Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 1

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT
ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 1

1976

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

Redaktion: Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-
Universität Rostock, 25 Rostock, Vogelsang 13/14
Fernruf 369 577

Verantwortlicher Redakteur: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage
Fachredakteur: Doz.Dr.rer.nat. Gerhard Maeß, Sektion Mathematik

Herausgegeben von der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock unter
Genehmigungs-Nr. C 544/76

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003785

Inhalt

		Seite
Berg, Lothar	Erweiterungen von Distributionenalgebren	5
Berg, Lothar	Distributionenalgebren mit der Eigenschaft $h\delta' = \delta' h$	15
Fenyö, István	Über die Wiener-Hopfsche Integralgleichung	21
Schott, Dieter	Kommutatorsätze und Lösungen von linearen homogenen Gleichungen	31
Dassow, Jürgen	Über quasideterministische Sprachen	51
Neßelmann, Dieter	Eine Bemerkung zur Theorie der superfiziellen Elemente	47
Kotzauer, Adolf	Graphische Programmsysteme	61
Drews, Klaus-Dieter	Eine auf dem Gaußschen Algorithmus beruhende Determinantendefinition	77
Sietmann, Günter	Zur Festigung mathematischen Wissens und Könnens im naturwissenschaftlichen Unterricht	94
Kölbl, Ingo	Begriffssysteme und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht	103

Lothar Berg

Erweiterungen von Distributionenalgebren

In /1/ wurden Differentiationsalgebren konstruiert, die ein Element h mit den Eigenschaften

$$h = h^2$$

und $h' \neq 0$ enthalten. Da das wichtigste Beispiel für ein Element h' dieser Art die Diracsche Delta-Distribution δ ist, heißen solche Algebren Distributionenalgebren (vgl. /2/), und die Schreibweise $h' = \delta$ wird auch im allgemeinen Fall benutzt. Nach /1/ und /2/ erzeugt ein Element t_+ mit den Eigenschaften

$$t_+ = t_+h = ht_+, \quad t_+' = h$$

eine Distributionenalgebra D mit der Basis

$$t_+^n, \quad \delta^{(n)}, \quad \delta^{(n)}h, \quad \delta^{(m)}\delta^{(n)} \tag{1}$$

und den Relationen

$$h\,\delta^{(n)} = \delta^{(n)} - \delta^{(n)}h - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \delta^{(i-1)} \delta^{(n-i)},$$

$$t_+\delta^{(n)} = -\,n\,\delta^{(n-1)} + n\,\delta^{(n-1)}h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n+1}{i} (i-1)\, \delta^{(i-2)} \delta^{(n-i)},$$

$$\delta^{(n)}t_+ = -\,n\,\delta^{(n-1)}h - \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \delta^{(n-i)} \delta^{(i-2)},$$

$$\delta^{(m)} \delta^{(k)} \delta^{(n)} = 0, \quad \delta^{(m)} t_+^k \delta^{(n)} = 0,$$

$$h\,\delta^{(m)} \delta^{(n)} = \delta^{(m)} \delta^{(n)}h = \delta^{(m)} \delta^{(n)},$$

$$t_+\delta^{(m)} \delta^{(n)} = -\,m\,\delta^{(m-1)} \delta^{(n)}, \quad \delta^{(m)} \delta^{(n)} t_+ = -\,n\,\delta^{(m)} \delta^{(n-1)}$$

für beliebige ganze Zahlen m, k, $n \geq 0$, wobei unter t_+^n für $n = 0$ stets $t_+^0 = h$ zu verstehen ist.

In /5/ wurde angedeutet, wie zu D ein Element t mit den Eigenschaften

$$t' = 1, \quad th = t_+$$

und den daraus sich ergebenden Folgerungen

$$tt_+^n = t_+^{n+1}, \quad t\,\delta^{(n)} = -\,n\,\delta^{(n-1)} \tag{2}$$

adjungiert werden kann, wobei 1 das Einselement bezeichnet. Im folgenden sollen hierfür sowie im zweiten Teil dieser Arbeit für die ebenfalls in /5/ angedeutete Adjunktion eines zu t rechtsinversen Elements r die dort fehlenden Beweise nachgeholt werden.

<u>Hilfssatz:</u> Es sei A eine Algebra und t ein linearer Operator von A in A mit

$$t(ab) = (ta)b \tag{3}$$

für alle $a, b \in A$. Dann gibt es stets eine A umfassende Algebra A_1, deren Elemente in der Form

$$x = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \tag{4}$$

mit $a_i \in A$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ geschrieben werden können, in der die Multiplikation mit t von links die gegebene Operatormultiplikation ist und in der $x = 0$ genau dann gilt, wenn alle $a_i = 0$ sind.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die Menge aller Folgen

$$(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

von Elementen a_i aus A, bei denen stets nur endlich viele vom Nullelement verschiedene Glieder auftreten mögen. Mit den üblichen linearen Verknüpfungen ist diese Menge ein Vektorraum. Die Multiplikation mit einer Folge (b_i) definieren wir durch

$$(a_i)\,(b_i) = \Big(\sum_j a_j t^j b_i\Big).$$

Diese Multiplikation ist offenbar distributiv. Da aus (3) durch vollständige Induktion

$$t^n(ab) = (t^n a)b$$

hervorgeht, erkennt man aber auch unmittelbar die Assoziativität. Führen wir jetzt für Folgen (a_i) mit $a_i = 0$ für $i > n$ die Schreibweise

$$(a_i) = a_o + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

ein und überlegen wir uns, daß sie zu keinen Verwechslungen führen kann, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkungen 1: Gibt es eine ganze Zahl $m \geqslant 0$ und Koeffizienten $c_o, \ldots, c_m \in A$ mit

$$(c_o + c_1 t + \ldots + c_m t^m)a = 0 \tag{5}$$

für alle $a \in A$, dann ist es möglich (aber keineswegs notwendig), von A_1 zum Faktorraum A_2 bezüglich des durch

$$c_o + c_1 t + \ldots + c_m t^m$$

erzeugten Ideals überzugehen. Beispielsweise ist (5) stets für $m = 1, c_1 = -1, c_o = t\ 1$ erfüllt, wenn A ein Einselement enthält. Es kann aber (5) sogar im Fall $m = 0$ für ein Element $c_o \neq 0$ erfüllt sein. In diesem Fall ist zu beachten, daß bei der erwähnten Faktorbildung auch der Koeffizientenbereich A verändert wird.

1. Die Adjunktion von t

Jetzt kehren wir zu der Distributionenalgebra D zurück. In /4/ wurde bereits gezeigt, daß der durch (2) definierte Operator t für alle a, b $\in$ D die Eigenschaft (3) besitzt. Folglich können wir zu der Algebra D_1 der Polynome (4) mit Koeffizienten aus D übergehen, in der die Relationen (2) gelten. Aus D_1 bilden wir durch Adjunktion des Einselements die Algebra D_2. Man sieht leicht, daß D_2 mit $t' = 1$ und $1' = 0$ eine Differentiationsalgebra ist.

Satz 1: Die Menge aller Elemente $x \in D_2$ mit der Eigenschaft

$$xa = 0 \tag{6}$$

für alle $a \in D$ bildet ein Ideal von D_2. Die zugehörige Faktoralgebra D_3 ist eine Distributionenalgebra mit den Relationen

$$\delta^{(n)} h t^k = \delta^{(n)} t_+^k, \tag{7}$$

$$\delta^{(m)} \delta^{(n)}\ t^k = \delta^{(m)} \delta^{(n)} t_+^k, \tag{8}$$

$$(h\,\delta^{(n)} - \delta^{(n)})t = -n\,(h\,\delta^{(n-1)} - \delta^{(n-1)}), \tag{9}$$

$$t_+\delta^{(n)}\,(t^k - t_+^k) = -n\,\delta^{(n-1)}\,(t^k - t_+^k), \tag{10}$$

und alle Elemente von D_3 lassen sich als Linearkombinationen der Elemente (1) sowie der Elemente

$$t^n,\ t_+^m t^n,\ \delta^{(m)} t^n \tag{11}$$

darstellen.

Beweis: Da die Gleichungen (6) mit der Vektorstruktur verträglich sind, bei der Multiplikation von links mit einem Element $y \in D_2$ erhalten bleiben und da D wegen (2) ein Linksideal von D_2 ist, sind die behaupteten Idealeigenschaften bewiesen. Wegen

$$(\delta^2 t - \delta^2 t_+)t_+^n = 0,\ (\delta^2 t - \delta^2 t_+)\,\delta^{(n)} = 0$$

für alle n besteht dieses Ideal nicht nur aus dem Nullelement. Wir gehen jetzt zur Faktoralgebra D_3 über. Aus (6) folgt durch Differentiation

$$x'a = 0,$$

so daß die Faktorbildung mit der Diffferentiation verträglich ist. Bei der Faktorbildung entstehen für die Elemente aus D keine neuen Relationen, da aus

$$(\sum(\alpha_i t_+^i + \beta_i\,\delta^{(i)} + \gamma_i\,\delta^{(i)}h + \varepsilon_{ij}\,\delta^{(i)}\delta^{(j)}))a = 0$$

für $a = h$ folgt, daß $\alpha_i = \varepsilon_{ij} = 0$, $\gamma_i = -\beta_i$ gilt, und für $a = \delta$, daß auch alle $\beta_i = 0$ sind. Dies bedeutet aber, daß D_3 das Element h aus D mit den Eigenschaften $h^2 = h$ und $h' \neq 0$ enthält und damit eine Distributionenalgebra ist.

Bei einer Multiplikation mit h von rechts und damit auch bei einer Multiplikation mit t_+^l für jedes $l \geqslant 0$ gehen die behaupteten Relationen in Identitäten aus D über. Dies folgt für (9) aus

$$(h\,\delta^{(n)} - \delta^{(n)})t_+ = -\delta^{(n)}t_+ + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n+1}{i}(n-i)\,\delta^{(i-1)}\,\delta^{(n-i-1)},$$

$$-\delta^{(n)}t_+ = n\,\delta^{(n-1)}h + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i-1}\,\delta^{(i-1)}\,\delta^{(n-i-1)},$$

$$\binom{n+1}{i}(n-i) + \binom{n}{i-1} = n\binom{n}{i}$$

sowie

$$-n\,(h\,\delta^{(n-1)} - \delta^{(n-1)}h) = n\,\delta^{(n-1)}h + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\delta^{(i-1)}\delta^{(n-i-1)}$$

und für die übrigen drei Relationen unmittelbar aus (2). Entsprechendes trifft auch auf die Multiplikation mit $\delta^{(1)}$ zu, so daß die Richtigkeit der vier Relationen verifiziert wurde. Mit Hilfe der Relationen (7) und (8) lassen sich aber alle Elemente (4) als Linearkombinationen der Elemente (1) und (11) darstellen. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

<u>Definitionen:</u> Eine Folge x_i von Elementen aus D_3 heißt eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $a \in D$ ein k gibt mit

$$(x_i - x_j)a = 0$$

für i, j $>$ k. Die Folge heißt konvergent gegen das Grenzelement $x \in D_3$, wenn es zu jedem $a \in D$ ein k gibt mit

$$(x_i - x)\,a = 0 \qquad (12)$$

für i $>$ k.

<u>Satz 2:</u> Die Konvergenz ist mit den Operationen in D_3 einschließlich der Differentiation verträglich, das Grenzelement einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt und in bezug auf diesen Konvergenzbegriff gilt

$$ht^n - t_+^n = n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(i+n+1)\,(i+1)!}\,\delta^{(i)}t^{i+n+1}. \qquad (13)$$

<u>Beweis:</u> Die Verträglichkeit des Konvergenzbegriffs mit den Vektoroperationen in D_3 ist klar. Die Verträglichkeit mit der Multiplikation folgt aus

$$x_iy_i - xy = x_i\,(y_i - y) + (x_i - x)y$$

nach Multiplikation mit $a \in D$ unter Beachtung der Tatsache, daß D ein Linksideal von D_3 ist. Eine von i unabhängige Folge $x_i = x$ konvergiert offenbar gegen x. Aus (12) ergibt sich durch Differentiation

$$(x_i' - x')a = 0$$

für hinreichend große i, so daß mit x_i gegen x auch x_i' gegen x' konvergiert. Die Eindeutigkeit des Grenzelements geht aus der Gleichheitsdefinition in D_3 hervor (vgl. (6)). Aus

$$(ht^n - t_+^n)\,\delta^{(m)} = (-1)^{n+1} n \sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{m!}{(i+n+1)\,(m-i-n-1)!\,(i+1)!} \times \delta^{(i)}\,\delta^{(m-i-n-1)}$$

(vgl. /1/) und

$$t^{i+n+1}\,\delta^{(m)} = (-1)^{i+n+1} \frac{m!}{(m-i-n-1)!}\,\delta^{(m-i-n-1)}$$

sowie $(ht^n - t_+^n)t_+^m = 0$ und $\delta^{(i)} t^{i+n+1} t_+^m = 0$ folgt unmittelbar die Richtigkeit von (13).

<u>Folgerung:</u> Durch vollständige Induktion ergibt sich aus (9), (10) bzw. (13)

$$(h\,\delta^{(n)} - \delta^{(n)})t^m = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}\,(h\,\delta^{(n-m)} - \delta^{(n-m)}),$$

$$t_+^m\,\delta^{(n)}\,(t^k - t_+^k) = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}\,\delta^{(n-m)}\,(t^k - t_+^k),$$

$$t_+^m t^n - t_+^{m+n} = n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+m+n+1)(i+m+1)i!}\,\delta^{(i)} t^{i+m+n+1}.$$

<u>Bemerkungen 2:</u> Wegen der letzten Gleichung kann man in (11) auf die Elemente $t_+^m t^n$ verzichten, wenn man bei der Darstellung der Elemente von D_3 unendliche Reihen zuläßt.

Durch die Vervollständigung von D_3 mit Hilfe der Cauchy-Folgen kann man zu einer weiteren Distributionenalgebra D_4 übergehen. Die Nichtvertauschbarkeit von t und h ist zunächst überraschend und scheint die ursprünglich beabsichtigten Anwendungen auszuschließen. Die Gleichung (13) zeigt jedoch, daß diese Nichtvertauschbarkeit nur im Rahmen der Rechnungen innerhalb der Distributionenalgebra von Bedeutung ist, da in der sonst üblichen Distributionentheorie die Glieder auf der rechten Seite von (13) verschwinden.

Nachdem t und h sich als nichtvertauschbar herausgestellt haben, erscheint auch die frühere Forderung der Vertrauschbarkeit von t_+ und h nicht mehr als gerechtfertigt. Distributionenalgebren, in denen diese Vertauschbarkeit ebenfalls aufgegeben wurde, findet man in /3/.

2. Adjunktion eines zu t rechtsinversen Elements

Zur Behandlung des zweiten in der Einleitung angeführten Problems aus /5/ gehen wir von der in /3/ betrachteten freien Algebra A aus, die von abzählbar vielen Elementen $\delta^{(n)}$, n = 0,1, 2, ... erzeugt wird. Bei der Interpretation der oberen Indizes als Ableitungsordnungen ist A eine Differentiationsalgebra. In A betrachten wir einen linearen Operator r, der durch

$$r\ \delta^{(n)} = -\frac{1}{n+1}\ \delta^{(n+1)} \tag{14}$$

für alle $n \geqslant 0$ und r (ab) = (ra)b für alle a, b $\in$ A eindeutig erklärt ist. Nach unserem Hilfssatz existiert eine Algebra A_1, deren Elemente die Form

$$a_o + a_1 r + \ldots + a_n r^n$$

mit $a_i \in A$ für i = 0, 1, ..., n besitzen. Aus A_1 bilden wir durch Adjunktion von r die Algebra A_2.

In A_2 betrachten wir den linearen Operator t mit den Eigenschaften

$$tr^{n+1} = r^n,\ t\ \delta^{(n)} = -n\ \delta^{(n-1)} \tag{15}$$

mit $n \geqslant 0$ und (3) für alle a, b $\in A_2$. Dieser Operator existiert, da die Definitionen (15) und (3) mit den Relationen (14) verträglich sind. Somit können wir abermals unseren Hilfssatz heranziehen und nach Adjunktion des Einselements 1 zu einer Algebra A_3 mit den Elementen

$$\sum_{i=o}^{m}\ \sum_{j=o}^{n}\ a_{ij} r^i t^j$$

übergehen, wobei die a_{ij} Polynome in den $\delta^{(k)}$ sind. Man überzeugt sich leicht davon, daß A_3 mit den Festlegungen

$$r' = -r^2,\ t' = 1,\ 1' = 0 \tag{16}$$

eine Differentiationsalgebra ist.

<u>Satz 3:</u> Die Differentiationsalgebra A_3 ist eine Distributionenalgebra mit dem idempotenten Element

$$q = 1 - rt, \tag{17}$$

für das

$$\left.\begin{aligned} &q^{(n)} = (-1)^n n! r^n q,\ q^{(n)} q = q^{(n)};\ q^{(n)} \delta = \delta^{(n)}, \\ &q^{(n)} q^{(m)} = q^{(n)} \delta^{(m)} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

mit $n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ gilt. Die Elemente von A_3 lassen sich auch in der Form

$$\sum_{i=1}^{m} a_i t^i + \sum_{i=0}^{n} b_i r^i + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} c_{ij} r^i q t^j$$

mit Polynomen a_i, b_i, c_{ij} in den $\delta^{(k)}$ darstellen.

<u>Beweis:</u> Die erste der Gleichungen (18) ergibt sich wegen (16) durch vollständige Induktion aus (17). Aus (14) und (15) folgt

$$q\,\delta = \delta,\ q\,\delta^{(m)} = 0$$

für $m \geqslant 1$, und wegen $tr = 1$ erhalten wir aus (17)

$$qr = tr = 0,\ q^2 = q.$$

Damit ist q idempotent, und wir erkennen die Gültigkeit der übrigen Gleichungen von (18). Aus der wohlbekannten Taylorschen Formel

$$r^i t^i = 1 - q - rqt - \dots - r^{i-1} q t^{i-1}$$

folgt

$$r^i t^j = \begin{cases} r^{i-j} - r^{i-j} q - r^{i-j+1} q t - \dots - r^{i-1} q t^{j-1} & \text{für } i \geqslant j, \\ t^{j-i} - q t^{j-i} - r q t^{j-i+1} - \dots - r^{i-1} q t^{j-1} & \text{für } i \leqslant j \end{cases}$$

und damit auch die Richtigkeit der letzten Behauptung.

<u>Bemerkungen 3:</u> Der nächste Schritt wäre jetzt, zu A_3 ein Element h mit $h^2 = h$ und $h' = \delta$ zu adjungieren. Da hierbei aber zu viele neue Elemente entstehen, scheint eine solche Erweiterung nur dann sinnvoll zu sein, wenn man gleichzeitig eine

zusätzliche Relation einführt, durch die die Anzahl der neuen Elemente wesentlich reduziert wird.

Literatur

/1/ Berg, L. Multiplication of distributions, Math. Nachr. (im Druck)

/2/ Berg, L. Representations for distribution algebras, ZAMM <u>56</u> (im Druck)

/3/ Berg, L. Construction of distribution algebras, Math. Nachr. (im Druck)

/4/ Berg, L. Noncommutative operations with distributions, Proceedings of the conference "Generalized functions and operational calculus" in Varna, September 29 - October 6, 1975 (im Druck)

/5/ Berg, L. Produkte der Diracschen Delta-Distributionen und ihrer Ableitungen, Nova Acta Leopoldina <u>44</u>, Supplementum Nr. 8, 69 - 77 (1976).

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr.rer.nat. habil. Lothar Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Lothar Berg

Distributionenalgebren mit der Eigenschaft $h\,\delta' = \delta' h$

Eine Distributionenalgebra ist nach /3/ eine Differentiationsalgebra mit mindestens einem Element h, für das

$$h^2 = h \tag{1}$$

und $h' \neq 0$ gilt. Das interessanteste Beispiel für ein solches Element h ist die Heavidesche Sprungfunktion $h = h(t)$. Mit der Bezeichnung $\delta = h'$ und den üblichen Bezeichnungen für höhere Ableitungen wurde in /2/ gezeigt, daß in jeder Distributionenalgebra für beliebige ganze Zahlen $n \geq 0$ die Relationen

$$\delta^{(n)} = h\,\delta^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \delta^{(i-1)}\,\delta^{(n-i)} + \delta^{(n)} h, \tag{2}$$

$$\delta^{2n+1} = h\,\delta^{2n+1} + \delta^{2n+1} h, \tag{3}$$

$$h\,\delta^{2n} = \delta^{2n} h, \tag{4}$$

$$h\,\delta^{2n+1} h = 0 \tag{5}$$

gelten und daß das Element

$$\sigma = h\,\delta - \delta h \tag{6}$$

nicht das Nullelement ist. Letzteres folgt auch aus der leicht nachprüfbaren Beziehung

$$\sigma^2 = -\delta^2. \tag{7}$$

Weiterhin folgt aus (1), (5) und (6)

$$h\,\sigma = h\,\delta, \quad \sigma h = -\delta h \tag{8}$$

und daher aus (3) für $n = 0$

$$\delta = h\,\sigma - \sigma h. \tag{9}$$

Die Existenz von Distributionenalgebren wurde in /2/ und /3/ nur unter zusätzlichen Annahmen bewiesen, die das Verschwinden zahlreicher Produkte zur Folge haben und daher in der vorliegenden Arbeit nicht gestellt werden sollen. Statt dessen fragen wir jetzt nach der Existenz von Distributionenalgebren D mit der Vertauschungsrelation

$$h\,\delta' = \delta' h, \tag{10}$$

wobei wir mit der Analyse einer solchen Algebra beginnen und anschließend ihre Synthese durchführen. Als Koeffizientenbereich von D wählen wir hier stets einen Zahlenkörper K. Unter den Voraussetzungen (10) folgt aus (6) durch Differentiation

$$\sigma' = 0, \tag{11}$$

so daß die Differentiation in D wegen (9) als algebraische Differentiation bezüglich $-\sigma$ aufgefaßt werden kann (vgl. /1/).

<u>Hilfssatz:</u> In D gelten die Relationen

$$\delta' = -2\sigma\delta, \quad \delta'' = 4\sigma^2\delta, \tag{12}$$

$$\delta\delta' = -\delta'\delta = -2\sigma^3 \quad . \tag{13}$$

und die Differentialgleichungen

$$\delta'^2 = 4\delta^4, \quad \delta'' = -4\delta^3. \tag{14}$$

<u>Beweis:</u> Subtrahieren wir (6) von (9), so folgt wegen (8)

$$\delta - \sigma = -2\sigma h$$

und hieraus durch Differentiation (12). Aus (7) erhalten wir durch Differentiation $\delta\delta' + \delta'\delta = 0$ und somit aus (12) die Teilbehauptung (13). Entsprechend folgt (14) aus (12) und (13).

<u>Satz 1:</u> Alle Elemente von D lassen sich als Linearkombinationen der Elemente

$$\sigma^m, \quad \sigma^n h \tag{15}$$

mit beliebigen ganzen Zahlen $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ darstellen. Insbesondere gilt

$$h\sigma = \sigma - \sigma h, \tag{16}$$

$$\delta = \sigma - 2\sigma h \tag{17}$$

sowie

$$\delta^{(n)} = (-1)^n 2^n \sigma^n \delta, \tag{18}$$

$$\delta^{(n)}\delta^{(m)} = (-1)^{n+1} 2^{n+m} \sigma^{n+m+2}, \tag{19}$$

$$\delta^{(n)}\delta^{(m)}\delta^{(k)} = (-1)^{n+k+1} 2^{n+m+k} \sigma^{n+m+k+2}\,\delta \tag{20}$$

für beliebige ganze Zahlen $n, m, k \geqslant 0$.

Beweis: Aus (6) und (8) folgt (16), und aus (8) und (16) folgt (17). Aus (12) ergibt sich durch vollständige Induktion (18) und aus (18) durch Multiplikation mit δ von rechts (19) mit $m = 0$. Nehmen wir an, daß (19) für alle n und ein festes m richtig ist, so folgt durch Differentiation

$$\delta^{(n)}\,\delta^{(m+1)} = -\,\delta^{(n+1)}\,\delta^{(m)}$$

und hieraus durch vollständige Induktion (19) für alle m, n. Durch Multiplikation von (19) mit (18) von rechts folgt (20). Somit bleibt nur noch die Darstellbarkeit aller Elemente von D durch die Elemente (15) zu zeigen. Setzen wir (17) in (18) und (20) ein, so sehen wir, daß alle $\delta^{(n)}$ und auch alle Produkte dieser Ableitungen die behauptete Form haben. Da die Menge aller Elemente (15) wegen (16) eine Algebra erzeugt, ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1: Aus (16) und (17) erhalten wir durch vollständige Induktion

$$h\,\sigma^{2n} = \sigma^{2n}h,\quad h\,\sigma^{2n+1} = \sigma^{2n+1}(1-h), \tag{21}$$

$$\delta\,\sigma^{n} = (-1)^{n}\,\sigma^{n+1}(1-2h), \tag{22}$$

aus (18) und (20) folgt (vgl. auch (13), (14))

$$\delta^{(n)}\,\delta^{(m)} = (-1)^{n+m}\,\delta^{(m)}\,\delta^{(n)},$$

$$\delta^{(n)}\,\delta^{(m)}\,\delta^{(k)} = \tfrac{1}{4}(-1)^{m+1}\,\delta^{(n+m+k+2)},$$

und aus (18) und (21) ergibt sich wegen (3) mit $n = 0$ (vgl. (10))

$$h\,\delta^{(2n+1)} = \delta^{(2n+1)}h,\quad h\,\delta^{(2n)} = \delta^{(2n)}(1-h). \tag{23}$$

Satz 2: Es existiert eine Distributionenalgebra D mit (10), bei der die Elemente (15) eine Basis bilden.

