



Institut für Automatisierungstechnik

# **Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung für Umrichter am schwachen Netz**

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
der Fakultät für Informatik und Elektrotechnik  
der Universität Rostock

vorgelegt von:  
Alexander Schöley, geb. am 24.02.1990 in Rostock  
aus Rostock

Rostock, 24. April 2023

eingereicht: 24.04.2023

verteidigt: 09.10.2023

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Torsten Jeinsch  
*Universität Rostock*

Prof. Dr.-Ing. Hans-Günter Eckel  
*Universität Rostock*

Prof. Dr.-Ing. Michael Bierhoff  
*Hochschule Stralsund*

# Kurzfassung

Elektrische Energie wird in zunehmenden Maße aus regenerativen Quellen in das elektrische Versorgungsnetz eingespeist, wodurch eine Ergänzung bzw. Verdrängung der konventionellen Energieeinspeisung auf der Basis von Großkraftwerken mit direkt an das Netz gekoppelten Synchrongeneratoren einhergeht. Da bei der Einspeisung aus regenerativen Quellen der Netzanschluss i.d.R. durch Umrichter realisiert ist und daher andere Eigenschaften aufweist, bedingt diese Entwicklung eine Veränderung des strukturellen Aufbaus des Energienetzes. Es resultieren schwache Teilnetze, in denen die umrichterbasierten Einspeiser die Synchronität mit dem Energienetz verlieren können, was zu einer instabilen Umrichterregelung führt.

In dieser Arbeit wird die Netzsynchronisation eines umrichterbasierten Einspeisers mittels Phasenregelschleife (PLL) unter dem Einfluss eines schwachen Netzes analysiert und Bedingungen für deren Stabilität hergeleitet. Die Untersuchung erfolgt anhand des Systems aus netzseitigem Umrichter mit LC-Ausgangsfilter, der PLL und dem Energienetz in einer Darstellung nach dem Thévenin-Theorem.

Die Betrachtung des Systems im eingeschwungenen Zustand ermöglicht die Herleitung einer notwendigen Stabilitätsbedingung, die ein ausreichend starkes Netz für die PLL-basierte Netzsynchronisation kennzeichnet. Zudem stellt das Erfüllen der notwendigen Bedingung die Existenz der Ruhelagen des Systems sicher, deren Stabilität durch eine Linearisierung und anschließend durch lineare Untersuchungsmethoden gezeigt wird. Darauf aufbauend wird das transiente Systemverhalten bei einem Übergang von einer stabilen Ruhelage zu einer zweiten analysiert. Es resultiert eine Bedingung, welche die Stabilität der Netzsynchronisation und das Einschwingen auf die Zielruhelage sicherstellt. Gemäß dieser transienten Stabilitätsbedingung darf der PLL-Phasenwinkel während des Übergangs einen kritischen Wert nicht erreichen und demzufolge erfordert das direkte Überprüfen der Bedingung die Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichungen, um den Maximalwert zu ermitteln. Auf der Grundlage von geeigneten Vereinfachungen und Annahmen wird eine Methode erarbeitet, die den Maximalwert für eine gegebene Systemanregung konservativ abschätzt und so den Nachweis der transienten Stabilität ohne Lösung der Differentialgleichungen zulässt. Die Nachweismethode wird mit einer Optimierung unter Nebenbedingungen in zwei Varianten implementiert.

Die hergeleiteten Stabilitätsbedingungen und die Methode zum Nachweis der transienten Stabilität werden an numerischen Beispielen demonstriert. Anhand von Versuchsreihen nach dem Prinzip von Monte-Carlo-Simulationen wird außerdem die Konservativität der Nachweismethode eingeschätzt.



# Abstract

Electrical energy from renewable sources is increasingly fed into the electrical grid, which complements or rather replaces the feed-in from conventional sources based on large power plants with synchronous generators that are directly coupled to the grid. Since the grid connection of feeders based on renewable sources is usually realized by inverters and has different properties, this trend causes a changing structure of the energy grid. Weak subparts in the grid result, in which the inverter-based feeders may lose synchronism to the grid, which leads to an unstable inverter control loop.

In this thesis, the grid synchronization of an inverter-based feeder with a phase-locked loop (PLL) is analyzed under the influence of a weak grid and conditions for its stability are derived. The analysis is based on the system consisting of a grid-side inverter with LC-output filter, the PLL and the energy grid in a representation according to Thévenin's theorem.

By considering the steady-state, a necessary stability condition is derived which characterizes a sufficiently strong grid for the PLL-based grid synchronization. In addition, the necessary condition ensures the existence of the system's equilibrium points and their stability is shown by linear methods after performing a linearization. The transient behavior of the system is then analyzed by examining the transition from one stable equilibrium point to another. As a result, a condition arises which ensures the stability of the grid synchronization and the settling in the second equilibrium point. According to this transient stability condition, the PLL phase angle must not reach a critical value during the transition and therefore a direct verification of the condition requires the solution of the underlying differential equations to identify the maximum value. Based on appropriate simplifications and assumptions, a method is deduced to conservatively estimate the maximum value for a given excitation, thus allowing the transient stability condition to be verified without solving the differential equations. The verification method is implemented by an optimization with constraints in two variants.

The derived stability conditions and the method to verify the transient stability condition are demonstrated by numerical examples. Furthermore, the conservativeness of the verification method is evaluated by a series of experiments according to the principle of Monte-Carlo-simulations.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>iii</b>
Symbole . . . . .	iii
Indizes, Operatoren, Funktionen . . . . .	v
Abkürzungen . . . . .	vi
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Stand der Technik . . . . .	3
1.3. Zielstellung . . . . .	6
1.4. Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2. Grundlagen und Problemanalyse</b>	<b>9</b>
2.1. Systembeschreibung . . . . .	9
2.1.1. Mathematische Beschreibung des Energiesystems . . . . .	9
2.1.2. Struktureller Aufbau des Energiesystems . . . . .	11
2.1.3. Umrichterbasierte Einspeisung . . . . .	13
2.2. Netzsynchronisation unter dem Einfluss eines schwachen Netzes . . . . .	16
2.2.1. PLL-basierte Netzsynchronisation bei netzfolgender Einspeiseregelung . . . . .	17
2.2.2. Ursachen des schwachen Netzes . . . . .	19
2.2.3. Konkretisierung der Aufgabenstellung . . . . .	21
2.3. Modellbildung . . . . .	22
2.3.1. Elektrisches Netzwerk . . . . .	23
2.3.2. Phasenregelschleife . . . . .	23
2.3.3. Transformation der Modellgleichungen . . . . .	25
2.4. Regelungstechnische Methoden . . . . .	28
2.4.1. Stabilitätsbegriff von Ljapunow . . . . .	28
2.4.2. Abschätzung des Maximalwertes einer Sprungantwort mit Signallnормen . . . . .	29
2.4.3. Berechnung des Maximalwertes einer Sprungantwort . . . . .	31
2.4.4. Partizipationsfaktoren . . . . .	33
<b>3. Stabilität der Netzsynchronisation</b>	<b>35</b>
3.1. Stationärer Zustand des Systems . . . . .	35
3.1.1. Stationärer Zustand des elektrischen Netzwerks . . . . .	35
3.1.2. Stationärer Zustand der PLL . . . . .	38
3.2. Kleinsignalstabilität . . . . .	39
3.2.1. Bestimmung der Ruhelagen . . . . .	40

3.2.2. Stabilität der Ruhelagen . . . . .	44
3.3. Transiente Stabilität . . . . .	46
3.3.1. Betrachtetes Szenario . . . . .	46
3.3.2. Transiente Stabilitätsbedingung . . . . .	46
3.4. Methode zum Nachweis der transienten Stabilität . . . . .	54
3.4.1. Vereinfachung des Systems . . . . .	55
3.4.2. Herleitung der Nachweismethode . . . . .	60
<b>4. Implementation und Anwendungsaspekte</b>	<b>65</b>
4.1. Implementation der Nachweismethode . . . . .	65
4.1.1. Singularität und Unstetigkeitsstelle des nichtlinearen Verstärkungsfaktors	65
4.1.2. Monotonie des nichtlinearen Verstärkungsfaktors . . . . .	66
4.1.3. Bestimmung des Maximalwertes . . . . .	68
4.1.4. Durchführung des Stabilitätsnachweises . . . . .	69
4.1.5. Einschränkungen . . . . .	70
4.2. Anwendungsaspekte . . . . .	71
4.2.1. Mehrerer Einspeiser an einem Netzanschlusspunkt . . . . .	71
4.2.2. Zuschalten von Einspeisern . . . . .	73
4.2.3. Änderung der Netzimpedanz . . . . .	74
4.2.4. Änderung der Netzspannungsparameter . . . . .	75
<b>5. Demonstration der Ergebnisse</b>	<b>79</b>
5.1. Notwendige Stabilitätsbedingung . . . . .	79
5.2. Kleinsignalstabilität . . . . .	80
5.3. Transiente Stabilität . . . . .	85
5.3.1. Abschätzung der Konservativität der Nachweismethode . . . . .	87
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>91</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>93</b>
A.1. Messspannung im Laplace-Bereich . . . . .	93
A.2. Matrixelemente des linearisierten Systems . . . . .	95
A.3. Minimum der Messspannungsamplitude . . . . .	97
A.4. Nichtlinearer Verstärkungsfaktor . . . . .	98
A.5. Arkustangens2-Funktion . . . . .	98
A.6. Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationsreihen . . . . .	99
<b>Literatur</b>	<b>103</b>

# Nomenklatur

In dieser Arbeit werden die in den Ingenieurwissenschaften gebräuchlichen Symbole und Schreibweisen verwendet. Vektorielle Größen sind in fester Schriftart geschrieben und Matrizen werden mit fetten Großbuchstaben bezeichnet.

## Symbole

$\mathbf{0}^{n \times m}$	$n \times m$ Nullmatrix
$\mathbf{A}_{\square}$	Systemmatrix
$\mathbf{B}_{\square}$	Eingangsmatrix
$C_{Inv}$	Filterkapazität
$D_{\square}$	Dämpfung
$\Delta\varphi$	Phasenvorlauf der Umrichterspannung
$f_{Netz}$	Netzfrequenz
$\gamma$	Verschiebung von $\varphi_{PLL}$ : $\gamma = \varphi_{PLL} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}}$
$\gamma_{krit}$	kritischer Wert von $\gamma$
$G_{Ges}(s)$	Übertragungsfunktion des abgeschätzten Gesamtsystems
$G_{Inv}(s)$	Übertragungsfunktion, Anteil der Umrichterspannung an der Messspannung
$\hat{G}_{Inv}$	Betrag der komplexen Zahl $G_{Inv}(j\omega_{Netz})$
$G_{Netz}(s)$	Übertragungsfunktion, Anteil der Netzspannung an der Messspannung
$\hat{G}_{Netz}$	Betrag der komplexen Zahl $G_{Netz}(j\omega_{Netz})$
$G_{PLL}(s)$	Übertragungsfunktion der PLL
$I_{Inv}$	Inverterstrom
$\hat{I}_{Inv}$	Amplitude des Inverterstroms
$\mathbf{I}_{Inv,abc}$	Vektor des dreiphasigen Inverterstroms
$I_{Netz}$	Netzstrom
$\hat{I}_{Netz}$	Amplitude des Netzstrom
$\mathbf{I}_{Netz,abc}$	Vektor des dreiphasigen Netzstroms
$j$	imaginäre Einheit
$K(\varphi_{PLL})$	nichtlinearer Verstärkungsfaktor
$K_I$	$K_I = K_{I,PLL} \hat{U}_{CInv,konst}$
$K_{I,PLL}$	Integralverstärkung des PLL-Schleifenfilters
$K_{konst}$	konstante Abschätzung von $K(\varphi_{PLL})$
$K_P$	$K_P = K_{P,PLL} \hat{U}_{CInv,konst}$
$K_{P,PLL}$	Proportionalverstärkung des PLL-Schleifenfilters
$L_{Inv}$	Induktivität des Ausgangsfilters
$L_{Netz}$	Induktivität der Netzimpedanz

$\lambda_{\square}$	Vektor von Eigenwerten
$\mu$	Skalierungsfaktor von $K_{I,PLL}$
$n_{Inv}$	Skalierungsfaktor der Filterimpedanz, Anzahl von baugleichen Einspeisern am NAP
$n_{Netz}$	Skalierungsfaktor der Netzimpedanz
$P_{Inv}$	Wirkleistung des Umrichters
$p_{ki}$	Partizipationsfaktor
$R_{Inv}$	ohmscher Widerstand des Ausgangsfilters
$R_{Netz}$	ohmscher Widerstand der Netzimpedanz
$\rho$	Pollage zur Parametrierung des PLL-Schleifenfilters
$s$	Laplace-Variable
$T_{\alpha\beta}$	Transformationsmatrix der Clarke-Transformation
$T_{dq}$	Transformationsmatrix der Park-Transformation
$u$	Vektor der Stellgrößen
$\hat{U}$	Amplitude zur Parametrierung des PLL-Schleifenfilters
$U_{CInv}$	Messspannung
$\hat{U}_{CInv}$	Amplitude der Messspannung
$U_{CInv,abc}$	Vektor der dreiphasigen Messspannung
$U_{CInv,Inv}$	Anteil der Umrichterspannung an der Messspannung
$\hat{U}_{CInv,konst}$	konstante Abschätzung von $\hat{U}_{CInv}$
$U_{CInv,Netz}$	Anteil der Netzspannung an der Messspannung
$U_{dc}$	Zwischenkreisspannung
$U_{Inv}$	Ausgangsspannung des netzseitigen Umrichters
$\hat{U}_{Inv}$	Amplitude der Umrichterspannung
$U_{Inv,abc}$	Vektor der dreiphasigen Umrichterspannung
$U_{Netz}$	Netzspannung
$\hat{U}_{Netz}$	Amplitude der Netzspannung
$U_{Netz,abc}$	Vektor der dreiphasigen Netzspannung
$U_q$	q-Komponente der Park-Transformierten Messspannung
$U_{q,Inv}$	Anteil der Umrichterspannung an $U_q$
$U_{q,Netz}$	Anteil der Netzspannung an $U_q$
$U_{ZNetz}$	Spannungsabfall über der Netzimpedanz
$v$	linker Eigenvektor
$V$	Gütfunktion
$\varphi_{G_{Inv}}$	Phase der komplexen Zahl $G_{Inv}(j\omega)$
$\varphi_{G_{Netz}}$	Phase der komplexen Zahl $G_{Netz}(j\omega)$
$\tilde{\varphi}_{I_{Inv}}$	Phasenwinkel des Inverterstroms mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$\tilde{\varphi}_{I_{Netz}}$	Phasenwinkel des Netzstrom mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}$	Phasenwinkel der Netzspannung mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$\varphi_{Netz,0}$	initialer Phasenwinkel der Netzspannung
$\varphi_{PLL,krit}$	kritischer PLL-Phasenwinkel
$\varphi_{PLL,max}$	maximaler Wert von $\varphi_{PLL}$ während eines transienten Übergangs
$\varphi_{PLL,max K_{konst}}$	Maximalwert des Ausgangs von $G_{Ges}(s)$ bei sprungförmiger Anregung

$\tilde{\varphi}_{Park}$	Transformationswinkel der Park-Transformation
$\tilde{\varphi}_{PLL}$	Phasenwinkel der PLL mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}$	Phasenwinkel der Messspannung mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}$	Phasenwinkel der Umrichterspannung mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$w$	rechter Eigenvektor
$x$	Zustandsvektor
$x_{PLL}$	Zustand des Reglerintegrators der PLL
$\underline{Y}_G$	zusammengefasste komplexe Admittanz
$\underline{Z}_{CInv}$	komplexe Impedanz der Filterkapazität $C_{Inv}$
$\underline{Z}_{Inv}$	komplexe Impedanz des Ausgangsfilters (Anteile: $R_{Inv}$ und $L_{Inv}$ )
$\underline{Z}_{Netz}$	komplexe Netzimpedanz (Anteile: $R_{Netz}$ und $L_{Netz}$ )
$\omega_{Netz}$	Netzkreisfrequenz
$\omega_{PLL}$	Kreisfrequenz der PLL

## Indizes, Operatoren, Funktionen

$\hat{\square}$	Amplitude einer Wechselgröße, Betrag einer komplexen Zahl
$\underline{\square}$	komplexe Zahl
$ \square $	Betrag
$\ \square\ _\infty$	Maximumsnorm
$\ \square\ _1$	$L_1$ -Norm
$\square_{abc}$	dreiphasige elektrische Größe
$\Im \square$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\square_{Inv}$	Umrichterwert (Inverter)
$\square_L$	Zustand des linearisierten Systems
$\mathfrak{L}$	Laplace-Transformation
$\mathfrak{L}^{-1}$	Laplace-Rücktransformation
max	Maximum
min	Minimum
$\square_{Netz}$	Netzwert
$\square_{PLL}$	PLL-Wert
$\square_R$	Ruhelagenwert
$\Re \square$	Realteil einer komplexen Zahl
sup	Supremum
$\varphi \square$	Phasenwinkel einer Wechselgröße, Phase einer komplexen Zahl
$\tilde{\varphi} \square$	Phasenwinkel einer Wechselgröße mit Frequenzanteil $\omega_{Netz}t$
$x  y$	Paralleloperator: $x  y = \frac{xy}{x+y}$
$x \propto y$	Proportionalität

## Abkürzungen

EAC	equal-area criterion
ESB	Ersatzschaltbild
IGBT	Insulated Gate Bipolar Transistor
NAP	Netzanschlusspunkt
PLL	Phase-Locked Loop (Phasenregelschleife)
PVA	Photovoltaikanlage
SCR	short circuit ratio (Kurzschlussverhältnis)
SRF-PLL	synchronous reference frame PLL
VOC	voltage oriented control (spannungsorientierte Einspeiseregelung)
VSC	voltage source converter (Frequenzumrichter mit Gleichspannungszwischenkreis)
WEA	Windenergieanlage

# 1. Einleitung

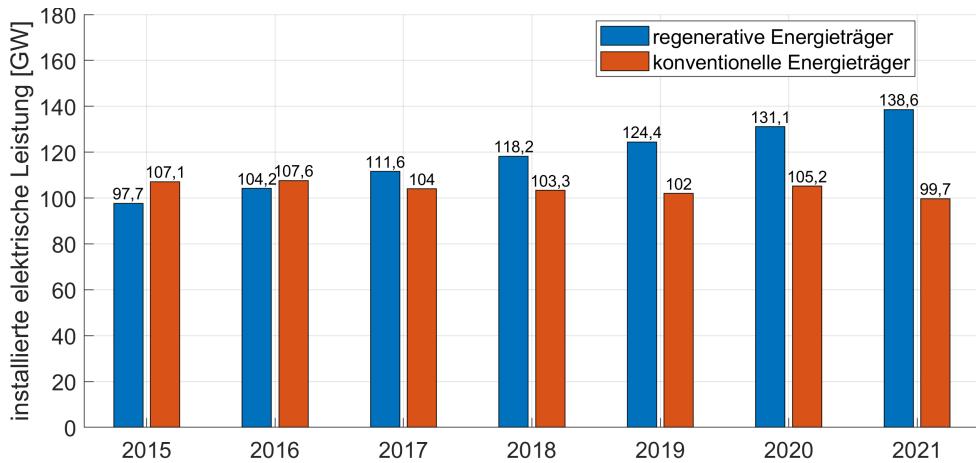
## 1.1. Motivation

Nahezu alle Lebensbereiche sind heutzutage auf elektrische Energie angewiesen. Weltweite Kommunikation, Produktionsanlagen, Handel, Logistik und Dienstleistungen sowie das tägliche Leben im Allgemeinen sind ohne die durchgehende Verfügbarkeit von elektrischer Energie nicht mehr denkbar. Die Versorgungssicherheit ist in weiten Teilen der Welt selbstverständlich und gründet sich auf das etablierte Energienetz. Das klassische Energienetz ist hierarchisch strukturiert: Konventionelle Großkraftwerke speisen elektrische Energie auf den höchsten Hierarchieebenen in das Netz ein und Verbraucher nehmen auf den unteren Ebenen die elektrische Energie ab. Die Einspeisung erfolgt in den Großkraftwerken durch an das Energienetz angeschlossene Synchrongeneratoren, wodurch eine direkte Verbindung zwischen dem mechanischen Generator und dem elektrischen Netz existiert. Die direkte Kopplung ermöglicht es, unmittelbar auf einen veränderten Bedarf an elektrischer Energie zu reagieren. Da das Energienetz keine nennenswerten elektrischen Speicher enthält und daher die eingespeiste Leistung immer dem aktuellen Bedarf entsprechen muss, ist diese unmittelbare Reaktion auf den Bedarf eine essentielle Eigenschaft [1]. Bei einem Ungleichgewicht zwischen Einspeisung und Bedarf, wird die Differenz durch die mechanische Rotationsenergie der Synchrongeneratoren ausgeglichen, die daraufhin entweder eine Abbremsung oder Beschleunigung erfahren. Die Kraftwerkssteuerung registriert die Drehzahländerung und regelt die Generatordrehzahl durch geeignete Maßnahmen wieder auf ihren Sollwert. Durch die direkte Kopplung korrespondiert der Drehzahlsollwert aller Synchrongeneratoren mit der Netzfrequenz, die im europäischen Verbundnetz 50 Hz beträgt [2]. Der beschriebene Mechanismus ist nicht nur entscheidend für den Betrieb des Energienetzes, sondern bewirkt auch eine Synchronisierung der einspeisenden Generatoren untereinander.

Aufgrund der Endlichkeit und begrenzten Verfügbarkeit von fossilen Rohstoffen, der Umweltbelastung durch den Verbrennungsprozess bei der Gewinnung von elektrischer Energie aus fossilen Quellen sowie aus wirtschaftlichen und politischen Gründen wird die konventionelle Energieeinspeisung zunehmend durch Einspeisung aus regenerativen Quellen ergänzt bzw. ersetzt [4]. Dieser Fakt ist z.B. am Zuwachs der installierten Einspeiseleistung von regenerativen Energieträgern zu sehen, die in Abb. 1.1 für Deutschland über die vergangenen Jahre dargestellt ist. Der Anschluss und das Prinzip der Einspeisung von Energie aus regenerativen Quellen unterscheidet sich aber grundsätzlich von der konventionellen Einspeisung, sodass sich dadurch der Aufbau und die Eigenschaften des elektrischen Energienetzes verändern [5], [6]. Regenerative Einspeiser, wie Windenergieanlagen und Photovoltaikanlagen, sind kleine Einheiten, die geografisch verteilt an geeigneten Standorten installiert sind. Obwohl sie im Vergleich zu konventionellen Kraftwerken geringere Einspeiseleistungen aufweisen, konnte die Nennleis-

## 1. Einleitung

---



**Abbildung 1.1.:** Entwicklung der installierten elektrischen Erzeugungsleistung in Deutschland der Jahre 2015 bis 2021 [3].

tung der Anlagen in den vergangenen Jahren immer weiter gesteigert werden. Des Weiteren sind sie auch auf den unteren Netzhierarchieebenen an das Energienetz angeschlossen, wodurch die klassische hierarchische Struktur der Energieübertragung aufgelöst wird. Außerdem erfolgt der Netzanschluss nicht über direkt gekoppelte Synchronmaschinen, sondern über Frequenzumrichter, weswegen diese Art der Einspeisung als umrichterbasierte Energieeinspeisung bezeichnet wird.

Umrichter sind leistungselektronische Baugruppen, die aus speziellen Leistungsschaltern, engl. Insulated-gate bipolar transistors (IGBTs), aufgebaut sind. Um elektrische Energie aus der regenerativen Quelle in das Netz einzuspeisen, müssen die IGBTs mit einer geeigneten Schaltfolge angesteuert werden, die von der Regelung des Umrichters, der Einspeiseregelung, erzeugt wird. Bei einer Einspeiseregelung auf Basis der netzfolgenden Regelungsstrategie ist dazu eine Synchronisierung auf die bestehende externe Netzspannung notwendig, wozu i.d.R. eine Phasenregelschleife, engl. Phase-Locked Loop (PLL), zum Einsatz kommt [7]. Am gebräuchlichsten ist die Verwendung einer synchronous reference frame PLL (SRF-PLL). Die Netzsynchronisierung nimmt bei der Einspeiseregelung eine essentielle Rolle ein [8]. Sie kann erfolgreich durchgeführt werden, wenn die Einspeisung in ein sogenanntes starkes Netz erfolgt, aber fehlschlagen, wenn ein schwaches Netz vorliegt. Da bei einer nicht erfolgreichen Netzsynchronisierung die netzfolgende Einspeiseregelung instabil ist, wird eine fehlgeschlagene Netzsynchronisierung hier ebenfalls als instabil bezeichnet. Die zuvor genannten Eigenschaften von umrichterbasierten Einspeisern:

- gesteigerte Nennleistungen der Anlagen
- geografisch dezentraler Standort
- Einspeisung in untere Hierarchieebenen des Energienetzes

tragen zur Entstehung von schwachen Netzabschnitten bei. Entsprechend gewinnt die Netzsynchronisation unter dem Einfluss des schwachen Netzes mit Hinblick auf das sich struktu-

rell verändernde Energienetz weiter an Bedeutung. Zwar sind die Auswirkung eines schwachen Netzes auf die PLL-basierte Netzsynchronisation bekannt, konkrete Zusammenhänge sind aber ungeklärt bzw. nicht ausreichend analysiert.

## 1.2. Stand der Technik

Bei Stabilitätsanalysen von Energiesystemen wird typischerweise zwischen kleinen und großen Systemanregungen unterschieden und diese werden der Kleinsignalstabilität (engl. small-signal stability) bzw. der transienten Stabilität (engl. transient stability) zugeordnet. Bezuglich der Kleinsignalstabilität gilt die Annahme, dass das Systemverhalten in einer Ruhelage mit linearisierten Modellen in ausreichender Genauigkeit beschrieben werden kann. Daher sind Methoden der linearen Regelungstheorie anwendbar, aber aufgrund der durchgeführten Linearisierung beschränkt sich die Gültigkeit der Ergebnisse auf die jeweilige Ruhelage und deren unmittelbare Umgebung. Zur Untersuchung der transienten Stabilität müssen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden, wofür aber keine allgemeingültige geschlossene Theorie existiert [5], [9], [10].

Die Netzsynchronität ist bereits bei der konventionellen Energieeinspeisung betrachtet worden. Dazu wurden Systeme von gekoppelten Synchronaggregaten untersucht, bei denen ein direkter Zusammenhang zwischen dem Phasenwinkel der Generatorenpannung und der mechanischen Rotorposition existiert. In diesem Kontext kennzeichnet eine stationär konstante Differenz zweier Rotorwinkel die Synchronität der beteiligten Generatoren, während ein Auseinanderdriften der Rotorwinkel zum Synchronitätsverlust führt [11], [12], [10]. Wird diese Synchronitätsdefinitionen nicht auf Rotorwinkel, sondern auf die Phasenwinkel der beteiligten Spannungen bezogen, kann sie für umrichterbasierte Einspeiser übernommen werden. Trotz dieser ähnlichen Ausgangslage sind für Umrichter mit netzfolgender Einspeiseregelung Aufgrund der Notwendigkeit einer PLL zur Netzsynchronisation neue Ansätze zur Stabilitätsuntersuchung notwendig [5], [6].

Dazu wurde die Problematik des schwachen Netzes beim Anschluss von umrichterbasierten Einspeisern an das Energienetz z.B. in [13] und [14] beschrieben. Die Beiträge identifizieren lange Übertragungsleitungen mit hohen Impedanzen als Ursache für Einschränkungen des Umrichterbetriebes und empfehlen eine Neuparametrierung der Umrichterregelung für den Einsatz in schwachen Netzabschnitten. Eine systematische Analyse des Einflusses von unterschiedlichen Leitungsimpedanzen führt [15] durch und schlägt einen zusätzlichen auf die Impedanz abgestimmten Filter vor, um die Systemdämpfung zu erhöhen und so die Stabilitätseigenschaften zu verbessern. Die genannten Arbeiten betrachten zwar den Umrichter im Kontext eines schwachen Netzes, beziehen sich jedoch nicht oder nur beiläufig auf die Netzsynchronisation. Umgekehrt existieren auch viele Arbeiten zur Analyse und Verbesserung der PLL-basierten Netzsynchronisation (eine Übersicht bieten z.B. [7] und [16]), die aber nicht des schwachen Netzes adressieren [17].

Kernproblem der PLL-basierten Netzsynchronisation unter dem Einfluss eines schwachen Netzes ist, dass die Synchronisation nicht auf die externe Netzspannung erfolgen kann. Basis der Synchronisation ist stattdessen eine Spannung, die sich in Anteilen aus der Ausgangsspannung des Umrichters und der Netzspannung zusammensetzt, wodurch der Umrichter selbst

die Synchronisation beeinflusst und deren Stabilität beeinträchtigen kann. In [18] wird die anteilige Zusammensetzung für den stationären Zustand explizit angegeben und so eine Beschreibung der PLL-Eingangsspannung mit Berücksichtigung des schwachen Netzes eingeführt. Aus Sicht der PLL bezeichnen die Autoren den Anteil der Netzspannung als Gegenkopplung und den Anteil der Umrichterspannung als Mitkopplung und argumentieren, dass für eine stabile Netzsynchronisation die Gegenkopplung größer als die Mitkopplung sein muss. Diese oder eine gleichwertige Bedingung wird auch in weiteren Arbeiten hergeleitet. Verbreitet und üblich ist dabei die Annahme einer idealen bzw. schnellen Stromregelung, sodass der Umrichter als gesteuerte Stromquelle und der eingespeiste Strom als Stellgröße des Systems aufgefasst werden kann. Zum Teil wird der Umrichter auch als ideale Stromquelle angesehen, was aber nicht der physikalischen Funktion eines Umrichters mit Spannungzwischenkreis entspricht [19], [20], [21].

Neben dem stationären Zustand wird in weiteren Arbeiten die Kleinsignalstabilität von Umrichtersystemen mit PLL-basierter Synchronisation untersucht. Diese Beträge fokussieren sich meist auf den Einfluss von Systemparametern sowie den Parametern der Umrichterregelung. In [22] und [23] erfolgt die Stabilitätsuntersuchung anhand der Eigenwerte des Systems in Abhängigkeit von der Netzstärke, die durch das Kurzschlussverhältnis, engl. short circuit ratio (SCR), abgebildet wird. Es wird gezeigt, dass die Eigenwerte mit abnehmendem SCR, d.h. bei schwächerem Netz, immer näher an der imaginären Achse liegen und schließlich positive Realteile aufweisen. Diese Instabilität wird mit einem zu hohen Einspeisestrom und einer zu geringen Dämpfung der PLL in Relation zum SCR begründet. Der qualitative Einfluss der Parameterierung von Umrichterregelung und PLL bei unterschiedlich starken Netzen wird in [24] mit dem Nyquistkriterium untersucht. Die Ergebnisse bestätigen, dass bei schwachen Netzen eine geringe Dämpfung die Schwingneigung des Systems begünstigt und zum Verlust der Stabilität führen kann. Eine Erhöhung der Dämpfung kann durch eine Reduzierung der PLL-Bandbreite erreicht werden, jedoch erhöht sich dadurch auch die Verzögerungszeit der PLL. Aus diesem Grund schlägt [25] einen zusätzlichen Filter mit Entwurf nach dem Frequenzkennlinienverfahren vor, um die Stabilität des Systems mit einem ausreichenden Phasenrand sicherzustellen, ohne die Bandbreite der PLL übermäßig zu reduzieren. Im Rahmen der Kleinsignalstabilität sind in [25] und [26] auch Umrichterregelungen mit zusätzlichen netzstützenden Funktionen, sogenannten Droop-Regelungen, bei variierendem SCR, Arbeitspunkt des Umrichters und Verstärkung der Droop-Regelung Gegenstand der Stabilitätsuntersuchungen. Zusammengefasst belegen die genannten Beiträge, dass ein kleines SCR, eine hohe Einspeiseleistung sowie eine geringe Dämpfung zu einem geringen Stabilitätsrand des Systems führen.

Auch wenn diese Ergebnisse nur auf der Grundlage von linearisierten Modellen gewonnen wurden, kann davon ausgegangen werden, dass sie qualitativ auch für die transiente Stabilität gelten. Für ausführlichere Untersuchungen des transienten Verhaltens der Netzsynchronisation existieren weitere Methoden, die aber Einschränkungen unterliegen und daher keine vollständige Lösung für die transiente Stabilitätsanalyse bieten, wie die Übersicht [27] zeigt. Ein häufiger Ansatz ist, die Ähnlichkeiten zwischen einem Synchrongenerator und der PLL-basierten Netzsynchronisation auszunutzen. Dazu wird das System aus Umrichter und PLL als Schwingungsgleichung modelliert, wodurch äquivalente Ausdrücke zum mechanischen An-

triebsmoment, zum Trägheitsmoment und zur Dämpfung in Abhängigkeit der System- und Reglerparameter abgeleitet werden. Auf Grundlage dieser Ersatzausdrücke untersuchen [28] und [29] Spannungseinbrüche des Netzes und beschreiben qualitativ den Einfluss des Umrichterarbeitspunktes, der PLL-Parametrierung sowie der Impedanzen. Ein Nachweis für die Stabilität des Systems wird aber nicht angegeben.

Die zu den mechanischen Größen äquivalenten Ausdrücke ermöglichen prinzipiell auch die Anwendung des equal-area criterions (EAC) [30]. Das klassische EAC ist ein hinreichendes Kriterium für die transiente Stabilität und dient der Untersuchung von zwei gekoppelten oder einem an das Energienetz angeschlossenen Synchrongenerator. Es basiert auf einer grafischen Interpretation des Beschleunigungs- und Abbremsvorgangs des Rotorwinkels nach einer Anregung [31], [32]. Für umrichterbasierte Einspeiser ist das EAC aber nur mit der erheblichen Einschränkung anwendbar, dass die PLL keine Proportionalverstärkung aufweist [33], [34]. Zudem vernachlässigt das EAC die Systemdämpfung, was bei der Anwendung für Synchrongeneratoren eine akzeptable Annahme ist, da die Dämpfung klein und stets positiv ist. Bei umrichterbasierten Systemen wird der äquivalente Dämpfungsterm bei großen Differenzwinkel aber negativ, sodass die Nichtbeachtung zu einer falschen Stabilitätsaussage führen kann. In [35] und [36] wird das EAC erweitert, um die Proportionalverstärkung und die Dämpfung zu berücksichtigen, aber durch diese Anpassungen kann die hergeleitete Stabilitätsbedingung nicht mehr ausgewertet werden ohne die zugrundeliegenden Differentialgleichungen zu lösen. Daher stellen auch diese Ergebnisse keine vollständige Lösung der transienten Stabilitätsfrage dar.

Anstelle des EACs wird in [34] die Phasenebene zur Stabilitätsuntersuchung genutzt, d.h. die Verläufe der Systemtrajektorien werden grafisch konstruiert. Zwar kann auf diese Weise der qualitative Einfluss von System- und Reglerparametern auf das transiente Verhalten ohne explizite Lösung der Differentialgleichungen untersucht werden, aber diese Vorgehensweise entspricht keinem Stabilitätsnachweis. In [37] vertiefen die Autoren ihre Untersuchungen und schlagen vor, die Dämpfung der PLL in kritischen Situationen durch eine Parameterumschaltung zu erhöhen und so die Stabilitätseigenschaften zu verbessern.

Neben den Untersuchungen mittels EAC und Phasenebene existieren vereinzelt Ansätze die transiente Stabilität auf Basis der Stabilitätstheorie von Ljapunow nachzuweisen. In diesem Zusammenhang stellt das Finden einer geeigneten Ljapunowfunktion die größte Herausforderung dar, da für diese Aufgabe kein allgemeingültiges Verfahren existiert [27]. In [38] gelingt der Stabilitätsnachweis für einen Sonderfall mit einer in [39] vorgeschlagenen Ljapunowfunktion, indem die Einspeiseleistung des Umrichters im Fehlerfall reduziert wird und sich auf diese Weise Vereinfachungen ergeben. Als weitere Möglichkeit können sogenannte Energy Functions als Ljapunowfunktionen verwendet werden, die wie das EAC auf Untersuchungsmethoden für Synchrongeneratoren zurückgehen. Energy Functions führen aber auf sehr komplizierte Ausdrücke, sodass nur mit vereinfachenden Annahmen oder in Sonderfällen praktikable Ergebnisse hergeleitet werden können [9], [40], [27].

Über die genannten Methoden hinaus ist das Durchführen von numerischen Simulationen eine übliche Vorgehensweise um das transiente Verhalten eines umrichterbasierten Einspeisers zu untersuchen [9], [40]. Ein Nachweis der Stabilität erfolgt auf diese Weise aber nicht.

### 1.3. Zielstellung

Die Ausführungen des vorherigen Abschnittes belegen, dass die Problematik der Netzsynchronisierung bei einem schwachen Netz grundsätzlich bekannt ist. Es existieren Analysen dieser Situation anhand von linearisierten Systemmodellen, die aber nur für das Kleinsignalverhalten gültig sind. Zudem stehen einige Methoden zur Verfügung, welche die Nichtlinearitäten des Systems berücksichtigen und daher zur Untersuchung des transienten Systemverhaltens geeignet sind, aber einen Nachweis der Stabilität nur unter erheblichen Einschränkungen erlauben oder auf das Lösen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen angewiesen sind. Insgesamt ist der qualitative Einfluss von System- und Reglerparametern auf die Stabilität der PLL-basierten Netzsynchronisation in der Literatur bekannt, aber exakte Stabilitätsbedingungen existieren nicht. In der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zur Beantwortung dieser Forschungsfrage geliefert werden.

Ziel der Arbeit ist es, die Stabilität der PLL-basierten Netzsynchronisation zu analysieren und Bedingungen herzuleiten, unter denen die Stabilität der Synchronisation sichergestellt ist. Die Untersuchung soll nicht nur in den Ruhelagen des Systems, sondern auch für den transienten Fall erfolgen. Zudem sollen die Stabilitätsbedingungen nicht auf eine Lösung der Differentialgleichungen angewiesen sein. Bei der Untersuchung wird der Umrichter nur für den Prozess der Einspeisung betrachtet, d.h. die Rückspeisung von Energie wird im Rahmen der Arbeit nicht behandelt. Des Weiteren stehen leistungselektronische Eigenschaften nicht im Fokus der Untersuchungen.

### 1.4. Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in die folgenden Kapitel unterteilt:

**Kapitel 2** bietet zuerst eine allgemeine Einführung in die Thematik und beschreibt Grundlagen des Energienetzes und der Energieeinspeisung. Anschließend wird die umrichterbasierte Energieeinspeisung detaillierter erläutert. Dazu werden die netzseitigen Teilkomponenten eines umrichterbasierten Einspeisers genannt sowie deren Aufbau und Funktion beschrieben. Außerdem wird der grundlegende Ablauf der netzfolgenden Einspeiseregelung dargestellt und die Notwendigkeit einer Netzsynchronisierung für diese Regelungsstrategie begründet.

Auf diesen Grundlagen aufbauend, wird die Problemstellung im Detail ausgearbeitet. Es wird gezeigt, welche Einflussfaktoren ein schwaches Netz qualitativ begünstigen und daher die Netzsynchronisation erschweren. Es kann aber kein quantitativer Zusammenhang zwischen der Netzstärke und einer stabilen Netzsynchronisation angegeben werden. Aus diesem Defizit wird das Ziel der Arbeit abgeleitet und die Aufgabenstellung konkretisiert.

Es folgt die regelungstechnische Modellbildung der zuvor beschriebenen netzseitigen Komponenten eines umrichterbasierten Einspeisers sowie eine Transformation der Modellgleichungen in eine Darstellung, die eine regelungstechnische Stabilitätsanalyse erlaubt. Das Kapitel endet mit einer Übersicht von relevanten Theorien und Methoden, die im Rahmen der Arbeit Anwendung finden.

**Kapitel 3** stellt den Hauptteil der Arbeit dar. Hier wird die Stabilität der Netzsynchronisation in drei Schritten analysiert: Zuerst wird nur der stationäre Zustand des Systems betrachtet. Aus dieser Vereinfachung wird eine Bedingung hergeleitet, die für eine stabile Netzsynchronisation erfüllt sein muss und folglich als notwendige Stabilitätsbedingung bezeichnet wird. Im zweiten Schritt wird das Kleinsignalverhalten des Systems in einer Ruhelage untersucht. Dazu wird die Ruhelage analytisch bestimmt und das Gesamtsystem in der Ruhelage linearisiert. Die Stabilität des linearisierten Systems kann durch die Lage der Eigenwerte der Systemmatrix eindeutig nachgewiesen werden. Die Stabilitätsaussage dieser Untersuchung ist jedoch nur in der Ruhelage selbst und deren unmittelbaren Umgebung gültig. Im dritten Schritt wird die transiente Stabilität des Systems anhand eines Szenarios analysiert, bei dem sich das System in einer stabilen Ruhelage befindet und durch eine sprunghafte Änderung der Stellgrößen einmalig angeregt wird. Es wird untersucht, ob die Netzsynchronisation während des transienten Übergangs stabil ist und sich das System auf eine zweite stabile Ruhelage einschwingt. Es wird begründet, dass die Stabilität der Netzsynchronisierung gegeben ist, wenn der PLL-Phasenwinkel einen kritischen Wert nicht erreicht. Entsprechend stellt die transiente Stabilitätsbedingung eine Forderung an den Maximalwert des PLL-Phasenwinkels. Im letzten Abschnitt des Kapitels wird eine Methode erarbeitet, um diesen Maximalwert konservativ abzuschätzen, damit die Stabilitätsbedingung überprüft werden kann, ohne die zugrundeliegenden Differentialgleichungen analytisch oder numerisch zu lösen.

**Kapitel 4** erläutert die Implementierung der entwickelten Nachweismethode in zwei Varianten und beschreibt notwendige Anpassungen, um getroffene Annahmen sicherzustellen.

Es werden außerdem weitere Anwendungsmöglichkeiten für die transiente Stabilitätsbedingung dargelegt. So können durch Änderung der Systemparameter mehrere Einspeiser an einem Netzanschlusspunkt dargestellt und untersucht werden. Des Weiteren kann die Anregung des Systems nicht nur durch eine sprungförmige Änderung der Stellgrößen, sondern auch durch Änderungen der Systemparametern erfolgen. Es ist daher auch möglich, die erarbeitete Methode zu verwenden, um das Zuschalten von Einspeisern, Impedanzänderungen sowie Änderungen der Netzspannungsparameter zu untersuchen.

**Kapitel 5** demonstriert die hergeleiteten Stabilitätsbedingungen und die Nachweismethode anhand von numerischen Beispielen. Um außerdem die Konservativität der implementierten Nachweismethode zu bewerten, werden Versuchsreihen nach dem Prinzip von Monte-Carlo-Simulationen unter Einbeziehung unterschiedlicher Systemparameter und -anregungen durchgeführt und die Stabilitätsaussage der Nachweismethode wird mit dem tatsächlichen Systemverhalten aus einer Simulation verglichen.



## 2. Grundlagen und Problemanalyse

Dieses Kapitel bietet eine Einführung in die Thematik der Arbeit, gibt eine Prozesseinordnung und schildert weitere Grundlagen. Zuerst erfolgt eine allgemeine Beschreibung des elektrischen Energiesystems sowie der konventionellen und der umrichterbasierten Energieeinspeisung. Letztere umfasst die Einspeisung von Energie aus regenerativen Energiequellen mit Hilfe von leistungselektronischen Frequenzumrichtern. Für Umrichter mit netzfolgender Einspeise-regelung ist die Netzsynchronisation essentiell und basierend auf den Ausführungen zu Aufbau und Ablauf der umrichterbasierten Einspeisung werden die Herausforderungen der Netzsynchronisation erläutert, die sich aufgrund des schwachen Netzes ergeben. Daraus leitet sich als Aufgabenstellung die Regelungstechnische Stabilitätsanalyse der Netzsynchronisation ab. Anschließend folgt die Modellbildung der netzseitigen Komponenten eines umrichterbasierten Einspeisers und eine Transformation der Modellgleichungen in eine Form, bei der die elektrischen Signale nicht als Wechselgrößen, sondern als Gleichgrößen vorliegen. In den letzten Abschnitten des Kapitels werden Theorien und Methoden beschrieben, die im Rahmen der Arbeit Anwendung finden.

### 2.1. Systembeschreibung

#### 2.1.1. Mathematische Beschreibung des Energiesystems

Zur Übertragung und Verteilung von elektrischer Energie über das Energienetz liegen die elektrischen Signale als Dreiphasenwechselsystem vor, d.h. die Ströme und Spannungen sind Wechselgrößen, haben einen sinusförmigen Verlauf und sind dreifach ausgeführt. Es wird ein symmetrisches Dreiphasensystem angestrebt, bei dem die Signale der drei Phasen durch dieselbe Amplitude und Frequenz sowie eine Phasenverschiebung von jeweils  $120^\circ$  charakterisiert sind. Diese Symmetrie sorgt für eine gleichmäßige Auslastung der Betriebsmittel und erleichtert Berechnungen. Die dreiphasige symmetrische Netzsspannung ist mit der Amplitude  $\hat{U}_{Netz}$ , der Netzkreisfrequenz  $\omega_{Netz} = 2\pi f_{Netz}$  und dem initialen Phasenwinkel  $\varphi_{Netz,0}$ :

$$\mathbf{U}_{Netz,abc}(t) = \begin{bmatrix} \hat{U}_{Netz} \cos(\omega_{Netz} t + \varphi_{Netz,0}) \\ \hat{U}_{Netz} \cos\left(\omega_{Netz} t + \varphi_{Netz,0} - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \hat{U}_{Netz} \cos\left(\omega_{Netz} t + \varphi_{Netz,0} - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Wird im Folgenden nur der einphasige Fall betrachtet, dann werden die elektrischen Größen als Skalar ohne Phasenindex und mit dem Argument der A-Phase geschrieben, z.B.

$$U_{Netz}(t) = \hat{U}_{Netz} \cos(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)) \quad (2.2)$$

mit

$$\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t) = \omega_{Netz} t + \varphi_{Netz,0}. \quad (2.3)$$

Eine Eigenschaft eines symmetrischen Dreiphasensystems ist, dass die Summe über alle drei Phasen zu jedem Zeitpunkt Null ist. Aus diesem Grund kann ein symmetrisches Dreiphasensystem auch mit nur zwei Komponenten dargestellt werden, da sich die dritte Komponente eindeutig aus den ersten beiden ergibt. Am Beispiel von (2.1) werden zwei übliche Transformationen gezeigt. Mit der Clarke-Transformation wird  $\mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$  in  $\mathbf{U}_{Netz,\alpha\beta}(t)$  nach folgender Vorschrift überführt [41], [42]:

$$\mathbf{U}_{Netz,\alpha\beta}(t) = \mathbf{T}_{\alpha\beta} \mathbf{U}_{Netz,abc}(t). \quad (2.4)$$

Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

ergeben sich die Komponenten

$$U_{Netz,\alpha}(t) = \hat{U}_{Netz} \cos(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)) \quad (2.6a)$$

$$U_{Netz,\beta}(t) = \hat{U}_{Netz} \sin(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)), \quad (2.6b)$$

welche als Real- und Imaginärteil des komplexen Raumzeigers  $\underline{U}_{Netz}(t)$  aufgefasst werden können:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Netz}(t) &= \hat{U}_{Netz} \cos(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)) + j \hat{U}_{Netz} \sin(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)) \\ &= \hat{U}_{Netz} e^{j \tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nach (2.7) entspricht der Raumzeiger  $\underline{U}_{Netz}(t)$  dem Zeiger von  $U_{Netz}(t)$  nach der komplexen Wechselstromrechnung [43].

