt,

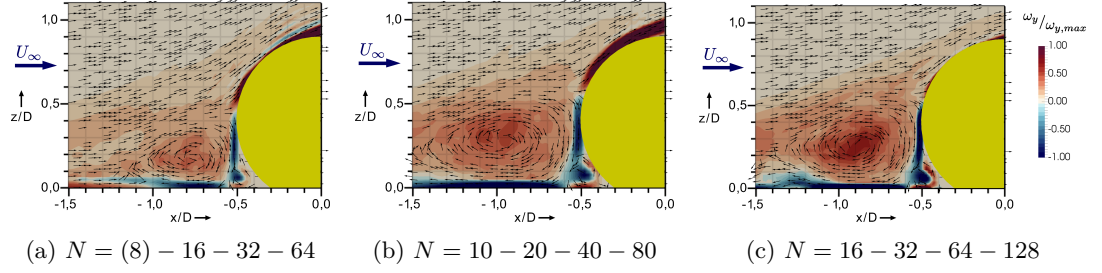


Abbildung 4.7: Position des Hufeisenwirbels im Vorlauf des liegenden Zylinders bei unterschiedlichen Auflösungen in einer Schnittebene bei $y/D = 0$. Die Konturen stellen die jeweiligen y -Komponenten der Wirbelstärke dar. Zur Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren in der Schnittebene wurde die y -Komponente der Geschwindigkeit auf Null gesetzt.

um einen auskonvergierten Zustand der zeitlichen Mittelung zu erhalten.

4.2.2 Vergleich mit Windkanalmessungen

In den Abbildungen 4.8, 4.9 und 4.10 werden die über $t = 1$ s gemittelten Ergebnisse der Simulation mit den Ergebnissen aus den Windkanalmessungen verglichen. So zeigt Abbildung 4.8 das Rezirkulationsgebiet im Vergleich. Die Länge des Rezirkulationsgebietes aus der LBM Simulation beträgt ca. $x = 2,8D$ und stimmt damit mit der vermessenen Länge von ca. $x = 2,7D$ sehr gut überein. Dennoch unterscheidet sich die Form des simulierten Rezirkulationsgebiets vor allem in der Höhe und in der Breite entlang der y -Achse von den Messungen. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass der Ablöswinkel in der Simulation nicht korrekt bestimmt wird. Nichtsdestotrotz zeigen auch die Stromlinien im Bereich des Rezirkulationsgebiets, dass die allgemeinen Strömungsstrukturen von der Simulation gut abgebildet werden. So bildet sich wie erwartet im Nachlauf des Zylinders ein Bogenwirbel aus, welcher ausschlaggebend für die Form und Größe des Rezirkulationsgebietes ist.

In Abbildung 4.9 sind nochmals die Wirbel im direkten Umfeld des Zylinders dargestellt, wobei bei den Windkanalmessungen nur der Hufeisenwirbel ausgewertet wurde. Die längere Mittelung hat bei den Ergebnissen der LBM Simulation dazu geführt, dass die Konturen des Q -Kriteriums im Allgemeinen glatter sind als bei der Abbildung 4.6c. An der Form und Struktur der Wirbel hat sich dagegen nicht mehr viel verändert. Vor allem der seitliche Hufeisenwirbel, welcher sich beim Windkanalexperiment sehr deutlich herausstellte, bleibt in der Simulation eher undefiniert und verfällt seitlich des Zylinders sehr schnell.

Die Position und Größe des simulierten Hufeisenwirbels in einer Schnittebene bei $y/D = 0$ wird in Abbildung 4.10 mit dem Windkanalexperiment verglichen. Im Experiment liegt das Zentrum

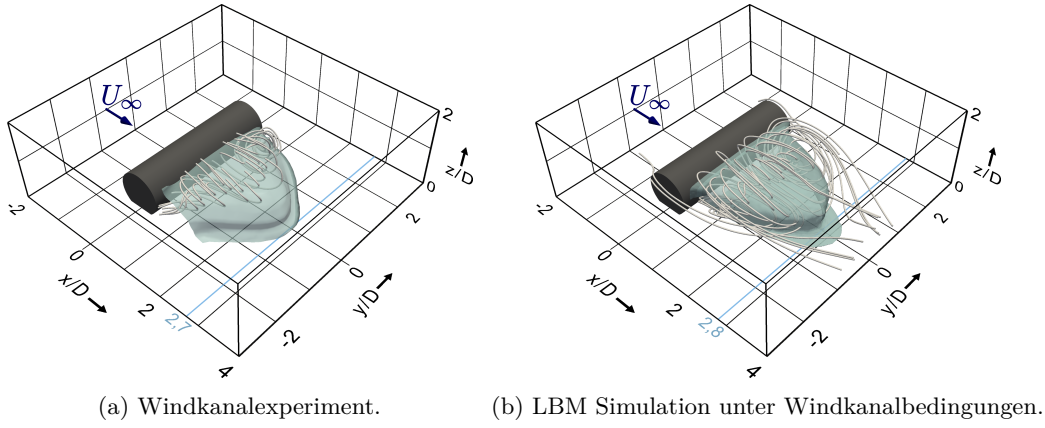


Abbildung 4.8: Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation.

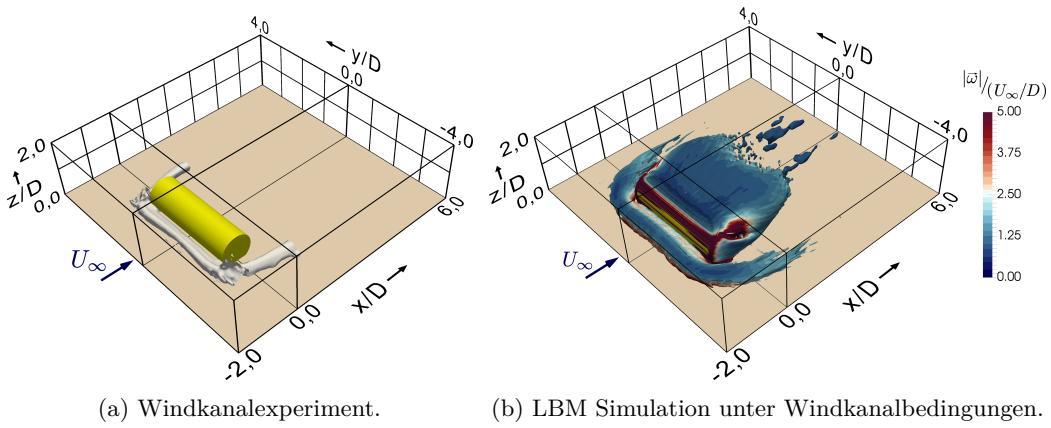


Abbildung 4.9: Hufeisenwirbel im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation, dargestellt durch das Q-Kriterium.

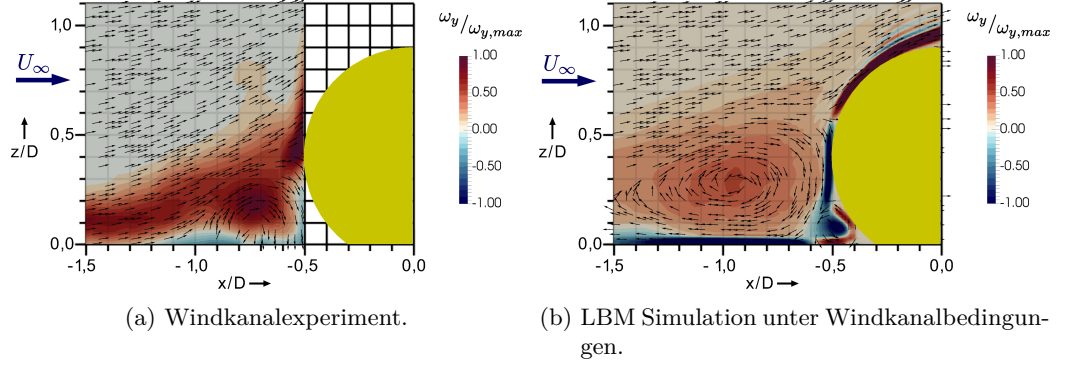


Abbildung 4.10: Position des Hufeisenwirbels im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation in einer Schnittebene bei $y/D = 0$. Die Konturen stellen die jeweiligen y -Komponenten der Wirbelstärke dar. Zur Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren in der Schnittebene wurde die y -Komponente der Geschwindigkeit auf Null gesetzt.

des Wirbels bei ca. $x/D = -0,72$ und $z/D = 0,19$. Im Vergleich dazu ist das Zentrum des Hufeisenwirbels aus der LBM Simulation etwas verschoben und liegt bei $x/D = -0,95$ und $z/D = 0,29$. Auch die Größe des Hufeisenwirbels wird von der Simulation überschätzt. So ist der Wirbel in x -Richtung fast $1D$ breit und in z -Richtung ca. $0,5D$ hoch. Im Vergleich dazu ist der gemessene Wirbel nur ca. $0,4D$ breit und $0,3D$ hoch.

Im Vergleich mit den Experimenten wird deutlich, dass die LBM Simulation zwar in der Lage ist, die allgemeinen Strömungsstrukturen qualitativ korrekt darzustellen, die quantitative Reproduktion der Messdaten aber problematisch ist. Im Nachlauf des Zylinders liegt dies sicherlich an der nicht ganz korrekten Abbildung des Ablöswinkels. Der Hufeisenwirbel im Vorlauf des Zylinders hängt dagegen sehr eng mit der korrekten Simulation der Grenzschicht zusammen. Obwohl das vorgegebene Geschwindigkeitsprofil auf der Grundlage der vorhandenen Messdaten eine bessere Approximation der realen Bedingungen darstellt als beispielsweise ein einfaches Blockprofil, ist das vorgegebene Profil dennoch nicht turbulent und berücksichtigt auch keine eventuell auftretende Verblockung durch den liegenden Zylinder. Es wäre daher durchaus denkbar, dass ein Einlass auf der Grundlage eines großflächig vermessenen Geschwindigkeitsprofils im Vorlauf des Zylinders bessere Ergebnisse liefern könnte. Da jedoch auch die Turbulenz der Anströmung eine Rolle spielen könnte, müsste der Einlass der Simulation im Idealfall ebenso turbulent sein. Diese Option ist zwar in Palabos noch nicht implementiert, ließe sich aber durch die Einbindung eines geeigneten Turbulenzgenerators beispielsweise auf der Grundlage der künstlichen Generierung von Wirbeln nach Jarrin et al. (2006), Kornev & Hassel (2007) oder Kornev et al. (2007) durchaus realisieren.

ren. Weiterhin wäre auch eine Modellierung der Wandgrenzschicht denkbar. Gerade bei den hohen Reynoldszahlen wie sie im Windkanal vorherrschen und bei Strömungsstrukturen, die stark von der korrekten Darstellung der Grenzschicht abhängen, würde eine solche Modellierung sicherlich von Vorteil sein.

4.3 Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals

Die LBM Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals hat den entscheidenden Vorteil der niedrigeren Reynoldszahl. Aufgrund der Tatsache, dass diese im Wasserkanal eine Größenordnung niedriger ist als im Windkanal, ergibt eine Simulation bei gleicher Auflösung niedrigere y^+ -Werte oberhalb des Bodens. Daraus folgt somit eine bessere Auflösung der Grenzschicht. Des Weiteren betrug die maximale Wassertiefe im Kanal während der Versuche lediglich ca. 0,13 m, was in etwa $z = 2,24D$ entspricht. Bei gleichbleibender Zellenanzahl kann daher der Einlass entsprechend weit vor den Zylinder verschoben werden, was die Ausbildung einer in gewissen Maßen turbulenten Grenzschicht ermöglicht, bevor diese auf den Zylinder trifft. Dies wiederum dürfte dadurch zu einer besseren Abbildung des zu erwartenden Hufeisenwirbels führen.

4.3.1 Simulationsbedingungen

Für die Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals wurden in Zylindernähe ähnliche Verfeinerungsstufen definiert wie bei den Simulationen zur Reproduktion der Windkanalmessungen. Die Abmaße der jeweiligen Stufen sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Um die Zellenanzahl zu begrenzen ohne den Simulationsbereich weiter einzugrenzen, wurde vor allem stromab des Zylinders ab $x = 5D$ der Boden nicht mehr so genau aufgelöst wie im Vorlauf des Zylinders. Dafür ist der Einlass nun $10D$ stromauf des Zylinders platziert, sodass eine gewisse Entwicklung des Anströmprofils im Vorlauf des Zylinders möglich ist. Die Auflösung der jeweiligen Verfeinerungsstufen entspricht der Auflösung der länger gemittelten Simulation unter den Windkanalbedingungen bei $N = 10 - 20 - 40 - 80$, sodass insgesamt ca. 26,4 Millionen Zellen simuliert werden.

Das Geschwindigkeitsprofil im Wasserkanal wurde im Rahmen einer Bachelorarbeit am Lehrstuhl Strömungsmechanik von Behrend (2015) vermessen. Das bei $x = -5D$ ermittelte Geschwindigkeitsprofil lässt sich gemäß Schlichting & Gersten (2006) durch ein Potenzgesetz annähern, welches folgende Form annimmt:

$$\frac{U}{U_\infty} = 8,51 \left(\frac{z}{D} \right)^{0,35} \quad (4.1)$$

Tabelle 4.2: Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines liegenden Zylinders unter Wasserkanalbedingungen.

N	x/D	y/D	z/D
10	$-10 \dots +15$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +2,24$
20	$-10 \dots +10$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +2$
40	$-10 \dots +7,5$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +0,2$
40	$-2 \dots +4$	$-2,5 \dots +2,5$	$+0,2 \dots +1,5$
80	$-10 \dots +5$	$-6 \dots +6$	$0 \dots +0,1$
80	$-1 \dots +0,7$	$-1,8 \dots +1,8$	$+0,1 \dots +1,2$

wobei U die x -Komponente der vorgegebenen Einlassgeschwindigkeit $\vec{u} = (U, 0, 0)^T$ ist. Da die maximale Geschwindigkeit bei $z = 0,13 \text{ m}$ $U \approx 1,54U_\infty$ beträgt, wird für die LBM Simulation $U_\infty = 0,03$ in Gittereinheiten gewählt. In physikalischen Einheiten beträgt die mittlere Anströmgeschwindigkeit $U_\infty = 0,293 \text{ m/s}$, sodass die Reynoldszahl auf $Re = 1,7 \times 10^4$ festgelegt ist. Die Simulation wurde insgesamt über $t = 90 \text{ s}$ gemittelt, um einen auskonvergierten Zustand der gemittelten Geschwindigkeiten zu garantieren.

Erwähnenswert ist schließlich, dass die Ausdehnung des Simulationsbereiches in z -Richtung sehr gering ist. Aufgrund der Tatsache, dass sich die Wasseroberfläche jedoch ebenfalls bei $z = 2,24D$ befindet, ist zu erwarten, dass eine *free-slip* Randbedingung in der Simulation eine ähnliche Auswirkung auf die Umströmung des Zylinders aufweist wie die Wasseroberfläche im Experiment.