Beweis: Wie in /3/ führen wir die Synthese von D mit Hilfe von Matrixdarstellungen durch. Dabei fassen wir jedes Element $a \in D$ als Matrix $a = (a_{ij})$ auf, deren Elemente aus K zu entnehmen sind und deren Indices von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen. Wir wählen

$$h_{2i+1,\,2i+1} = 1,\quad \sigma_{i,\,i+1} = 1$$

für alle ganzzahligen i und $h_{ij} = \sigma_{ij} = 0$ sonst (die Matrix trat bereits in /4/ auf) und die Ableitung in D als algebraische Ableitung

$$a' = a\sigma - \sigma a.$$

Dann ist h idempotent, und die nicht verschwindenden Elemente der Matrizen σ^m; $\sigma^n h$ lauten

$$\sigma^m_{i,\ i+m} = 1,\ (\sigma^n h)_{2i+1,\ 2i+n+1} = 1,$$

so daß die Elemente (15) linear unabhängig sind. Für die nicht verschwindenden Elemente der durch (9) definierten Matrix finden wir

$$\delta_{i,\ i+1} = (-1)^{i+1},$$

so daß (6) folgt und wegen $\sigma' = 0$ auch (10).

<u>Folgerung 2:</u> Wählen wir in D als Norm

$$\|a\| = \operatorname*{Max}_i \sum_j |a_{ij}| = \operatorname*{Max}_j \sum_i |a_{ij}|$$

(die Gleichheit folgt aus der speziellen Struktur der Matrizen), so läßt sich D zu einer Banachalgebra D^* vervollständigen. Insbesondere gilt

$$\|h\| = \|\delta\| = \|\sigma^m\| = \|\sigma^n h\| = 1,$$

$$\|\delta^{(n)}\| = 2^n,\ \|\delta^{(n)}\delta^{(m)}\| = 2^{n+m},$$

$$\|\delta^{(n)}\delta^{(m)}\delta^{(k)}\| = 2^{n+m+k},$$

da die von Null verschiedenen Elemente der Matrizen $\delta^{(n)}$ nach (18)

$$\delta^{(n)}_{i,\ i+n+1} = (-1)^{i+1}2^n \tag{24}$$

lauten und die Elemente der übrigen Matrizen eine analoge Bauart besitzen. Die Differentiation ist ein beschränkter Operator mit $\|a'\| \leq 2\ \|a\|$ (vgl. /3/).

<u>Folgerung 3:</u> In der Banachalgebra D^* konvergiert jede Reihe der Form

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\delta^{(n)}$$

mit $a_n \in K$, falls die Zahlenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$$

absolut konvergent ist. Sind

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \delta^{(2n+1)}, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \delta^{(2n)}$$

konvergente Reihen, so haben sie wegen (23) die Eigenschaften

$$hu = uh, \quad hv = v\,(1 - h). \tag{25}$$

Bemerkung 1: Ein Beispiel für eine in D^* konvergente Reihe lautet

$$h_x = h + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{(n)} \tag{26}$$

für beliebige $x \in K$. Es ist unmittelbar zu sehen, daß h_x ein idempotentes Element ist, da

$$h^2_x = h + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(\delta^{(n)} h + h \delta^{(n)} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n+m+2}}{(n+1)!(m+1)!} \delta^{(n)} \delta^{(m)}$$

wegen (2) wieder gleich der rechten Seite von (26) ist. Bei diesem Beweis ist bemerkenswert, daß wir von der Zusatzvoraussetzung (10) keinen Gebrauch gemacht haben.

Leider ist es in D^* nicht möglich, (26) im Fall $h = h\,(t)$ als Taylorentwicklung aufzufassen und die Identifizierung $h_x = h\,(t+x)$ vorzunehmen. Bilden wir nämlich aus h_x die Elemente

$$u = h_x + h_{-x} - 2h, \quad v = h_x - h_{-x},$$

so ist zwar die erste der Gleichungen (25) mit dieser Interpretation von u verträglich, die zweite dieser Gleichungen widerspricht aber den bekannten Eigenschaften von v als Funktion von t.

Bemerkung 2: Will man zu D ein Element t mit der Eigenschaft

$$t\,\delta = 0$$

adjungieren, so stellt man wegen

$$t\,\sigma = t\,(\delta - 2\,\delta h) = 0$$

fest, daß dies nur in dem trivialen Fall $ta = 0$ für alle Basis-

elemente (15) von D mit Ausnahme von $a = h$ möglich ist.
Es sei noch darauf hingewiesen, daß ein Element t mit $t^n \neq 0$ für alle $n \geq 0$ und $t' = 1$ grundsätzlich kein Element einer Banachalgebra mit beschränkter Differentiation sein kann, denn gilt $\|a'\| \leq M \|a\|$ für alle Elemente a der Algebra, so folgt für beliebige $n \geq 0$

$$n \|t^{n-1}\| = \|(t^n)'\| \leq M \|t^n\| \leq M \|t\| \|t^{n-1}\|,$$

was aber unmöglich ist.

Literatur:

/1/ Berg, L. Operatorenrechnung I. Algebraische Methoden, Berlin 1972

/2/ Berg, L. Multiplication of distributions, Math. Nachr. (im Druck)

/3/ Berg, L. Representations for distribution algebras, ZAMM 56 (im Druck)

/4/ Berg, L. Noncommutative operations with distributions, Proceedings of the conference "Generalized functions and operational calculus" in Varna, September 29 - October 6, 1975 (im Druck).

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.rer.nat. habil. Lothar Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

István Fenyö

Über die Wiener-Hopfsche Integralgleichung

Es wird die Integralgleichung zweiter Art von der Gestalt

$$g(x) - \int_0^\infty K(x - t)\, g(t)\, dt = f(x) \quad (x \in R_+) \qquad (1)$$

untersucht, wobei K und f gegebene Funktionen sind, die später näher spezifiziert werden, g(x) ist die unbekannte Funktion.
Es sei

$$S_r = \left\{ z;\ z \in L^2(R),\ \|z\| = \int_0^\infty (1 + t^2)^r \,|\hat{z}(t)|^2\, dt < \infty \right\},$$

wobei $\hat{z}$ die Fourier-Transformierte von z ist. Ist $r \geqq 0$, so ist S_r ein linearer, normierter Funktionenraum. Wir können S_r auch für negative r deuten wie oben, S_r besteht aus Distributionen, deren Fouriertransformierte Funktionen sind, für welche die obige Norm endlich ist.
Wir werden die Distributionen in die Klasse der Funktionen einbetten und immer über Funktionen sprechen, unter welchen wir gelegentlich auch Distributionen verstehen werden.
Den Träger einer Funktion (Distribution) z werden wir mit supp z bezeichnen. Es sei ferner

$$S_r^+ = \left\{ z;\ z \in S_r,\ \mathrm{supp}\, z \subset R_+ \right\};\ S_r^- = \left\{ z;\ z \in S_r,\ \mathrm{supp}\, z \subset R_- \right\}.$$

Den Index einer stetigen Abbildung $Z: R \to C$, welche folgende Eigenschaften hat

a) $Z(t) \neq 0,\ t \in R$; b) $Z(-\infty) = Z(+\infty) \neq 0$ und $\neq \infty$,

werden wir wie folgt definieren (/1/, /2/, /3/)

$$k := \mathrm{ind}\, Z = \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{dt}{t},$$

wobei H diejenige Kurve in der komplexen Zahlenebene ist, die durch den Punkt Z(t) beschrieben wird, wenn t R durchläuft.
Es gilt folgender
<u>Satz:</u> Es sei in (1) $K(t) \in L^1(R)$, und wir setzen voraus, daß

$\hat{K}(t) \neq 1$ $(t \in R)$ gilt, wobei $\hat{K}$ die Fourier-Transformierte von K ist. Es sei ferner $k = \operatorname{ind}(1 - \hat{K})$ und r irgendeine gegebene reelle Zahl, der eine ganze Zahl n zugeordnet werden kann derart, daß $|r - n| < 1/2$ gilt. Behauptungen:

1^o. Ist $k = n$, dann gibt es zu jedem f aus S_r genau ein Element g aus S_r für welches

$$\operatorname{supp} g \subset R_+ \quad , \operatorname{supp} (g - K * g - f) \subset R_- \tag{2}$$

gilt, wobei $K * g$ die Faltung von K und g ist:

$$(K * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t)\, g(t)\, dt.$$

2^o. Ist $k > n$, dann gilt

a) zu jedem f aus S_r gibt es unendlich viele g aus S_r, für welche (2) befriedigt ist,

b) das entsprechende homogene Problem

$$\operatorname{supp} g \subset R_+ ; \quad \operatorname{supp} (g - K * g) \subset R_- \tag{3}$$

hat genau $k - n$ linear unabhängige Lösungen in S_r.

3^o. Ist $k < n$, dann hat

a) das adjungierte homogene Problem

$$\operatorname{supp} g \subset R_+ \quad ; \operatorname{supp} (g - \bar{L} * g) \subset R_- \tag{4}$$

mit $L(t) = K(-t)$ genau $n - k$ linear unabhängige Lösungen aus S_{-r};

b) die Aufgabe (2) genau eine Lösung aus S_r, vorausgesetzt, daß $f \in S_r$ orthogonal zu jeder Lösung von (4) ist;

c) die Aufgabe (3) die einzige Lösung $g = 0$ aus dem Raum S_r.

<u>Beweis:</u> Dieser beruht auf dem Prinzip der Faktorenzerlegung. Es sei $\hat{K}$ die Fourier-Transformierte von K (diese existiert auf Grund der über K gemachten Voraussetzungen), dann ist $1 - \hat{K}(t) \neq 0$ $(t \in R)$, und wir setzen

$$1 - \hat{K}(t) = K_+(t)\, K_-(t) \quad (t \in R) \tag{5}$$

wobei K_+ analytisch in die Halbebene Im $t > 0$ derart fortsetzbar ist, daß diese in Im $t \geqq 0$ stetig ist und K_- in Im $t < 0$ eine holomorphe Fortsetzung hat, welche in Im $t \leqq 0$ stetig ist. Ein Funktionenpaar (K_+, K_-) mit den obigen Eigenschaften wird eine Faktorenzerlegung (falls eine solche existiert) von $1 - \hat{K}$ genannt. Krein /4/ hat bewiesen, daß unter unseren Voraussetzungen eine Faktorenzerlegung von $1 - \hat{K}$ vorhanden ist, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} &0 < C_1 < (1 + t^2)^{k/2} K_+(t) < C_2 \quad \text{für Im } t \geqq 0, \\ &0 < C_1' < (1 + t^2)^{-k/2} K_-(t) < C_2' \quad \text{für Im } t \leqq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei C_1, C_2, C_1', C_2' positive Konstanten sind, k ist der Index von $1 - K$.

Es sei nun r eine, im voraus gegebene, beliebige reelle Zahl, welcher eine ganze Zahl n zugeordnet werden kann mit $|r - n| < 1/2$. Es sei $f \in S_r$, und man setze

$$\hat{p}(t) = - \hat{f}(t)/K_+(t) \qquad (t \in R), \tag{7}$$

d.h.

$$p(x) = - \mathcal{F}^{-1}\left\{ f(t)/K_+(t) \right\} (x). \tag{7'}$$

Die Funktion p existiert, denn nach (6) gilt

$$\frac{\hat{f}(t)}{|K_+(t)|^2} \leqq C_1 (1 + t^2)^{-k} |\hat{f}(t)|^2 \qquad (t \in R).$$

Wir wissen, daß $f \in L^2(R)$ ist, demzufolge ist für $k \geqq 0$ auch $\hat{f}(t)/K_+(t) \in L^2(R)$, es existiert also seine inverse Fourier-Transformierte. Ist aber $k < o$, so gilt $-k < m - r + 1/2$, wobei m eine nichtnegative Zahl bedeutet, demzufolge ist

$$(1 + t^2)^{-k} |\hat{f}(t)|^2 = (1 + t^2)^{-r} |\hat{f}(t)|^2 \qquad (t \in R).$$

Da $f \in S_r$ ist, ist die rechte Seite der eben betrachteten Ungleichung integrierbar für $r < 0$, womit die Existenz von p(t) nachgewiesen ist. Ist aber $r > 0$, so haben wir

$$(1+t^2)^{-k}\,|\hat{f}(t)|^2 \leqq (1+t^2)^{-r}\,|\hat{f}(t)|^2 \leqq |\hat{f}(t)|^2,$$

womit die Existenz von $p(t)$ auch für diesen Fall nachgewiesen ist.

Wir werden jetzt zeigen $p \in S_{r-k}$. Für eine geeignete nicht-negative ganze Zahl m gilt nämlich: $r - k < m + 1/2$. Aus (7) folgt

$$\begin{aligned}(1+t^2)^{r-k}\,|\hat{p}(t)|^2 &= (1+t^2)^{r-k}\,|f(t)|^2/\,|K_+(t)|^2 \leqq \\ &\leqq c_1\,(1+t^2)^{r-k}\,(1-t^2)^{-k}\,|\hat{f}(t)|^2 \leqq \\ \leqq c_1\,(1+t^2)^{(m+1)/2}\,(1+t^2)^{-k}\,|\hat{f}(t)|^2 &\leqq c_1(1+t^2)^{-k}\,|\hat{f}(t)|^2.\end{aligned}$$

Das eben erhaltene letzte Glied ist integrierbar über R, wie wir oben gezeigt haben. Daraus folgt $p \in S_{r-k}$, wie behauptet wurde.

Wir werden jetzt die unter (7) definierte Funktion p in folgender Weise zerlegen:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) \qquad (t \in R),$$

wobei

$$p_1 \in S^+_{r-k} \quad \text{und } p_2 \in S^-_{r-k}$$

ist. Wir werden jetzt zeigen: Wenn die Aufgabe (2) eine Lösung g aus S_r hat, dann gilt

$$\hat{g}(t) = -\,p_1(t)/K_-(t). \tag{8}$$

Auch die Umkehrung ist richtig: Ist p ein Element des Raumes $S^+_{r-k} \oplus S^-_{r-k}$, dann hat das Problem (2) eine Lösung, diese ist durch (8) definiert, wobei p_1 die Projektion von p auf den Raum S^+_{r-k} ist, und g gehört zu S_r.

Wir nehmen also an, daß das Problem (2) eine Lösung aus dem Raum S_r besitzt. Diese soll mit $g(x)$ bezeichnet werden. Es sei

$$h(x) := g(x) - (K * g)(x) - f(x), \tag{9}$$

wobei $\operatorname{supp} h \subset R_-$ und $h \in S_r$ ist. Diese letzte Behauptung sieht man wie folgt ein: Da $K \in L^1(R)$ ist, folgt aus dem Faltungssatz

$$|\widehat{K * g}| = |\hat{K}|\,|\hat{g}| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} K(x)\, dx\right| |\hat{g}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)|\, dx.$$

$$\cdot |\hat{g}(x)| = C\, |\hat{g}(x)|\ ,$$

wobei $C = \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)|\ dx$ ist. Daraus ergibt sich

$$(1 + t^2)^r\ |(K * g)\ (t)|^2 \leq C^2\ (1 + t^2)^r\ |\hat{g}\ (t)|^2\ .$$

Laut Voraussetzung ist $g \in S_r$, deshalb ist die rechte Seite in dieser Ungleichung integrierbar, also ist $K * g \in S_r$. Wegen der Linearität des Raumes S_r gilt nach (9): $h \in S_r$.
Wir bilden jetzt die Fourier-Transformierte beider Seiten von (9) und ziehen die Produktzerlegung (5) heran:

$$(1 - \hat{K})\ \hat{g} - \hat{h} = K_+ K_-\ \ \hat{g} - \hat{h} = \hat{f},$$

woraus

$$K_-\ \hat{g} - \hat{h}/K_+ = \hat{f}/K_- = -\ \hat{p}$$

folgt, wenn wir die Beziehung (7) beachten.

Es sei

$$\hat{p}_1 = -\ K_-\ \hat{g}\quad \text{und}\quad \hat{p}_2 = \hat{h}/K_+\ .$$

Es wird nachgewiesen, daß $p_1,\ p_2 \in S_{r-k}$ gilt. Nach (6) gilt nämlich

$$(1 + t^2)^{r-k}\,|p_1(t)|^2 = (1+t^2)^r(1+t^2)^{-k}|K_-(t)|^2\ |\hat{g}(t)|^2$$
$$\leq C_2'\ (1+t^2)^r\ |\hat{g}(t)|^2.$$

Da g aus S_r ist, ist die rechte Seite dieser Ungleichung über R integrierbar, woraus $p_1 \in S_{r-k}$ folgt.
Analog ergibt sich

$$(1+t^2)^{r-k}\,|\hat{p}_2(t)|^2 = (1+t^2)^r\ (1+t^2)^{-k}|h(t)|^2/\ |K_+(t)|^2$$
$$\leq C_1^2\ (1 + t^2)^r\,|\hat{h}\ (t)|^2,$$

woraus $p_2 \in S_{r-k}$ folgt. Andererseits aber ist $\operatorname{supp} p_1 \subset R_+$ und

$\mathrm{supp}\, p_2 \subset R_-$, weil

$$p_1(x) = - \mathcal{F}^{-1}\left\{K_-\right\}(x)\, g\,(x)$$

und $g(x) = 0$ für $x \in R_-$ ist. Analog ist

$$p_2\,(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{1/K_+\right\}(x)\, h\,(x)$$

und $\mathrm{supp}\, h(x) \in R_-$, woraus die Behauptung folgt. Im Endergebnis:

$$p_1 \in S^+_{r-k} \qquad \text{und} \quad p_2 \in S^-_{r-k}.$$

Wenn also die Aufgabe (2) eine Lösung aus S_r hat, dann ist p aus S_{r-k} und $p = p_1 + p_2$ mit $p_1 \in S^+_{r-k}$, $p_2 \in S^-_{r-k}$.

Dieser Gedankengang ist auch umkehrbar. Es sei $p = p_1 + p_2$ mit $p_1 \in S^+_{r-k}$ und $p_2 \in S^-_{r-k}$ und setzt man

$$\hat{g}(t) = - \hat{p}_1(t)/K_-(t),\ \hat{h}(t) = \hat{p}_2(t)\, K_+(t),$$

dann ist g unter Berücksichtigung von (9) eine Lösung von (2).

Wir werden jetzt den im Satz formulierten Fall 1° betrachten. In diesem Fall ist $n = k$, d.h. $|r - k| < 1/2$. Man weiß aber /5/, daß in diesem Fall $S_{r-k} = S^+_{r-k} \oplus S^-_{r-k}$ ist, und da p aus S_{r-k} ist, kann p eindeutig als Summe einer Funktion aus S^+_{r-k} und einer aus S^-_{r-k} dargestellt werden. Mit anderen Worten, die Aufgabe (2) hat tatsächlich genau eine Lösung, wie das behauptet wurde.

Es sei jetzt der Fall $k > n$ betrachtet. Dann ist $k - n = m \geq 1$ und $|r - n| < 1/2$, also $|r - k + m| < 1/2$, d.h. $- 1/2 - m < r - k < 1/2 - m$, woraus $r - k < -1/2$ folgt.

Wollen wir das homogene Problem (3) lösen, so müssen wir in (9) $f = 0$ setzen. In diesem Fall ist laut (7) auch $p = 0$. Wenn wir die Zerlegung $p = 0 = p_1 + p_2$ mit $p_1 \in S^+_{r-k}$, $p_2 \in S^-_{r-k}$ durchführen, so sieht man, daß $p_1 = - p_2$ ein gemeinsames Element von S^+_{r-k} und S^-_{r-k} ist. Da aber $r - k < - 1/2$ ist, ist wieder nach einem bekannten Satz /5/ p_1 von der Gestalt

$$p_1 = a_o \delta + a_1 \delta' + \dots + a_{r-k} \delta^{(r-k)} = P_{r-k} (\delta),$$

wobei δ die Dirac-Distribution ist und P_{r-k} ein Polynom höchstens (r-k). Grades mit beliebigen Koeffizienten. Dann ist die Fourier-Transformierte der Lösung nach (8)

$$\hat{g}(t) = P_{r-k} (it)/K\_(t) \qquad (t \in R). \qquad (10)$$

Was das Problem 2^o a) anbelangt, dort ist f identisch 0. Wir betrachten die unter (7) bzw. (7') definierte Funktion p. Ist $p \in S_q$, dann behaupten wir, daß $(\delta + \delta')^k * p \in S_{q-k}$ gilt. Wir können nämlich folgendes schreiben

$$\widehat{(\delta + \delta')^k * p} = (1 + it)^k \ \hat{p}(t) = (1+t^2)^{k/2} \ e^{k \text{ arctg } t} \hat{p} (t),$$

woraus

$$(1+t^2)^{q-k} \left| \widehat{(\delta + \delta')^k * p} \right|^2 = c \ (1+t^2)^{q-k}(1+t^2)^k \ |\hat{p}(t)|^2$$

$$= c \ (1+t^2)^q \ |\hat{p}(t)|^2 .$$

folgt. Diese Ungleichung beweist, daß $(\delta + \delta')^k *' p \in S_{q-k}$ gilt. Analog ergibt sich $(\delta + \delta')^{-k} * p \in S_{q+k}$. In unserem Fall ist $p \in S_{r-k}$ (das sichert die Lösbarkeit), also ist $(\delta + \delta')^{-m} * g \in S_{r-k+m}$. Andererseits aber ist $|r-k+m| < 1/2$, und deswegen /5/ gilt

$$S_{r-k+m} = S^+_{r-k+m} \oplus S^-_{r-k+m} ,$$

d.h.

$$u := (\delta + \delta')^{-m} * p = u_1 + u_2, \text{ mit } u_1 \in S^+_{r-k+m}, \ u_2 \in S^-_{r-k+m}$$

(diese Zerlegung ist eindeutig). Dann aber ist

$$p = (\delta + \delta')^m * u = (\delta + \delta')^m * u_1 + (\delta + \delta')^m *$$

$$= p_1 + p_2$$

mit $p_1 = (\delta + \delta')^m * u_1 \in S^+_{r-k+m-m} = S^+_{r-k}$ und $\text{supp } p_1 \subset R_+$.

Analog ist $p_2 \in S^-_{r-k}$. Damit ist bewiesen, daß die inhomogene Aufgabe 2^o a) eine Lösung besitzt. Wenn wir zu der eben bestimmten Lösung die allgemeine Lösung des homogenen Problems 2^o b) addieren, erhalten wir die allgemeine Lösung von 2^o a).
Wir werden jetzt zum Beweis der Behauptung 3^o übergehen. Diesmal ist $n > k$, d.h. $n - k = m$ ist eine natürliche Zahl, woraus $|r - k - m| < 1/2$ folgt. In diesem Fall gilt /5/ :

$$S^+_{r-k} \oplus S^-_{r-k} = \{z(x);\ z(x) \in S_{r-k},\ z^{(s)}(0) = 0,$$

$$s = 0, 1, \dots, n - k - 1\}.$$

Das aber bedeutet, für $f \in S_r$ hat das Problem (2) genau eine Lösung, wenn die unter (7) definierte Funktion p so beschaffen ist, daß

$p^{(s)}(0) = 0$ $(s = 0, 1, 2, \dots, n - k - 1)$ ist, d.h. wenn

$$p^{(s)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^s\, \hat{f}(t)/K_+(t)\, dt = 0,$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, n - k - 1) \tag{11}$$

gilt. Das aber bedeutet, daß (2) genau dann eine Lösung hat, wenn die "Störungsfunktion" zu $(it)^s/K_+(t)$ $(s = 0, 1, 2, \dots, n - k - 1)$ orthogonal ist. Wir haben gezeigt, daß jede Lösung der Aufgabe (3) durch die Formel (10) gegeben ist, deswegen ist die Fourier-Transformierte einer Lösung des adjungierten Problems

$$\hat{g}(t) = P_{n-k}(it)/K_+(t),$$

wobei P_{n-k} ein Polynom vom Grad höchstens $n - k$ ist. Der Kern des adjungierten Problems ist nämlich $Q(x) = K(-x)$. Offensichtlich ist

$$\operatorname{ind}(1 - \hat{Q}) = -\operatorname{ind}(1 - \hat{K}) \tag{12}$$

und $Q_+ = \overline{K_-}$, diese Funktion ist im Gebiet $\operatorname{Im} t > 0$ holomoph und in $\operatorname{Im} t \geq 0$ stetig. Damit wurde nachgewiesen, daß die Funktionen

$$(it)^s/K_+(t),\quad s = 0, 1, 2, \dots, n - k - 1$$

Lösungen von (4) sind und daß 3^o b) genau dann Lösungen besitzt, wenn f zu diesen Lösungen orthogonal ist.