Unter Verwendung des Transformationsphasenwinkels  $\tilde{\varphi}_{Park}(t)$  kann (2.1) mit der Park-Transformation in  $\mathbf{U}_{Netz,dq}$  überführt werden [44], [42]. Die Transformationsvorschrift lautet:

$$\mathbf{U}_{Netz,dq}(t) = \mathbf{T}_{dq} \mathbf{U}_{Netz,abc}(t) \quad (2.8)$$

und mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{dq} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\varphi}_{Park}(t)) & \cos\left(\tilde{\varphi}_{Park}(t) - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\tilde{\varphi}_{Park}(t) - \frac{4}{3}\pi\right) \\ -\sin(\tilde{\varphi}_{Park}(t)) & -\sin\left(\tilde{\varphi}_{Park}(t) - \frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\tilde{\varphi}_{Park}(t) - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

resultieren die Komponenten

$$U_{Netz,d}(t) = \hat{U}_{Netz} \cos(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t) - \tilde{\varphi}_{Park}(t)) \quad (2.10a)$$

$$U_{Netz,q}(t) = \hat{U}_{Netz} \sin(\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t) - \tilde{\varphi}_{Park}(t)) \quad (2.10b)$$

Die Signale (2.10) besitzen die folgenden Eigenschaften: Gilt  $\dot{\tilde{\varphi}}_{Park}(t) = \omega_{Netz}$ , so sind  $U_{Netz,d}(t)$  und  $U_{Netz,q}(t)$  Gleichgrößen. Gilt außerdem  $\tilde{\varphi}_{Park}(t) = \tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)$ , d.h. entspricht der Transformationsphasenwinkel dem Phasenwinkel von  $U_{Netz}(t)$ , folgt:

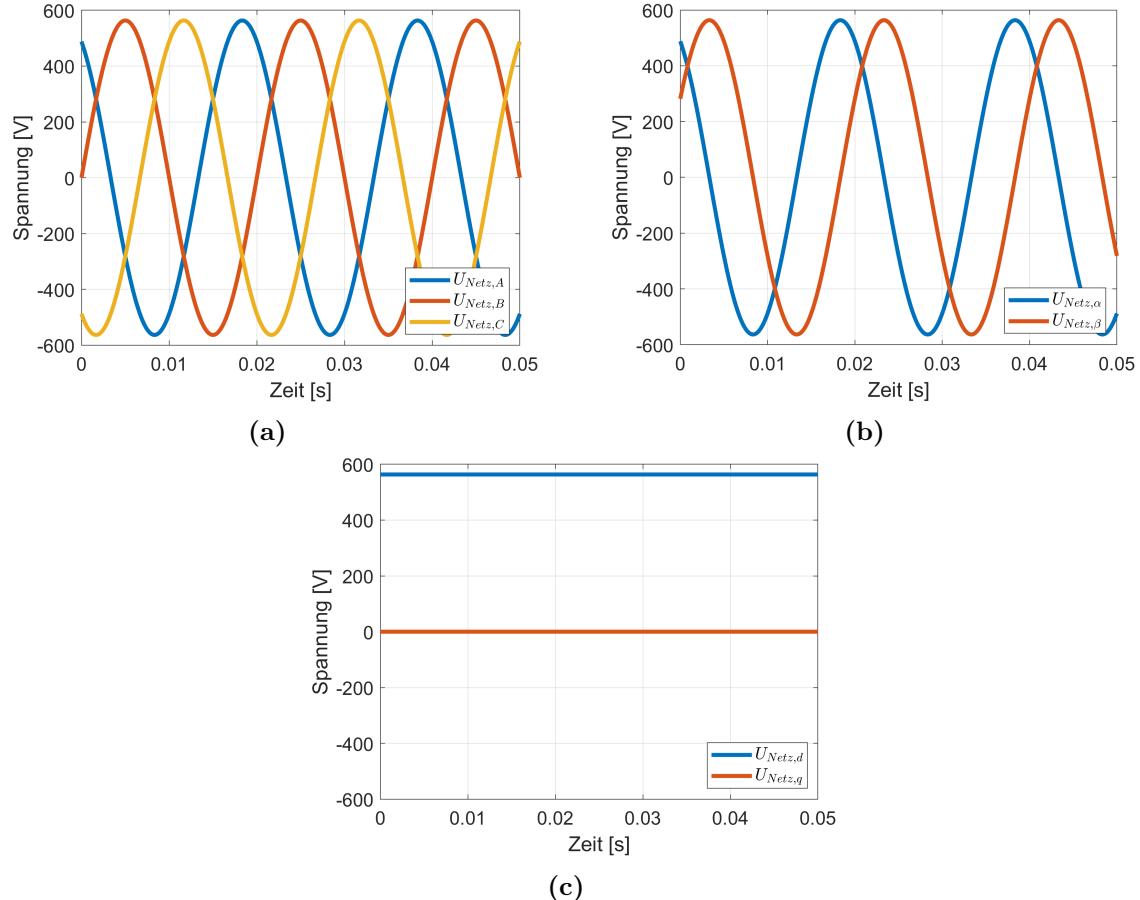
$$U_{Netz,d}(t) = \hat{U}_{Netz} \quad (2.11a)$$

$$U_{Netz,q}(t) = 0. \quad (2.11b)$$

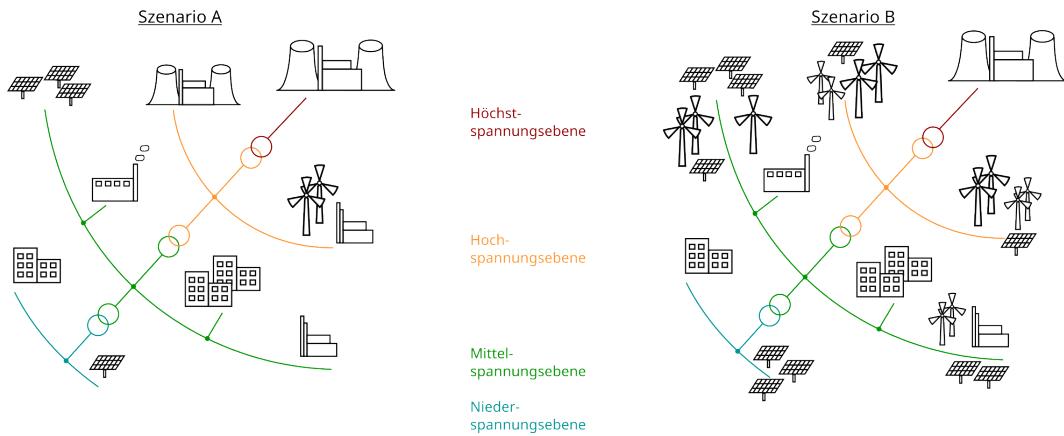
In Abb. 2.1 sind die Signalverläufe von (2.1) sowie die der Clarke- und Park-Transformierten Signale nach (2.4) und (2.8) dargestellt.

### 2.1.2. Struktureller Aufbau des Energiesystems

In Abhängigkeit von der Amplitude  $\hat{U}_{Netz}$  ist das Energienetz hierarchisch in die Höchst-, Hoch-, Mittel- und Niederspannungsebene unterteilt. Diese Einteilung spiegelt den Sachverhalt wider, dass zur Energieübertragung hohe Spannungsamplituden geeigneter sind, da bei gleicher Leistung die Stromamplitude geringer ist und dadurch weniger Leitungsverluste auftreten. Das klassische Energienetz ist deswegen durch zentrale Großkraftwerke gekennzeichnet, die elektrische Energie auf der höchsten Spannungsebene einspeisen. Von dort wird die Energie über die höheren Spannungsniveaus verteilt, sukzessive auf niedrigere Niveaus transformiert und schließlich im Niederspannungsbereich den Verbrauchern zur Verfügung gestellt. Zu den konventionellen Kraftwerken können in diesem Kontext neben fossilen Kraftwerken auch große Wasserkraftwerke gezählt werden, die elektrische Energie über direkt an das Energienetz angeschlossene Synchrongeneratoren einspeisen. Diese direkte Kopplung führt zu einer unmittelbaren Verknüpfung von mechanischer Generatordrehzahl und Netzfrequenz. Um eine konstante Netzfrequenz zu erreichen, müssen die Generatoren daher bei einer konstanten Drehzahl betrieben werden, d.h. alle Generatoren müssen synchron zueinander sein und es dürfen nur



**Abbildung 2.1.:** (a) Symmetrische Dreiphasenspannung (2.1) mit  $\hat{U}_{Netz} = 690\sqrt{2/3}\text{ V}$ ,  $\omega_{Netz} = 2\pi 50\text{ Hz}$  und  $\varphi_{Netz,0} = 30^\circ$  (b) Clarke-Transformierte Signale der Dreiphasenspannung (c) Park-Transformierte Signale der Dreiphasenspannung mit dem Transformationswinkel:  $\tilde{\varphi}_{Park}(t) = \tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)$ .



**Abbildung 2.2.:** Strukturveränderung des Energienetzes aufgrund des wachsenden Anteils von Einspeisung aus regenerativen Quellen: Im Szenario A (links, klassischer Aufbau des Energienetzes) wird die Einspeisung von zentralen Großkraftwerken dominiert und es existiert nur wenig Einspeisung aus regenerativen Quellen. Die Verteilung der Energie erfolgt von der Höchst- und Hochspannungsebene über die niedrigeren Ebenen zu Industrie, Gewerbe und kommunalen Verbrauchern. Im Szenario B (rechts) sind nur noch wenige konventionelle Kraftwerke vorhanden. Stattdessen gibt es mehr umrichterbasierte Einspeiser, die z.T. auch auf niedrigeren Spannungsebenen an das Energienetz angeschlossen sind.

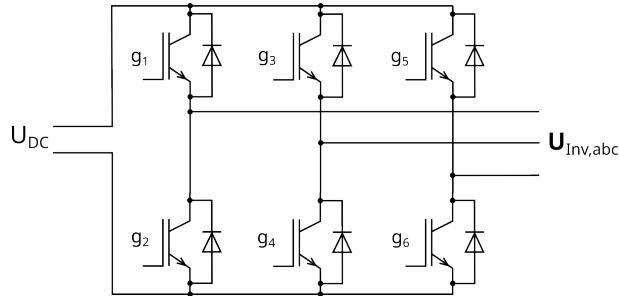
kurzzeitig kleine Abweichungen auftreten.

Neben dieser konventionellen Einspeisung, wird elektrische Energie zunehmend auch aus regenerativen Quellen in das Energienetz eingespeist. Als Beispiele seien Windenergieanlagen (WEA) und Photovoltaikanlagen (PVA) genannt. Die Nennleistung der einzelnen Anlagen ist deutlich geringer als die eines konventionellen Kraftwerks, sie wurde aber in den vergangenen Jahren kontinuierlich gesteigert (z.B. [45], [46]). Weiterhin sind WEAs und PVAs nicht zentralisiert, sondern verteilt an geeigneten Standorten installiert und die Einspeisung erfolgt z.T. auch auf niedrigeren Netzzspannungsebenen. Durch diese neuen Einspeiser ergibt sich daher eine gänzlich andere Struktur des Energienetzes, die in Abb. 2.2 veranschaulicht ist. Zudem erfolgt die Einspeisung nicht über direkt gekoppelte Synchronmaschinen, sondern über leistungselektronische Umrichter.

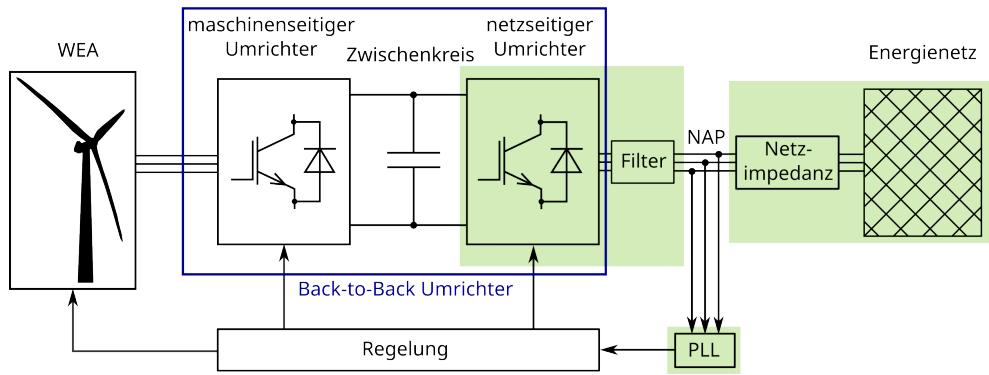
### 2.1.3. Umrichterbasierte Einspeisung

Umrichter sind leistungselektronische Baugruppen, die aus sechs Leistungsschaltern (IGBTs) bestehen, welche eine dreiphasige H-Brücke bilden. Der prinzipielle Aufbau ist in Abb. 2.3 gezeigt. Beim Anschluss einer WEA mit Vollumrichter an das Energienetz sind zwei Umrichter in einer Back-to-Back Struktur angeordnet und mit einem Spannungszwischenkreis verbunden, eine Konfiguration, die als „voltage source converter“ (VSC) bezeichnet und in Abb. 2.4 dargestellt ist [47], [48], [49].

Die Energieeinspeisung läuft wie folgt ab: Der maschinenseitige Umrichter richtet die elektrischen Größen vom Generator der WEA gleich und führt die Energie dem Zwischenkreiskondensator zu. Der netzseitige Umrichter erzeugt aus der Gleichspannung des Zwischenkreises



**Abbildung 2.3.:** Aufbau des netzseitigen Umrichters mit sechs IGBTs. Jeder IGBT ist mit einer antiparallelen Schutzdiode ausgestattet. Mit  $g_1$  bis  $g_6$  sind die Logikeingänge der IGBTs bezeichnet. Bei entsprechender Schaltfolge wird die Gleichspannung des Zwischenkreises  $U_{DC}$  in die symmetrische Dreiphasenwechselspannung  $\mathbf{U}_{Inv,abc}$  überführt.



**Abbildung 2.4.:** Funktionale Darstellung einer Vollumrichter-WEA mit dem maschinenseitigen und netzseitigen Umrichter in Back-to-Back Konfiguration (blauer Rahmen), der PLL, dem Ausgangsfilter, der Netzimpedanz und dem Energienetz. Der Punkt zwischen dem Ausgangsfilter und der Netzimpedanz wird als Netzzanschlusspunkt (NAP) bezeichnet. Die netzseitigen Komponenten des umrichterbasierten Einspeisers sind grün markiert und bilden das zu untersuchende System dieser Arbeit.

ein zum Netz passendes symmetrisches Dreiphasenwechselstromsystem, sodass ein Stromfluss in das Netz resultiert und Energie eingespeist wird. Diese Arbeit fokussiert sich auf den netzseitigen Umrichter bzw. auf den netzseitigen Anschluss eines umrichterbasierten Einspeisers.

Um einen vorgegebenen Sollwert an elektrischer Leistung in das Energienetz einzuspeisen, wird der netzseitige Umrichter mit einer Regelung betrieben. Die Aufgabe dieser Einspeiseregelung ist es, eine Schaltfolge für die IGBTs zu erzeugen, sodass die Gleichspannung des Zwischenkreises in eine dreiphasige Wechselspannung überführt wird. Die erzeugte Umrichterspannung muss auf die Netzspannung abgestimmt sein, damit die resultierende Einspeiseleistung dem Sollwert entspricht. Insbesondere muss die Frequenz der Umrichterspannung mit der Frequenz der Netzspannung übereinstimmen und sie darf bei transienten Vorgängen nur kleine und kurzzeitige Abweichungen aufweisen [10]. Diese Synchronitätsanforderung wird als Netzsynchronität des Umrichters bezeichnet und ist die wichtigste Anforderung an die Einspeiseregelung [8], [42]. Geht sie verloren, spricht man vom „Loss of Synchronism“,

die Einspeiseregelung wird instabil und der Einspeiser muss vom Netz getrennt werden, um Beschädigungen der Betriebsmittel zu vermeiden. Einspeiseregelungen sind in die Typen netzfolgend, netzbildend und netzstützend unterteilt [50]:

Für die **netzfolgende Einspeiseregelung** ist eine externe Spannung am NAP notwendig, auf welche sich die Regelung synchronisiert. Daher ist eine netzfolgende Einspeiseregelung immer auf ein bestehendes externes Netz angewiesen. Zur Synchronisierung wird standardmäßig eine PLL eingesetzt. Die netzfolgende Einspeiseregelung wird in Abschnitt 2.2.1 näher beschrieben. Die **netzstützende Einspeiseregelung** arbeitet grundsätzlich wie eine netzfolgende Regelung, ist aber mit zusätzlichen Funktionen ausgestattet, um z.B. bei einem Ungleichgewicht zwischen Einspeisung und Bedarf auf ähnliche Weise wie ein Synchrongenerator eines konventionellen Kraftwerks reagieren zu können. Diese Fähigkeit von Synchrongeneratoren kann beispielsweise mit einer Droop-Charakteristik teilweise nachgebildet werden [51], [52]. Die **netzbildende Einspeiseregelung** benötigt keine externe Spannung, sondern die Regelung erzeugt die Umrichterspannung auf Grundlage einer alternativen Referenz. Dadurch besitzt eine netzbildende Einspeiseregelung z.B. die Fähigkeit zum Schwarzstart.

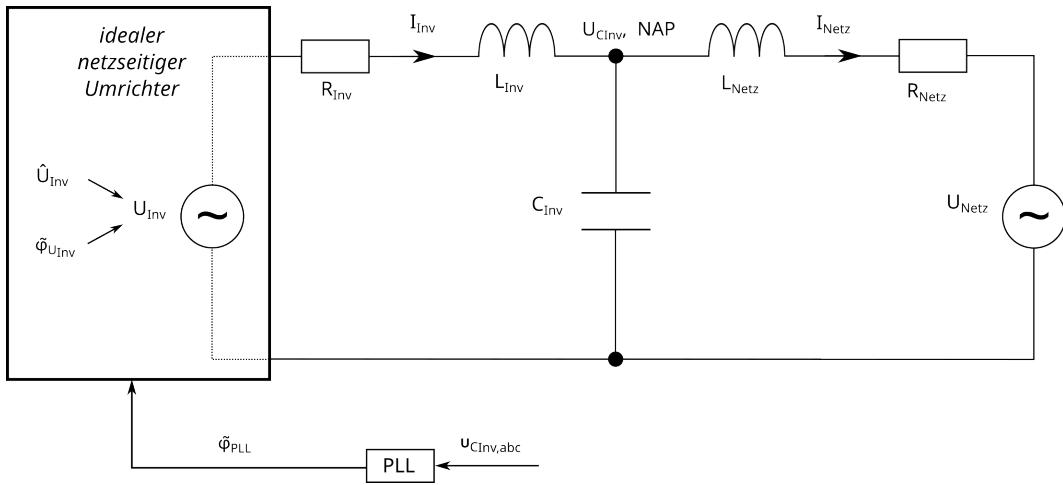
Diese Arbeit befasst sich mit der Netzsynchronisation einer netzfolgenden Einspeiseregelung.

### Netzseitige Komponenten

In Abb. 2.4 ist am Beispiel einer WEA mit Vollumrichter der Anschluss eines umrichterbasierten Einspeisers als Blockschema dargestellt. Es erfolgt nun eine Beschreibung des Schemas mit Fokus auf den grün markierten netzseitigen Komponenten.

Der linke Block in Abb. 2.4 stellt den mechanischen Aufbau der WEA aus Turm, Rotorblättern, Getriebe und Generator dar. Am Generator wird das erzeugte dreiphasige Wechselstromsystem abgegriffen und dem Back-to-Back-Umrichter zugeführt. Der maschinen- und der netzseitige Umrichter der Back-to-Back-Struktur arbeiten als Gleich- bzw. Wechselrichter und der Zwischenkreiskondensator wirkt als Kurzzeitspeicher. Aufgrund des taktenden Verhaltens der IGBTs ist die Ausgangsspannung des netzseitigen Umrichters nicht ideal harmonisch, weswegen ein passiver Ausgangsfilter zur Dämpfung von vorhandenen Oberschwingungen eingesetzt wird. Hinter dem Filter befindet sich eine Messstelle für die elektrische Spannung  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$ , auf die mittels PLL synchronisiert wird. Der resultierende PLL-Phasenwinkel  $\tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  dient als Eingangsgröße der Einspeiseregelung zur Ansteuerung der IGBTs. Schließlich ist das System am NAP über die Netzimpedanz mit dem Energienetz verbunden. Die Darstellung des Netzes als Gitter veranschaulicht die Approximation als „infinite grid“, bei der die Amplitude, die Frequenz sowie die initiale Phasenlage der Netzspannung konstant sind [32], [53], [54]. Der netzseitige Umrichter, der Ausgangsfilter und das Energienetz mit Netzimpedanz sind direkt an der Einspeiseregelung beteiligt, daher wird für sie ein elektrisches Ersatzschaltbild (ESB) entwickelt, auf dessen Basis im Kapitel 2.3 die Modellbildung erfolgt.

Wie bereits beschrieben, ist der **netzseitige Umrichter** aus IGBTs aufgebaut. Da das ESB eines IGBTs (z.B. [55]) für regelungstechnische Untersuchungen nicht geeignet ist, wird der netzseitige Umrichter unter der Annahme von idealen IGBTs abstrahiert. Es wird davon ausgegangen, dass der idealer Umrichter direkt das von der Regelung geforderte symmetrische Dreiphasensystem  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  mit der Amplitude  $\hat{U}_{Inv}$  und der Phasenlage  $\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}(t)$  erzeugt.



**Abbildung 2.5.:** Einphasiges ESB der netzseitigen Komponenten: idealer netzseitiger Umrichter, LC-Ausgangsfilter, PLL und Energienetz.

Im ESB kann der ideale netzseitige Umrichter daher als steuerbare Spannungsquelle dargestellt werden. Als **Ausgangsfilter** werden in Umrichtern Drosseln eingesetzt, die als Reihenschaltung aus Induktivität und ohmschen Widerstand modelliert werden können. Diese RL-Konfiguration stellt einen Filter 1. Ordnung dar. Allerdings ist entweder aufgrund von parasitären Effekten oder durch bewussten Einbau auch eine Kapazität vorhanden, die zusammen mit der Drossel einen Ausgangsfilter 2. Ordnung bildet. Diese Verhältnisse sollten sich auch in der Modellstruktur widerspiegeln, weswegen der allgemeinere Fall eines LC-Filters bestehend aus der Induktivität  $L_{Inv}$  mit ohmschen Anteil  $R_{Inv}$  und der Kapazität  $C_{Inv}$  betrachtet wird. Das **Energienetz** ist eine umfangreiches Netzwerk, das sich aus einer Vielzahl von Erzeugern, Verbrauchern, Übertragungsleitungen, Transformatoren und weiteren Betriebsmitteln zusammensetzt, deren Zusammenschaltung zudem zeitvariant ist. Das Erstellen eines umfassenden ESBs ist daher nicht zielführend. Aber zu Modellierungs- und Analysezwecken ist es sinnvoll, das Energienetz nach dem Thévenin-Theorem zu einer Reihenschaltung aus Netzimpedanz und idealer Spannungsquelle zusammenzufassen [56], [57]. Als Netzimpedanz wird ein RL-Element bestehend aus  $R_{Netz}$  und  $L_{Netz}$  angenommen. Abb. 2.5 zeigt das resultierende ESB der netzseitigen Komponenten für eine elektrische Phase. Die Impedanzen und Signale sind in der Abbildung mit den in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen versehen. Durch den Zusammenschluss von LC-Filter und RL-Netzimpedanz ergibt sich insgesamt eine LCL-Struktur des elektrischen Netzwerkes zwischen Umrichter und Energienetz.

## 2.2. Netzsynchronisation unter dem Einfluss eines schwachen Netzes

Als Netzsynchronisation wird die Ermittlung der Netzspannungsparameter bezeichnet, um eine zur Netzspannung synchrone Umrichterspannung zu erzeugen [50]. Wichtigstes Merkmal der Synchronität zwischen beiden Spannungen ist, dass  $U_{Inv,abc}(t)$  im stationären Zustand dieselbe

Frequenz wie  $\mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$  aufweist und in transienten Fällen nur eine kurzzeitige Abweichung beider Frequenzen auftritt. Dadurch ist sichergestellt, dass die Differenz der Phasenlagen beider Spannungen nicht divergiert, was den Verlust der Netzsynchronität kennzeichnet [11], [12].

### 2.2.1. PLL-basierte Netzsynchronisation bei netzfolgender Einspeiseregelung

Auf Grundlage der Systembeschreibung und des hergeleiteten ESBs in Abb. 2.5 erfolgt eine Beschreibung der PLL-basierten Netzsynchronisation. Zu diesem Zweck wird die netzfolgende Einspeiseregelung eingeführt und regelungstechnisch eingeordnet. Zunächst wird ein starkes Netz mit  $R_{Netz} = 0$  und  $L_{Netz} = 0$  angenommen und zusätzlich soll für die Erklärungen  $C_{Inv} = 0$  sein, sodass die folgenden Zusammenhänge gelten:

$$\mathbf{U}_{CInv,abc}(t) = \mathbf{U}_{Netz,abc}(t) \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{I}_{Inv,abc}(t) = \mathbf{I}_{Netz,abc}(t). \quad (2.12b)$$

Die Aufgabe der Einspeiseregelung ist es, Wirk- und Blindleistung in das Netz einzuspeisen, daher sind beide Leistungen als Regelgrößen anzusehen. Das Stellglied der Einspeiseregelung ist der netzseitige Umrichter mit der Ausgangsspannung:

$$\mathbf{U}_{Inv,abc}(t) = \begin{bmatrix} \hat{U}_{Inv} \cos(\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}(t)) \\ \hat{U}_{Inv} \cos\left(\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}(t) - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \hat{U}_{Inv} \cos\left(\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}(t) - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Um die Leistungssollwerte umzusetzen, muss die Amplitude und die Phasenlage von (2.13) so eingestellt werden, dass ein geeigneter Stromfluss zum Netz resultiert. Da sich der Strom  $\mathbf{I}_{Inv,abc}(t)$  bzw.  $\mathbf{I}_{Netz,abc}(t)$  aufgrund der Spannungsdifferenz  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t) - \mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$  ergibt, ist eine Synchronisation von  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  auf  $\mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$  erforderlich. Dies wird durch die Verwendung einer PLL erreicht, welche aus der gemessenen Spannung  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  die Phasenlage ermittelt. Wegen (2.12a) entspricht der PLL-Phasenwinkel  $\tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  im eingeschwungenen Zustand dem Netzphasenwinkel  $\tilde{\varphi}_{U_{Netz}}$  gemäß (2.3), d.h. es gilt:

$$\tilde{\varphi}_{PLL}(t) = \omega_{Netz}t + \varphi_{Netz,0}. \quad (2.14)$$

Folglich ist sichergestellt, dass  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  mit der Frequenz  $\omega_{Netz}$  schwingt und daher synchron zur Netzspannung ist, wenn die Phase  $\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}$  mit  $\tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  gebildet wird:

$$\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}(t) = \tilde{\varphi}_{PLL}(t) + \Delta\varphi. \quad (2.15)$$

Durch den zusätzlichen Phasenvorlauf  $\Delta\varphi$  und die Amplitude  $\hat{U}_{Inv}$  ist es möglich  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  so einzustellen, dass sich aufgrund des resultierenden Stroms  $\mathbf{I}_{Inv,abc}(t)$  die geforderten Soll-

werte der Wirk- und Blindleistung ergeben.  $\hat{U}_{Inv}$  und  $\Delta\varphi$  können daher als Stellgrößen der netzfolgenden Einspeiseregelung angesehen werden.

Es existieren mehrere Möglichkeiten eine netzfolgende Einspeiseregelung zu implementieren. Verbreitet ist die spannungsorientierte Einspeiseregelung (engl. voltage oriented control, VOC), die auf der Park-Transformation mit dem Transformationswinkel  $\tilde{\varphi}_{Park}(t) = \tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  basiert und in  $dq$ -Koordinaten durchgeführt wird. Prinzipiell ist die VOC aus zwei kaskadierten Regelschleifen mit linearen PI-Reglern aufgebaut. Die Regelgrößen in den äußeren Kaskaden sind die Wirk- und die Blindleistung, wobei die Wirkleistung i.d.R. indirekt durch Konstanthalten der Zwischenkreisspannung  $U_{dc}$  geregelt wird. Die Stellgrößen der äußeren Kaskade sind die Ströme  $I_{Inv,d}$  sowie  $I_{Inv,q}$  und diese werden als Sollwerte an die Regler der inneren Kaskaden übergeben. Die Stellgröße dieser inneren Stromregler ist die Spannung  $\mathbf{U}_{Inv,dq}(t) = [U_{Inv,d}(t) \ U_{Inv,q}(t)]^T$ , welche mit der inversen Park-Transformation in die Form (2.13) überführt wird. Anschließend erfolgt die Erzeugung der Ansteuersignale für die IGBTs durch eine Modulation und als Resultat realisiert der netzseitige Umrichter die Spannung  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  [48], [49], [58].

Die bisherigen Ausführungen zur PLL-basierten Netzsynchronisation bezogen sich auf die Annahme (2.12a). Im Allgemeinen Fall muss aber von  $R_{Netz} \neq 0$  sowie  $L_{Netz} \neq 0$  und daher von  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t) \neq \mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$  ausgegangen werden. Die PLL ermittelt demzufolge die Phasenlage von  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  gemäß:

$$\mathbf{U}_{CInv,abc}(t) = \begin{bmatrix} \hat{U}_{CInv} \cos(\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t)) \\ \hat{U}_{CInv} \cos\left(\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \hat{U}_{CInv} \cos\left(\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

und im eingeschwungenen Zustand gilt anstelle von (2.14):

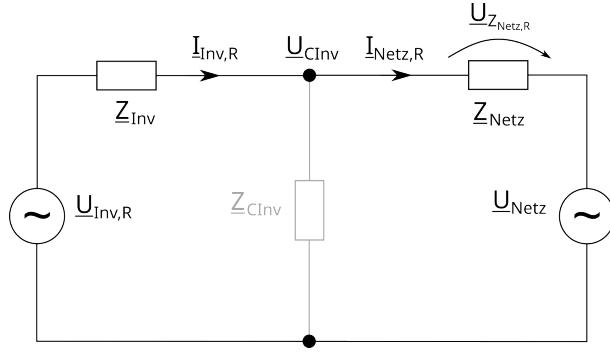
$$\tilde{\varphi}_{PLL}(t) = \tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t). \quad (2.17)$$

Sind  $R_{Netz}$  und  $L_{Netz}$  klein, dann liegt immer noch ein ausreichend starkes Netz vor und die Netzsynchronität des Umrichters ist gegeben. Die Phasenlage von  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  kann stationär nämlich mit  $\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) = \omega_{Netz}t + \varphi_{U_{CInv,R}}$  angegeben werden, wobei der Index  $R$  den Konstantwert in der Ruhelage kennzeichnet. Ist die PLL eingeschwungen resultiert dann für die Phasenlage der Umrichterspannung:

$$\tilde{\varphi}_{U_{Inv}}(t) = \omega_{Netz}t + \varphi_{U_{CInv,R}} + \Delta\varphi \quad (2.18)$$

und folglich schwingt  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  mit  $\omega_{Netz}$  und ist synchron zu  $\mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$ .

Je größer  $R_{Netz}$  und  $L_{Netz}$  sind, desto schwächer ist das Netz und desto größer ist die Abweichung zwischen  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  und  $\mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$ . Bei einer zu großen Differenz ist es der PLL nicht mehr möglich die Netzfrequenz aus der gemessenen Spannung  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  zu de-



**Abbildung 2.6.:** Reduziertes ESB zur Erläuterung der Ursachen des schwachen Netzes mit elektrischen Signalen und Impedanzen in komplexer Schreibweise.

tektieren. In der Folge erzeugt der Umrichter eine Ausgangsspannung mit einer deutlich von  $\omega_{Netz}$  abweichenden Frequenz, was den Verlust der Netzsynchronität bedeutet und zu hohen Stromamplituden führt, die ohne geeignete Schutzmaßnahmen die Betriebsmittel beschädigen.

### 2.2.2. Ursachen des schwachen Netzes

Die Erläuterungen des vorherigen Abschnittes belegen, dass die PLL-basierte Netzsynchronisation bei einem schwachen Netz instabil werden kann und dass ein schwaches Netz durch eine nicht vernachlässigbare Differenz zwischen Mess- und Netzspannung gekennzeichnet ist, die aufgrund der Netzimpedanz auftritt. Die Stärke des Netzes ist aber nicht nur von der Netzimpedanz selbst, sondern auch von weiteren Faktoren abhängig. Diese werden anhand des reduzierten ESBs in Abb. 2.6 mit den elektrischen Signalen in komplexer Schreibweise erläutert. Es gelten:

$$\underline{U}_{Inv,R}(t) = \hat{U}_{Inv,R} e^{j(\omega_{Netz}t + \varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R)} \quad (2.19a)$$

$$\underline{U}_{CInv,R}(t) = \hat{U}_{CInv,R} e^{j(\omega_{Netz}t + \varphi_{U_{CInv,R}})} \quad (2.19b)$$

$$\underline{U}_{Z_{Netz,R}}(t) = \hat{U}_{Z_{Netz,R}} e^{j(\omega_{Netz}t + \varphi_{U_{Z_{Netz,R}}})} \quad (2.19c)$$

$$\underline{I}_{Inv}(t) = \hat{I}_{Inv,R} e^{j(\omega_{Netz}t + \varphi_{I_{Inv,R}})} \quad (2.19d)$$

$$\underline{I}_{Netz}(t) = \hat{I}_{Netz,R} e^{j(\omega_{Netz}t + \varphi_{I_{Netz,R}})}. \quad (2.19e)$$

Die komplexe Netzspannung  $\underline{U}_{Netz}(t)$  ist bereits durch (2.7) definiert. Da die komplexwertige Darstellung nur im eingeschwungenen Zustand gültig ist, entsprechen die Amplituden sowie die frequenzunabhängigen Anteile der Phasen von (2.19) den Stationärwerten in der Ruhelage und sind daher mit dem Index  $R$  versehen. Die Filterimpedanz  $Z_{Inv}$ , die Netzimpedanz  $Z_{Netz}$  und die Impedanz des Filterkondensators  $Z_{CInv}$  sind im ESB ebenfalls in komplexer Schreibweise aufgeführt:

$$\underline{Z}_{Inv} = \hat{Z}_{Inv} e^{j\varphi_{Z_{Inv}}} = R_{Inv} + j\omega_{Netz} L_{Inv} \quad (2.20a)$$

$$\underline{Z}_{Netz} = \hat{Z}_{Netz} e^{j\varphi_{Z_{Netz}}} = R_{Netz} + j\omega_{Netz} L_{Netz} \quad (2.20b)$$

$$\underline{Z}_{CInv} = \hat{Z}_{CInv} e^{j\varphi_{Z_{CInv}}} = \frac{1}{(j\omega_{Netz} C_{Inv})}. \quad (2.20c)$$

$\underline{Z}_{CInv}$  wird für diese Betrachtung vernachlässigt, ist in (2.20) aber zur Vollständigkeit mit angegeben. Aufgrund des Stromflusses  $\underline{I}_{Netz,R}(t)$  tritt der Spannungsabfall  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}(t) = \underline{U}_{CInv,R}(t) - \underline{U}_{Netz}(t)$  auf, der sich nach dem ohmschen Gesetz und nach der Spannungsteilerregel wie folgt angeben lässt:

$$\underline{U}_{Z_{Netz,R}}(t) = \underline{Z}_{Netz} \underline{I}_{Netz,R}(t) \quad (2.21a)$$

$$= \frac{1}{\frac{\underline{Z}_{Inv}}{\underline{Z}_{Netz}} + 1} (\underline{U}_{Inv,R}(t) - \underline{U}_{Netz}(t)). \quad (2.21b)$$

Die Zeitabhängigkeit von (2.21) resultiert nur aus dem Term  $e^{j\omega_{Netz} t}$  der Ausdrücke (2.19) und da dieser gekürzt werden kann, wird auf die Zeitabhängigkeit im weiteren Verlauf des Abschnittes verzichtet.  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}$  ist nach (2.21a) sowohl von  $\underline{Z}_{Netz}$  als auch von  $\underline{I}_{Netz,R}$  abhängig. Folglich trägt neben der Netzimpedanz auch der Netzstrom zu  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}$  bei. Da  $\underline{I}_{Netz,R}$  als ein Maß für die eingespeiste Leistung des Umrichters angesehen werden kann, führt die Einspeisung selbst zu einer Schwächung des Netzes. Nach (2.21b) ist  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}$  außerdem von der Filterimpedanz  $\underline{Z}_{Inv}$  bzw. vom Verhältnis  $\frac{\underline{Z}_{Inv}}{\underline{Z}_{Netz}}$  abhängig. Demzufolge ist es möglich, dass die Netzimpedanz zwar einen großen Absolutwert annimmt, aber dennoch ein starkes Netz vorliegt, weil  $\underline{Z}_{Inv} \gg \underline{Z}_{Netz}$  ist.  $\underline{Z}_{Inv}$  kann aber nicht willkürlich groß ausgelegt werden, da dies mit Wirkleistungsverlusten einhergeht [15]. Weiterhin existiert eine Abhängigkeit der Netzstärke von der Amplitude der Netzspannung  $\hat{U}_{Netz}$ . Da eine höhere Spannungsamplitude bei konstanter Leistung eine geringere Stromamplitude  $\hat{I}_{Netz,R}$  bewirkt, reduziert sich der Spannungsabfall  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}$  bei hohem  $\hat{U}_{Netz}$ . Folglich ist das Netz umso stärker, je höher die Netzspannungsebene ist, in welche die Einspeisung erfolgt. Zusammengefasst ergeben sich aus den Ausführungen die folgenden Faktoren, welche die Stärke des Netzes beeinflussen:

**Netzimpedanz.** Eine hohe Netzimpedanz  $\underline{Z}_{Netz}$  verursacht einen hohen Spannungsabfall  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}$  und daher eine große Abweichung der Messspannung  $\underline{U}_{CInv,R}$  von der Netzspannung  $\underline{U}_{Netz}$  ab. Folglich ist das Netz schwächer, je größer  $\underline{Z}_{Netz}$  ist.

**Arbeitspunkt des Einspeisers.** Je mehr Leistung vom Umrichter in das Netz eingespeist wird, desto größer ist der Netzstrom  $\underline{I}_{Netz,R}$ , wodurch ein hoher Spannungsabfall  $\underline{U}_{Z_{Netz,R}}$  und ein schwächeres Netzes resultiert. Da die eingespeiste Leistung von den Stellgrößen der Einspeiseregelung bestimmt wird, beeinflussen  $\hat{U}_{Inv,R}$  und  $\Delta\varphi_R$  die Netzstärke.

**Filterimpedanz.** Durch eine große Filterimpedanz  $\underline{Z}_{Inv}$  reduziert sich der Einfluss der Netz-

impedanz  $\underline{Z}_{Netz}$  wodurch ein stärkeres Netz resultiert. Eine große Filterimpedanz erhöht aber auch die Wirkleistungsverluste.

**Hierarchieebene des Netzanschlusspunktes.** Die Netzhierarchieebene bestimmt die Amplitude der Netzspannung  $\hat{U}_{Netz}$ . Je größer sie ist, desto kleiner ist die Stromamplitude  $\hat{I}_{Netz,R}$  bei gleicher Einspeiseleistung und desto stärker ist das Netz.

Die Auflistung beschreibt die Auswirkungen der einzelnen Faktoren auf die Stärke des Netzes nur qualitativ. Eine Möglichkeit die Stärke des Netzes quantitativ anzugeben, bietet das SCR, welches die genannten Faktoren zusammenfasst. Eine Definition des SCR ist [59], [20]:

$$SCR = \frac{3}{2} \frac{\hat{U}_{Netz}^2}{\hat{Z}_{Netz} P_{Inv,R}}, \quad (2.22)$$

mit der eingespeisten Wirkleistung des Umrichters  $P_{Inv,R}$ . Im stationären Zustand und mit der üblichen Annahme, dass  $\underline{Z}_{Inv}$  eine reine Induktivität ist, ergibt sich  $P_{Inv}$  nach [32], [50]:

$$P_{Inv,R} = \frac{3}{2} \frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{U}_{CInv,R}}{\hat{Z}_{Inv}} \sin(\Delta\varphi_R). \quad (2.23)$$

Nach (2.23) repräsentiert  $P_{Inv,R}$  im SCR sowohl den Einfluss der Stellgrößen  $\hat{U}_{Inv,R}$  und  $\Delta\varphi_R$  als auch den der Filterimpedanz  $\hat{Z}_{Inv}$ . Im Allgemeinen gilt bei  $SCR > 3$  das betrachtete Netz als stark, während  $SCR < 2$  ein schwaches Netz kennzeichnet [59]. Eine exakte Abgrenzung zwischen einem schwachen und einem starken Netz bietet das SCR aber nicht und lässt auch keine Aussage über die Stabilität der Netzsynchronisation zu. Zudem ist es nicht zur Bewertung von transienten Übergängen geeignet.

### 2.2.3. Konkretisierung der Aufgabenstellung

In den vorherigen Abschnitten wurde herausgearbeitet, dass die Netzsynchronität eine essenzielle Voraussetzung für die Stabilität der netzfolgenden Einspeiseregelung ist. Im stationären Zustand ist die Netzsynchronität bei Übereinstimmung der Frequenzen von Umrichter- und Netzspannung gegeben. Nach (2.15) ist  $\dot{\varphi}_{PLL}(t)$  die Frequenz von  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  und in Abschnitt 2.3.2 wird gezeigt, dass sich  $\dot{\varphi}_{PLL}(t)$  aus der Integration der PLL-Kreisfrequenz  $\omega_{PLL}(t)$  ergibt. Es resultiert daher die folgende Definition der Netzsynchronität im stationären Zustand:

$$\omega_{PLL}(t) = \omega_{Netz}. \quad (2.24)$$

Bei Übergangsvorgängen weicht  $\omega_{PLL}(t)$  aber notwendigerweise von  $\omega_{Netz}$  ab (s. Abschnitt 2.3.2), sodass (2.24) in transienten Fällen keine geeignete Definition darstellt. Stattdessen wird die Netzsynchronität in Anlehnung an das Synchronitätsverhalten von Synchrongeneratoren auf Grundlage der Phasendifferenz zwischen  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  und  $\mathbf{U}_{Netz,abc}(t)$  definiert und ist gegeben, wenn

$$|\tilde{\varphi}_{PLL}(t) + \Delta\varphi - \tilde{\varphi}_{U_{Netz}}(t)| \quad (2.25)$$

nicht divergiert. Als zentrale Herausforderung der PLL-basierten Netzsynchronisation ist die Problematik des schwachen Netzes identifiziert worden. Es wurde dargelegt, dass die Stärke des Netzes durch die Netz- und Filterimpedanz, die eingespeiste Leistung des Umrichters sowie die Netzhierarchieebene beeinflusst wird und durch das SCR quantifiziert werden kann. Die konkreten Beziehungen zwischen den genannten Einflussfaktoren bzw. dem SCR und der Netzsynchronisation sind jedoch unklar und insbesondere für den transienten Fall existiert keine präzise Bedingung, unter der die Netzsynchronisation bei einem schwachen Netz stabil ist.

Die Aufgabe in dieser Arbeit ist es daher, die Netzsynchronisation unter dem Einfluss eines schwachen Netzes zu analysieren und Bedingungen für deren Stabilität herzuleiten. Die Bearbeitung der Aufgabe soll schrittweise erfolgen: Zuerst ist der Einfluss des schwachen Netzes auf die Netzsynchronisation für den stationären Zustand grundlegend darzustellen und auf Basis der Definition (2.24) zu prüfen, ob die PLL-basierte Netzsynchronisation möglich ist. Darauf aufbauend ist die Systemdynamik zu berücksichtigen und es soll die für Energiesysteme typische Unterteilung der Analyse in die Kleinsignalstabilität und die transiente Stabilität vorgenommen werden. Für die Kleinsignalstabilität ist eine Linearisierung in der Ruhelage durchzuführen und die Stabilität des resultierenden linearen Systems zu untersuchen. Die auf diese Weise ermittelten Eigenschaften gelten auch für das originale System, wenn es sich in der Ruhelage bzw. in einer kleinen Umgebung um die Ruhelage befindet. Bezuglich der transienten Stabilität ist das Systemverhalten dann beim Übergang von einer stabilen Ruhelage zu einer zweiten unter Berücksichtigung der wesentlichen Nichtlinearitäten zu betrachten. Ziel ist die Herleitung einer Bedingung, unter der die Phasendifferenz (2.25) nicht divergiert, die Netzsynchronität während des Übergangs folglich stabil ist und sich das System in der Zielruhelage einschwingt. Die Regelung des Umrichters soll nicht Bestandteil der durchgeführten Stabilitätsuntersuchung sein. Dementsprechend wird der Umrichter nicht als gesteuerte Stromquelle mit dem eingespeisten Strom als Stellgröße angesehen, sondern es wird die Spannung  $\mathbf{U}_{Inv,abc}(t)$  gemäß (2.13) bzw. deren Amplitude und Phase als Stellgröße betrachtet. Des Weiteren fließen Beschränkungen aufgrund von leistungselektronischen Parametern, wie z.B. Maximalwerte von Stromamplituden, nicht mit in die Untersuchungen ein.

## 2.3. Modellbildung

In Kapitel 2.1.3 sind die netzseitigen Komponenten eines umrichterbasierten Einspeisers beschrieben worden. Auf dieser Basis erfolgt nun die Modellbildung mit der Zielsetzung, Stabilitätsuntersuchungen und numerische Simulationen durchzuführen.