4.3.2 Vergleich mit Windkanalmessungen

Da die Strömungsstrukturen im Umfeld des liegenden Zylinders gemäß Menzel & Leder (2013b) und Menzel & Leder (2015) weitestgehend unabhängig von der Reynoldszahl sind, werden die Ergebnisse der Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals im Folgenden wieder mit den Ergebnissen aus den Windkanalmessungen verglichen. Dabei ist zwar keine genaue Übereinstimmung der quantitativen Größen zu erwarten, die qualitativen Ergebnisse sollten jedoch ähnlich sein. So ist in Abbildung 4.11 das Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des Zylinders im Vergleich zwischen den Windkanalmessungen und der LBM Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals dargestellt. Insgesamt ist das Rezirkulationsgebiet bei der Simulation mit einer Länge von $x/D = 3,2$ etwas länger als bei den Messungen im Windkanal. Weiterhin ist anhand der Stromlinien wieder der zu erwartende Bogenwirbel im Nachlauf des Zylinders, aber auch ein deutlicher Einfluss aufgrund der Umströmung an den Zylinderenden zu erkennen. So scheinen sich die Stromlinien in der Simulation in Richtung des Bodens hin deutlicher zu drehen, als es bei den Windkanalmessungen der Fall zu sein scheint. Auf diesen Aspekt wird später noch etwas genauer eingegangen.

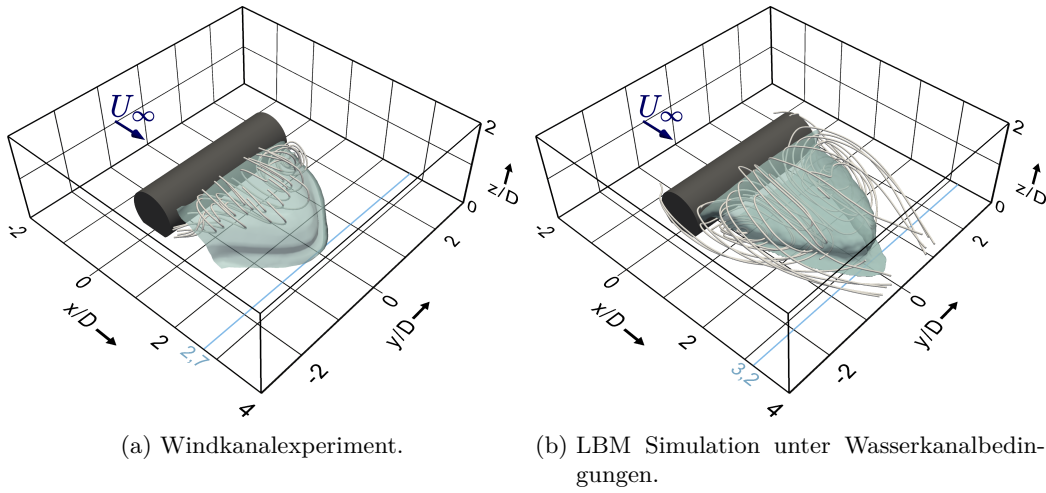


Abbildung 4.11: Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen.

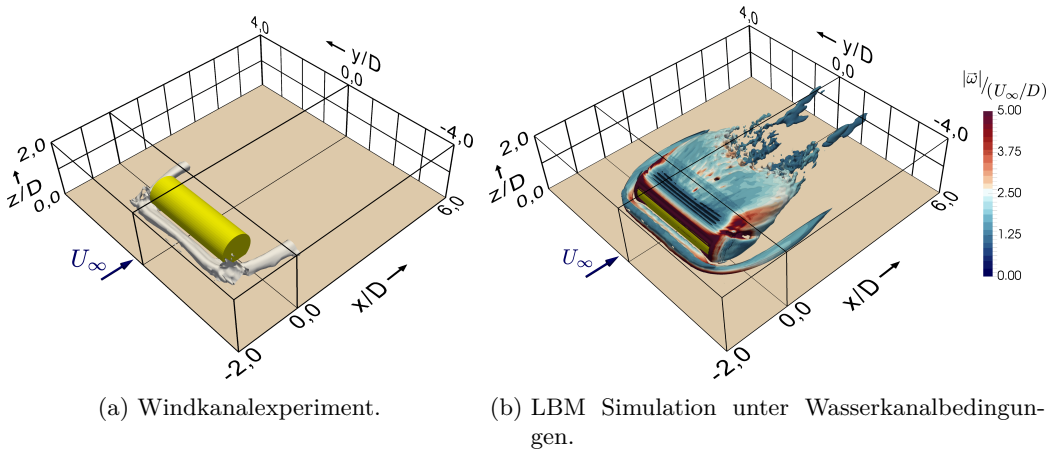


Abbildung 4.12: Hufeisenwirbel im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen, dargestellt durch das Q-Kriterium.

Abbildung 4.12 zeigt die Wirbelstrukturen, welche sich gemäß der gemittelten Geschwindigkeiten in Zylindernähe ausbilden, im Vergleich mit dem Hufeisenwirbel aus dem Windkanalexperiment. Die Konturen des Q-Kriteriums sind deutlich glatter als bei der Simulation unter Windkanalbedingungen. Es bilden sich aber qualitativ nach wie vor die selben Strömungsstrukturen aus. Zum einen entsteht wieder ein Hufeisenwirbel, der nun auch seitlich des Zylinders deutlich ausgeprägt ist. Zum anderen bilden sich wieder zwei Flanken im unmittelbaren Nachlauf des Zylinders aus, welche leicht von der Zylindermitte weggedreht sind. Weiterhin sind auch wieder Ansätze von zwei gegenläufigen Wirbeln weiter stromab zu erkennen.

Da der Hufeisenwirbel aus der LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen sehr gut mit dem Hufeisenwirbel aus dem Windkanalexperiment übereinzustimmen scheint, werden in den Abbildungen 4.13 und 4.14 die Positionen des Wirbels im Vorlauf und seitlich des Zylinders mit den Ergebnissen aus den Windkanalmessungen genauer verglichen. Abbildung 4.13 zeigt dabei die Schnittebene bei $y/D = 0$. Die Größe des simulierten Wirbels ist mit einer Breite von ca. $0,6D$ und einer Höhe von ca. $0,4D$ etwas größer als der gemessene Wirbel, allerdings liegt das Wirbelzentrum bei ca. $x/D = -0,87$ und $z/D = 0,25$ und stimmt damit verhältnismäßig gut mit den Messungen überein. Der seitliche Hufeisenwirbel wird in Abbildung 4.14 in einer Schnittebene bei $x/D = 0$ genauer betrachtet. Hier liegt das gemessene Wirbelzentrum bei ca. $y/D = -2,16$ und $z/D = 0,12$. In der Simulation liegt der seitliche Hufeisenwirbel bei ca. $y/D = -2,37$ und $z/D = 0,13$ und stimmt somit auch hier gut mit den Messungen überein. Die Größe des seitlichen Wirbels ist dagegen eher schwer abzuschätzen, da sich eine Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren aufgrund der vergleichsweise hohen x -Komponente der Geschwindigkeit als unpraktikabel erweist.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Strömungsstrukturen, welche sich aus der LBM Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals ergeben, im Allgemeinen mit den Ergebnissen aus den Windkanalmessungen übereinstimmen. Dies bestärkt also nochmals die Annahme, dass die Umströmung des liegenden Zylinders im betrachteten Reynoldszahlbereich von $10^4 < Re < 10^5$ weitestgehend unverändert bleibt. Diese Reynoldszahl-Unabhängigkeit der Strömung ist auch bei unendlich langen Zylindern vorhanden, bei denen sich das Rezirkulationsgebiet gemäß Leder (1992) nur noch geringfügig ändert.

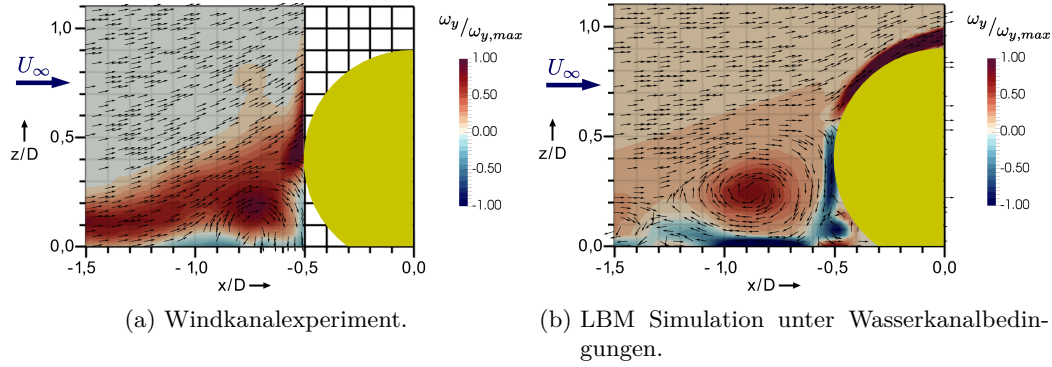


Abbildung 4.13: Position des vorderen Hufeisenwirbels im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen in einer Schnittebene bei $y/D = 0$. Die Konturen stellen die jeweiligen y -Komponenten der Wirbelstärke dar. Zur Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren in der Schnittebene wurde die y -Komponente der Geschwindigkeit auf Null gesetzt.

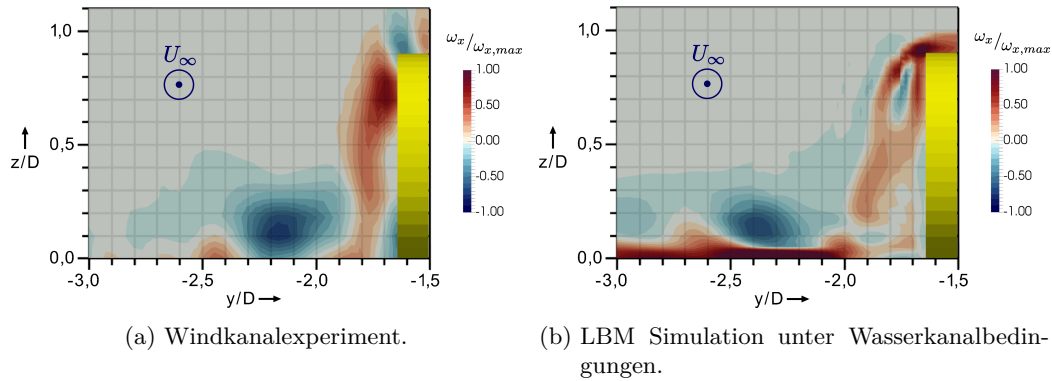


Abbildung 4.14: Position des seitlichen Hufeisenwirbels im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen in einer Schnittebene bei $x/D = 0$. Die Konturen stellen die jeweiligen x -Komponenten der Wirbelstärke dar.

4.3.3 Beschreibung der dreidimensionalen Strömungsstrukturen

Da die LBM Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals die Strömungsstrukturen gut abzubilden scheint, soll im Folgenden genauer auf die dreidimensionale Umströmung des liegenden Zylinders eingegangen werden. Dazu wurden in Abbildung 4.15 einige Stromlinien, die sich aus dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld berechnen lassen, dargestellt. Zunächst trifft die Grenzschicht im Vorlauf auf den Zylinder und bildet dort aufgrund der resultierenden Rückströmung einen Hufeisenwirbel aus, der die Strömung seitlich am Zylinder vorbei leitet. Dort findet an den Kanten der Zylinderenden eine sofortige Ablösung der Strömung statt, die sich erst hinter dem Zylinder wieder in Richtung Zylindermitte bewegt. Auf dem Zylindermantel löst die Strömung erst recht spät ab, wobei eine genaue Bestimmung des Ablösewinkels nicht möglich ist, da die Oberflächenkräfte nur räumlich gemittelt vorliegen und somit nicht über den Anströmwinkel dargestellt werden können. Dennoch scheint der Ablösewinkel weitestgehend mit dem aus der Anströmung eines unendlich langen Zylinders übereinzustimmen, bei der er aufgrund der laminaren Grenzschicht bei 82° liegt (Leder, 1992). Unmittelbar hinter dem Zylinder ist die Strömung in die negative z -Richtung gerichtet und legt sich dadurch allmählich entlang des Rezirkulationsgebietes an den Boden an. Gleichzeitig strömt aber auch die von den Zylinderenden abgelöste Strömung wieder zur Zylindermitte hin. Dadurch entstehen in Bodennähe zwei große, jeweils bis zur Zylindermitte reichende, gegenläufige Wirbel mit einer zunächst in z -Richtung ausgerichteten Wirbelachse. Mit zunehmender Entfernung zum Boden und zur Zylindermitte hin dreht sich diese Wirbelachse, sodass sie in der Zylindermitte eher in y -Richtung orientiert ist. Insgesamt entsteht dadurch der charakteristische Bogenwirbel im Nachlauf des Zylinders, welcher die Länge und Form des Rezirkulationsgebiets prägt. Hinter dem Rezirkulationsgebiet bildet sich schließlich aufgrund der dreidimensionalen Strömungsstrukturen im Nachlauf des Zylinders ein gegenläufiges Wirbelpaar aus, welches allmählich weiter stromauf in die freie Strömung übergeht.

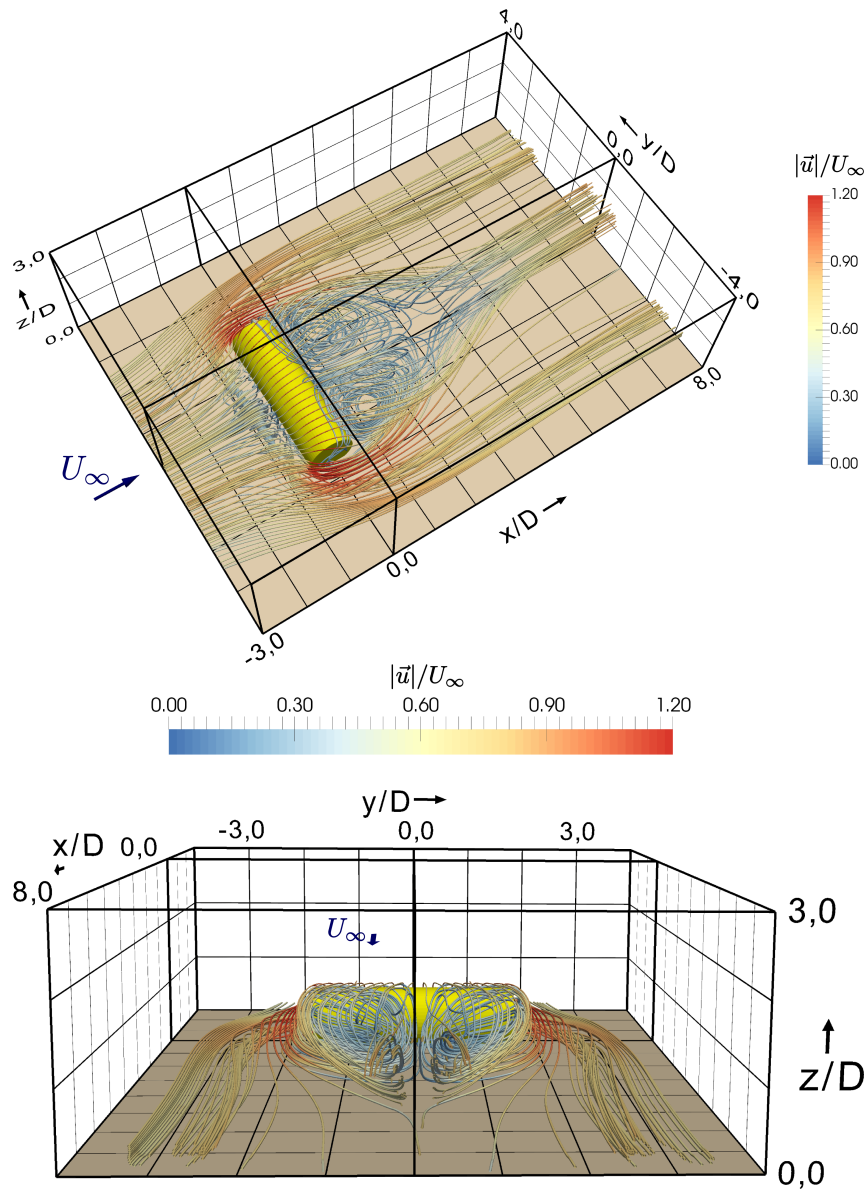


Abbildung 4.15: Stromlinien im Vor- und Nachlauf eines liegenden Zylinders auf Grundlage der gemittelten Strömung aus der LBM Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals.