(12) bedeutet aber auch, daß ind $(1 - \hat{Q}) = -k$ ist und $-1/2 < r + n < 1/2$ $(r > 0)$ gilt, d.h., n ist eine negative Zahl mit $-n < -k$. Es entsteht somit der Fall 2°. Dann aber gibt es eine Lösung aus S_{-r}. Damit ist der Satz ganz bewiesen.

Literatur

/1/ Dieudonné, J. Fondements de l'analyse moderne. Paris, 1965

/2/ Ahlfors, L. Complex Analysis. New York, 1966

/3/ Gochberg, I.Z., Feldman, I.A. Faltungsgleichungen und Projektionsverfahren zu ihrer Lösung. Basel, 1974

/4/ Krein, M.G. Integral equations on a half-line with kernels depending upon the difference of the argument. Amer. Math. Soc. Transl. 22, 45 - 63, (1962)

/5/ Lions, J.L., Magenes, E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Paris, 1968.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.sci. math. István Fenyö
Technische Universität Budapest
Mathematisches Institut der Elektrotechnischen Fakultät
H - 1111 Budapest
Stoczek u. 2

Dieter Schott

Kommutatorsätze und Lösungen von linearen homogenen Gleichungen

Diese Arbeit verfolgt das Ziel, Kommutatorsätze von Mikusiński /8/, Sikorski /16/, Geer /3/, Paige /1o/, Przeworska-Rolewicz /11/ und Sätze zur Struktur linearer homogener Gleichungen von Mikusiński /7/, Nicolescu /9/, Žegalov /17/, Berg /2/ zu verallgemeinern bzw. in einen engen Zusammenhang zu bringen.
Im ersten Abschnitt führen wir zunächst einige bekannte Begriffe und Beziehungen an. Sätze und Definitionen, die der Literatur entnommen sind, werden mit "+" versehen.

1. Lineare Operatoren und abstrakte Ableitungen

Sei $\underline{M}$ ein linearer Raum über einem Körper $\underline{K}$. E bezeichne den Einheitsoperator, $\underline{D}_A$ den Definitionsbereich eines Operators A.

Def. 1.1+. Ein linearer Operator D mit $\underline{D}_D \subseteq \underline{M} \to \underline{M}$ heißt Volterra-Operator (bzg. $\underline{M}$), wenn zu ihm ein linearer Operator I mit $\underline{D}_I = \underline{M}$, $I\underline{M} \subseteq \underline{D}_D$ und $DI = E$ existiert, für den alle $E - cI$ $(c \in \underline{K})$ invertierbar sind.
Es gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} &D^k I^k = E \\ &(D - cE)^k (E - cI)^{-k} = D^k \qquad (k \text{ natürlich}) \qquad (1.1) \\ &(D - cE)^k (E - cI)^{-k} I^k = E \end{aligned}$$

Przeworska-Rolewicz verwendet in /11/ für "Volterra-Operator" den Begriff "algebraische Ableitung". Wir vermeiden diese Bezeichnung hier, weil wir im weiteren noch etwas anderes darunter verstehen wollen (siehe Def. 1.4+).
Sei $\underline{R}$ ein Ring und $\underline{A}$ eine Algebra über $\underline{K}$.

Def. 1.2+. Ein additiver (linearer) Operator D : $\underline{R} \to \underline{R}$ $(\underline{A} \to \underline{A})$ mit

$$D(xy) = x(Dy) + (Dx)y \qquad \forall x,y \in \underline{R} \quad (\underline{A}) \qquad (1.2.)$$

heißt (abstrakte) Ableitung. $\underline{R}$ ($\underline{A}$) nennt man dann auch Differentiationsring (-algebra) bzg. D (siehe etwa Kaplansky /5/).

Def. 1.3+. Ein Volterra-Operator D bzg. $\underline{R}$ ($\underline{A}$) heißt Volterra-Ableitung, wenn er über $\underline{D}_D$ eine abstrakte Ableitung darstellt.

Def. 1.4+. Die Operation $y \bullet x := yx - xy$ heißt Kommutator der Elemente $y,x \in \underline{R}$ ($\underline{A}$) (siehe z.B. Putnam /14/). Die Kommutatorbildung eines festen Elementes y aus $\underline{R}$ ($\underline{A}$) mit den übrigen Elementen x aus $\underline{R}$ ($\underline{A}$) heißt (nach Mikusiński, Gesztelyi u.a.) algebraische Ableitung von x bzg. y (Bez.: $x_y^{[1]} := y \bullet x$).
Die Operation $\bullet$ ist weder kommutativ noch assoziativ. Sie hat aber folgende wichtige Eigenschaften:

$$x \bullet y + y \bullet x = 0 \tag{1.3}$$

$$(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z \quad \text{bzw.} \tag{1.4}$$

$$(cx + dy) \bullet z = c(x \bullet z) + d\,(y \bullet z)$$

$$x \bullet (y \bullet z) + y \bullet (z \bullet x) + z \bullet (x \bullet y) = 0 \tag{1.5}$$

$$(xy) \bullet z = x(y \bullet z) + (x \bullet y)z \tag{1.6}$$

$$x,\ y,\ z \in \underline{R}\ (\underline{A})\ ; \quad c,\ d \in \underline{K}$$

(siehe etwa Przeworska-Rolewicz /12/).
Jede algebraische Ableitung ist aufgrund von (1.4) und (1.6) eine abstrakte Ableitung. Die höheren algebraischen Ableitungen definiert man rekursiv durch

$$x_y^{[k]} := y \bullet x_y^{[k-1]} \quad (x_y^{[0]} := x,\ k \text{ natürlich}) \tag{1.7}$$

Dabei findet man die Beziehungen

$$x_y^{[k]} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i y^{k-i} x y^i \tag{1.8}$$

$$xy^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i y^{k-i} x_y^{[i]}$$

$$y^k x = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x_y^{[i]} y^{k-i} \tag{1.9}$$

(siehe Berg /1/: § 21).

2. Kommutatorsätze

2.1. Zur Verallgemeinerung eines Kommutatorsatzes von Paige

Sei $\underline{M}$ ein linearer Raum über einem Körper $\underline{K}$ und D ein linearer Operator mit $\underline{D}_D \subseteq \underline{M} \to \underline{M}$. $\underline{Q}$ bedeute eine fest vorgegebene Menge von Primelementen (irreduziblen Polynomen) aus $\underline{K}[D]$, $\underline{P} = \underline{P}(\underline{Q})$ ihr multiplikatives Erzeugnis.

Wir benutzen im weiteren die Bezeichnungen

$$\underline{V} = \underline{V}(\underline{P}) := \{ x \in \underline{M} \mid \exists \; p(D) \in \underline{P}: \; p(D)x = 0 \}$$

$$\underline{V}(p) = \underline{V}(p(D)) := \{ x \in \underline{M} \mid p^k(D)x = 0 \text{ für ein natürliches } k \} \quad (p \in \underline{P})$$

$$\underline{V}_k(p) = \underline{V}_k(p(D)) := \{ x \in \underline{M} \mid p^k(D)x = 0 \} \quad (k \text{ natürlich}, \; p \in \underline{P})$$

$$\tilde{\underline{V}}_k(p) := \underline{V}_k(p) \setminus \underline{V}_{k-1}(p), \; \tilde{\underline{V}}_o(p) := \{0\} \quad (k \text{ natürlich}, \; p \in \underline{P}).$$

Dabei gilt

$$\underline{V}(p) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{V}_k(p) = \sum_{k=o}^{\infty} \oplus \; \tilde{\underline{V}}_k(p) \tag{2.1}$$

$$\underline{V} = \bigcup_{p \in \underline{P}} \underline{V}(p) = \sum_{q \in \underline{Q}} \oplus \; \underline{V}(q) \tag{2.2}$$

Für $\underline{P} = \underline{K}[D] \setminus \underline{K}$ schreiben wir $\underline{K}'[D]$. $\underline{L}(\underline{V})$ bedeute die Menge aller linearen Operatoren von $\underline{V}$ in $\underline{V}$.

Wir untersuchen nun das Verhältnis folgender Bedingungen:

$$\forall p \in \underline{P} : \; p(D) \, \underline{V} = \underline{V} \tag{B1}$$

($\underline{V}$ ist ein teilbarer $\underline{P}$-Modul bzw. alle $p \in \underline{P}$ sind über $\underline{V}$ surjektiv.)

$$\forall q \in \underline{Q} : \; q\underline{V}(q) = \underline{V}(q) \tag{B1$^+$}$$

$$\forall q \in \underline{Q} : \; \dim \underline{V}_1(q) < \infty \;, \; \dim \underline{V}_k(q) = k \dim \underline{V}_1(q) \tag{B1.1}$$

$$\exists T \in \underline{L}(\underline{V}) : \; D \circledast (D \circledast T) = 0 \tag{B2$^-$}$$

$$\exists T \in \underline{L}(\underline{V}) : \; D \circledast (D \circledast T) = 0,$$
$$(D \circledast T)\underline{V}_1(q) = \underline{V}_1(q) \;\; (\forall q \in \underline{Q}) \tag{B2}$$

$$\exists T \in \underline{L}(\underline{V}) : \; D \circledast T = E \tag{B2$^+$}$$

$$\forall R \in \underline{L}(\underline{V}) : \; D \circledast R = 0 \;\; \exists T \in \underline{L}(\underline{V}) : \; D \circledast T = R \tag{B2.1}$$

Selbstverständlich ist zunächst die Implikationenkette (B2.1) $\Rightarrow$ (B2$^+$) $\Rightarrow$ (B2) $\Rightarrow$ (B2$^-$). Außerdem sind (B1) und (B1$^+$) äquivalent (siehe Kaplansky /4/).
Beachtet man, daß D über $\underline{V}(\underline{K}'[D])$ lokal algebraisch ist, ergeben sich aus dem Artikel /10/ von Paige für $\underline{P} = \underline{K}'[D]$ die Aussagen:

<u>Satz 2.1+.</u> Aus (B1) folgt (B2$^+$). Die Umkehrung gilt i.a. nur dann, wenn $\underline{K}$ die Charakteristik 0 hat.

<u>Satz 2.2+.</u> Aus (B1.1) folgt (B1). Die Umkehrung gilt, falls für alle $q \in \underline{Q}$ stets $\dim \underline{V}_1(q) < \infty$ ist.

Diese Sätze enthalten Ergebnisse von Mikusiński /8/, Sikorski /16/ und Geer /3/ als Spezialfälle. In Verallgemeinerung des Satzes 2.1+ gelangt man zu

<u>Satz 2.3.</u> (B1$^+$) impliziert (B2.1). (B2) zieht (B1$^+$) i.a. nur dann nach sich, wenn $\underline{K}$ die Charakteristik 0 hat.

<u>Bemerkung:</u> Da sich die Behauptung im wesentlichen mit den gleichen Mitteln zeigen läßt, die Paige in /10/ benutzt, skizzieren wir den Beweis lediglich. Wir machen dabei jedoch auf eine Beweislücke aufmerksam, die übrigens auch schon in der älteren Arbeit /16/ von Sikorski zu finden ist. Ansonsten folgen wir bis auf einige Abänderungen und Ergänzungen der genannten Arbeit.

<u>Beweis:</u> 1) Die Bedingung (B1$^+$) ist gleichwertig mit jeder der beiden Forderungen

$$q\underline{\tilde{V}}_{k+1}(q) = \underline{\tilde{V}}_k(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \ \forall k \text{ natürlich}) \qquad (C1^+)$$

$$q^k\underline{\tilde{V}}_{k+1}(q) = \underline{\tilde{V}}_1(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \ \forall k \text{ natürlich}) \qquad (D1^+)$$

Zum Nachweis des Satzes benötigt man nur die Folgerungen (B1$^+$) $\Rightarrow$ (C1$^+$) und (D1$^+$) $\Rightarrow$ (B1$^+$), wie man sie für die Mengen $\underline{V}_k(q)$ auch bei Paige antrifft. Die Folgerung (C1$^+$) $\Rightarrow$ (D1$^+$) ist unmittelbar einzusehen und soll hier zusätzlich erwähnt werden.

2) Existenz einer Basis für $\underline{V}$ (q)
Wir setzen (B1$^+$) bzw. (C1$^+$) voraus. Zu $\underline{V}_1(q)$ existiert bekanntlich über dem Körper $\underline{K}$ [D] /(q) stets eine Basis $\{x_{a1}(q)\}_{a \in J}$

(J Indexmenge). Dann bildet aber $\{D^j x_{a1}(q)\}$ ($j = 0, \ldots,$ grad q - 1) eine Basis von $\underline{V}_1(q)$ über $\underline{K}$. Weiterhin kann man induktiv jedem $x_{ak} = x_{ak}(q)$ aus $\underline{V}_k(q)$ aufgrund von ($C1^+$) ein $x_{a,k+1}$ zuordnen, das der Beziehung $qx_{a,k+1} = x_{ak}$ genügt. Damit wird $\{D^j x_{ai}\}$ ($i = 1, \ldots, k$) eine Basis von $\underline{V}_k(q)$. Aufgrund von (2.1) besitzt $\underline{V}(q)$ also eine Basis der Gestalt $\{D^j x_{ak}(q)\}$ ($k = 1,2,\ldots$).

Bemerkung: Die $x_{a,k+1}$ sind durch die x_{ak} i.a. nicht eindeutig bestimmt. Daher ist es besser, die $x_{a,k+1}$ nacheinander aus $q\tilde{\underline{V}}_{k+1}(q) = \tilde{\underline{V}}_k(q)$ statt wie bei Paige aus $q\underline{V}_{k+1}(q) = \underline{V}_k(q)$ festzulegen. Da die Mengen $\underline{V}_{k+1}(q)$ und $\underline{V}_k(q)$ gemeinsame Elemente enthalten, besteht andernfalls die Gefahr einer widersprüchlichen Mehrfachbestimmung der $x_{a,k+1}$.

3) Konstruktion des linearen Operators T

Wir erklären T über den Basiselementen $D^j x_{ak}$ von $\underline{V}(q)$ durch

$$TD^j x_{ak} := kRD^j x_{a,k+1} - jD^{j-1}Rx_{ak} + SD^j x_{ak} \tag{2.3}$$

$$Tx_{ak} := kRx_{a,k+1} + Sx_{ak}$$

($j = 1, \ldots,$ grad q - 1).

Dabei seien R und S zwei beliebige Operatoren aus $\underline{L}(\underline{V})$ mit $D \otimes R = D \otimes S = 0$. (Die Einbeziehung von S gibt zusätzliche Freiheit bei der Definition von T.) Außerdem habe q für m := = grad q = 1 o.B.d.A. die Gestalt $q = D - cE$ ($c \in \underline{K}$).

Man berechnet nun mit Hilfe von (2.3) im Falle m = 1:

$$\begin{aligned} DTx_{ak} &= kRDx_{a,k+1} + SD\,x_{ak} \\ &= kRqx_{a,k+1} + Sqx_{ak} + ckRx_{a,k+1} + cSx_{ak} \\ &= kRx_{ak} + Sx_{a,k-1} + ckRx_{a,k+1} + cSx_{ak} \qquad (x_{ao} := 0) \\ TDx_{ak} &= T(q+cE)x_{ak} = Tx_{a,k-1} + cTx_{ak} \\ &= (k-1)Rx_{ak} + Sx_{a,k-1} + ckRx_{a,k+1} + cSx_{ak} \end{aligned}$$

Daraus gewinnt man $(D \otimes T)x_{ak} = Rx_{ak}$.

Für m > 1 ermittelt man aus (2.3):

$$DT \cdot D^j x_{ak} = DkRD^j x_{a,k+1} - DjD^{j-1}Rx_{ak} + DSD^j x_{ak}$$

$$= kRD^{j+1}x_{a,k+1} - jRD^j x_{ak} + SD^{j+1}x_{ak} \qquad (0 \leq j \leq m - 1)$$

$$TD \cdot D^j x_{ak} = kRD^{j+1}x_{a,k+1} - (j+1)RD^j x_{ak} + SD^{j+1}x_{ak}$$

$$(0 \leq j \leq m - 2)$$

Obwohl die Beziehung (2.3) zunächst nur für $0 \leq j \leq m - 1$ angegeben ist, gilt sie doch ebenso für $j = m$. $D^m x_{ak}$ gehört nämlich zu $\underline{V}_k(q)$ und kann demnach als Linearkombination der $D^j x_{ak}$ ($j = 0, \ldots, m - 1$) ausgedrückt werden. So stimmt die letzte Gleichung auch für $j = m - 1$, und man erhält

$(D \otimes T)D^j x_{ak} = RD^j x_{ak}$ $(0 \leq j \leq m - 1)$.

Schließlich bestimmt man T auf $\underline{V}$ durch die Gleichung

$$Tx = T \sum_{a,k,j,q} c_{akj}(q) D^j x_{ak}(q)$$

$$:= \sum_{a,k,j,q} c_{akj}(q) TD^j x_{ak}(q) \qquad (2.4)$$

$(c_{akj}(q) \in \underline{K})$

Damit ist (B2.1) nachgewiesen.

Bemerkung: Paige und Sikorski konstruieren in /10/ bzw. /16/ T gemäß

$$TD^j x_{ak} := D^j x_{a,k+1} - jD^{j-1}x_{ak} \quad (j = 1, \ldots, m - 1) \qquad (2.3')$$

$$Tx_{ak} := x_{a,k+1}$$

Ist m > 1, ergibt sich daraus über $\underline{V}$ (q) tatsächlich $D \otimes T = E$. Aber auch der Fall m = 1 muß Berücksichtigung finden. Für einen Polynomring $\underline{K}$ [D] über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\underline{K}$ der Charakteristik 0 tritt er sogar bei sämtlichen Primelementen q ein. Bei m = 1 reduziert sich (2.3') auf die zweite der beiden Beziehungen. Man überprüft leicht, daß auf $\underline{V}$ (q) dann $D \otimes T = E$ nicht mehr zutrifft.

Man bekommt (2.3') aus (2.3), wenn man formal $R := E$ und $SD^j x_{ak} := -(k-1)D^j x_{a,k+1}$ setzt. Bei $m > 1$ gewinnt man dann wegen

$$DS \cdot D^j x_{ak} = SD \cdot D^j x_{ak} = -(k-1)\, D^{j+1} x_{a,k+1}$$

in der Tat $D \otimes S = 0$, nicht aber bei $m = 1$. Damit erweist sich (2.3') wie erwartet nur unter der Bedingung $m > 1$ als Spezialfall von (2.3).

4) Sei (B2) vorausgesetzt. $\underline{K}$ habe die Charakteristik 0. Im weiteren benutzen wir algebraische Ableitungen (bzg. - T), die nur für $D \otimes T = E$ den gewöhnlichen Polynomableitungen (nach D) entsprechen, wie sie Paige in /10/ verwendet. Zunächst ist

$$p_{-T}^{[1]} = pT - Tp = p'R \quad (p \in \underline{P},\ R := D \otimes T) \tag{2.5}$$

Unter Ausnutzung der Gleichung

$$q^k Tx = kq'q^{k-1}Rx \quad (x \in \underline{V}_k(q)) \tag{2.6}$$

zeigt man dann die R- und T-Invarianz von $\underline{V}(q)$. Daher ist (B2) äquivalent mit

$$\forall q \in \underline{Q}\ \exists T \in \underline{L}(\underline{V}(q)):\ D \otimes R = 0,\ R\underline{V}_1(q) = \underline{V}_1(q) \tag{C2}$$

In Verallgemeinerung von (2.5) gelangt man zu

$$pT^k = \sum_{j=o}^{k} \binom{k}{j} T^{k-j} p_{-T}^{[j]} \quad \text{(siehe auch 1.9))} \tag{2.7}$$

$$(q^k)_{-T}^{[j]} = k\,(k-1)\,\ldots\,(k-j+1)\,(q_{-T}^{[1]})^j q^{k-j} + \tag{2.8}$$

$$+ F_{kj}(q, q_{-T}^{[1]}, \ldots, q_{-T}^{[j]})q^{k-j+1} \quad (j \leq k)$$

Dabei stellt F_{kj} ein gewisses Polynom aus $\underline{K}[q, q_{-T}^{[1]}, \ldots, q_{-T}^{[j]}]$ dar (siehe Schott /15/). Außerdem ist für teilerfremde $p \in \underline{K}[D]$, $q \in \underline{Q}$ die Bedingung

$$\forall \bar{y}, z \in \underline{V}(q):\ p\bar{y} = q^k z\ \exists x \in \underline{V}(q):\ \bar{y} = q^k x \tag{2.9}$$

erfüllt.

5) Zu einem beliebigen $\bar{y} \in \underline{V}_1(q)$ existiert aufgrund von $R\underline{V}_1(q) = \underline{V}_1(q)$ ein $y \in \underline{V}_1(q)$ mit $R^k y = \bar{y}$. Für $z := T^k y$ entsteht

unter Beachtung von (2.7) und (2.8)

$$q^k z = q^k T^k y = (q^k)^{[k]}_{-T}\, y = k!(q^{[1]}_{-T})^k y = k!(q)^k \bar{y}$$

Wegen char $\underline{K} = 0$ und $q \in \underline{Q}$ sind $k!(q')^k$ und q teilerfremd. Mit $p := k!(q')^k$ kann man daher (2.9) anwenden. Auf diese Weise erhält man die Aussage

$$\forall \bar{y} \in \underline{V}_1(q) \quad \exists x \in \underline{V}(q): \; \bar{y} = q^k x \tag{2.9'}$$

(2.9') ist aber äquivalent zu ($D1^+$) und damit zu $B1^+$).

Bemerkungen: 1) Unter der Voraussetzung (B1) lassen sich bei vorgegebenen Operatoren D,R aus $\underline{L}(\underline{V})$ mit $D \circledast R = 0$ Lösungen der Operatorgleichung $DT-TD = R$ bestimmen, wenn man alle Lösungen des Gleichungssystems $q^k x = 0$ ($q \in \underline{Q}$, k natürlich) kennt. Speziell ist für $R \in \underline{K}[D]$ stets $D \circledast R = 0$.

2) Genügen die Operatoren $D \in \underline{L}(\underline{V})$ und $T \in \underline{L}(\underline{V})$ der Vertauschungsrelation $D \circledast (D \circledast T) = 0$, so folgt auch

$$\begin{aligned} p(D) \circledast (p(D) \circledast T) &= p(D) \circledast (p'(D)(D \circledast T)) \\ &= p'(D)(p(D) \circledast (D \circledast T)) = 0 \end{aligned}$$

3) Paige gibt in /10/ ein Beispiel dafür an, daß die Implikation ($B2^+$) $\Rightarrow$ (B1) ohne die Voraussetzung char $\underline{K} = 0$ nicht richtig ist. Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß die Implikation (B2) $\Rightarrow$ ($B1^+$) allgemein nur für char $\underline{K} = 0$ gilt.

4) Bei char $\underline{K} = 0$ sind die Bedingungen ($B1^+$), (B1), (B2.1), ($B2^+$) und (B2) alle untereinander gleichwertig (siehe auch Übersicht am Ende der Arbeit).

Wir werden jetzt noch zwei Fälle anführen, in denen die Bedingung (B1) befriedigt wird.

Lemma 2.4. Sei $\underline{M}$ ein linearer Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\underline{K}$ der Charakteristik 0.
Für einen Volterra-Operator D (bzg. $\underline{M}$) (siehe Def. 1.1+) ist $\underline{V}(\underline{K}'[D])$ ein teilbarer $\underline{K}'[D]$-Modul.

Beweis. Die Primelemente q von $\underline{K}[D]$ haben die Gestalt $D-cE$ ($c \in \underline{K}$). Nach Przeworska-Rolewicz /11/ besitzt $\underline{V}_k(D-cE)$ (k natürlich) die Darstellung

$$\underline{V}_k\,(D-cE) = (E-cI)^{-k}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} I^m z_m\colon z_m \in \underline{V}_1(D)\right\} \tag{2.10}$$

(I siehe unter Def. 1.1+). Mit Hilfe von (1.1) leitet man dann leicht $(D-cE)^k\underline{V}_{k+1}(D-cE) = \underline{V}_1(D-cE)$ her. Damit ist die zu (B1) äquivalente Bedingung ($C1^+$) erfüllt.

Lemma 2.5. Sei $\underline{M}$ ein kommutativer Differentiationskörper (bzg. des Operators D) mit einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper $\underline{K}$ der Charakteristik 0 (siehe Def. 1.2+). Dann existiert ein $\underline{V}(\underline{K}'[D])$ umfassender teilbarer $\underline{K}'[D]$-Modul V^*.