### 2.3.1. Elektrisches Netzwerk

Das elektrische Netzwerk besteht aus dem netzseitigen Umrichter, dem Ausgangsfilter und dem Energienetz. Die Modellgleichungen basieren auf dem ESB in Abb. 2.5, in welchem die relevanten Signale und Impedanzen bezeichnet sind. Die Zustände des Netzwerks sind die elektrischen Ströme der Induktivitäten  $I_{Inv}(t)$  und  $I_{Netz}(t)$  sowie die Spannung des Filterkondensators  $U_{CInv}(t)$ . Die Differentialgleichungen dieser Zustände in Matrizenschreibweise sind für eine elektrische Phase:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{Inv}(t) \\ \dot{I}_{Netz}(t) \\ \dot{U}_{CInv}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{Inv}}{L_{Inv}} & 0 & -\frac{1}{L_{Inv}} \\ 0 & -\frac{R_{Netz}}{L_{Netz}} & \frac{1}{L_{Netz}} \\ \frac{1}{C_{Inv}} & -\frac{1}{C_{Inv}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Inv}(t) \\ I_{Netz}(t) \\ U_{CInv}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{Inv}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_{Inv}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_{Netz}} \\ 0 \end{bmatrix} U_{Netz}(t). \quad (2.26)$$

Die Umrichterspannung  $U_{Inv}(t)$  ist nach (2.13):

$$U_{Inv}(t) = \hat{U}_{Inv} \cos(\tilde{\varphi}_{PLL}(t) + \Delta\varphi), \quad (2.27)$$

und die Netzspannung  $U_{Netz}(t)$  ist durch (2.2) gegeben. Mit  $U_{Inv}(t)$  und  $U_{Netz}(t)$  als Eingänge ist (2.26) ein lineares System. Betrachtet man dagegen  $\hat{U}_{Inv}$  und  $\Delta\varphi$  als Systemeingänge, dann ist das elektrische Netzwerk aufgrund der trigonometrischen Funktion in (2.27) nichtlinear.

### 2.3.2. Phasenregelschleife

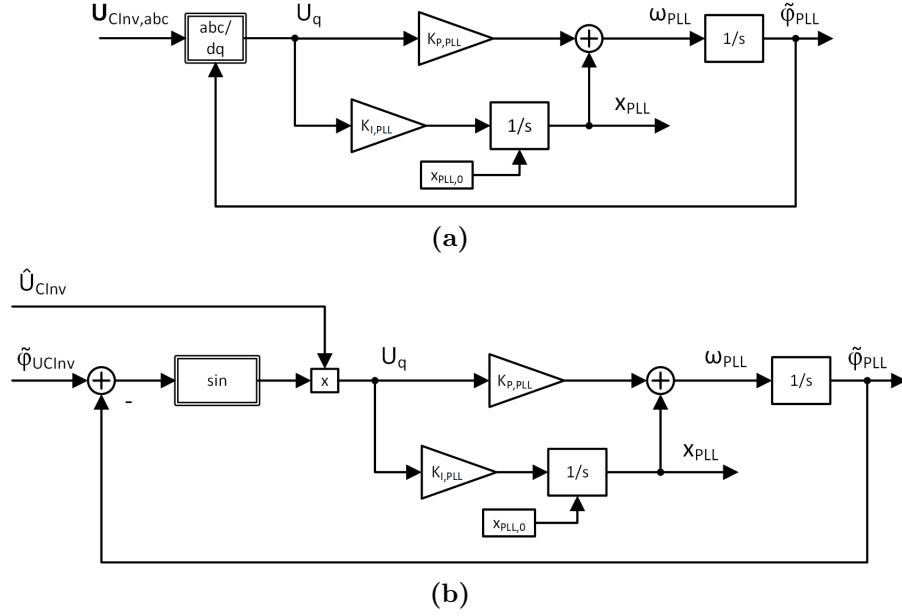
Als PLL wird eine SRF-PLL betrachtet [60], [61]. Das Eingangssignal der PLL ist die dreiphasige Messspannung  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  gemäß (2.16) und das Ausgangssignal ist der PLL-Phasenwinkel  $\tilde{\varphi}_{PLL}(t)$ . Wie bereits in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, ist es die Aufgabe der PLL den Phasenwinkel der Eingangsspannung zu ermitteln. Um dieses Ziel zu erreichen wird die Park-Transformation auf  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$  mit dem Transformationswinkel  $\tilde{\varphi}_{Park}(t) = \tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  angewandt und die Eigenschaft (2.11b) ausgenutzt. Nach (2.8) resultiert für die  $q$ -Komponente:

$$U_q(t) = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} \sin(\tilde{\varphi}_{PLL}(t)) \\ \sin\left(\tilde{\varphi}_{PLL}(t) - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin\left(\tilde{\varphi}_{PLL}(t) - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}^T \mathbf{U}_{CInv,abc}(t) \quad (2.28a)$$

$$= \hat{U}_{CInv}(t) \sin(\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) - \tilde{\varphi}_{PLL}(t)) \quad (2.28b)$$

und es gilt  $U_q(t) = 0$ , wenn sich der PLL-Phasenwinkel auf

$$\tilde{\varphi}_{PLL}(t) = \tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) \quad (2.29)$$



**Abbildung 2.7.:** Blockschaltbilder der SRF-PLL (a) PLL-Eingangstransformation nach (2.28a) (b) PLL-Eingangstransformation nach (2.28b).

einschwingt. Das Signal  $U_q(t)$  entspricht folglich dem Regelfehler der PLL und wird dem Schleifenfilter zugeführt, der bei einer SRF-PLL als PI-Regler ausgeführt ist. Der Ausgang des PI-Schleifenfilters ist die Kreisfrequenz  $\omega_{PLL}(t)$  aus der sich  $\tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  durch Integration ergibt. Als Differentialgleichungen der PLL resultieren mit dem Zustand  $x_{PLL}(t)$  sowie den Parametern  $K_{P,PLL}$  und  $K_{I,PLL}$  des PI-Schleifenfilters:

$$\dot{x}_{PLL}(t) = K_{I,PLL} U_q(t) \quad (2.30a)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}}_{PLL}(t) = K_{P,PLL} U_q(t) + x_{PLL}(t). \quad (2.30b)$$

Der Zustand  $x_{PLL}(t)$  wird mit der Netzkreisfrequenz initialisiert:  $x_{PLL}(0) = \omega_{Netz}$ . Ist das Ziel der PLL (2.29) nicht erfüllt, gilt  $U_q(t) \neq 0$  und  $\omega_{PLL}(t)$  wird gemäß

$$\omega_{PLL}(t) = \dot{\tilde{\varphi}}_{PLL}(t) = K_{P,PLL} U_q(t) + x_{PLL}(t) \quad (2.31)$$

nachgeführt, sodass sich die Differenz  $\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) - \tilde{\varphi}_{PLL}(t)$  verkleinert. Entsprechend gilt in transienten Fällen zwangsläufig  $\omega_{PLL}(t) \neq \omega_{Netz}$ . Die Blockschaltbilder der SRF-PLL mit  $U_q(t)$  nach (2.28a) und (2.28b) sind in Abb. 2.7a und 2.7b dargestellt.

### Parametrierung der PLL

Eine Parametrierung des PLL-Schleifenfilters für die Anwendung zur Netzsynchronisation wird in [62] vorgeschlagen. Die Parametrierung basiert auf einer Linearisierung der PLL in der Ruhelage  $\tilde{\varphi}_{PLL,R} = \tilde{\varphi}_{U_{CInv,R}}$  und  $x_{PLL,R} = \omega_{Netz}$ . Mit Annahme einer konstanten Amplitude der Eingangsspannung  $\hat{U}_{CInv} = \hat{U}$  resultiert für die Eingendynamik der linearisierten PLL die Zustandsgleichung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{PLL,L}(t) \\ \dot{\tilde{\varphi}}_{PLL,L}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{PLL} \begin{bmatrix} x_{PLL,L}(t) \\ \tilde{\varphi}_{PLL,L}(t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

mit  $x_{PLL,L}(t) = x_{PLL}(t) - x_{PLL,R}$  und  $\tilde{\varphi}_{PLL,L}(t) = \tilde{\varphi}_{PLL}(t) - \tilde{\varphi}_{U_{CInv,R}}$  sowie der Systemmatrix:

$$\mathbf{A}_{PLL} = \begin{bmatrix} 0 & -K_{I,PLL}\hat{U} \\ 1 & -K_{P,PLL}\hat{U} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}_{PLL}$  sind:

$$\lambda_{PLL,1,2} = -\frac{K_{P,PLL}}{2}\hat{U} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{P,PLL}}{2}\hat{U}\right)^2 - K_{I,PLL}\hat{U}}. \quad (2.34)$$

Mit den folgenden Parametern werden beide Eigenwerte auf der negativen reellen Achse bei  $-\rho$  positioniert:

$$K_{P,PLL} = \frac{2\rho}{\hat{U}} \quad (2.35a)$$

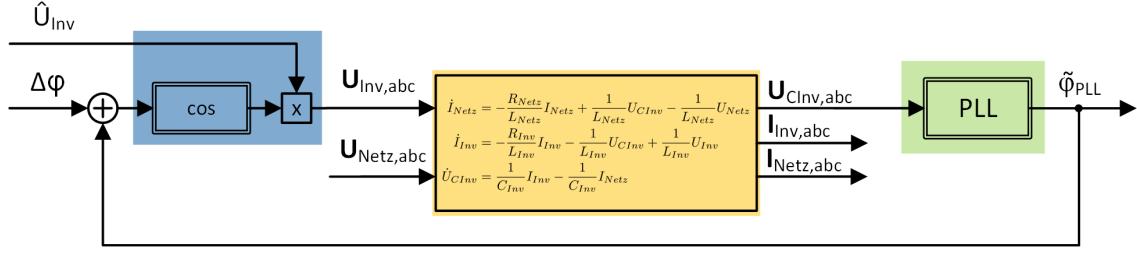
$$K_{I,PLL} = \frac{\rho^2}{\hat{U}}. \quad (2.35b)$$

Eine übliche Parametrierung der PLL ist  $\hat{U} = \hat{U}_{Netz}$  und  $\rho \in [2\pi 5; 2\pi 30]$  [62], [58].

In Abb. 2.8 sind die Modellgleichungen als Blockschaltbild dargestellt und die einzelnen Komponenten des Systems sind zur Übersicht farblich gekennzeichnet.

#### 2.3.3. Transformation der Modellgleichungen

Da die elektrischen Ströme und Spannungen des Systems Wechselgrößen sind, oszillieren  $I_{Inv}(t)$ ,  $I_{Netz}(t)$  und  $U_{CInv}(t)$  auch im stationären Zustand. Für regelungstechnische Analysen ist dieser Umstand ungeeignet. Die Modellgleichungen werden daher transformiert, sodass die elektrischen Zustände durch ihre Amplitude und Phasenlage dargestellt werden und Gleichgrößen sind. Die Herleitung der Modellgleichungen in dieser Form erfolgt am Beispiel der



**Abbildung 2.8.:** Modellgleichungen des Systems als Blockschaltbild mit farblich gekennzeichneten Teilkomponenten. Blau: Umrichterspannung nach (2.13), gelb: elektrisches Netzwerk nach (2.26), grün: PLL nach (2.30) mit der Eingangstransformation (2.28a). Die Umrichterspannung und das elektrische Netzwerk sind für die Übersichtlichkeit nur einphasig dargestellt.

Messspannung  $\mathbf{U}_{CInv,abc}(t)$ . Für die Amplitude  $\hat{U}_{CInv}(t)$  gilt (vgl. (2.7)):

$$\hat{U}_{CInv}(t) = \sqrt{U_{CInv,\alpha}(t)^2 + U_{CInv,\beta}(t)^2} \quad (2.36a)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} (U_{CInv,a}(t)^2 + U_{CInv,b}(t)^2 + U_{CInv,c}(t)^2)} \quad (2.36b)$$

und die erste zeitliche Ableitung ist:

$$\dot{\hat{U}}_{CInv}(t) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{(U_{CInv,a}(t)\dot{U}_{CInv,a}(t) + U_{CInv,b}(t)\dot{U}_{CInv,b}(t) + U_{CInv,c}(t)\dot{U}_{CInv,c}(t))}{\sqrt{U_{CInv,a}(t)^2 + U_{CInv,b}(t)^2 + U_{CInv,c}(t)^2}}}. \quad (2.37)$$

Für die Phasenlage  $\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t)$  und deren Ableitung resultieren:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) &= \arctan \left( \frac{U_{CInv,\beta}(t)}{U_{CInv,\alpha}(t)} \right) \\ &= \arctan \left( \frac{U_{CInv,b}(t) - U_{CInv,c}(t)}{\sqrt{3}U_{CInv,a}(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.38a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varphi}}_{U_{CInv}}(t) &= \left[ \left( \sqrt{3}\dot{U}_{CInv,b}(t) - \dot{U}_{CInv,c}(t) \right) U_{CInv,a}(t) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{3}(U_{CInv,b}(t) - U_{CInv,c}(t))\dot{U}_{CInv,a}(t) \right] \\ &\quad \left[ 3U_{CInv,a}(t)^2 \left( 1 + \left( \frac{U_{CInv,b}(t) - U_{CInv,c}(t)}{\sqrt{3}U_{CInv,a}(t)} \right)^2 \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.38b)$$

Die Phasenlage  $\tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t)$  ist im stationären Zustand rampenförmig und wird durch Subtraktion von  $\omega_{Netz}t$  auf einen Konstantwert transformiert:

$$\varphi_{U_{CInv}}(t) = \tilde{\varphi}_{U_{CInv}}(t) - \omega_{Netz} t. \quad (2.39)$$

Die Ableitung von (2.39) ist:

$$\dot{\varphi}_{U_{CInv}}(t) = \dot{\tilde{\varphi}}_{U_{CInv}}(t) - \omega_{Netz}. \quad (2.40)$$

Die finalen Differentialgleichungen von  $\dot{\hat{U}}_{CInv}(t)$  und  $\dot{\varphi}_{U_{CInv}}(t)$  resultieren, indem (2.26) mit entsprechendem Versatz für die Phasen  $B$  und  $C$  in (2.37) und (2.38b) eingesetzt wird. Analog zu (2.36) - (2.40) ergeben sich die Ausdrücke für Amplitude und Phase des Umrichter- und des Netzstroms. Die transformierten Modellgleichungen des Systems sind dann:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.41)$$

mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{I}_{Inv}(t) & \varphi_{I_{Inv}}(t) & \hat{I}_{Netz}(t) & \varphi_{I_{Netz}}(t) & \hat{U}_{CInv}(t) & \varphi_{U_{CInv}}(t) & x_{PLL}(t) & \varphi_{PLL}(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \hat{U}_{Inv}(t) & \Delta\varphi(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.42b)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & f_3(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \dots & f_8(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix}^T \quad (2.42c)$$

und

$$f_1 = \frac{1}{L_{Inv}} \left[ -R_{Inv} \hat{I}_{Inv}(t) - \hat{U}_{CInv}(t) \cos(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Inv}}(t)) + \hat{U}_{Inv} \cos(\varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi - \varphi_{I_{Inv}}(t)) \right] \quad (2.43a)$$

$$f_2 = \frac{1}{L_{Inv}} \left[ -\frac{\hat{U}_{CInv}(t)}{\hat{I}_{Inv}(t)} \sin(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Inv}}(t)) + \frac{\hat{U}_{Inv}}{\hat{I}_{Inv}(t)} \sin(\varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi - \varphi_{I_{Inv}}(t)) \right] - \omega_{Netz} \quad (2.43b)$$

$$f_3 = \frac{1}{L_{Netz}} \left[ -R_{Netz} \hat{I}_{Netz}(t) + \hat{U}_{CInv}(t) \cos(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Netz}}(t)) - \hat{U}_{Netz} \cos(\varphi_{Netz,0} - \varphi_{I_{Netz}}(t)) \right] \quad (2.43c)$$

$$f_4 = \frac{1}{L_{Netz}} \left[ \frac{\hat{U}_{CInv}(t)}{\hat{I}_{Netz}(t)} \sin(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Netz}}(t)) - \frac{\hat{U}_{Netz}}{\hat{I}_{Netz}(t)} \sin(\varphi_{Netz,0} - \varphi_{I_{Netz}}(t)) \right] - \omega_{Netz} \quad (2.43d)$$

$$f_5 = \frac{1}{C_{Inv}} \left[ \hat{I}_{Inv}(t) \cos(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Inv}}(t)) - \hat{I}_{Netz}(t) \cos(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Netz}}(t)) \right] \quad (2.43e)$$

$$f_6 = \frac{1}{C_{Inv}} \left[ \frac{\hat{I}_{Netz}(t)}{\hat{U}_{CInv}(t)} \sin(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Netz}}(t)) - \frac{\hat{I}_{Inv}(t)}{\hat{U}_{CInv}(t)} \sin(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{I_{Inv}}(t)) \right] - \omega_{Netz} \quad (2.43f)$$

$$f_7 = K_{I,PLL} U_q(t) \quad (2.43g)$$

$$f_8 = K_{P,PLL} U_q(t) + x_{PLL}(t) - \omega_{Netz}. \quad (2.43h)$$

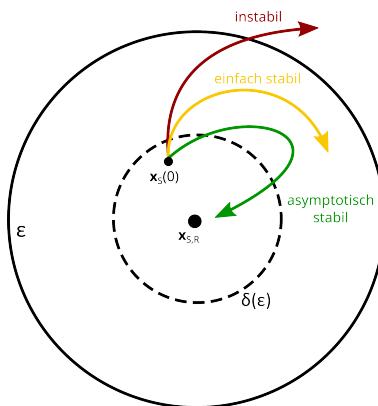
Mit den Modellgleichungen (2.41) liegt das System in Gleichgrößen vor, auf deren Basis in Kapitel 3.2.1 die Ruhelagen des System ermittelt werden und eine Linearisierung vorgenommen wird.

## 2.4. Regelungstechnische Methoden

In diesem Abschnitt werden für die Arbeit relevante theoretische Grundlagen sowie Methoden vorgestellt und beschrieben.

### 2.4.1. Stabilitätsbegriff von Ljapunow

Die Stabilität ist eine Systemeigenschaft und das wichtigste Merkmal eines Regelkreises. Für lineare Systemen existieren mehrere Methoden, um die Stabilität eindeutig und für die gesamte Zustandsebene nachzuweisen. Im Fall von nichtlinearen Systemen beziehen sich Stabilitätsuntersuchungen aber üblicherweise auf die Stabilität einer Ruhelage [63]. Hierfür hat sich die „Stabilität im Sinne von Ljapunow“ als Stabilitätsbegriff etabliert. Eine Ruhelage ist nach Ljapunow einfach stabil, wenn die Systemtrajektorie vom Initialzustand ausgehend in einer begrenzten Umgebung der Ruhelage verbleibt. Geht die Trajektorie in die Ruhelage zurück, dann ist sie asymptotisch stabil. Divergiert die Trajektorie, dann ist die Ruhelage instabil [63], [64]. In Abb. 2.9 sind die genannten Stabilitätsbegriffe nach Ljapunow anhand von Trajektorien in einer zweidimensionalen Zustandsebene veranschaulicht.



**Abbildung 2.9.:** Illustration zur Stabilität einer Ruhelage nach dem Stabilitätsbegriff von Ljapunow.

Eine formale Definition der Ljapunow-Stabilität wird nach [64] angegeben. Betrachtet wird das allgemeine dynamische System

$$\dot{\mathbf{x}}_S(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S(t)) \quad (2.44)$$

mit der Ruhelage  $\mathbf{x}_{S,R}$ .  $\mathbf{x}_{S,R}$  ist einfach stabil im Sinne von Ljapunow, wenn  $\epsilon > 0$  und  $\delta(\epsilon) > 0$  existieren und für die Trajektorie  $\mathbf{x}_S(t)$  mit dem Initialzustand  $\mathbf{x}_s(0)$  die folgenden Eigenschaften gelten:

$$\|\mathbf{x}_S(0) - \mathbf{x}_{S,R}\| < \delta \quad (2.45a)$$

$$\|\mathbf{x}_S(t) - \mathbf{x}_{S,R}\| < \epsilon \quad \forall t > 0. \quad (2.45b)$$

Gilt außerdem:

$$\|\mathbf{x}_S(t)\| \rightarrow \mathbf{x}_{S,R} \quad (2.46)$$

für  $t \rightarrow \infty$ , d.h. endet die Trajektorie in der Ruhelage, so ist  $\mathbf{x}_{S,R}$  asymptotisch stabil.

## 2.4.2. Abschätzung des Maximalwertes einer Sprungantwort mit Signalnormen

Der Maximalwert der Sprungantwort einer Übertragungsfunktion kann mithilfe von Signalnormen abgeschätzt werden. Die zu diesem Zweck verwendeten Normen werden zunächst definiert [65], [66]. Die Maximumsnorm des Signals  $y(t)$  ist das Supremum von  $|y(t)|$  im Intervall  $t \in [0; \infty]$ . Die Definition ist:

$$\|y(t)\|_\infty = \sup_t |y(t)|. \quad (2.47)$$

Die  $L_1$ -Norm des Signals  $y(t)$  ist definiert als:

$$\|y(t)\|_1 = \int_0^\infty |y(t)| dt. \quad (2.48)$$

Für das lineare System mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$ , dem Eingang  $u(t)$  und dem Ausgang  $y(t)$  gilt der folgende Zusammenhang zwischen den Maximumsnormen von  $u(t)$  und  $y(t)$  [65]:

$$\|y(t)\|_\infty \leq \|g(t)\|_1 \|u(t)\|_\infty. \quad (2.49)$$

Hier ist  $g(t)$  die Impulsantwort von  $G(s)$ , die sich mit der Laplace-Rücktransformation ergibt:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (2.50)$$

Die Berechnung von  $\|g(t)\|_1$  nach (2.48) ist für Systeme niedriger Ordnung analytisch möglich und wird für ein PT2-System mit zusätzlicher Nullstelle gezeigt. Die betrachtete Übertragungsfunktion mit normiertem Nenner ist:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.51)$$

Es wird davon ausgegangen, dass  $G(s)$  stabil ist und sich die Nullstelle in der linken Halbebene befindet. Durch Umformungen erhält man:

$$G(s) = b_1 \frac{(s + \tau)}{(s + \tau)^2 + \omega_0^2} + \frac{(b_0 - b_1\tau)}{\omega_0} \frac{\omega_0}{(s + \tau)^2 + \omega_0^2} \quad (2.52)$$

mit

$$\tau = \frac{a_1}{2} \quad (2.53a)$$

$$\omega_0^2 = a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2. \quad (2.53b)$$

Die Impulsantwort von (2.52) ist [67], [68]:

$$g(t) = b_1 e^{-\tau t} \cos(\omega_0 t) + \frac{(b_0 - b_1\tau)}{\omega_0} e^{-\tau t} \sin(\omega_0 t). \quad (2.54)$$

Gemäß (2.48) ist zur Berechnung der  $L_1$ -Norm das Integral über den Absolutbetrag von  $g(t)$  zu bilden. Dies ist möglich, indem das Integral abschnittsweise, jeweils bis zur nächsten Nullstelle von  $g(t)$ , berechnet wird. Die Nullstellen von  $g(t)$  sind:

$$t_{0,k} = -\frac{1}{\omega_0} \arctan\left(\frac{b_1\omega_0}{b_0 - b_1\tau}\right) + \frac{1}{\omega_0} k\pi \quad (2.55)$$

mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Die  $L_1$ -Norm von  $g(t)$  ist dann:

$$\begin{aligned}\|g(t)\|_1 &= \int_{t_{0,0}}^{t_{0,1}} |g(t)| dt + \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} |g(t)| dt + \int_{t_{0,2}}^{t_{0,3}} |g(t)| dt + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left| \int_{t_{0,k}}^{t_{0,k+1}} g(t) dt \right| \right),\end{aligned}\quad (2.56)$$

mit

$$\begin{aligned}\int g(t) dt &= b_1 \frac{e^{-\tau t}}{(\tau^2 + \omega_0^2)} (-\tau \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)) \\ &\quad + \frac{(b_0 - b_1 \tau)}{\omega_0} \frac{e^{-\tau t}}{(\tau^2 + \omega_0^2)} (-\tau \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \cos(\omega_0 t)).\end{aligned}\quad (2.57)$$

Zur Implementierung von (2.56) ist es notwendig, die Summenbildung bei einem  $k < \infty$  abzubrechen, beispielsweise bei einem Vielfachen der Zeitkonstanten  $\tau$ . Für Systeme höherer Ordnung ist die gezeigte Berechnung von  $\|g(t)\|_1$  sehr aufwendig oder nicht analytisch möglich. In diesen Fällen kann auf eine numerische Bestimmung von  $\|g(t)\|_1$  zurückgegriffen werden [69].

Es besteht die Möglichkeit, dass nach (2.53b)  $\omega_0^2 < 0$  ist. Tritt dieser Fall ein, muss  $\omega_0$  mit  $\omega_0^* = \sqrt{|\omega_0^2|}$  und alle trigonometrischen Funktionen durch die entsprechenden hyperbolischen Funktionen ersetzt werden [68]. Es gelten dann die folgenden Ausdrücke:

$$g^*(t) = b_1 e^{-\tau t} \cosh(\omega_0^* t) + \frac{(b_0 - b_1 \tau)}{\omega_0^*} e^{-\tau t} \sinh(\omega_0^* t) \quad (2.58a)$$

$$t_{0,k}^* = -\frac{1}{\omega_0^*} \operatorname{arctanh} \left( \frac{b_1 \omega_0^*}{b_0 - b_1 \tau} \right) + \frac{1}{\omega_0^*} k \pi \quad (2.58b)$$

$$\begin{aligned}\int g^*(t) dt &= b_1 \frac{e^{-\tau t}}{(\tau^2 + \omega_0^{*2})} (-\tau \cosh(\omega_0^* t) + \omega_0^* \sin(\omega_0^* t)) \\ &\quad + \frac{(b_0 - b_1 \tau)}{\omega_0^*} \frac{e^{-\tau t}}{(\tau^2 + \omega_0^{*2})} (-\tau \sinh(\omega_0^* t) - \omega_0 \cos(\omega_0^* t)).\end{aligned}\quad (2.58c)$$

### 2.4.3. Berechnung des Maximalwertes einer Sprungantwort

Für lineare Systeme niedriger Ordnung sind analytische Lösungen für den Zeitbereich in der Literatur angegeben. Basierend auf Ausführungen in [67] wird hier der Maximalwert einer Sprungantwort für ein stabiles PT2-System mit zusätzlicher Nullstelle in der linken Halbebene durch Extremwertrechnung bestimmt. Die Übertragungsfunktion des betrachteten Systems mit normiertem Nenner ist (2.51) und kann in einen PT2-Anteil und einen PT2-Anteil, welcher mit  $s$  multipliziert wird, zerlegt werden:

$$\begin{aligned} G(s) &= b_0 \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} + b_1 s \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ &= b_0 G_{PT2}(s) + b_1 s G_{PT2}(s). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Da eine Multiplikation mit  $s$  im Laplacebereich einer Differentiation im Zeitbereich entspricht, ergibt sich für die Sprungantwort von  $G(s)$ :

$$y(t) = b_0 y_{PT2}(t) + b_1 \dot{y}_{PT2}(t). \quad (2.60)$$

$y_{PT2}(t)$  ist die aus der Literatur bekannte Sprungantwort von  $G_{PT2}(s)$  auf einen Einheitssprung bei  $t = 0$ :

$$y_{PT2}(t) = \frac{1}{\tau^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\tau t} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{\tau}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \right] \quad (2.61)$$

mit  $\tau$  und  $\omega_0$  nach (2.53). Die ersten beiden zeitlichen Ableitungen von (2.60) sind:

$$\dot{y}(t) = b_0 \dot{y}_{PT2}(t) + b_1 \ddot{y}_{PT2}(t) \quad (2.62a)$$

$$\ddot{y}(t) = b_0 \ddot{y}_{PT2}(t) + b_1 \dddot{y}_{PT2}(t) \quad (2.62b)$$

mit:

$$\dot{y}_{PT2}(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\tau t} \sin(\omega_0 t) \quad (2.63a)$$

$$\ddot{y}_{PT2}(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\tau t} (\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \tau \sin(\omega_0 t)) \quad (2.63b)$$

$$\dddot{y}_{PT2}(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\tau t} \left[ (\tau^2 - \omega_0^2) \sin(\omega_0 t) - 2\tau\omega_0 \cos(\omega_0 t) \right]. \quad (2.63c)$$

Aus  $\dot{y}(t) = 0$  ergeben sich die potentiellen Extrempunkte:

$$t_{Ex,k} = -\frac{1}{\omega_0} \arctan \left( \frac{b_1 \omega_0}{b_0 - b_1 \tau} \right) + \frac{1}{\omega_0} k\pi \quad (2.64)$$

mit  $k \in \mathbb{Z}$  aufgrund der Periodizität der arctan-Funktion. Bei einer Sprungantwort eines stabilen linearen Systems weist das erste Überschwingen nach der Anregung den größten Funktionswert auf. Es kann davon ausgegangen werden, dass der erste Extrempunkt mit  $t_{Ex,k} > 0$  ein Maximum ist, da für die Übertragungsfunktion (2.51) die Nullstelle in der linken Halbebene angenommen wurde und es sich folglich um ein Minimalphasensystem handelt. Der gesuchte Maximalwert der Sprungantwort ist daher der Funktionswert von (2.60) an der Stelle  $t_{Ex,k}$  für

das kleinste  $k$  mit  $t_{Ex,k} > 0$ :

$$y_{max} = y(t_{Ex,k}). \quad (2.65)$$

Es ist möglich, dass nach (2.53b)  $\omega_0^2 < 0$  ist. Tritt dieser Fall ein, muss  $\omega_0$  mit  $\omega_0^* = \sqrt{|\omega_0^2|}$  und alle trigonometrischen Funktionen durch die entsprechenden hyperbolischen Funktionen ersetzt werden [68]. Es gelten dann die folgenden Ausdrücke:

$$y_{PT2}^*(t) = \frac{1}{\tau^2 - \omega_0^{*2}} \left[ 1 - e^{-\tau t} \left( \cosh(\omega_0^* t) + \frac{\tau}{\omega_0^*} \sinh(\omega_0^* t) \right) \right] \quad (2.66a)$$

$$\dot{y}_{PT2}^*(t) = \frac{1}{\omega_0^*} e^{-\tau t} \sinh(\omega_0^* t) \quad (2.66b)$$

$$\ddot{y}_{PT2}^*(t) = \frac{1}{\omega_0^*} e^{-\tau t} (\omega_0^* \cosh(\omega_0^* t) - \tau \sinh(\omega_0^* t)) \quad (2.66c)$$

$$\ddot{\ddot{y}}_{PT2}^*(t) = \frac{1}{\omega_0^*} e^{-\tau t} \left[ (\tau^2 + \omega_0^{*2}) \sinh(\omega_0^* t) - 2\tau\omega_0^* \cosh(\omega_0^* t) \right] \quad (2.66d)$$

$$t_{Ex,k}^* = -\frac{1}{\omega_0^*} \operatorname{arctanh} \left( \frac{b_1\omega_0^*}{b_0 - b_1\tau} \right) + \frac{1}{\omega_0^*} k\pi \quad (2.66e)$$

$$y_{max}^* = y(t_{Ex,k}^*). \quad (2.66f)$$

#### 2.4.4. Partizipationsfaktoren

Die Eigendynamik eines linearen Systems kann durch die folgende Zustandsraumdarstellung beschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (2.67)$$

mit dem Vektor der Zustände  $\mathbf{x}(t)$  und der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . Die Eigenwerte  $\underline{\lambda}_i$  von  $\mathbf{A}$  charakterisieren Eigenschaften des Systems (2.67), z.B. die Stabilität. Die Anzahl der Eigenwerte entspricht der Anzahl der Systemzuständen, aber es ist im Allgemeinen nicht möglich, ein Eigenwert genau einem Zustand zuzuordnen. Ein relativer Zusammenhang zwischen Eigenwert und Zustand ist aber mit Partizipationsfaktoren quantifizierbar [70]. Die Definition der Partizipationsfaktoren  $\underline{p}_{ki}$  lautet:

$$\underline{p}_{ki} = \underline{w}_{ki} \underline{v}_{ki} \quad (2.68)$$

mit dem  $k$ -ten Element des rechten und linken Eigenvektors  $\underline{v}_i$  bzw.  $\underline{w}_i$  von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\underline{\lambda}_i$  gemäß den Gleichungen:

**Tabelle 2.1.:** Darstellung der Partizipationsfaktoren  $|\underline{p}_{ki}|$  mit den zugehörigen Zuständen  $x_k$  und Eigenwerten  $\lambda_i$ .

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\dots$	$\lambda_n$
$x_1$	$ \underline{p}_{11} $	$ \underline{p}_{12} $	$\dots$	$ \underline{p}_{1n} $
$x_2$	$ \underline{p}_{21} $	$ \underline{p}_{22} $	$\dots$	$ \underline{p}_{2n} $
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_n$	$ \underline{p}_{n1} $	$ \underline{p}_{n2} $	$\dots$	$ \underline{p}_{2n} $

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\lambda}_i \underline{\mathbf{v}}_i \quad (2.69a)$$

$$\underline{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{A} = \underline{\lambda}_i \underline{\mathbf{w}}_i^T. \quad (2.69b)$$

Die Partizipationsfaktoren sind im allgemeinen Fall komplex, nach [9] ist es aber ausreichend den Betrag  $|\underline{p}_{ki}|$  zu betrachten.  $|\underline{p}_{ki}|$  gibt ein Maß für den Zusammenhang zwischen dem  $k$ -ten Zustand  $x_k$  und dem  $i$ -ten Eigenwert  $\underline{\lambda}_i$  an, was in Tabelle 2.1 veranschaulicht ist. Eine Anwendungsmöglichkeit der Partizipationsfaktoren ist es, die Zustände zu bestimmen, die hauptsächlich mit einem instabilen Eigenwert verknüpft sind und daher ursächlich für die Instabilität sind.

# 3. Stabilität der Netzsynchronisation

Auf Grundlage der Modellgleichungen aus Abschnitt 2.3 wird in diesem Kapitel die PLL-basierte Netzsynchronisierung eingehend untersucht. Das Ziel ist die Herleitung von Bedingungen, mit denen die Stabilität der Netzsynchronisierung unter dem Einfluss des schwachen Netzes nachgewiesen werden kann.

Die Stabilitätsuntersuchung erfolgt nach den in Kapitel 2.2.3 aufgeführten Schritten. Zuerst wird das System in Abschnitt 3.1 im stationären Zustand ohne Anregungen betrachtet und geprüft, ob die PLL-basierte Netzsynchronisation möglich ist. In Abschnitt 3.2 wird die Kleinsignalstabilität untersucht. Dazu werden die Ruhelagen des Systems analytisch berechnet, das System linearisiert und die Stabilität anhand der Eigenwerte der linearen Systemmatrix bewertet. Für die transiente Stabilität wird in Abschnitt 3.3 das Systemverhalten bei einem Übergang von einer stabilen Ruhelage zu einer zweiten unter Berücksichtigung der wesentlichen Nichtlinearitäten untersucht. Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Erarbeitung einer Methode zum Nachweis der transienten Stabilität.

## 3.1. Stationärer Zustand des Systems

In diesem Abschnitt wird das System im stationären und netzsynchronen Zustand ohne Berücksichtigung von Anregungen betrachtet. Die PLL ist gemäß (2.29) eingeschwungen, sodass aus (2.28b) folgt:

$$U_q(t) = 0. \quad (3.1)$$

Außerdem gilt  $\omega_{PLL}(t) = \omega_{Netz}$  gemäß der Definition der Netzsynchronität für den stationären Zustand (2.24). Aufgrund der konstanten Frequenz können die elektrischen Signale und Impedanzen nach (2.19) und (2.20) komplexwertig dargestellt werden.

### 3.1.1. Stationärer Zustand des elektrischen Netzwerks

Die Zustandsgleichung des elektrischen Netzwerks (2.26) mit den Eingängen  $U_{Inv}(t)$  und  $U_{Netz}(t)$  beschreiben ein lineares System. Der Zustand  $U_{CInv}(t)$  kann daher als Superposition beider Eingänge ausgedrückt werden. Im Laplace-Bereich folgt:

$$U_{CInv}(s) = U_{CInv,Inv}(s) + U_{CInv,Netz}(s). \quad (3.2)$$

Die beiden Anteile von (3.2) sind:

$$U_{CInv, Inv}(s) = G_{Inv}(s)U_{Inv}(s) \quad (3.3a)$$

$$U_{CInv, Netz}(s) = G_{Netz}(s)U_{Netz}(s) \quad (3.3b)$$

mit den Übertragungsfunktionen:

$$G_{Inv}(s) = \frac{sb_{1, Inv} + b_{0, Inv}}{s^3 a_{3, Inv} + s^2 a_{2, Inv} + sa_{1, Inv} + a_{0, Inv}} \quad (3.4a)$$

$$G_{Netz}(s) = \frac{sb_{1, Netz} + b_{0, Netz}}{s^3 a_{3, Netz} + s^2 a_{2, Netz} + sa_{1, Netz} + a_{0, Netz}} \quad (3.4b)$$

sowie den Koeffizienten:

$$b_{1, Inv} = L_{Netz} \quad (3.5a)$$

$$b_{0, Inv} = R_{Netz} \quad (3.5b)$$

$$b_{1, Netz} = L_{Inv} \quad (3.5c)$$

$$b_{0, Netz} = R_{Inv} \quad (3.5d)$$

$$a_{3, Inv} = a_{3, Netz} = C_{Inv}L_{Inv}L_{Netz} \quad (3.5e)$$

$$a_{2, Inv} = a_{2, Netz} = C_{Inv}(R_{Inv}L_{Netz} + R_{Netz}L_{Inv}) \quad (3.5f)$$

$$a_{1, Inv} = a_{1, Netz} = C_{Inv}R_{Inv}R_{Netz} + L_{Netz} + L_{Inv} \quad (3.5g)$$

$$a_{0, Inv} = a_{0, Netz} = R_{Netz} + R_{Inv}. \quad (3.5h)$$

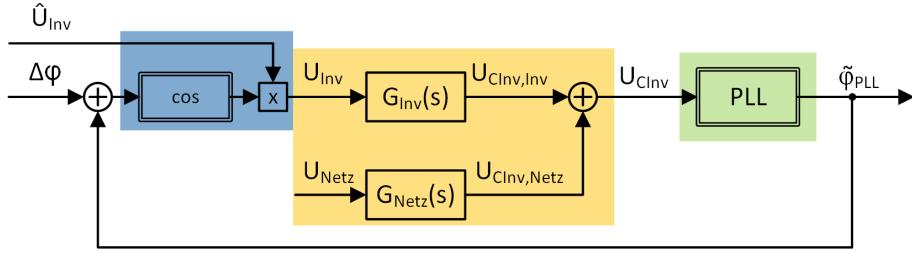
Im Anhang A.1 ist die Herleitung der Übertragungsfunktionen (3.4) skizziert. Für ein starkes Netz mit einer Netzimpedanz von Null, d.h. mit  $R_{Netz} = 0$  und  $L_{Netz} = 0$ , folgt:

$$G_{Inv}(s) = 0 \quad (3.6a)$$

$$G_{Netz}(s) = 1 \quad (3.6b)$$

und aus (3.2) resultiert:  $U_{CInv}(s) = U_{Netz}(s)$  (vgl. (2.12a) für den Zeitbereich). Für  $R_{Netz} \neq 0$  und  $L_{Netz} \neq 0$  verdeutlicht die Superposition (3.2) den Einfluss des schwachen Netzes und stellt den allgemeinen Fall dar. Als Blockschaltbild des Systems resultiert die Abb. 3.1.

Durch  $s \rightarrow j\omega$  gehen  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  in die Frequenzgänge  $\underline{G}_{Inv}(j\omega)$  und  $\underline{G}_{Netz}(j\omega)$  über [71]:



**Abbildung 3.1.:** Blockschaltbild des Systems, in dem das elektrische Netzwerk (gelb) nach (3.2) ausgeführt ist. Es wurde darauf verzichtet, die elektrischen Komponenten dreiphasig auszuführen.

$$\underline{G}_{\text{Inv}}(j\omega) = \hat{G}_{\text{Inv}}(\omega) e^{j\varphi_{G_{\text{Inv}}}(\omega)} \quad (3.7a)$$

$$\underline{G}_{\text{Netz}}(j\omega) = \hat{G}_{\text{Netz}}(\omega) e^{j\varphi_{G_{\text{Netz}}}(\omega)}. \quad (3.7b)$$

Hier sind  $\hat{G}_{\text{Inv}}(\omega)$  und  $\hat{G}_{\text{Netz}}(\omega)$  die Beträge und  $\varphi_{G_{\text{Inv}}}(\omega)$  und  $\varphi_{G_{\text{Netz}}}(\omega)$  die Phasen von  $\underline{G}_{\text{Inv}}(j\omega)$  bzw.  $\underline{G}_{\text{Netz}}(j\omega)$ .

Entsprechend der Superposition (3.2) können die Frequenzgänge (3.7) sowie die komplexe Netz- und Umrichterspannung nach (2.7) und (2.19a) zur Messspannung zusammengeführt werden:

$$U_{\text{CInv},R}(t) = \hat{U}_{\text{Inv},R} \hat{G}_{\text{Inv}} e^{j(\omega_{\text{Netz}} t + \varphi_{\text{PLL},R} + \Delta\varphi_R + \varphi_{G_{\text{Inv}}})} + \hat{U}_{\text{Netz}} \hat{G}_{\text{Netz}} e^{j(\omega_{\text{Netz}} t + \varphi_{\text{Netz},0} + \varphi_{G_{\text{Netz}}})}. \quad (3.8)$$

Mit  $\hat{G}_{\text{Inv}}$ ,  $\hat{G}_{\text{Netz}}$ ,  $\varphi_{G_{\text{Inv}}}$  und  $\varphi_{G_{\text{Netz}}}$  sind die Beträge bzw. Phasen von (3.7) bei  $\omega = \omega_{\text{Netz}}$  bezeichnet. Die Überführung der komplexwertigen Messspannung nach (3.8) in die Darstellung mit trigonometrischen Funktionen ergibt:

$$U_{\text{CInv},R}(t) = \hat{U}_{\text{Inv},R} \hat{G}_{\text{Inv}} \cos(\omega_{\text{Netz}} t + \varphi_{\text{PLL},R} + \Delta\varphi_R + \varphi_{G_{\text{Inv}}}) + \hat{U}_{\text{Netz}} \hat{G}_{\text{Netz}} \cos(\omega_{\text{Netz}} t + \varphi_{\text{Netz},0} + \varphi_{G_{\text{Netz}}}). \quad (3.9)$$

Gleichung (3.9) beschreibt die Messspannung, d.h. die PLL-Eingangsspannung, im stationären Zustand.  $U_{\text{CInv},R}(t)$  ist nur von den Parametern der Spannungen  $U_{\text{Inv}}(t)$  und  $U_{\text{Netz}}(t)$  sowie von den Impedanzen des Systems abhängig, während die Abhängigkeit von den Strömen  $I_{\text{Inv}}(t)$  und  $I_{\text{Netz}}(t)$  nicht mehr sichtbar ist.

### 3.1.2. Stationärer Zustand der PLL

Indem die PLL-Eingangstransformation (2.28a) mit  $U_{CInv,R}(t)$  nach (3.9) und dem zusätzlichen Phasenversatz von  $-2\pi/3$  bzw.  $-4\pi/3$  für die Phasen  $B$  und  $C$  durchgeführt wird, resultiert nach Zusammenfassungen:

$$U_q(t) = U_{q,Inv,R} - U_{q,Netz,R} \quad \xrightarrow{(3.1)} \quad U_{q,Inv,R} = U_{q,Netz,R}. \quad (3.10)$$

Die Anteile von (3.10) sind:

$$U_{q,Inv,R} = \hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv} \sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}}) \quad (3.11a)$$

$$U_{q,Netz,R} = \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \sin(\varphi_{PLL,R} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}}). \quad (3.11b)$$

Es wurde der Zusammenhang  $\sin(-x) = -\sin(x)$  verwendet, sodass  $U_{q,Netz,R}$  in (3.10) mit negativem Vorzeichen eingeht.

Mit  $\sin x \in [-1; 1] \forall x \in \mathbb{R}$  ergibt sich die folgende Abschätzung für (3.11b):

$$|U_{q,Netz,R}| \leq \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \quad (3.12)$$

und aus (3.10) resultiert:

$$\frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv}}{\hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}} |\sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}})| \leq 1. \quad (3.13)$$

Ungleichung (3.13) muss im stationären Zustand erfüllt sein, damit das Gleichgewicht (3.10), d.h.  $U_q(t) = 0$ , realisierbar ist. Die Ungleichung ist daher eine notwendige Bedingung für die PLL-basierte Netzsynchronisation und wird als „notwendige Stabilitätsbedingung“ bezeichnet. Das Erfüllen der zu (3.13) gehörenden Gleichung:

$$\frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv}}{\hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}} |\sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}})| = 1 \quad (3.14)$$

stellt den Grenzfall für den stationären Zustand dar. Mit den Relationen  $\frac{\hat{G}_{Inv}}{\hat{G}_{Netz}} = \frac{\hat{Z}_{Netz}}{\hat{Z}_{Inv}}$  und  $\varphi_{G_{Inv}} = -\varphi_{Z_{Inv}} - \varphi_{Y_G}$  (s. Anhang A.1) kann (3.13) durch die Systemparameter ausgedrückt werden:

$$\frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{Z}_{Netz}}{\hat{U}_{Netz} \hat{Z}_{Inv}} |\sin(\Delta\varphi_R - \varphi_{Z_{Inv}} - \varphi_{Y_G})| \leq 1. \quad (3.15)$$

Hier ist  $\varphi_{Y_G}$  die Phase der zusammengefassten Admittanz:

$$\underline{Y}_G = \hat{Y}_G e^{j\varphi_{Y_G}} = \frac{1}{\underline{Z}_{Inv}} + \frac{1}{\underline{Z}_{Netz}} + \frac{1}{\underline{Z}_{CInv}}. \quad (3.16)$$

Ungleichung (3.15) belegt die folgenden Zusammenhänge zwischen der notwendigen Stabilitätsbedingung und den Systemparametern sowie Stellgrößen. Die notwendige Stabilitätsbedingung ist nicht erfüllt bei:

- großer Netzimpedanz  $\hat{Z}_{Netz}$ ,
- hoher eingespeister Wirkleistung  $P_{Inv}$ , die nach (2.23) durch ein großes  $\hat{U}_{Inv,R}$  und ein großes  $\Delta\varphi_R \in [0^\circ; 90^\circ]$  gekennzeichnet ist,
- kleiner Filterimpedanz  $\hat{Z}_{Inv}$ ,
- kleiner Amplitude der Netzspannung  $\hat{U}_{Netz}$ .

Diese Punkte entsprechen den qualitativen Aussagen zu den Ursachen des schwachen Netzes in Abschnitt 2.2.2. Die notwendigen Stabilitätsbedingung bestätigt damit den Zusammenhang zwischen einem schwachen Netz und einer erschweren und ggf. sogar instabilen Netzsynchronisation. Mit (3.15) ist es daher möglich, ein ausreichend starkes Netz zu quantifizieren, unter dem die PLL-basierte Netzsynchronisation im stationären Zustand möglich ist.