4.3.4 Wandschubspannung im Umfeld des Zylinders

Ziel der bisherigen Untersuchungen zur Umströmung des liegenden Zylinders war vor allem die korrekte numerische Reproduktion der Strömungsstrukturen, die maßgeblich für die Versandung und Auskolkung des Zylinders ausschlaggebend sind. Dies gilt in besonderem Maße für den Hufeisenwirbel, da dieser erwartungsgemäß im Vorlauf des Zylinders zu erhöhten Wandschubspannungen am Boden und somit zu dem im Wasserkanal beobachteten Kolkgraben führt. Aus diesem Grund wurden in Abbildung 4.16 die aus der Strömungssimulation mit der LBM unter Wasserkanalbedingungen resultierenden Wandschubspannungen abgebildet, wobei diese zur besseren Analyse der physikalischen Prozesse in physikalischen Einheiten angegeben wurden. Zunächst wird deutlich, dass die Wandschubspannung an den Zylinderenden und unmittelbar vor dem Zylinder aufgrund des Hufeisenwirbels erhöht wird. Gleichzeitig fällt sie im Bereich des Rezirkulationsgebietes deutlich geringer aus.

Auf die Bewegung des Sediments hat die Wandschubspannung gemäß Shields (1936) einen wesentlichen Einfluss. So lässt sich der dimensionslose Shields-Parameter definieren, der folgendermaßen mit der Wandschubspannung τ_w zusammenhängt:

$$Sh = \frac{\tau_w}{(\rho_s - \rho)gd_K} \quad (4.2)$$

wobei ρ_s die Sanddichte, ρ die Fluidichte, g die Schwerkraftbeschleunigung und d_K der Korndurchmesser ist. Gemäß Shields (1936) kann in Abhängigkeit der Korn-Reynoldszahl $Re_K = u_\tau d_K / \nu$, welche sich auf die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ bezieht, ein kritischer Shields-Parameter Sh_c bestimmt werden, ab dem sich das Sediment zu bewegen beginnt. Die Bestimmung des Shields-Parameter kann jedoch auch auf Grundlage des dimensionslosen Korndurchmessers

$$d_* = \left[\frac{(\rho_s - \rho)g}{\rho\nu^2} \right]^{1/3} d_K \quad (4.3)$$

erfolgen. Gemäß Guo (2002) ergibt sich auf ebenem Boden dafür folgende Approximation:

$$Sh_c = \frac{0,23}{d_*} + 0,054 \left[1 - \exp \left(-\frac{d_*^{0,85}}{23} \right) \right] \quad (4.4)$$

Für den im Wasserkanal verwendeten Sand kann ein mittlerer Korndurchmesser von $d_K = 0,2$ mm angenommen werden. Zusammen mit einer Sanddichte von $\rho_s = 2600$ kg/m³ und einer Fluidichte von $\rho = 1000$ kg/m³ ergibt sich ein kritischer Shields-Parameter von $Sh_c = 0,054$ und somit nach

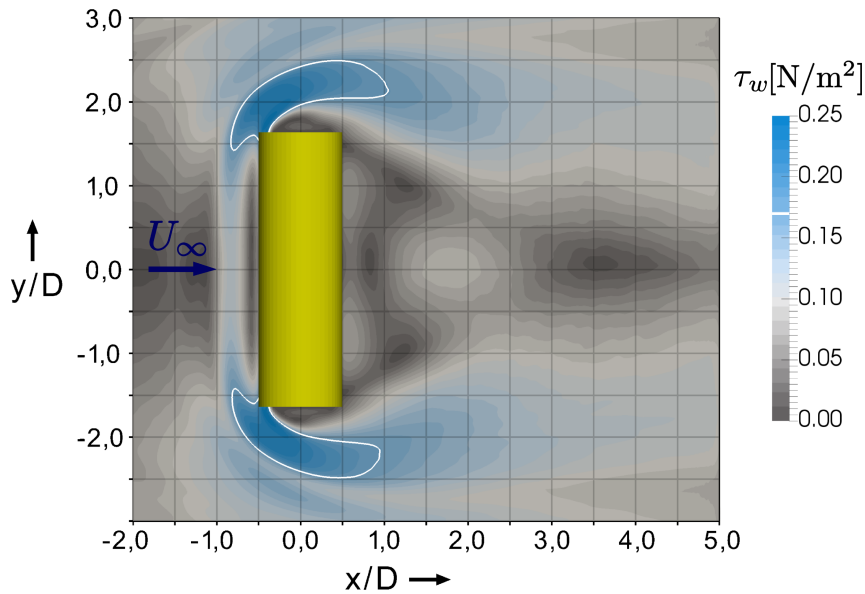


Abbildung 4.16: Wandschubspannung am Boden im Umfeld des liegenden Zylinders. Weiß markiert ist die Kontur der Wandschubspannung, die sich aus dem kritischen Shields-Parameter berechnet.

Gleichung 4.2 eine kritische Wandschubspannung von $\tau_{w,c} = 0,17 \text{ N/m}^2$. Dieser Wert ist als weiße Kontur in Abbildung 4.16 markiert. Innerhalb diesen Bereiches wäre also eine Erosion zu erwarten. Dieses Ergebnis deckt sich gut mit den Beobachtungen aus den Wasserkanalexperimenten, da auch dort zunächst an den vorderen Ecken des Zylinders eine Erosion erfolgt, bevor sich nach und nach der Kolkgraben ausbildet.

Es zeigt sich also, dass die Lattice Boltzmann Methode auch die Wandschubspannungen am Boden gut genug abbilden kann, um auf der Grundlage des Shields-Parameters die Versandungsprozesse im Umfeld des liegenden Zylinders realistisch abzuschätzen.

5 Sedimenttransport mit der Lattice Boltzmann Methode

Bisher lag das Hauptmerk der vorliegenden Arbeit auf der korrekten Simulation der Strömungsvorgänge um beliebig geformte Geometrien herum unter Verwendung einer lokalen dreidimensionalen Gitterverfeinerung sowie bei hohen Reynoldszahlen. Im Folgenden soll auf Grundlage dessen ein vereinfachtes Sedimenttransportmodell eingebunden werden, welches erste Ansätze zur Simulation der Erosion und Sedimentation im Umfeld eines liegenden Zylinders liefert.

Aufgrund der Tatsache, dass die im Wasserkanal verwendeten Sandpartikel sehr fein sind, kann die Wechselwirkung der Partikel untereinander sowie die Wechselwirkung zwischen dem Fluid und den Partikeln in erster Nähe vernachlässigt werden. Daher kann der Sand als eigenständige Phase betrachtet werden, dessen Bewegung sich mit einer Advektions-Diffusions-Gleichung beschreiben lässt. Ein ähnlicher Ansatz wurde bereits von Masselot & Chopard (1998) zur Beschreibung des Transports und der Anhäufung von Schnee eingeführt. In Dupuis & Chopard (2002) und Dupuis (2002) wurde dieser Sedimenttransportmechanismus weiter entwickelt und durch die Einbindung einer Hangabrutuschung ergänzt, sodass die Simulation der Auskolkung von Pipelines sowie des Sedimenttransports in Flüssen möglich wurde. Die Simulation der Erosion im Umfeld von Pipelines am Meeresgrund wurde anschließend von Alam (2009) weiter entwickelt, während in Parmigiani et al. (2013) schließlich der Sedimenttransport in einer vollständig dreidimensionalen Simulation eines Flusses mit freier Oberfläche integriert wurde.

Im folgenden Kapitel soll zunächst auf die Lösung der Advektions-Diffusions-Gleichung mittels der Lattice Boltzmann Methode näher eingegangen werden. Anschließend wird diese mit der dreidimensionalen Gitterverfeinerung und dem KBC-Kollisionsmodell in Einklang gebracht, um schließlich auf der Grundlage des kritischen Shields-Parameters eine erste grobe Abschätzung der anfänglichen Sedimenttransportprozesse im Umfeld des liegenden Zylinders zu ermöglichen.

5.1 Das Lattice-Boltzmann/Advektions-Diffusions-Modell

Die Advektion und Diffusion einer beliebigen Größe φ lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = D_0 \nabla^2 \varphi \quad (5.1)$$

mit der Advektionsgeschwindigkeit \vec{u} und der Diffusionskonstante D_0 . Analog zur Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen aus der Lattice-Boltzmann-Gleichung lässt sich auch die Advektions-Diffusions-Gleichung aus der entsprechenden Chapman-Enskog-Entwicklung herleiten (Flekkøy, 1993; Wolf-Gladrow, 1995). Zur besseren Unterscheidung der Verteilungsfunktionen zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichung und denen zur Lösung der Advektions-Diffusions-Gleichung, werden die Verteilungsfunktionen des Lattice-Boltzmann/Advektions-Diffusions-Modells (LB/AD-Modell) als g_i bezeichnet, sodass die LBGK-Gleichung gemäß Gleichung 2.92 folgende Form annimmt:

$$g_i(t+1, \vec{x} + \vec{c}_i) - g_i(t, \vec{x}) = -\frac{1}{\tau} (g_i(t, \vec{x}) - g_i^{eq}(t, \vec{x})) \quad (5.2)$$

Die Relaxationszeit τ steht dabei in folgendem Zusammenhang mit der Diffusionskonstante D_0 :

$$D_0 = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad (5.3)$$

und verhält sich somit analog zur Viskosität bei der Navier-Stokes-Gleichung (Glg. 2.98). Gemäß Flekkøy (1993) lässt sich der Gleichgewichtsterm des LB/AD-Modells aufgrund der Tatsache, dass die Advektions-Diffusions-Gleichung keine Geschwindigkeitsterme zweiter Ordnung enthält, folgendermaßen vereinfachen:

$$g_i^{eq} = t_i \varphi \left(1 + \frac{1}{c_s^2} \vec{c}_i \cdot \vec{u} \right) \quad (5.4)$$

mit

$$\varphi = \sum_i g_i \quad (5.5)$$

Es existieren jedoch in der Literatur auch eine Reihe von Weiterentwicklungen des LB/AD-Modells. So stellen van der Sman & Ernst (1999, 2000) beispielsweise ein Modell vor, welches auch auf rechteckigen Gittern zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Weiterhin wurden von Ginzburg (2005a) eine Reihe verschiedener LB/AD-Modelle vorgestellt, welche unter anderem auch die Möglichkeit einer anisotropen Diffusion zulassen. Eines der dort vorgestellten Modelle, welche vor allem eine optimale Advektion ermöglichen soll, wurde außerdem von Stiebler et al. (2008) aufgegriffen

und auf Gitter angewendet, die eine lokale Gitterverfeinerung verwenden. Darüber hinaus wurde die Stabilität einiger verschiedener 2D LB/AD-Modelle von Suga (2006) anhand der Peclet-Zahl $Pe = UL/D_0$ ausführlich diskutiert, wobei U die charakteristische Geschwindigkeit darstellt und L die charakteristische Länge. Schließlich wurde die Lattice Boltzmann Methode von Shi (2007) auch zur Lösung komplexerer nichtlinearer Advektions-Diffusions-Gleichungen mit entsprechenden Quelltermen angewandt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch das einfache Modell nach Flekkøy (1993) verwendet, welches von Lätt (2007) nochmals aufgegriffen und näher analysiert wurde. Dort wurde zum einen ein Korrekturterm eingeführt, der gemäß Chopard et al. (2009) einen ungewollten Term, der sich aus der Chapman-Enskog-Entwicklung ergibt, eliminiert. Zum anderen leitet Lätt (2007) aber auch, analog zu Gleichung 2.99, einen Ausdruck für den Nicht-Gleichgewichtsterm $g^{(1)}$ des LB/AD-Modells her, welcher sowohl φ als auch das erste Momente der Verteilungsfunktionen $\varphi \vec{u} = \sum_i \vec{c}_i g_i$ korrekt abbildet:

$$g_i^{(1)} \approx -\tau t_i \vec{c}_i \cdot \nabla \varphi \quad (5.6)$$

5.1.1 Das LB/AD-Modell und Gitterverfeinerung

Im Wesentlichen wird die Gitterverfeinerung bei der Verwendung des LB/AD-Modells ähnlich behandelt, wie dies in Kapitel 3.2 für die Simulation eines Fluids auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben wurde. Aufgrund der nun veränderten Darstellung des Nicht-Gleichgewichtsterms, muss jedoch überprüft werden, ob die Skalierung der Verteilungsfunktionen beim Übergang zwischen den jeweiligen Gittern immer noch gegenüber den Gleichungen 3.23 und 3.24 unverändert bleibt.

Dazu wird zunächst festgehalten, dass beim Übergang zwischen den Gittern die betrachtete Größe φ erhalten bleiben muss. Aufgrund der Tatsache, dass die Gitterweite und der Zeitschritt wieder gemäß den Gleichungen 3.12 und 3.13 gleichermaßen skaliert werden, bleibt auch die Advektionsgeschwindigkeit \vec{u} beim Übergang konstant. Dadurch ändert sich also auch der Gleichgewichtsterm nicht:

$$g_{i,f}^{eq} = g_{i,c}^{eq} \quad (5.7)$$

Für den Nicht-Gleichgewichtsterm wird Gleichung 5.6 herangezogen. In dem approximierten Term befinden sich die Größen τ und $\nabla \varphi$, welche beim Übergang zwischen den Gittern skaliert werden

müssen:

$$\alpha = \frac{g_{i,f}^{neq}}{g_{i,c}^{neq}} = \frac{\tau_f(\nabla\varphi)_f}{\tau_c(\nabla\varphi)_c} = \frac{\tau_f(\nabla\varphi)\Delta x_f}{\tau_c(\nabla\varphi)\Delta x_c} = \frac{\tau_f}{2\tau_c} \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow g_{i,f}^{neq} = \frac{\tau_f}{2\tau_c} g_{i,c}^{neq} \quad (5.9)$$

Somit gilt also nach wie vor die selbe Skalierung wie bei der Gitterverfeinerung in Kapitel 3.2. Auch alle weiteren Schritte der Gitterverfeinerung bleiben unverändert und können somit problemlos auf das LB/AD-Modell übertragen werden.