Beweis. Zu diesem Ergebnis gelangt man ohne Schwierigkeiten unter Benutzung der Picard-Vessiotschen Erweiterungstheorie (siehe /6/, /5/).

2.2. Weitere Kommutatorsätze und Folgerungen

Zunächst formulieren wir einige Aussagen, die wie Satz 2.3 die Existenz von Elementen D, T mit $D \otimes (D \otimes T) = 0$ betreffen.

Satz 2.6. Ist $\underline{M}$ ein Differentiationsring (bzg. des Operators D) mit Einselement e und gehört zu $\underline{M}$ ein Element t, das der Gleichung $Dt = e$ genügt, dann existiert für alle Operatoren $R \in \underline{L}(\underline{M})$ mit $D \otimes R = 0$ ein Operator $T \in \underline{L}(\underline{M})$ mit $D \otimes T = R$, nämlich

$$Tf = R(t\cdot f) \quad (f \in \underline{M}) \tag{2.11}$$

Bemerkung. Ist $\underline{M}_1$ ein Differentiationskörper (bzg. D) mit einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper $\underline{K}$ der Charakteristik 0, so hat die zugehörige Picard-Vessiot-Erweiterung $\underline{M}$ von $\underline{M}_1$ für die Gleichung $Dx = e$ die geforderten Eigenschaften.

Folgerung 2.7.

Ist $\underline{M}$ eine Algebra (über $\underline{K}$) mit Einselement e und D eine Volterra-Ableitung (bzg. M) (siehe Def. 1.3+), dann gibt es für alle Operatoren $R \in \underline{L}(\underline{M})$ mit $R\underline{M} \subseteq \underline{D}_D$ und $D \otimes R = 0$ auf $\underline{D}_D$ einen Operator $T \in \underline{L}(\underline{M})$ mit $D \otimes T = R$ auf $\underline{D}_D$, nämlich

$$Tf = R(Ie\cdot f) \quad (f \in \underline{M},\ DI = E) \tag{2.12}$$

Bemerkungen. 1) Für R = E ist dieser Satz in /11/ enthalten.

2) Benutzt man noch Satz 2.3, folgt unter der Voraussetzung char $\underline{K} = 0$ sofort, daß der zu $\underline{M}$ gehörende Bereich $\underline{V}(\underline{K}'[D])$ ein teilbarer $\underline{K}'[D]$-Modul ist. Eine ähnliche Aussage haben wir mit anderen Mitteln schon in Lemma 2.4 bewiesen.

Satz 2.8. In einer normierten Algebra $\underline{M}$ ist das Auftreten zweier Elemente D, T mit $D \otimes (D \otimes T) = 0$ nicht möglich, falls $D \otimes T$ in $\underline{M}$ invertierbar ist.

Bemerkung. Für $D \otimes T = e$ findet man dieses Resultat etwa in /14/. Die dort angeführte Beweisidee kann mit entsprechenden Abänderungen hier ebenfalls verwendet werden.

Satz 2.9. Sei $\underline{M}$ ein linearer Raum (über einem Körper $\underline{K}$). Zu einem algebraischen Operator $D \in \underline{L}(\underline{M})$ gibt es keinen Operator $T \in \underline{L}(\underline{M})$ mit $D \otimes (D \otimes T) = 0$, $(D \otimes T)\underline{M} = \underline{M}$.

Bemerkung. 1) Für $D \otimes T = cE$ $(c \in \underline{K},\ c \neq 0)$ steht diese Aussage in /13/. Auch der Beweis läßt sich in leicht modifizierter Form übertragen.
2) Gemäß Satz 2.9 gibt es zu einem Operator $D \in \underline{L}(\underline{M})$ keinen Operator $T \in \underline{L}(\underline{M})$ mit $D \otimes (D \otimes T) = 0$ auf $\underline{V}_1(p(D))$ $(p(D) \in \underline{P})$ und $(D \otimes T)\underline{V}_1(p) = \underline{V}_1(p)$.
Nach einem Satz von Kaplansky /4/ ist über einem vollständigen linearen metrischen Raum jeder stetige, lokal algebraische Operator zugleich algebraisch. Benutzt man außerdem die Sätze 2.3 und 2.9, gewinnt man

Satz 2.10. Über einem vollständigen linearen metrischen Raum $\underline{M}$, der zugleich einen teilbaren $\underline{K}'[D]$-Modul eines lokal algebraischen Operators D darstellt, ist D (bzg. der gegebenen Metrik) stets unstetig.

Bemerkung. Ersetzt man die Eigenschaft der Teilbarkeit durch die spezielleren Bedingungen von Mikusiński /8/ und Sikorski /16/ (siehe auch /10/, /11/), ist diese Behauptung bereits in /11/ formuliert.

3. Lösungen von linearen homogenen Gleichungen

Wir untersuchen über einem linearen Raum $\underline{M}$ Gleichungen der Gestalt

$$p(D)x = 0 \quad (D\colon \underline{D}_D \to \underline{M}, \text{ linear; } p(D) \in \underline{P}). \tag{3.1}$$

Dabei werden die Bezeichnungen aus den vorangehenden Abschnitten übernommen. Wir interessieren uns dafür, wann nachstehende Lösungsstrukturen vorliegen:

$$\exists\, T \in \underline{L}(\underline{V})\colon \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} T^j x_j \;\middle|\; x_j \in \underline{V}_1(q) \right\} \subseteq \underline{V}_k(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \forall k \text{ nat.}) \tag{B4$^-$}$$

$$\exists\, T \in \underline{L}(\underline{V})\colon \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} T^j x_j \;\middle|\; x_j \in \underline{V}_1(q) \right\} = \underline{V}_k(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \forall k \text{ nat.}) \tag{B4}$$

Hierzu stellen wir einen Zusammenhang zwischen diesen Bedingungen, den Bedingungen

$$\exists\, T \in \underline{L}(\underline{V})\colon \quad (q \circ T)\underline{V}_k(q) \subseteq \underline{V}_k(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \forall k \text{ nat.}) \tag{B3$^-$}$$

$$\exists\, T \in \underline{L}(\underline{V})\colon \quad T\underline{V}_k(q) \subseteq \underline{V}_{k+1}(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \forall k \text{ nat.}) \tag{B3}$$

$$\exists\, T \in \underline{L}(\underline{V})\colon \quad \underline{V}_{k+1}(q) = T\underline{V}_k(q) + \underline{V}_1(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \forall k \text{ nat.}) \tag{B3$^+$}$$

$$\exists\, T \in \underline{L}(\underline{V})\colon \quad \underline{V}_{k+1}(q) \subseteq T\underline{V}_k(q) + \underline{V}_1(q) \quad (\forall q \in \underline{Q}, \forall k \text{ nat.}) \tag{B3'}$$

und den Ergebnissen des Abschnittes 2.1 her.
Selbstverständlich sind die Implikationen (B3$^+$)$\Rightarrow$(B3), (B3$^+$)$\Rightarrow$(B3'), (B4)$\Rightarrow$(B4$^-$). Leicht zeigt man auch (B3)$\Rightarrow$(B4$^-$).
Nun gehen wir zunächst auf den Artikel /9/ von Nicolescu ein. Ausgangspunkt ist dort eine kommutative Algebra $\underline{A}$ mit Einselement e. Über ihr werden lineare Operatoren A mit der Eigenschaft

$$\forall y \in \underline{A} \;\; \exists x \in \underline{A} : Ax = y \tag{3.2}$$

betrachtet (Surjektivität). Daher gibt es zu jedem A ein $t \in \underline{A}$, das die Gleichung $At = e$ befriedigt. Durch

$$Bx := Atx - tAx - x \tag{3.3}$$

wird ein Operator B definiert. Sind schließlich die Bedingungen

$$\forall \text{nat. } k : A^k x = 0 \Rightarrow A^k Bx = 0 \tag{3.4}$$

$$\forall x \in \underline{A}, \forall \text{nat. } k\colon A^k x = 0 \;\exists y \in \underline{A}\colon A^{k-1}y = 0, A(x-ty) = 0 \tag{3.5}$$

realisiert, so folgert Nicolescu die Aussagen

Satz 3.1+ $A^k x = 0$ bedeutet zugleich $A^{k+1} tx = 0$.

Satz 3.2+ Jede Lösung x der Gleichung $A^k x = 0$ hat die Gestalt $x = x_o + tx_1 + \dots + t^{k-1} x_{k-1}$ $(Ax_o = Ax_1 = \dots = Ax_{k-1} = 0)$.

Ersetzt man A durch q und tx durch Tx, geht $(B+1)x$ in $(q \otimes T)x$ über. Also entsprechen sich (B3⁻) und (3.4) bzw. (B3') und (3.5). Die Sätze 3.1+ und 3.2+ lassen sich damit auf den Fall übertragen, daß der Anwendungsbereich der linearen Operatoren nur einen linearen Raum $\underline{M}$ bildet. Die Voraussetzung (3.2) wird dabei nicht mehr benötigt.

Satz 3.3. Die Bedingungen (B3⁻) und (B3) sind äquivalent.

Satz 3.4. Aus (B3') folgt (B4).

Beweis. Die Implikationen (B3⁻) $\Rightarrow$ (B3) und (B3') $\Rightarrow$ (B4) kann man analog wie die Sätze 3.1+ und 3.2+ verifizieren. Wir haben noch (B3) $\Rightarrow$ (B3⁻) zu zeigen.

Zunächst gilt für zwei Operatoren $U, V \in \underline{L}(\underline{V})$ die Beziehung

$$U^{k+1} Vx = VU^{k+1} x + \sum_{j=o}^{k} U^j (U \otimes V) U^{k-j} x \quad (x \in \underline{V}) \tag{3.6}$$

Mit $U := q \in \underline{Q}$, $V := T$ und $x \in \underline{V}_k(q)$ gelangt man unter der Voraussetzung (B3) zu

$$\sum_{j=1}^{k} q^j (q \otimes T) q^{k-j} x = 0 \tag{3.7}$$

Für $k = 1$ erhält man $q(q \otimes T)x = 0$ und damit $(q \otimes T)\underline{V}_1(q) \subseteq \underline{V}_1(q)$. Wir nehmen an, daß die Behauptung (B3⁻) schon für alle $j < k$ richtig ist. Wegen $q^{k-j} x \in \underline{V}_j(q)$ $(j = 1, \dots, k-1;$ $x \in \underline{V}_k(q))$ gewinnt man dann aus (3.7) $q^k (q \otimes T)x = 0$. Also besteht für beliebige natürliche k die Beziehung $(q \otimes T)\underline{V}_k(q) \subseteq \underline{V}_k(q)$.

Satz 3.5. Aus (B2⁻) folgt (B3⁻).

Beweis. Die Gleichung $q^k x = 0$ impliziert wegen $q(D) \otimes (q(D) \otimes T) = 0$ (siehe Bemerkung 2 zu Satz 2.3)

$$(q \otimes T) q^k x = q^k (q \otimes T) x = 0$$

Satz 3.6. Aus $(B1^+)$ folgt (B4), wenn $\underline{K}$ die Charakteristik 0 hat.

Beweis. Unter der Bedingung $(B1^+)$ besitzt $\underline{V}_k(q)$ eine Basis $\{D^j x_{ai}\}$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, \text{grad } q - 1)$ (siehe Beweis zu Satz 2.3). Setzt man in (2.3) speziell $S := 0$ und $R := E$, wird ein Operator T mit $D \otimes T = E$ festgelegt. Dabei ist insbesondere

$$Tx_{ai} = ix_{a,i+1} \quad (x_{a1} \in \underline{V}_1(q);\ 1 = 1, \ldots, k - 1).$$

Demnach läßt sich die für $\underline{V}_k(q)$ angeführte Basis auch in der Gestalt $\left\{D^j T^{i-1} \frac{1}{(i-1)!} x_{a1}\right\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ schreiben. Diese Basis ist äquivalent zu $\{D^j T^l x_{a1}\}$ $(l = 0, \ldots, k - 1)$. Aufgrund von

$$D^j T^l x_{a1} = \sum_{m=o}^{n} m!\ \binom{j}{m} \binom{l}{m}\ T^{l-m} D^{j-m} x_{a1}$$

$$n := \min\ (j,\ l)$$

$$T^l D^j x_{a1} = \sum_{m=o}^{n} (-1)^m m!\ \binom{j}{m} \binom{l}{m}\ D^{j-m} T^{l-m} x_{a1}$$

sind nun auch die Basen $\{D^j T^l x_{a1}\}$ und $\{T^l D^j x_{a1}\}$ gleichwertig. Da $\{D^j x_{a1}\}$ eine Basis von $\underline{V}_1(q)$ bildet, ergibt sich Bedingung (B4).

Schließlich erwähnen wir noch

Satz 3.7. Gibt es einen Operator $T \in \underline{L}(\underline{V})$ mit $D \otimes (D \otimes T) = 0$ und gilt $x_{ij} \in \underline{V}_1(q_i)$ $(q_i \in \underline{Q};\ i = 1, \ldots, m;\ j = 0, \ldots, n_i - 1;\ n_i$ nat.), dann stellt

$$x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=o}^{n_i - 1} T^j x_{ij} \tag{3.8}$$

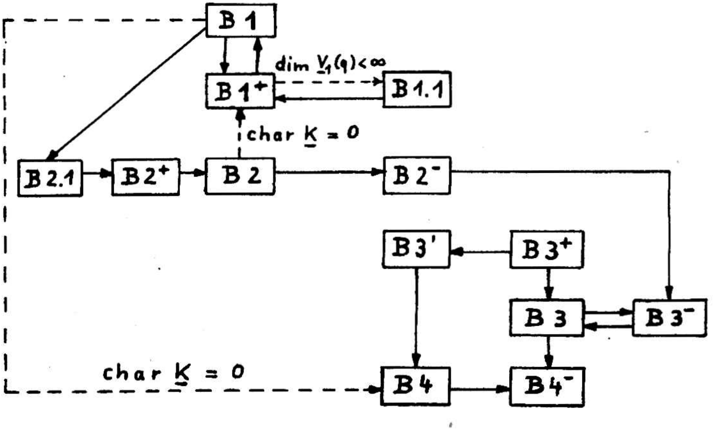
eine Lösung von

$$q_1^{n_1} \ldots q_m^{n_m} x = 0 \tag{3.9}$$

dar. Für char $\underline{K} = 0$ und $(D \otimes T)\underline{V}_1(q_i) = \underline{V}_1(q_i)$ ist (3.8) sogar die allgemeine Lösung von (3.9).

<u>Bemerkung.</u> Im Anschluß an Žegalov /17/ hat Berg in /2/ dieses Ergebnis für $q_i = D + c_i E$ $(c_i \in \underline{K})$ hergeleitet. Allerdings brauchten dabei die c_i für die erste Aussage nur aus einem kommutativen Ring zu stammen (zu ähnlichen Resultaten unter spezielleren Voraussetzungen siehe auch Mikusiński /7/).

Die folgende Übersicht veranschaulicht noch einmal die in dieser Arbeit gegebenen Zusammenhänge.



Literatur

/1/ Berg, L. Operatorenrechnung, I. Algebraische Methoden, VEB DVW, Berlin 1972

/2/ Berg, L. Über die Struktur der Lösungen homogener Operatorgleichungen, Math. Nachr. <u>67</u>, 7 - 11 (1975)

/3/ Geer, J. An extension of Mikusiński's algebraic theory of differential equations, Masters Thesis, Univ. of Virginia, Charlottesville 1964

/4/ Kaplansky, I. Infinite Abelian groups, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor 1956

/5/ Kaplansky, I. An introduction to differential algebra, Hermann, Paris 1957

/6/ Kolchin, E.R. Existence theorems connected with the Picard-Vessiot-theory of homogeneous linear ordinary differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. <u>54</u>, 927 - 932 (1948)

/7/ Mikusiński, J. Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants, Stud. Math. <u>16</u>, 41 - 47 (1958)

/8/ Mikusiński, J. Sur l' espace linéaire avec dérivation, Stud. Math. <u>16</u>, 113 - 123 (1958)

/9/ Nicolescu, M. Problème de l' analyticité par rapport à un opérateur linéaire, Stud. Math. <u>16</u>, 353 - 363 (1958)

/10/ Paige, E.C. A generalization of a commutator theorem of Mikusiński, Proc. Amer. Math. Soc. <u>17</u>, 1417 - 1423 (1966)

/11/ Przeworska-Rolewicz, D. Algebraic derivative and abstract differential equations, An. Acad. brasil. Ciênc., <u>42</u> (3) (1970)

/12/ Przeworska-Rolewicz, D. Equations avec opérations algébriques, Stud. Math. <u>22</u>, 337 - 367 (1962 - 1963)

/13/ Przeworska-Rolewicz, D., Rolewicz, S. Equations in linear spaces, Monografie Matematyczne 47, Warzawa

/14/ Putnam, C.R. Commutation properties of Hilbert space operators, Springer-Verlag, Berlin /West/ /u.a./ 1967

/15/ Schott, D. Identitäten in nichtkommutativen Ringen mit Anwendungen in der Operatorenrechnung, Dissertationsschrift, Rostock 1975

/16/ Sikorski, R. On Mikusiński's algebraical theory of differential equations, Stud. Math. 16, 230 - 236 (1958)

/17/ Žegalov, V.I. Über eine lineare Operatordifferentialgleichung (russ.), Tr. sem. kraevym zadačam 8, 70 - 79 (1971)

Anschrift des Verfassers

Dieter Schott
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Dieter Neßelmann

Eine Bemerkung zur Theorie der superfiziellen Elemente

(R,M) sei ein lokaler Ring R mit dem maximalen Ideal M, $Q = (q_1, \ldots, q_v) \subseteq M$ ein Ideal aus R und B die isolierte Komponente des Nullideals in R, deren assoziierte Primideale Q nicht enthalten. D. Kirby gibt in /1/, Theorem 3, drei äquivalente Bedingungen dafür an, daß ein Element $x \in Q$ superfiziell vom Grad s für Q ist. x erfüllt insbesondere die Bedingung $B : x \cdot R = B$. Wir wollen in dieser Note diese Bedingung fortlassen und entsprechende Aussagen wie in /1/, Theorem 3, beweisen.

Definition: t sei eine Unbestimmte über R und $u = t^{-1}$. Dann heißt $Re(E,Q) := R[q_1 t, \ldots, q_v t, u]$ der Rees-Ring von R bezüglich Q.
$A \subseteq Re(R,Q)$ sei ein homogenes Ideal, und für jede natürliche Zahl n sei $A_n = A \cdot u^n \cap R$; es gilt $A_n \subseteq Q^n$. A heißt relevant, wenn $A_n \not\subseteq Q^n$ für alle $n \geq 1$ gilt. Andernfalls heißt A irrelevant.

Ist $A \subseteq Re(R,Q)$ ein beliebiges homogenes relevantes Ideal in diesem Ring, dann sei $rel(A)$ diejenige isolierte Komponente von A, die durch Streichung aller irrelevanten Primärkomponenten aus A hervorgeht. Für irrelevante homogene Ideale A setzen wir $rel(A) := Re(R,Q)$. Weiterhin sei für ein Ideal C aus R $C^* = C \cdot R[t,u] \cap Re(R,Q)$. Ist $x \in R$, so wollen wir mit $(o:x)$ das Ideal $o \cdot R : x \cdot R$ aus R bezeichnen.

Lemma 1: Seien $A \subseteq B$ homogene Ideale aus $Re(R,Q)$. Dann gilt $rel(A) \subseteq rel(B)$.

Beweis: A_o bzw. B_o seien diejenigen Komponenten, deren sämtliche assoziierte Primideale relevant sind, und derart gewählt, daß $A = A_o \cap A_1$ und $B = B_o \cap B_1$ mit irrelevanten Idealen A_1 und B_1. Dann ist offenbar auch $C = A_1 \cap B_1$ irrelevant und $A : C = A_o \subseteq B : C = B_o$, da C in keinem assoziierten Primideal von A_o und B_o liegt, qed.

Lemma 2: Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\mathrm{rel}(u,(o:x)^*)\mathrm{Re}(R,Q) = \mathrm{rel}(u,(B : x \cdot R)^*)\mathrm{Re}(R,Q).$$

Beweis: Sei C diejenige Komponente des Nullideals in R, deren assoziierte Primideale Q enthalten. Dann ist $o \cdot R = B \cap C$, $(o:x) = (B : x \cdot R) \cap (C : x \cdot R)$ und, wegen /3/, Theorem 1.5,

$$((o:x)^*\mathrm{Re}(R,Q) = (B : x \cdot R)^* \cap (C : x \cdot R)^*.$$

$(B : x \cdot R)^*$ ist genau die relevante Komponente des Ideals $(o:x)^*$, während $(C : x \cdot R)^*$ seine irrelevante Komponente ist. Daher haben wir $(B : x \cdot R)^* \leq \mathrm{rel}(u,(o:x)^*)\mathrm{Re}(R,Q)$ und folglich auch $\mathrm{rel}(u,(B : x \cdot R)^*)\mathrm{Re}(R,Q) \leq \mathrm{rel}(u,(o:x)^*\mathrm{Re}(R,Q)$. Aus Lemma 1 folgt die Gleichheit, qed.

Satz: Sei $x \in Q^s$ $(s \geq 1)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) Es existiert eine natürliche Zahl c, so daß für alle genügend großen natürlichen Zahlen n gilt:

$$(Q^{n+s} : x \cdot R) \cap (Q^c,(o:x)) = (Q^n,(o:x));$$

(ii) $\quad \mathrm{rel}(u \cdot \mathrm{Re}(R,Q)) : (xt^s) = \mathrm{rel}(u,(o:x)^*)\mathrm{Re}(R,Q);$

(iii) $(x) \cap Q^{n+s} = (x) \cdot Q^n$ für alle genügend großen n.

Beweis: Wir führen den Beweis analog wie in /1/.

(i)$\Rightarrow$(ii): Sei $A = (u,q_1t, \ldots, q_vt)\mathrm{Re}(R,Q)$. Dann ist A in jedem irrelevanten Primideal enthalten, das u enthält. Daher gibt es eine natürliche Zahl c_o, so daß für $r \geq c_o$ gilt

$$A^r \cap \mathrm{rel}(u \cdot \mathrm{Re}(R,Q)) \subseteq u \cdot \mathrm{Re}(R,Q)$$

und $A^r \cap \mathrm{rel}(u,(o:x)^x)\mathrm{Re}(R,Q) \in (u,(o:x)^x)\mathrm{Re}(R,q)$.

Sei nur $r \gg \mathrm{Max}\ \{c_o, c\}$, $at^r \in A^r$ und $yt^n \cdot xt^s \in \mathrm{rel}\ (u)$. Dann ist $a \cdot y \cdot x \cdot t^{n+r+s} \in u \cdot \mathrm{Re}(R,Q)$ und daher $a \cdot y \cdot x \in Q^{n+r+s+1}$, was $a \cdot y \in (Q^{n+r+s+1} : x \cdot R) \cap (Q^c,(o:x)) = (Q^{n+r+1},(o:x))$ zur Folge hat. Für die Restklassen modulo $(o:x)$ gilt dann $\bar{a} \cdot \bar{y} \in \bar{Q}^{n+r+1}$. Daher ist $\bar{a} \cdot \bar{y} \cdot t^{n+r} \in u \cdot \mathrm{Re}(\bar{R},\bar{Q})$, wenn $\bar{R} = R/(o:x)$. Aus der Isomorphie $\mathrm{Re}(\bar{R},\bar{Q}) \cong \mathrm{Re}(R,Q)/(o:x)^*$ ergibt sich $at^r \cdot yt^n \in (u,(o:x)^*)\mathrm{Re}(r,Q)$ und daher $A^r \cdot yt^n \in (u,(o:x)^*)$ $\mathrm{Re}(R,Q)$. Hieraus erhalten wir $yt^n \in \mathrm{rel}(u,(o:x)^*)\mathrm{Re}(R,Q)$.