Zur notwendigen Stabilitätsbedingung werden noch zwei besondere Fälle betrachtet. Zum einen ist die Bedingung immer erfüllt, wenn

$$\frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{Z}_{Netz}}{\hat{U}_{Netz} \hat{Z}_{Inv}} \leq 1 \quad (3.17)$$

gilt, was z.B. bei einem starken Netz mit  $\hat{Z}_{Netz} \approx 0$  der Fall ist. Dies trifft sogar unabhängig von  $\Delta\varphi_R$  zu und entsprechend ist auch  $\Delta\varphi_R > 90^\circ$  zulässig. Da eine Erhöhung von  $\Delta\varphi_R$  über  $90^\circ$  hinaus nach (2.23) eine Verringerung der eingespeisten Wirkleistung bewirkt, entspricht dies aber keinem sinnvollen Arbeitspunkt. Zum anderen ist die notwendige Bedingung mit

$$\Delta\varphi_R = \varphi_{Z_{Inv}} + \varphi_{Y_G} \quad (3.18)$$

ebenfalls immer erfüllt. Wegen  $\varphi_{Z_{Inv}} + \varphi_{Y_G} = -\varphi_{G_{Inv}} \approx 0$  (s. Anhang A.1) führt diese Situation nach (2.23) auf  $P_{Inv} \approx 0$  und entspricht damit einer Abschaltung der Einspeisung.

## 3.2. Kleinsignalstabilität

Das Erfüllen der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.15) stellt nur sicher, dass das Gleichgewicht (3.10) im stationären Zustand realisierbar ist, womit noch keine Aussage zur Stabilität

des stationären Zustandes verknüpft ist. Im zweiten Schritt wird der stationäre Zustand daher bei kleinen Anregungen betrachtet, was der Untersuchung der Kleinsignalstabilität entspricht und methodisch durch eine Linearisierung in den Ruhelagen und einer Stabilitätsuntersuchung des linearen Systems erfolgt.

### 3.2.1. Bestimmung der Ruhelagen

Die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  des Systems (2.41) ist durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}^{8 \times 1} \quad (3.19)$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{x}_R = [\hat{I}_{Inv,R} \quad \varphi_{I_{Inv,R}} \quad \hat{I}_{Netz,R} \quad \varphi_{I_{Netz,R}} \quad \hat{U}_{CInv,R} \quad \varphi_{U_{CInv,R}} \quad x_{PLL,R} \quad \varphi_{PLL,R}]^T \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{u}_R = [\hat{U}_{Inv,R} \quad \Delta\varphi_R]^T. \quad (3.20b)$$

gekennzeichnet. Es ist möglich von (3.19) zunächst nur die Zustandsgleichungen der PLL zu betrachten. Aus  $f_7(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = 0$  und  $f_8(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = 0$  ergeben sich die Lösungen:

$$x_{PLL,R} = \omega_{Netz} \quad (3.21a)$$

$$\varphi_{PLL,R} = \varphi_{U_{CInv,R}} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.21b)$$

Für  $k = 0$  entspricht (3.21) der erwarteten Ruhelage, da sich die PLL-Zustände auf die Frequenz und die Phase einschwingen. Für gerade  $k$  ergibt sich aufgrund der Periodizität der Phasenlage dieselbe Ruhelage [39]. Für ungerade  $k$  liefert (3.21b) dagegen eine Ruhelage, bei der  $\varphi_{PLL,R}$  gegenüber  $\varphi_{U_{CInv,R}}$  um  $180^\circ$  verschoben ist. Aus der Linearisierung der PLL bei  $x_{PLL,R} = \omega_{Netz}$  und  $\varphi_{PLL,R} = \varphi_{U_{CInv,R}} + \pi$ , ergibt sich anstelle von (2.33) die Systemmatrix

$$\mathbf{A}_{PLL}^* = \begin{bmatrix} 0 & K_{I,PLL}\hat{U} \\ 1 & K_{P,PLL}\hat{U} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

mit den Eigenwerten:

$$\lambda_{PLL,1,2}^* = \frac{K_{P,PLL}}{2}\hat{U} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{P,PLL}}{2}\hat{U}\right)^2 + K_{I,PLL}\hat{U}}. \quad (3.23)$$

Da mindestens einer der Eigenwerte (3.23) einen positiven Realteil besitzt, ist die Ruhelage (3.21b) für ungerade  $k$  instabil und wird für die weitere Analyse ausgeschlossen.

Durch Einsetzen von (3.21b) in (3.10) ergibt sich:

$$\hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv} \sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}}) = \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}}), \quad (3.24)$$

woraus zwei Lösungen für  $\varphi_{U_{CInv,R}}$  resultieren, die mit den Indizes  $R$  und  $\check{R}$  bezeichnet werden:

$$\varphi_{U_{CInv,R}} = \arcsin \left( \frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv}}{\hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}} \sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}}) \right) + \varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}} \quad (3.25a)$$

$$\varphi_{U_{CInv,\check{R}}} = \pi - \arcsin \left( \frac{\hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv}}{\hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}} \sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}}) \right) + \varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}}. \quad (3.25b)$$

Damit  $\varphi_{U_{CInv,R}} \in \mathbb{R}$  sowie  $\varphi_{U_{CInv,\check{R}}} \in \mathbb{R}$  gelten, muss sich das Argument der  $\arcsin$ -Funktion im Intervall  $[-1; 1]$  befinden. Dies ist durch das Erfüllen der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.13) gewährleistet. Das weitere Vorgehen zur Bestimmung der Ruhelage wird mit (3.25a) gezeigt. Die zum elektrischen Netzwerk gehörenden Gleichungen von (3.19) sind:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) & f_2(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) & \dots & f_6(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}^{6 \times 1} \quad (3.26)$$

und können unter Zuhilfenahme der komplexen Wechselstromrechnung analytisch gelöst werden. Dazu wird das ESB in Abb. 2.6 mit der Impedanz  $\underline{Z}_{CInv}$  betrachtet. Am Potential  $\underline{U}_{CInv,R}$  gilt mit dem Knotenpunktsatz:

$$0 = \frac{\underline{U}_{CInv,R}}{\underline{Z}_{CInv}} + \frac{\underline{U}_{CInv,R} - \underline{U}_{Inv,R}}{\underline{Z}_{Inv}} + \frac{\underline{U}_{CInv,R} - \underline{U}_{Netz}}{\underline{Z}_{Netz}}, \quad (3.27)$$

woraus sich die Amplitude der Messspannung ergibt:

$$\hat{U}_{CInv,R} = \frac{\hat{U}_{Inv,R} e^{j(\Delta\varphi_R - \varphi_{Z_{Inv}} - \varphi_{Y_G})}}{\hat{Z}_{Inv} \hat{Y}_G} + \frac{\hat{U}_{Netz} e^{j(\varphi_{Netz,0} - \varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{Z_{Netz}} - \varphi_{Y_G})}}{\hat{Z}_{Netz} \hat{Y}_G} \quad (3.28)$$

mit  $\hat{Y}_G$  und  $\varphi_{Y_G}$  nach (3.16). Obwohl (3.28) komplexe Ausdrücke enthält, ist die resultierende Amplitude  $\hat{U}_{CInv,R}$  reell. Für die elektrischen Ströme in der Ruhelage gilt nach dem Maschensatz:

$$I_{Inv,R} = \frac{1}{\underline{Z}_{Inv}} (\underline{U}_{Inv,R} - \underline{U}_{CInv,R}) \quad (3.29a)$$

$$I_{Netz,R} = \frac{1}{\underline{Z}_{Netz}} (\underline{U}_{CInv,R} - \underline{U}_{Netz}), \quad (3.29b)$$

und es resultieren für Amplitude und Phasenlage des Umrichter- und Netzstroms:

$$\hat{I}_{Inv,R} = \left( \Re\{\underline{I}_{Inv,R}\}^2 + \Im\{\underline{I}_{Inv,R}\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.30a)$$

$$\varphi_{I_{Inv,R}} = \arctan \left( \frac{\Im\{\underline{I}_{Inv,R}\}}{\Re\{\underline{I}_{Inv,R}\}} \right) \quad (3.30b)$$

$$\hat{I}_{Netz,R} = \left( \Re\{\underline{I}_{Netz,R}\}^2 + \Im\{\underline{I}_{Netz,R}\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.30c)$$

$$\varphi_{I_{Netz,R}} = \arctan \left( \frac{\Im\{\underline{I}_{Netz,R}\}}{\Re\{\underline{I}_{Netz,R}\}} \right). \quad (3.30d)$$

In (3.30) bezeichnen  $\Re$  und  $\Im$  den Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl. Mit (3.21), (3.25a), (3.28) und (3.30) ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  vollständig bestimmt. Wird (3.25b) anstelle von (3.25a) in (3.28) und (3.30) eingesetzt, dann ergibt sich die Ruhelage  $\mathbf{x}_{\check{R}}$ .

Voraussetzung für die Existenz von  $\mathbf{x}_R$  und  $\mathbf{x}_{\check{R}}$  ist das Erfüllen der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.13), da ansonsten (3.25) keine reellen Lösungen liefert. Zur Veranschaulichung und zur Beschreibung von Sonderfällen sind in Abb. 3.2 die Anteile (3.11) des Gleichgewichts (3.10) an Beispielen visualisiert. Statt  $U_{q,Netz,R}$  nach (3.11b) ist aber  $U_{q,Netz}(\gamma)$ :

$$U_{q,Netz}(\gamma) = \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \sin(\gamma) \quad (3.31)$$

mit der Translation:

$$\gamma = \varphi_{PLL} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}} \quad (3.32)$$

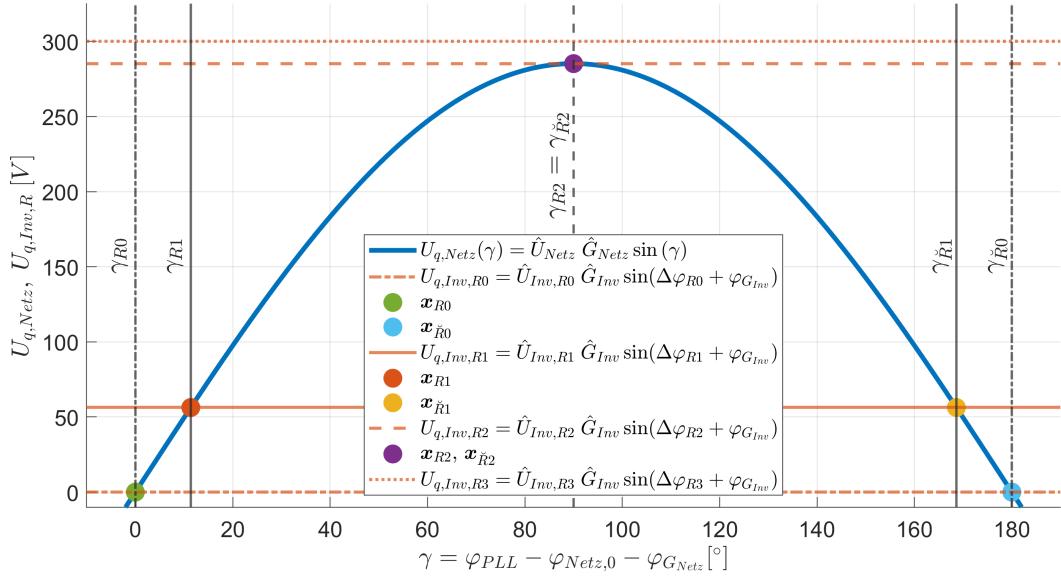
abgebildet. Im Diagramm sind folgende Situationen für  $U_{q,Inv,R} \geq 0$  dargestellt:

$U_{q,Inv,R0} = 0$  : Die notwendige Stabilitätsbedingung ist erfüllt und es existieren drei Schnittpunkte zwischen  $U_{q,Inv,R0}$  und  $U_{q,Netz}(\gamma)$  bei  $\gamma_{R0} = 0^\circ$  sowie bei  $\gamma_{\check{R}0} = 180^\circ$  und bei  $\gamma'_{\check{R}0} = -180^\circ$ . Da das Diagramm für eine bessere Übersicht nur das Intervall  $\gamma \in [0^\circ; 180^\circ]$  zeigt, ist  $\gamma'_{\check{R}0}$  nicht sichtbar.  $\gamma_{R0}$  korrespondiert mit der Ruhelage  $\mathbf{x}_{R0}$  und  $\gamma_{\check{R}0}$  sowie  $\gamma'_{\check{R}0}$  kennzeichnen aufgrund der Periodizität von  $U_{q,Netz}(\gamma)$  dieselbe Ruhelage  $\mathbf{x}_{\check{R}0}$ .

$0 < U_{q,Inv,R1} < \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}$  : Die notwendige Stabilitätsbedingung ist erfüllt und es existieren zwei Schnittpunkte zwischen  $U_{q,Netz}(\gamma)$  und  $U_{q,Inv,R1}$  bei  $\gamma_{R1} \in (0^\circ; 90^\circ)$  und  $\gamma_{\check{R}1} \in (90^\circ; 180^\circ)$ , welche die Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R1}$  und  $\mathbf{x}_{\check{R}1}$  markieren.

$U_{q,Inv,R2} = \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}$  : Diese Situation entspricht dem Grenzfall der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.14). Es existiert nur ein Schnittpunkt zwischen  $U_{q,Inv,R2}$  und  $U_{q,Netz}(\gamma)$  und dieser kennzeichnet beide Ruhelagen.  $\mathbf{x}_{R2}$  und  $\mathbf{x}_{\check{R}2}$  sind identisch und es gilt:  $\gamma_{R2} = \gamma_{\check{R}2} = 90^\circ$ .

$U_{q,Inv,R3} > \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}$  : In diesem Fall ist die notwendige Stabilitätsbedingung nicht erfüllt



**Abbildung 3.2.:** Darstellung der Anteile  $U_{q,Netz}$  nach (3.31) und  $U_{q,Inv,R}$  nach (3.11a) für vier Beispiele. Die Schnittpunkte der Verläufe kennzeichnen das Gleichgewicht (3.10) und markieren daher die jeweiligen Ruhelagen.

und daher existieren die Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R3}$  und  $\mathbf{x}_{\check{R}3}$  nicht. Im Diagramm ist dies dadurch ersichtlich, dass es keinen Schnittpunkt zwischen  $U_{q,Inv,R3}$  und  $U_{q,Netz}(\gamma)$  gibt.

Zu den dargestellten und beschriebenen Fällen mit  $U_{q,Inv,R} \geq 0$  existiert jeweils eine analoge Situation für  $U_{q,Inv,R} < 0$ . Wird  $\varphi_{G_{Inv}} = 0$  angenommen, treten diese Fälle für  $\Delta\varphi_R < 0$  auf und beschreiben wegen  $P_{Inv,R} < 0$  nach (2.23) anstelle der Einspeisung die Rückspeisung von elektrischer Energie. Die Schnittpunkte zwischen  $U_{q,Inv,R}$  und  $U_{q,Netz}(\gamma)$  liegen, sofern sie existieren, im Intervall  $\gamma \in (-180^\circ; 0^\circ)$  mit  $\gamma_R \in (-90^\circ; 0^\circ)$  und  $\gamma_{\check{R}} \in (-180^\circ; -90^\circ)$ . Der Grenzfall  $U_{q,Inv,R} = -\hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz}$  ist mit einem Schnittpunkt zwischen  $U_{q,Inv,R}$  und  $U_{q,Netz}(\gamma)$  bei  $\gamma_R = \gamma_{\check{R}} = -90^\circ$  gekennzeichnet. Im Fall von  $U_{q,Inv,R} < -\hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz}$  ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt und es existiert keine Ruhelage.

### 3.2.2. Stabilität der Ruhelagen

Das nichtlineare System (2.41) kann in den Ruhelagen  $\mathbf{x}_R$  und  $\mathbf{x}_{\check{R}}$  linearisiert und durch eine lineare Zustandsgleichung beschreiben werden. Für  $\mathbf{x}_R$  resultiert:

$$\dot{\mathbf{x}}_L(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_L(t) + \mathbf{B}_R \mathbf{u}_L(t) \quad (3.33)$$

mit  $\mathbf{x}_L(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_R$ ,  $\mathbf{u}_L(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_R$  und den Matrizen:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{I}_{Inv}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{I}_{Netz}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{PLL}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{I}_{Inv}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} & \ddots & & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{PLL}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial f_8}{\partial \hat{I}_{Inv}} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_{PLL}} \end{bmatrix}_{x=\mathbf{x}_R, u=\mathbf{u}_R} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{U}_{I_{Inv}}} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{U}_{I_{Inv}}} & \frac{\partial f_3}{\partial \hat{U}_{I_{Inv}}} & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial \hat{U}_{I_{Inv}}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\varphi} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial \Delta\varphi} \end{bmatrix}^T_{x=\mathbf{x}_R, u=\mathbf{u}_R} \quad (3.34b)$$

Die Elemente der Matrizen (3.34) sind im Anhang A.2 angegeben. Die Stabilität von (3.33) kann mit den Eigenwerten  $\lambda_R$  der Systemmatrix  $\mathbf{A}_R$  gezeigt werden: Besitzen alle Eigenwerte einen negativen Realteil, ist das lineare System (3.33) stabil und folglich ist auch das nichtlineare System (2.41) in der Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  sowie in deren unmittelbaren Umgebung stabil. Die Linearisierung in der Ruhelage  $\mathbf{x}_{\check{R}}$  wird auf die gleiche Weise durchgeführt, wobei sich anstelle von (3.34) die Matrizen  $\mathbf{A}_{\check{R}}$  und  $\mathbf{B}_{\check{R}}$  ergeben und die Stabilitätsuntersuchung anhand der Eigenwerten  $\lambda_{\check{R}}$  erfolgt.

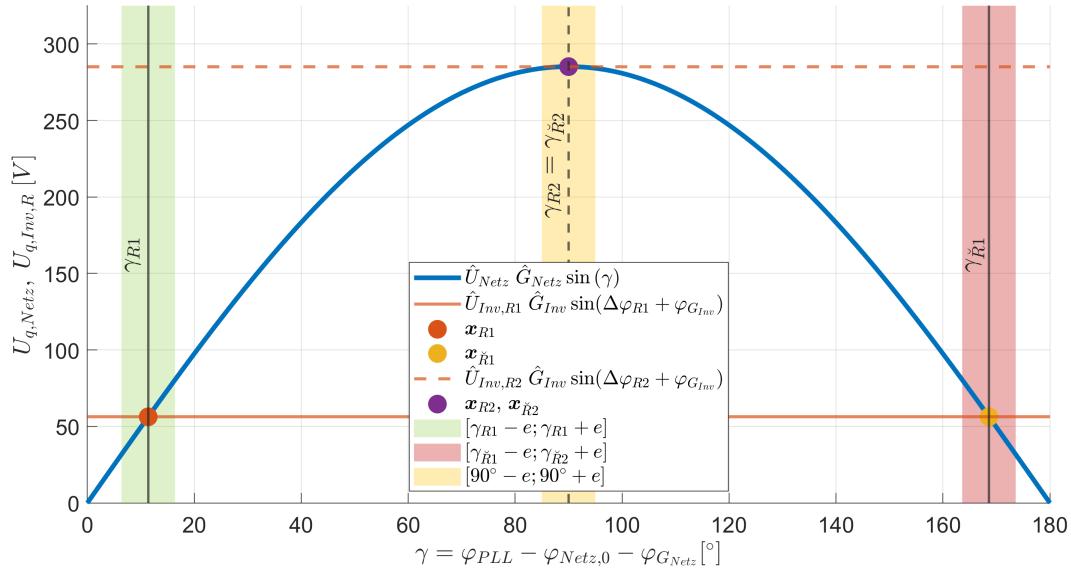
Unabhängig von der Linearisierung ist eine Untersuchung der Ruhelagen durch eine Störung des Gleichgewichts (3.10) mit einer kleinen Auslenkung  $e$  und einer qualitativen Betrachtung des resultierenden Systemverhaltens möglich. Dazu wird in (3.10) der Anteil (3.11b) mit (3.31) ersetzt:

$$U_q(t) = \hat{U}_{Inv,R} \hat{G}_{Inv} \sin(\Delta\varphi_R + \varphi_{G_{Inv}}) - \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \sin(\gamma). \quad (3.35)$$

Das Auswerten von (3.35) bei  $\gamma = \gamma_R \pm e$  bzw. bei  $\gamma = \gamma_{\check{R}} \pm e$  führt auf  $U_q(t) \neq 0$  und daher zu einer Anregung des Systems. In Abb. 3.3 sind die betreffenden Intervalle  $[\gamma_{R1} - e; \gamma_{R1} + e]$  sowie  $[\gamma_{\check{R}1} - e; \gamma_{\check{R}1} + e]$  zur Veranschaulichung in grün und rot hervorgehoben. Wegen  $\gamma_{R1} \in [0^\circ; 90^\circ]$  führt die Auslenkung in  $\gamma_{R1}$  zu folgendem Systemverhalten:

$\gamma = \gamma_{R1} + e$  : Nach (3.35) gilt  $U_q(t) < 0$  und mit (2.43h) sowie (3.32) folgt daraus  $\dot{\varphi}_{PLL}(t) < 0$  und  $\dot{\gamma}(t) < 0$ . Entsprechend nähert sich  $\gamma(t)$  nach der Anregung wieder  $\gamma_{R1}$  an.

$\gamma = \gamma_{R1} - e$  : Es gilt  $U_q(t) > 0$ , was zu  $\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0$  sowie  $\dot{\gamma}(t) > 0$  führt und  $\gamma(t)$  nähert sich  $\gamma_{R1}$  wieder an.



**Abbildung 3.3.:** Darstellung der Anteile  $U_{q,Netz}$  nach (3.31) und  $U_{q,Inv,R}$  nach (3.11a) für zwei Beispiele. Die mit farbigen Flächen markieren die Intervalle  $[\gamma_{R1} - e; \gamma_{R1} + e]$ ,  $[\gamma_{\check{R}1} - e; \gamma_{\check{R}1} + e]$  sowie  $[90^\circ - e; 90^\circ + e]$  dienen zur Untersuchung von kleinen Anregungen des Gleichgewichts (3.10).

In beiden Fällen ist die Reaktion des Systems der Anregung entgegengesetzt, sodass sich  $\gamma(t)$  bzw.  $\varphi_{PLL}(t)$  wieder auf den Wert der Ruhelage einschwingt. Da in dieser Betrachtung nur das Verhalten des Zustandes  $\varphi_{PLL}$  beurteilt wurde, kann aber nicht die Schlussfolgerung getroffen werden, dass die durch  $\gamma_{R1}$  repräsentierte Ruhelage  $x_{R1}$  stabil ist. Dies muss durch eine Überprüfung von  $\Re\{\lambda_{R1}\} < 0$  nachgewiesen werden.

Bei einer Anregung von  $\gamma_{\check{R}1}$  ergibt sich wegen  $\gamma_{\check{R}1} \in [90^\circ; 180^\circ]$  das folgende Systemverhalten:

$\gamma = \gamma_{\check{R}1} + e$  : Nach (3.35) gilt  $U_q(t) > 0$  und entsprechend  $\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0$  und  $\dot{\gamma}(t) > 0$ . Folglich entfernt sich  $\gamma(t)$  von  $\gamma_{\check{R}1}$ .

$\gamma = \gamma_{\check{R}1} - e$  : Es gilt  $U_q(t) < 0$  und entsprechend  $\dot{\varphi}_{PLL}(t) < 0$  und  $\dot{\gamma}(t) < 0$ . Auch bei dieser Anregung entfernt sich  $\gamma(t)$  von  $\gamma_{\check{R}1}$ .

Eine Auslenkung in  $\gamma(t) = \gamma_{\check{R}1}$  führt also zu einer Systemreaktion bei der sich  $\gamma(t)$  weiter von  $\gamma_{\check{R}1}$  entfernt. Die durch  $\gamma_{\check{R}1}$  dargestellte Ruhelage  $x_{\check{R}}$  ist daher instabil.

Liegt der Grenzfall der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.14) vor, wird das in Abb. 3.3 gelbe markierte Intervall  $[90^\circ - e; 90^\circ + e]$  betrachtet und es resultiert das folgende Systemverhalten bei einer Anregung:

$\gamma = 90^\circ + e$  : Nach (3.35) gilt  $U_q(t) > 0$  und entsprechend  $\dot{\varphi}_{PLL} > 0$  und  $\dot{\gamma} > 0$ . Folglich entfernt sich  $\gamma$  von  $\gamma_{R2} = \gamma_{\check{R}2}$ .

$\gamma = 90^\circ - e$  : Es gilt  $U_q(t) < 0$  und entsprechend  $\dot{\varphi}_{PLL} < 0$  und  $\dot{\gamma} < 0$ .  $\gamma$  nähert sich wieder dem Wert  $\gamma_{R2} = \gamma_{\check{R}2}$ .

Für den Grenzfall kann demnach keine eindeutige Aussage über das Systemverhalten bei kleinen Anregungen getroffen werden.

In diesem Abschnitt wurden die Ruhelagen des Systems (2.41) bestimmt, für deren Existenz das Erfüllen der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.13) Voraussetzung ist. Das System besitzt im Allgemeinen Fall die zwei Ruhelagen  $\mathbf{x}_R$  sowie  $\mathbf{x}_{\check{R}}$ , deren Stabilität auf Basis einer Linearisierung anhand der Eigenwerte der linearen Systemmatrix bewertet werden kann. Diese Stabilitätseigenschaft gilt für das originale System aber nur in der jeweiligen Ruhelage und der direkten Umgebung. Durch eine qualitative Betrachtung des Systemverhaltens bei einer kleinen Auslenkung von  $\varphi_{PLL}(t)$  aus den Ruhelagen konnte zudem gezeigt werden, dass  $\mathbf{x}_{\check{R}}$  eindeutig eine instabile Ruhelage ist.

### 3.3. Transiente Stabilität

Wird das System in einer Ruhelage durch eine große Anregung ausgelenkt, ist die Kleinsignalstabilität zur Bewertung der Systemstabilität nicht ausreichend. Daher wird nun die transiente Stabilität anhand eines Szenarios untersucht.

#### 3.3.1. Betrachtetes Szenario

Als Szenario für die transiente Stabilitätsanalyse wird der Übergang von  $\mathbf{x}_{R1}$  nach  $\mathbf{x}_{R2}$  betrachtet. Dabei wird vorausgesetzt, dass beide Ruhelagen stabil im Sinne der Kleinsignalstabilität sind. Die Analyse der transienten Stabilität umfasst also die Fragestellung, ob die Ruhelage  $\mathbf{x}_{R2}$  für den Initialzustand  $\mathbf{x}_{R1}$  stabil ist. Dabei sei das System vor der Anregung in  $\mathbf{x}_{R1}$  eingeschwungen und zum Zeitpunkt  $t = 0$  erfolgt eine sprunghafte Änderung der Stellgrößen gemäß:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_{R1} & t < 0 \\ \mathbf{u}_{R2} & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Hier sind  $\mathbf{u}_{Ri} = [\hat{U}_{Inv,Ri} \quad \Delta\varphi_{Ri}]^T$  konstante Stellgrößen. Weiterhin wird angenommen, dass  $\varphi_{U_{CInv,R1}} = 0$  gilt, was durch eine geeignete Wahl von  $\varphi_{Netz,0}$  ohne Einschränkungen erreicht werden kann. Außerdem wird  $\varphi_{U_{CInv,R2}} > \varphi_{U_{CInv,R1}}$  angenommen. Nach (3.21b) und (3.32) entspricht dies  $\gamma_{R2} > \gamma_{R1}$  und daher ist die Anregung (3.36) so gerichtet, dass sich das System näher an den Grenzfall der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.14) bei  $\gamma = 90^\circ$  heran bewegt. Diese Anregungsrichtung wird als die kritische angesehen und daher hier untersucht.

#### 3.3.2. Transiente Stabilitätsbedingung

In Kapitel 3.1.1 wurde gezeigt, dass sich die Messspannung anteilig aus der Umrichter- und der Netzsspannung zusammensetzt. Nach (3.2) und (3.3) ergibt sich  $U_{CInv}(t)$  im Zeitbereich mit der Laplace-Rücktransformation  $\mathcal{L}^{-1}$  gemäß:

$$\begin{aligned} U_{CInv}(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\{G_{Inv}(s)U_{Inv}(s)\} + \mathfrak{L}^{-1}\{G_{Netz}(s)U_{Netz}(s)\} \\ &= U_{CInv,Inv}(t) + U_{CInv,Netz}(t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Unter der Annahme des Netzes als „infinite grid“ sind die Parameter von  $U_{Netz}(t)$  konstant und im betrachteten Szenario wird  $U_{CInv,Netz}(t)$  nicht angeregt.  $U_{CInv,Netz}(t)$  liegt daher eingeschwungen vor und die Übertragungsfunktion  $G_{Netz}(s)$  kann auf ihre stationären Eigenschaften bei  $\omega = \omega_{Netz}$  reduziert werden. Für den Anteil  $U_{CInv,Netz}(t)$  von (3.37) folgt daher:

$$\begin{aligned} U_{CInv,Netz}(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left\{G_{Netz}(s) \mathfrak{L}\left\{\hat{U}_{Netz} \cos(\omega_{Netz}t + \varphi_{Netz,0})\right\}\right\} \\ &= \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \cos(\omega_{Netz}t + \varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Der Anteil  $U_{CInv,Inv}(t)$  von (3.37) wird im betrachteten Szenario angeregt, da sich die Stellgrößen zum Zeitpunkt  $t = 0$  gemäß (3.36) sprunghaft ändern. Für den Untersuchungszeitraum  $t \geq 0$  nehmen sie die konstanten Werte  $\hat{U}_{Inv,R2}$  sowie  $\Delta\varphi_{R2}$  an und es resultiert für  $U_{CInv,Inv}(t)$ :

$$U_{CInv,Inv}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{G_{Inv}(s) \mathfrak{L}\left\{\hat{U}_{Inv,R2} \cos(\omega_{Netz}t + \varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2})\right\}\right\}. \quad (3.39)$$

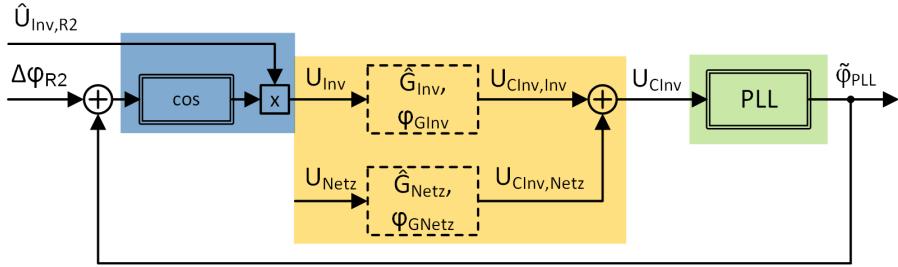
Da der Zustand  $\varphi_{PLL}(t)$  nicht konstant ist, kann das Argument der cos-Funktion nicht in der Form  $\omega_{Netz}t + \varphi$  mit konstantem  $\varphi$  dargestellt werden. Folglich können die Laplace-Transformationen in (3.39) nicht geschlossen berechnet werden ohne die zugrundeliegenden Differentialgleichungen zu lösen. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass die PLL über eine deutlich kleinere Bandbreite als  $G_{Inv}(s)$  verfügt. Die PLL-Bandbreite beträgt nach Parametrierung mit der in Abschnitt 2.3.2 vorgeschlagenen Methode dem Wert  $\rho$  und ist damit typischerweise kleiner als 30 Hz [57].  $G_{Inv}(s)$  hat dagegen eine Bandbreite von mehreren 100 Hz, wie das Bode-Diagramm in Abb. A.2 im Anhang A.1 zeigt. Es kann daher die Annahme getroffen werden, dass das Übertragungsverhalten der PLL gegenüber dem von  $G_{Inv}(s)$  dominant ist und die Änderung von  $\varphi_{PLL}(t)$  vergleichsweise langsam erfolgt. Dementsprechend kann davon ausgegangen werden, dass das durch  $G_{Inv}(s)$  hervorgerufene dynamische Verhalten abgeklungen ist, bevor sich  $\varphi_{PLL}(t)$  wesentlich ändert. Aus diesem Grund wird auch die Übertragungsfunktion  $G_{Inv}(s)$  auf ihre stationären Eigenschaften reduziert. Aus (3.39) folgt:

$$U_{CInv,Inv}(t) = \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \cos(\omega_{Netz}t + \varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}}) \quad (3.40)$$

Durch das Vernachlässigen der dynamischen Übertragungseigenschaften von  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  ist das elektrische Netzwerk zu einem statischen System vereinfacht worden, was im Blockschaltbild des Systems in Abb. 3.4 dargestellt ist. Mit (3.38) und (3.40) folgt aus (3.37):

### 3. Stabilität der Netzsynchronisation

---



**Abbildung 3.4.:** Blockschaltbild des Gesamtsystems mit Vereinfachung des elektrischen Netzwerks und mit  $u_R$  nach (3.36) für  $t \geq 0$ . Von den Übertragungsfunktionen  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  sind nur noch die stationären Übertragungseigenschaften bei  $\omega = \omega_{Netz}$  berücksichtigt und die Stellgrößen entsprechen den Werten  $\hat{U}_{Inv,R2}$  und  $\Delta\varphi_{R2}$ . Für die Übersichtlichkeit wurde darauf verzichtet die elektrischen Komponenten dreiphasig auszuführen.

$$U_{CInv}(t) = \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \cos(\omega_{Netz} t + \varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}}) \\ + \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \cos(\omega_{Netz} t + \varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}}) \quad (3.41)$$

und die Anwendung der PLL-Eingangstransformation (2.28a) mit (3.41) führt zu:

$$U_q(t) = U_{q,Inv,R2} - U_{q,Netz}(t) \quad (3.42)$$

mit

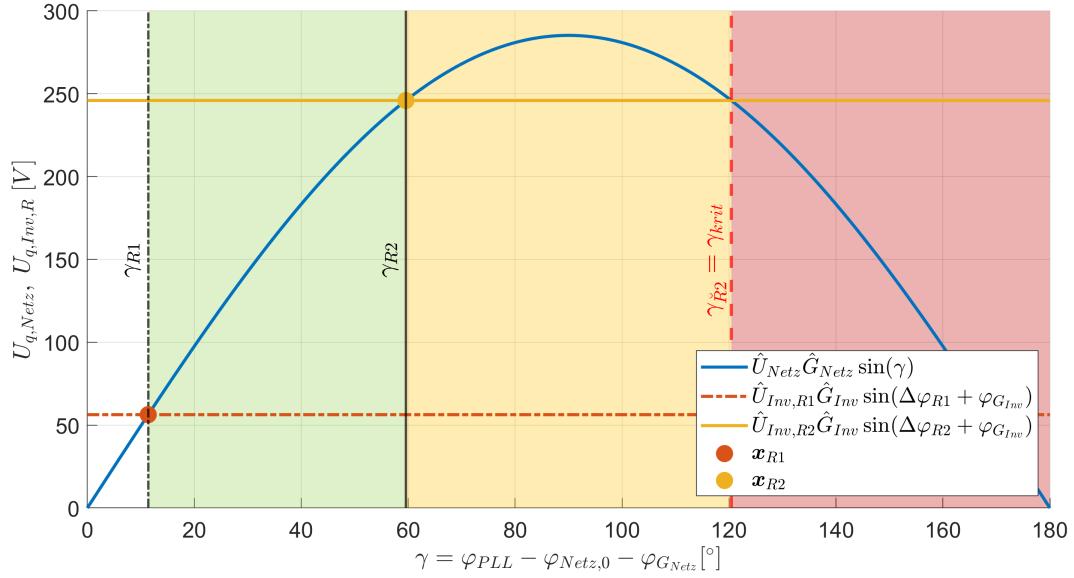
$$U_{q,Inv,R2} = \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \sin(\Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}}) \quad (3.43a)$$

$$U_{q,Netz}(t) = \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \sin(\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}}). \quad (3.43b)$$

Die Untersuchung des transienten Übergangs von  $x_{R1}$  nach  $x_{R2}$  erfolgt nun anhand des Diagramms in Abb. 3.5, in dem die Anteile von  $U_q(t)$  nach (3.42) in Abhängigkeit von  $\gamma$  gemäß (3.32) dargestellt sind. Das Diagramm zeigt neben  $U_{q,Inv,R2}$  auch  $U_{q,Inv,R1}$ , um den Ausgangspunkt des Übergangs zu visualisieren. Dem Szenario entsprechend ist  $\varphi_{U_{CInv,R2}} > \varphi_{U_{CInv,R1}}$  und daher  $U_{q,Inv,R2} > U_{q,Inv,R1}$ . Initial befindet sich das System in Ruhelage  $x_{R1}$ , die durch  $\gamma_{R1}$  gekennzeichnet ist. Nach der Anregung durch die Stellgrößenänderung (3.36) kann das Systemverhalten anhand des Vorzeichens von  $U_q(t)$  qualitativ beschrieben und bezüglich  $\gamma$  in drei Intervalle sowie die Grenzen zwischen den Intervallen eingeteilt werden:

**1. Intervall:**  $\gamma_{R1} \leq \gamma(t) < \gamma_{R2}$

Dieses Intervall ist in Abb. 3.5 grün markiert. Es gilt:  $U_{q,Inv,R2} > U_{q,Netz}(t)$  und daher nach (3.42)  $U_q(t) > 0$ . Mit (2.43g) und (2.43h) folgen:



**Abbildung 3.5.:** Darstellung der Anteile von  $U_q(t)$  nach (3.42) für zwei Ruhelagen. Anhand der drei farblich hinterlegten Intervalle im Diagramm wird das transiente Systemverhalten beim Übergang von  $x_{R1}$  nach  $x_{R2}$  untersucht.

$$\dot{x}_{PLL}(t) > 0 \xrightarrow{x_{PLL,0} = \omega_{Netz}} x_{PLL}(t) > \omega_{Netz} \quad (3.44a)$$

$$\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0 \xrightarrow{(3.32)} \dot{\gamma}(t) > 0. \quad (3.44b)$$

Infolge von (3.44b) nähert sich  $\gamma(t)$  dem Wert  $\gamma_{R2}$ .

**Intervallgrenze:**  $\gamma(t) = \gamma_{R2}$

Wegen  $U_{q,Inv,R2} = U_{q,Netz}(t)$  gilt  $U_q(t) = 0$  und mit (2.43g) folgt  $\dot{x}_{PLL}(t) = 0$ . Wegen (3.44a) gilt aber weiterhin  $x_{PLL}(t) > \omega_{Netz}$  und daher nach (2.43h):

$$\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0 \xrightarrow{(3.32)} \dot{\gamma}(t) > 0. \quad (3.45)$$

Entsprechend schwingt  $\gamma(t)$  über  $\gamma_{R2}$  hinaus.

**2. Intervall:**  $\gamma_{R2} < \gamma(t) < \gamma_{\check{R}2}$

Intervall 2 ist in Abb. 3.5 gelb markiert. Es gilt:  $U_{q,Inv,R2} < U_{q,Netz}(t)$  und daher  $U_q(t) < 0$ . Es folgt:

$$\dot{x}_{PLL}(t) < 0. \quad (3.46)$$

Wegen (3.44a) gilt beim Eintreten in dieses Intervall weiterhin  $x_{PLL}(t) > \omega_{Netz}$ . Nach (2.43h) ist  $\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0$  solange

$$x_{PLL}(t) - \omega_{Netz} > -K_{P,PLL}U_q(t) \quad (3.47)$$

ist und folglich gilt auch  $\dot{\gamma}(t) > 0$  und  $\gamma(t)$  entfernt sich von  $\gamma_{R2}$  in Richtung  $\gamma_{\check{R}2}$ . Wird in diesem Intervall aufgrund von (3.46)

$$x_{PLL}(t) - \omega_{Netz} \leq -K_{P,PLL}U_q(t) \quad (3.48)$$

erreicht, dann gilt

$$\dot{\varphi}_{PLL}(t) < 0 \quad \stackrel{(3.32)}{\implies} \quad \dot{\gamma}(t) < 0 \quad (3.49)$$

und  $\gamma(t)$  hat die maximale Überschwingweite erreicht und nähert sich danach  $\gamma_{R2}$  an. Es kann davon ausgegangen werden, dass  $\gamma(t)$  in der Folge den Wert  $\gamma_{R2}$  wieder unterschreitet und in das Intervall 1 zurückfällt. Dort wird  $\gamma(t)$  nach einiger Zeit eine maximale Unterschwingweite erreichen und sich wieder  $\gamma_{R2}$  annähern. Aufgrund der Dämpfung der PLL ist davon auszugehen, dass im weiteren Verlauf  $\gamma(t)$  immer geringere Über- und Unterschwingweiten aufweist und sich schließlich auf  $\gamma_{R2}$  einschwingt. Da  $\gamma_{R2}$  die Ruhelage  $\mathbf{x}_{R2}$  markiert und im Szenario vorausgesetzt wurde, dass  $\mathbf{x}_{R2}$  stabil ist, schwingt sich das System auf einen stabilen stationären Zustand ein.

**Intervallgrenze:**  $\gamma(t) = \gamma_{\check{R}2}$

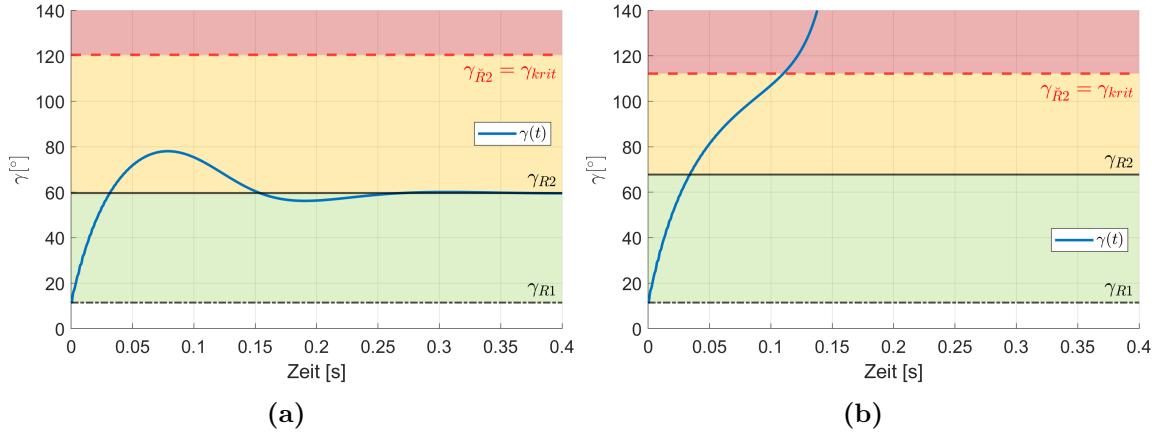
Wird (3.48) im Intervall 2 nicht erreicht, schwingt  $\gamma(t)$  bis zum Wert  $\gamma_{\check{R}2}$  über. Wegen  $U_{q,Inv,R2} = U_{q,Netz}(t)$  ist  $U_q(t) = 0$ . Gilt zu diesem Zeitpunkt  $x_{PLL}(t) < \omega_{Netz}$ , dann folgt

$$\dot{\varphi}_{PLL}(t) < 0 \quad \stackrel{(3.32)}{\implies} \quad \dot{\gamma}(t) < 0 \quad (3.50)$$

und  $\gamma(t)$  fällt in das 2. Intervall zurück. Ist dagegen  $x_{PLL}(t) > \omega_{Netz}$  dann gilt

$$\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0 \quad \stackrel{(3.32)}{\implies} \quad \dot{\gamma}(t) > 0 \quad (3.51)$$

und  $\gamma(t)$  geht in das 3. Intervall über. Bei  $x_{PLL}(t) = \omega_{Netz}$  befindet sich das System in der instabilen Ruhelage  $\mathbf{x}_{\check{R}2}$  und es kann keine eindeutige Aussage über den weiteren Verlauf von  $\gamma(t)$  getroffen werden.



**Abbildung 3.6.:** Beispielverläufe von  $\gamma(t)$  zur Veranschaulichung eines (a) stabilen und (b) instabilen transienten Übergangs. Die drei farblich hinterlegten Abschnitte entsprechen den Intervallen im Diagramm 3.5.

### 3. Intervall: $\gamma(t) > \gamma_{\check{R}2}$

Dieses Intervall ist in Abb. 3.5 rot markiert. Wegen  $U_{q,Inv,R2} > U_{q,Netz}(t)$  ist  $U_q(t) > 0$  und es gelten die gleichen Zusammenhänge wie im 1. Intervall:

$$\dot{x}_{PLL}(t) > 0 \quad \implies \quad x_{PLL}(t) > \omega_{Netz} \quad (3.52a)$$

$$\dot{\varphi}_{PLL}(t) > 0 \quad \xrightarrow{(3.32)} \quad \dot{\gamma}(t) > 0. \quad (3.52b)$$

Wegen (3.52b) entfernt sich  $\gamma(t)$  weiter von  $\gamma_{R2}$  und ein Rückgang in das 2. Intervall ist nicht mehr möglich. Entsprechend schwingt sich  $\gamma(t)$  nicht auf  $\gamma_{R2}$  ein, sondern divergiert. In der Folge divergiert auch  $\varphi_{PLL}(t)$  und die Netzsynchronität nach Definition (2.25) ist nicht gegeben. Zur Veranschaulichung sind in Abb. 3.6 Zeitverläufe von  $\gamma(t)$  mit den beschriebenen und markierten Intervallen dargestellt. Im Diagramm 3.6a ist ein transienten Übergang zu sehen, bei dem  $\gamma(t)$  über  $\gamma_{R2}$  hinaus schwingt und in das 2. Intervall eintritt, aber beim maximalen Überschwingen den Wert  $\gamma_{\check{R}2}$  nicht erreicht. Anschließend schwingt sich  $\gamma(t)$  mit immer kleinerer Amplitude auf  $\gamma_{R2}$  ein. Das Diagramm 3.6b zeigt ein Beispiel, bei dem  $\gamma(t)$  in das 2. Intervall eintritt, aber über  $\gamma_{\check{R}2}$  hinaus schwingt. Im 3. Intervall divergiert  $\gamma(t)$  und ein Einschwingen auf  $\gamma_{R2}$  ist nicht mehr möglich.