5.1.2 Das LB/AD-Modell und das KBC-Kollisionsmodell

Zur Simulation der Advektions-Diffusions-Gleichung mit der Lattice Boltzmann Methode genügt im dreidimensionalen das D3Q7-Gitter, bei dem die Gittergeschwindigkeiten folgendermaßen gegeben sind: $\vec{c}_0 = (0,0,0)^T$, $\vec{c}_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{c}_2 = (-1,0,0)^T$, $\vec{c}_3 = (0,1,0)^T$, $\vec{c}_4 = (0,-1,0)^T$, $\vec{c}_5 = (0,0,1)^T$ und $\vec{c}_6 = (0,0,-1)^T$. Außerdem sind die Gitterkonstanten t_i folgendermaßen definiert: $t_0 = 1 - 3c_s^2$ und $t_i = c_s^2/2$ für $i = 1, \dots, 6$, wobei c_s^2 bei diesem Gitter frei wählbar ist und für die folgenden Simulation auf $c_s^2 = 1/4$ festgelegt wird. Um für dieses Gitter das passende KBC-Modell zu erhalten, wird zunächst eine Momentenbasis benötigt. Mit

$$M_{pqr} = \sum_i g_i c_{ix}^p c_{iy}^q c_{iz}^r, \quad p, q, r \in 0,1,2 \quad (5.10)$$

ist diese Momentenbasis gemäß Yoshida & Nagaoka (2010) folgendermaßen gegeben:

$$\begin{pmatrix} M_{000} \\ M_{100} \\ M_{010} \\ M_{001} \\ 6 - 7(M_{200} + M_{020} + M_{002}) \\ 2M_{200} - M_{020} - M_{002} \\ M_{020} - M_{002} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Durch das Invertieren der obigen Matrix lassen sich im Gegenzug die Verteilungsfunktionen auch über die definierte Momentenbasis ausdrücken:

$$g_i = \begin{cases} M_{000} - M_{200} - M_{020} - M_{002}, & \text{falls } c_{ix} = c_{iy} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{2} (c_{ix} M_{100} + M_{200}), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{2} (c_{iy} M_{010} + M_{020}), & \text{falls } c_{iy} \neq 0, c_{ix} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{2} (c_{iz} M_{001} + M_{002}), & \text{falls } c_{iz} \neq 0, c_{ix} = c_{iy} = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Da zur korrekten Darstellung der Advektions-Diffusions-Gleichung die Momente zweiter Ordnung nicht von Bedeutung sind, werden diese zu dem Anteil höherer Momente h_i der Verteilungsfunktionen hinzugefügt. Der ursprünglich als „Scherspannungsteil“ s_i bezeichnete Anteil enthält daher nun die Momente erster Ordnung, während der „kinetische Teil“ k_i nur noch aus $M_{000} = \varphi$ besteht:

$$g_i = k_i(\varphi) + s_i(M_{100}, M_{010}, M_{001}) + h_i(M_{200}, M_{020}, M_{002}) \quad (5.13)$$

Mit dieser Darstellung der Verteilungsfunktionen kann das KBC-Modell somit auch für das D3Q7-Gitter angewandt werden.

5.1.3 Testfall: Advektion und Diffusion einer Gaußverteilung

Um das implementierte KBC-Modell zur Lösung der Advektions-Diffusions-Gleichung auf dem D3Q7-Gitter mit Gitterverfeinerung zu testen, wurde die Advektion und Diffusion einer dreidimensionalen Gaußverteilung simuliert. Diese ist zu Beginn der Simulation folgendermaßen definiert:

$$\varphi = \exp\left(-\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)^2}{2L}\right) \quad (5.14)$$

wobei L als charakteristische Länge eingeführt wird und \vec{x}_0 der Mittelpunkt der Verteilung ist. Der Simulationsbereich beträgt $0 \leq x/L \leq 40$, $0 \leq y/L \leq 40$ und $0 \leq z/L \leq 40$. Zusätzlich wurde eine Verfeinerungsstufe im Bereich $15 \leq x/L \leq 25$, $20 \leq y/L \leq 30$ und $15 \leq z/L \leq 25$ eingeführt. Die Auflösung auf dem groben Gitter beträgt $N_c = 2$ Zellen pro L und somit auf dem feinen $N_f = 4$. Es werden insgesamt zwei Gaußverteilungen initialisiert, jeweils an den Positionen $\vec{x}_{0,1} = (15L, 25L, 20L)^T$ und $\vec{x}_{0,2} = (15L, 15L, 20L)^T$. Beide Gaußverteilungen bewegen sich anschließend mit einer konstanten Geschwindigkeit in x -Richtung: $\vec{u} = (U, 0, 0)^T$ mit $U = 0,05$ in Gittereinheiten. Außerdem wird für die Diffusionskonstante ein willkürlicher Wert von $D_0 = 0,001$

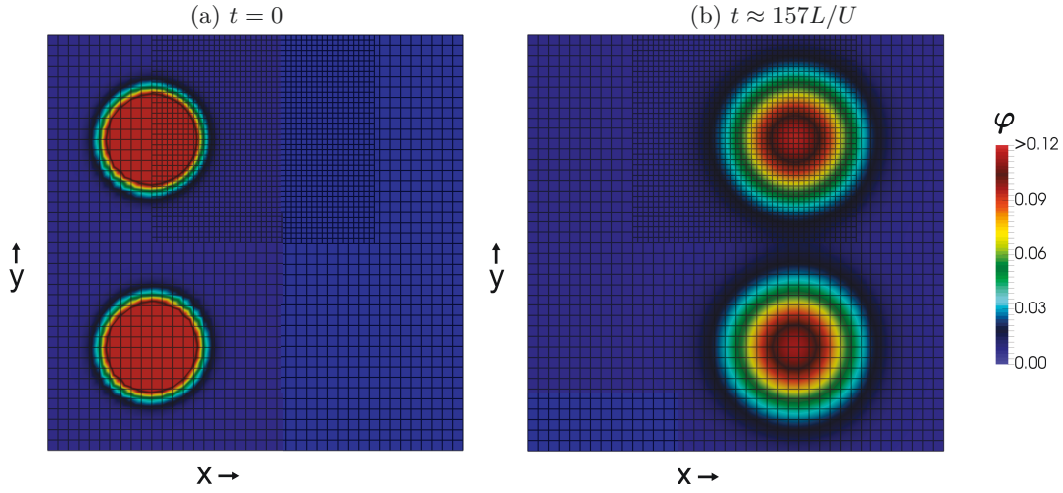


Abbildung 5.1: Zeitliche Entwicklung zweier sich bewegender und diffundierender Gaußverteilungen. Dargestellt ist außerdem ein zweidimensionaler Schnitt durch das Gitter, so dass deutlich wird, dass die obere Gaußverteilung das feine Gitter durchquert, während die untere Gaußverteilung auf dem groben Gitter bleibt.

in Gittereinheiten definiert. Im Verlaufe der Simulation bewegt sich somit eine der Verteilungen sowohl auf dem groben als auch auf dem feinen Gitter, während die andere Verteilung auf dem groben Gitter bleibt.

Abbildung 5.1 zeigt die zeitliche Entwicklung beider Gaußverteilungen in einer Schnittebene bei $z/L = 20$. Es wird deutlich, dass der Übergang von einem Gitter zum nächsten keinen negativen Einfluss auf die Entwicklung der Gaußverteilung hat. Weiterhin liefert das KBC-Modell im Zusammenhang mit dem LB/AD-Modell das erwartete Verhalten. Erwähnenswert ist außerdem, dass hier kein zusätzlicher Korrekturterm nach Lätt (2007) oder Chopard et al. (2009) eingeführt wurde. Nach Flekkøy (1993) ist ein solcher Korrekturterm nicht zwangsläufig notwendig, solange die Diffusionskonstante D_0 klein bleibt. Dies deckt sich auch mit den Beobachtungen aus der hier vorgestellten Simulation.

5.2 Sedimenttransport im Umfeld eines liegenden Zylinders

Die Kopplung des dreidimensionalen LB/AD-Modells mit der Gitterverfeinerung und dem KBC-Kollisionsmodell erlaubt eine numerisch stabile Simulation des Sedimenttransports, welche an die Strömungssimulation des liegenden Zylinders gekoppelt werden kann. Dabei werden das Sediment und die Strömung zunächst getrennt voneinander simuliert und nach jedem Iterationsschritt die

relevanten Informationen zwischen den jeweiligen Simulationen ausgetauscht. Die Größe φ , welche mittels des LB/AD-Modells berechnet wird, kann als Konzentration oder Partikeldichte angesehen werden und wird im Rahmen der folgenden Simulation auf einen eher willkürlichen Wert normiert. Die Grundgedanken der Sedimenttransportprozesse, insbesondere der Erosion und der Anlagerung des Sediments am Boden, sowie die eigentliche Kopplung zwischen Sediment und Fluid sind in der Implementierung sehr stark an Parmigiani et al. (2013) angelehnt. Dennoch sollen sie im Folgenden kurz beschrieben werden, bevor die Ergebnisse der Simulation präsentiert werden.

5.2.1 Erosion und Sedimentation

Ziel der Simulation des Sedimenttransports ist eine realistische Darstellung der Erosion und Sedimentation im Umfeld des liegenden Zylinders. Neben dem Transport des Sediments müssen daher auch Regeln für die jeweiligen Prozesse definiert werden.

Im Wesentlichen beruhen beide Prozesse auf der Bestimmung der Wandschubspannung τ_w und einem anschließenden Vergleich mit dem in Kapitel 4.3.4 vorgestellten kritischen Shields-Parameter Sh_c . Der Vektor der Wandschubspannung lässt sich gemäß Stahl et al. (2010) während der Simulation lokal aus dem Spannungstensor $\sigma_{\alpha\beta}$ und der Wandnormalen \vec{n} berechnen:

$$\tau_{w,\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} n_\beta - (n_\beta \sigma_{\gamma\beta} n_\gamma) n_\alpha \quad (5.15)$$

Die Wandschubspannung τ_w berechnet sich dann anschließend über die Norm des resultierenden Vektors. Der Spannungstensor σ wird dabei über Gleichung 2.101 bestimmt und benötigt daher keine Finite-Differenzen-Methode zur Berechnung der Geschwindigkeitsgradienten. Zur Berechnung der Wandnormalen wird die gewichtete Methode nach Matyka et al. (2013) herangezogen. Dabei werden die Vektoren, welche auf die jeweiligen Fluidnachbarn der betrachteten Zelle zeigen ($\vec{c}_i, i \in \bar{D}$), entsprechend des jeweiligen Abstandes von der Wand gewichtet:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sum_{i \in \bar{D}} w_i} \sum_{i \in \bar{D}} w_i \vec{c}_i \quad (5.16)$$

Dabei sind $w_i = (1 + \Delta_i)^p$ die jeweiligen Gewichte, wobei Δ_i der jeweilige Abstand der betrachteten Zelle zur Wand ist und der Exponent p bestimmt, wie stark die Gewichtung erfolgen soll. Im Folgenden wird $p = 0,5$ gesetzt.

Falls nun die mittels Gleichung 5.15 bestimmte Wandschubspannung einer Zelle am Boden den kritischen Wert gemäß des Shields-Parameters Sh_c übertreffen sollte, wird sie zunächst „markiert“.

Bleibt sie über eine vorher festgelegte Zeit T_e weiterhin markiert, dann findet eine Erosion statt. Dazu wird diejenige Wandzelle, die in (negativer) Richtung der Normalen als erstes angetroffen wird, zu einer Fluidzelle. Sie wird für die Strömungssimulation mit der Fluidichte von $\rho_0 = 1$ und einer Geschwindigkeit von $\vec{u} = (0,0,0)^T$ initialisiert. Für die Simulation des Sedimenttransports wird die Zelle dagegen mit einer Partikeldichte von $\varphi = 4$ initialisiert, wobei dieser Wert, wie bereits erwähnt, willkürlich definiert wurde und nicht physikalisch motiviert ist.

Eine Anlagerung von Sediment findet dagegen statt, wenn die Wandschubspannung größer ist als der kritische Wert und außerdem die Partikeldichte der Zelle einen Grenzwert φ_c überschreitet. Die Zelle wird dann analog zur Erosion wieder entsprechend „markiert“. Bleibt sie dies über eine festgelegte Zeit T_s , wird die Fluidzelle schließlich zur Wandzelle.

Die Prozesse der Erosion und Sedimentation können somit über die drei Parameter φ_c , T_e und T_s gesteuert werden. Für die folgende Simulation wird der Grenzwert der Partikeldichte auf $\varphi_c = 4$ festgelegt. Die Tatsache, dass die Zeiten für die Erosion T_e und Sedimentation T_s jeweils voneinander und von den Zeiten des Sedimenttransportes losgelöst festgelegt werden können, ist durchaus von großer Bedeutung. Dadurch könnten die unterschiedlichen physikalischen Prozesse entsprechend ihrer jeweiligen Zeitskalen angepasst werden. Eine physikalische Anpassung fand im Rahmen der hier vorgestellten Arbeit jedoch zunächst nicht statt. Die Zeiten wurden stattdessen in Anlehnung an Parmigiani et al. (2013) auf $T_e = T_s = 10\Delta t_c$ festgelegt, sodass jeder Erosions- oder Sedimentationsprozess jeweils 10 Iterationen auf dem groben Gitter benötigt.

Für die nachfolgende Simulation fanden noch einige weitere Vereinfachungen statt. So müsste der kritische Shields-Parameter Sh_c eigentlich in jeder Zelle auf Basis der Wandnormalen neu berechnet werden, da sich dieser gemäß Diken et al. (2013) verändert, wenn der Boden geneigt ist. Weiterhin wurde noch keine Hangabrutschung implementiert und auch kein Bodenfrachttransport. Die Hangabrutschung wird besonders dann wichtig, wenn sich steile Kolkgräben oder entsprechend hohe Sandhügel ausbilden, während der Bodenfrachttransport lokale Verschiebungen des Bodens berücksichtigt, die schon auftreten können, bevor das Sediment in Suspension übergeht.

Im Rahmen der hier vorgestellten Arbeit soll jedoch erst einmal gezeigt werden, dass eine Simulation des Sedimenttransports bei hohen Reynoldszahlen unter Einbindung der dreidimensionalen Gitterverfeinerung und des KBC-Kollisionsmodells überhaupt möglich ist. Daher wurde das Modell zunächst auf die nötigsten Prozesse, nämlich auf die Erosion und Sedimentation, reduziert und der kritische Shields-Parameter als räumlich und zeitlich konstant angenommen. Eine Implementierung weiterer physikalischer Prozesse, eines räumlich variablen kritischen Shields-Parameters sowie einer physikalischen Definition der Parameter φ_c , T_e und T_s wäre dennoch durchaus denkbar

und für zukünftige Arbeiten auch empfehlenswert.

5.2.2 Kopplung des Fluids an das Sediment

Die Strömungssimulation wird über die Geschwindigkeit an die Simulation des Sedimenttransports gekoppelt. Dazu wird zunächst auf jeder Verfeinerungsstufe und für jede Iteration der Strömungssimulation auch eine Iteration des Sedimenttransports durchgeführt. Nach jeder solchen Iteration wird dann die in der Strömungssimulation berechnete Geschwindigkeit als Advektionsgeschwindigkeit auf die Sedimenttransportsimulation übertragen. Die Sedimentpartikel werden aber neben der Strömungsgeschwindigkeit \vec{u} auch von der Gewichtskraft beeinflusst. Diese führt zu einer Sinkgeschwindigkeit w_s der Partikel, die bei einer niedrigen Konzentration der Partikel im Wasser gemäß Soulsby (1997) durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$w_s = \frac{\nu}{d_K} \left[\sqrt{10,36^2 + 1,049d_*^3} - 10,36 \right] \quad (5.17)$$

wobei d_* erneut der dimensionslose Korndurchmesser nach Gleichung 4.3 ist. Für das Sediment, welches in dem in Kapitel 4.1.2 beschriebenen Wasserkanal verwendet wurde, ergibt sich eine Sinkgeschwindigkeit von $w_s \approx 2,5$ cm/s. Die Advektionsgeschwindigkeit der Partikel \vec{u}_s ist somit eine Kombination aus der Strömungs- und Sinkgeschwindigkeit:

$$\vec{u}_s = \vec{u} + w_s \vec{e}_z \quad (5.18)$$

wobei \vec{e}_z der in z -Richtung orientierte Einheitsvektor ist.

Aufgrund der geringen Partikeldichte im Wasser wird auf eine Rückkopplung des Sediments auf das Fluid, beispielsweise durch eine entsprechende Veränderung der Viskosität, verzichtet. Dies ließe sich jedoch für entsprechende Fälle problemlos ergänzen.