Sei umgekehrt $yt^n \in rel(u,(o:x)^*)Re(R,Q)$ und $at^r \in A^r$, so daß nach obigen Voraussetzungen über r gilt

$$yt^n \cdot at^r \in (u,(o:x)^*)Re(R,Q).$$

Da offenbar $xt^s \cdot (o:x)^* Re(R,Q) = o \cdot Re(R,Q)$, haben wir $yt^n \cdot at^r \cdot xt^s \in u \cdot Re(R,Q)$ und daher $yt^n \cdot xt^s \cdot A^r \subseteq rel(u \cdot Re(R,Q))$, was $yt^n \cdot xt^s \in rel(u)$ und damit auch $yt^n \in rel(u): (xt^s)$ zur Folge hat.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $y \in (Q^{n+s} : x \cdot R) \cap (Q^c, (o:x))$, also $x \cdot y \in Q^{n+s}$, und $c \geq c_o$ mit obigem c_o. Ist $y \in (o:x)$, so ist nichts zu zeigen. Sei daher $y \notin (o:x)$ und $p \geq c$ derart, daß $y \in (Q^p,(o:x))$, aber $y \notin (Q^{p+1}, (o:x))$ und angenommen, p sei kleiner als n. Dann ist $yt^p \in u \cdot Re(R,Q) : (xt^s) \subseteq$

$$\subseteq rel(u \cdot Re(R,Q)) : (xt^s) = rel(u,(o:x)^*)Re(R,Q).$$

Da $p \geq c_o$, haben wir $yt^p \in (u,(o:x)^*)Re(R,Q)$ und nach Restklassenbildung modulo $(o:x)^*$ auch $\bar{y}t^p \in u \cdot Re(\bar{R},\bar{Q})$, also $\bar{y} \in \bar{Q}^{p+1}$ und für den Repräsentanten y von $\bar{y}$ offenbar $y \in (Q^{p+1},(o:x))$ im Widerspruch zur Voraussetzung über p.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $z = y \cdot x \in Q^{n+s} \cap (x)$. Dann ist nach /2/, Theorem 3.12, $y \in Q^{n+s} : x \cdot R \subseteq (Q^{n+s-p},(o:x))$ mit einem von n unabhängigem p. Sei $y' \in Q^{n+s-p}$ derart, daß $x \cdot y = x \cdot y'$. Dann ist $y' \in (Q^{n+s} : x \cdot R) \cap (Q^c,(o:x)) = (Q^n,(o:x))$ und folglich $z = x \cdot y = x \cdot y' \in (x) \cdot Q^n$. Die Umkehrung ist trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $y \in (Q^{n+s}: x \cdot R) \cap (Q^c,(o:x))$. Dann ist $x \cdot y \in Q^{n+s} \cap (x) = Q^n \cdot (x)$, etwa $x \cdot y = x \cdot y'$ mit $y' \in Q^n$. Somit ist $(y - y') \in (o:x)$ und daher $y \in (Q^n,(o:x))$, qed.

<u>Folgerung 1:</u> In lokalen Ringen (R,M), in denen $B \neq (o)$ gilt, sind für ein Element x mit $x \in B$, $x \neq o$ und $x \in Q^s$ $(s \geq 1)$ die Bedingungen (i), (ii) und (iii) stets erfüllt.

<u>Beweis:</u> Setzen wir wie im Lemma 2 $o \cdot R = B \cap C$, so ist $(o:x) = C : x \cdot R$, und alle assoziierten Primideale von Q enthalten $(o:x)$. Daher gilt für genügend große natürliche Zahlen n

$$Q^n \subseteq (o:x) \text{ und } Q^{n+s} : x \cdot R \subseteq (o:x) + Q^{n+s-p} \subseteq (o:x)$$

wegen /2/, Theorem 3.12, was (i) beweist.

<u>Folgerung 2:</u> Folgende Bedingungen sind für genügend große natürliche Zahlen n äquivalent:

(i) $(Q^{n+s} : x \cdot R) \cap Q^c = Q^n$;

(ii) $(Q^{n+s} : x \cdot R) \cap (Q^c,(o:x)) = (Q^n,(o:x))$ und $B : x \cdot R = B$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satz und /1/, Theorem 3.

<u>Bemerkung:</u> Sei $B : x \cdot R = B$ erfüllt. Dann gilt

$$\mathrm{rel}(u,(o:x)^*) = \mathrm{rel}(u \cdot \mathrm{Re}(R,Q)).$$

Denn nach Lemma 2 und Voraussetzung gilt

$$\mathrm{rel}(u,(o:x)^*)\mathrm{Re}(R,Q) = \mathrm{rel}(u,(B : x \cdot R)^*) = \mathrm{rel}(u,B^*)\mathrm{Re}(R,Q).$$

Da $B^* = \mathrm{rel}(o \cdot \mathrm{Re}(R,Q))$, ist $B^* \subseteq \mathrm{rel}(u \cdot \mathrm{Re}(R,Q))$, und wegen $u \in \mathrm{rel}(u \cdot \mathrm{Re}(R,Q))$ gilt obige Beziehung.

<u>Literatur:</u>

/1/ Kirby, D. A note on superficial elements of an ideal in a local ring; Quart. J. Math. Oxford (2) <u>14</u> 21 - 28 (1963)

/2/ Nagata, M. Local rings; New York, London 1962

/3/ Rees, D. A note on form rings and ideals; Mathematika <u>4</u> 51 - 60 (1957)

<u>Anschrift des Verfassers:</u>

Dr.rer.nat. Dieter Neßelmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Jürgen Dassow

Über quasideterministische Sprachen[*]

1. Einleitung

L-Systeme wurden von A. Lindenmayer 1968 als mathematisches Modell für die Entwicklung von Lebewesen (z.B. Algen) eingeführt. Bei den zuerst betrachteten OL-Systemen hängt die Entwicklung einer Zelle nicht von den Nachbarzellen ab, und auch der Einfluß der Umwelt bleibt unberücksichtigt. Daher tritt eine erheblich größere Vielfalt bei der Entwicklung auf als in der Natur. In mehreren Arbeiten wurden deshalb neue Typen von L-Systemen eingeführt, um eine größere Determination zu erreichen. In /1/ wird dies durch Bedingungen an die Wörter erreicht, in /8/ durch Beschränkung der möglichen Kopplungen von Regeln, in /6/ durch Bedingungen an die Ableitungen mittels Kontrollmengen. In dieser Arbeit führen wir einen neuen Typ von OL-Systemen ein, der dadurch gekennzeichnet ist, daß in jedem Schritt die Entwicklung eines Zelltyps (z.B. durch die Umwelt) determiniert ist, d.h. alle Zellen gleichen Typs entwickeln sich gleich. Sprachen, die von Systemen mit dieser Beschränkung erzeugt werden, nennen wir quasideterministisch. Sie können durch spezielle TOL-Systeme erzeugt werden. Der entsprechende Ansatz für kontext-freie Sprachen wurde in /9/ gegeben.

Im ersten Abschnitt der Arbeit ordnen wir die quasideterministischen Sprachen in die Chomsky-Hierarchie ein und untersuchen dann im zweiten Kapitel das Verhalten bei Operationen. Insbesondere beweisen wir dabei, daß quasideterministische Sprachen gegenüber keiner der AFL-Operationen abgeschlossen sind, und studieren den Einfluß verschiedener Homomorphismen auf die generative Kapazität.

[*] Erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten auf dem Internationalen Symposium "Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen in der Kybernetik", 20. - 26. April 1975, Rostock.

2. Quasideterministische Sprachen und die Chomsky-Hierarchie

Wir setzen voraus, daß der Leser mit den Grundbegriffen der Theorie der formalen Sprachen (Konkatenation, Kleenescher $*$- und $+$-Operator, Homomorphismus, reguläre, kontext-freie, kontext-abhängige Sprache) vertraut ist (vgl. z.B. /2/).
Wir geben nun einige Standarddefinitionen aus der Theorie der Lindenmayer-Systeme.
Unter einem EOL-System verstehen wir ein Quadrupel

$G = (V, \Sigma, P, \sigma)$ mit

V ist ein Alphabet, $\Sigma \subseteq V$, $\Sigma \neq \emptyset$ (1)

P ist eine endliche Teilmenge von $V \times V^*$ mit der Bedingung, daß es zu jedem $v \in V$ ein $x \in V^*$ mit $(v,x) \in P$ gibt (2)

σ ist ein Element von V^+ (3)

Für die Elemente von P schreiben wir auch $v \to x$ und nennen sie Produktionen.
Ein OL-System ist ein EOL-System mit $V = \Sigma$. Wir geben dann G auch als Tripel $G = (V,P,\sigma)$ an. G heißt deterministisch (Abk. D), wenn es zu jedem $v \in V$ genau eine Produktion $v \to x$ gibt.
G ist ein fortpflanzendes System (Abk. P von propagating), wenn für jede Produktion $c \to x$ die Beziehung $x \neq e$ (e sei das Leerwort) gilt.
Ein ETOL-System ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \sigma)$, wobei V, Σ und σ den Bedingungen (1) und (3) genügen und $\mathcal{P}$ eine endliche Menge $\{P_1, \dots, P_r\}$ ist, deren Elemente sämlich der Bedingung (2) genügen. Ein ETOL-System heißt deterministisch bzw. fortpflanzend, wenn jedes $P_i \in \mathcal{P}$ deterministisch bzw. fortpflanzend ist.
Wir werden die Bezeichnungen auch kombinieren und so EPTOL-, DTOL-, DPOL-Systeme usw. erhalten.

Für $x,y \in V^*$ gelte $x \Rightarrow y$, wenn $x = x_1 \dots x_k$, $y = y_1 y_2 \dots y_k$, $x_i \in V$ für $i = 1, \dots, k$ und $x_i \to y_i \in P$ (P_j für ein TOL-System) für $i = 1, \dots, k$ gilt. $\overset{*}{\Rightarrow}$ bezeichne den reflexiven und transitiven Abschluß von $\Rightarrow$. Es sei

$$L(G) = \{x : x \in \Sigma^*, \sigma \overset{*}{\Rightarrow} x\}.$$

$L \subseteq V^*$ heißt XOL-Sprache, wenn ein XOL-System G mit $L = L(G)$ existiert. Die Menge aller XOL-Sprachen bezeichnen wir mit XOL. (Dabei sei X eine mögliche Kombination von D, P, T, E oder ein Leerzeichen.)

Wir kommen nun zur Definition der quasideterministischen Sprachen.

<u>Definition 1:</u> Für $x, y \in V^*$ sei $x \rightsquigarrow y$ durch die folgenden Bedingungen definiert:

$x = x_1 \ldots x_k$, $y = y_1 \ldots y_k$,

$x_i \in V$ und $x_i \rightarrow y_i \in P$ für $i = 1, \ldots, k$,

$x_i = x_j$ impliziert $y_i = y_j$.

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ bezeichne den reflexiven und transitiven Abschluß von $\rightsquigarrow$.

$Q(G)$ sei durch $Q(G) = \{x : x \in \Sigma, \sigma \overset{*}{\rightsquigarrow} x\}$ gegeben.

<u>Definition 2:</u> L heißt quasideterministische XOL-Sprache (XQDOL-Sprache), wenn ein XOL-System G mit $L = Q(G)$ existiert.

<u>Beispiel 1:</u> Sei $G_1 = (\{a, b\}, \{a \rightarrow aa, b \rightarrow ab, b \rightarrow e\}, b)$. Dann ist $L_1 = Q(G_1) = \{a^{2^i-1}b : i \geq 0\} \cup \{a^{(2^i-1)2^j} : i \geq 0, j \geq 0\}$ eine quasideterministische Sprache.

<u>Beispiel 2:</u> Für $G_2 = (V, P, a)$ mit $V = \{a, b, c\}$ und $P = \{a \rightarrow aa, a \rightarrow cb, b \rightarrow b, c \rightarrow cb\}$ ergibt sich

$Q(G_2) = \{a^{2^i} : i \geq 0\} \cup \{(cb^l)^{2^i} : l \geq 0, i \geq 0\}$.

Der folgende Satz gibt uns einen Überblick über die QDOL-Sprachen über einem einelementigen Alphabet.

<u>Satz 1:</u> Es sei $V = \{a\}$. $L \subset V^*$ ist genau dann eine QDOL-Sprache wenn

$$L = \{a^{ik_1^{i_1} \ldots k_t^{i_t}} : i_j \geq 0, 1 \leq j \leq t\} \cup \delta$$

mit gewissen natürlichen Zahlen $t \geq 1$, $k_j \geq 1$, $1 \leq j \leq t$ und $\delta \in \{\emptyset, \{e\}\}$ ist.

Beweis: Man sieht leicht, daß $L = Q(G)$ mit

$$G = (\{a\}, \{a \rightarrow a^{k_1}, a \rightarrow a^{k_2}, \ldots, a \rightarrow a^{k_t}\}, a^i)$$

im Fall $\delta = \emptyset$ ist. Ist $\delta = \{e\}$, so kommt noch $a \rightarrow e$ in P. RG, CF, CS bezeichnendie Menge der regulären, kontext-freien, kontext-abhängigen Sprachen.

Satz 2: i) Die Mengen RG, CF, OL, EOL sind unvergleichbar mit QDOL, haben aber einen nichtleeren Durchschnitt mit QDOL.
ii) QDOL $\subset$ DTOL $\subset$ TOL $\subset$ CS
iii) DOL $\subset$ QDOL.

Beweis: i) Wir zeigen zuerst, daß die Sprache L_2 aus Beispiel 2 keine EOL-Sprache ist. Sei dazu $h(a) = h(c) = a$ und $h(b) = b$. Da EOL nach /3/, Bemerkung nach Theorem 8 gegenüber e-freien Homomorphismen abgeschlossen ist, wäre mit L_2 auch

$$h(L_2) = \{(ab^l)^{2^i} : l \geq 0, i \geq 0\}$$

in EOL. Das widerspricht aber /4/, example 4.
Andererseits ist L_2 wegen Beispiel 2 in QDOL.

Weiterhin ist $L_3 = \{a^i, a^{i-1}, \ldots, a, e\}$ für $i \geq 2$ eine reguläre Sprache (vgl. /2/, II), und es gilt auch $L_3 \in$ OL nach /5/, Theorem 2.4. iii)a). Aber es ist nach Satz 1 $L_3 \notin$ QDOL.
Der eine Teil der Behauptung folgt nun aus den bekannten Relationen RG $\subset$ CF $\subset$ EOL und OL $\subset$ EOL.
$\{a\}$ liegt aber sicher in RG, CF, OL, EOL, QDOL.
ii) Da DTOL $\subset$ TOL $\subset$ CS bekannte Fakten sind, reicht es QDOL $\subset$ DTOL zu beweisen.
Sei daher $L \in$ QDOL und $G = (V, P, \sigma)$ mit $L = Q(G)$. Wir konstruieren nun alle möglichen deterministischen OL-Systeme

$G_i = (V, P_i, \sigma)$, für die $v \rightarrow x \in P_i$ auch $v \rightarrow x \in P$ impliziert.

$G' = (V, \{P_1, \ldots, P_r\}, \sigma)$ ist dann ein DTOL-System. Ferner gilt $L(G') = Q(G)$, wie man leicht nachprüft.

Zu zeigen bleibt QDOL $\subsetneq$ DTOL.

$G = (\{a, b\}, \{P_1, P_2\}, ab)$ mit $P_1 = \{a \rightarrow a^3, b \rightarrow b^3\}$ und

$P_2 = \{a \rightarrow a^2, b \rightarrow b^2\}$

ist ein DTOL-System, das die Sprache

$L(G) = \{a^{2^i 3^j} b^{2^i 3^j} : i \geq 0, j \geq 0\}$ erzeugt.

Wir zeigen nun, daß L(G) keine quasideterministische Sprache ist. Angenommen, es wäre $L(G) = Q(G')$ für ein OL-System $G' = (V, P, \sigma')$. Zuerst bemerken wir, daß dann $a \rightarrow e$, $b \rightarrow e \notin P$ gilt, da sonst b^k oder a^l für gewisse k, l in $Q(G')$ liegen würde. G' ist also fortpflanzend. Daher muß $\sigma' = ab$ gelten. Ferner ist $L(G) \subseteq a^* b^*$, und somit können in P nur Regeln der Form $a \rightarrow a^{k_i}$ und $b \rightarrow b^{l_j}$ vorkommen. Da G' fortpflanzend ist und $ab \overset{*}{\rightsquigarrow} a^2b^2$ gilt, muß $a \rightarrow a^2$, $b \rightarrow b^2 \in P$ sein. Weiterhin ist $a^2b^2 \overset{*}{\rightsquigarrow} a^3b^3$ unmöglich. Also muß $ab \rightsquigarrow a^3b^3$ gelten. Dies liefert $a \rightarrow a^3$, $b \rightarrow b^3 \in P$. Damit ist a^2b^3 in $Q(G')$. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

iii) folgt aus der Definition und $\{a^{2^j 3^k} : j \geq 0, k \geq 0\} \notin$ DOL. Man sieht auch leicht, daß die quasideterministischen Sprachen von den Sprachen verschieden sind, die in /1/ betrachtet werden. Aus /1/, S. 1 - 2 ersieht man, daß

$\{a^{2^i 3^j} b^{2^i 3^j} : i \geq 0, j \geq 0\}$ die Bedingung (P3) aus /1/ erfüllt. Umgekehrt erfüllt

$L = \{a, bcdfg, bcdcg, bfdcg, bfdfg\}$

trivialerweise (P3) nicht, aber es gilt $L = Q(G)$ für

$G = (V, P, a)$ mit $V = \{a, b, c, d, f, g\}$ und

$P = \{a \rightarrow bcdfg,\ a \rightarrow bcdcg,\ a \rightarrow bfdcg,\ a \rightarrow bfdfg,\ b \rightarrow b,\ c \rightarrow c,$
$d \rightarrow d,\ f \rightarrow f,\ g \rightarrow g\}$.

3. Operationen mit quasideterministischen Sprachen

Die üblichen Operationen mit Sprachen sind auch von biologischem Interesse, wie z.B. in /3/, /10/, /7/ ausgeführt wurde. Daher studieren wir nun das Verhalten von QDOL-Sprachen hinsichtlich der AFL-Operationen und die Auswirkungen von Homomorphismen auf die generative Kapazität.

Ginsburg und Greibach definierten eine AFL (Abstract Family of Languages) als eine Familie von Sprachen, die gegenüber Vereinigung, Konkatenation, Kleeneschem +-Operator, e-freien Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Durchschnitten mit regulären Mengen abgeschlossen ist. Eine Anti-AFL ist eine Sprachfamilie, die gegenüber keiner der AFL-Operationen abgeschlossen ist.

(Um triviale Beispiele auszuschließen, werden wir hier festsetzen, daß $\emptyset$ zu jeder Familie gehört und daß mit L auch $L \cup \{e\}$ zu der Familie gehört.)

<u>Satz 3:</u> i) QDOL ist eine Anti-AFL.

ii) QDOL ist gegenüber der Invertierung der Wörter (reversal) abgeschlossen.

<u>Beweis:</u> i) a) Nach Satz 1 sind $L_3 = \{a^{2^i} : i \geq 0\}$ und $L_4 = \{a^{3^i} : i \geq 0\}$ in QDOL, aber $L_3 \cup L_4$ nicht.

b) Ebenfalls nach Satz 1 liegt $L_5 = \{a^3, e\}$ in QDOL, aber es gilt $L_3 L_5 \notin$ QDOL.

c) $L_5^+ = \{a^{3i} : i \geq 1\}$ ist keine quasideterministische Sprache.

d) Für $G = (\{a,b\}, \{a \rightarrow aa,\ b \rightarrow b\}, ab)$ ist $L(G) = Q(G) = \{a^{2^i} b : i \geq 0\}$. Setzen wir nun $h(a) = h(b) = a$ so ist $h(Q(G)) = \{a^{2^i+1} : i \geq 0\} \notin$ QDOL nach Satz 1.

e) Sei wieder $h(a) = h(b) = a$. Dann ist

$h^{-1}(L_5) = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, e\}$.

$h^{-1}(L_5)$ ist aber keine quasideterministische Sprache.

Wäre nämlich für $G = (\{a,b\}, P, \sigma)$ die Beziehung

$h^{-1}(L_5) = Q(G)$ erfüllt, so enthält P keine Produktion der Form $v \rightarrow x$ mit $|x| \geq 2$, da sonst aaa oder bbb ein Wort der Länge $l \geq 6$ erzeugen würde.
Ist ferner $a \rightarrow e \in P$, so werden bei Existenz einer Produktion $b \rightarrow x$, $x \in \{a,b\}$ ($|x| \leq 1$ ist nach obigem klar) auch Worte der Länge 1 und 2 erzeugt. Im anderen Fall gilt $P = \{a \rightarrow e, b \rightarrow e\}$, womit $Q(G) = \{\sigma, e\} \neq h^{-1}(L_5)$ wäre.
Somit besteht nur die Möglichkeit, daß alle Produktionen in P die Form $v \rightarrow x$, $x \in \{a,b\}$, haben. σ enthält nun aber a oder b zweimal, sagen wir an den Stellen l_1, l_2. Die Quasideterminiertheit bewirkt nun aber, daß an den Stellen l_1, l_2 immer die gleichen Buchstaben stehen. Daher kann $Q(G) = h^{-1}(L_5)$ nicht gelten.

f) Nach Beispiel 1 und Satz 1 gilt $L_1 \in$ QDOL, $L_1 \cap a^* \notin$ QDOL.

ii) beweist man wie Theorem 3 in /8/.

Man kann leicht zeigen, daß QDOL auch gegenüber Durchschnittsbildung, Links- und Rechtsderivat (bzgl. $v \in V$) nicht abgeschlossen ist.

Mit H, C, W, N kürzen wir Homomorphismen, Kodierungen (Codings, längentreue Homomorphismen), weiche Kodierungen (weak codings, Homomorphismen mit $|h(a)| \leq 1$ für alle a) und e-freie Homomorphismen (nonerasing) ab. YXOL bezeichne das Bild von XOL bei $Y \in \{H, C, W, N\}$.

<u>Lemma 4:</u> PQDOL $\subset$ QDOL

<u>Beweis:</u> $\{ab, a\} \in$ QDOL gilt wegen $\{ab, a\} = Q(G)$ für $G = (\{a,b\}, \{a \rightarrow a, b \rightarrow e\}, ab)$. Andererseits gilt aber $\{ab, a\} \notin$ PQDOL, da $ab \overset{*}{\Longrightarrow} a$ bei einem fortpflanzenden System unmöglich ist und aus $a \overset{*}{\Longrightarrow} ab$ auch $a \overset{*}{\rightsquigarrow} abw$ folgt, indem man $a \overset{*}{\rightsquigarrow} ab$ und $b \overset{*}{\rightsquigarrow} w$ anwendet, wobei $w \neq e$ gelten muß, da es sich um eine fortpflanznedes System handelt.
Damit ist die Behauptung bewiesen, da PQDOL $\subseteq$ QDOL aus den Definitionen folgt.

Lemma 5: i) CQDOL = NQDOL

ii) WQDOL = HQDOL = HPQDOL = WPQDOL

Beweis: Analog /7/, Lemma 3.1. und Lemma 3.2. .

Lemma 6: i) HQDOL $\subseteq$ EQDOL

ii) NPQDOL $\subseteq$ EPQDOL

Beweis: i) Seien $L \in$ HQDOL, $G = (V, P, \sigma)$ das OL-System und $h : V \rightarrow V'$ der Homomorphismus mit $h(Q(G)) = L$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $V \cap V' = \emptyset$ annehmen. Es ist leicht zu sehen, daß das EOL-System

$G' = (V \cup V' \cup \{z\}, V', P \cup P', \sigma)$ mit $z \notin V \cup V'$ und

$P' = \{v' \rightarrow z : v' \in V'\} \cup \{z \rightarrow z\} \cup \{v \rightarrow h(v) : v \in V\}$ die

Bedingung $h(Q(G)) = Q(G')$ erfüllt.

ii) beweist man analog.

Lemma 7: i) $L_6 = \{(aba)^{2^i} : i \geq 0\} \in$ QDOL, $\notin$ EPQDOL

ii) $L_7 = \{a^{2^i+1} : i \geq 0\} \in$ CPQDOL, $\notin$ QDOL

Beweis: i) L_6 ist nach /7/, Lemma 5.1. sogar eine DOL-Sprache. $L_6 \notin$ EPQDOL läßt sich wie folgt beweisen: Da das System fortpflanzend sein soll, ist $\sigma = aba$. Somit gilt $aba \overset{*}{\rightsquigarrow} abaaba$. Da sicher $aba \overset{*}{\rightsquigarrow} wvw$ mit $w, v \in V^+$ gilt, gibt es nur die Möglichkeiten

$a \overset{*}{\rightsquigarrow} aba$ und $b \overset{*}{\rightsquigarrow} e$ oder $b \overset{*}{\rightsquigarrow} abaaba$ und $a \overset{*}{\rightsquigarrow} e$.

Beides ist bei einem fortpflanzenden System unmöglich.

ii) folgt aus dem Beweis von Satz 3 d).

Folgerung 8: i) EPQDOL, NPQDOL, CPQDOL sind unvergleichbar mit QDOL.

ii) EPQDOL $\subset$ EQDOL

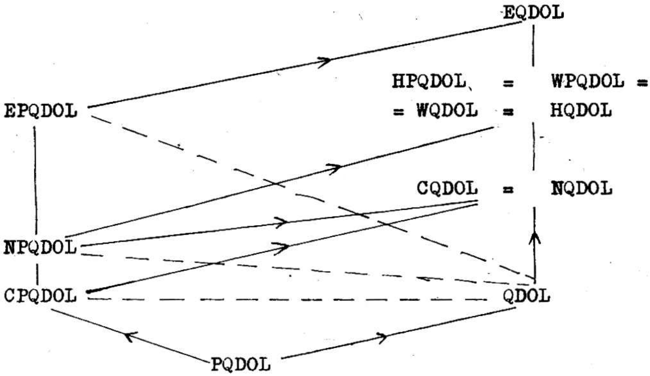
iii) PQDOL $\subset$ CPQDOL $\subset$ CQDOL

iv) QDOL $\subset$ CQDOL

v) NPQDOL $\subset$ NQDOL

Beweis: Die Inklusionen folgen aus den Definitionen, und mittels der Sprachen aus Lemma 7 und den vorher bewiesenen Inklusionen zeigt man, daß die Gleichheit nicht eintreten kann.