Aus den Ausführungen folgt, dass der transienten Übergang instabil wird, wenn  $\gamma(t)$  den Wert  $\gamma_{\check{R}2}$  überschreitet, der vor diesem Hintergrund als „kritische Phase“  $\gamma_{krit}$  bezeichnet wird. Erreicht  $\gamma(t)$  exakt  $\gamma_{krit}$ , befindet sich das System in der instabilen Ruhelage  $x_{\check{R}2}$  und es kann keine eindeutige Aussage über die Stabilität des transienten Übergangs getroffen werden. Wird  $\gamma_{krit}$  nicht erreicht, d.h. wird die Bedingung

$$\gamma(t) < \gamma_{krit} \quad (3.53)$$

eingehalten, dann schwingt sich  $\gamma(t)$  in der Folge auf  $\gamma_{R2}$  und das System auf die stabile Ruhelage  $\mathbf{x}_{R2}$  ein. Demzufolge ist der transiente Übergang stabil und Ungleichung (3.53) entspricht der Bedingung für die transiente Stabilität. Entsprechend wird (3.53) als „transiente Stabilitätsbedingung“ bezeichnet, die hier in Abhängigkeit von  $\gamma(t)$  formuliert ist. Wie bereits beschrieben, gilt  $\gamma_{krit} = \gamma_{R2}$  und der Schnittpunkt von  $U_{q,Netz}(t)$  und  $U_{q,Inv,R2}$  im Intervall  $\gamma \in [90^\circ; 180^\circ]$  kennzeichnet die kritische Phase. Aus einer geometrischen Betrachtung folgt:

$$\gamma_{krit} = \pi - \gamma_{R2}. \quad (3.54)$$

Die transiente Stabilitätsbedingung (3.53) kann mit (3.32) umformuliert und in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}(t)$  ausgedrückt werden:

$$\varphi_{PLL}(t) < \varphi_{PLL,krit}, \quad (3.55)$$

wobei sich  $\varphi_{PLL,krit}$  aus (3.32) und (3.54) ergibt:

$$\varphi_{PLL,krit} = \pi - \varphi_{U_{CInv,R2}} + 2\varphi_{Netz,0} + 2\varphi_{G_{Netz}}. \quad (3.56)$$

Die transiente Stabilitätsbedingung stellt nur eine Forderung an  $\varphi_{PLL}(t)$  bzw.  $\gamma(t)$ . Dies ist hier zur Bewertung der Stabilität des Systems ausreichend, da sich unter Einhaltung der Bedingung die PLL auf ihre Ruhelage einschwingt und daher die Parameter der Umrichterspannung Konstantwerte sind:

$$U_{Inv}(t) = \hat{U}_{Inv,R2} \cos(\omega_{Netz}t + \varphi_{PLL,R2} + \Delta\varphi_{R2}). \quad (3.57)$$

Folglich sind beide Eingangsspannungen des elektrischen Netzwerks  $U_{Inv}(t)$  und  $U_{Netz}(t)$  eingeschwungene Wechselgrößen, wodurch sich auch die übrigen elektrischen Zustände des Systems auf die Ruhelage  $\mathbf{x}_{R2}$  einschwingen, deren Stabilität vorausgesetzt wurde.

### **Untere kritische Phase der transienten Stabilitätsbedingung**

Die Herleitung der Bedingung (3.53) bezog sich auf einen transienten Übergang mit  $\varphi_{U_{CInv,R2}} > \varphi_{U_{CInv,R1}}$ . Der umgekehrte Fall  $\varphi_{U_{CInv,R2}} < \varphi_{U_{CInv,R1}}$  kann auf die gleiche Weise untersucht werden. Analog zur Darstellung im Diagramm 3.5 ist diese Situation in Abb. 3.7 abgebildet. Aufgrund der Periodizität von  $U_{q,Netz}(t)$  ergibt sich neben den Schnittpunkten von  $U_{q,Inv,R2}$  und  $U_{q,Netz}(t)$  bei der Ruhelage  $\gamma_{R2}$  und dem kritischen Phasenwinkel  $\gamma_{krit}$  ein weiterer Schnittpunkt bei  $\gamma'_{krit}$  mit:

$$\gamma'_{krit} = \gamma_{krit} - 2\pi. \quad (3.58)$$

Das Systemverhalten beim Übergang von  $\boldsymbol{x}_{R1}$  und  $\boldsymbol{x}_{R2}$  kann wie zuvor anhand des Vorzeichens von  $U_q(t)$  qualitativ in den drei im Diagramm 3.7 farblich markierten Intervallen beschrieben werden. Es ergibt sich analog in den obigen Ausführungen, dass sich  $\gamma(t)$  weiter von  $\gamma_{R2}$  entfernt und divergiert, sobald der Wert  $\gamma'_{krit}$  unterschritten wird. Für die transiente Stabilität muss daher die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\gamma(t) > \gamma'_{krit}. \quad (3.59)$$

Die transienten Stabilitätsbedingungen (3.53) und (3.59) lassen sich wie folgt zusammenfassen und mit  $\gamma(t)$  bzw. mit  $\varphi_{PLL}(t)$  ausdrücken:

$$\gamma'_{krit} < \gamma(t) < \gamma_{krit} \quad (3.60a)$$

$$\varphi'_{PLL,krit} < \varphi_{PLL}(t) < \varphi_{PLL,krit} \quad (3.60b)$$

mit

$$\varphi'_{PLL,krit} = \varphi_{PLL,krit} - 2\pi. \quad (3.61)$$

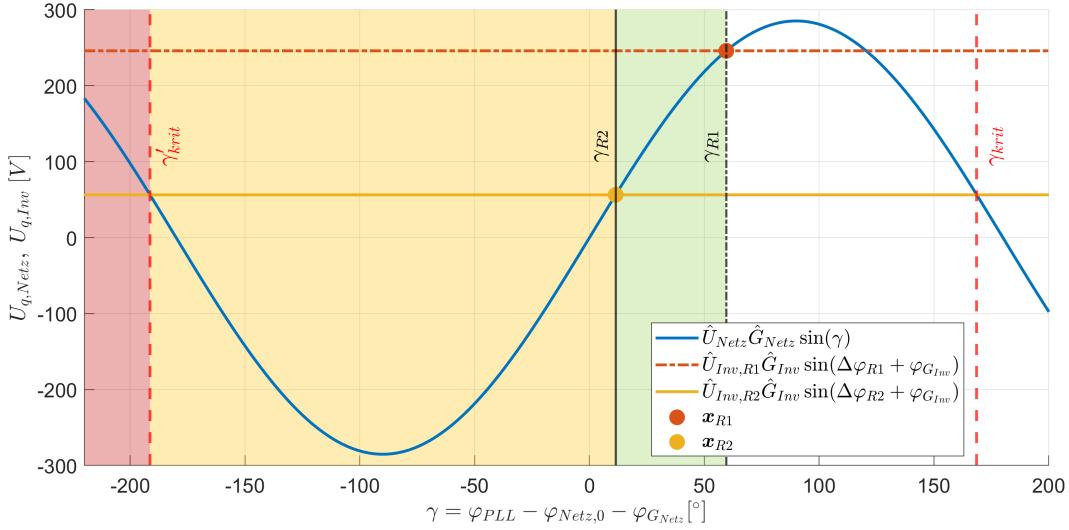
Obwohl nach (3.60b) sowohl das maximale Über- als auch das maximale Unterschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$  für die Stabilität der Netzsynchronisation relevant ist, wird es nicht als notwendig angesehen beide Bedingungen zu untersuchen. Bei einem stabilen transienten Übergang mit  $\varphi_{UCInv,R1} < \varphi_{UCInv,R2}$  tritt zuerst zu ein Überschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$  auf und es kann davon ausgegangen werden, dass das nachfolgende Unterschwingen aufgrund der vorhandenen Dämpfungen geringer ausfällt. Daher ist der untere kritische Wert  $\varphi'_{PLL,krit}$  bei diesem Übergang nicht entscheidend. Ebenso ist bei einem transienten Übergang mit  $\varphi_{UCInv,R1} > \varphi_{UCInv,R2}$  nur die untere kritische Schranke wesentlich. In Bezug auf das betrachtete Szenario (s. Abschnitt 3.3.1) wird die transiente Stabilitätsbedingung daher nur bezüglich des oberen kritischen Wertes  $\varphi_{PLL,krit}$  betrachtet.

### **Einordnung der transienten Stabilitätsbedingung in die Stabilitätstheorie von Ljapunow**

Zur Definition des Stabilitätsbegriffs von Ljapunow wurden in Abschnitt 2.4.1 die  $\delta$ - sowie die  $\epsilon$ -Umgebung eingeführt. Im vorliegenden Fall kann die  $\delta$ -Umgebung mit

$$\gamma(0) \in (-90^\circ; 90^\circ) \quad (3.62)$$

und die  $\epsilon$ -Umgebung mit



**Abbildung 3.7.:** Darstellung zum transienten Übergang von  $\mathbf{x}_{R1}$  nach  $\mathbf{x}_{R2}$  mit  $\varphi_{U_{CInv},R1} > \varphi_{U_{CInv},R2}$ . Aufgrund der Periodizität von  $U_{q,Netz}(t)$  existiert sowohl eine obere als auch eine untere Schranke für  $\gamma(t)$ , die nicht über bzw. unterschritten werden darf damit die Phasendifferenz (2.25) nicht divergiert und die Netzsynchronität gegeben ist.

$$\gamma(t) \in (\gamma'_{krit}; \gamma_{krit}) \quad (3.63)$$

angegeben werden. Da nach der Definition des betrachteten Szenarios  $\gamma_{R1} \in (-90^\circ; 90^\circ)$  und  $\gamma_{R2} \in (-90^\circ; 90^\circ)$  gilt, liegen der Initial- und Zielzustand in der  $\delta$ -Umgebung. Bei Erfüllen der transienten Stabilitätsbedingung (3.53) verlässt die Trajektorie von  $\gamma(t)$  die  $\epsilon$ -Umgebung nicht und schwingt sich auf  $\gamma_{R2}$  ein. Da  $\gamma_{R1}$  und  $\gamma_{R2}$  die Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R1}$  sowie  $\mathbf{x}_{R2}$  kennzeichnen und vorausgesetzt wurde, dass diese stabil sind, ist  $\mathbf{x}_{R2}$  nach der Stabilitätstheorie von Ljapunow dann eine asymptotisch stabile Ruhelage für den Initialzustand  $\mathbf{x}_{R1}$ .

### 3.4. Methode zum Nachweis der transienten Stabilität

Die transiente Stabilitätsbedingung (3.55) stellt eine Anforderung an den Zeitverlauf des Zustandes  $\varphi_{PLL}(t)$  während des transienten Übergangs. Eine Möglichkeit die transiente Stabilität nachzuweisen ist, den Verlauf von  $\varphi_{PLL}(t)$  durch analytisches oder numerisches Lösen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen zu berechnen und die Bedingung (3.55) direkt zu überprüfen. Es ist aber nicht notwendig, den Verlauf von  $\varphi_{PLL}(t)$  vollständig zu ermitteln. Definiert man das maximale Überschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$  während eines stabilen transienten Übergangs durch:

$$\varphi_{PLL,max} = \max_t \varphi_{PLL}(t), \quad (3.64)$$

resultiert aus der transienten Stabilitätsbedingung (3.55):

$$\varphi_{PLL,max} < \varphi_{PLL,krit}. \quad (3.65)$$

Zum Nachweis der transienten Stabilität ist daher die Berechnung oder Abschätzung von  $\varphi_{PLL,max}$  und das Überprüfen von (3.65) ausreichend. Im folgenden Abschnitt wird eine Methode erarbeitet, um die transiente Stabilitätsbedingung nach diesem Ansatz nachzuweisen. Dazu werden geeignete Vereinfachungen und Annahmen getroffen, um  $\varphi_{PLL,max}$  konservativ abzuschätzen.

### 3.4.1. Vereinfachung des Systems

Ausgehend vom Blockschaltbild 3.4 wird die PLL mit der Eingangstransformation (2.28b) betrachtet, d.h. die Amplitude und die Phase der Messspannung sind die Eingangssignale der PLL und müssen aus dem Zeitsignal  $U_{CInv}(t)$  ermittelt werden. Mit der getroffenen Annahme, dass die dynamischen Eigenschaften des elektrischen Netzwerks gegenüber der PLL vernachlässigbar sind, kann diese Berechnung aus der komplexwertigen Darstellung von  $U_{CInv}(t)$  erfolgen. Aus (3.41) resultiert:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{CInv}(t) = & \hat{U}_{Inv,R2}\hat{G}_{Inv}e^{j(\omega_{Netz}t+\varphi_{PLL}(t)+\Delta\varphi_{R2}+\varphi_{G_{Inv}})} \\ & + \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz}e^{j(\omega_{Netz}t+\varphi_{Netz,0}+\varphi_{G_{Netz}})}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Mit  $\underline{U}_{CInv}(t) = \hat{U}_{CInv}(t)e^{j(\omega_{Netz}t+\varphi_{U_{CInv}}(t))}$  entfällt der Term  $e^{j\omega_{Netz}t}$  in (3.66):

$$\begin{aligned} \hat{U}_{CInv}(t)e^{j\varphi_{U_{CInv}}(t)} = & \hat{U}_{Inv,R2}\hat{G}_{Inv}e^{j(\varphi_{PLL}(t)+\Delta\varphi_{R2}+\varphi_{G_{Inv}})} \\ & + \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz}e^{j(\varphi_{Netz,0}+\varphi_{G_{Netz}})}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

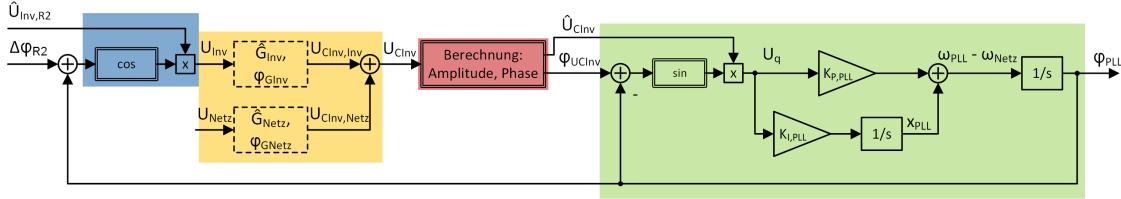
$\hat{U}_{CInv}(t)$  und  $\varphi_{U_{CInv}}(t)$  können mit dem Real- und Imaginärteil von (3.67) angegeben werden:

$$\hat{U}_{CInv}(t) = \left( \Re \left\{ \hat{U}_{CInv}(t)e^{j\varphi_{U_{CInv}}(t)} \right\}^2 + \Im \left\{ \hat{U}_{CInv}(t)e^{j\varphi_{U_{CInv}}(t)} \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.68a)$$

$$\varphi_{U_{CInv}}(t) = \arctan \left( \frac{\Im \left\{ \hat{U}_{CInv}(t)e^{j\varphi_{U_{CInv}}(t)} \right\}}{\Re \left\{ \hat{U}_{CInv}(t)e^{j\varphi_{U_{CInv}}(t)} \right\}} \right). \quad (3.68b)$$

Die Ausdrücke (3.68) führen zum Blockschaltbild des Systems in Abb. 3.8, welches als Ausgangspunkt für die Vereinfachungen dient. Aufgrund der Entfernung des Frequenzanteils  $\omega_{Netz}t$  muss die Initialisierung des PLL-Zustandes  $x_{PLL}$  auf  $x_{PLL}(0) = 0$  angepasst werden, da nun der PLL-Phasenwinkel  $\varphi_{PLL}$  statt  $\tilde{\varphi}_{PLL}$  das Ausgangssignal der PLL ist und zurückgekoppelt

### 3. Stabilität der Netzsynchronisation



**Abbildung 3.8.:** Blockschaltbild des Gesamtsystems mit Reduzierung des elektrischen Netzwerkes auf die stationären Übertragungseigenschaften der Übertragungsfunktionen  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  sowie der PLL mit Eingangstransformation (2.28b), wodurch die algebraische Berechnung von  $\hat{U}_{CInv}$  und  $\varphi_{U_{CInv}}$  nach (3.68) (rot) notwendig ist. Der Zustand  $x_{PLL}$  ist nun mit 0 initialisiert.

wird.

#### Vereinfachung der PLL

Die Funktion der PLL ist das Nachführen von  $\varphi_{PLL}(t)$  entsprechend der Eingangsphase  $\varphi_{U_{CInv}}(t)$ . Daher kann bei geeigneter Parametrierung von einer kleinen Differenz zwischen  $\varphi_{U_{CInv}}(t)$  und  $\varphi_{PLL}(t)$  ausgegangen und die folgende Vereinfachung getroffen werden [60], [62], [42]:

$$\sin(\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{PLL}(t)) \approx \varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{PLL}(t) \quad (3.69)$$

Nimmt man des Weiteren an, dass  $\hat{U}_{CInv}(t)$  ein konstanter Faktor ist:

$$\hat{U}_{CInv}(t) = \hat{U}_{CInv,konst}, \quad (3.70)$$

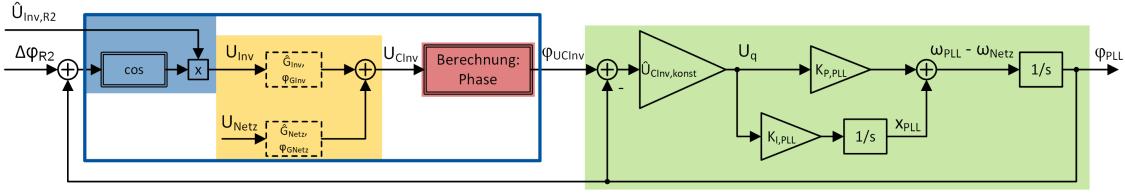
vereinfacht sich die PLL-Eingangstransformation (2.28b) zu:

$$U_q(t) = \hat{U}_{CInv,konst} (\varphi_{U_{CInv}}(t) - \varphi_{PLL}(t)) \quad (3.71)$$

und es resultiert das Blockschaltbild in Abb. 3.9. Da die PLL mit diesen Vereinfachungen keine Nichtlinearitäten mehr enthält, kann sie durch eine Übertragungsfunktion beschrieben werden. Aus dem Blockschaltbild ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_{PLL}(s) &= \frac{\varphi_{PLL}(s)}{\varphi_{U_{CInv}}(s)} \\ &= \frac{\hat{U}_{CInv,konst} K_{P,PLL} s + \hat{U}_{CInv,konst} K_{I,PLL}}{s^2 + \hat{U}_{CInv,konst} K_{P,PLL} s + \hat{U}_{CInv,konst} K_{I,PLL}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die Annahme der konstanten Amplitude  $\hat{U}_{CInv,konst}$  stellt allerdings eine wesentliche Ver-



**Abbildung 3.9.:** Blockschaltbild des Gesamtsystems mit der PLL-Eingangstransformation nach (3.71). Die PLL (grün) ist durch die Vereinfachung (3.69) und die Annahme (3.70) ein lineares System. Der blaue Rahmen markiert die elektrischen Komponenten, die zum nichtlinearen Verstärkungsfaktor  $K(\varphi_{PLL})$  zusammengefasst werden.

änderung der PLL-Eigenschaften dar.  $\hat{U}_{CInv,konst}$  muss daher so abgeschätzt werden, dass  $G_{PLL}(s)$  eine kleine Dämpfung aufweist, da auf diese Weise ein großes Überschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$  resultiert, was bezüglich der transienten Stabilitätsbedingung den ungünstigsten Fall darstellt. Nach [42] gilt für die Dämpfung von (3.72):

$$D_{PLL} = \frac{K_{P,PLL}}{2} \sqrt{\frac{\hat{U}_{CInv,konst}}{K_{I,PLL}}} \quad \Rightarrow \quad D_{PLL} \propto \sqrt{\hat{U}_{CInv,konst}} \quad (3.73)$$

und entsprechend führt ein kleines  $\hat{U}_{CInv,konst}$  zu einer kleinen Dämpfung.  $\hat{U}_{CInv,konst}$  wird daher mit dem Minimum von (3.68a) in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}$  abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{CInv,konst} &= \min_{\varphi_{PLL}} \left\{ \left( \Re \left\{ \hat{U}_{CInv}(t) e^{j\varphi_{CInv}(t)} \right\}^2 + \Im \left\{ \hat{U}_{CInv}(t) e^{j\varphi_{CInv}(t)} \right\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \min_{\varphi_{PLL}} \left\{ \left( \hat{U}_{Inv,R2}^2 \hat{G}_{Inv}^2 + \hat{U}_{Netz}^2 \hat{G}_{Netz}^2 + 2 \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos(\varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}}) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Die Extremwertrechnung ist im Anhang A.3 aufgeführt und das Ergebnis ist:

$$\hat{U}_{CInv,konst} = |\hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} - \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}|. \quad (3.75)$$

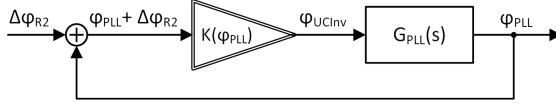
Mit  $\hat{U}_{CInv,konst}$  nach (3.75) ist  $G_{PLL}(s)$  eine konservative Abschätzung der PLL für des Überschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$ . Weitere Eigenschaften der ursprünglichen PLL werden durch  $G_{PLL}(s)$  nicht wiedergegeben.

### Vereinfachung des elektrischen Netzwerks

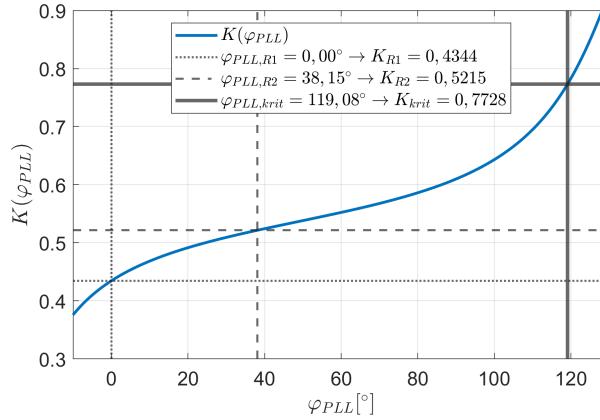
Durch die Reduzierung der Übertragungsfunktionen  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  auf ihre statischen Eigenschaften weisen die elektrischen Komponenten keine dynamischen Übertragungseigenschaften mehr auf und können daher zu einer statischen Nichtlinearität mit dem Eingang

### 3. Stabilität der Netzsynchronisation

---



**Abbildung 3.10.:** Kompaktes Blockschaltbild des vereinfachten Gesamtsystems mit nichtlinearem Verstärkungsfaktor  $K(\varphi_{PLL})$ .



**Abbildung 3.11.:** Beispiel des Verlaufs von  $K(\varphi_{PLL})$  mit Markierung von relevanten Werten.  $K_{R1}$ ,  $K_{R2}$  und  $K_{krit}$  sind in (3.85) definiert.

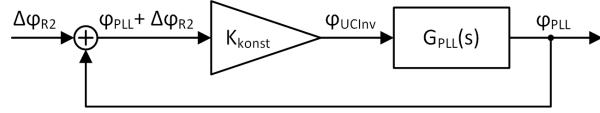
$\varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2}$  und dem Ausgang  $\varphi_{UCInv}(t)$  zusammengefasst werden. Diese Nichtlinearität entspricht der Berechnung von  $\varphi_{UCInv}(t)$  nach (3.68b) und wird als nichtlinearer Verstärkungsfaktor  $K$  mit Abhängigkeit vom aktuellen Zustand  $\varphi_{PLL}(t)$  angesehen:

$$\varphi_{UCInv}(t) = K(\varphi_{PLL}(t)) (\varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2}). \quad (3.76)$$

Die zeitliche Abhängigkeit von (3.76) ergibt sich ausschließlich aufgrund des Zustandes  $\varphi_{PLL}(t)$ . Sowohl  $K$  als auch  $\varphi_{UCInv}$  können als Funktionen von  $\varphi_{PLL}$  ohne Zeitabhängigkeit aufgefasst werden. Mit dieser Betrachtung resultiert:

$$K(\varphi_{PLL}) = \frac{\varphi_{UCInv}(\varphi_{PLL})}{\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2}} \quad (3.77)$$

und das System kann durch das kompakte Blockschaltbild in Abb. 3.10 beschrieben werden, in dem alle Nichtlinearitäten entweder geeignet vereinfacht, konservativ abgeschätzt oder in  $K(\varphi_{PLL})$  zusammengefasst sind. Der Ausdruck (3.77) ist im Anhang A.4 vollständig aufgeführt. Es ist ausreichend,  $K(\varphi_{PLL})$  im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  zu betrachten, da sich  $\varphi_{PLL}(t)$  bei einem stabilen transienten Übergang vom Initialwert  $\varphi_{PLL,R1}$  auf  $\varphi_{PLL,R2}$  mit einem maximalen Überschwingen bis  $\varphi_{PLL,krit}$  einschwingt. Ein Beispiel von  $K(\varphi_{PLL})$  ist in Abb. 3.11 für das genannte Intervall dargestellt.



**Abbildung 3.12.:** Blockschaltbild des Systems mit Ersetzung von  $K(\varphi_{PLL})$  durch  $K_{konst}$ .

$$\begin{array}{cc|c} 1 & K_I(1 - K_{konst}) & \\ \hline K_P(1 - K_{konst}) & 0 & \\ \hline K_I(1 - K_{konst}) & 0 & \end{array}$$

**Tabelle 3.1.:** Routhschema der Übertragungsfunktion (3.78):  $G_{Ges}(s)$  ist nach dem Routhkriterium stabil, wenn  $K_P(1 - K_{konst}) > 0$  und  $K_I(1 - K_{konst}) > 0$  gelten. Für  $K_P > 0$  und  $K_I > 0$  resultiert daraus  $K_{konst} < 1$ .

### Lineare Abschätzung

Wird  $K(\varphi_{PLL})$  durch einen konstanten Verstärkungsfaktor  $K_{konst}$  ersetzt, ergibt sich ein lineares System mit dem Blockschaltbild in Abb. 3.12 und der Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} G_{Ges}(s) &= \frac{\varphi_{PLL}(s)}{\Delta\varphi_{R2}(s)} \\ &= \frac{K_P K_{konst} s + K_I K_{konst}}{s^2 + K_P(1 - K_{konst})s + K_I(1 - K_{konst})} \end{aligned} \quad (3.78)$$

mit

$$K_P = K_{P,PLL} \hat{U}_{CInv,konst} \quad (3.79a)$$

$$K_I = K_{I,PLL} \hat{U}_{CInv,konst}. \quad (3.79b)$$

Wie die Ersetzung von  $U_{CInv}(t)$  durch  $U_{CInv,konst}$ , stellt auch die Ersetzung von  $K(\varphi_{PLL})$  durch  $K_{konst}$  eine wesentliche Veränderung der Systemeigenschaften dar. Bezüglich der transienten Stabilitätsbedingung ist der Eingriff aber zulässig, wenn der Maximalwert  $\varphi_{PLL,max}$  durch das lineare System korrekt dargestellt wird. Die Grundvoraussetzung dafür ist, dass (3.78) eine stabile Übertragungsfunktion ist. Nach dem Routhkriterium (z.B. [71]) und dem Routhschema in Tabelle 3.1 resultiert aus dieser Forderung die Bedingung:

$$K_{konst} < 1. \quad (3.80)$$

Folglich existiert dann der Maximalwert von  $G_{Ges}(s)$  bei einer sprungförmigen Anregung und wird mit  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  bezeichnet. Für die zulässige Ersetzung von  $K(\varphi_{PLL})$  mit  $K_{konst}$  kann somit die folgende Bedingung formuliert werden:

$$\varphi_{PLL,max|K_{konst}} \geq \varphi_{PLL,max}. \quad (3.81)$$

Entsprechend der Ungleichung (3.81) ist auch ein Überschätzen von  $\varphi_{PLL,max}$  durch das lineare System gestattet, wodurch die Abschätzung zwar konservativer ausfällt, aber keine falsche Stabilitätsaussage resultiert. Für die Dämpfung  $D_{Ges}$  der Übertragungsfunktion  $G_{Ges}(s)$  gilt:

$$D_{Ges} = \frac{K_P}{2} \sqrt{\frac{(1 - K_{konst})}{K_I}} \quad \Rightarrow \quad D_{Ges} \propto \sqrt{(1 - K_{konst})}. \quad (3.82)$$

Demzufolge resultieren für große  $K_{konst} < 1$  kleine Dämpfungen, wodurch der Maximalwert  $\varphi_{PLL,max}$  tendenziell überschätzt wird.

### 3.4.2. Herleitung der Nachweismethode

Zum Nachweis der transienten Stabilität muss ein geeignetes  $K_{konst}$  gefunden werden, um den Maximalwert  $\varphi_{PLL,max}$  auf Basis der Übertragungsfunktion  $G_{Ges}(s)$  konservativ durch  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  abzuschätzen. Stellvertretend zur transienten Stabilitätsbedingung (3.65) wird dann die folgende Bedingung überprüft:

$$\varphi_{PLL,max|K_{konst}} < \varphi_{PLL,krit} \quad (3.83)$$

Da nach (3.77) immer ein Zusammenhang zwischen dem nichtlinearen Verstärkungsfaktor  $K$  und dem PLL-Phasenwinkel  $\varphi_{PLL}$  existiert, korrespondiert  $K_{konst}$  mit  $\varphi_{PLL,K_{konst}}$  gemäß:

$$K_{konst} = K(\varphi_{PLL,K_{konst}}). \quad (3.84)$$

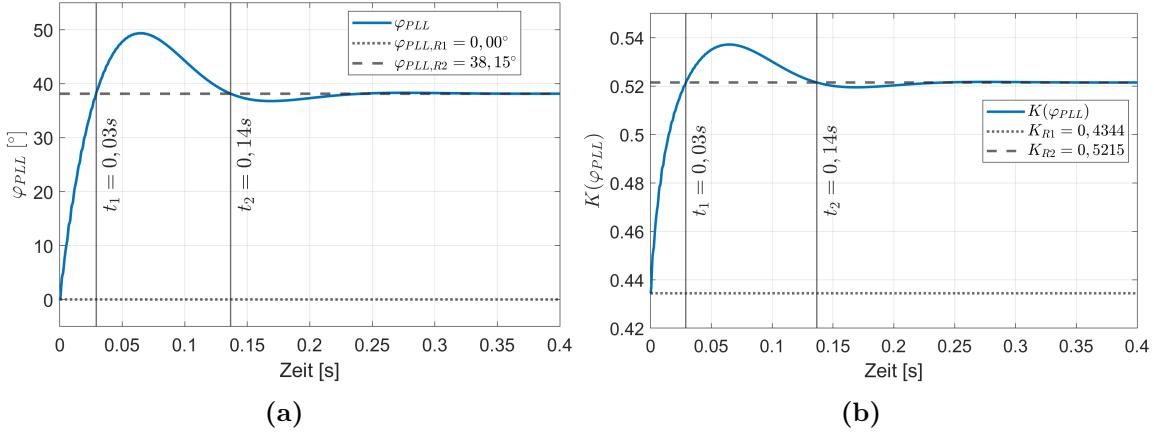
Gleichermaßen werden die folgenden Verstärkungsfaktoren definiert:

$$K_{R1} = K(\varphi_{PLL,R1}) = \frac{\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL,R1})}{\varphi_{PLL,R1} + \Delta\varphi_{R2}} \quad (3.85a)$$

$$K_{R2} = K(\varphi_{PLL,R2}) = \frac{\varphi_{PLL,R2}}{\varphi_{PLL,R2} + \Delta\varphi_{R2}} \quad (3.85b)$$

$$K_{krit} = K(\varphi_{PLL,krit}) = \frac{\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL,krit})}{\varphi_{PLL,krit} + \Delta\varphi_{R2}}. \quad (3.85c)$$

$K_{R1}$  gilt unmittelbar nach der sprunghaften Anregung bei  $t = 0$ .  $K_{R2}$  ist der Verstärkungsfaktor, wenn das System in der Ruhelage  $\mathbf{x}_{R2}$  eingeschwungen ist und daher  $\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL,R2}) = \varphi_{PLL,R2}$  gilt.  $K_{krit}$  ist die Verstärkung, wenn  $\varphi_{PLL}(t)$  zu einem Zeitpunkt bis zum kritischen



**Abbildung 3.13.:** Darstellung eines transienten Übergangs: (a) Verlauf von  $\varphi_{PLL}(t)$  und (b) zugehöriger Zeitverlauf von  $K(\varphi_{PLL})$ . Die Werte  $\varphi_{PLL,krit} = 119,08^\circ$  und  $K_{krit} = 0,7728$  sind nicht Teil der dargestellten Ausschnitte.

Phasenwinkel  $\varphi_{PLL,krit}$  überschwingt.

Es wird angenommen, dass  $K(\varphi_{PLL})$  im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  die folgenden Eigenschaften aufweist:

1.  $K(\varphi_{PLL})$  besitzt keine Singularitäten und ist stetig
2.  $K(\varphi_{PLL})$  ist monoton steigend, d.h. es gilt

$$\frac{\partial K(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} \geq 0. \quad (3.86)$$

Die Richtigkeit dieser Annahmen wird zunächst vorausgesetzt und bei der Implementation der Methode in Kapitel 4.1 überprüft bzw. durch geeignete Anpassungen sichergestellt. Da für das betrachtete Szenario  $\varphi_{PLL,R1} < \varphi_{PLL,R2} < \varphi_{PLL,krit}$  gilt, folgt mit (3.86):

$$K_{R1} \leq K_{R2} \leq K_{krit}. \quad (3.87)$$

Der zeitliche Verlauf von  $K(\varphi_{PLL})$  während eines stabilen transienten Übergangs kann mit (3.86) und (3.87) folgendermaßen beschrieben und am Beispiel der Zeitverläufe von  $\varphi_{PLL}(t)$  und  $K(\varphi_{PLL})$  in den Diagrammen 3.13a und 3.13b nachvollzogen werden. Bei  $t = 0$  steigen  $\varphi_{PLL}(t)$  und  $K(\varphi_{PLL})$  von  $\varphi_{PLL,R1}$  und  $K_{R1}$  beginnend an und erreichen bei  $t = t_1$  die Werte  $\varphi_{PLL,R2}$  und  $K_{R2}$ . Für  $t_1 \leq t \leq t_2$  schwingt  $\varphi_{PLL}(t)$  über den Ruhelagenwert  $\varphi_{PLL,R2}$  hinaus, daher folgt  $K(\varphi_{PLL}) \geq K_{R2}$ . Im stationären Zustand nehmen  $\varphi_{PLL}(t)$  und  $K(\varphi_{PLL})$  schließlich wieder die Werte  $\varphi_{PLL,R2}$  und  $K_{R2}$  an. Bei einem stabilen Übergang gilt analog zu  $\varphi_{PLL}(t) < \varphi_{PLL,krit}$  die Ungleichung  $K(\varphi_{PLL}) \leq K_{krit}$ .

Setzt man den Zusammenhang zwischen  $K_{konst}$  und der Dämpfung  $D_{Ges}$  nach (3.82) für jeden Zeitpunkt des Übergangs auch für  $K(\varphi_{PLL})$  an, ergibt sich, dass die Dämpfung zunächst abnimmt, im Intervall  $[t_1; t_2]$  ein Minimum erreicht und schließlich im eingeschwungenen

Zustand konstant ist. Die Ersetzung von  $K(\varphi_{PLL})$  mit  $K_{konst} = K_{R2}$  würde daher zu einer Unterschätzung der Dämpfung im Intervall  $[0; t_1]$  und einer Überschätzung in  $[t_1; t_2]$  führen. Um die Dämpfung und damit auch den Maximalwert konservativ abzuschätzen, ergibt sich demzufolge die folgende Anforderung an  $K_{konst}$ :

$$K_{konst} \in [K_{R2}; K_{krit}], \quad (3.88)$$

wobei zusätzlich die Forderung  $K_{konst} < 1$  (s. (3.80)) berücksichtigt werden muss. Mit (3.84) gilt als Entsprechung zu (3.88) für  $\varphi_{PLL,K_{konst}}$  das Intervall:

$$\varphi_{PLL,K_{konst}} \in [\varphi_{PLL,R2}; \varphi_{PLL,krit}]. \quad (3.89)$$

Mit den Methoden aus den Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3 sowie einem  $K_{konst}$  kann der Maximalwert  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  abgeschätzt bzw. berechnet werden. Nach (3.77) ist dann analog zu (3.84) wieder eine Zuordnung zwischen dem ermittelten  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  und dem Verstärkungsfaktor  $K(\varphi_{PLL,max|K_{konst}})$  möglich. Erfüllen  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  und  $\varphi_{PLL,K_{konst}}$  die Ungleichung

$$\varphi_{PLL,max|K_{konst}} < \varphi_{PLL,K_{konst}}, \quad (3.90)$$

folgt aufgrund der Annahme (3.86):

$$K(\varphi_{PLL,max|K_{konst}}) \leq K_{konst}. \quad (3.91)$$

Folglich nimmt  $\varphi_{PLL}(t)$  unter der Bedingung (3.90) während des Übergangs keinen Wert an, der nach (3.77) mit einem größeren Verstärkungsfaktor als  $K_{konst}$  korrespondiert. Nach (3.82) wird dadurch die Dämpfung des Übergangs zu jedem Zeitpunkt unterschätzt, was zu einer konservativen Abschätzung des Maximalwertes führt.  $K_{konst}$  stellt daher eine zulässige Ersetzung von  $K(\varphi_{PLL})$  dar. Wegen (3.89) und (3.90) gilt

$$\varphi_{PLL,max|K_{konst}} < \varphi_{PLL,K_{konst}} \leq \varphi_{PLL,krit} \quad (3.92)$$

und da  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  den Maximalwert  $\varphi_{PLL,max}$  konservativ abschätzt folgt direkt:  $\varphi_{PLL,max} < \varphi_{PLL,krit}$ . Das Erfüllen der Ungleichung (3.90) zeigt somit das Erfüllen der transienten Stabilitätsbedingung (3.65) an. Mit der Funktion

$$V(\varphi_{PLL,K_{konst}}) = \varphi_{PLL,max|K_{konst}} - \varphi_{PLL,K_{konst}} \quad (3.93)$$

wird (3.90) zu

$$V(\varphi_{PLL,K_{konst}}) < 0 \quad (3.94)$$

umgeformt. Die Gültigkeit von (3.94) kann nachgewiesen werden, indem das Minimum

$$V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}}) = \min_{\varphi_{PLL,K_{konst}}} V(\varphi_{PLL,K_{konst}}) \quad (3.95)$$

bestimmt und die Bedingung

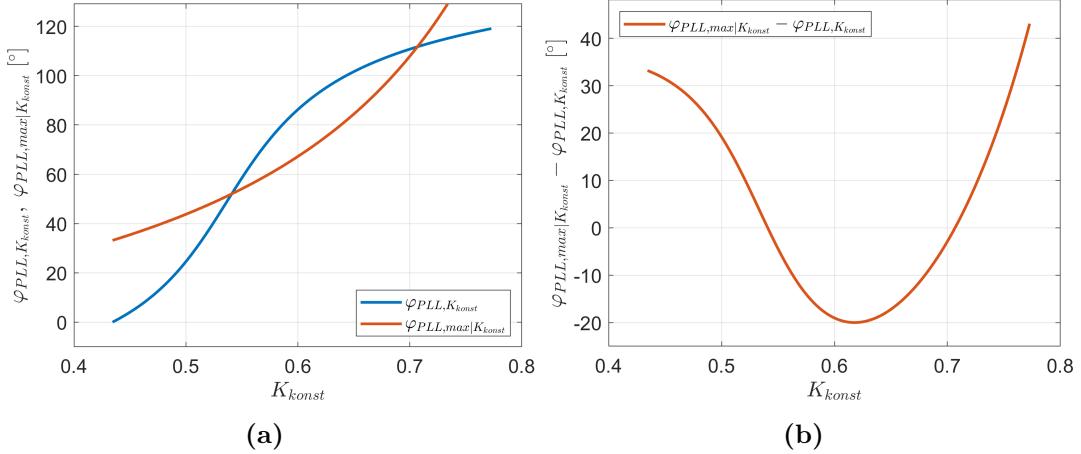
$$V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}}) < 0 \quad (3.96)$$

überprüft wird. Mit Erfüllen der Ungleichung (3.96) ist daher die transiente Stabilität nachgewiesen. Bei der Bestimmung von  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  müssen bezüglich  $K_{konst}$  und  $\varphi_{PLL,konst}$  die Nebenbedingungen (3.80), (3.88) und (3.89) berücksichtigt werden, aber darüber hinaus sind die konkreten Werte von  $K_{konst}$  und  $\varphi_{PLL,konst}$  für den Nachweis der Stabilität nicht entscheidend.

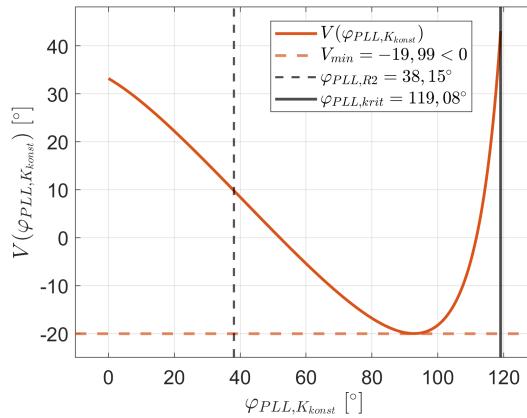
Anstelle des Nachweises der transienten Stabilität mit der Bedingung (3.55), die das Lösen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen erfordert, liegt mit (3.96) eine Bedingung vor, welche diesen Nachteil nicht aufweist. Aufgrund der getroffenen Abschätzungen ist (3.96) aber nur ein hinreichendes Kriterium für die transiente Stabilität. Ein transienter Übergang kann daher stabil sein, auch wenn die Stabilität mit (3.96) nicht nachgewiesen werden kann.

### Grafische Veranschaulichung

Zur Veranschaulichung erfolgt eine grafische Darstellung der Bedingung (3.94) bzw. (3.96). Für das Beispiel des nichtlinearen Verstärkungsfaktors im Diagramm 3.11 wird für jedes  $K_{konst}$  im Intervall (3.88) der Maximalwert  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  berechnet und in Abhängigkeit von  $K_{konst}$  in Abb. 3.14a dargestellt. Im gleichen Diagramm ist der zu  $K_{konst} = K(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  inverse Zusammenhang eingetragen. Die Differenz beider Verläufe  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}} - \varphi_{PLL,K_{konst}}$  zeigt das Diagramm 3.14b. Schließlich ist unter Verwendung von  $K_{konst} = K(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  der Differenzverlauf im Diagramm 3.15 in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL,K_{konst}}$  abgebildet, was der Funktion  $V(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  gemäß (3.93) entspricht. Das Minimum  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  ist im Diagramm markiert und es gilt  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}}) < 0$ , womit (3.96) erfüllt ist. Für das gezeigte Beispiel ist die transiente Stabilität mit der hergeleiteten Methode nachgewiesen worden.



**Abbildung 3.14.:** Verläufe in Abhängigkeit von  $K_{konst}$ : (a) Maximalwert  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  und der zu (3.84) inverse Zusammenhang  $\varphi_{PLL,K_{konst}} = f(K_{konst})$ , (b) Differenz  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}} - \varphi_{PLL,K_{konst}}$ .



**Abbildung 3.15.:** Verlauf von  $V(\varphi_{PLL,K_{konst}}) = \varphi_{PLL,max|K_{konst}} - \varphi_{PLL,K_{konst}}$  in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL,K_{konst}}$  mit Markierung des Minimums sowie des Intervalls (3.89).

# 4. Implementation und Anwendungsaspekte

Im Kapitel 3.3 ist eine Bedingung für die transiente Stabilität der Netzsynchronisation anhand der Betrachtung eines Szenarios hergeleitet worden. Darauf aufbauend wurde eine Methode erarbeitet, um die Stabilitätsbedingung zu überprüfen, ohne die zugrundeliegenden Differentialgleichungen zu lösen. In diesem Kapitel wird zuerst eine Implementation der Nachweismethode entwickelt und im zweiten Teil wird beschrieben, wie der Stabilitätsnachweis und die Nachweismethode für weitere Szenarien angewandt werden können.

## 4.1. Implementation der Nachweismethode

Zur Implementation der Nachweismethode muss zunächst überprüft werden, ob die bei der Herleitung in Abschnitt 3.4 getroffenen Annahmen zutreffen bzw. wie diese durch geeignete Anpassungen sichergestellt werden können. Des Weiteren wird die Berechnung des Maximalwertes  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  in zwei Varianten vorgeschlagen, woraus zwei Kriterien für die transiente Stabilitätsbedingung resultieren. Auf Basis dieser Vorarbeiten kann dann der Stabilitätsnachweis durch eine Optimierung unter Nebenbedingungen implementiert werden.

### 4.1.1. Singularität und Unstetigkeitsstelle des nichtlinearen Verstärkungsfaktors

Es wurde die Annahme getroffen, dass der nichtlineare Verstärkungsfaktor  $K(\varphi_{PLL})$  im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  keine Singularität aufweist und stetig ist. Jedoch besitzt  $K(\varphi_{PLL})$  eine Singularität aufgrund der Nullstelle des Nenners von (3.77) bei

$$\varphi_{PLL} = -\Delta\varphi_{R2}. \quad (4.1)$$

Da im betrachteten Szenario  $\varphi_{PLL,R1} = 0$  sowie  $\varphi_{PLL,R1} < \varphi_{PLL,R2} < \varphi_{PLL,krit}$  gelten, muss  $\Delta\varphi_{R2} > 0$  sein, damit die Singularität nicht im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  liegt und die getroffene Annahme nicht verletzt wird.