Weiterhin muss aber auch eine geeignete Diffusion der Sedimentpartikel definiert werden. Diese kann über die Schmidt-Zahl Sc bestimmt werden, die das Verhältnis des diffusiven Impulstransports zum diffusiven Stofftransport beschreibt:

$$Sc = \frac{\nu}{D_0} \quad (5.19)$$

Für die folgende Simulation wird diese in erster Näherung auf $Sc = 1$ festgelegt, sodass die Diffusion der Sedimentpartikel an die Viskosität der Strömung angepasst wird und damit die Relaxationszeiten beider Simulationen identisch sind.

5.2.3 Randbedingungen

Zur Simulation des Sedimenttransports im Umfeld eines liegenden Zylinders werden noch geeignete Randbedingungen für das LB/AD-Modell benötigt. Während die *no-slip* und *free-slip* Randbedingungen weiterhin über das *bounce-back* bzw. über die *specular reflection* realisiert werden können, wird für den Ein- und Auslass eine geeignete Dirichlet-Randbedingung definiert. Hierfür werden zunächst die gewünschten Werte der Partikeldichte φ vorgegeben. Am Einlass beträgt diese für die folgende Simulation $\varphi = 0$, da einströmendes Sediment aufgrund der Sinkgeschwindigkeit verhältnismäßig schnell zu Boden sinken und sich anhäufen würde. Stattdessen soll jedoch nur das Sediment in der Strömung vorhanden sein, das aufgrund der Erosion in Suspension übergeht. Am Auslass wird dagegen die Partikeldichte aus den benachbarten Fluidzellen übernommen, um somit ein ungehindertes Ausströmen der Dichte zu ermöglichen. Mit den Zielwerten der Partikeldichte φ und der vorgegebenen Advektionsgeschwindigkeit \vec{u}_s können die fehlenden Verteilungsfunktionen an den Rändern ($g_i, i \in \bar{D}$) nach Zhang et al. (2012) auf der Grundlage von Ginzburg (2005b) folgendermaßen bestimmt werden:

$$g_i(\vec{x}, t+1) = -g_{\bar{i}}(\vec{x}, t) + 2t_i\varphi \left[1 + \frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u}_s)^2}{2c_s^4} - \frac{(\vec{u}_s \cdot \vec{u}_s)^2}{2c_s^2} \right] \quad (5.20)$$

wobei $\vec{c}_{\bar{i}} = -\vec{c}_i$ ist.

5.2.4 Änderungen am KBC-Modell für das D3Q7-Gitter

Im Rahmen einiger Voruntersuchungen stellte sich heraus, dass das in Kapitel 5.1.2 vorgestellte KBC-Modell für das D3Q7-Gitter nicht ausreicht, um die numerische Stabilität der Sedimenttransportsimulation zu garantieren, wenn die Advektionsgeschwindigkeit aus einer Strömungssimulation übernommen wird. Es konnten jedoch zufriedenstellende Ergebnisse erreicht werden, wenn die Aufteilung der Verteilungsfunktionen auf Grundlage des D3Q27-Gitters (Glg. 3.39) erfolgte, wobei nur die Momente berücksichtigt wurden, die für das D3Q7-Gitter von Bedeutung sind (M_{000} , M_{100} , M_{010} , M_{001} , M_{200} , M_{020} , M_{002}). Dadurch ergibt sich folgende Darstellung für den „Scherspan-

nungsteil“ s_i :

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } c_{ix} = c_{iy} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{6} (2M_{200} - M_{020} - M_{002}), & \text{falls } c_{ix} \neq 0, c_{iy} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{6} (2M_{020} - M_{200} - M_{002}), & \text{falls } c_{iy} \neq 0, c_{ix} = c_{iz} = 0 \\ \frac{1}{6} (2M_{002} - M_{200} - M_{020}), & \text{falls } c_{iz} \neq 0, c_{ix} = c_{iy} = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Der Anteil höherer Ordnung h_i ergibt sich dagegen direkt über die Verteilungsfunktionen g_i und die „Scherspannungsteile“ s_i , da für die Berechnung des entropischen Stabilisators γ gemäß Gleichung 2.139 nur $\Delta h_i = h_i - h_i^{eq}$ benötigt wird und dieses über $\Delta h_i = \Delta g_i - \Delta s_i$ bestimmt werden kann.

5.2.5 Simulationsbedingungen

Die Simulation, welche die Umströmung eines liegenden endlichen Zylinders mit einer Modellierung des Sedimenttransports verbinden soll, wird an die Simulation des liegenden Zylinders unter den Bedingungen des Wasserkanals angelehnt. Um eine veränderliche Kontur des Bodens zu ermöglichen, muss der Simulationsbereich in negative z -Richtung jedoch auf $z/D = -0,2$ erweitert werden. Außerdem muss der komplette Boden innerhalb des feinsten Gitters liegen. Um die daraus resultierende hohe Zellenanzahl dennoch etwas zu beschränken, wurde die Länge des Simulationsbereichs in x -Richtung stark gekürzt. Die daraus resultierenden Bereiche der jeweiligen Verfeinerungsstufen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Die Reynoldszahl wird auf $Re = 1,7 \times 10^4$ festgelegt und als Einlassprofil wird wieder das vermessene Profil aus Kapitel 4.3.1 verwendet. Allerdings wird die mittlere Anströmgeschwindigkeit $\vec{u} = (U_\infty, 0, 0)^T$ mit $U_\infty = 0,05$ in Gittereinheiten festgelegt, um eine etwas schnellere Laufzeit der

Tabelle 5.1: Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines liegenden Zylinders unter zusätzlicher Einbindung eines Sedimenttransportmodells.

N	x/D	y/D	z/D
10	-5 ... +8	-6 ... +6	-0,2 ... +2,24
20	-5 ... +8	-6 ... +6	-0,2 ... +2
40	-5 ... +8	-6 ... +6	0,2 ... +0,2
40	-2 ... +4	-2,5 ... +2,5	+0,2 ... +1,5
80	-5 ... +8	-6 ... +6	-0,2 ... +0,1
80	-1 ... +0,7	-1,8 ... +1,8	+0,1 ... +1,2

Simulation zu ermöglichen.

Nach einer verhältnismäßig kurzen Anlaufzeit der Simulation von 4 000 Iterationen auf dem groben Gitter, wird mit der Modellierung des Sedimenttransports auf Grundlage der simulierten Strömung begonnen. Gemäß des berechneten kritischen Shields-Parameters aus Kapitel 4.3.4 von $Sh_c = 0,054$ und der daraus resultierenden kritischen Wandschubspannung von $\tau_{w,c} = 0,17 \text{ N/m}^2$ ergibt sich in Gittereinheiten eine kritische Wandschubspannung von $\tau_{w,c} = 4,97 \times 10^{-6}$.

5.2.6 Ergebnisse

Abbildung 5.2 zeigt die zeitliche Entwicklung des Sandbodens nach der Aktivierung des Sedimenttransports. Innerhalb kürzester Zeit geht Sediment im unmittelbaren Umfeld des Zylinders in Suspension über. Es bilden sich anschließend vor allem an der Vorderseite der beiden Zylinderenden sehr schnell Kolkgräben aus, welche immer weiter von der Strömung ausgegraben werden. Nach $t = 2,42 \text{ s}$ ist die Erosion an den Zylinderenden bereits so weit fortgeschritten, dass der Kolkgraben die Grenze des definierten Simulationsbereiches erreicht. An dieser Stelle muss daher die Simulation abgebrochen werden. Qualitativ deckt sich das simulierte Ergebnis sehr gut mit den anfänglichen Beobachtungen der Wasserkanalexperimente (vgl. Abbildung 5.3), wobei der zeitliche Ablauf der Erosion noch zu schnell erfolgt. Dies ließe sich allerdings mit einer geeigneten Festlegung der Zeit T_e für die Erosion in zukünftigen Arbeiten entsprechend verbessern.

Im Rahmen der Simulation findet keine Anlagerung von Sediment statt. In den Wasserkanalexperimenten zeigte sich jedoch, dass im Bereich des Rezirkulationsgebietes des Zylinders vor allem größere Partikel angelagert wurden. Diese haben gemäß Gleichung 5.17 eine höhere Sinkgeschwindigkeit, welche dazu führt, dass die Strömung nicht mehr in der Lage ist, sie aus dem Rezirkulationsgebiet hinaus zu tragen. Um dies in der Simulation nachzubilden, wurde eine erneute Simulation des liegenden Zylinders aufgesetzt, bei der die Sinkgeschwindigkeit der Partikel auf $w_s = 0,2U_\infty = 5,86 \text{ cm/s}$ festgelegt wurde. Dies entspricht nach Gleichung 5.17 einem Korndurchmesser von $d_K \approx 0,4 \text{ mm}$.

In Abbildung 5.4 ist die zeitliche Entwicklung des Sandbodens unter den veränderten Bedingungen dargestellt. Auch hier bildet sich innerhalb kürzester Zeit wieder an den Zylinderenden jeweils ein Kolkgraben aus, der sehr schnell immer tiefer wird. Nach ca. $t = 1 \text{ s}$ lagert sich aber nun auch im Nachlauf des Zylinders Sediment an. Vor allem im Bereich des Rezirkulationsgebietes wird das in Suspension vorhandene Sediment von der Strömung nicht weggetragen, bevor es aufgrund der nun höheren Sinkgeschwindigkeit zu Boden fallen und sich dort anlagern kann. Nach bereits $t = 1,25 \text{ s}$ muss die Simulation jedoch wieder abgebrochen werden, da der Kolkgraben an

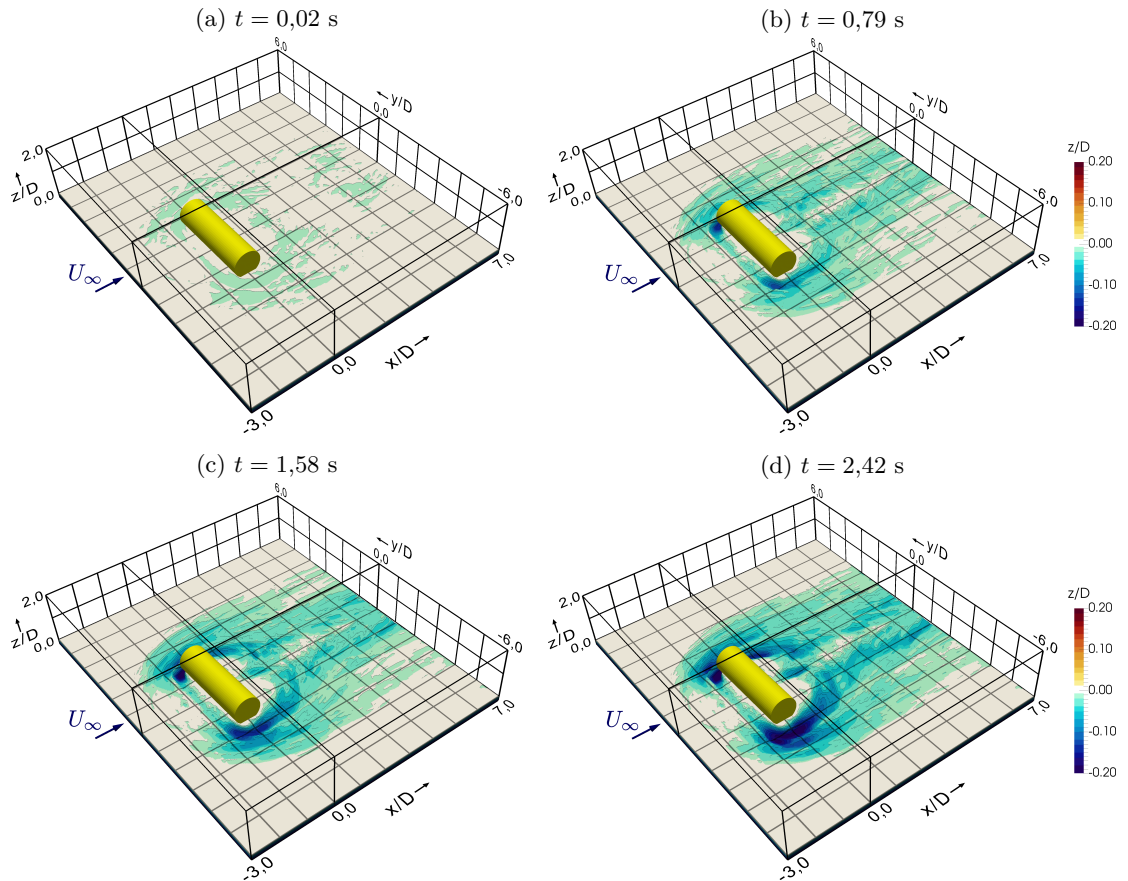


Abbildung 5.2: Zeitliche Entwicklung der Erosion und Sedimentation im Umfeld eines liegenden Zylinders bei einer Partikelsinkgeschwindigkeit von $w_s = 2,50$ cm/s.



Abbildung 5.3: Im Wasserkanal ermittelte charakteristische Versandungsstrukturen im Umfeld eines liegenden Zylinders.

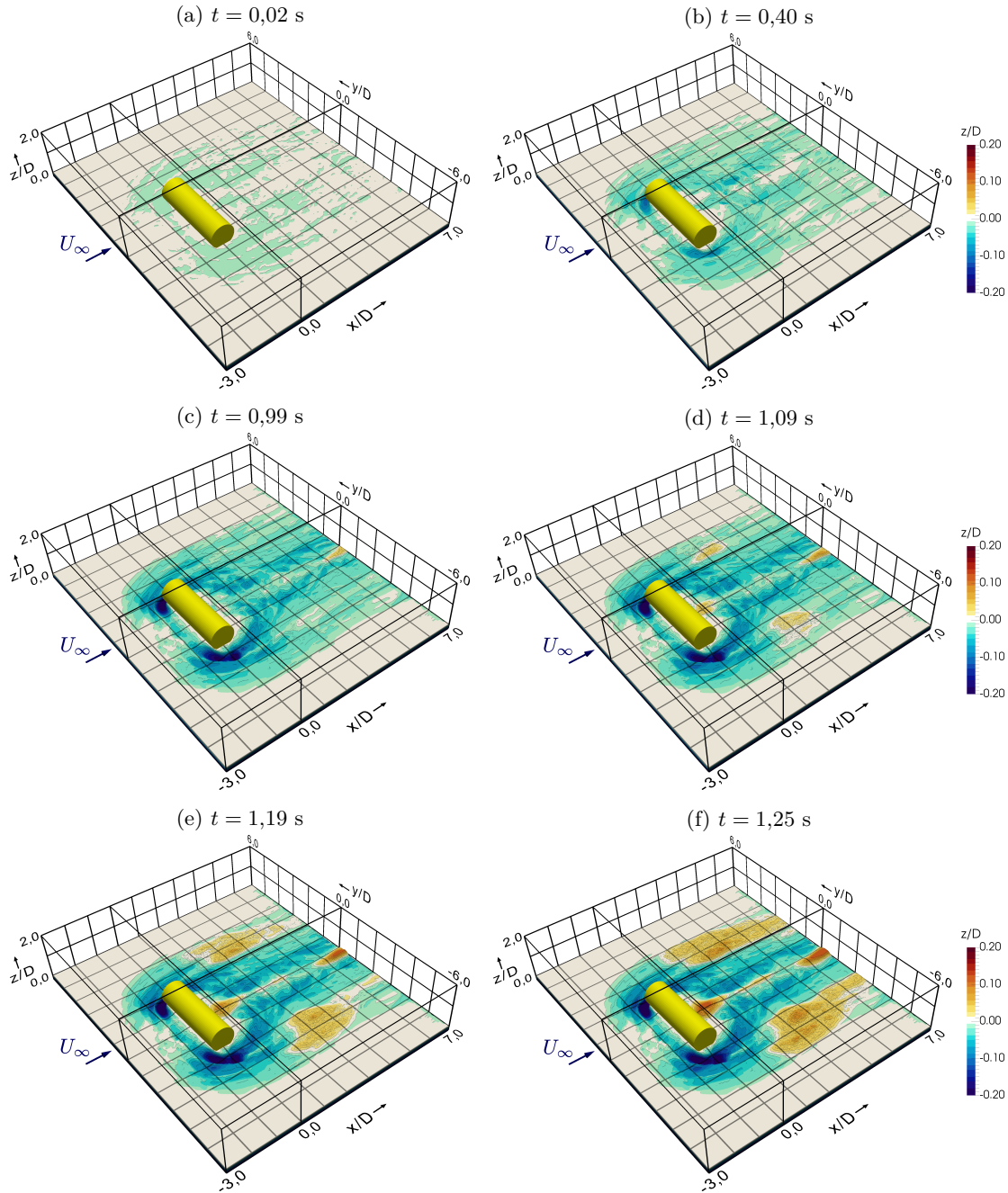


Abbildung 5.4: Zeitliche Entwicklung der Erosion und Sedimentation im Umfeld eines liegenden Zylinders bei einer Partikelsinkgeschwindigkeit von $w_s = 5,86$ cm/s.

den Zylinderenden den Boden des Simulationsbereiches erreicht hat. Aber auch im Nachlauf hat sich zu diesem Zeitpunkt bereits so viel Sand angehäuft, dass der Boden dort den Übergang zum nächstgrößeren Gitter erreicht.