Zusammenfassend erhalten wir das folgende Diagramm. Dabei steht eine durchbrochene Linie für Unvergleichbarkeit bei nichtleerem Durchschnitt, eine durchgezogene Linie für die Inklusion, wobei die höher stehende Menge die umfassendere ist, und ein Pfeil für echte Inklusion.



Literatur

/1/ Engelfriet, J., Skyum, S., Copying Theorems, DAIMI PB-48, Techn. report, Aarhus, (1975)

/2/ Ginsburg, S., The Mathematical Theory of Context-Free Languages, Mc Graw-Hill, 1966

/3/ Herman, G.T., Closure properties of some families of languages associated with biological systems, Inf. Control 24, 101 - 121, (1974)

/4/ Herman, G.T., A biologically motivated extension of ALGOL-like languages, Inf. Control 22, 487 - 502, (1973)

/5/ Herman, G.T., Lee, K.P., van Leeuwen, J., Rozenberg,G. Characterization of unary development languages

Discrete Mathematics 6, 235 - 247, (1973)

/6/ Nielsen, M., EOL and ETOL Systems with Control Devices, DAIMI PB-37, Techn. report, Aarhus (1974)

/7/ Nielsen, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., Skyum, S., Nonterminals, homomophisms and codings in different variations of OL-systems, Acta Informatica 3, 357 - 364 und Acta Informatica 4, 87 - 106, (1974)

/8/ Rozenberg, G. TOL systems and languages, Inf. Control 23, 357 - 381, (1973)

/9/ Siromoney, R., Krithivasan, K., Parallel context-free languages, Inf. Control 24, 155 - 162, (1974)

/10/ Vitanyi, P.M.B. Deterministic Lindenmayer Languages, Nonterminals and Homomorphisms, Prepublication IW 28/74, Math. Centrum Amsterdam, (1974)

Anschrift des Verfassers

Dr.rer.nat. Jürgen Dassow
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Adolf Kotzauer

Graphische Programmsysteme [1]

Durch die Schaffung neuer peripherer Geräte für die Rechenautomaten entstehen neue Anwendungsgebiete für die Informationsverarbeitung. Dies trifft besonders durch die Entwicklung der graphischen peripheren Geräte wie Zeichenmaschinen, graphische Bildschirmgeräte, Digitalisiergeräte für den Einsatz der Rechentechnik in Konstruktion, Projektierung und Entwicklung, allgemein gesprochen der graphischen Datenverarbeitung, zu. Erste Untersuchungen gehen bis Anfang der 60er Jahre zurück, aber erst die gegenwärtigen modernen Hilfsmittel erlauben einen umfassenden Einsatz.

Bei der Bearbeitung von graphischen Problemen findet ein ständiger Wechsel zwischen algorithmischen und heuristischen Prozessen statt. Dies drückt sich rechentechnisch gesehen durch den Dialog zwischen Mensch und EDVA aus und dokumentiert eine neue Qualität in der Stellung des Menschen zur EDVA. Die Konsequenzen daraus ergeben sich in der Entwicklung neuer Geräte und entsprechender Software. Ein solcher Qualitätssprung verlangt in der Regel auch das nochmalige Durchdenken schon vorhandener und bewährter Vorgehensweisen, die dann oft in einem anderen Licht und Zusammenhang übersichtlicher erscheinen.

1. Programmsysteme und Programmpakete

1.1. Sprachhierarchie in Rechnersystemen

Grundprinzip der Arbeit eines Rechenautomaten ist, daß er nur Programme in seiner Maschinensprache verarbeiten kann. Dabei gilt die Verarbeitungshierarchie: Maschinensprache - Bitgruppe-Verarbeitungsketten. Diese Verarbeitungshierarchie wird im Hinblick auf die weiteren Untersuchungen als Sprachhierarchie

[1] Die Arbeit war Teil eines Vortrages auf der Hauptjahrestagung der AG Programm- und Projektbibliotheken des MHF in Rostock im Februar 1976.

im Rechenautomaten angesehen. Abb. 1 zeigt diese Hierarchie auf und skizziert gleichzeitig die dafür notwendigen technischen Hilfsmittel (zentrale Steuerschleife, Entscheidungspyramide).

Es zeigte sich sehr bald, daß die Programmerstellung in Maschinensprache für den Menschen sehr zeitaufwendig und fehleranfällig ist. Außerdem wuchs einerseits die Menge der zu lösenden Aufgaben und andererseits die Verarbeitungsgeschwindigkeit der Rechenautomaten derart an, daß für die Programmerstellung ein-

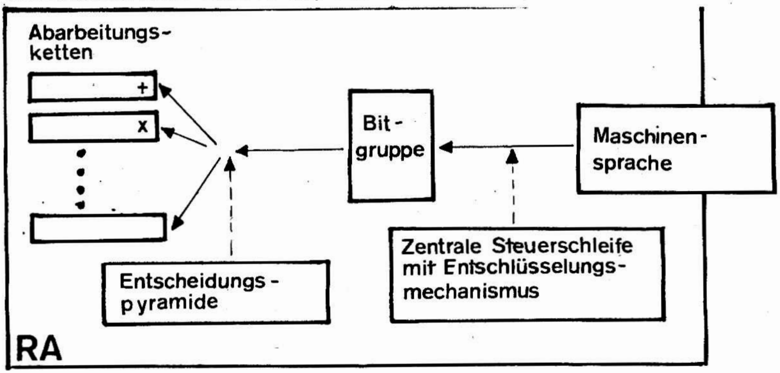


Abb. 1 Sprachhierarchie im Rechenautomaten

fachere und effektivere Hilfsmittel geschaffen werden mußten. Dies führte zur Entwicklung der maschinenabhänigen bzw. Assemblersprachen und der Universalsprachen für entsprechende Anwendungskomplexe (z.B. FORTRAN vorwiegend für numerische Berechnungen, COBOL für den kommerziellen Bereich). Abb. 2 gibt die Sprachhierarchie durch die Sprachniveaus: Universalsprache - maschinenabhängige Sprache - Maschinensprache an und skizziert dazu die notwendigen programmtechnischen Hilfsmittel (Compiler, Assembler), die bei den gegenwärtigen Rechenautomaten feste Bestandteile des Betriebssystems sind. Folglich kann von einer Sprachhierarchie im Betriebssystem gesprochen werden. Dadurch entsteht z.B. für den Ersteller eines FORTRAN-Programms der Eindruck, daß der Rechenautomat die Sprache FORTRAN versteht (Analoges gilt für die anderen Sprachen).

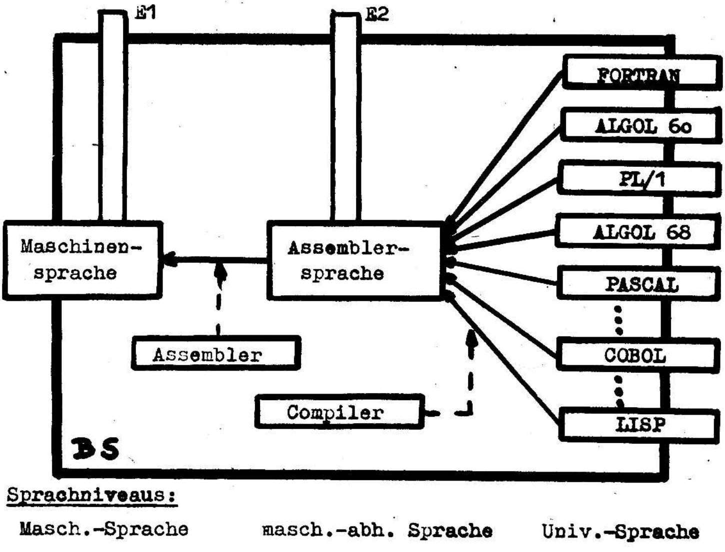


Abb. 2   Sprachhierarchie im Betriebssystem

Durch die obigen Betrachtungen wird die folgende Definition verständlich:

Definition 1: Ein Rechnersystem ist ein Rechenautomat mit dem zugehörigen Betriebssystem

Somit wird die Sprachhierarchie in einem Rechnersystem durch die Abbildungen 1 und 2 charakterisiert. In einem konkreten Rechnersystem ist nur eine Auswahl der in Abb. 2 angegebenen Universalsprachen zu finden. Sie ist abhängig von den im Betriebssystem vorhandenen Compilern.

Die Universalsprachen sind maschinenunabhängige Sprachen. Ihre Definition erfolgt in der Regel in einem Bericht (z.B. ALGOL 60) bzw. durch Standards (z.B. FORTRAN). Sie bilden die Grundlage zur Erstellung der entsprechenden Compiler für einen konkreten Rechenautomaten. Die Compilerhersteller legen fest, ob der volle Umfang der Sprachdefinition oder nur Teile bzw. ob maschinenspezifische Ergänzungen zur Definition implementiert werden. Man spricht dann im Vergleich zur Definition von einem maschinenabhängigen Dialekt der Universalsprache.

1.2. Arbeitsweise in Rechnersystemen

Bei der Betrachtung der Arbeitsweise in Rechnersystemen lassen sich zwei Phasen erkennen:

1. Ü-Phase (Übersetzung)
2. A-Phase (Abarbeitung)

Die Ü-Phase besteht im wesentlichen aus Übersetzungen von Programmen, die in einer höheren Sprache als der Maschinensprache geschrieben sind, in die Maschinensprache. Die zu verarbeitenden Informationen in der Ü-Phase sind Programme. Die Ü-Phase ist im Betriebssystem angelagert und aus Abb. 2 ersichtlich. Somit können in Abb. 2 die Kästchen der Universalsprachen als Eingänge für die zu verarbeitenden Informationen der Ü-Phase angesehen werden und das der Maschinensprache als Ausgang. Ferner gestatten alle Betriebssysteme, die Ü-Phase abzukürzen bzw. zu unterbrechen, indem Programme in der Assemblersprache und auch in der Maschinensprache eingegeben bzw. ausgegeben werden können. Dies sollen die Kästchen E1 und E2 in Abb. 2 veranschaulichen. Dadurch können spezielle aufgaben- und anwenderabhängige Bibliotheken benutzt bzw. aufgebaut werden.

In der A-Phase werden die in der Ü-Phase erstellten Programme (sie liegen vollständig in Maschinensprache vor) abgearbeitet. Die A-Phase ist im Rechenautomaten angelagert und aus Abb. 1 ersichtlich. Die zu verarbeitenden Informationen sind Daten, die von den vorhandenen Programmen zu den gewünschten Ergebnissen verarbeitet werden.
Für die Arbeit des Betriebssystems, d.h. für die Ü-Phase, wird ebenfalls ein Rechner benötigt, der im gegenwärtigen Entwicklungsstand meistens mit dem in der A-Phase übereinstimmt. Die Trennung in beide Phasen wird verständlicher, wenn die Ü-Phase

von einem Rechenautomaten (in der Regel von einem Großrechner) und die A-Phase von einem anderen dem Umfang des Problems angepaßten Rechenautomaten durchgeführt werden. Erfolgreiche Untersuchungen über Rechnernetze zeigen diesen Entwicklungstrend schon auf.

1.3. Definition von Programmsystem und Programmpaket

In der Rechentechnik findet man von den Begriffen "Programmsystem" und "Programmpaket" keine einheitliche Definition. Jeder Fachmann hat seine eigenen Vorstellungen darüber. Ausgehend von den Überlegungen in 1.1. und 1.2. wird eine Definition angegeben, die einerseits eine klare Trennung beider Begriffe ermöglicht und andererseits ihre Gemeinsamkeiten und ihre Struktur aufzeigt. Dazu werden die folgenden Definitionen angegeben:

Definition 2: Ein Programmjob ist eine Menge von Teilprogrammen versehen mit den entsprechenden Steuerinformationen für das jeweilige Betriebssystem und den zugehörigen Daten.

Bemerkungen zur Definition:
- In der Definition ist offengelassen worden, in welcher Form die einzelnen Teilprogramme anzuordnen sind, da dies von Sprache zu Sprache unterschiedlich sein kann, z.B. in ALGOL 60 eine ineinandergeschachtelte Anordnung, in FORTRAN ein beliebiges Nebeneinanderstellen.
- Die einzelnen Teilprogramme können in unterschiedlichen Sprachen geschrieben sein. Derartige Möglichkeiten gestatten schon die heutigen Betriebssysteme.
- In einem Programmjob ist ein Teilprogramm als Hauptprogramm ausgezeichnet und die restlichen werden als Unterprogramme bezeichnet.
- Der Programmjob ist vom Nutzer zusammenzustellen.

Ein Rechnersystem ist so organisiert, daß es erst arbeiten kann, wenn ein Programmjob vorhanden ist. Dies gibt die folgende

Definition 3: Ein Rechnersystem ist arbeitsfähig, wenn ihm ein Programmjob zur Verfügung gestellt wird.

Auch mit den Hilfsmitteln des Rechnersystems kann die Erstellung eines Programmjobs für einen umfangreichen Aufgabenkomplex noch sehr aufwendig sein, so daß weitere Hilfsmittel zu erstellen sind. Dazu wird die Erweiterung eines Rechnersystems definiert.

Definition 4: Eine Erweiterung eines Rechnersystems liegt vor, wenn zur Erstellung eines Programmjobs

a) noch weitere Hilfsmittel außer den im Rechnersystem vorhandenen benutzt werden oder

b) nur eine modifizierte Form gebraucht wird.

Bemerkungen zur Definition:

- Eine einfache Erweiterung liegt schon vor, wenn ein vorhandener Programmjob benutzt wird und nur der Aufgabe entsprechende Eingabedaten bereitgestellt werden (entspricht dem Fall b) in Definition 4).
- Ein gängiges Hilfsmittel ist das Erstellen von aufgabenbezogenen Programmbausteinen (meistens Unterprogramme). Sie werden aus speziellen Bibliotheken zur Verfügung gestellt und können wahlweise zur Erstellung eines Programmjobs herangezogen werden.

Alle umfangreichen Aufgaben werden heute mit Erweiterungen von Rechnersystemen gelöst. Dabei hängt es in starkem Maße von den Möglichkeiten und der Qualität des Betriebssystems eines Rechnersystems ab, wie schnell und effektiv derartige Erweiterungen erstellt werden können.

Unter Beachtung des sprachlichen Aspekts können Erweiterungen von Rechnersystemen in zwei Gruppen aufgeteilt werden, was zur Definition der Programmsysteme und Programmpakete führt.

Definition 5: Eine Erweiterung eines Rechnersystems heißt ein Programmsystem, wenn für die zugehörigen Programmjobs die Ü-Phase vergrößert wird; ansonsten heißt die Erweiterung ein Programmpaket.

Folgerungen aus der Definition:

- Vergrößerung der Ü-Phase bedeutet Aufnahme von mindestens einem weiteren Sprachniveau in die Sprachhierarchie des Rechnersystems.

- Bei einem Programmpaket wird kein weiteres Sprachniveau hinzugenommen, obwohl bei der Benutzung des Paketes oft der Eindruck entsteht, eine spezielle Sprache zu verwenden.

Bemerkungen zur Definition:

- Für die weiteren Untersuchungen erfolgt die Vergrößerung der Ü-Phase nur um ein Sprachniveau. Die Sprachen dieses Niveaus werden Fachsprachen genannt.
- Das notwendige Übersetzungsprogramm von Fachsprache in Universalsprache heißt Vorcompiler.
- In jedem Programmsystem bzw. Programmpaket existieren Teilprogramme, die in der A-Phase eines Programmjobs benötigt werden. Diese Teilprogramme belasten nicht die Ü-Phase und sind in Maschinensprache in einer programmsystemeigenen bzw. programmpaketeigenen Bibliothek abgespeichert.

Der sprachliche Anschluß eines Programmsystems an ein Rechnersystem wird durch Abb. 3 veranschaulicht.

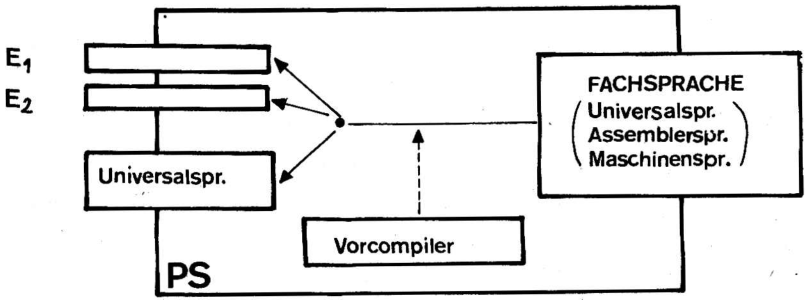


Abb. 3 Sprachlicher Anschluß eines Programmsystems an ein Rechnersystem

Ein gleichzeitiger Anschluß einer Fachsprache an mehrere Universalsprachen erfordert mehrere mehr oder weniger komplizierte Vorcompiler (für jede Universalsprache einen) und ist deshalb nicht zu empfehlen.

Die Kopplung der Fachsprache an eine Universalsprache bringt noch weitere Vorteile (s. auch Abb. 3):

1. Für eine Realisierung ist die Fachsprache eine sprachliche Erweiterung der jeweiligen Universalsprache, d.h., die Fachsprache stellt dann einen universalsprachenorientierten Dialekt dar.
2. Übernahme der Programmstruktur der Universalsprache für die Fachsprache.
3. Durch 1. und 2. bedingt erhält der Vorcompiler eine einfache Struktur und kann vorwiegend in der Universalsprache geschrieben werden.
4. Ohne großen Aufwand kann der Vorcompiler Teilprogramme, die nur in der Universalsprache oder Assemblersprache oder Maschinensprache geschrieben sind, an das Rechnersystem weiterleiten (in Abb. 3 durch E 1 und E 2 charakterisiert).

Dadurch wird die Erstellung des Vorcompilers übersichtlich. Untersuchungen an der TU Dresden (Sektion Mathematik) ergaben, daß Vorcompiler automatisch erstellt werden können, wenn die vorgegebene Fachsprache in einer entsprechenden Form notiert wird. Das dafür entwickelte Programmsystem DEPOT benutzt ALGOL 60 als Universalsprache für die jeweilige Fachsprache.

Zur Erstellung von Programmpaketen werden das Unterprogrammkonzept der jeweiligen Universalsprache und, wenn vorhanden, die Segmentierungsmöglichkeit des Betriebssystems benutzt. Wenn es das Betriebssystem erlaubt, können einzelne Teile des Programmpakets sogar in unterschiedlichen Sprachen geschrieben sein. Damit ergibt sich dann auch gleichzeitig die Benutzung des Programmpakets in mehreren Universalsprachen. Die Programmteile eines Programmpakets werden in der Regel in einer Bibliothek in Maschinensprache abgespeichert. Dadurch wird die Ü-Phase für diese Teile eingespart.

2. Graphische Programmsysteme

Aufbauend auf den Begriff des Programmsystems werden nun speziell Ausführungen zu den graphischen Programmsystemen gemacht. Die Ausführungen werden mit einem Beispiel (DIGRA 73 - System der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Sektion Mathematik) unterstrichen.

2.1. Besonderheiten

Die Fachsprache in graphischen Programmsystemen wird im weiteren als graphische Sprache bezeichnet. Für graphische Programmsysteme lassen sich folgende Besonderheiten angeben:

- Untersuchungen an der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock ergaben, daß die graphische Sprache weitestgehend unabhängig von der Universalsprache definiert werden kann. Bei konkreten Realisierungen entstehen dann universalsprachenabhängige Dialekte von einer graphischen Sprache.
- Die Grundsoftware zur Bedienung der graphischen peripheren Geräte wird Bestandteil des graphischen Programmsystems, da sie noch nicht in den gegenwärtigen Betriebssystemen vorhanden ist. Dies bringt

  N a c h t e i l e:
  1. Das Programmsystem wird umfangreicher.
  2. Im Programmsystem ist mehr Organisationsarbeit zu leisten.

  V o r t e i l e :
  1. Eine spezifizierte Nutzung der Eigenheiten der graphischen peripheren Geräte wird möglich.
  2. Bei speziellen Aufgaben kann der Umfang der Grundsoftware und damit der Speicheraufwand reduziert werden.
  3. Eine flexible Handhabung kann durch geringfügige Änderungen (z.B. in Steuerprogrammen) erreicht werden.
- Die zu verarbeitenden Informationen sind komplizierte Strukturen.
- Die Strukturen sind so aufzubauen, daß auf ihnen ein Dialog mit den interaktiven graphischen Bildschirmgeräten möglich ist.
- Der Ausgabeprozeß für graphische Informationen ist wesentlich komplexer als bei alphanumerischen Daten, besonders dann, wenn 3-dimensionale Informationen zu verarbeiten sind.

2.2. Das DIGRA 73 - System

Das DIGRA 73 - System verarbeitet 3-dimensionale graphische Informationen. Die Hardwarekonfiguration besteht aus einem Rechnersystem CD 3300 als Hauptrechner, einer im off-line Betrieb arbeitenden Zeichenmaschine und einem interaktiven graphischen Bildschirmgerät (mit Lichtstift, alphanumerischer Tastatur, Funktionstastatur, Positionierkugel) gekoppelt mit einem Kleinrechner. Das Betriebssystem MASTER 4.0 der CD 3300 gestattet Multiprogramming-Betrieb und bietet gute Möglichkeiten der Jobsegmentierung und der Erstellung von Nutzerbibliotheken.

Die graphische Sprache wird DIGRA genannt. Ihre Implementierung im DIGRA 73 - System benutzt als Universalsprache FORTRAN. Die Assemblersprache heißt COMPASS, und der Vorcompiler wird als DIGRA-Compiler bezeichnet. Als graphische Grundsoftware wird das Programmpaket GIPS des Instituts für Schiffbau Rostock benutzt. Der sprachliche Aspekt des DIGRA 73 - Systems wird in Abb. 4 dargestellt.

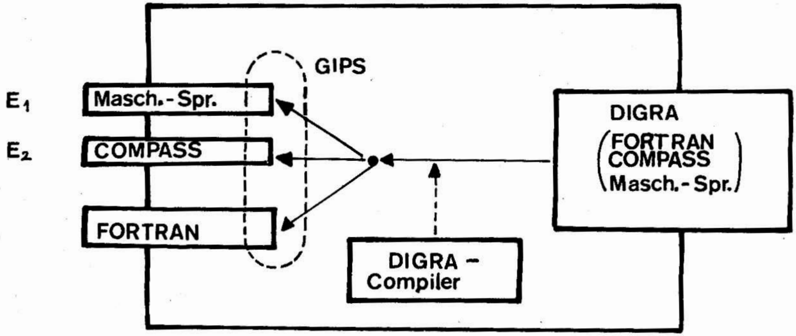


Abb. 4: Sprachlicher Aspekt des DIGRA 73 - Systems

Eine Beschreibung der graphischen Sprache DIGRA ist in /3/ zu finden. Hier werden nur die wesentlichen Prinzipien von DIGRA vorgestellt, die auch eine entsprechende Allgemeingültigkeit besitzen:

1. Die geometrische Gestalt von Objekten wird durch graphische

Gebilde beschrieben. Sie werden durch einen Namen, einen Typ und einen Wert charakterisiert. Die Typen sind vorgegeben, Name und Wert können beliebig gewählt werden. Somit ist das Variablenprinzip der Universalsprachen übernommen worden.

2. Die Bildung von graphischen Werten erfolgt mit graphischen Ergibtanweisungen, graphischen Eingabeanweisungen und Aufrufen von graphischen Unterprogrammen. Dazu werden spezielle graphische Operationen, graphische Konstanten und graphische Standardfunktionen verwendet.
3. Die Ausgabe auf graphische periphere Geräte erfolgt mit zwei Anweisungen, der Ausgabeanweisung und der Zusatzanweisung. Die Ausgabeanweisung gibt an, auf welchem Gerät ausgegeben werden soll und welche graphischen Gebilde auf einer Zeichnung bzw. auf einem Bild erscheinen. Die Zusatzanweisung enthält Zusatzinformationen über die Form der Erstellung der Zeichnung bzw. des Bildes (z.B. Projektionsebene, Projektionsart, Ausschnittsbildung, Steuerinformationen für das Bildschirmgerät).
4. Die Struktur eines Programms in DIGRA entspricht der FORTRAN-Programmstruktur. Die Segmentierungsmöglichkeit des Betriebssystems wird verwendet, und dem Nutzer werden in DIGRA vereinfachte sprachliche Hilfsmittel zur Segmentierung zur Verfügung gestellt.
5. Der Dialog des DIGRA 73 - Systems greift in den Ausgabeprozeß ein wie Manipulation mit den Zusatzinformationen der Zusatzanweisung, Beeinflußung der Darstellung des Bildes, Ansprechen von nutzerabhängigen Prozessen nach dem Freitaskprinzip.
6. Das DIGRA 73 - System gestattet den vollen FORTRAN-Umfang des Rechnersystems CD 3300, so daß im DIGRA 73 - System graphische und numerische Prozesse zusammen ablaufen können.