Zur Berechnung von  $K(\varphi_{PLL})$  sollte der Phasenwinkel  $\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})$  mit der arctan2-Funktion anstelle der arctan-Funktion bestimmt werden, um ein quadrantenrichtiges Ergebnis zu erhalten. Die arctan2-Funktion und deren relevante Eigenschaften sind im Anhang A.5 beschrieben. Aus (3.68b) ergibt sich in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL}) &= \text{arctan2}\left(\Im\left\{\hat{U}_{CInv}(\varphi_{PLL})e^{j\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})}\right\}, \right. \\ &\quad \left. \Re\left\{\hat{U}_{CInv}(\varphi_{PLL})e^{j\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})}\right\}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aufgrund der arctan2-Funktion besitzt  $K(\varphi_{PLL})$  ggf. die Unstetigkeitsstelle  $\varphi_{PLL,unst.}$ , welche durch die Ausdrücke

$$\Im \left\{ \hat{U}_{CInv}(\varphi_{PLL,unst.}) e^{j\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL,unst.})} \right\} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\Re \left\{ \hat{U}_{CInv}(\varphi_{PLL,unst.}) e^{j\varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL,unst.})} \right\} < 0 \quad (4.3b)$$

charakterisiert ist (vgl. Anhang A.5). Aus (4.3a) ergeben sich zwei mögliche Lösungen:

$$\varphi_{PLL,unst.} = W - \Delta\varphi_{R2} - \varphi_{G_{Inv}} \quad (4.4a)$$

$$\varphi_{PLL,unst.}^* = \begin{cases} \pi - W - \Delta\varphi_{R2} - \varphi_{G_{Inv}} & W > 0 \\ -\pi - W - \Delta\varphi_{R2} - \varphi_{G_{Inv}} & W \leq 0 \end{cases} \quad (4.4b)$$

mit:

$$W = \arcsin \left( -\frac{\hat{G}_{Netz}\hat{U}_{Netz}}{\hat{G}_{Inv}\hat{U}_{Inv,R2}} \sin (\varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}}) \right). \quad (4.5)$$

Die Unstetigkeitsstelle existiert nur, wenn für eine der Lösungen (4.4) zusätzlich (4.3b) gilt. Ist dies der Fall, wird die Unstetigkeitsstelle mit  $\varphi_{PLL,unst.}$  bezeichnet und es muss geprüft werden, ob sie im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  liegt, denn dann ist die Stetigkeit von  $K(\varphi_{PLL})$  nur für

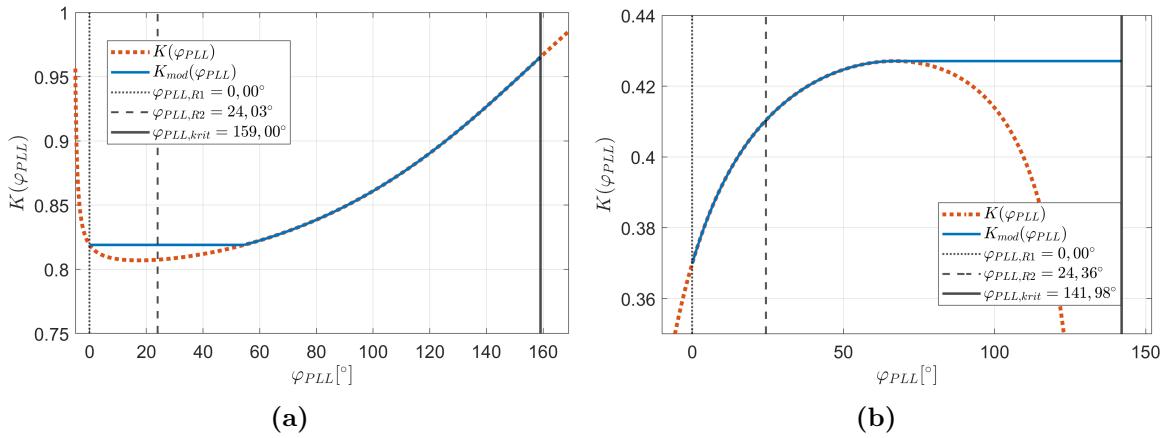
$$\varphi_{PLL}(t) \in [\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,unst.}) \quad (4.6)$$

gegeben. Bei der weiteren Implementation der Nachweismethode wird dies berücksichtigt, indem  $\varphi_{PLL}(t)$  nicht im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$ , sondern im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}^*]$  betrachtet wird, mit  $\varphi_{PLL,krit}^*$  gemäß:

$$\varphi_{PLL,krit}^* = \begin{cases} \min \{ \varphi_{PLL,krit}; \varphi_{PLL,unst.} \} & \varphi_{PLL,unst.} \text{ existiert} \\ \varphi_{PLL,krit} & \varphi_{PLL,unst.} \text{ existiert nicht.} \end{cases} \quad (4.7)$$

#### 4.1.2. Monotonie des nichtlinearen Verstärkungsfaktors

In Abschnitt 3.4 wurde die Annahme getroffen, dass  $K(\varphi_{PLL})$  im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  monoton steigend ist (s. (3.86)). Es können aber Beispiele mit einem in Abschnitten monoton fallenden Verlauf von  $K(\varphi_{PLL})$  angegeben werden, daher ist die Annahme nicht in allen Fällen zutreffend. Indem  $K(\varphi_{PLL})$  durch das modifizierte  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  ersetzt wird, kann dennoch ein monoton steigender Verlauf sichergestellt werden.  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  zeichnet sich in den



**Abbildung 4.1.:** Beispiel für Verläufe von  $K(\varphi_{PLL})$ , welche die Annahme (3.86) nicht erfüllen. Ein monoton steigender Verlauf kann für  $\varphi_{PLL}(t) \in [\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}]$  erzwungen werden, indem  $K(\varphi_{PLL})$  modifiziert wird. (a)  $K(\varphi_{PLL})$  mit lokalem Minimum, (b)  $K(\varphi_{PLL})$  mit lokalem Maximum.

betreffenden Abschnitten durch einen konstanten Verlauf mit  $K_{mod}(\varphi_{PLL}) \geq K(\varphi_{PLL})$  aus, wodurch es eine konservative Abschätzung darstellt. In den Diagrammen in Abb. 4.1 sind zwei Beispiele von  $K(\varphi_{PLL})$  mit teilweise monoton fallenden Verlauf dargestellt und zusätzlich ist  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  eingezeichnet, um die Anpassung zu visualisieren.

Da Singularitäten und Unstetigkeitsstellen von  $K(\varphi_{PLL})$  durch die Betrachtung in Abschnitt 4.1.1 ausgeschlossen wurden, ändert sich die Monotonie von  $K(\varphi_{PLL})$  nur an einem Extrempunkt. Folglich muss zur Konstruktion von  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  der Extrempunkt  $K_{Ex} = K(\varphi_{PLL,Ex})$  mit  $\varphi_{PLL,Ex} \in [\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}^*]$  bestimmt werden. Dies erfolgt durch die Berechnung von

$$\left. \frac{\partial K(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} \right|_{\varphi_{PLL} = \varphi_{PLL,Ex}} = 0. \quad (4.8)$$

Die Ableitung  $\frac{\partial K(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}}$  ist im Anhang A.4 vollständig aufgeführt, aber aufgrund der Komplexität des Ausdrucks kann (4.8) nicht analytisch gelöst werden.  $\varphi_{PLL,Ex}$  wird daher numerisch durch Minimierung der folgenden Gütfunktion ermittelt:

$$V_K(\varphi_{PLL}) = \left| \frac{\partial K(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} \right|. \quad (4.9)$$

Da die Lösung für  $\varphi_{PLL,Ex} \in [\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}^*]$  gesucht wird, ist zur Minimierung von (4.9) ein Optimierungsverfahren notwendig, welches die Angabe von Nebenbedingungen erlaubt. Resultiert aus der Optimierung  $\varphi_{PLL,Ex}$  mit  $V_K(\varphi_{PLL,Ex}) = 0$ , dann besitzt  $K(\varphi_{PLL})$  einen Extrempunkt und es muss mit der zweiten Ableitung  $\frac{\partial^2 K}{\partial (\varphi_{PLL})^2}$  (s. Anhang A.4) geprüft werden, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt. Kennzeichnet  $\varphi_{PLL,Ex}$  ein Minimum wie im Beispiel in Abb. 4.1a, ergibt sich  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  gemäß:

$$K_{mod}(\varphi_{PLL}) = \max \{ K(\varphi_{PLL}); K_{R1}; K_{R2} \}. \quad (4.10)$$

Liegt bei  $\varphi_{PLL,Ex}$  ein Maximum wie in Abb. 4.1b vor, ergibt sich  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  nach:

$$K_{mod}(\varphi_{PLL}) = \begin{cases} K(\varphi_{PLL}) & \varphi_{PLL} < \varphi_{PLL,Ex} \\ K_{Ex} & \varphi_{PLL} > \varphi_{PLL,Ex}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Kennzeichnet  $\varphi_{PLL,Ex}$  einen Sattelpunkt oder ergibt sich aus der Optimierung  $\varphi_{PLL,Ex}$  mit  $V_K(\varphi_{PLL,Ex}) > 0$ , dann besitzt  $K(\varphi_{PLL})$  keinen Extrempunkt und die Monotonie ändert sich nicht. Gilt in diesem Fall  $K_{R1} < K_{R2}$ , dann ist der Verlauf von  $K(\varphi_{PLL})$  monoton steigend und es folgt:

$$K_{mod}(\varphi_{PLL}) = K(\varphi_{PLL}). \quad (4.12)$$

Gilt  $K_{R1} > K_{R2}$ , dann weist  $K(\varphi_{PLL})$  einen monoton fallenden Verlauf auf und es muss die Abschätzung:

$$K_{mod}(\varphi_{PLL}) = K_{R1}. \quad (4.13)$$

getroffen werden. Es ist nicht ausgeschlossen, dass  $K(\varphi_{PLL})$  im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}^*]$  mehrere Extrempunkte besitzt. Die Minimierung der Gütfunktion (4.9) sollte daher mehrfach mit unterschiedlichen Initialwerten durchgeführt und insgesamt die konservativste Abschätzung für  $K_{mod}(\varphi_{PLL})$  getroffen werden.

#### 4.1.3. Bestimmung des Maximalwertes

Die Implementation der Nachweismethode erfordert die Berechnung des Maximalwertes  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$ . Dies kann mit den Methoden aus den Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3 erfolgen. Auf Basis der Maximumsnorm ergibt sich nach (2.49) die folgende obere Abschätzung für  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$ :

$$\varphi_{PLL,max|K_{konst}} \leq \|g_{Ges}(t)\|_1 \|\Delta\varphi\|_\infty \quad (4.14)$$

mit

$$\|\Delta\varphi\|_\infty = \Delta\varphi_{R2} \quad (4.15a)$$

$$g_{Ges}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G_{Ges}(s) \}. \quad (4.15b)$$

Da  $G_{Ges}(s)$  gemäß (3.78) eine Übertragungsfunktion vom Typ PT2 mit zusätzlicher Nullstelle ist, kann  $\|g_{Ges}(t)\|_1$  nach (2.56) mit  $\tau$  und  $\omega_0^2$  nach (2.53) sowie den Parametern

$$b_0 = K_I K_{konst} \quad (4.16a)$$

$$b_1 = K_P K_{konst} \quad (4.16b)$$

$$a_0 = K_I(1 - K_{konst}) \quad (4.16c)$$

$$a_1 = K_P(1 - K_{konst}) \quad (4.16d)$$

berechnet werden. Als weitere Möglichkeit kann  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  basierend auf (2.65) auch exakt ermittelt werden:

$$\varphi_{PLL,max|K_{konst}} = [b_0 y_{PT2}(t_{Ex,k}) + b_1 \dot{y}_{PT2}(t_{Ex,k})] \Delta \varphi_{R2}. \quad (4.17)$$

Es sind hier die Parameter (4.16),  $y_{PT2}$  nach (2.61),  $\dot{y}_{PT2}$  nach (2.63a),  $t_{Ex,k}$  nach (2.64) sowie  $\tau$  und  $\omega_0^2$  nach (2.53) zu verwenden. Sowohl bei der Berechnung von  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  nach (4.14) als auch nach (4.17) müssen die Hinweise in den Abschnitten 2.4.2 bzw. 2.4.3 beachtet und ggf. eine Fallunterscheidung aufgrund des Vorzeichens von  $\omega_0^2$  vorgenommen werden.

Mit (4.14) und (4.17) liegen zwei Möglichkeiten zur Bestimmung von  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  vor. Folglich kann  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  in zwei Varianten ermittelt werden. Wird zur Berechnung von  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  die Abschätzung des Maximalwertes  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  mit der Maximumsnorm gemäß (4.14) herangezogen, wird dies als „Normenkriterium“ bezeichnet. Erfolgt die Berechnung von  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  dagegen auf Basis von  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  nach (4.17), ergibt sich das „analytische Kriterium“.

#### 4.1.4. Durchführung des Stabilitätsnachweises

Der Nachweis der transienten Stabilität gemäß der Bedingung (3.96) erfordert die Berechnung von  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  nach (3.95). Analytisch ergibt sich  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  mittels Extremwertrechnung mit dem Ansatz:

$$\frac{\partial V(\varphi_{PLL,K_{konst}})}{\partial \varphi_{PLL,K_{konst}}} = 0 \quad \xrightarrow{(3.93)} \quad \frac{\partial \varphi_{PLL,max|K_{konst}}}{\partial \varphi_{PLL,K_{konst}}} - 1 = 0. \quad (4.18)$$

Der Maximalwert  $\varphi_{PLL,max|K_{konst}}$  resultiert aus (4.14) oder (4.17), aber aufgrund der Komplexität der Ausdrücke kann die Ableitung  $\frac{\partial \varphi_{PLL,max|K_{konst}}}{\partial \varphi_{PLL,K_{konst}}}$  nicht angegeben werden und eine analytische Lösung von (4.18) ist nicht praktikabel. Stattdessen wird  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  numerisch ermittelt, indem  $V(\varphi_{PLL,K_{konst}})$  nach (3.93) als Gütefunktion aufgefasst und deren Minimum mit einem Optimierungsverfahren bestimmt wird. Dabei sind die folgenden Nebenbedingungen zu berücksichtigen, um die getroffenen Annahmen sicherzustellen:

$$\varphi_{PLL,K_{konst}} \in [\varphi_{PLL,R2}; \varphi_{PLL,krit}^*] \quad (4.19a)$$

$$K_{konst} \in [K_{min}; K_{max}] \quad (4.19b)$$

$$K_{konst} = K_{mod}(\varphi_{PLL,K_{konst}}) \quad (4.19c)$$

mit:

$$K_{min} = \max \{K_{R1}; K_{R2}\} \quad (4.20a)$$

$$K_{max} = \min \{K_{krit}; 1\}. \quad (4.20b)$$

Entsprechend muss ein Optimierungsverfahren genutzt werden, welches die Angabe von Nebenbedingungen unterstützt. Zudem empfiehlt es sich, die Optimierung mehrfach mit unterschiedlichen Startwerten durchzuführen, da das Optimierungsproblem nicht notwendigerweise konvex ist. Resultiert aus der Optimierung das Ergebnis  $V_{min}(\varphi_{PLL,K_{konst}}) < 0$ , dann ist die Stabilität für den betrachteten transienten Übergang nachgewiesen.

#### 4.1.5. Einschränkungen

Aufgrund der vorgenommenen Vereinfachungen und der getroffenen Annahmen ist die implementierte Nachweismethode nicht uneingeschränkt anwendbar. In diesem Abschnitt werden die Ausnahmen zusammengefasst und erläutert.

Im Abschnitt 4.1.1 ist der Fall  $\Delta\varphi_{R2} < 0$  ausgenommen worden, um eine Singularität des nichtlinearen Verstärkungsfaktors  $K(\varphi_{PLL})$  im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}^*]$  auszuschließen. Weiterhin ist die Einspeisung von elektrischer Energie nach (2.23) durch  $\Delta\varphi > 0$  gekennzeichnet und zudem stellt  $\Delta\varphi > 90^\circ$  keinen sinnvollen Arbeitspunkt dar, da die eingespeiste Wirkleistung des Umrichters mit weiter zunehmendem  $\Delta\varphi$  wieder abnimmt. Aus diesen Überlegungen ergeben sich die Einschränkungen:

$$\Delta\varphi_{R1} \in [0; 90^\circ] \quad (4.21a)$$

$$\Delta\varphi_{R2} \in (0; 90^\circ]. \quad (4.21b)$$

Für  $\Delta\varphi_{R2} \ll 1$  liegt die Singularität des Verstärkungsfaktors  $K(\varphi_{PLL})$  zwar nicht im Intervall  $[\varphi_{PLL,R1}; \varphi_{PLL,krit}^*]$ , aber sehr nah  $\varphi_{PLL,R1}$ , weswegen  $K_{R1} > 1$  auftreten kann. In dieser Situation kann (4.19b) nicht erfüllt werden und die Nachweismethode ist nicht anwendbar.

Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die PLL geeignet parametriert ist, beispielsweise durch das in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Verfahren. Diese Parametrierung basiert aber auf der Annahme einer konstanten Amplitude der PLL-Eingangsspannung  $\hat{U}$ , was nicht dem realen Verhalten während des transienten Übergangs entspricht, da die Amplitude von  $\hat{U}_{CInv,R1}$  zum

Wert  $\hat{U}_{CInv,R2}$  übergeht. Folglich kann die PLL bei einer großen Differenz  $|\hat{U} - \hat{U}_{CInv,Ri}|$  abweichende Eigenschaften aufweisen. Es soll aber gewährleistet sein, dass die Veränderung der Eigenschaften nicht zu einer falschen Stabilitätsaussage führt und nicht extrem ausfällt. Dazu wird die Übertragungsfunktion  $G_{PLL}(s)$  in der Ruhelage  $\mathbf{x}_{Ri}$  mit  $K_{P,PLL}$  und  $K_{I,PLL}$  nach (2.35) betrachtet:

$$G_{PLL}(s) = \frac{\frac{\hat{U}_{CInv,Ri}}{\hat{U}} 2\rho s + \frac{\hat{U}_{CInv,Ri}}{\hat{U}} \rho^2}{s^2 + \frac{\hat{U}_{CInv,Ri}}{\hat{U}} 2\rho s + \frac{\hat{U}_{CInv,Ri}}{\hat{U}} \rho^2}. \quad (4.22)$$

Nach den Erläuterungen in Abschnitt 3.4.1 führen kleine  $\frac{\hat{U}_{CInv,Ri}}{\hat{U}}$  zu einer kleineren Dämpfung von  $G_{PLL}(s)$  und damit zu einem größeren Überschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$  und sind bezüglich der transienten Stabilitätsbedingung als kritischer einzustufen. Entsprechend stellt die PLL-Parametrierung mit einem großen  $\hat{U}$  den ungünstigeren Fall dar. Damit die Abweichung  $|\hat{U} - \hat{U}_{CInv,Ri}|$  in den Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R1}$  und  $\mathbf{x}_{R2}$  nicht zu groß ist, wird die Einschränkung  $\hat{U} \leq \frac{1}{\kappa} \hat{U}_{CInv,Ri}$  festgelegt, d.h. die Nachweismethode sollte nur angewandt werden, wenn in beiden Ruhelagen für die Amplitude der PLL-Eingangsspannung gilt:

$$\hat{U}_{CInv,Ri} \geq \kappa \hat{U}. \quad (4.23)$$

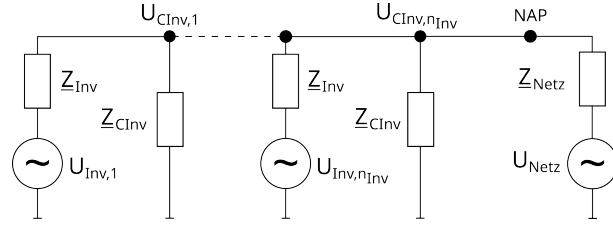
In Beispieluntersuchungen hat sich  $\kappa = 0,5$  als angemessener Kompromiss zwischen dem Sicherstellen der PLL-Funktionalität und der Einschränkung von zu untersuchenden transienten Übergängen erwiesen.

## 4.2. Anwendungsaspekte

Die implementierte Methode zum Nachweis der transienten Stabilität bezieht sich auf das in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Szenario. Mit der Methode ist es aber auch möglich, das transiente Stabilitätsverhalten in weiteren Szenarien mit sprunghafter Anregung zu untersuchen. Dazu gehört der Anschluss von mehreren Einspeisern an einen NAP, das Zuschalten von Einspeisern sowie Änderungen der Netzimpedanz und der Netzzspannungsparameter. In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie die entwickelte Nachweismethode auch für die genannten Szenarien angewandt werden kann.

### 4.2.1. Mehrerer Einspeiser an einem Netzanschlusspunkt

Bei der Systembeschreibung in Kapitel 2.1.3 ist vom Anschluss eines Einspeisers an das Energiennetz ausgegangen worden. Bei einem Windpark liegt aber beispielsweise die Situation vor, dass mehrere baugleiche Einspeiser mit dem NAP verbunden sind. Dieses Szenario ist in Abb. 4.2 für  $n_{Inv}$  Einspeiser dargestellt. Aus dem ESB ist ersichtlich, dass alle  $Z_{CInv}$  parallel angeordnet sind und durch mehrfache Anwendung des Paralleloperators  $\parallel$  zusammengefasst werden können:



**Abbildung 4.2.:** ESB für den Anschluss von  $n_{Inv}$  Einspeisern am NAP.

$$\underline{Z}_{CInv} \parallel \underline{Z}_{CInv} \parallel \dots = \frac{1}{n_{Inv}} \underline{Z}_{CInv}. \quad (4.24)$$

Unter der Voraussetzung, dass alle Einspeiser im gleichen Arbeitspunkt betrieben werden, gilt:

$$U_{Inv,1} = \dots = U_{Inv,n_{Inv}} = U_{Inv} \quad (4.25)$$

und die Einspeiser können ebenfalls zusammengefasst werden [72]. Für  $\underline{Z}_{Inv}$  resultiert analog zu (4.24):

$$\underline{Z}_{Inv} \parallel \underline{Z}_{Inv} \parallel \dots = \frac{1}{n_{Inv}} \underline{Z}_{Inv}. \quad (4.26)$$

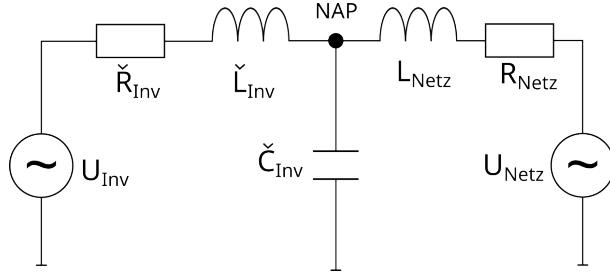
Nach (4.24) und (4.26) lassen sich  $n_{Inv}$  parallele Einspeiser an einem NAP durch eine Skalierung der Impedanzen  $\underline{Z}_{Inv}$  und  $\underline{Z}_{CInv}$  mit dem Faktor  $\frac{1}{n_{Inv}}$  darstellen. Mit (2.20a) und (2.20c) ergeben sich daraus die folgenden skalierten Systemparameter:

$$\check{R}_{Inv} = \frac{1}{n_{Inv}} R_{Inv} \quad (4.27a)$$

$$\check{L}_{Inv} = \frac{1}{n_{Inv}} L_{Inv} \quad (4.27b)$$

$$\check{C}_{Inv} = n_{Inv} C_{Inv}. \quad (4.27c)$$

Das resultierende ESB ist in Abb. 4.3 gezeigt und unterscheidet sich nicht vom ESB des elektrischen Netzwerkes in Abb. 2.5. Die in Kapitel 3 hergeleiteten Stabilitätsbedingungen, die Methode zum Nachweis der transienten Stabilität und deren Implementation aus dem Abschnitt 4.1 können daher unmittelbar auch für den Fall von mehreren Einspeisern an einem NAP angewandt werden, indem anstelle der ursprünglichen Systemparameter die Anpassung (4.27) vorgenommen wird



**Abbildung 4.3.:** Überführung von  $n_{\text{Inv}}$  Einspeisern in die Darstellung als ein Einspeiser durch Skalierung der Impedanzen nach (4.27).

#### 4.2.2. Zuschalten von Einspeisern

In Abschnitt 4.2.1 wurde gezeigt, dass mehrere baugleiche Einspeiser an einem NAP für die Stabilitätsuntersuchung auf einen Einspeiser mit skalierten Systemparametern zurückgeführt werden kann. Auf dieser Grundlage kann ein Szenario betrachtet werden, bei dem das System durch eine Änderung des Skalierungsfaktors  $n_{\text{Inv}}$  anstelle eines Stellgrößensprunges angeregt wird. Dadurch kann die Situation des Zu- oder auch Abschaltens von Einspeisern oder eine sprunghafte Änderung der Filterimpedanz, beispielsweise aufgrund eines Fehlers, abgebildet werden. Dabei muss nicht zwangsläufig  $n_{\text{Inv}} \in \mathbb{N}$  gelten. Die Anregung

$$n_{\text{Inv}}(t) = \begin{cases} n_{\text{Inv},R1} & t < 0 \\ n_{\text{Inv},R2} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

bewirkt nach (4.27) eine Änderung der Systemparameter  $R_{\text{Inv}}$ ,  $L_{\text{Inv}}$  und  $C_{\text{Inv}}$ . Folglich ändern sich dadurch die Koeffizienten der Übertragungsfunktionen  $G_{\text{Inv}}(s)$  und  $G_{\text{Netz}}(s)$  und entsprechend deren Amplituden und Phasenlagen bei der Frequenz  $s = j\omega_{\text{Netz}}$  gemäß:

$$\hat{G}_{\text{Inv}}(t) = \begin{cases} \hat{G}_{\text{Inv},R1} & t < 0 \\ \hat{G}_{\text{Inv},R2} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.29a)$$

$$\varphi_{G_{\text{Inv}}}(t) = \begin{cases} \varphi_{G_{\text{Inv},R1}} & t < 0 \\ \varphi_{G_{\text{Inv},R2}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.29b)$$

$$\hat{G}_{\text{Netz}}(t) = \begin{cases} \hat{G}_{\text{Netz},R1} & t < 0 \\ \hat{G}_{\text{Netz},R2} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.29c)$$

$$\varphi_{G_{\text{Netz}}}(t) = \begin{cases} \varphi_{G_{\text{Netz},R1}} & t < 0 \\ \varphi_{G_{\text{Netz},R2}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.29d)$$

Mit den Ausdrücken (4.29) kann die notwendige Stabilitätsbedingung vor und nach der Anregung überprüft, die Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R1}$  und  $\mathbf{x}_{R2}$  berechnet sowie die Kleinsignalstabilität der

Ruhelagen untersucht werden. Im Unterschied zur Herleitung der transienten Stabilitätsbedingung in Kapitel 3.3.2 erfolgt in diesem Szenario auch eine Anregung von  $U_{CInv,Netz}(t)$ , da sich nach (4.29) die Amplitude und die Phasenlage von  $G_{Netz}(s)$  verändern. Da die PLL nach der Parametrierungsmethode in Abschnitt 2.3.2 typischerweise eine Bandbreite von 5 Hz bis 30 Hz besitzt und  $G_{Netz}(s)$  eine Bandbreite von mehreren 100 Hz aufweist (vgl. Abb. A.2 im Anhang A.1), sind die dynamischen Eigenschaften von  $G_{Netz}(s)$  aber gegenüber der PLL vernachlässigbar. Entsprechend kann  $U_{CInv,Netz}(t)$  auch hier gemäß (3.38) angesetzt werden und die Untersuchung der transienten Stabilität wie in Kapitel 3.3 erfolgen. Sinngemäß zu (3.43) ergeben sich die folgenden Anteile von  $U_q(t)$  in  $\mathbf{x}_{R1}$  und  $\mathbf{x}_{R2}$ :

$$U_{q,Inv,R1} = \hat{U}_{Inv}\hat{G}_{Inv,R1} \sin(\Delta\varphi + \varphi_{G_{Inv,R1}}) \quad (4.30a)$$

$$U_{q,Inv,R2} = \hat{U}_{Inv}\hat{G}_{Inv,R2} \sin(\Delta\varphi + \varphi_{G_{Inv,R2}}) \quad (4.30b)$$

$$U_{q,Netz,R1}(t) = \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz,R1} \sin(\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz,R1}}) \quad (4.30c)$$

$$U_{q,Netz,R2}(t) = \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz,R2} \sin(\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz,R2}}). \quad (4.30d)$$

Die Ausdrücke (4.30) sind in Analogie zur Abb. 3.5 im Diagramm 4.4 in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}$  dargestellt. Die Ruhelage  $\mathbf{x}_{R1}$  ist im Diagramm durch den Schnittpunkt von  $U_{q,Inv,R1}$  und  $U_{q,Netz,R1}$  gekennzeichnet, aber unmittelbar nach der Anregung gelten  $U_{q,Inv,R2}$  und  $U_{q,Netz,R2}$ , d.h. die Betrachtung des transienten Übergangs startet im Punkt  $\mathbf{x}_{R1+}$  und kann anhand des Diagramms qualitativ nachvollzogen werden. Es ergibt sich die gleiche Analyse wie in Abschnitt 3.3.2 mit dem Ergebnis, dass der transiente Übergang stabil ist und sich das System in  $\mathbf{x}_{R2}$  einschwingt, wenn  $\varphi_{PLL}(t)$  nicht bis zum kritischen Wert  $\varphi_{PLL,krit}$  überschwingt. Demnach gilt auch für dieses Szenario die Stabilitätsbedingung (3.55) und die transiente Stabilität kann mit dem Kriterium (3.96) nachgewiesen werden.

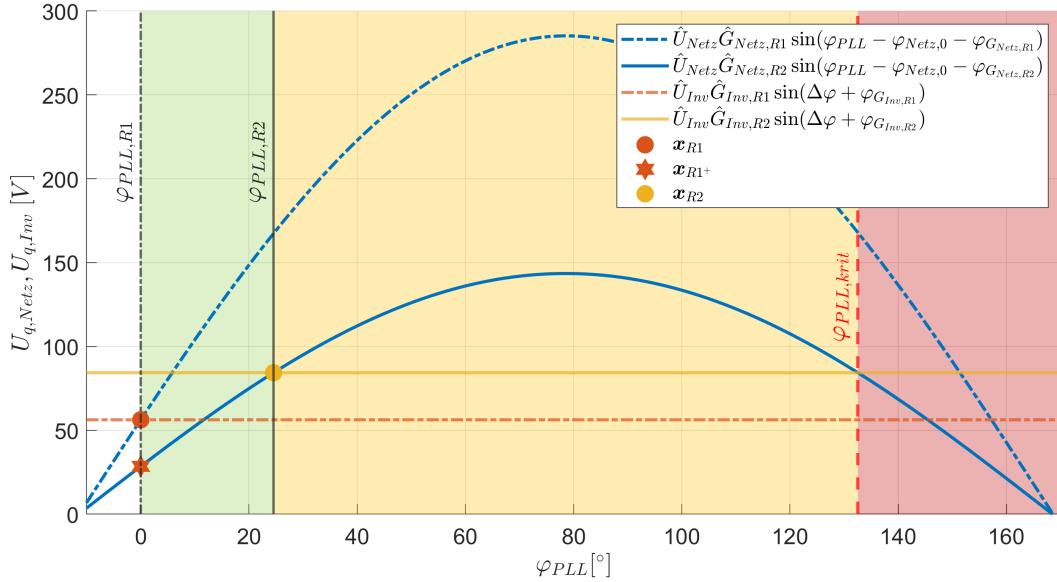
### 4.2.3. Änderung der Netzimpedanz

In Abschnitt 2.1.3 wurde darauf hingewiesen, dass die Zusammenschaltung der Betriebsmittel im Energienetz zeitvariant ist. Beispielsweise führt der Ausfall von Übertragungsleitungen zu einer Erhöhung der Impedanz, was im ESB durch eine Änderung der Netzimpedanz abgebildet werden kann. Zur Untersuchung dieser Situation wird analog zu  $n_{Inv}$  der Skalierungsfaktor  $n_{Netz}$  für  $R_{Netz}$  und  $L_{Netz}$  eingeführt:

$$\check{R}_{Netz} = n_{Netz}R_{Netz} \quad (4.31a)$$

$$\check{L}_{Netz} = n_{Netz}L_{Netz}. \quad (4.31b)$$

Entsprechend vergrößert  $n_{Netz} > 1$  die Parameter der Netzimpedanz, wodurch sich die Netzstärke reduziert. Mit der Anregung



**Abbildung 4.4.:** Darstellung der Ausdrücke (4.30) in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}$ . Durch die Anregung (4.28) springt das System von der Ruhelage  $\boldsymbol{x}_{R1}$  unmittelbar in den Punkt  $\boldsymbol{x}_{R1+}$ . Der transiente Übergang in die Ruhelage  $\boldsymbol{x}_{R2}$  kann dann wie in Abschnitt 3.3.2 qualitativ untersucht werden.

$$n_{Netz}(t) = \begin{cases} n_{Netz,R1} & t < 0 \\ n_{Netz,R2} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

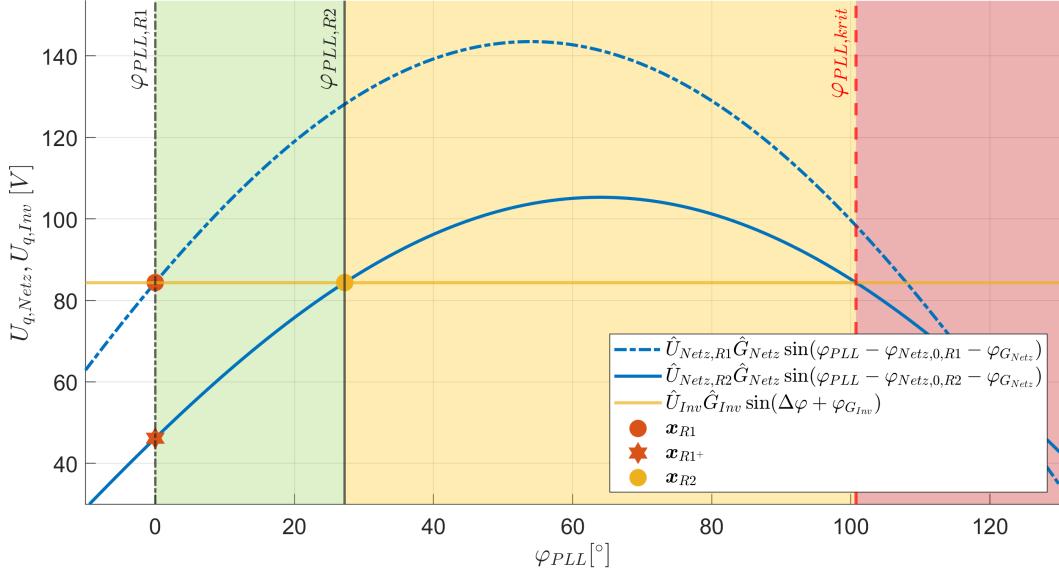
resultiert eine Änderung der Amplituden und Phasen von  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  gemäß (4.29). Die sprunghafte Änderung der Netzimpedanz stellt sich daher wie die in Abschnitt 4.2.2 untersuchte Anregung dar und die transiente Stabilität des Systems kann analog untersucht werden.

#### 4.2.4. Änderung der Netzspannungsparameter

Bisher wurde das Energienetz als „infinite grid“ betrachtet, d.h. es wurde die Annahme getroffen, dass die Parameter der Netzspannung konstant sind. Sprünge der Amplitude und Phasenlage von  $U_{Netz}(t)$  sind aber typische Testszenarien bei der Untersuchung von Energiesystemen [73]. Diese können in Form der folgenden Anregungen dargestellt werden:

$$\hat{U}_{Netz}(t) = \begin{cases} \hat{U}_{Netz,R1} & t < 0 \\ \hat{U}_{Netz,R2} & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.33a)$$

$$\varphi_{Netz,0}(t) = \begin{cases} \varphi_{Netz,0,R1} & t < 0 \\ \varphi_{Netz,0,R2} & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.33b)$$



**Abbildung 4.5.:** Darstellung der Ausdrücke (4.34) in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}$ . Durch die Anregung (4.33) springt das System von der Ruhelage  $\boldsymbol{x}_{R1}$  unmittelbar in den Punkt  $\boldsymbol{x}_{R1+}$  und der transiente Übergang in die Ruhelage  $\boldsymbol{x}_{R2}$  kann wie in Abschnitt 3.3.2 qualitativ untersucht werden.

Das Untersuchen der notwendigen Stabilitätsbedingung und der Kleinsignalstabilität in  $\boldsymbol{x}_{R1}$  und  $\boldsymbol{x}_{R2}$  ist mit (4.33) direkt möglich und für die transiente Stabilitätsanalyse kann ähnlich wie in Abschnitt 4.2.2 verfahren werden. Analog zu (3.43) ergeben sich die folgenden Anteile von  $U_q(t)$ :

$$U_{q,Inv} = \hat{U}_{Inv}\hat{G}_{Inv} \sin(\Delta\varphi + \varphi_{G_{Inv}}) \quad (4.34a)$$

$$U_{q,Netz,R1}(t) = \hat{U}_{Netz,R1}\hat{G}_{Netz} \sin(\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{Netz,0,R1} - \varphi_{G_{Netz}}) \quad (4.34b)$$

$$U_{q,Netz,R2}(t) = \hat{U}_{Netz,R2}\hat{G}_{Netz} \sin(\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{Netz,0,R2} - \varphi_{G_{Netz}}), \quad (4.34c)$$

die in Abb. 4.5 in Abhängigkeit von  $\varphi_{PLL}$  dargestellt sind. Das System befindet sich zunächst in  $\boldsymbol{x}_{R1}$ , aber durch die Anregung (4.33) erfolgt ein Sprung nach  $\boldsymbol{x}_{R1+}$ . Der transiente Übergang nach  $\boldsymbol{x}_{R2}$  kann wie in Abschnitt 3.3.2 untersucht werden und es folgt, dass der Übergang stabil ist, wenn  $\varphi_{PLL}$  den Wert  $\varphi_{PLL,krit}$  nicht erreicht. Die transiente Stabilität ist in diesem Szenario daher auch durch die Bedingung (3.55) charakterisiert und kann mit der erarbeiteten Methode aus Abschnitt 3.4 nach dem Kriterium (3.96) nachgewiesen werden.

Die Ausführungen dieses Abschnittes belegen, dass die hergeleitete transiente Stabilitätsbedingung nicht auf das ursprüngliche Szenario mit einer Anregung des Systems durch die Stellgrößen beschränkt ist, sondern auch in weiteren Situationen Gültigkeit besitzt. Die ent-

winkelte Nachweismethode kann ebenfalls angewandt werden. Zudem ist die Analyse einer Kombination von mehreren Anregungen auch möglich. Voraussetzung ist, dass in den betrachteten Szenarien die Anregungen gleichzeitig und sprunghaft erfolgen.



# 5. Demonstration der Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die hergeleiteten Stabilitätsbedingungen an numerischen Beispielen sowie Simulationsuntersuchungen demonstriert und die Ergebnisse diskutiert. Des Weiteren erfolgt eine Beurteilung der Konservativität der Stabilitätsaussage des Normenkriteriums und des analytischen Kriteriums anhand von Simulationsreihen nach dem Prinzip von Monte-Carlo-Simulationen [74]. Für die Beispiele werden die in Tabelle 5.1 angegebenen Systemparameter verwendet.

## 5.1. Notwendige Stabilitätsbedingung

Zuerst wird die notwendige Stabilitätsbedingung (3.15) an fünf Beispielen  $B1$  bis  $B5$  überprüft. Die zu den Beispielen gehörenden Stellgrößen  $\hat{U}_{Inv,Bi}$  und  $\Delta\varphi_{Bi}$  sind in Tabelle 5.2 aufgeführt und sie stellen Arbeitspunkte mit zunehmender Einspeiseleistung des Umrichters dar. Die Tabelle leistet außerdem den Ausdruck

$$\frac{\hat{U}_{Inv,Bi}}{\hat{U}_{Netz}} \frac{\hat{Z}_{Netz}}{\hat{Z}_{Inv}} |\sin(\Delta\varphi_{Bi} - \varphi_{Z_{Inv}} - \varphi_{Y_G})| \quad (5.1)$$

auf, der nach Ungleichung (3.15) das Erfüllen der notwendigen Stabilitätsbedingung anzeigen. Für die Beispiele  $B1$  bis  $B4$  werden die Systemparameter aus Tabelle 5.1 mit  $n_{Inv} = 1$  und  $n_{Netz} = 1$  verwendet. Zur Demonstration eines Sonderfalls entspricht  $B5$  dem Beispiel  $B2$  mit dem Unterschied von um den Faktor 50 erhöhten Induktivitäten  $L_{Inv}$  und  $L_{Netz}$ .

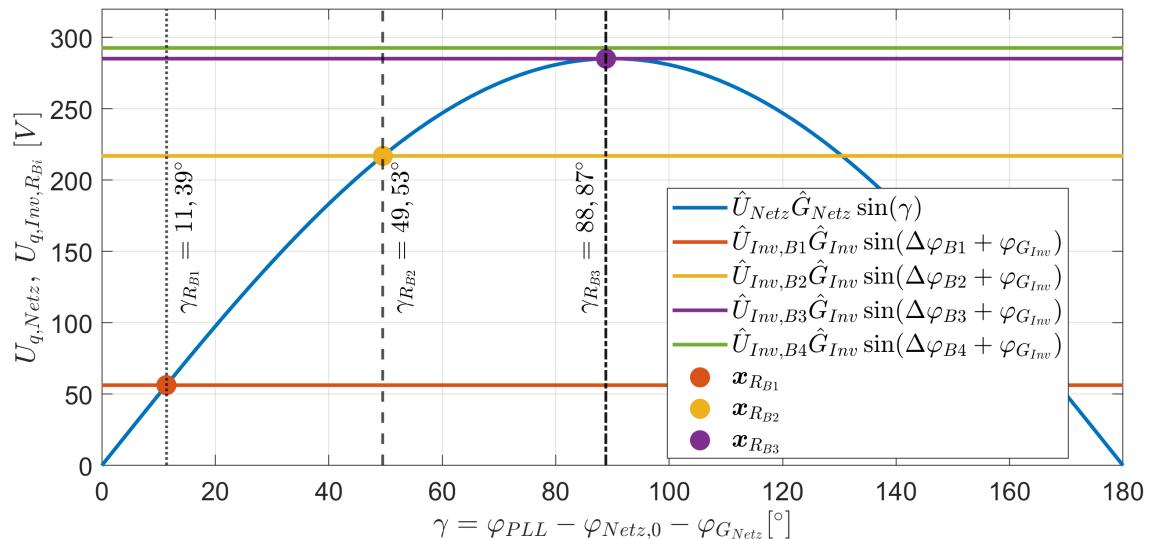
Die Angaben in Tabelle 5.2 zeigen, dass  $B1$ ,  $B2$ ,  $B3$  und  $B5$  der notwendigen Stabilitätsbedingung genügen und damit die Voraussetzung für die Existenz der zugehörigen Ruhelagen  $\boldsymbol{x}_{R_{Bi}}$  und  $\boldsymbol{x}_{\check{R}_{Bi}}$  erfüllen. Um dieses Ergebnis zu visualisieren, sind im Diagramm in Abb. 5.1  $U_{q,Netz}(\gamma)$  und  $U_{q,Inv,R_{Bi}}$  nach (3.31) bzw. (3.43a) für  $B1$  bis  $B4$  dargestellt. Zwischen  $U_{q,Netz}(\gamma)$  und  $U_{q,Inv,R_{B1}}$ ,  $U_{q,Inv,R_{B2}}$  sowie  $U_{q,Inv,R_{B3}}$  existieren Schnittpunkte, welche

**Tabelle 5.1.:** Systemparameter. Die Parametrierung des PLL-Schleifenfilters erfolgte nach (2.35) mit:  $\rho = 2\pi 10$  und  $\hat{U} = \hat{U}_{Netz}$ .

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\hat{U}_{Netz}$	$690\sqrt{2/3}\text{V}$	$L_{Netz}$	$50\mu\text{H}$	$C_{Inv}$	$5\text{mF}$
$\omega_{Netz}$	$2\pi 50\text{ rad/s}$	$R_{Inv}$	$3,2\text{ m}\Omega$	$K_{P,PLL}$	$0,22$
$R_{Netz}$	$3,2\text{ m}\Omega$	$L_{Inv}$	$50\mu\text{H}$	$K_{I,PLL}$	$7,01$

**Tabelle 5.2.:** Beispiele zur Untersuchung der notwendigen Stabilitätsbedingung (3.15).

	$\hat{U}_{Inv}$	$\Delta\varphi$	(5.1)	Bedingung (3.15)
Beispiel 1	650 V	10,0°	0,19751	erfüllt
Beispiel 2	750 V	35,0°	0,76081	erfüllt
Beispiel 3	850 V	41,65°	0,9998	erfüllt
Beispiel 4	850 V	43,0°	1,02611	nicht erfüllt
Beispiel 5	750 V	35,0°	0,7564	erfüllt



**Abbildung 5.1.:** Darstellung der Anteile von  $U_q$  zur Visualisierung der notwendigen Stabilitätsbedingung. Es existieren nur für die Beispiele  $B1$ ,  $B2$  und  $B3$  Ruhelagen. Im Diagramm sind nur die Ruhelagen für  $\gamma \in [0^\circ; 90^\circ]$  markiert.

die jeweiligen Ruhelagen markieren. Die Verläufe von  $U_{q,Netz}(\gamma)$  und  $U_{q,Inv,RB4}$  weisen keinen Schnittpunkt auf und folglich existieren  $\boldsymbol{x}_{RB4}$  und  $\boldsymbol{x}_{\check{R}B4}$  nicht. Aus Gründen der Übersicht ist das Beispiel  $B5$  im Diagramm nicht abgebildet.

## 5.2. Kleinsignalstabilität

Zur Untersuchung der Kleinsignalstabilität werden die Ruhelagen  $\boldsymbol{x}_{RBi}$  und  $\boldsymbol{x}_{\check{R}Bi}$  der Beispiele  $B1$ ,  $B2$ ,  $B3$  sowie  $B5$  berechnet und eine Linearisierung in den Ruhelagen vorgenommen. Die Bewertung der Stabilität erfolgt anschließend anhand der Eigenwerte  $\lambda_{RBi}$  und  $\lambda_{\check{R}Bi}$  der Systemmatrizen  $\mathbf{A}_{RBi}$  und  $\mathbf{A}_{\check{R}Bi}$ , deren Realteile in Tabelle 5.3 angegeben sind. Die Werte zeigen, dass die Ruhelagen  $\boldsymbol{x}_{RBi}$  mit Ausnahme des Beispiels  $B5$  stabil und alle  $\boldsymbol{x}_{\check{R}Bi}$  instabil sind.

In den Abb. 5.2 sind die Eigenwerte in der komplexen Ebene dargestellt. Für die Beispiele  $B1$  bis  $B3$  treten  $\lambda_{RBi}$  paarweise konjugiert komplex auf und drei der Eigenwertpaare un-

**Tabelle 5.3.:** Realteile der Eigenwerte in den Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R_i}$  und  $\mathbf{x}_{\check{R}_i}$ . Die markierten Realteile sind positiv, folglich sind die zugehörigen Ruhelagen instabil.