Die vorgestellten Simulationen zeigen also, dass das Modell sowohl die Erosion als auch die Sedimentation im Umfeld eines liegenden Zylinders abbilden kann. Dabei ist jedoch die Anlagerung von Sediment im Nachlauf des Zylinders offensichtlich nur möglich, wenn größere Sinkgeschwindigkeiten angegeben werden. Dies deckt sich wiederum mit den Experimenten im Wasserkanal, bei denen hauptsächlich größere Partikel im Rezirkulationsgebiet des Zylinders angelagert wurden. Dies macht aber auch deutlich, dass eine Betrachtung des Sediments allein auf der Grundlage des mittleren Korndurchmessers nicht zwangsläufig ausreicht, um alle Versandungsprozesse in der Simulation abbilden zu können. Stattdessen muss das gesamte Spektrum des verwendeten Sediments betrachtet werden, was allerdings die korrekte Wahl des kritischen Shields-Parameters Sh_c und der Partikelsinkgeschwindigkeit w_s erheblich erschwert.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das LB/AD-Modell gut geeignet ist, um die Erosion und Anlagerung von Sediment im Umfeld eines liegenden Zylinders zu simulieren. Obwohl das verwendete Modell stark vereinfacht ist, ist es dennoch in der Lage, qualitativ die Beobachtungen des Wasserkanalexperiments nachzustellen, sofern das Spektrum der verwendeten Korndurchmesser berücksichtigt wird. Für die weitere Entwicklung des Modells wären dennoch einige Implementierungen empfehlenswert, um die Realität besser abbilden zu können. Zum einen wäre die Implementierung einer Grenzschichtmodellierung von Vorteil, um die Bestimmung der Wandschubspannung am Boden zu verbessern. Wie bereits in Kapitel 3.3.2 gezeigt wurde, wird die Geschwindigkeit und damit auch der resultierende Geschwindigkeitsgradient und die Wandschubspannung am Boden bei einer zu groben Auflösung tendenziell unterschätzt. Bei der Simulation des Sedimenttransports wird daher vermutlich etwas weniger Sediment erodiert, als dies tatsächlich der Fall sein dürfte. Zum anderen wäre es auch hilfreich, wenn der Boden nicht zwangsläufig auf das feinste Gitter beschränkt sein müsste. Diese Bedingung ist durch die bisherige Implementierung der beliebig geformten Objekte im Zusammenhang mit der Gitterverfeinerung gegeben. Liegt ein beliebiges Objekt zu einem Zeitpunkt auf zwei Gittern unterschiedlicher Verfeinerungsstufen, so kreuzt dessen Oberfläche irgendwo auch den Übergang zwischen den Gittern. Die Behandlung dieses Übergangs unter einer zusätzlichen Berücksichtigung einer Objektwand ist keineswegs trivial und bedarf daher im Rahmen zukünftiger Arbeiten weiterer Überlegungen. Weiterhin könnte das eigentliche Sedimenttransportmodell mit der bereits erwähnten physikalischen Bestimmung der Modellparameter verbessert werden, wobei diese auch das vorhandene Spektrum der Korn-

durchmesser möglichst gut abbilden sollten. Zusätzlich wäre die Einbindung der Hangabrutschung und des Bodenfrachttransports sowie eines auf Grundlage der jeweiligen Hangneigung berechneten kritischen Shields-Parameters empfehlenswert. Schließlich wäre für die komplette Simulation der Versandung eines endlichen Zylinders auch die Bewegung des Objektes aufgrund der Veränderung des Bodens von Bedeutung. Dazu müssten die auf das Objekt wirkenden Kräfte nicht nur über die komplette Oberfläche des Objekts gemittelt vorliegen, sondern lokal berechnet werden, um daraus die Translation und Rotation des Objektes zu erhalten und diese entsprechend in der Simulation umzusetzen.

Durch die Einbindung der erwähnten Ergänzungen wäre es möglich, den kompletten Versandungsprozess eines beliebigen Objektes mit der Lattice Boltzmann Methode zu simulieren. Die in diesem Kapitel vorgestellten Ansätze können in diesem Zusammenhang als Anreiz und Machbarkeitsstudie angesehen werden, die verdeutlichen sollen, dass eine solche Simulation durchaus in akzeptabler Laufzeit durchgeführt werden könnte.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine Simulationsumgebung entwickelt, mit der die Umströmung von Objekten am Meeresboden mit der Lattice Boltzmann Methode abgebildet werden kann. Es wurde gezeigt, dass das Modell in der Lage ist, die dreidimensionalen Strömungsstrukturen im Umfeld eines am Boden liegenden endlichen Zylinders zu simulieren. Ferner wurden erste Ansätze zur Simulation des Sedimenttransports mit der Lattice Boltzmann Methode umgesetzt, um die Versandungsprozesse im Umfeld von Objekten am Meeresboden nachbilden zu können.

In Kapitel 2 wurde zunächst ausführlich auf die Theorie der Lattice Boltzmann Methode eingegangen. Es wurde gezeigt, dass die (diskretisierte) Boltzmann-Gleichung unter bestimmten Voraussetzungen zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen verwendet werden kann. Außerdem wurden verschiedene Ansätze zur Behandlung der jeweiligen Randbedingungen vorgestellt, wobei festgehalten wurde, dass nicht alle Ansätze für Simulationen einer Kanalströmung geeignet sind. So stellte sich beispielsweise heraus, dass bei *free-slip* Rändern die Verwendung der *specular reflection* eine erhebliche Verbesserung der numerischen Stabilität mit sich bringt. Am Auslass wiederum führten einige Ansätze zu starken Reflexionen in der Simulation. Die Verwendung der Methode nach Chikatamarla et al. (2006), zusammen mit der *sponge zone*, erwies sich in dem Zusammenhang als äußerst praktikabel, da dadurch sowohl Reflexionen als auch numerische Instabilitäten vermieden werden konnten. Zum Abschluss von Kapitel 2 wurden schließlich einige verschiedene Kollisionsmodelle miteinander verglichen, wobei der Fokus auf die numerische Stabilität bei hohen Reynoldszahlen gelegt wurde. Hierbei erwies sich das KBC-Modell nach Karlin et al. (2014) als besonders vielversprechend, da es selbst bei sehr hohen Reynoldszahlen und einer verhältnismäßig geringen Auflösung numerisch stabile Ergebnisse liefert, ohne dass vorher irgendwelche Modellparameter festgelegt werden müssen.

Die jeweiligen Implementierungen, die nötig waren, um die gewünschte Simulationsumgebung mit dem *open-source* Code Palabos zu entwickeln, wurden in Kapitel 3 beschrieben und anhand

ausgewählter Testfälle validiert. Dabei wurde zunächst eine geeignete Behandlung der Ränder von beliebig geformten Objektgeometrien eingeführt. Durch die Kombination der interpolierten *bounce-back* Methode nach Bouzidi et al. (2001) und dem TMS-Schritt nach Chikatamarla & Karlin (2013) wurde ein Modell implementiert, welches numerische Stabilität garantiert und gleichzeitig eine korrekte Bestimmung der Ablösung und der Kräfte an einem beliebigen Objekt ermöglicht. Weiterhin wurde die Möglichkeit einer lokalen dreidimensionalen Gitterverfeinerung implementiert. Diese beruht auf dem Prinzip von Lagrava et al. (2012) und wurde unter Berücksichtigung einiger Besonderheiten im dreidimensionalen Fall entsprechend umgesetzt. Bei der Implementierung wurde dabei besonders darauf geachtet, dass eventuell auftretende Spezialfälle erst zur Laufzeit erkannt und behandelt werden, sodass ein Nutzer ohne großen Aufwand beliebige Kombinationen von Verfeinerungsstufen festlegen kann. Schließlich wurde noch das KBC-Kollisionsmodell für D3Q27-Gitter implementiert. Anhand eines bereits ausführlich vermessenen und mittels LES simulierten Beispiels eines stehenden Zylinders konnten alle erwähnten Implementierungen in einer Simulation kombiniert werden. Die Ergebnisse der resultierenden Simulation mit der Lattice Boltzmann Methode stimmten sehr gut mit den bisherigen Mess- und Simulationsdaten überein.

Mit den neuen Implementierungen und der somit gewonnenen Simulationsumgebung wurde in Kapitel 4 ausführlich auf die Umströmung eines endlichen liegenden Zylinders im Reynoldszahlbereich des Meeresbodens von $10^4 < Re < 10^5$ eingegangen. Auch hier stellte sich heraus, dass die Lattice Boltzmann Methode die Messdaten gut reproduzieren kann. Allerdings wurde auch deutlich, dass gerade bei höheren Reynoldszahlen ($Re \approx 1,5 \times 10^5$) die Berücksichtigung der turbulenten Anströmung des Objektes sowie eine möglichst genaue Abbildung der Grenzschicht von Bedeutung ist, wenn eine quantitativ genaue Reproduktion der Messdaten erwünscht wird. Die Simulationen bestätigten aber auch, dass die Strömungsstrukturen im Umfeld eines liegenden Zylinders in dem betrachteten Reynoldszahlbereich weitestgehend unabhängig von der Reynoldszahl waren. Dadurch war es möglich, die charakteristischen Strömungsstrukturen aus der Simulation bei einer niedrigeren Reynoldszahl von $Re = 1,7 \times 10^4$ zu gewinnen, welche somit auch direkt auf die Bedingungen des Meeresbodens übertragen werden können. Aus den gemittelten Geschwindigkeiten ergab sich in diesem Zusammenhang, dass die Umströmung des Zylinders stark von einem im Vorlauf ausgebildeten Hufeisenwirbel geprägt wird. Im Nachlauf des Zylinders kommen die Ausläufer dieses Hufeisenwirbels mit der am Zylindermantel abgelösten Strömung zusammen und bilden einen Bogenwirbel, welcher ausschlaggebend für die Form und Ausdehnung des Rezirkulationsgebietes hinter dem Zylinder ist.

In Kapitel 5 wurde schließlich ein vereinfachtes Modell zur Simulation des Sedimenttransports

eingeführt. Dazu wurde die Lattice Boltzmann Methode zur Lösung der Advektions-Diffusions-Gleichung herangezogen und das Sediment als kontinuierliche Phase in die Strömungssimulation integriert. Anhand eines räumlich und zeitlich konstanten kritischen Shields-Parameters und der Berücksichtigung von Erosion und Sedimentation wurden erste Simulationen des Sedimenttransports im Umfeld eines liegenden Zylinders ermöglicht. Es zeigte sich, dass der Ansatz gut geeignet ist, um die erwartete Auskolkung an den Zylinderenden und unmittelbar vor dem Zylinder abzubilden. Es wurde aber auch deutlich, dass eine Anlagerung von Sediment im Nachlauf des Zylinders nur möglich ist, wenn größere Sedimentpartikel betrachtet werden.

Im Rahmen zukünftiger Arbeiten wären einige Optimierungen empfehlenswert. Für die Simulationen bei höheren Reynoldszahlen wäre beispielsweise die Implementierung eines turbulenten Einlasses sinnvoll. Dadurch könnte die Einlaufflänge der Simulation begrenzt und dennoch eine turbulente Anströmung des Objektes ermöglicht werden. Weiterhin könnte eine geeignete Modellierung der Grenzschicht die benötigte Zellenanzahl erheblich reduzieren, was wiederum zu schnelleren Laufzeiten führen würde. Zur Verbesserung der Simulationen des Sedimenttransportes wären außerdem die Einbindung einer Hangabrutschung und die Berücksichtigung der Veränderung des kritischen Shields-Parameters aufgrund der Hangneigung sinnvoll. Weiterhin sollten Untersuchungen zur realistischeren Abschätzung der Modellparameter durchgeführt werden.

Insgesamt hat die vorliegende Arbeit gezeigt, dass die Lattice Boltzmann Methode hervorragend geeignet ist, um Strömungssimulationen von Objekten am Meeresboden durchzuführen. Dabei können problemlos beliebig geformte Objekte eingebunden werden, ohne dass eine zeitaufwändige Vernetzung erfolgen muss. Gleichzeitig sind Simulationen mit mehreren Millionen Zellen kein Problem und können ähnliche Laufzeiten erzielen wie gängigere Simulationsverfahren mit vergleichsweise wenigen Zellen. Die Methode ist außerdem einfach zu implementieren und bietet somit eine ideale Umgebung um neue Ansätze einzubauen. In diesem Rahmen wurde auch gezeigt, dass die Einbindung von Sedimenttransport mit der Lattice Boltzmann Methode möglich ist. Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass auf Grundlage der hier vorgestellten Arbeit eine komplette Simulation der Umströmung und Versandung von Objekten am Meeresboden mit der Lattice Boltzmann Methode möglich geworden ist, deren Genauigkeit durch die Einbindung der genannten Optimierungen zusätzlich verbessert werden könnte.

Literatur

- AIDUN, C. K. & CLAUSEN, J. R. (2010) Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1), 439–472. doi:10.1146/annurev-fluid-121108-145519.
- ALAM, M. S. (2009) *Lattice Boltzmann Modelling of Two and Three-Dimensional Flow and Scour around Offshore Pipelines*. Dissertation, University of Western Australia.
- BEHREND, M. (2015) *Ermittlung des Geschwindigkeitsprofils einer offenen Gerinneströmung auf verfestigtem Sandboden mittels LDA für numerische Simulationen*. Bachelorarbeit, Universität Rostock.
- BHATNAGAR, P., GROSS, E. & KROOK, M. (1954) A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review*, 94(3), 511–525. doi:10.1103/PhysRev.94.511.
- BOLTZMANN, L. (1970) *Kinetische Theorie II: Irreversible Prozesse, Einführung und Originaltexte*, Kap. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen, 115–225. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden. doi:10.1007/978-3-322-84986-1_3.
- BÖSCH, F., CHIKATAMARLA, S. S. & KARLIN, I. (2015a) Entropic Multi-Relaxation Models for Simulation of Fluid Turbulence. *ESAIM: Proceedings and Surveys*, 52, 1–24. doi:10.1051/proc/201552001.
- BÖSCH, F., CHIKATAMARLA, S. S. & KARLIN, I. V. (2015b) Entropic multirelaxation lattice Boltzmann models for turbulent flows. *Physical Review E*, 92(4), 043309. doi:10.1103/PhysRevE.92.043309.
- BÖTTCHER, C., KNOBLOCH, T., RÜHL, N.-P. ET AL. (2011) Munitionsbelastung der deutschen Meeresgewässer – Bestandsaufnahme und Empfehlungen. www.munition-im-meer.de.
- BÖTTCHER, C., KNOBLOCH, T., STERNHEIM, J. ET AL. (2015) Munitionsbelastung der deutschen Meeresgewässer – Entwicklungen und Fortschritt (Jahr 2015). www.munition-im-meer.de.