Aus diesen Prinzipien lassen sich schon Schlußfolgerungen auf die Struktur und Arbeitsweise des DIGRA-Compilers ziehen. Eine ausführliche Beschreibung ist in /4/ enthalten.

Die folgenden Begriffe und Abkürzungen werden zur Erläuterung des Systemaufbaus eingeführt. Einige Begriffe basieren auf der Nomenklatur des Betriebssystems MASTER 4.0 und andere auf der Beschreibung des DIGRA 73 - Systems (s. /2/).

Task: Ist ein vollständiges Programmsegment. Es ist auf einem externen Speicher abgespeichert und wird erst dann in den Arbeitsspeicher der CD 3300 geladen, wenn es benötigt wird. Ist die Arbeit beendet, wird der belegte Speicherplatz freigegeben (z.B. für andere Tasks).

DIGRA-Systemtasks: Sind die Tasks, die zur Ausrüstung des DIGRA 73 - Systems gehören. Sie stehen in der DIGRA-Bibliothek und werden bei Bedarf von dort abgerufen.

DIGRA-Programm: Folge von Teilprogrammen. Die einzelnen Teilprogramme können in DIGRA, FORTRAN, COMPASS oder Maschinensprache (als Binärdeck) geschrieben sein. Das als Hauptprogramm ausgezeichnete Teilprogramm muß in DIGRA vorliegen.

DIGRA-Job: Ist ein DIGRA-Programm versehen mit Steuerinformationen und Daten.
Das DIGRA 73 - System ist nur arbeitsfähig, wenn ihm ein DIGRA-Job zur Verfügung gestellt wird.

HST: Ist die Hauptsteuertask. Sie wird vom DIGRA-Compiler aus dem DIGRA-Programm erzeugt. Von ihr werden alle weiteren Tasks aktiviert.
Ein DIGRA-Job ist beendet, wenn die HST abgearbeitet ist.

GS: Menge der DIGRA-Systemtasks.
Diese Tasks sind die wesentlichen Bestandteile der DIGRA-Bibliothek. Es gibt insgesamt 52 Stck.

GN: Menge der Nutzertasks.
Sie werden vom Nutzer für sein Problem erstellt. Es ist
$GN = GND \cup GNF$
wobei
GND die Menge der in DIGRA geschriebenen Tasks ist; sie werden als DIGRA-Tasks bezeichnet.
GNF die Menge der in FORTRAN geschriebenen Tasks ist.
In Abhängigkeit des einzelnen Problems kann GND bzw. GNF

auch leer sein.
Wird das Problem mehrfach abgearbeitet, so ist GN sinnvollerweise auf einer Bibliothek, der Nutzer-Bibliothek, abzuspeichern.

GF: Menge der Freitasks.
Sie werden vom Nutzer im Dialog aktiviert (Freitask-Prinzip), wobei die Entscheidung erst auf Grund der erhaltenen Ergebnisse getroffen wird. GF kann Elemente von GS und GN enthalten, so daß

$GF \cap (GS \cup GN) \neq \emptyset$

sein kann. Es sei

$GF' = \{T : T \in GF \wedge T \notin (GS \cup GN)\}$

Bei mehrmaligen Gebrauch wird man GF' ebenfalls in der Nutzer-Bibliothek abspeichern.

GSP: Menge der Steuerprogramme
Teilprozesse im DIGRA 73 - System (z.B. Darstellung von Graphen, Steuerung des Dialogs) werden durch Teilprogramme gesteuert, die als Steuerprogramme mit in der DIGRA-Bibliothek abgespeichert sind. Sie bringen folgende
V o r t e i l e : - Einfache Arbeit des DIGRA-Compilers
- Leichte Änderung dieser Teilprozesse (ohne Eingriff in den DIGRA-Compiler), was von besonderem Nutzen für spezielle Systemtestungen und Anwendungen ist.

Zu beachten ist noch, daß jede Task noch entsprechende Hilfsprogramme aus der Software des Betriebssystems entnimmt.

Mit diesen Bemerkungen wird die Struktur des DIGRA 73 - Systems in Abb. 5 verständlich, und es lassen sich Rückschlüsse auf die Arbeitsweise dieses Systems ziehen.

2.3. Verwendung des DIGRA 73 - Systems

Auf Grund des modularen Aufbaus eines Programmsystems lassen sich unterschiedliche Formen der Verwendung angeben. Die Formen des DIGRA 73 - Systems werden vorgestellt, um die Möglichkeiten der Verwendung an einem konkreten Programmsystem zu diskutieren.

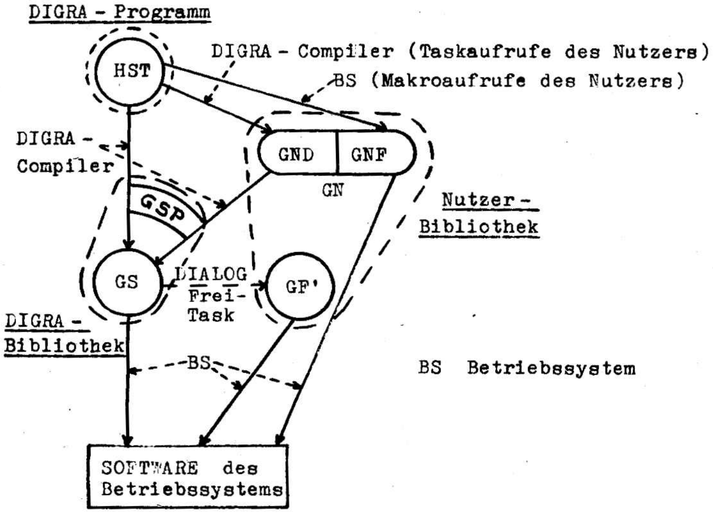
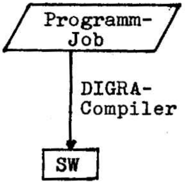


Abb. 5 Struktur des DIGRA 73 - Systems

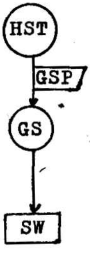
Die unterschiedlichen Möglichkeiten der Verwendung des DIGRA 73 - Systems lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

1. Verwendung von Teilen des Systems ohne ihre Veränderung
   Für das DIGRA 73 - System ergeben sich sieben unterschiedliche Stufen der Verwendung. Sie werden w. u. kurz skizziert.
2. Veränderung von Teilen aus GS und GSP
   Durch entsprechende Veränderungen von Elementen aus GS bzw. GSP ergeben sich ohne großen Aufwand Modifikationen des DIGRA 73 - Systems. Dies bringt die folgenden
   V o r t e i l e : - Gezieltes Eingehen auf Besonderheiten der Anwendungen innerhalb des Systems.
   - Das System kann mit vertretbarem Aufwand immer auf den aktuellen Stand der Erkenntnis gehalten werden.

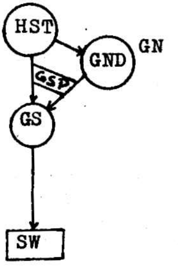
Ausgehend vom Bild 5 werden die einzelnen Stufen der Verwendung des DIGRA 73 - Systems behandelt. In den Skizzen wird mit SW die Software des Betriebssystems abgekürzt.



Stufe 0 (unökonomische Stufe)
Es ist möglich, aber unökonomisch, einen Programmjob in FORTRAN, COMPASS oder Maschinensprache über den DIGRA-Compiler laufen zu lassen.
Diese Stufe sollte keine Verwendung finden.

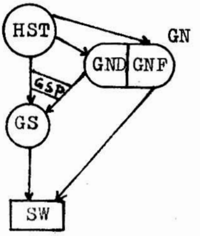


Stufe 1 (einfache Stufe)
Hier werden einfache DIGRA-Jobs ohne Segmentierung durch den Nutzer behandelt. Der DIGRA-Job kann mit oder ohne graphische Unterprogramme und mit oder ohne Unterprogramme in FORTRAN, COMPASS oder Maschinensprache geschrieben sein. Es wird in der Regel nicht der volle Umfang von GS und GSP benötigt, so daß für spezielle Aufgaben eine "Abrüstung" des Systems möglich ist (z.B. kein Dialog). Damit ist die Verwendung auf kleineren Rechnersystemen gegeben.



Stufe 2 (segmentierte Stufe)
Die graphischen Probleme sind gegenüber der Stufe 1 umfangreicher, so daß eine Segmentierung durch den Nutzer in DIGRA-Tasks notwendig wird. Jedoch stehen auch hier graphische Fragestellungen im Vordergrund. Beschränkungen in GS und GSP sowie die Abrüstung sind analog wie in Stufe 1 möglich. Bei der Übertragung auf andere Rechnersysteme kann durch Hinzunahme der Elemente aus GND eine modifizierte Form des DIGRA 73 - Systems entstehen.

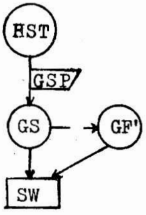
Stufe 3 (einbettbare Stufe)



Hier sind in den DIGRA-Job umfangreiche nichtgraphische (z.B. numerische) Arbeiten eingebettet. Der Speicherbedarf der Elemente aus GNF wird durch den maximalen Speicherbedarf der Kette GND-GS bestimmt, wenn die Elemente aus GNF nicht speicherplatzbestimmend für einen DIGRA-Job sein sollen.

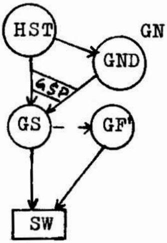
Ein allgemeines graphisches Programmsystem sollte analoge Möglichkeiten besitzen, da graphische Probleme meistens mit nichtgraphischen Fragestellungen auftreten.

Stufe 4 (einfache dialogerweiterte Stufe)



Hier wird dem Dialog besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Durch GF' können problembezogene Aktivitäten aufgenommen werden. Ansonsten gelten analoge Bemerkungen wie bei Stufe 1.

Stufe 5 (segmentierte dialogerweiterte Stufe)



Hier wird in Ergänzung zur Stufe 2 der Dialog mit speziellen problembezogenen Aktivitäten verwendet. Ansonsten gelten analoge Bemerkungen wie bei Stufe 2.

Stufe 6 (einbettbare dialogerweiterte Stufe oder vollständige Stufe)

Hier werden alle Möglichkeiten des gesamten DIGRA 73 - Systems genutzt. Diese Stufe wird durch Abb. 5 charakterisiert.

Generell läßt sich feststellen, daß der Umfang der Mengen GS, GSP, GN, GF nicht den Arbeitsspeicher und kaum die Rechenzeit des Rechenautomaten beeinflußen. Durch den Umfang werden die externen Speicher belastet.

3. Schlußbemerkungen

Durch die Vielfalt und Kompliziertheit der graphischen Probleme wird man gezwungen, segmentierte bzw. modulare graphische Programmsysteme aufzubauen. Der modulare Charakter der Programmsysteme gestattet ferner

- eine gute Übersicht über das Programmsystem,
- eine einfache Übertragung des Systems bzw. von Teilen des Systems auf andere Rechnersysteme,
- eine kollektive Erstellung derartiger Programmsysteme und
- schon während der Erstellung des Systems eine frühzeitige Nutzung für entsprechend ausgesuchte Probleme.

Der Modulcharakter der Programmsysteme entspricht dem Entwicklungstrend, Rechnersysteme durch Rechnernetze zu ersetzen. Durch entsprechende Recherchen des Vorcompilers können die Anforderungen für die A-Phase ermittelt werden und auf Grund dieser Anforderungen der Rechner im Netz bestimmt werden, der für die Abarbeitung geeignet ist. Weitere Betrachtungen darüber sind z.B. in /1/ zu finden. Ferner wird in /1/ von einer analogen Sprachhierarchie in Rechnersystemen (Eingangssprache - Systemsprache - Maschinensprache) gesprochen, wie sie in 1.1. für die Betriebssysteme (s. Abb. 2) eingeführt wurde. Manchmal werden auch Erweiterungen von Rechnersystemen als spezielle Ergänzungen zu dem vorhandenen Betriebssystem angesehen, so daß dann zwischen allgemeinem und speziellem Betriebssystem unterschieden wird.

Die durchgeführten Betrachtungen über Programmsysteme lassen sich in vereinfachter Form auch auf Programmpakete übertragen. Ferner sind weitere Untersuchungen über die Zusammenhänge von Programmsystemen und Programmpaketen notwendig.

Den Mitgliedern der Forschungsgruppe Digitalgraphik der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock und besonders dem Leiter der Forschungsgruppe, Prof. Dr.habil. H. Kiesewetter sei für die regen Diskussionen und Hinweise, die zum Entstehen der Arbeit führten, gedankt.

Zusammenfassung

Ausgehend vom sprachlichen Aspekt in Rechnersystemen erfolgt eine Definition von Programmsystemen und Programmpaketen. Danach werden Besonderheiten der graphischen Programmsysteme zusammengestellt. Die Struktur und Arbeitsweise graphischer Programmsysteme wird an einem konkreten System, dem DIGRA 73 - System der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, aufgezeigt. An den unterschiedlichen Stufen der Verwendung des DIGRA 73 - Systems wird die Vielfältigkeit des Einsatzes derart strukturierter Programmsysteme demonstriert.

Literatur

/1/ Pospelov, D.A. Rechnersysteme; Leipzig, 1975 (Übersetzung aus dem Russischen)

/2/ Autorenkollektiv: Programmierhandbuch - DIGRA 73; Rostock, 1975

/3/ Kotzauer, A. Die graphische Programmiersprache DIGRA; Wiss. Zeitschrift Universität Rostock 21, Math.-Nat. Reihe H. 8, 715 - 725 (1972)

/4/ Gendt, G., Fehlauer, K.-U., Kotzauer, A., Schnur, P. DIGRA-Compiler, Dokumentation des DIGRA 73 - Systems, Teil I, Rostock 1974

Anschrift des Autors

Dr.rer.nat. Adolf Kotzauer
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Klaus-Dieter Drews

Eine auf dem Gaußschen Algorithmus beruhende Determinantendefinition

Mit dem Gaußschen Algorithmus wird ein lineares Gleichungssystem $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{a}$ in ein äquivalentes gestaffeltes System $\underline{B}\cdot\underline{x} = \underline{b}$ umgeformt, wobei im jetzigen Zusammenhang zum einen lediglich Systeme mit quadratischen Koeffizientenmatrizen $\underline{A}$ interessieren und zum anderen nur ebendiese Matrizen eine Rolle spielen und gar nicht einmal die Gleichungssysteme. Wir benutzen die Bezeichnungsweise von Abb. 1, die gleichzeitig das Rechenschema wiedergibt. Es sei dabei $\underline{A} = (a_{ik})$,

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

und zwar $\underline{B}$ die gestaffelte (obere Dreiecks-)Matrix, die man aus

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ \hline b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ c_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}$$

Abb. 1

$\underline{A}$ nach den Vorschriften des verketteten Gaußschen Algorithmus, wie er etwa in /3/ beschrieben wird, erhält.

Durch die Bildung des Produktes $b_{11}\cdot b_{22} \dots b_{nn}$ der Hauptdiagonalelemente von $\underline{B}$ kann man die Determinante von $\underline{A}$ bestimmen, ja es ergibt sich hierin ein elementarer Weg zur Definition der Funktion det $\underline{A}$, der im folgenden ausgearbeitet werden soll. Der Vorteil dieser Definition liegt in einer leichten Verständlichkeit, die einhergeht mit einer praktikablen Berechnungsmöglichkeit. Aus diesem Grunde scheint mir der Weg besonders als Beitrag zu schulmathematischen Untersuchungen interessant zu sein.

In mehreren Arbeiten hat der Autor sich mit der determinantenfreien Behandlung elementarer Teile der linearen Algebra auseinandergesetzt. Dabei wurde in /5/ zur Definition des charakteristischen Polynoms einer Matrix - eben unter Verzicht auf eine Determinantenbenutzung - obiges Hauptdiagonalprodukt herangezogen, wobei eine Frage nach Verfahrensunabhängigkeit offenblieb. Somit ergab sich eine Stelle, die auch im Zusammenhang mit den Hilfsmitteln, die den erwähnten Arbeiten zugrunde liegen, eine Behandlung der Determinanten interessant erscheinen läßt.

Die Überführung einer Matrix in eine obere Dreiecksmatrix mittels des verketteten Algorithmus wird u.U. etwas erschwert, wenn nämlich Diagonalelemente b_{ii} verschwinden und Spaltenvertauschungen vorgenommen werden müssen. Daher muß auch die oben angedeutete Determinantendifinition noch etwas modifiziert werden, und die Beweise der Determinanteneigenschaften erfordern mehrfach Fallunterscheidungen. Wenn man z.B. daran denkt, in Schülerarbeitsgemeinschaften die Determinante auf diesem Wege einzuführen, so sei auf die Möglichkeit verwiesen, sich in den Beweisen auf den Hauptfall nichtverschwindender Diagonalelemente zu beschränken, evtl. auch auf den Beweis für die Verfahrensunabhängigkeit der Definition zu verzichten. Jedenfalls gewinnen interessierte Lehrer mit den folgenden Ausführungen eine Kenntnis von der Möglichkeit und prinzipiellen Einfachheit dieses Weges zur Behandlung der Determinante.

1. Matrizentechnische Vorbereitungen

Die Vorschriften zur Berechnung der b_{ik} und c_{ik} im unteren

Teil von Abb. 1 sind (s. /3/)

$b_{jk} := a_{jk}$ + skalares Produkt$_{1,j-1}$ der j-ten c-Zeile
(für $j \leqq k$) und k-ten b-Spalte[1],

$c_{ij} := (a_{ij}$ + skalares Produkt$_{1,j-1}$ der i-ten c-Zeile
(für $i > j$) und j-ten b-Spalte$)/-b_{jj}$.

Setzt man noch

$$\underline{C} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -c_{31} & -c_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \dots & -c_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

so erhält man aus den beiden eben angegebenen Berechnungsvorschriften

a_{jk} = skalares Produkt der j-ten Zeile von $\underline{C}$
(für $j \leqq k$) und k-ten Spalte von $\underline{B}$, bzw.

a_{ij} = skalares Produkt der i-ten Zeile von $\underline{C}$
(für $i > j$) und j-ten Spalte von $\underline{B}$,

d.h. es gilt

$$\underline{A} = \underline{C} \cdot \underline{B}. \qquad (1)$$

Zwei Sonderfälle sind noch zu beachten. Sollte nämlich bei Berechnung der j-ten b-Zeile das Element b_{jj} verschwinden, so hat man bekanntlich in dem Fall, daß ein anderes Element der j-ten b-Zeile nicht verschwindet, Spalten zu vertauschen, andernfalls die j-te Zeile zu streichen. Spaltenvertauschungen erreicht man durch Multiplikation mit Vertauschungsmatrizen von rechts; diese Vertauschungsmatrizen gehen aus der Einheitsmatrix $\underline{E}$ durch Vertauschung zweier Spalten hervor, sie sollen fortan mit $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ ... bezeichnet werden. Außerdem wollen wir noch $\underline{V}_0 := \underline{E}$ setzen.

---

[1] Das skalare Produkt wird zwischen den Vektoren aus den ersten j-1 Komponenten gebildet.

Hat man nun zur vollständigen Durchführung der Rechnung k Spaltenvertauschungen ($k \geq 0$) in der gegebenen Matrix $\underline{A}$ vorzunehmen, die durch Multiplikation mit den Matrizen $\underline{V}_o$, $\underline{V}_1$, ..., $\underline{V}_k$ erreicht werden, so sei $\underline{V} := \underline{V}_o \cdot \underline{V}_1 \ldots \underline{V}_k$, und es gilt nach (1) jetzt

$$\underline{A} \cdot \underline{V} = \underline{C} \cdot \underline{B}. \qquad (2)$$

Der andere Sonderfall, daß sich bei Berechnung der j-ten Zeile lauter Nullen ergeben, ändert im wesentlichen nichts am Bestehen der Gleichung (2), wie Abb. 2 andeutet. Beim Streichen und Neuberechnen einer j-ten Zeile verliert zwar $\underline{B}$ die

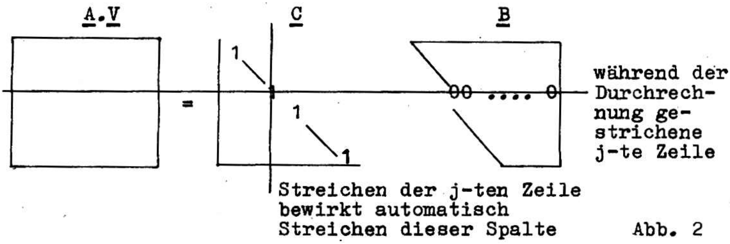


Abb. 2

reine Dreiecksgestalt, aber $\underline{C}$ bleibt untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen.
Aus jeder Zeile der Matrix $\underline{B}$ ziehen wir schließlich als Faktor das berechnete Element b_{jj} heraus - das sind die Hauptdiagonalelemente von $\underline{B}$, wenn $\underline{A}$ regulär ist (vgl. Abschnitt II.2 in /3/), falls jedoch Nullzeilen auftreten, auch evtl. Elemente aus Parallelen zur Hauptdiagonalen von $\underline{B}$ (jedenfalls mindestens eine Null). Formen wir aus diesen Faktoren eine Diagonalmatrix $\underline{D}$ und bezeichnen die aus $\underline{B}$ entstandene Matrix mit $\underline{B}'$, so gilt

$$\underline{A} \cdot \underline{V} = \underline{C} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}'. \qquad (3)$$

Diese Zerlegung läßt sich für jede quadratische Matrix $\underline{A}$ herstellen, und im Falle regulärer Matrix $\underline{A}$ ist $\underline{B}'$ wie $\underline{C}$ Dreieckmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen.

Die Struktur solcher Matrizen $\underline{C}$ bzw. $\underline{B}'$ soll noch kurz analysiert werden. Sei $\underline{E}_{ik}$ die n-reihige quadratische Matrix, die in der i-ten Zeile der k-ten Spalte eine Eins, dagegen sonst nur Nullen enthält (i, k=1(1)n). Auf Grund der Regel

$$\underline{E}_{ik} \cdot \underline{E}_{lm} = \text{Nullmatrix für } k \neq l \quad (\underline{E}_{im} \text{ für } k = l)$$

gilt

$$(\underline{E} - c_{21}\underline{E}_{21})\cdot(\underline{E} - c_{31}\underline{E}_{31})\cdot(\underline{E} - c_{32}\underline{E}_{32}) \ldots$$

$$(\underline{E} - c_{n1}\underline{E}_{n1})\cdot(E - c_{n2}\underline{E}_{n2}) \ldots (\underline{E} - c_{n,n-1}\underline{E}_{n,n-1})$$

$$= \prod_{i=2}^{n} \prod_{k=1}^{i-1} (\underline{E} - c_{ik}\underline{E}_{ik}) = \underline{E} - \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}\underline{E}_{ik} = \underline{C}.$$

Matrizen der Form $\underline{E} - c_{ik}\underline{E}_{ik}$ $(i \neq k)$ sind sog. <u>Additionsmatrizen</u>; sie bewirken, wenn eine Matrix mit ihnen von links (rechts) multipliziert wird, die Addition des $(-c_{ik})$-fachen der k-ten Zeile (i-ten Spalte) dieser Matrix zur i-ten Zeile (k-ten Spalte).

Die soeben für untere Dreiecksmatrizen gemachten Überlegungen übertragen sich nach Transposition auf obere Dreiecksmatrizen, und daher gilt:

Dreiecksmatrizen mit Einsen in der Hauptdiagonalen sind Produkte von Additionsmatrizen. (4)

2. Definition und Grundeigenschaften der Determinante

Sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Nach Abb. 3 ergibt sich im Fall $a_{11} \neq 0$ und $a_{12} \neq 0$

$$\det \underline{A} = a_{11}\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{12}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{5}$$

$$\det(\underline{A}\cdot\underline{V}_1) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{12}\left(a_{21} - \frac{a_{22}}{a_{12}}\, a_{11}\right)$$

$$= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22},$$

und somit

$$\det(\underline{A} \cdot \underline{V}_1) = -\det \underline{A}. \tag{6}$$

$$
\begin{array}{cc}
x_1 & x_2 \\
\hline
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} \\
\hline
a_{11} & a_{12} \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}} & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{12}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
x_2 & x_1 \\
\hline
a_{12} & a_{11} \\
a_{22} & a_{21} \\
\hline
a_{12} & a_{11} \\
\hline
\multicolumn{1}{c|}{-\dfrac{a_{22}}{a_{12}}} & a_{21} - \dfrac{a_{22}}{a_{12}}\, a_{11}
\end{array}
$$

Abb. 3

Hiernach müssen in der Definition der Determinante die vorgenommenen Spaltenvertauschungen Berücksichtigung finden. In der nachfolgenden Definition wird daher die in der Einleitung genannte Produktbildung zur Bestimmurg von det $\underline{A}$ dahingehend ergänzt, daß jede Spaltenvertauschung einen Faktor -1 beisteuert.