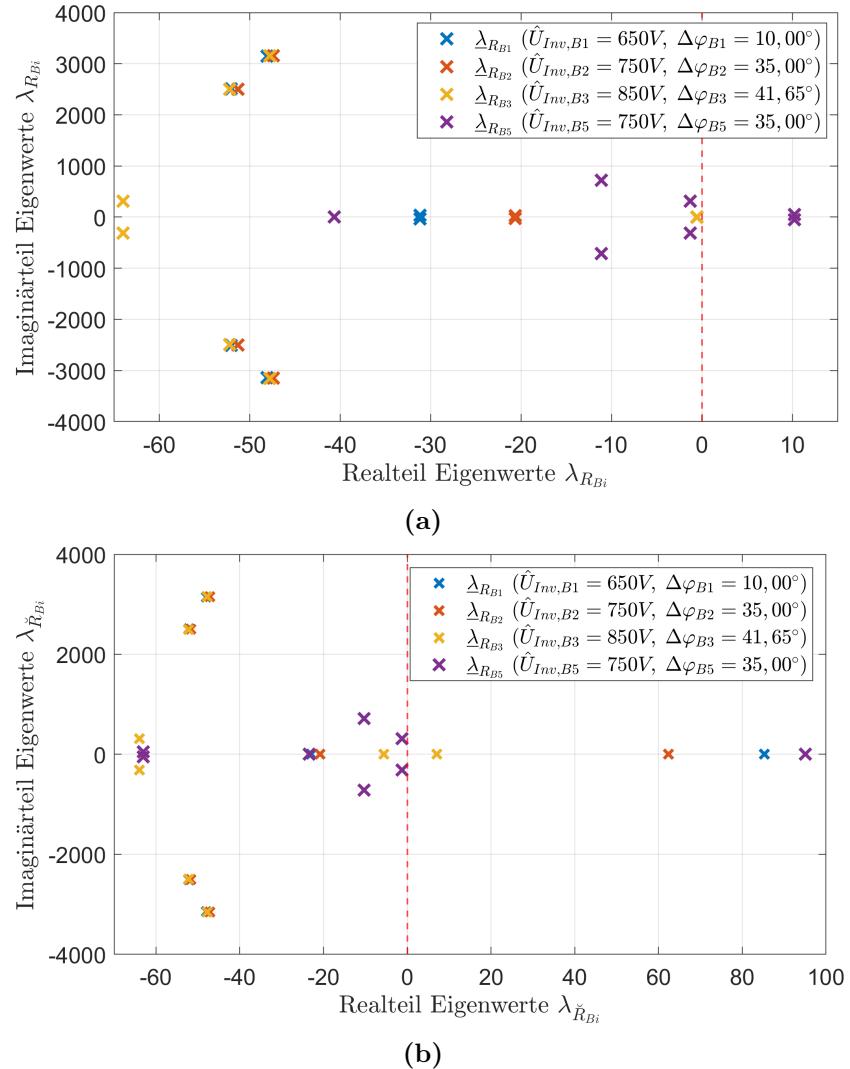
	$\Re\{\lambda_1\}$	$\Re\{\lambda_2\}$	$\Re\{\lambda_3\}$	$\Re\{\lambda_4\}$	$\Re\{\lambda_5\}$	$\Re\{\lambda_6\}$	$\Re\{\lambda_7\}$	$\Re\{\lambda_8\}$
$R_{B1}$	-48,08	-48,08	-52,07	-52,07	-64,00	-64,00	-31,19	-31,19
$R_{B2}$	-47,42	-47,42	-51,32	-51,32	-64,00	-64,00	-20,66	-20,66
$R_{B3}$	-47,78	-47,78	-52,23	-52,23	-64,00	-64,00	-0,56	-0,56
$R_{B5}$	-11,12	-11,12	-1,28	-1,28	-247,07	10,25	10,25	-40,67
$\check{R}_{B1}$	-47,98	-47,98	-52,15	-52,15	-64,00	-64,00	85,29	-22,96
$\check{R}_{B2}$	-47,15	-47,15	-51,69	-51,69	-64,00	-64,00	62,34	-20,86
$\check{R}_{B3}$	-47,77	-47,77	-52,25	-52,25	-64,00	-64,00	7,02	-5,62
$\check{R}_{B5}$	-10,28	-10,28	-1,28	-1,28	95,06	-63,01	-63,01	-23,42

terscheiden sich den drei Beispielruhelagen nur geringfügig. Das vierte Eigenwertpaar  $\underline{\lambda}_{7,R_{B_i}}$  und  $\underline{\lambda}_{8,R_{B_i}}$  nährt sich dagegen der imaginären Achse, je größer der Ausdruck (5.1) ist. Dies entspricht einer Abnahme des Stabilitätsrandes und damit dem erwarteten Verhalten, da mit steigendem Ausdruck (5.1) die betrachtete Ruhelage näher am grenzstabilen Fall (3.14) liegt und dieser im Beispiel *B3* fast erreicht ist. Eine detailliertere Analyse des Eigenwertpaares  $\underline{\lambda}_{7,R_{B_i}}$  und  $\underline{\lambda}_{8,R_{B_i}}$  ist mit Partizipationsfaktoren möglich, die in Tabelle 5.4 aufgeführt sind. Die Partizipationsfaktoren zeigen, dass  $\underline{\lambda}_{7,R_{B_i}}$  und  $\underline{\lambda}_{8,R_{B_i}}$  hauptsächlich mit den Zuständen  $x_{PLL,L}$  und  $\varphi_{PLL,L}$  verknüpft sind und dementsprechend mit der PLL zusammenhängen. Der abnehmende Stabilitätsrand ist daher auf die erschwerte Netzsynchronisation aufgrund der Erhöhung der Einspeiseleistung zurückzuführen.

Aufgrund der deutlich veränderten Systemparameter im Beispiel *B5* zeigen die Eigenwerte  $\underline{\lambda}_{R_{B5}}$  kein vergleichbares Muster. Zudem ist  $\mathbf{x}_{R_{B5}}$  trotz erfüllter notwendiger Bedingung eine instabile Ruhelage. Die Ursache der Instabilität kann ebenfalls durch Partizipationsfaktoren eingegrenzt werden. Die beiden Eigenwerte mit positivem Realteil  $\underline{\lambda}_{6,R_{B5}}$  und  $\underline{\lambda}_{7,R_{B5}}$  korrespondieren nach den Faktoren in Tabelle 5.4 vornehmlich mit  $\hat{U}_{CInv,L}$  und  $\varphi_{U_{CInv,L}}$ . Daraus ist die Ursache der Instabilität nicht die Netzsynchronisation, sondern sie hängt mit der Messspannung zusammen und ist im Missverhältnis zwischen der Filterkapazität und den Induktivitäten zu suchen. Durch das Beispiel *B5* wird die Aussage in Kapitel 3.2.2 bestätigt, dass eine Ruhelage, die durch  $\gamma \in [0^\circ; 90^\circ]$  gekennzeichnet ist, nicht zwingend stabil sein muss.

Die Eigenwerte der Systemmatrizen  $\mathbf{A}_{\check{R}_{B_i}}$  mit positivem Realteil können durch die Partizipationsfaktoren ebenfalls eingehender untersucht werden. Die Faktoren in Tabelle 5.4 belegen auch hier, dass ein Zusammenhang vorwiegend mit den Zuständen der PLL existiert und die Ursache der Instabilität von  $\mathbf{x}_{\check{R}_{B_i}}$  daher mit der PLL bzw. der Netzsynchronisierung zusammenhängt. Die Partizipationsfaktoren bestätigen damit die Analyse einer kleinen Auslenkung aus der Ruhelage, die in Kapitel 3.2.2 durchgeführt wurde.

Das dynamische Verhalten der stabilen linearen Systeme wird mit dem des nichtlinearen Systems in den Ruhelagen  $\mathbf{x}_{R_{B1}}$ ,  $\mathbf{x}_{R_{B2}}$  und  $\mathbf{x}_{R_{B3}}$  bei kleinen Anregungen verglichen. Dazu wird die Zustandsgleichung (3.33) um die folgenden Ausgangsgleichung ergänzt:



**Abbildung 5.2.:** (a) Eigenwerte  $\lambda_{R_{Bi}}$  der Systemmatrizen  $\mathbf{A}_{Ri}$ . Der Eigenwert  $\lambda_{5,R_5} = -247,07$  ist im dargestellten Ausschnitt nicht sichtbar. (b) Eigenwerte  $\lambda_{\check{R}_{Bi}}$  der Systemmatrizen  $\mathbf{A}_{\check{R}_i}$ .

**Tabelle 5.4.:** Partizipationsfaktoren der Eigenwerte mit kleinem Betrag des Realteils bzw. mit positivem Realteil. Die jeweils größten Partizipationsfaktoren sind markiert.

	$\hat{I}_{Inv,L}$	$\varphi_{I_{Inv,L}}$	$\hat{I}_{Netz,L}$	$\varphi_{I_{Netz,L}}$	$\hat{U}_{CInv,L}$	$\varphi_{U_{CInv,L}}$	$x_{PLL,L}$	$\varphi_{PLL,L}$
$\underline{\lambda}_{7,R_{B1}}, \underline{\lambda}_{8,R_{B1}}$	0,0010	0,0036	0,0020	0,0047	0,0000	0,0000	0,1137	0,1138
$\underline{\lambda}_{7,R_{B2}}, \underline{\lambda}_{8,R_{B2}}$	0,0020	0,0310	0,0028	0,0324	0,0006	0,0001	0,3650	0,3657
$\underline{\lambda}_{7,R_{B3}}, \underline{\lambda}_{8,R_{B3}}$	0,0292	0,2630	0,0305	0,2693	0,0050	0,0012	0,3936	0,3945
$\underline{\lambda}_{6,R_{B5}}, \underline{\lambda}_{7,R_{B5}}$	0,0580	0,0635	0,0634	0,0949	0,1492	0,1415	0,0406	0,0825
$\underline{\lambda}_{7,\check{R}_{B1}}$	0,0032	0,0053	0,0031	0,0054	0,0001	0,0002	0,0278	0,1032
$\underline{\lambda}_{7,\check{R}_{B2}}$	0,0058	0,0971	0,0051	0,0991	0,0019	0,0011	0,2214	0,6608
$\underline{\lambda}_{7,\check{R}_{B3}}$	0,0298	0,2890	0,0311	0,2956	0,0055	0,0014	0,3234	0,3956
$\underline{\lambda}_{5,\check{R}_{B5}}$	0,0958	0,0194	0,0558	0,0221	0,0111	0,1826	0,0792	0,3188

$$\varphi_{PLL,L}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \boldsymbol{x}_L(t). \quad (5.2)$$

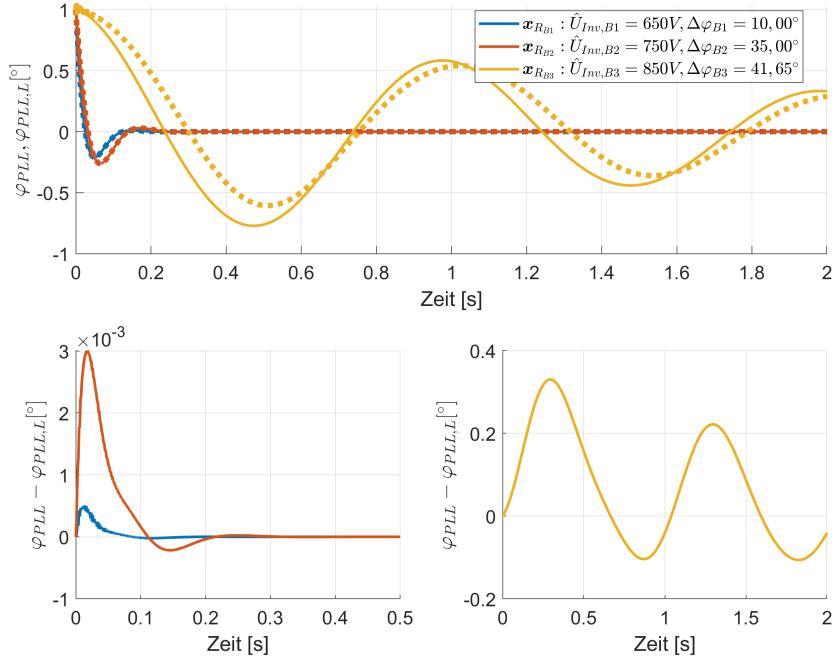
Die Anregung erfolgt durch eine Auslenkung von  $\varphi_{PLL,L}(t)$  um den Wert  $e$ . Demnach ergibt sich der Initialzustand:

$$\boldsymbol{x}_L(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ e]. \quad (5.3)$$

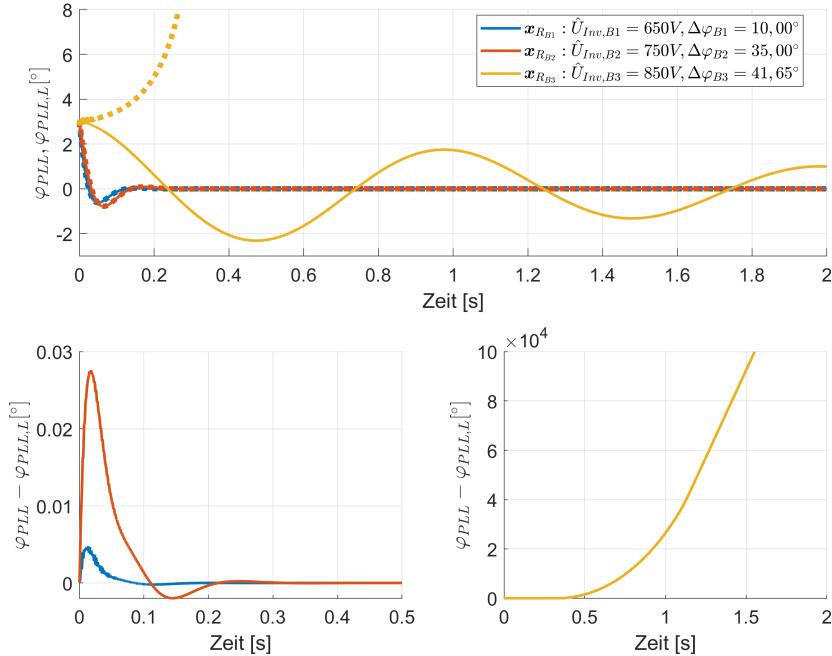
In den Diagrammen 5.3 und 5.4 sind die Verläufe von  $\varphi_{PLL,L}(t)$ ,  $\varphi_{PLL}(t)$  und deren Differenz für  $e = 1^\circ$  sowie  $e = 3^\circ$  dargestellt. Die Abbildungen zeigen, dass das Systemverhalten von den linearisierten System in den Ruhelagen  $\boldsymbol{x}_{R_{B1}}$  und  $\boldsymbol{x}_{R_{B2}}$  mit geringen Abweichungen abgebildet wird, aber die Abweichung für die Anregung mit  $e = 3^\circ$  bereits deutlich größer ausfällt als bei  $e = 1^\circ$ . In  $\boldsymbol{x}_{R_{B3}}$  tritt dagegen eine deutliche Differenz zwischen dem Verhalten des originalen und des linearisierten Systems auf. Bei  $e = 3^\circ$  divergiert  $\varphi_{PLL}(t)$  sogar, was durch das linearisierte System nicht abgebildet wird. Folglich ist die alleinige Analyse von linearisierten Systemen für größere Anregungen, insbesondere in der Nähe des Grenzfalls (3.14), nicht ausreichend.

## 5. Demonstration der Ergebnisse

---



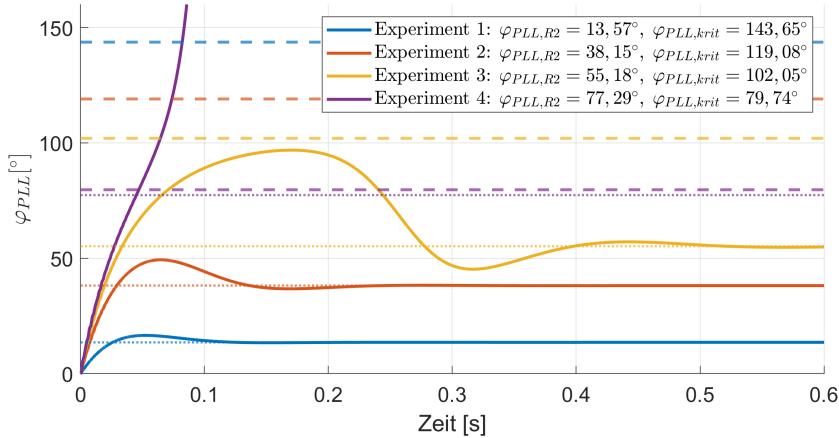
**Abbildung 5.3.:** Oben: Verlauf von  $\varphi_{PLL,L}(t)$  bei Anregung des linearisierten Systems mit  $e = 1^\circ$  für die Beispielruhelagen  $\boldsymbol{x}_{Ri}$ . Der Verlauf von  $\varphi_{PLL}(t)$  ist unterbrochen dargestellt. Unten: Abweichung  $\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{PLL,L}(t)$ , links für  $\boldsymbol{x}_{R_B1}$  und  $\boldsymbol{x}_{R_B2}$ , rechts für  $\boldsymbol{x}_{R_B3}$ .



**Abbildung 5.4.:** Oben: Verlauf von  $\varphi_{PLL,L}(t)$  bei Anregung des linearisierten Systems mit  $e = 3^\circ$  für die Beispielruhelagen  $\boldsymbol{x}_{Ri}$ . Der Verlauf von  $\varphi_{PLL}(t)$  ist unterbrochen dargestellt. Unten: Abweichung  $\varphi_{PLL}(t) - \varphi_{PLL,L}(t)$ , links für  $\boldsymbol{x}_{R_B1}$  und  $\boldsymbol{x}_{R_B2}$ , rechts für  $\boldsymbol{x}_{R_B3}$ .

**Tabelle 5.5.:** Experimente zur Untersuchung der transienten Stabilität.

	$\hat{U}_{Inv,R1}$	$\Delta\varphi_{R1}$	$\hat{U}_{Inv,R2}$	$\Delta\varphi_{R2}$	Systemantwort	Bedingung (3.55)
Experiment 1	650 V	10,0°	700 V	20,0°	stabil	erfüllt
Experiment 2	650 V	10,0°	750 V	35,0°	stabil	erfüllt
Experiment 3	650 V	10,0°	850 V	37,6°	stabil	erfüllt
Experiment 4	650 V	10,0°	850 V	41,65°	instabil	nicht erfüllt


**Abbildung 5.5.:** Verläufe von  $\varphi_{PLL}(t)$  für die Experimente in Tabelle 5.5 mit  $\mu = 1$ . Die unterbrochenen Linien markieren  $\varphi_{PLL,krit}$ , die gepunkteten  $\varphi_{PLL,R2}$ .

### 5.3. Transiente Stabilität

Die transiente Stabilität wird zunächst anhand von einzelnen Experimenten mit den in Tabelle 5.5 aufgelisteten Anregungen untersucht. Die Existenz und Stabilität der Initial- und Zielruhelagen ist durch Überprüfung der notwendigen Bedingung und Analyse der Kleinsignalstabilität erfolgt. Zudem führen die Experimente aufsteigend zu Zielruhelagen, die näher am Grenzfall der stationären Stabilitätsbedingung liegen. Die sich aus den Experimenten ergebenen Verläufe von  $\varphi_{PLL}(t)$  sind in Abb. 5.5 mit der jeweils zugehörigen Zielruhelage des PLL-Phasenwinkels  $\varphi_{PLL,R2}$  und dem kritischen Phasenwinkel  $\varphi_{PLL,krit}$  dargestellt. In den Experimenten 1, 2 und 3 erreicht  $\varphi_{PLL}(t)$  während des Übergangs  $\varphi_{PLL,krit}$  nicht und schwingt sich auf  $\varphi_{PLL,R2}$  ein, womit der transiente Übergang stabil und die Stabilitätsbedingung (3.55) erfüllt ist. Über den gesamten Zeitraum der Experimente divergiert die Differenz

$$|\varphi_{PLL}(t) + \Delta\varphi_{R2} - \varphi_{Netz,0}| \quad (5.4)$$

nicht und entsprechend ist die Netzsynchronität nach Definition (2.25) gegeben.

In Experiment 4 gilt  $\varphi_{PLL}(t) > \varphi_{PLL,krit}$  für  $t > 0,05$  s. In der Folge divergiert  $\varphi_{PLL}(t)$  und erreicht die Ruhelage  $\varphi_{PLL,R2}$  nicht. Dementsprechend ist der transiente Übergang in-

stabil und es tritt der Verlust der Netzsynchronität ein. Es ist möglich, die Dämpfung durch eine angepasste Parametrierung des PLL-Schleifenfilters zu erhöhen, wodurch sich die Überschwingweite von  $\varphi_{PLL}(t)$  reduziert und der kritische Phasenwinkel ggf. unterschritten wird. Aus (3.73) resultiert der folgende Zusammenhang zwischen der Dämpfung der PLL und dem Verstärkungsfaktor  $K_{I,PLL}$ :

$$D_{PLL} \propto \sqrt{\frac{1}{K_{I,PLL}}}. \quad (5.5)$$

Daher erhöht ein kleines  $K_{I,PLL}$  die Dämpfung. Um diese Beziehung zu untersuchen, wird der Skalierungsfaktor  $\mu \in [0; 1]$  für  $K_{I,PLL}$  eingeführt und die PLL-Differentialgleichung (2.43g) entsprechend ergänzt:

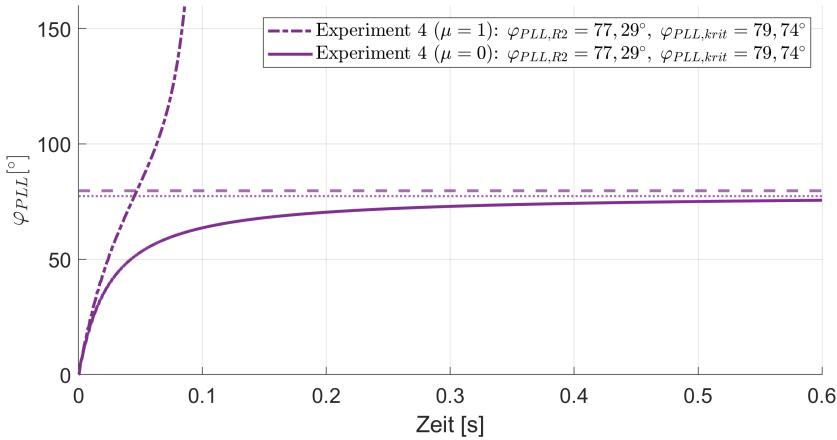
$$\dot{x}_{PLL}(t) = \mu K_{I,PLL} U_q(t). \quad (5.6)$$

Mit  $\mu = 1$  ergeben sich keine Veränderung der PLL-Eigenschaften, während mit  $\mu = 0$  nach (5.5) folgt:

$$D_{PLL} \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Demnach eliminiert  $\mu = 0$  das Überschwingen von  $\varphi_{PLL}(t)$  vollständig und erreicht ein Übertragungsverhalten ohne Oszillationen. Folglich ist dann die Netzsynchronisation für alle transiente Übergänge stabil, wenn die notwendige Stabilitätsbedingung erfüllt und die Kleinsignalstabilität in der Zielruhelage gegeben ist. Um diese Aussage zu überprüfen wurde das Experiment 4 mit  $\mu = 0$  wiederholt und das Ergebnis in Abb. 5.6 dargestellt.  $\varphi_{PLL}(t)$  nähert sich  $\varphi_{PLL,R2}$  nun wie erwartet aperiodisch und erreicht den kritischen Phasenwinkel nicht. Durch die Skalierung ist der transiente Übergang stabil. Mit  $\mu = 0$  wird der PI-Schleifenfilter aber auf ein reines P-Übertragungsglied reduziert und weist keine frequenzabhängige Filterwirkung mehr auf. Zudem resultiert für den Übergang mit  $\mu = 0$  eine größere Einschwingzeit, was der Verlauf von  $\varphi_{PLL}(t)$  in Diagramm 5.6 im Vergleich zu den Verläufen in Abb. 5.5 zeigt. Aus diesen Gründen sollte  $\mu$  bzw.  $K_{I,PLL}$  nicht willkürlich verringert werden, sondern es ist ein Kompromiss zwischen der Dämpfung, der Filterwirkung und der Einschwingzeit zu treffen.

Die Stabilität der transienten Übergänge der Experimente 1 bis 4 wird auch mit der hergeleiteten Nachweismethode nach dem Normenkriterium und dem analytischen Kriterium bewertet. Dazu werden beide Kriterien wie in Kapitel 4.1 beschrieben implementiert und angewandt. Die Resultate sind in Tabelle 5.6 angegeben. Es gilt, dass bei  $V_{min} < 0$  die Stabilität des transienten Übergangs nachgewiesen ist, während bei  $V_{min} \geq 0$  keine Aussage zur Stabilität nach dem entsprechenden Kriterium getroffen werden kann. Obwohl der transiente Übergang in den Experimenten 1, 2 und 3 stabil ist, kann dies mit beiden Kriterien nur für das Experiment 1 nachgewiesen werden. Für Experiment 2 gelingt der Nachweis nur mit dem analytischen Kriterium und in Experiment 3 kann mit keinem Kriterium der Nachweis geführt werden. Für



**Abbildung 5.6.:** Verläufe von  $\varphi_{PLL}(t)$  für das Experiment 4 nach Tabelle 5.5 mit  $\mu = 1$  und  $\mu = 0$ .

Experiment 4 mit  $\mu = 1$  zeigt keines der Kriterien fälschlicherweise einen stabilen Übergang an, während im Fall von  $\mu = 0$  der Stabilitätsnachweis mit beiden Kriterien erfolgt.

Diese Ergebnisse bestätigen, dass beide Varianten der Nachweismethode ein hinreichendes Kriterium für die transiente Stabilität darstellen, da die resultierende Stabilitätsaussage konservativ ausfällt. Die gezeigten Beispiele lassen außerdem die Schlussfolgerung zu, dass das Normenkriterium eine höhere Konservativität als das analytische Kriterium aufweist. Dies entspricht der Erwartung, da mit dem Normenkriterium nur eine obere Abschätzung und mit dem analytischen Kriterium eine exakte Berechnung des Maximalwertes erfolgt. Allerdings ist die Anwendung des analytischen Kriteriums auf den Fall beschränkt, dass  $G_{Ges}(s)$  ein PT2-System mit zusätzlicher Nullstelle ist. Das Normenkriterium kann dagegen auch angewandt werden, wenn z.B. in der PLL ein Schleifenfilter höherer Ordnung oder ein zusätzlicher Filter implementiert wird, wie es zur Verbesserung der transienten Stabilitätseigenschaften in der Literatur vorgeschlagen wurde [15], [25] (vgl. Abschnitt 1.2). Außerdem zeigen die Ergebnisse, dass die Kriterien im Allgemeinen konservativeren Stabilitätsaussagen liefern, je näher die Zielruhelage am Grenzfall der stationären Stabilitätsbedingung liegt, d.h. je schwächer das Netz in der Zielruhelage ist. Mit einer Erhöhung der Dämpfung durch Verringerung des Faktors  $\mu$  kann die Konservativität aber offenbar wieder reduziert werden.

### 5.3.1. Abschätzung der Konservativität der Nachweismethode

Um das Maß der Konservativität beider Kriterien genauer einschätzen zu können, ist eine größere Anzahl von Experimenten notwendig. Es werden daher Versuchsreihen nach dem Prinzip von Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt. Dazu wird die transiente Stabilität durch das Normenkriterium und das analytische Kriterium bei zufällig erzeugten Systemanregungen bewertet und die Stabilitätsaussage anschließend mit dem tatsächlichen Systemverhalten aus einer Simulation verglichen. Es wird dann ausgewertet, in wie vielen Fällen die Stabilitätsaussage der Kriterien korrekt bzw. konservativ war. Die Anregung des Systems wird für jeden Durchlauf so generiert, dass die Start- und die Zielruhelage existieren, beide stabil im Sinne

**Tabelle 5.6.:** Transiente Stabilität der Experimente aus Tabelle 5.5 nach dem Normenkriterium und dem analytischen Kriterium gemäß Bedingung (3.96). In den markierten Fällen ist kein Nachweis der transienten Stabilität möglich.

	Systemantwort	$V_{min}$ nach Normenkriterium	$V_{min}$ nach analytischem Kriterium
Experiment 1 ( $\mu = 1$ )	stabil	-22,86°	-68,94°
Experiment 2 ( $\mu = 1$ )	stabil	52,02°	-8,00°
Experiment 3 ( $\mu = 1$ )	stabil	71,85°	18,88°
Experiment 4 ( $\mu = 1$ )	nicht stabil	111,31°	34,94°
Experiment 4 ( $\mu = 0$ )	stabil	-0,03°	-0,03°

der Kleinsignalstabilität sind und die Eigenschaften  $\varphi_{U_{CInv,R1}} = 0$  sowie  $\varphi_{U_{CInv,R2}} > \varphi_{U_{CInv,R1}}$  zutreffen. Zudem werden die in Kapitel 4.1.5 genannten Einschränkungen beachtet. In jeder Monte-Carlo-Simulationsreihe werden die Kriterien anhand von 5000 Fällen untersucht.

Zuerst werden Anregungen durch Stellgrößensprünge betrachtet und mehrere Versuchsreihen mit unterschiedlichen Parametern  $n_{Inv}$ ,  $n_{Netz}$  und  $\mu$  durchgeführt. Um die zufällig erzeugten Stellgrößen einzuschränken, wird  $\hat{U}_{Inv,Ri}$  auf das Intervall

$$\hat{U}_{Inv,Ri} \in [450 \text{ V}; 1100 \text{ V}], \quad (5.8)$$

beschränkt. Die untere Intervallgrenze entspricht ca. 80 % der Netzspannungsamplitude  $\hat{U}_{Netz}$  nach Tabelle 5.1 und die obere dem typischen Sollwert der Zwischenkreisspannung  $U_{DC}$ . Die Einschränkung für  $\Delta\varphi_{Ri}$  ist bereits mit (4.21) festgelegt. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen sind im Anhang in Tabelle A.1 zusammengefasst. Die Spalte „Referenz“ gibt die Anzahl der Übergänge an, deren tatsächliche Systemantwort stabil bzw. instabil ist. In den weiteren Tabellenspalten sind die Ergebnisse nach dem Normenkriterium und dem analytischen Kriterium aufgeführt. Es ist jeweils angegeben in wie vielen Fällen die Stabilität eines stabilen Übergangs nachgewiesen werden könnte („richtig“), in wie vielen dies nicht möglich war („konservativ“) und in wie vielen Fällen ein instabiler Übergang fälschlicherweise als stabil eingestuft wurde („falsch“). Der letztgenannte Fall ist in keiner Versuchsreihe aufgetreten.

In allen Versuchsreihen ist das Normenkriterium konservativer als das analytische Kriterium. Mit dem Normenkriterium konnte in der ersten Versuchsreihe für 3008 stabile transiente Übergänge die Stabilität nicht nachgewiesen werden, was einem Anteil von 63,99 % entspricht. Mit dem analytischen Kriterium gelang dies in 972 Fällen (20,68 %) nicht. Die Versuchsreihen 2 bis 4 sind mit unterschiedlichem  $n_{Inv}$  durchgeführt worden und es resultiert für beide Kriterien bei höheren  $n_{Inv}$  eine höhere Konservativität. Da sich durch  $n_{Inv} > 1$  gemäß (4.26) die Filterimpedanz  $Z_{Inv}$  verkleinert, wodurch ein schwächeres Netz resultiert (s. Abschnitt 2.2.2), stützen diese Ergebnisse die Annahme, dass die Stabilitätsaussage der Kriterien konservativer ausfällt, je schwächer das Netz ist. Die Simulationsreihen 5 bis 7 sind Wiederholungen der transienten Übergänge von Versuchsreihe 3, aber mit verändertem Skalierungsfaktor  $\mu$ . Mit

abnehmendem  $\mu$  resultieren durch die höhere Dämpfung erwartungsgemäß weniger instabile Übergänge und beide Kriterien fallen außerdem weniger konservativ aus. In Versuchsreihe 7 gilt  $D_{PLL} \rightarrow \infty$  wegen  $\mu = 0$  und demzufolge sind alle betrachteten Übergänge stabil, was mit beiden Kriterien nachgewiesen werden kann. Für die Simulationsreihen 8 und 9 wurde  $n_{Netz}$  variiert. Die Kriterien weisen eine vergleichbare Konservativität wie bei einer entsprechenden Parametrierung von  $n_{Inv}$  auf.

Die Konservativität der Kriterien hängt insgesamt stark von den Parametern  $n_{Inv}$ ,  $n_{Netz}$  und  $\mu$  ab. Schließt man die Versuchsreihen mit  $\mu < 1$  aus, um nur die nominale Parametrierung der PLL zu bewerten, ergibt sich für das Normenkriterium eine Konservativität zwischen 63,99 % und 86,85 % und für das analytische Kriterium zwischen 20,68 % und 44,56 %.

In weiteren Monte-Carlo-Versuchsreihen werden die Nachweiskriterien nach den anderen Anregungsszenarien aus dem Abschnitt 4.2 untersucht. In drei Versuchsreihen sind dazu Impedanzänderungen durch Sprünge der Parameter  $n_{Inv}$  und  $n_{Netz}$  auf das System aufgeprägt worden. Für jeden Durchlauf erfolgt die Anregung mit zufälligen Werten aus den Intervallen:

$$n_{Inv,Ri} \in [1; 10] \quad (5.9a)$$

$$n_{Netz,Ri} \in [1; 10]. \quad (5.9b)$$

Die durchgeführten Versuchsreihen 10 bis 12 unterscheiden sich in den Stellgrößen  $\hat{U}_{Inv}$  sowie  $\Delta\varphi$ . Die Ergebnisse sind im Anhang in Tabelle A.2 aufgelistet und zeigen dass die Konservativität der Kriterien in den drei Versuchsreihen etwa identisch ist. Das Normenkriterium liefert in etwa 90 % der Fälle konservative Stabilitätsaussagen und für das analytische Kriterium liegt die Konservativität zwischen 56 % und 59 %.

In drei weiteren Versuchsreihen werden beide Kriterien bei einer sprunghaften Änderung der Netzspannungsparameter untersucht. Die Anregung erfolgt ausgehend von den Nominalwerten  $\hat{U}_{Netz,R1} = \hat{U}_{Netz}$  gemäß Tabelle 5.1 und  $\varphi_{Netz,0,R1}$ , sodass  $\varphi_{U_{CInv,R1}} = 0$  gilt. Es folgt ein Sprung auf  $\hat{U}_{Netz,R2} = \hat{U}_{Netz} + \Delta\hat{U}_{Netz}$  und  $\varphi_{Netz,0,R2} = \varphi_{Netz,0} + \Delta\varphi_{Netz,0}$  mit:

$$\Delta\hat{U}_{Netz} \in [-563 \text{ V}; 300 \text{ V}] \quad (5.10a)$$

$$\Delta\varphi_{Netz,0} \in [-60^\circ; 60^\circ]. \quad (5.10b)$$

Die Resultate der Versuchsreihen für unterschiedliche Stellgrößen  $\hat{U}_{Inv}$  und  $\Delta\varphi$  zeigt die Tabelle A.3 im Anhang. Bei  $\hat{U}_{Inv} = 650 \text{ V}$  und  $\Delta\varphi = 5^\circ$  trifft das Normenkriterium in 2218 Fällen und das analytische Kriterium in 958 Fällen eine konservative Stabilitätsaussage, was einem Anteil von 47,38 % bzw. 20,47 % entspricht. Bei höheren Werten der Stellgrößen steigt die Konservativität beider Kriterien an und liegt für  $\hat{U}_{Inv} = 750 \text{ V}$  und  $\Delta\varphi = 10^\circ$  bei 73,89 % (3334 Fälle) bzw. bei 34,38 % (1551 Fälle).



## 6. Zusammenfassung

Zum Betrieb von umrichterbasierten Einspeisern mit netzfolgender Einspeiseregelung ist die Synchronisation des Umrichters auf das Energienetz erforderlich. Bei einem starken Netz wird dazu die externe Netzspannung gemessen und die Netzsynchronisation von einer PLL durchgeführt. Bei einem schwachen Netz kann dieses Vorgehen fehlschlagen, da die gemessene Spannung nicht der Netzspannung entspricht. Infolgedessen wird die Einspeiseregelung instabil. Obwohl diese Problematik bekannt ist, sind die exakten Zusammenhänge zwischen einem schwachen Netz und der Netzsynchronisation unklar. Das Ziel dieser Arbeit war es daher, die PLL-basierte Netzsynchronisierung eines umrichterbasierten Einspeisers unter Berücksichtigung des schwachen Netzes zu analysieren und konkrete Bedingungen für deren Stabilität herzuleiten.

Die Stabilitätsuntersuchung erfolgte schrittweise. Durch Betrachtung des Systems im stationären Zustand wurde gezeigt, dass sich die Messspannung aufgrund des schwachen Netzes als Superposition der Ausgangsspannung des Umrichters und der Netzspannung ergibt. Diese anteilige Zusammensetzung ist von der Filter- sowie der Netzimpedanz, vom Arbeitspunkt des Umrichters und von der Amplitude der Netzspannung abhängig. Es ist eine Bedingung in Abhängigkeit der genannten Größen hergeleitet worden, unter der das Netz ausreichend stark ist, um die Netzsynchronisation mittels PLL im stationären Zustand zu ermöglichen. Diese Bedingung stellt eine notwendige Stabilitätsbedingung für die Netzsynchronisierung dar.

Das Erfüllen der notwendigen Stabilitätsbedingung ist zudem Voraussetzung für die Existenz der Ruhelagen des Systems, die zur weiteren Analyse betrachtet wurden. Im Allgemeinen besitzt das System zwei Ruhelagen und anhand des Systemverhaltens bei einer kleinen Anregung des PLL-Phasenwinkels wurde eine Ruhelage als instabil klassifiziert. Die Beurteilung der Stabilität der anderen Ruhelage erfolgte durch eine Linearisierung und eine Betrachtung der Eigenwerte des linearisierten Systems. Die resultierende Stabilitätsaussage entspricht der Klein-signalstabilität, d.h. sie ist auf die Ruhelage und deren unmittelbare Umgebung beschränkt.

Der Übergang von einer stabilen Ruhelage zu einer zweiten, der durch eine sprunghafte Änderung der Stellgrößen angeregt wird, wurde zur Analyse der transienten Stabilität betrachtet. Mit der Annahme, dass die dynamischen Eigenschaften der PLL gegenüber denen des elektrischen Netzwerks dominant sind, konnte der genannte Übergang allein auf Grundlage des Verlaufs vom PLL-Phasenwinkel qualitativ untersucht werden. Es wurde gezeigt, dass die Netzsynchronisation stabil ist und sich das System auf die zweite Ruhelage einschwingt, wenn das Überschwingen des PLL-Phasenwinkels während des Übergangs einen kritischen Wert nicht erreicht. Demzufolge stellt die Bedingung für die Stabilität des transienten Übergangs eine Anforderung an den Maximalwert des PLL-Phasenwinkels. Zur direkten Überprüfung dieser Bedingung ist es aber erforderlich, die zugrundeliegenden Differentialgleichungen analytisch oder numerisch zu lösen, um den Maximalwert zu ermitteln. Auf der Grundlage von geeigne-

## 6. Zusammenfassung

---

ten Vereinfachungen und Annahmen ist eine Methode entwickelt worden, um den Maximalwert des PLL-Phasenwinkels für eine gegebene Systemanregung konservativ abzuschätzen, wodurch sich eine hinreichende Stabilitätsbedingung ergibt, die nicht auf eine Lösung der Differentialgleichungen angewiesen ist. Zur Umsetzung der Nachweismethode wurde eine Optimierung unter Nebenbedingungen vorgeschlagen und in zwei Varianten implementiert, die sich hinsichtlich der Konservativität der Stabilitätsaussage und der Anforderungen an die Struktur der PLL unterscheiden. Während die erste Variante, das Normenkriterium, prinzipiell auch für PLLs mit Schleifenfiltern höherer Ordnung verwendet werden kann, ist die zweite Variante, das analytische Kriterium, auf die betrachtete SRF-PLL mit PI-Schleifenfilter beschränkt. Das analytische Kriterium zeichnet sich aber durch eine deutlich geringere Konservativität aus. Obwohl die transiente Stabilitätsbedingung auf Basis einer Anregung des Systems durch eine sprungförmige Änderung der Stellgrößen hergeleitet wurde, ist sie und die entwickelten Varianten der Nachweismethode auch zur Untersuchung weiterer Systemanregungen anwendbar. Dazu gehören sprunghafte Änderungen der Netz- und Filterimpedanz sowie der Netzsuspensionsparameter.

Mit der notwendigen Stabilitätsbedingung, der Stabilitätsanalyse in den Ruhelagen und der transienten Stabilitätsbedingung liegt eine vollständige Untersuchung der PLL-basierten Netzsynchronisation vor. Außerdem sind mit dem Normen- und dem analytischen Kriterium konkrete Methoden zum Nachweis der transienten Stabilität erarbeitet worden. Die Stabilitätsbedingungen und die Nachweismethoden stellen die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit dar und sind an numerischen Beispielen und in Versuchsreihen nach dem Prinzip von Monte-Carlo-Simulationen demonstriert worden. Die Anwendung der Nachweismethode unterliegt aber Einschränkungen und stellt daher keine allgemeingültige Lösung für die transiente Stabilität der PLL-basierten Netzsynchronisation dar.

Eine Erweiterung der Stabilitätsuntersuchung auf mehrere Teilnehmer des Energienetzes, die nicht durch eine Skalierung mit dem Faktor  $n_{Inv}$  abgebildet werden können, ist in zukünftigen Arbeiten möglich. Die Messspannung ergibt sich dann als Superposition von mehr als zwei Quellen, wodurch die Komplexität der Ausdrücke entsprechend ansteigt. Es sollte geprüft werden, ob sich in dieser Situation analytische Bedingungen für die transiente Stabilität herleiten lassen.

Des Weiteren können aufgrund von Störungen oder Fehlern Anregungen auftreten, für die keine stabile Zielruhelage des Systems existiert. Es ergibt sich dann die Fragestellung, nach welcher Zeit der Fehler spätestens behoben sein muss, damit der Verlust der Netzsynchronität nicht eintritt. Dies erfordert die Berechnung oder Abschätzung des Zeitpunktes, zu dem der PLL-Phasenwinkel den kritischen Wert erreicht. Zu diesem Zweck ist die entwickelte Nachweismethode nicht geeignet, da sie nur den Maximalwert abschätzt aber weitere Eigenschaften nicht berücksichtigt. Zur Beantwortung der genannten Fragestellung ist daher eine neue Abschätzungsmethode zu entwickeln.

# A. Anhang

## A.1. Messspannung im Laplace-Bereich

Die Übertragungsfunktionen  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  gemäß (3.4) ergeben sich nach dem Superpositionsprinzip aus dem ESB des elektrischen Netzwerkes. Im ESB wird jeweils eine Eingangsspannungsquelle zu Null gesetzt und durch einen Kurzschluss ersetzt, sodass die ESBs in Abb. A.1a und A.1b resultieren. Mit der Spannungsteilerregel folgt in komplexer Schreibweise mit dem Paralleloperator  $\parallel$ :

$$\frac{U_{CInv,Inv}(j\omega)}{U_{Inv}(j\omega)} = \frac{(R_{Netz} + j\omega L_{Netz}) \parallel \frac{1}{j\omega C_{Inv}}}{R_{Inv} + j\omega L_{Inv} + (R_{Netz} + j\omega L_{Netz}) \parallel \frac{1}{j\omega C_{Inv}}} \quad (\text{A.1a})$$

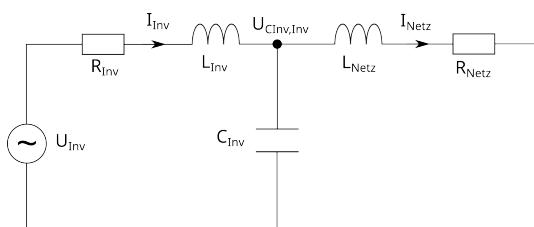
$$\frac{U_{CInv,Netz}(j\omega)}{U_{Netz}(j\omega)} = \frac{(R_{Inv} + j\omega L_{Inv}) \parallel \frac{1}{j\omega C_{Inv}}}{R_{Netz} + j\omega L_{Netz} + (R_{Inv} + j\omega L_{Inv}) \parallel \frac{1}{j\omega C_{Inv}}}. \quad (\text{A.1b})$$

Durch Zusammenfassungen und das Setzen von  $j\omega = s$  resultieren aus (A.1) die Übertragungsfunktionen (3.4) mit den Koeffizienten (3.5).

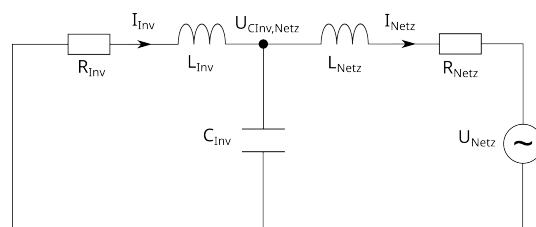
Bei  $\omega = \omega_{Netz}$  ergeben sich aus den Frequenzgängen  $G_{Inv}(j\omega)$  und  $G_{Netz}(j\omega)$  mit den komplexen Impedanzen nach (2.19) sowie  $Y_G$  nach (3.16):

$$G_{Inv}(j\omega_{Netz}) = \hat{G}_{Inv}(\omega_{Netz}) e^{j\varphi_{G_{Inv}}(\omega_{Netz})} = \frac{1}{\hat{Z}_{Inv} \hat{Y}_G} e^{j(-\varphi_{Z_{Inv}} - \varphi_{Y_G})} \quad (\text{A.2a})$$

$$G_{Netz}(j\omega_{Netz}) = \hat{G}_{Netz}(\omega_{Netz}) e^{j\varphi_{G_{Netz}}(\omega_{Netz})} = \frac{1}{\hat{Z}_{Netz} \hat{Y}_G} e^{j(-\varphi_{Z_{Netz}} - \varphi_{Y_G})}. \quad (\text{A.2b})$$

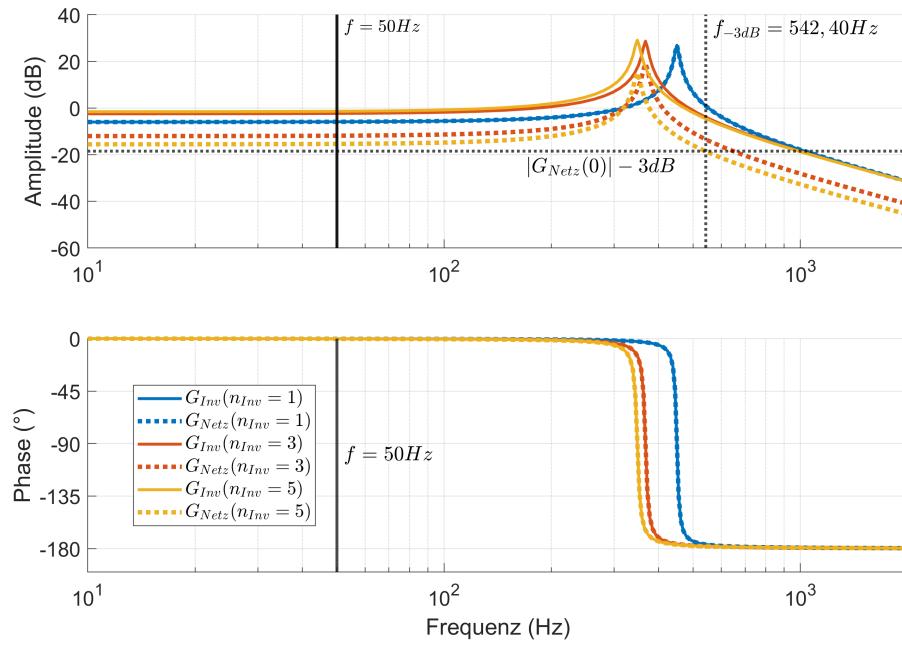


(a) ESB mit  $U_{Netz}(t) = 0$



(b) ESB mit  $U_{Inv}(t) = 0$

**Abbildung A.1.:** ESBs des elektrischen Netzwerks nach dem Superpositionsprinzip für jeweils eine Eingangsspannung.



**Abbildung A.2.:** Bode-Diagramm der Übertragungsfunktionen  $G_{Inv}(s)$  und  $G_{Netz}(s)$  für  $n_{Inv} = \{1; 3; 5\}$ . Für  $G_{Netz}(s)$  und  $n_{Inv} = 5$  ist die  $-3\text{dB}$ -Bandbreite markiert.