- BOUZIDI, M., FIRDAOUSS, M. & LALLEMAND, P. (2001) Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids*, 13(11), 3452–3459. doi:10.1063/1.1399290.
- BREDE, M., ECKELMANN, H. & ROCKWELL, D. (1996) On secondary vortices in the cylinder wake. *Physics of Fluids*, 8(8), 2117. doi:10.1063/1.868986.
- CERCIGNANI, C. (1988) *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Bd. 67 von *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York. doi:10.1007/978-1-4612-1039-9.
- CHAPMAN, S. & COWLING, T. G. (1970) *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge University Press, 3 Aufl.
- CHEN, S. & DOOLEN, G. D. (1998) Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1), 329–364. doi:10.1146/annurev.fluid.30.1.329.
- CHIKATAMARLA, S. S., ANSUMALI, S. & KARLIN, I. V. (2006) Grad’s approximation for missing data in lattice Boltzmann simulations. *Europhysics Letters*, 74(2), 215–221. doi:10.1209/ep1/i2005-10535-x.
- CHIKATAMARLA, S. S. & KARLIN, I. V. (2013) Entropic lattice Boltzmann method for turbulent flow simulations: Boundary conditions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(9), 1925–1930. doi:10.1016/j.physa.2012.12.034.
- CHOPARD, B., FALCONE, J. L. & LATT, J. (2009) The lattice Boltzmann advection-diffusion model revisited. *European Physical Journal: Special Topics*, 171(1), 245–249. doi:10.1140/epjst/e2009-01035-5.
- CORNUBERT, R., D’HUMIÈRES, D. & LEVERMORE, D. (1991) A Knudsen layer theory for lattice gases. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 47(1-2), 241–259. doi:10.1016/0167-2789(91)90295-K.
- D’HUMIÈRES, D. (1992) Generalized Lattice-Boltzmann Equations. In *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*, Bd. 159, 450–458. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington DC. doi:10.2514/5.9781600866319.0450.0458.
- D’HUMIÈRES, D., GINZBURG, I., KRAFCZYK, M., LALLEMAND, P. & LUO, L.-S. (2002) Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions of*

- the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 360(1792), 437–451. doi:10.1098/rsta.2001.0955.
- DIXEN, M., SUMER, B. M. & FREDSE, J. (2013) Numerical and experimental investigation of flow and scour around a half-buried sphere. *Coastal Engineering*, 73(2005), 84–105. doi:10.1016/j.coastaleng.2012.10.006.
- DONG, Y. H. & SAGAUT, P. (2008) A study of time correlations in lattice Boltzmann-based large-eddy simulation of isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 20(3). doi:10.1063/1.2842381.
- DORSCHNER, B., BÖSCH, F., CHIKATAMARLA, S., BOULOUCHOS, K. & KARLIN, I. (2016) Entropic Multi-Relaxation Time Lattice Boltzmann Model for Complex Flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 801, 623–651. doi:10.1017/jfm.2016.448.
- DORSCHNER, B., CHIKATAMARLA, S., BÖSCH, F. & KARLIN, I. (2015) Grad’s approximation for moving and stationary walls in entropic lattice Boltzmann simulations. *Journal of Computational Physics*, 295, 340–354. doi:10.1016/j.jcp.2015.04.017.
- DUPIN, M. M., HALLIDAY, I., CARE, C. M., ALBOUL, L. & MUNN, L. L. (2007) Modeling the flow of dense suspensions of deformable particles in three dimensions. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 75(6), 1–17. doi:10.1103/PhysRevE.75.066707.
- DUPUIS, A. (2002) *From a lattice Boltzmann model to a parallel and reusable implementation of a virtual river*. Dissertation, Univ. Genève.
- DUPUIS, A. & CHOPARD, B. (2002) Lattice Gas Modeling of Scour Formation under Submarine Pipelines. *Journal of Computational Physics*, 178(1), 161–174. doi:10.1006/jcph.2002.7025.
- DUPUIS, A. & CHOPARD, B. (2003) Theory and applications of an alternative lattice Boltzmann grid refinement algorithm. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 67(6 Pt 2), 066707. doi:10.1103/PhysRevE.67.066707.
- FENG, Z. G. & MICHAELIDES, E. E. (2004) The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 195(2), 602–628. doi:10.1016/j.jcp.2003.10.013.
- FENG, Z. G. & MICHAELIDES, E. E. (2005) Proteus: A direct forcing method in the simulations of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 202(1), 20–51. doi:10.1016/j.jcp.2004.06.020.

- FILIPPOVA, O. & HÄNEL, D. (1997) Lattice-Boltzmann simulation of gas-particle flow in filters. *Computers & Fluids*, 26(7), 697–712. doi:10.1016/S0045-7930(97)00009-1.
- FILIPPOVA, O. & HÄNEL, D. (1998) Boundary-Fitting and Local Grid Refinement for Lattice-BGK Models. *International Journal of Modern Physics C*, 09(08), 1271–1279. doi:10.1142/S012918319800114X.
- FLEKKØY, E. G. (1993) Lattice Bhatnagar-Gross-Krook models for miscible fluids. *Physical Review E*, 47(6), 4247–4257. doi:10.1103/PhysRevE.47.4247.
- FREDERICH, O. (2010) *Numerische Simulation und Analyse turbulenter Strömungen am Beispiel der Umströmung eines Zylinderstumpfes mit Endscheibe*. Dissertation, Technische Universität Berlin.
- FREDERICH, O., SCOUTEN, J., LUCHTENBURG, D. M. & THIELE, F. (2009) Numerical Simulation and Analysis of the Flow Around a Wall-Mounted Finite Cylinder. In *Imaging Measurement Methods for Flow Analysis*, Bd. 106, 207–216. doi:10.1007/978-3-642-01106-1_21.
- FREDERICH, O., WASSEN, E. & THIELE, F. (2008) Prediction of the flow around a short wall-mounted finite cylinder using LES and DES. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*, 3(3-4), 231–247.
- FREDERICH, O., WASSEN, E., THIELE, F. ET AL. (2007) Numerical Simulation of the Flow Around a Finite Cylinder with Ground Plate in Comparison to Experimental Measurements. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VI*, Bd. 96, 348–355. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-74460-3_43.
- FREITAS, R. K., HENZE, A., MEINKE, M. & SCHRÖDER, W. (2011) Analysis of Lattice-Boltzmann methods for internal flows. *Computers & Fluids*, 47(1), 115–121. doi:10.1016/j.compfluid.2011.02.019.
- FRISCH, U., HASSLACHER, B. & POMEAU, Y. (1986) Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation. *Physical Review Letters*, 56(14), 1505–1508. doi:10.1103/PhysRevLett.56.1505.
- GEIER, M., SCHÖNHERR, M., PASQUALI, A. & KRAFCZYK, M. (2015) The cumulant lattice Boltzmann equation in three dimensions: Theory and validation. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(4), 507–547. doi:10.1016/j.camwa.2015.05.001.

- GINZBURG, I. (2005a) Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation. *Advances in Water Resources*, 28(11), 1171–1195. doi:10.1016/j.advwatres.2005.03.004.
- GINZBURG, I. (2005b) Generic boundary conditions for lattice Boltzmann models and their application to advection and anisotropic dispersion equations. *Advances in Water Resources*, 28(11), 1196–1216. doi:10.1016/j.advwatres.2005.03.009.
- GORBAN, A. N. & KARLIN, I. V. (2005) *Invariant Manifolds for Physical and Chemical Kinetics*, Bd. 660 von *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-540-31531-5_1.
- GRAD, H. (1949) On the kinetic theory of rarefied gases. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2(4), 331–407. doi:10.1002/cpa.3160020403.
- GUO, J. (2002) Hunter rouse and shields diagram. *Advances in Hydraulic and Water Engineering*, 2, 1096–1098. doi:10.1142/9789812776969_0200.
- GUO, Z., ZHENG, C. & SHI, B. (2002a) An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids*, 14, 2007–2010. doi:10.1063/1.1471914.
- GUO, Z., ZHENG, C. & SHI, B. (2002b) Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 65(4), 046308. doi:10.1103/PhysRevE.65.046308.
- INAMURO, T. (2012) Lattice Boltzmann methods for moving boundary flows. *Fluid Dynamics Research*, 44(2), 024001. doi:10.1088/0169-5983/44/2/024001.
- INAMURO, T., YOSHINO, M. & OGINO, F. (1995) A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Physics of Fluids*, 7(12), 2928. doi:10.1063/1.868766.
- JARRIN, N., BENHAMADOU, S., LAURENCE, D. & PROSSER, R. (2006) A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27(4), 585–593. doi:10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.02.006.
- JENKINS, S. A., INMAN, D. L., RICHARDSON, M. D., WEVER, T. F. & WASYL, J. (2007) Scour and burial mechanics of objects in the nearshore. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 32(1), 78–90. doi:10.1109/JOE.2007.890946.

- JENSCH, M., BREDE, M., LEDER, A., FREDERICH, O. & THIELE, F. (2008) Use of proper orthogonal decomposition to visualize coherent structures from time resolved PIV data. In *14th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal*.
- JENSCH, M., BREDE, M., RICHTER, F. & LEDER, A. (2006) Verwendung des Time-Resolved Stereo-PIV Messsystems zur Ermittlung zeitaufgelöster Geschwindigkeitsfelder im Nachlauf eines Kreiszylinders. In *Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik - 14. Fachtagung der GALA e.V., PTB Braunschweig*, 39.1–39.8.
- JENSCH, M., HÜTTMANN, F., BREDE, M. & LEDER, A. (2009) Optical measurements in the wake of a circular cylinder of finite length at a high reynoldsnumber. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 106, 185–195. doi:10.1007/978-3-642-01106-1_19.
- KARLIN, I. V., BÖSCH, F. & CHIKATAMARLA, S. S. (2014) Gibbs’ principle for the lattice-kinetic theory of fluid dynamics. *Physical Review E*, 90(3), 031302. doi:10.1103/PhysRevE.90.031302.
- KARLIN, I. V., FERRANTE, A. & ÖTTINGER, H. C. (1999) Perfect entropy functions of the Lattice Boltzmann method. *Europhysics Letters (EPL)*, 47(2), 182–188. doi:10.1209/epl/i1999-00370-1.
- KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. (1987) Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177, 133–166. doi:10.1017/S0022112087000892.
- KIM, S. H., PITSCH, H. & BOYD, I. D. (2008) Accuracy of higher-order lattice Boltzmann methods for microscale flows with finite Knudsen numbers. *Journal of Computational Physics*, 227(19), 8655–8671. doi:10.1016/j.jcp.2008.06.012.
- KORNEV, N. & HASSEL, E. (2007) Method of random spots for generation of synthetic inhomogeneous turbulent fields with prescribed autocorrelation functions. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23(1), 35–43. doi:10.1002/cnm.880.
- KORNEV, N., KRÖGER, H. & HASSEL, E. (2007) Synthesis of homogeneous anisotropic turbulent fields with prescribed second-order statistics by the random spots method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(10), 875–877. doi:10.1002/cnm.1009.
- KRAFCZYK, M. (2001) *Gitter-Boltzmann-Methoden: Von der Theorie zur Anwendung*. Habilitationsschrift, TU München.

- LADD, A. J. C. (1993) Short-time motion of colloidal particles: Numerical simulation via a fluctuating lattice-Boltzmann equation. *Physical Review Letters*, 70(9), 1339–1342. doi:10.1103/PhysRevLett.70.1339.
- LADD, A. J. C. (1994) Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation. *Journal of Fluid Mechanics*, 271, 285–309. doi:10.1017/S0022112094001771.
- LAGRAVA, D., MALASPINAS, O., LATT, J. & CHOPARD, B. (2012) Advances in multi-domain lattice Boltzmann grid refinement. *Journal of Computational Physics*, 231(14), 4808–4822. doi:10.1016/j.jcp.2012.03.015.
- LAGRAVA SANDOVAL DE SUCRE, W. D. (2012) *Revisiting grid refinement algorithms for the lattice Boltzmann method*. Dissertation, Univ. Genève.
- LALLEMAND, P. & LUO, L.-S. (2000) Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, 61(6), 6546–6562. doi:10.1103/PhysRevE.61.6546.
- LALLEMAND, P. & LUO, L.-S. (2003) Lattice Boltzmann method for moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 184(2), 406–421. doi:10.1016/S0021-9991(02)00022-0.
- LÄTT, J. (2007) *Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations*. Dissertation, Univ. Genève.
- LATT, J. & CHOPARD, B. (2006) Lattice Boltzmann method with regularized pre-collision distribution functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72(2-6), 165–168. doi:10.1016/j.matcom.2006.05.017.
- LATT, J., CHOPARD, B., MALASPINAS, O., DEVILLE, M. & MICHLER, A. (2008) Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 77(5), 056703. doi:10.1103/PhysRevE.77.056703.
- LEDER, A. (1992) *Abgelöste Strömungen Physikalische Grundlagen*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden. doi:10.1007/978-3-322-91109-4.
- LEDER, A. (2003) 3D-Flow Structures Behind Truncated Circular Cylinders. In *ASME/JSME 2003 4th Joint Fluids Summer Engineering Conference, Volume 2: Symposia, Parts A, B, and C*, 825–831. ASME. doi:10.1115/FEDSM2003-45083.

- LIMA E SILVA, A., SILVEIRA-NETO, A. & DAMASCENO, J. (2003) Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 189(2), 351–370. doi:10.1016/S0021-9991(03)00214-6.
- LOU, Q., GUO, Z. & SHI, B. (2013) Evaluation of outflow boundary conditions for two-phase lattice Boltzmann equation. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 87(6), 1–16. doi:10.1103/PhysRevE.87.063301.
- MASSELOT, A. & CHOPARD, B. (1998) A lattice Boltzmann model for particle transport and deposition. *Europhysics letters*, 42(3), 259–264. doi:10.1209/epl/i1998-00239-3.
- MATTILA, K., HYVÄLUOMA, J. & ROSSI, T. (2009) Mass-flux-based outlet boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(06), P06015. doi:10.1088/1742-5468/2009/06/P06015.
- MATYKA, M., KOZA, Z. & MIROSLAW, Ł. (2013) Wall orientation and shear stress in the lattice Boltzmann model. *Computers and Fluids*, 73, 115–123. doi:10.1016/j.compfluid.2012.12.018.
- MEI, R., LUO, L.-S. & SHYY, W. (1999) An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method. *Journal of Computational Physics*, 155(2), 307–330. doi:10.1006/jcph.1999.6334.
- MENZEL, P. & LEDER, A. (2013a) Flow and Scour around Cylindrical Objects in Laboratory Experiments. In *Proceedings of 2013 MTS / IEEE Oceans-Bergen IEEE Catalog-Nr.: CFP130CF-CDR 2013*.
- MENZEL, P. & LEDER, A. (2013b) Kolkbildung im Umfeld zylindrischer Objekte sowie deren Versandung im Wasserkanalexperiment. In *Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, 44–1 – 44–8.
- MENZEL, P. & LEDER, A. (2015) Versandung eines Zylinderabschnitts unter Einfluss von Oberflächenwellen im Laborversuch. In *Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, 46–1 – 46–9.
- MENZEL, P., WITTE, M. & LEDER, A. (2012) Windkanalexperimente zur Bestimmung der Strömungsstrukturen um einen quer zur Anströmung auf einer Bodenplatte lagernden Zylinderabschnitt. In *Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, 38–1 – 38–6.