Wenn nicht anders angegeben, werden in dieser Arbeit mit  $\hat{G}_{Inv}$ ,  $\hat{G}_{Netz}$ ,  $\varphi_{G_{Inv}}$  und  $\varphi_{G_{Netz}}$  der Betrag bzw. die Phase von  $\underline{G}_{Inv}(j\omega)$  und  $\underline{G}_{Netz}(j\omega)$  bei der Frequenz  $\omega = \omega_{Netz}$  bezeichnet. In Abb. A.2 ist das Bode-Diagramm von  $\underline{G}_{Inv}(j\omega)$  und  $\underline{G}_{Netz}(j\omega)$  für die Systemparameter in Tabelle 5.1 und verschiedene  $n_{Inv}$  dargestellt. Es ist ersichtlich, dass bei  $f = f_{Netz}$  sowohl der Amplitudengang als auch der Phasengang näherungsweise konstant sind und sowohl  $\varphi_{G_{Inv}} \approx 0$  als auch  $\varphi_{G_{Netz}} \approx 0$  gilt. Des Weiteren ist die  $-3\text{dB}$ -Bandbreite  $f_{-3\text{dB}} = 542,40\text{Hz}$  der Übertragungsfunktion  $G_{Netz}(s)$  für  $n_{Inv} = 5$  markiert, welche von den abgebildeten Beispielen die kleinste Bandbreite ist.

## A.2. Matrixelemente des linearisierten Systems

Die Elemente der Matrizen (3.34) für  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$  sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= -\frac{R_{Inv}}{L_{Inv}} \\
\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} &= \frac{\hat{U}_{Inv,R}}{L_{Inv}} \sin(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) - \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{L_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_1}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= -\frac{1}{L_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{L_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{PLL}} &= -\frac{\hat{U}_{Inv,R}}{L_{Inv}} \sin(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_1}{\partial \hat{I}_{Netz}} &= \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{PLL}} = 0 \\
\\
\frac{\partial f_2}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{\hat{I}_{Inv,R}^2 L_{Inv}} \sin(\varphi_{C_{Inv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) - \frac{\hat{U}_{Inv,R}}{\hat{I}_{Inv,R}^2 L_{Inv}} \sin(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} &= \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) - \frac{\hat{U}_{Inv,R}}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \cos(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= -\frac{1}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= -\frac{\hat{U}_{CInv,R}}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{PLL}} &= \frac{\hat{U}_{Inv,R}}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \cos(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial \hat{I}_{Netz}} &= \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} = \frac{\partial f_2}{\partial x_{PLL}} = 0 \\
\\
\frac{\partial f_3}{\partial \hat{I}_{Netz}} &= -\frac{R_{Netz}}{L_{Netz}} \\
\frac{\partial f_3}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} &= \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{L_{Netz}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}}) - \frac{\hat{U}_{Netz}}{L_{Netz}} \sin(\varphi_{Netz,0} - \varphi_{I_{Netz,R}}) \\
\frac{\partial f_3}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= \frac{1}{L_{Netz}} \cos(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}}) \\
\frac{\partial f_3}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= -\frac{\hat{U}_{CInv,R}}{L_{Netz}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}}) \\
\frac{\partial f_3}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} = \frac{\partial f_3}{\partial x_{PLL}} = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_{PLL}} = 0 \\
\\
\frac{\partial f_4}{\partial \hat{I}_{Netz}} &= \frac{\hat{U}_{Netz}}{\hat{I}_{Netz,R}^2 L_{Netz}} \sin(\varphi_{Netz,0} - \varphi_{I_{Netz,R}}) - \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{\hat{I}_{Netz,R}^2 L_{Netz}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}}) \\
\frac{\partial f_4}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} &= \frac{\hat{U}_{Netz}}{\hat{I}_{Netz,R} L_{Netz}} \cos(\varphi_{Netz,0} - \varphi_{I_{Netz,R}}) - \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{\hat{I}_{Netz,R} L_{Netz}} \cos(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}}) \\
\frac{\partial f_4}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= \frac{1}{\hat{I}_{Netz,R} L_{Netz}} \sin(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}}) \\
\frac{\partial f_4}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= \frac{\hat{U}_{CInv,R}}{\hat{I}_{Netz,R} L_{Netz}} \cos(\varphi_{U_{CInv,R}} - \varphi_{I_{Netz,R}})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \hat{I}_{Inv}} = \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} = \frac{\partial f_4}{\partial x_{PLL}} = \frac{\partial f_4}{\partial \varphi_{PLL}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_5}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= \frac{1}{C_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} &= \frac{\hat{I}_{Inv,R}}{C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial \hat{I}_{Netz}} &= -\frac{1}{C_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} &= -\frac{\hat{I}_{Netz,R}}{C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= \frac{\hat{I}_{Netz,R}}{C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) - \frac{\hat{I}_{Inv,R}}{C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) \\ \frac{\partial f_5}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= \frac{\partial f_5}{\partial x_{PLL}} = \frac{\partial f_5}{\partial \varphi_{PLL}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_6}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= -\frac{1}{\hat{U}_{CInv,R} C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} &= \frac{\hat{I}_{Inv,R}}{\hat{U}_{CInv,R} C_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial \hat{I}_{Netz}} &= \frac{1}{\hat{U}_{CInv,R} C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} &= -\frac{\hat{I}_{Netz,R}}{\hat{U}_{CInv,R} C_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= \frac{\hat{I}_{Inv,R}}{\hat{U}_{CInv,R}^2 C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) - \frac{\hat{I}_{Netz,R}}{\hat{U}_{CInv,R}^2 C_{Inv}} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= \frac{\hat{I}_{Netz,R}}{\hat{U}_{CInv,R} C_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Netz},R}) - \frac{\hat{I}_{Inv,R}}{\hat{U}_{CInv,R} C_{Inv}} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{I_{Inv},R}) \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_{PLL}} &= \frac{\partial f_6}{\partial \varphi_{PLL}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_7}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= K_{I,PLL} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{PLL,R}) \\ \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= K_{I,PLL} \hat{U}_{CInv,R} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{PLL,R}) \\ \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_{PLL}} &= -K_{I,PLL} \hat{U}_{CInv,R} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{PLL,R}) \\ \frac{\partial f_7}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} = \frac{\partial f_7}{\partial \hat{I}_{Netz}} = \frac{\partial f_7}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} = \frac{\partial f_7}{\partial x_{PLL}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_8}{\partial \hat{U}_{CInv}} &= K_{P,PLL} \sin(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{PLL,R}) \\ \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_{U_{CInv}}} &= K_{P,PLL} \hat{U}_{CInv,R} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{PLL,R}) \\ \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_{PLL}} &= -K_{P,PLL} \hat{U}_{CInv,R} \cos(\varphi_{U_{CInv},R} - \varphi_{PLL,R}) \\ \frac{\partial f_8}{\partial x_{PLL}} &= 1 \\ \frac{\partial f_8}{\partial \hat{I}_{Inv}} &= \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_{I_{Inv}}} = \frac{\partial f_8}{\partial \hat{I}_{Netz}} = \frac{\partial f_8}{\partial \varphi_{I_{Netz}}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \hat{U}_{Inv}} &= \frac{1}{L_{Inv}} \cos(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{U}_{Inv}} &= \frac{1}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \sin(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial \hat{U}_{Inv}} &= \frac{\partial f_4}{\partial \hat{U}_{Inv}} = \frac{\partial f_5}{\partial \hat{U}_{Inv}} = \frac{\partial f_6}{\partial \hat{U}_{Inv}} = \frac{\partial f_7}{\partial \hat{U}_{Inv}} = \frac{\partial f_8}{\partial \hat{U}_{Inv}} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\varphi} &= -\frac{\hat{U}_{Inv,R}}{L_{Inv}} \sin(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\varphi} &= \frac{\hat{U}_{Inv,R}}{\hat{I}_{Inv,R} L_{Inv}} \cos(\varphi_{PLL,R} + \Delta\varphi_R - \varphi_{I_{Inv,R}}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial \Delta\varphi} &= \frac{\partial f_4}{\partial \Delta\varphi} = \frac{\partial f_5}{\partial \Delta\varphi} = \frac{\partial f_6}{\partial \Delta\varphi} = \frac{\partial f_7}{\partial \Delta\varphi} = \frac{\partial f_8}{\partial \Delta\varphi} = 0\end{aligned}$$

### A.3. Minimum der Messspannungsamplitude

Die Extremwertberechnung (3.74) zur konservative Abschätzung von  $\hat{U}_{CInv,konst}$  wird hier aufgeführt. Die erforderlichen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial \hat{U}_{CInv}}{\partial \varphi_{PLL}} = -\frac{\hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}}{\hat{U}_{CInv}} \sin \beta \quad (\text{A.4a})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{U}_{CInv}}{\partial (\varphi_{PLL})^2} = -\frac{\hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}}{\hat{U}_{CInv}^2} \left[ \hat{U}_{CInv} \cos \beta + \frac{\hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}}{\hat{U}_{CInv}} \sin^2 \beta \right], \quad (\text{A.4b})$$

mit  $\beta = \varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}}$ . Gleichung (A.4a) besitzt für  $\hat{U}_{CInv} \neq 0$  und eine Periode der sin-Funktion zwei Nullstellen:

$$\varphi_{PLL,Ex,U_{CInv},1} = -\Delta\varphi_{R2} - \varphi_{G_{Inv}} + \varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}} \quad (\text{A.5a})$$

$$\varphi_{PLL,Ex,U_{CInv},2} = \pi - \Delta\varphi_{R2} - \varphi_{G_{Inv}} + \varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}} \quad (\text{A.5b})$$

Das Einsetzen von (A.5) in (A.4b) ergibt:

$$\frac{\partial^2 \hat{U}_{CInv}}{\partial \varphi_{PLL}^2}(\varphi_{PLL,Ex,U_{CInv},1}) = -\frac{\hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}}{\hat{U}_{CInv}} \stackrel{!}{<} 0 \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{U}_{CInv}}{\partial \varphi_{PLL}^2}(\varphi_{PLL,Ex,U_{CInv},2}) = \frac{\hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Netz} \hat{G}_{Netz}}{\hat{U}_{CInv}} \stackrel{!}{>} 0, \quad (\text{A.6b})$$

und entsprechend kennzeichnet der Extrempunkt (A.5b) das Minimum von (3.68a) mit dem Wert:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{CInv,Min} &= \hat{U}_{CInv}(\varphi_{PLL,Ex,U_{CInv,2}}) \\ &= |\hat{U}_{Inv,R2}\hat{G}_{Inv} - \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz}|.\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

## A.4. Nichtlinearer Verstärkungsfaktor

Die Definition des nichtlinearen Verstärkungsfaktors  $K(\varphi_{PLL})$  ist (3.77) und wird hier vollständig angegeben:

$$\begin{aligned}K(\varphi_{PLL}) &= \frac{1}{(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2})} \\ &\arctan\left(\frac{\hat{U}_{Inv,R2}\hat{G}_{Inv} \sin(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}}) + \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz} \sin(\varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}})}{\hat{U}_{Inv,R2}\hat{G}_{Inv} \cos(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}}) + \hat{U}_{Netz}\hat{G}_{Netz} \cos(\varphi_{Netz,0} + \varphi_{G_{Netz}})}\right)\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Die ersten beiden Ableitungen von (A.8) nach  $\varphi_{PLL}$  sind:

$$\frac{\partial K(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} = \frac{1}{(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi)} \left( \frac{\partial \varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} - K(\varphi_{PLL}) \right) \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial^2 K(\varphi_{PLL})}{\partial (\varphi_{PLL})^2} = \frac{1}{(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi)} \left( \frac{\partial^2 \varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})}{\partial (\varphi_{PLL})^2} - 2 \frac{\partial K(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} \right) \quad (\text{A.9b})$$

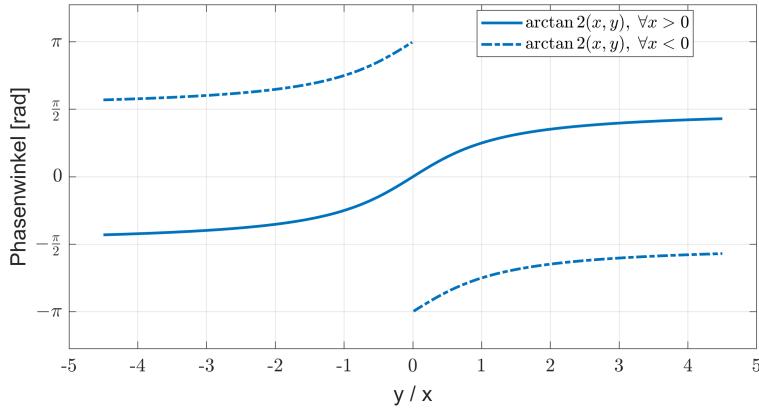
mit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})}{\partial \varphi_{PLL}} &= [\hat{G}_{Inv}^2 \hat{U}_{Inv,R2}^2 + \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Netz} \hat{U}_{Netz} \cos(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}})] \\ &\quad [\hat{G}_{Inv}^2 \hat{U}_{Inv,R2}^2 + \hat{G}_{Netz}^2 \hat{U}_{Netz}^2 \\ &\quad + 2\hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Netz} \hat{U}_{Netz} \cos(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}})]^{-1}.\end{aligned}\quad (\text{A.10a})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_{U_{CInv}}(\varphi_{PLL})}{\partial (\varphi_{PLL})^2} &= [(\hat{G}_{Inv}^2 \hat{U}_{Inv,R2}^2 - \hat{G}_{Netz}^2 \hat{U}_{Netz}^2) \\ &\quad \hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Netz} \hat{U}_{Netz} \sin(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}})] \\ &\quad [\hat{G}_{Inv}^2 \hat{U}_{Inv,R2}^2 + \hat{G}_{Netz}^2 \hat{U}_{Netz}^2 \\ &\quad + 2\hat{G}_{Inv} \hat{U}_{Inv,R2} \hat{G}_{Netz} \hat{U}_{Netz} \cos(\varphi_{PLL} + \Delta\varphi_{R2} + \varphi_{G_{Inv}} - \varphi_{Netz,0} - \varphi_{G_{Netz}})]^{-2}.\end{aligned}\quad (\text{A.10b})$$

## A.5. Arkustangens2-Funktion

Im Gegensatz zur arctan-Funktion besitzt die arctan2-Funktion einen Wertebereich von  $(-\pi; \pi]$  (oder:  $[-\pi; \pi)$ ) und ermöglicht es dadurch, dem Tangens den quadrantenrichtigen Phasenwinkel zuzuordnen. Die arctan2-Funktion hat zwei Argumente und eine mögliche Definition ist:



**Abbildung A.3.:** arctan2-Funktion an Abhängigkeit des Quotienten  $y/x$  mit den abschnittsweise definierten Verläufen.

$$\arctan2(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pm\pi & x < 0, y = 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \text{undefiniert} & x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Im Diagramm A.3 ist die arctan2-Funktion dargestellt. Die Unstetigkeitsstelle der Funktion ist sowohl im Diagramm als auch aus der Definitionsgleichung ersichtlich: Für  $x < 0$  springt der Funktionswert von  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$  für  $y > 0$  auf  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$  für  $y < 0$ . Die Unstetigkeitsstelle liegt daher bei  $y = 0$  und  $x < 0$ . Eine typische Anwendung der arctan2-Funktion ist die quadrantenrichtige Berechnung der Phase einer komplexen Zahl. Mit  $\underline{z} = x + jy$  ist die Unstetigkeitsstelle daher durch  $\operatorname{Im}\{\underline{z}\} = 0$  und  $\operatorname{Re}\{\underline{z}\} < 0$  gekennzeichnet.

## A.6. Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationsreihen

In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse der Versuchsreihen nach Prinzip von Monte-Carlo-Simulationen zusammengefasst.

**Tabelle A.1.:** Ergebnisse der Monte-Carlo-Versuchsreihen bei einer Anregung des Systems durch Stellgrößensprünge (sprunghafte Änderungen von  $\hat{U}_{Inv}$  und  $\Delta\varphi$ ).

Lfd.	Parameter	Referenz	Normen-kriterium	analytisches Kriterium
1	$n_{Inv} = 1$	stabil: 4701 konservativ: 3008 falsch: 0	richtig: 1693 (36,01 %)	3729 (79,32 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 3008 (63,99 %)	972 (20,68 %)
	$\mu = 1, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
2	$n_{Inv} = 3$	stabil: 4294 konservativ: 2936 falsch: 0	richtig: 1358 (31,63 %)	2938 (68,42 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 2936 (68,37 %)	1356 (31,58 %)
	$\mu = 1, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
3	$n_{Inv} = 5$	stabil: 4254 konservativ: 3177 falsch: 0	richtig: 1077 (25,32 %)	2682 (63,05 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 3177 (74,68 %)	1572 (36,95 %)
	$\mu = 1, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
4	$n_{Inv} = 10$	stabil: 4167 konservativ: 3619 falsch: 0	richtig: 548 (13,15 %)	2310 (55,44 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 3619 (86,85 %)	1857 (44,56 %)
	$\mu = 1, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
5	$n_{Inv} = 5$	stabil: 4392 konservativ: 2640 falsch: 0	richtig: 1752 (39,89 %)	3131 (71,29 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 2640 (60,11 %)	1261 (28,71 %)
	$\mu = 0, 5$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
6	$n_{Inv} = 5$	stabil: 4579 konservativ: 1830 falsch: 0	richtig: 2749 (60,03 %)	3712 (81,07 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 1830 (39,97 %)	867 (18,93 %)
	$\mu = 0, 2$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
7	$n_{Inv} = 5$	stabil: 5000 konservativ: 0 falsch: 0	richtig: 5000 (100,00 %)	5000 (100,00 %)
	$n_{Netz} = 1$		konservativ: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
	$\mu = 0, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
8	$n_{Inv} = 1$	stabil: 4226 konservativ: 3161 falsch: 0	richtig: 1065 (25,20 %)	2710 (64,13 %)
	$n_{Netz} = 5$		konservativ: 3161 (74,80 %)	1516 (35,87 %)
	$\mu = 1, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)
9	$n_{Inv} = 1$	stabil: 4140 konservativ: 3557 falsch: 0	richtig: 583 (14,08 %)	2300 (55,56 %)
	$n_{Netz} = 10$		konservativ: 3557 (85,92 %)	1840 (44,44 %)
	$\mu = 1, 0$		falsch: 0 (0,00 %)	0 (0,00 %)

**Tabelle A.2.:** Ergebnisse der Monte-Carlo-Versuchsreihen bei einer Systemanregung durch Impedanzänderungen (sprunghafte Änderungen von  $n_{Inv}$  und  $n_{Netz}$ ).

Lfd.	Parameter	Referenz		Normenkriterium	analytisches Kriterium
10	$\hat{U}_{Inv} = 650,00 \text{ V}$ $\Delta\varphi = 5^\circ$ $\mu = 1,0$	stabil: 4120 instabil: 880	richtig: konservativ: falsch:	386 (9,37 %) 3734 (90,63 %) 0 (0,00 %)	1690 (41,02 %) 2430 (58,98 %) 0 (0,00 %)
11	$\hat{U}_{Inv} = 650,00 \text{ V}$ $\Delta\varphi = 10^\circ$ $\mu = 1,0$	stabil: 4099 instabil: 901	richtig: konservativ: falsch:	424 (10,34 %) 3675 (89,66 %) 0 (0,00 %)	1793 (43,74 %) 2306 (56,26 %) 0 (0,00 %)
12	$\hat{U}_{Inv} = 750,00 \text{ V}$ $\Delta\varphi = 10^\circ$ $\mu = 1,0$	stabil: 4077 instabil: 923	richtig: konservativ: falsch:	458 (11,23 %) 3619 (88,77 %) 0 (0,00 %)	1815 (44,52 %) 2262 (55,48 %) 0 (0,00 %)

**Tabelle A.3.:** Ergebnisse der Monte-Carlo-Versuchsreihen mit Systemanregung durch Änderungen der Netzspannungsparameter (sprunghafte Änderung von  $\hat{U}_{Netz}$  und  $\varphi_{Netz,0}$ ).

Lfd.	Parameter	Referenz		Normenkriterium	analytisches Kriterium
13	$\hat{U}_{Inv} = 650,00 \text{ V}$ $\Delta\varphi = 5^\circ$ $\mu = 1,0$	stabil: 4681 instabil: 319	richtig: konservativ: falsch:	2463 (52,62 %) 2218 (47,38 %) 0 (0,00 %)	3723 (79,53 %) 958 (20,47 %) 0 (0,00 %)
14	$\hat{U}_{Inv} = 650,00 \text{ V}$ $\Delta\varphi = 10^\circ$ $\mu = 1,0$	stabil: 4509 instabil: 491	richtig: konservativ: falsch:	1418 (31,45 %) 3091 (68,55 %) 0 (0,00 %)	3101 (68,77 %) 1408 (31,23 %) 0 (0,00 %)
15	$\hat{U}_{Inv} = 750,00 \text{ V}$ $\Delta\varphi = 10^\circ$ $\mu = 1,0$	stabil: 4512 instabil: 488	richtig: konservativ: falsch:	1178 (26,11 %) 3334 (73,89 %) 0 (0,00 %)	2961 (65,63 %) 1551 (34,38 %) 0 (0,00 %)



# Literatur

- [1] O. Elgerd, „Control of electric power systems,“ *IEEE Control Systems Magazine*, Jg. 1, Nr. 2, S. 4–16, Juni 1981, ISSN: 0272-1708. DOI: 10.1109/MCS.1981.1100766.
- [2] G. Neidhöfer, „50-Hz Frequency [History],“ *IEEE Power and Energy Magazine*, Jg. 9, Nr. 4, S. 66–81, Juli 2011, ISSN: 1540-7977. DOI: 10.1109/MPE.2011.941165.
- [3] Bundesnetzagentur, „Monitoringbericht 2022 gemäß § 63 Abs. 3 i. V. m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i. V. m. § 53 Abs. 3 GWB,“ Bundesnetzagentur für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen und Bundeskartellamt, Bonn, 14. Dez. 2022.
- [4] J. A. Taylor, S. V. Dhople und D. S. Callaway, „Power systems without fuel,“ *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Jg. 57, S. 1322–1336, Mai 2016, ISSN: 13640321. DOI: 10.1016/j.rser.2015.12.083.
- [5] F. Milano, F. Dorfler, G. Hug, D. J. Hill und G. Verbic, „Foundations and Challenges of Low-Inertia Systems (Invited Paper),“ in *2018 Power Systems Computation Conference (PSCC)*, Dublin: IEEE, Juni 2018, S. 1–25, ISBN: 978-1-910963-10-4. DOI: 10.23919/PSCC.2018.8450880.
- [6] F. Dörfler, S. Bolognani, J. W. Simpson-Porco und S. Grammatico, „Distributed Control and Optimization for Autonomous Power Grids,“ in *2019 18th European Control Conference (ECC)*, Naples, Italy: IEEE, Juni 2019, S. 2436–2453, ISBN: 978-3-907144-00-8. DOI: 10.23919/ECC.2019.8795974.
- [7] A. Timbus, M. Liserre, R. Teodorescu und F. Blaabjerg, „Synchronization Methods for Three Phase Distributed Power Generation Systems. An Overview and Evaluation,“ in *IEEE 36th Conference on Power Electronics Specialists, 2005.*, Aachen, Germany: IEEE, 2005, S. 2474–2481, ISBN: 978-0-7803-9033-1. DOI: 10.1109/PESC.2005.1581980.
- [8] F. Blaabjerg, R. Teodorescu, M. Liserre und A. Timbus, „Overview of Control and Grid Synchronization for Distributed Power Generation Systems,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 53, Nr. 5, S. 1398–1409, Okt. 2006, ISSN: 0278-0046. DOI: 10.1109/TIE.2006.881997.
- [9] P. Kundur, N. J. Balu und M. G. Lauby, *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, 1994, ISBN: 978-0-07-035958-1.
- [10] P. Kundur, J. Paserba, V. Ajjarapu u. a., „Definition and Classification of Power System Stability IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions,“ *IEEE Transactions on Power Systems*, Jg. 19, Nr. 3, S. 1387–1401, Aug. 2004, ISSN: 0885-8950. DOI: 10.1109/TPWRS.2004.825981.

- [11] O. I. Elgerd, *Electric energy systems theory: an introduction: Olle I. Elgerd (Professor of Electrical Engineering, University of Florida)*, Second edition. Chennai: McGraw Hill Education (India) Private Limited, 1983, ISBN: 978-0-07-099286-3.
- [12] T. Minakawa, M. Sato, Y. Ichikawa und Y. Ishihara, „A new method for detecting loss of synchronism using power and current measured on a line,“ *IEEE Transactions on Power Delivery*, Jg. 14, Nr. 1, S. 68–73, Jan. 1999, ISSN: 08858977. DOI: 10.1109/61.736687.
- [13] G. Ledwich und H. Sharma, „Connection of inverters to a weak grid,“ in *2000 IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference. Conference Proceedings (Cat. No.00CH37018)*, Bd. 2, Galway, Ireland: IEEE, 2000, S. 1018–1022, ISBN: 978-0-7803-5692-4. DOI: 10.1109/PESC.2000.879952.
- [14] J. Tande, „Wind turbines in weak grids - constraints and solutions,“ in *16th International Conference and Exhibition on Electricity Distribution (CIRED 2001)*, Bd. 2001, Amsterdam, Netherlands: IEE, 2001, S. v4–16–v4–16, ISBN: 978-0-85296-735-5. DOI: 10.1049/cp:20010842.
- [15] M. Liserre, R. Teodorescu und F. Blaabjerg, „Stability of photovoltaic and wind turbine grid-connected inverters for a large set of grid impedance values,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 21, Nr. 1, S. 263–272, Jan. 2006, ISSN: 0885-8993. DOI: 10.1109/TPEL.2005.861185.
- [16] N. Hoffmann, R. Lohde, M. Fischer, F. W. Fuchs, L. Asiminoaei und P. Thogersen, „A Review on Fundamental Grid-Voltage Detection Methods under Highly Distorted Conditions in Distributed Power-Generation Networks,“ in *2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, Phoenix, AZ, USA: IEEE, Sep. 2011, S. 3045–3052, ISBN: 978-1-4577-0542-7. DOI: 10.1109/ECCE.2011.6064179.
- [17] D. Dong, B. Wen, D. Boroyevich, P. Mattavelli und Y. Xue, „Analysis of Phase-Locked Loop Low-Frequency Stability in Three-Phase Grid-Connected Power Converters Considering Impedance Interactions,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 62, Nr. 1, S. 310–321, Jan. 2015, ISSN: 0278-0046, 1557-9948. DOI: 10.1109/TIE.2014.2334665.
- [18] D. Dong, J. Li, D. Boroyevich, P. Mattavelli, I. Cvetkovic und Y. Xue, „Frequency behavior and its stability of grid-interface converter in distributed generation systems,“ in *2012 Twenty-Seventh Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, Orlando, FL, USA: IEEE, Feb. 2012, S. 1887–1893, ISBN: 978-1-4577-1216-6. DOI: 10.1109/APEC.2012.6166080.
- [19] G. A. Raducu, *Control of Grid Side Inverter in a B2B Configuration for WT Applications*, Master Thesis, 2008.
- [20] M. J. Korytowski, „Effects of the Phase Locked Loop on the Stability of a Voltage Source Converter in a Weak Grid Environment,“ Diss., University of Pittsburgh, Jan. 2015.
- [21] F. Dörfler, „Control of Power Converters in Low-Inertia Power Systems,“ Keynote Talk, 27th Mediterranean Conference on Control and Automation, Akko, Israel, 2019.

- [22] J. Z. Zhou, H. Ding, S. Fan, Y. Zhang und A. M. Gole, „Impact of Short-Circuit Ratio and Phase-Locked-Loop Parameters on the Small-Signal Behavior of a VSC-HVDC Converter,“ *IEEE Transactions on Power Delivery*, Jg. 29, Nr. 5, S. 2287–2296, Okt. 2014, ISSN: 0885-8977, 1937-4208. DOI: 10.1109/TPWRD.2014.2330518.
- [23] W. Dong, H. Xin, D. Wu und L. Huang, „Small Signal Stability Analysis of Multi-Infeed Power Electronic Systems Based on Grid Strength Assessment,“ *IEEE Transactions on Power Systems*, Jg. 34, Nr. 2, S. 1393–1403, März 2019, ISSN: 0885-8950, 1558-0679. DOI: 10.1109/TPWRS.2018.2875305.
- [24] L. Mei, L. Ding, Z. Wang u.a., „Synchronization Stability of PLL-Based Power Converters Connected to Weak AC Grid,“ in *2021 6th Asia Conference on Power and Electrical Engineering (ACPEE)*, Chongqing, China: IEEE, Apr. 2021, S. 1436–1440, ISBN: 978-1-72819-159-1. DOI: 10.1109/ACPEE51499.2021.9436844.
- [25] L. Huang, H. Xin, Z. Li u.a., „Grid-Synchronization Stability Analysis and Loop Shaping for PLL-Based Power Converters With Different Reactive Power Control,“ *IEEE Transactions on Smart Grid*, Jg. 11, Nr. 1, S. 501–516, Jan. 2020. DOI: 10.1109/TSG.2019.2924295.
- [26] P. Winter, J. Struwe, J. Cajigal und H. Wrede, „Stability Margins of Grid-Supporting Converters,“ in *2021 IEEE Green Technologies Conference (GreenTech)*, Denver, CO, USA: IEEE, Apr. 2021, S. 387–394, ISBN: 978-1-72819-139-3. DOI: 10.1109/GreenTech48523.2021.00067.
- [27] M. G. Taul, X. Wang, P. Davari und F. Blaabjerg, „An Overview of Assessment Methods for Synchronization Stability of Grid-Connected Converters Under Severe Symmetrical Grid Faults,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 34, Nr. 10, S. 9655–9670, Okt. 2019, ISSN: 0885-8993, 1941-0107. DOI: 10.1109/TPEL.2019.2892142.
- [28] X. He, H. Geng und G. Yang, „Synchronization Stability Analysis of Grid-Tied Power Converters under Severe Grid Voltage Sags,“ in *2018 IEEE International Power Electronics and Application Conference and Exposition (PEAC)*, Shenzhen: IEEE, Nov. 2018, S. 1–6, ISBN: 978-1-5386-6054-6. DOI: 10.1109/PEAC.2018.8590280.
- [29] X. He, H. Geng und S. Ma, „Transient Stability Analysis of Grid-Tied Converters Considering PLL’s Nonlinearity,“ *CPSS Transactions on Power Electronics and Applications*, Jg. 4, Nr. 1, S. 40–49, März 2019, ISSN: 2475742X. DOI: 10.24295/CPSSTPEA.2019.00005.
- [30] Q. Hu, L. Fu, F. Ma und F. Ji, „Large Signal Synchronizing Instability of PLL-Based VSC Connected to Weak AC Grid,“ *IEEE Transactions on Power Systems*, Jg. 34, Nr. 4, S. 3220–3229, Juli 2019, ISSN: 0885-8950, 1558-0679. DOI: 10.1109/TPWRS.2019.2892224.
- [31] O. G. C. Dahl, „Stability of the general 2-machine system,“ *Electrical Engineering*, Jg. 54, Nr. 2, S. 185–188, Feb. 1935, ISSN: 0095-9197. DOI: 10.1109/EE.1935.6541142.
- [32] H. Saadat, *Power System Analysis*. WCB/McGraw-Hill, 1999, ISBN: 978-0-07-561634-4.

- [33] J. Willems, „Direct method for transient stability studies in power system analysis,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 16, Nr. 4, S. 332–341, Aug. 1971, ISSN: 0018-9286. DOI: [10.1109/TAC.1971.1099743](https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099743).
- [34] H. Wu und X. Wang, „Transient Stability Impact of the Phase-Locked Loop on Grid-Connected Voltage Source Converters,“ in *2018 International Power Electronics Conference (IPEC-Niigata 2018 -ECCE Asia)*, Niigata: IEEE, Mai 2018, S. 2673–2680, ISBN: 978-4-88686-405-5. DOI: [10.23919/IPEC.2018.8507447](https://doi.org/10.23919/IPEC.2018.8507447).
- [35] X. He, H. Geng, R. Li und B. C. Pal, „Transient Stability Analysis and Enhancement of Renewable Energy Conversion System During LVRT,“ *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, Jg. 11, Nr. 3, S. 1612–1623, Juli 2020, ISSN: 1949-3029, 1949-3037. DOI: [10.1109/TSTE.2019.2932613](https://doi.org/10.1109/TSTE.2019.2932613).
- [36] J. Pei, J. Yao, Y. Liu, S. Chen, P. Sun und S. Huang, „Modelling and Transient Synchronization Stability Analysis for PLL-Based Renewable Energy Generator Considering Sequential Switching Schemes,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 37, Nr. 2, S. 2165–2179, 2021, ISSN: 0885-8993, 1941-0107. DOI: [10.1109/TPEL.2021.3103017](https://doi.org/10.1109/TPEL.2021.3103017).
- [37] H. Wu und X. Wang, „Design-Oriented Transient Stability Analysis of PLL-Synchronized Voltage-Source Converters,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 35, Nr. 4, S. 3573–3589, Apr. 2020, ISSN: 0885-8993, 1941-0107. DOI: [10.1109/TPEL.2019.2937942](https://doi.org/10.1109/TPEL.2019.2937942).
- [38] S. Ma, H. Geng, L. Liu, G. Yang und B. C. Pal, „Grid-Synchronization Stability Improvement of Large Scale Wind Farm During Severe Grid Fault,“ *IEEE Transactions on Power Systems*, Jg. 33, Nr. 1, S. 216–226, Jan. 2018, ISSN: 0885-8950, 1558-0679. DOI: [10.1109/TPWRS.2017.2700050](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2017.2700050).
- [39] L. Harnefors und H.-P. Nee, „A general algorithm for speed and position estimation of AC motors,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 47, Nr. 1, S. 77–83, Feb. 2000, ISSN: 02780046. DOI: [10.1109/41.824128](https://doi.org/10.1109/41.824128).
- [40] P. Varaiya, F. Wu und Rong-Liang Chen, „Direct methods for transient stability analysis of power systems: Recent results,“ *Proceedings of the IEEE*, Jg. 73, Nr. 12, S. 1703–1715, 1985, ISSN: 0018-9219. DOI: [10.1109/PROC.1985.13366](https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13366).
- [41] E. Clarke, *Circuit Analysis Of A-C Power System Vol I*. 1943.
- [42] R. Teodorescu, M. Liserre und P. Rodríguez, *Grid Converters for Photovoltaic and Wind Power Systems*. IEEE ; Wiley, 2011, ISBN: 978-0-470-05751-3.
- [43] E. Bolte, *Elektrische Maschinen: Grundlagen, Magnetfelder, Wicklungen, Asynchronmaschinen, Synchronmaschinen, elektronisch kommutierte Gleichstrommaschinen*. Berlin: Springer, 2012, ISBN: 978-3-642-05485-3.
- [44] R. H. Park, „Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I,“ *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, Jg. 48, Nr. 3, S. 716–727, Juli 1929, ISSN: 0096-3860. DOI: [10.1109/T-AIEE.1929.5055275](https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1929.5055275).
- [45] „Status des Windenergieausbaus an Land in Deutschland, Jahr 2022,“ Deutsche WindGuard GmbH, Bundesverband WindEnergie e.V., VDMA Power Systems, Varel, Germany, 2022.

- [46] „Status des Offshore-Windenergieausbaus in Deutschland, Jahr 2022,“ Deutsche WindGuard GmbH, Bundesverband WindEnergie e.V., VDMA Power Systems, Varel, Germany, 2022.
- [47] F. Iov, M. Ciobotaru und F. Blaabjerg, „Power Electronics Control of Wind Energy in Distributed Power Systems,“ in *2008 11th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment*, Brasov, Romania: IEEE, Mai 2008, S. 29–44, ISBN: 978-1-4244-1544-1. DOI: [10.1109/OPTIM.2008.4602332](https://doi.org/10.1109/OPTIM.2008.4602332).
- [48] M. P. Kaźmierkowski, R. Krishnan und F. Blaabjerg, Hrsg., *Control in power electronics: selected problems*, Academic Press series in engineering, Amsterdam ; New York: Academic Press, 2002, ISBN: 978-0-12-402772-5.
- [49] X. Wang, J. M. Guerrero, F. Blaabjerg und Z. Chen, „A Review of Power Electronics Based Microgrids,“ *Journal of Power Electronics*, Jg. 12, Nr. 1, S. 181–192, 20. Jan. 2012. DOI: [10.6113/JPE.2012.12.1.181](https://doi.org/10.6113/JPE.2012.12.1.181).
- [50] J. Rocabert, A. Luna, F. Blaabjerg und P. Rodríguez, „Control of Power Converters in AC Microgrids,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 27, Nr. 11, S. 4734–4749, Nov. 2012, ISSN: 0885-8993, 1941-0107. DOI: [10.1109/TPEL.2012.2199334](https://doi.org/10.1109/TPEL.2012.2199334).
- [51] J. Guerrero, J. Matas, L. de Vicuna, N. Berbel und J. Sosa, „Wireless-control strategy for parallel operation of distributed generation inverters,“ in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2005. ISIE 2005.*, Dubrovnik, Croatia: IEEE, 2005, 845–850 vol. 2, ISBN: 978-0-7803-8738-6. DOI: [10.1109/ISIE.2005.1529025](https://doi.org/10.1109/ISIE.2005.1529025).
- [52] K. De Brabandere, B. Bolsens, J. Van den Keybus, A. Woyte, J. Driesen und R. Belmans, „A Voltage and Frequency Droop Control Method for Parallel Inverters,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 22, Nr. 4, S. 1107–1115, Juli 2007, ISSN: 0885-8993. DOI: [10.1109/TPEL.2007.900456](https://doi.org/10.1109/TPEL.2007.900456).
- [53] A. Sepehr, M. Pouresmaeil, M. Hojabri, F. Blaabjerg und E. Pouresmaeil, „Improving Transient Stability of Power Synchronization Control for Weak Grid Applications,“ in *2020 IEEE 21st Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL)*, Aalborg, Denmark: IEEE, 9. Nov. 2020, ISBN: 978-1-72817-160-9. DOI: [10.1109/COMPEL49091.2020.9265786](https://doi.org/10.1109/COMPEL49091.2020.9265786).
- [54] L. Huang, H. Xin, W. Dong und F. Dörfler, „Impacts of Grid Structure on PLL-Synchronization Stability of Converter-Integrated Power Systems,“ *IFAC-PapersOnLine*, Jg. 55, Nr. 13, S. 264–269, 2022, ISSN: 24058963. DOI: [10.1016/j.ifacol.2022.07.270](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.07.270).
- [55] A. R. Hefner und D. L. Blackburn, „An analytical model for the steady-state and transient characteristics of the power insulated-gate bipolar transistor,“ *Solid-State Electronics*, Jg. 31, Nr. 10, Okt. 1988, ISSN: 00381101. DOI: [10.1016/0038-1101\(88\)90025-1](https://doi.org/10.1016/0038-1101(88)90025-1).
- [56] S. Cobreces, F. Huerta, D. Pizarro, F. J. Rodrguez und E. J. Bueno, „Three-phase power system parametric identification based on complex-space recursive least squares,“ in *2007 IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing*, Alcala de Henares, Spain: IEEE, 2007, S. 1–6, ISBN: 978-1-4244-0829-0. DOI: [10.1109/WISP.2007.4447570](https://doi.org/10.1109/WISP.2007.4447570).

- [57] F. S. Fuchs, „Converter Control for Wind Turbines when Operating in Weak Grids Containing Resonances,“ Diss., Gottfried Wilhelm Leibnitz Universität Hannover, Hannover, 2017.
- [58] S. Sylvian, „Voltage Oriented Control of Three-Phase Boost PWM Converters,“ Magisterarb., Chalmers University of Technology, Göteborg, 2010.
- [59] „IEEE Guide for Planning DC Links Terminating at AC Locations Having Low Short-Circuit Capacities,“ IEEE, 1997, ISBN: 9780738103808. DOI: 10.1109/IEEEESTD.1997.85949.
- [60] V. Kaura und B. V., „Operation of a phase locked loop system under distorted utility conditions,“ *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. 33, Nr. 1, S. 58–63, 1997, ISSN: 00939994. DOI: 10.1109/28.567077.
- [61] Se-Kyo Chung, „A phase tracking system for three phase utility interface inverters,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 15, Nr. 3, S. 431–438, Mai 2000, ISSN: 0885-8993, 1941-0107. DOI: 10.1109/63.844502.
- [62] R. Ottersten, *On control of back-to-back converters and sensorless induction machine drivers*. Chalmers University of Technology, 2003, ISBN: 978-91-7291-296-0.
- [63] K.-P. Schulze und K.-J. Rehberg, *Entwurf von adaptiven Systemen: e. Darst. für Ingenieure*, 1. Aufl. Berlin: Verl. Technik, 1988, ISBN: 978-3-341-00293-3.
- [64] O. Föllinger, *Nichtlineare Regelungen. 1: Grundbegriffe, Anwendung der Zustandsebene, direkte Methode*, 8., verb. Aufl. München: Oldenbourg, 1998, ISBN: 978-3-486-24527-1.
- [65] K. Müller, *Entwurf robuster Regelungen*. Teubner, 1996, ISBN: 978-3-519-06173-1.
- [66] H. Toivonen, „Robust Control Methods,“ Lecture Notes, Åbo, 1998.
- [67] G. F. Franklin, J. D. Powell und A. Emami-Naeini, *Feedback control of dynamic systems*, 4th ed. Prentice Hall, 2002, ISBN: 978-0-13-032393-4.
- [68] P. Dawkins, *Table of Laplace Transforms*, 2012. Adresse: [https://tutorial.math.lamar.edu/pdf/Laplace\\_Table.pdf](https://tutorial.math.lamar.edu/pdf/Laplace_Table.pdf).
- [69] N. K. Rutland und P. G. Lane, „Computing the 1-norm of the impulse response of linear time-invariant systems,“ *Systems & Control Letters*, Jg. 26, Nr. 3, S. 211–221, Okt. 1995, ISSN: 01676911. DOI: 10.1016/0167-6911(95)00022-2.
- [70] I. J. Perez-Arriaga, G. C. Verghese und F. C. Schweppe, „Selective Modal Analysis with Applications to Electric Power Systems, Part I: Heuristic Introduction,“ *IEEE Power Engineering Review*, Jg. PER-2, Nr. 9, S. 29–30, Sep. 1982, ISSN: 0272-1724. DOI: 10.1109/MPER.1982.5519461.
- [71] J. Lunze, *Regelungstechnik. 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer, 2008, ISBN: 978-3-540-68909-6.

- [72] M. Gierschner, H.-J. Knaak und H.-G. Eckel, „Fixed-reference-frame-control: A novel robust control concept for grid side inverters in HVDC connected weak offshore grids,“ in *2014 16th European Conference on Power Electronics and Applications*, Lappeenranta, Finland: IEEE, Aug. 2014, S. 1–7, ISBN: 978-1-4799-3015-9. DOI: [10.1109/EPE.2014.6910711](https://doi.org/10.1109/EPE.2014.6910711).
- [73] M. Mohseni, S. M. Islam und M. A. S. Masoum, „Impacts of Symmetrical and Asymmetrical Voltage Sags on DFIG-Based Wind Turbines Considering Phase-Angle Jump, Voltage Recovery, and Sag Parameters,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 26, Nr. 5, S. 1587–1598, Mai 2011, ISSN: 0885-8993, 1941-0107. DOI: [10.1109/TPEL.2010.2087771](https://doi.org/10.1109/TPEL.2010.2087771).
- [74] N. Metropolis und S. Ulam, „The monte carlo method,“ *Journal of the American Statistical Association*, Jg. 44, Nr. 247, S. 335–341, Sep. 1949, ISSN: 0162-1459, 1537-274X. DOI: [10.1080/01621459.1949.10483310](https://doi.org/10.1080/01621459.1949.10483310).



# Thesen

1. Elektrische Energie wird in zunehmendem Maße aus regenerativen Quellen in das Energienetz eingespeist. Im Gegensatz zur konventionellen Energieeinspeisung erfolgt der Netzanschluss dieser Einspeiser über leistungselektronische Umrichter.
2. Um elektrische Energie einzuspeisen muss der Umrichter eine Ausgangsspannung mit zur Netzspannung passender Amplitude, Frequenz und Phasenlage erzeugen. Ein Umrichter mit netzfolgender Einspeiseregelungen synchronisiert sich dazu auf ein bestehendes externes Netz, was durch die Messung der Netzspannung und den Einsatz einer Phasenregelschleife (PLL) erfolgt.
3. Unter dem Einfluss eines sogenannten schwachen Netzes entspricht die gemessene Spannung nicht der externen Netzspannung, sondern sie ergibt sich als Superposition der Netzspannung und der Umrichterspannung. Die Netzsynchronisation mittels PLL kann in dieser Situation fehlschlagen, wodurch der Verlust der Netzsynchronität auftritt und die Umrichterregelung als instabil angesehen werden muss.
4. Ein Netz ist umso schwächer, je größer die Netzimpedanz und die eingespeiste Leistung, und je niedriger die Impedanz des Ausgangsfilters vom Umrichter sowie die Netzhierarchieebene des Anschlusspunktes ist.
5. In Abhängigkeit der genannten Faktoren lässt sich für das System aus Umrichter, PLL und Energienetz im stationären Zustand eine Bedingung angeben, die ein ausreichend starkes Netz für die PLL-basierte Netzsynchronisation charakterisiert und eine notwendige Bedingung für die Netzsynchronisation darstellt.
6. Das Erfüllen der notwendigen Bedingung stellt die Existenz von Ruhelagen des Systems sicher, deren Stabilität sich anhand einer Linearisierung und Betrachtung der Eigenwerte der linearen Systemmatrix untersuchen lässt.
7. Um die Netzsynchronität bei einem transienten Übergang zu gewährleisten, ist das Erfüllen der notwendigen Bedingung und die Stabilität der Initial- und Zielruhelage nicht ausreichend. Zusätzlich darf der PLL-Phasenwinkel während des transienten Übergangs einen kritischen Wert nicht erreichen. Unter Einhaltung dieser transienten Bedingung schwingt sich das System auf die Zielruhelage ein und ist stabil im Sinne von Ljapunow.
8. Eine direkte Überprüfung der transienten Bedingung erfordert das analytische oder numerische Lösen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen, um den Maximalwert des PLL-Phasenwinkels für einen zu untersuchenden Übergang zu ermitteln.

- 
9. Durch geeignete Vereinfachungen und Annahmen lässt sich der Maximalwert des PLL-Phasenwinkels für eine gegebene Systemanregung konservativ abschätzen. Durch die Abschätzung ergibt sich eine hinreichende Bedingung für die Netzsynchronisation bei transienten Übergängen.
  10. Die hinreichende Bedingung lässt sich mit einer Optimierung unter Nebenbedingungen nachweisen.

## **Förderhinweis**

Die Promotion wurde im Rahmen des Forschungsprojektes „Netz-Stabil“ angefertigt und durch Mittel des Europäischen Sozialfonds (ESF) finanziert (ESF/14-BM-A55-0018/16). Die vorliegende Arbeit ist Bestandteil des Qualifikationsprogrammes „Förderung von Nachwuchswissenschaftlern in exzellenten Forschungsverbünden - Exzellenzforschungsprogramm des Landes Mecklenburg-Vorpommern“.



# **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig und unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt wurde. Es wurden keine anderen Quellen außer den angegebenen verwendet und inhaltlich und wörtlich entnommene Stellen sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in der gleichen oder ähnlichen Form in keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Rostock, 24. April 2023

Alexander Schöley