- MINION, M. L. & BROWN, D. L. (1997) Performance of Under-resolved Two-Dimensional Incompressible Flow Simulations, II. *Journal of Computational Physics*, 138(2), 734–765. doi:10.1006/jcph.1997.5843.
- MINISTRY OF DEFENCE (2006) Dumping of Radioactive Waste at Sea. <http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20121026065214/http://www.mod.uk/NR/rdonlyres/76CA4EF7-EED5-491E-9519-DC3058BC7C26/0/seadumpradwastebf.doc> (Stand: 24.11.2016).
- MORRISON, H. E., BREDE, M., DEHNHARDT, G. & LEDER, A. (2016) Simulating the flow and trail following capabilities of harbour seal vibrissae with the Lattice Boltzmann Method. *Journal of Computational Science*. doi:10.1016/j.jocs.2016.04.004.
- MOSER, R. D., KIM, J. & MANSOUR, N. N. (1999) Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau=590$. *Physics of Fluids*, 11(4), 943. doi:10.1063/1.869966.
- MOTT-SMITH, H. M. (1951) The solution of the Boltzmann equation for a shock wave. *Physical Review*, 82(6), 885–892. doi:10.1103/PhysRev.82.885.
- NASH, R. W., CARVER, H. B., BERNABEU, M. O. ET AL. (2014) Choice of boundary condition for lattice-Boltzmann simulation of moderate-Reynolds-number flow in complex domains. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 89, 1–14. doi:10.1103/PhysRevE.89.023303.
- NORBERG, C. (2003) Fluctuating lift on a circular cylinder: Review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, 17(1), 57–96. doi:10.1016/S0889-9746(02)00099-3.
- PANTON, R. L. (2013) *Incompressible Flow*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA. doi:10.1002/9781118713075.
- PARMIGIANI, A., LATT, J., BEGACEM, M. B. & CHOPARD, B. (2013) A Lattice Boltzmann simulation of the Rhone river. *International Journal of Modern Physics C*, 24(12). doi:10.1142/S0129183113400081.
- PESKIN, C. S. (1972) Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10(2), 252–271. doi:10.1016/0021-9991(72)90065-4.
- QIAN, Y. H., D’HUMIÈRES, D. & LALLEMAND, P. (1992) Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. *EPL (Europhysics Letters)*, 17, 479–484. doi:10.1209/0295-5075/17/6/001.

- RICHTER, F. (2005) *Experimentelle Untersuchungen zur Charakterisierung der Strömungs- und Turbulenzstrukturen im Nachlauf eines Kreiszylinderstumpfes unter Berücksichtigung der Zentrifugalbeschleunigung*. Dissertation, Universität Rostock.
- RICHTER, F. & LEDER, A. (2004) Dreidimensionale Strömungs- und Turbulenzstrukturen im Nachlauf eines Kreiszylinderstumpfes. In *Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, Universität Karlsruhe*.
- RÜCKBORN, T. & LEDER, A. (2016) LDA-Untersuchungen an einer versandeten Struktur zur Validierung numerischer Daten. In *Fachtagung Experimentelle Strömungsmechanik*, 41–1 – 41–7.
- RÜCKBORN, T., MENZEL, P. & LEDER, A. (2014) Numerische Simulation des Sedimenttransports im Modellmaßstab. In *Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, 1–8.
- SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. (2006) *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 10 Aufl. doi:10.1007/3-540-32985-4.
- SHAN, X. & CHEN, H. (1993) Lattice Boltzmann model for simulating flows with multi phases and components. *Physical Review E*, 47(3), 1815–1819. doi:10.1103/PhysRevE.47.1815.
- SHI, B. (2007) Lattice Boltzmann Simulation of Some Nonlinear Complex Equations. *ICCS '07 Proceedings of the 7th international conference on Computational Science, Part I: ICCS 2007*, 818–825. doi:10.1007/978-3-540-72584-8_108.
- SHIELDS, A. (1936) *Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung*. Dissertation, Technische Hochschule Berlin.
- SHU, C., LIU, N. & CHEW, Y. T. (2007) A novel immersed boundary velocity correction-lattice Boltzmann method and its application to simulate flow past a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, 226(2), 1607–1622. doi:10.1016/j.jcp.2007.06.002.
- SKORDOS, P. A. (1993) Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 48(6), 4823–4842. doi:10.1103/PhysRevE.48.4823.
- SOULSBY, R. (1997) *Dynamics of Marine Sands*. Thomas Telford Ltd. doi:10.1680/doms.25844.
- STAHL, B., CHOPARD, B. & LATT, J. (2010) Measurements of wall shear stress with the lattice Boltzmann method and staircase approximation of boundaries. *Computers and Fluids*, 39(9), 1625–1633. doi:10.1016/j.compfluid.2010.05.015.

- STIEBLER, M., TÖLKE, J. & KRAFCZYK, M. (2008) Advection-diffusion lattice Boltzmann scheme for hierarchical grids. *Computers and Mathematics with Applications*, 55(7), 1576–1584. doi:10.1016/j.camwa.2007.08.024.
- SUGA, S. (2006) Numerical Schemes Obtained From Lattice Boltzmann Equations for Advection Diffusion Equations. *International Journal of Modern Physics C*, 17(11), 1563–1577. doi:10.1142/S0129183106010030.
- SUZUKI, K. & INAMURO, T. (2013) A higher-order immersed boundary-lattice Boltzmann method using a smooth velocity field near boundaries. *Computers and Fluids*, 76, 105–115. doi:10.1016/j.compfluid.2013.01.029.
- TAMM, I. E. (1967) Width of High-Intensity Shock Waves. In *Quantum field theory and hydrodynamics*, herausgegeben von D. V. Skobel'tsyn, 231–241. Consultants Bureau, New York. Übersetzung aus dem Russischen: Lebedev Physics Institute, Trudy, Bd. 29.
- TRITTON, D. J. (1959) Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 6(1936), 547–567. doi:10.1017/S0022112059000829.
- VAHALA, G., KEATING, B., SOE, M. ET AL. (2009) Entropic, LES and boundary conditions in lattice Boltzmann simulations of turbulence. *European Physical Journal: Special Topics*, 171(1), 167–171. doi:10.1140/epjst/e2009-01025-7.
- VAN DER SMAN, R. & ERNST, M. (2000) Convection-Diffusion Lattice Boltzmann Scheme for Irregular Lattices. *Journal of Computational Physics*, 160(2), 766–782. doi:10.1006/jcph.2000.6491.
- VAN DER SMAN, R. G. M. & ERNST, M. H. (1999) Diffusion Lattice Boltzmann Scheme on a Orthorhombic Lattice. *Journal of Statistical Physics*, 94(1/2), 203–217. doi:10.1023/A:1004515413793.
- WIESELSBERGER, C. (1921) Neuere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. *Physikalische Zeitschrift*, 22, 321–328.
- WILKENS, R. H. & RICHARDSON, M. D. (2007) Mine Burial Prediction: A Short History and Introduction. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 32(1), 3–9. doi:10.1109/JOE.2007.894331.
- WOLF-GLADROW, D. (1995) A lattice Boltzmann equation for diffusion. *Journal of Statistical Physics*, 79(5-6), 1023–1032. doi:10.1007/BF02181215.

- WOLF-GLADROW, D. A. (2000) *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*. Nr. 1725 in Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/b72010.
- YE, T., MITTAL, R., UDAYKUMAR, H. & SHYY, W. (1999) An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 156(2), 209–240. doi:10.1006/jcph.1999.6356.
- YOSHIDA, H. & NAGAOKA, M. (2010) Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the convection and anisotropic diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, 229(20), 7774–7795. doi:10.1016/j.jcp.2010.06.037.
- ZHANG, T., SHI, B., GUO, Z., CHAI, Z. & LU, J. (2012) General bounce-back scheme for concentration boundary condition in the lattice-Boltzmann method. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 85(1), 1–14. doi:10.1103/PhysRevE.85.016701.
- ZIEGLER, D. P. (1993) Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations. *Journal of Statistical Physics*, 71(5-6), 1171–1177. doi:10.1007/BF01049965.
- ZOU, Q. & HE, X. (1997) On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids*, 9, 1591–1598. doi:10.1063/1.869307.

Abbildungsverzeichnis

2.1	D2Q9-Gitter mit den jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren \vec{c}_i .	17
2.2	Die gängigsten 3D Gitter.	17
2.3	Verteilungsfunktionen einer Randzelle nach einem Advektionsschritt.	22
2.4	Schema der periodischen Randbedingungen.	22
2.5	Schema der <i>bounce back</i> Randbedingungen.	24
2.6	Schema der <i>free-slip</i> Randbedingungen basierend auf dem Prinzip der <i>specular reflection</i> .	26
2.7	Verdeutlichung der <i>off-lattice boundaries</i> auf dem Prinzip des <i>bounce-back</i> .	30
2.8	Horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponente der „dünnen“ Scherschichtströmung.	32
2.9	Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des BGK-Kollisionsmodells.	33
2.10	Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des RLBGK-Kollisionsmodells.	34
2.11	Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des MRT-Kollisionsmodells.	36
2.12	Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des ELBM.	38
2.13	Entwicklung der Scherschichtströmung bei Verwendung des KBC-Kollisionsmodells.	40
3.1	Advektion der Verteilungen um eine Randzelle.	45
3.2	Programmablauf zur Behandlung komplexer Geometrien	46
3.3	Widerstandskoeffizient bei der Umströmung eines Zylinders bei verschiedenen Reynoldszahlen.	49
3.4	Strouhalzahl der Kármánschen Wirbelstraße hinter einem Zylinder bei verschiedenen Reynoldszahlen.	50
3.5	Wirbelstärke eines bewegten bzw. angeströmten Zylinders im Vergleich.	51
3.6	Veranschaulichung des <i>multi-domain</i> Ansatzes zur lokalen Gitterverfeinerung	52
3.7	Problemfall bei der kubischen Interpolation beim Übergang vom groben zum feinen Gitter.	56

3.8	Programmablauf der Gitterverfeinerung.	57
3.9	Übergangsfläche vom groben zum feinen Gitter bei der dreidimensionalen Gitterverfeinerung.	59
3.10	Strömungsstrukturen im Nachlauf eines unendlichen Zylinders.	62
3.11	Zeitliche Entwicklung des Widerstands- und Auftriebsbeiwertes bei der Umströmung eines unendlichen Zylinders.	63
3.12	Geschwindigkeitsspektrum im Nachlauf des Zylinders.	63
3.13	Magnitude der Geschwindigkeit bei der turbulenten Kanaldurchströmung bei $Re_\tau = 180$	68
3.14	Entropischer Stabilisator bei der turbulenten Kanaldurchströmung bei $Re_\tau = 180$	69
3.15	Vergleich der gemittelten Geschwindigkeit mit den Daten von Moser et al. (1999) bei $Re_\tau = 180$	69
3.16	Vergleich der jeweiligen quadratischen Mittel der Geschwindigkeitsschwankungen mit den Daten von Moser et al. (1999) bei $Re_\tau = 180$	70
3.17	Vorgegebenes Einlassprofil bei $x/D = -1,5$	72
3.18	Darstellung der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines stehenden Zylinders mit $L/D = 2$ bei $Re = 2 \times 10^5$	73
3.19	Wirbelstrukturen im Nachlauf des stehenden Zylinders.	74
3.20	Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des stehenden Zylinders.	74
3.21	Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des stehenden Zylinders in der Schnittebene bei $y/D = 0$	75
3.22	Gemittelte Geschwindigkeitsprofile entlang einer Linie im Nachlauf bei $y/D = 0$ und $x/D = 2,2$ im Vergleich mit Messungen (TR-PIV und LDA) und einer LES.	76
3.23	Gemittelte Geschwindigkeitsprofile entlang einer Linie im Nachlauf bei $z/D = 1$ und $x/D = 2,2$ im Vergleich mit LDA-Messungen und einer LES.	77
4.1	Aufbau des Windkanals am Lehrstuhl Strömungsmechanik der Universität Rostock.	81
4.2	Im Windkanal vermessener Hufeisenwirbel im Vorlauf eines liegenden Zylinders bei $Re \approx 1,6 \times 10^5$	81
4.3	Im Windkanal vermessenes Rezirkulationsgebiet im Nachlauf eines liegenden Zylinders bei $Re \approx 1,6 \times 10^5$	82
4.4	Aufbau des Wasserkanals am Lehrstuhl Strömungsmechanik der Universität Rostock.	83
4.5	Quasi-stationärer Endzustand der Versandung eines liegenden Zylinders im Wasserkanal.	84

4.6	Hufeisenwirbel im Vorlauf des liegenden Zylinders bei Verwendung unterschiedlicher Auflösungen.	86
4.7	Position des Hufeisenwirbels im Vorlauf des liegenden Zylinders bei unterschiedlichen Auflösungen.	87
4.8	Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation.	88
4.9	Hufeisenwirbel im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation.	88
4.10	Position des Hufeisenwirbels im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation.	89
4.11	Rezirkulationsgebiet im Nachlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen.	92
4.12	Hufeisenwirbel im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen.	92
4.13	Position des vorderen Hufeisenwirbels im Vorlauf des liegenden Zylinders im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen.	94
4.14	Position des seitlichen Hufeisenwirbels im Vergleich zwischen Windkanalexperiment und LBM Simulation unter Wasserkanalbedingungen.	94
4.15	Stromlinien im Vor- und Nachlauf eines liegenden Zylinders auf Grundlage der gemittelten Strömung aus der LBM Simulation unter den Bedingungen des Wasserkanals.	96
4.16	Wandschubspannung am Boden im Umfeld des liegenden Zylinders.	98
5.1	Zeitliche Entwicklung zweier sich bewegender und diffundierender Gaußverteilungen.	104
5.2	Zeitliche Entwicklung der Erosion und Sedimentation im Umfeld eines liegenden Zylinders bei einer Partikelsinkgeschwindigkeit von $w_s = 2,50$ cm/s.	111
5.3	Im Wasserkanal ermittelte charakteristische Versandungsstrukturen im Umfeld eines liegenden Zylinders.	111
5.4	Zeitliche Entwicklung der Erosion und Sedimentation im Umfeld eines liegenden Zylinders bei einer Partikelsinkgeschwindigkeit von $w_s = 5,86$ cm/s.	112

Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich der numerischen Stabilität aller vorgestellten Kollisionsmodelle anhand des Beispiels einer „dünnen“ Scherschichtströmung mit $N = 128$	41
3.1	Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation der Zylinderumströmung. . . .	61
3.2	Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines stehenden Zylinders. . . .	72
4.1	Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines liegenden Zylinders unter Windkanalbedingungen.	85
4.2	Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines liegenden Zylinders unter Wasserkanalbedingungen.	91
5.1	Abmaße der Verfeinerungsstufen für die Simulation eines liegenden Zylinders unter zusätzlicher Einbindung eines Sedimenttransportmodells.	109