Definition:

a) det $\underline{D} := d_1 . d_2 \ldots d_n$, für Diagonalmatrizen $\underline{D}$ mit den Elementen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ in der Hauptdiagonalen,

b) det $\underline{V} := (-1)^k$ für $\underline{V} = \underline{V}_o . \underline{V}_1 \ldots \underline{V}_k$,

c) det $\underline{A}$:= det $\underline{D}$. det $\underline{V}$ (= det $(\underline{A}.\underline{V})$. det $\underline{V}$) für nach (3) zerlegte Matrizen $\underline{A}$.

Es ist nun zu zeigen, daß die in Teil c) getroffene Festlegung verfahrensunabhängig ist, d.h. nicht abhängt von der Willkür bei möglicherweise durchgeführten Spaltenvertauschungen. Dies wird anschließend durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Zeilen und Spalten geschehen, aber gleich in Verbindung mit dem Beweis einiger Grundeigenschaften.

Als erstes folgt aus den Bemerkungen vor (3) unmittelbar: Genau dann ist $\underline{A}$ regulär, wenn det $\underline{A} \neq 0$ gilt. Sofort einzusehen ist auch die Regel

I. Multipliziert man in der Matrix $\underline{A}$ eine Spalte mit der Zahl t, so ist t.det $\underline{A}$ die Determinante der neuen Matrix.

Es ist nämlich an Abb. 1 ersichtlich, daß sich ein Faktor t aus einer a-Spalte durch die Rechenvorschriften auf die Elemente derselben b-Spalte und nur auf diese, und damit auf genau ein Diagonalelement überträgt.

Zusammen mit der Verfahrensunabhängigkeit beweisen wir folgende Sätze.

II. Vertauscht man in einer Matrix zwei Spalten, so unterscheiden sich die Determinanten der neuen und ursprünglichen Matrix lediglich im Vorzeichen.

III. Addiert man in einer Matrix zu einer Spalte ein beliebiges Vielfaches einer anderen Spalte, so sind die Determinanten der neuen und ursprünglichen Matrix dennoch einander gleich.

Beweise.

1. Für n = 2 gilt bei Vertauschung der Spalten nach c)

$$\det \underline{A} := \det (\underline{A}\cdot\underline{V}_1)\cdot(-1),$$

und nach (6) ist diese Definition sinnvoll; die Berechnungsformel (5) ist auch für $a_{11} = 0$ gültig. Außerdem beweist (6) die Eigenschaft II. Schließlich ist

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + ta_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ta_{21} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}+ta_{21}) - a_{21}(a_{12}+ta_{11})$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

und damit - indem man noch II heranzieht - auch III für n = 2 bewiesen.

2. Seien für n - 1 (≥ 2) die Verfahrensunabhängigkeit sowie die Eigenschaften II und III bewiesen und $\underline{A}$ nun eine n-reihige Matrix.

Beweis der Verfahrensunabhängigkeit

Bei Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf $\underline{A}$ werden im ersten Schritt - evtl. nach vorangehender Spaltenvertauschung - geeignete Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen addiert, so daß in der ersten Spalte der neuen Matrix bis auf das erste Element nur Nullen stehen. Diese Situation ist in Abb. 4 und 4' andeutungsweise dargestellt. Dabei sind in der Ausgangsmatrix vor der Umformung, die zu Abb. 4' führt, gegenüber Abb. 4 zwei Spalten miteinander vertauscht worden, und die Umformungen setzen selbstverständlich $a_{1i} \neq 0$ und $a_{1j} \neq 0$ voraus. Denkt man sich in beiden erhaltenen Matrizen die

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & & \cdots & a_{1k} & & \cdots \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\left(-\frac{a_{hi}}{a_{1i}}\right) & 0 & \cdots & a_{hj} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}}\, a_{1j} & & \cdots & a_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}}\, a_{1k} & & \cdots \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Abb. 4

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & & \cdots & a_{1k} & & \cdots \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\left(-\frac{a_{hj}}{a_{1j}}\right) & 0 & \cdots & a_{hi} - \frac{a_{hj}}{a_{1j}}\, a_{1i} & & \cdots & a_{hk} - \frac{a_{hj}}{a_{1j}}\, a_{1k} & & \cdots \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Abb. 4'

erste Zeile und erste Spalte gestrichen, so entstehe in Abb. 4 die Matrix $\underline{U}^{i}_{11}$, in Abb. 4' $\underline{U}^{j}_{11}$, auch kurz $\underline{U}^{i}$ bzw. $\underline{U}^{j}$. Durch folgende Operationen wird $\underline{U}^{i}$ in $\underline{U}^{j}$ überführt:
Addition des $(-\frac{a_{1k}}{a_{1i}})$-fachen der Spalte vom Index j zu der vom Index k für $k = 1(1)n$, jedoch $k \neq i$ und $k \neq j$;
Multiplikation der Spalte vom Index j mit $-\frac{a_{1i}}{a_{1j}}$.
Auf $\underline{U}^{i}$ und $\underline{U}^{j}$ kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält (insbesondere nach I und III)

$$a_{1j} . \det \underline{U}^{j} = a_{1j} \left(-\frac{a_{1i}}{a_{1j}}\right) \det \underline{U}^{i} = -a_{1i} . \det \underline{U}^{i}. \qquad (7)$$

Ist nun $a_{11} \neq 0$, so folgt aus der Definition die für viele der weiteren Überlegungen wichtige Rekursionsformel

$$\det \underline{A} := a_{11} \det \underline{U}^{1}$$

(Abb. 4 mit $i = 1$); hierdurch erhält man einen verfahrensunabhängigen Wert für $\det \underline{A}$, weil dies nach Induktionsvoraussetzung für $\det \underline{U}^{1}$ gilt. - Wird dagegen für $a_{1i} \neq 0$ und $a_{1j} \neq 0$ (i, j fest, $i \neq j$) das Verfahren (z.B. bei $a_{11} = 0$) einerseits nach

Vertauschung der ersten und i-ten, andererseits der ersten und j-ten Spalte durchgerechnet, so beschreiben mit $k = 1$ Abb. 4 und Abb. 4' (diese nach Vertauschung der Spalten vom Index i und k) den Anfang der Rechnung. Aus der Definition folgt damit einerseits

$$\det \underline{A} := a_{1i} \det \underline{U}^i \, (-1), \text{ andererseits} \tag{8}$$

$$\det \underline{A} := a_{1j}(-\det \underline{U}^j)\,(-1). \tag{9}$$

(Hier wurde noch II nach Induktionsvoraussetzung auf $\underline{U}^j$ angewandt.) Wegen (7) erhält man in beiden Fällen denselben, somit verfahrensunabhängigen Wert für det $\underline{A}$, weil dies nach Induktionsvoraussetzung für det $\underline{U}^i$ und det $\underline{U}^j$ gilt. - Wenn im Fall $a_{11} \neq 0$ und $a_{1j} \neq 0$ $(j \neq 1)$ die erste und j-te Spalte vertauscht werden, folgt die Verfahrensunabhängigkeit ebenso, da in (8) mit $i = 1$ und (9) lediglich der Faktor -1 wegzulassen ist.

Von der damit bewiesenen Verfahrensunabhängigkeit werden wir in den weiteren Beweisen Gebrauch machen.

Beweis von II

a) Sei $a_{11} \neq 0$, und es werde in $\underline{A}$ (durch die Matrix $\underline{V}_1$) die erste mit der j-ten Spalte vertauscht. Ist auch $a_{1j} \neq 0$, so kann man Abb. 4 und 4' mit $i = 1$ anwenden und hat nach (7)

$$\det (\underline{A}\cdot\underline{V}_1) = a_{1j}\det \underline{U}^j = - a_{11}\det \underline{U}^1 = - \det \underline{A}\ ;$$

ist jedoch $a_{1j} = 0$, so gilt nach Definition (und Verfahrensunabhängigkeit)

$$\det(\underline{A}\cdot\underline{V}_1) = \det((\underline{A}\cdot\underline{V}_1)\cdot\underline{V}_1)\det \underline{V}_1 = -\det \underline{A}.$$

b) Werden im Fall $a_{11} \neq 0$ die j-te und k-te Spalte von $\underline{A}$ vertauscht (durch $\underline{V}_2$), und zwar für $1 \neq j \neq k \neq 1$, so werden in $\underline{U}^1$ die (j-1)-te und (k-1)-te Spalte (durch $\underline{V}_3$) vertauscht, und man kann die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$\det(\underline{A}\cdot\underline{V}_2) = a_{11}\det(\underline{U}^1\cdot\underline{V}_3) = -a_{11}\det \underline{U}^1 = -\det \underline{A}.$$

c) Sei nun $a_{11} = 0$, und es werde in $\underline{A}$ wiederum durch $\underline{V}_1$ die erste mit der j-ten Spalte vertauscht; ist $a_{1j} \neq 0$, so gilt nach Definition (und Verfahrensunabhängigkeit)

$$\det \underline{A} = \det (\underline{A}.\underline{V}_1) \det \underline{V}_1 = - \det (\underline{A}.\underline{V}_1).$$

Im Falle $a_{1j} = 0$ hat man, wenn in der ersten Zeile ein Element a_{1l} nicht verschwindet, zur Berechnung der Determinanten nach Definition sowohl in $\underline{A}$ als auch in $\underline{A}.\underline{V}_1$ jeweils die erste mit der l-ten Spalte zu vertauschen, und dann liegt Fall b) vor; sollten jedoch alle Elemente der ersten Zeile verschwinden, so ist

$$\det (\underline{A}.\underline{V}_1) = \det \underline{A} = 0 = - \det \underline{A}.$$

d) Werden schließlich im Fall $a_{11} = 0$ durch $\underline{V}_2$ die j-te und k-te Spalte von $\underline{A}$ vertauscht ($1 \neq j \neq k \neq 1$) und gibt es ein a_{1l}, das nicht verschwindet, so kann man zur Berechnung der Determinanten sowohl in $\underline{A}$ als auch in $\underline{A}.\underline{V}_2$ jeweils die erste mit der l-ten Spalte vertauschen, und dann liegt Fall a) oder b) vor. Ist die erste Zeile Nullzeile, so verschwinden $\det (\underline{A}.\underline{V}_2)$ und $\det \underline{A}$.

Beweis von III

Mit der schon bewiesenen Eigenschaft II führen wir den Beweis unter Verwendung von Spaltenvertauschungen. Durch Addition des t-fachen der r-ten Spalte zur s-ten ($r \neq s$) entstehe aus $\underline{A}$ die Matrix $\underline{\tilde{A}}$ ($= (\tilde{a}_{\mu\nu})$), und bei Anwendung von Abb. 4 auf $\underline{\tilde{A}}$ werde die $\underline{U}^i$ entsprechende Matrix im folgenden mit $\underline{\tilde{U}}^i$ bezeichnet.

a) Es gebe für $i \neq s$ ein nichtverschwindendes a_{1i}. Nach evtl. Spaltenvertauschung in $\underline{A}$ und $\underline{\tilde{A}}$ setzen wir die Situation von Abb. 4 mit $k := s$ voraus; bis aufs Vorzeichen stimmen $\det \underline{A}$ und $\det \underline{\tilde{A}}$ mit $a_{1i} \det \underline{U}^i$ bzw. $a_{1i} \det \underline{\tilde{U}}^i$ überein, dabei unterscheiden sich $\underline{A}$ und $\underline{\tilde{A}}$ sowie $\underline{U}^i$ und $\underline{\tilde{U}}^i$ höchstens in der k-ten bzw. (k-1)-ten Spalte. Ist $i = r$, so gilt $\tilde{a}_{hk} = a_{hk} + ta_{hi}$ ($h = 1(1)n$) und in $\underline{\tilde{U}}^i$

$$\tilde{a}_{hk} - \frac{\tilde{a}_{hi}}{\tilde{a}_{1i}} \tilde{a}_{1k} = a_{hk} + ta_{hi} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}} (a_{1k}+ta_{1i}) = a_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}} a_{1k},$$

d.h., es ist sogar $\underline{\tilde{U}}^i = \underline{U}^i$.

Ist andererseits $j = r \neq i$, so gilt $\tilde{a}_{hk} = a_{hk} + ta_{hj}$ ($h = 1(1)n$) und in $\underline{\tilde{U}}^i$

$$\tilde{a}_{hk} - \frac{\tilde{a}_{hi}}{\tilde{a}_{1i}}\tilde{a}_{1k} = a_{hk} + ta_{hj} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}}(a_{1k} + ta_{1j})$$

$$= a_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}}a_{1k} + t(a_{hj} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}}a_{1j}),$$

d.h., $\underline{\tilde{U}}^i$ entsteht aus $\underline{U}^i$ durch Addition des t-fachen der (j-1)-ten Spalte zur (k-1)-ten. Nach Induktionsvoraussetzung folgt det $\underline{\tilde{U}}^i$ = det $\underline{U}^i$.

b) Gilt $a_{1k} = 0$ für $k = 1(1)n$, $k \neq s$ und $a_{1s} \neq 0$, so setzen wir nach evtl. Spaltenvertauschung in Abb. 4 $i := s$. Wegen $a_{1k} = 0$ für $k \neq i$ ist $\underline{\tilde{U}}^i = \underline{U}^i$. Gilt schließlich $a_{1k} = 0$ für $k = 1(1)n$, so ist det $\underline{\tilde{A}}$ = det $\underline{A}$ = 0.
Damit ist auch III bewiesen.

IV. Es gilt $\det(\underline{A}^T) = \det \underline{A}$.
Zum Beweis zerlegen wir $\underline{A}$ wie in (3): $\underline{A}.\underline{V} = \underline{C}.\underline{D}.\underline{B}'$. Ist dabei $\underline{V} = \underline{V}_o.\underline{V}_1 \ldots \underline{V}_k$, so ist $\underline{V}^T = \underline{V}_k \ldots \underline{V}_1.\underline{V}_o = \underline{V}^{-1}$, und somit $\underline{A}^T = \underline{V}.\underline{B}'^T.\underline{D}.\underline{C}^T$. Dann folgt

$$\det(\underline{A}^T) = \det(\underline{V}.\underline{B}'^T.\underline{D}.\underline{C}^T)$$

$$= \det(\underline{V}.\underline{B}'^T.\underline{D}) \text{ wegen (4) nach III}$$

$$= \det(\underline{V}.\underline{B}'^T) \det \underline{D} \text{ nach I.}$$

Im Falle regulärer Matrix $\underline{A}$ ist $\underline{B}'^T$ nach (4) Produkt von Additionsmatrizen, und daher nach III $\det(\underline{V}.\underline{B}'^T) = \det \underline{V}$, so daß

$$\det(\underline{A}^T) = \det \underline{V} \det \underline{D} = \det \underline{A} \text{ gilt;}$$

wenn $\underline{A}$ singulär, d.h. det $\underline{A}$ = det $\underline{D}$ = 0 ist, so ist auch $\det(A^T) = 0$.

Mit Regel IV erhält man aus I, II, III entsprechende Regeln I', II', III' für Operationen mit den Zeilen einer Matrix; dies gilt auch für ähnliche, im weitern noch zu behandelnde Aussagen, ohne daß es dann noch erwähnt wird.

3. Multiplikations- und Entwicklungssatz

Multiplikationssatz. Es gilt det $(\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2) = \det \underline{A}_1 \det \underline{A}_2$.

Beweis: $\underline{A}_1$ sei nach (3) zerlegt: $\underline{A}_1 = \underline{C}.\underline{D}.\underline{B}'.\underline{V}^T$, und wir behandeln zunächst den Fall, daß $\underline{A}_1$ regulär ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\det(\underline{A}_1.\underline{A}_2) &= \det(\underline{C}.\underline{D}.\underline{B}'.\underline{V}^T.\underline{A}_2) && \\
&= \det(\underline{D}.\underline{B}'.\underline{V}^T.A_2) && \text{nach III'} \\
&= \det \underline{D} \det(\underline{B}'.\underline{V}^T.\underline{A}_2) && \text{nach I'} \qquad (10)\\
&= \det \underline{D} \det(\underline{V}^T.\underline{A}_2) && \text{nach III', da } \underline{B}' \text{ regulär} \\
&= \det \underline{D} \det \underline{V} \det \underline{A}_2 && \text{nach II'} \\
&= \det \underline{A}_1 \det \underline{A}_2.
\end{aligned}$$

Wenn $\underline{A}_1$ jedoch singulär, d.h. $\det \underline{A}_1 = \det \underline{D} = 0$ ist, so folgt aus Gleichung (10)

$$\det(A_1.A_2) = 0 = \det \underline{A}_1 \det \underline{A}_2.$$

Im weiteren bezeichnet A_{hj} die Adjunkte zum Element a_{hj}:

$$A_{hj} = (-1)^{h+j} \det \underline{U}_{hj}.$$

Hilfssatz. Verschwinden, abgesehen von a_{1k}, alle Elemente der ersten Zeile von $\underline{A}$, so gilt $\det \underline{A} = a_{1k} A_{1k}$.

Beweis: Zuerst sei $k = 1$. Betrachtet man im Falle $a_{11} \neq 0$ Abb.4 mit $i := 1$, so erkennt man, daß $\det \underline{A} = a_{11} \det \underline{U}^1_{11} = a_{11}A_{11}$ ist (denn $\underline{U}^1_{11} = \underline{U}_{11}$); verschwindet a_{11} auch, so ist $\det \underline{A} = 0 = a_{11}A_{11}$. Für $k \neq 1$ mache man die k-te Spalte zur ersten, indem man sie nacheinander mit den $k - 1$ vor ihr stehenden Spalten vertauscht, und hat dann nach dem schon Bewiesenen $\det \underline{A} = (-1)^{k-1} a_{1k} \det \underline{U}_{1k} = a_{1k}A_{1k}$.

V. Ist die k-te Spalte der Matrix $\underline{A}$ die Summe der k-ten Spalten der Matrizen $\underline{\tilde{A}}$ bzw. $\underline{\tilde{\tilde{A}}}$, während $\underline{A}$, $\underline{\tilde{A}}$ und $\underline{\tilde{\tilde{A}}}$ in allen übrigen Elementen übereinstimmen, so gilt $\det \underline{A} = \det \underline{\tilde{A}} + \det \underline{\tilde{\tilde{A}}}$.

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Reihenzahl n. Für $n = 2$ kann man die Behauptung an Formel (5) nachrechnen. Im Induktionsschritt nehmen wir zuerst den Fall, daß es für $i \neq k$ ein nichtverschwindendes Element a_{1i} gibt. Nach evtl. Spaltenvertauschung können wir Abb. 4 anwenden, und zwar sowohl von $\underline{A}$ als auch von $\underline{\tilde{A}}$ oder $\underline{\approx{A}}$ ausgehend, wobei dann $a_{hk} := \tilde{a}_{hk} + \approx{a}_{hk}$, $a_{hk} := \tilde{a}_{hk}$ bzw. $a_{hk} := \approx{a}_{hk}$ $(h = 1\ (1)n)$ gilt. Damit wird in $\underline{U}^i$

$$a_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}} a_{1k} = \tilde{a}_{hk} + \approx{a}_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}}(\tilde{a}_{1k} + \approx{a}_{1k})$$

$$= \tilde{a}_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}} \tilde{a}_{1k} + \approx{a}_{hk} - \frac{a_{hi}}{a_{1i}} \approx{a}_{1k},$$

und diese Gleichung besagt, daß die (k-1)-te Spalte von $\underline{U}^i$ Summe der (k-1)-ten Spalten von $\underline{\tilde{U}}^i$ und $\underline{\approx{U}}^i$ ist. In allen weiteren Elementen stimmen die Matrizen $\underline{U}^i$, $\underline{\tilde{U}}^i$ und $\underline{\approx{U}}^i$ überein, so daß nach Induktionsvoraussetzung

$$\det \underline{U}^i = \det \underline{\tilde{U}}^i + \det \underline{\approx{U}}^i$$

gilt. Da sich nun die Determinanten von $\underline{A}$ und U^i bzw. $\underline{\tilde{A}}$ und $\underline{\tilde{U}}^i$ bzw. $\underline{\approx{A}}$ und $\underline{\approx{U}}^i$ alle lediglich um den Faktor a_{1i} oder evtl. alle um $-a_{1i}$ unterscheiden, folgt aus der letzten Gleichung die Behauptung.

In dem verbleibenden Fall, daß für $i \neq k$ die Elemente a_{1i} verschwinden, folgt aus dem Hilfssatz

$$\det \underline{A} = a_{1k}A_{1k} = \tilde{a}_{1k}A_{1k} + \approx{a}_{1k}A_{1k} = \det \underline{\tilde{A}} + \det \underline{\approx{A}},$$

womit V bewiesen ist.

<u>Entwicklungssatz.</u> Es gilt $\det \underline{A} = \sum_{h=1}^{n} a_{hj}A_{hj}$.

(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

<u>Beweis:</u> Wir behandeln zunächst die Entwicklung nach der ersten Spalte und nehmen den Fall $a_{11} \neq 0$. Dann gilt nach Abb. 4 (mit $i := 1$)

$$\det \underline{A} = a_{11} \det \underline{U}^1,$$

und dabei erhält man für $h = 2(1)n$ die $(h-1)$-te Zeile von $\underline{U}^1$ in

$$(h\text{-te Zeile von } \underline{A}) - \frac{a_{h1}}{a_{11}} (1.\text{ Zeile von } \underline{A}),$$

dies jeweils ohne die Elemente der ersten Spalte von $\underline{A}$ zu verstehen, kurz

$$\det \underline{A} = a_{11} \det \begin{bmatrix} 2.\text{ AZ} & - \frac{a_{21}}{a_{11}}\ 1.\text{AZ} \\ \cdots & \cdots \\ (n-1)\text{-te AZ} & - \frac{a_{n-1,1}}{a_{11}}\ 1.\text{ AZ} \\ n\text{-te AZ} & - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\ 1.\text{ AZ} \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\det \underline{A} = a_{11} \left[\det \begin{bmatrix} 2.\text{AZ} & - \frac{a_{21}}{a_{11}}\ 1.\text{ AZ} \\ \cdots & \cdots \\ (n-1)\text{-te AZ} & - \frac{a_{n-1,1}}{a_{11}}\ 1.\text{AZ} \\ n\text{-te AZ} & \end{bmatrix} - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \det \begin{bmatrix} 2.\text{ AZ} \\ \cdots \\ (n-1)\text{-te AZ} \\ 1.\text{ AZ} \end{bmatrix} \right];$$

es wurden die Regeln V sowie anschließend auf den zweiten Summanden I und III (jeweils für Zeilenoperationen) angewendet. Ebenso wird der Term in der eckigen Klammer weiter umgeformt zu

$$\det \begin{bmatrix} 2.\text{AZ} & - \frac{a_{21}}{a_{11}}\ 1.\text{AZ} \\ \cdots & \cdots \\ (n-2)\text{-te AZ} & - \frac{a_{n-2,1}}{a_{11}}\ 1.\text{AZ} \\ (n-1)\text{-te AZ} & \\ n\text{-te AZ} & \end{bmatrix} - \frac{a_{n-1}}{a_{11}} \det \begin{bmatrix} 2.\text{ AZ} \\ \cdots \\ (n-1)\text{-te AZ} \\ 1.\text{ AZ} \\ n\text{-te AZ} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{a_{n1}}{a_{11}} \det \begin{bmatrix} 2.\ \mathrm{AZ} \\ \cdots \\ (n-2)\text{-te AZ} \\ (n-1)\text{-te AZ} \\ 1.\ \mathrm{AZ} \end{bmatrix}$$

So fortfahrend gewinnt man schließlich

$$\det \underline{A} = a_{11} \left[A_{11} - \sum_{h=2}^{n} \frac{a_{h1}}{a_{11}} \det \underline{U}'_{h1} \right]$$

$$= a_{11} A_{11} - \sum_{h=2}^{n} a_{h1} \det \underline{U}'_{h1},$$

wobei $\underline{U}'_{h1}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2.\ \mathrm{AZ} \\ \cdots \\ (h-1)\text{-te AZ} \\ 1.\ \mathrm{AZ} \\ (h+1)\text{-te AZ} \\ \cdots \\ n\text{-te AZ} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

ist $(h = 2(1)n)$. Vertauscht man in $\underline{U}'_{h1}$ die $(h-1)$-te Zeile (das ist die erste $\underline{A}$-Zeile) nacheinander mit den $h-2$ über ihr stehenden, dann entsteht am Ende die Matrix $\underline{U}_{h1}$; somit gilt

$$\det \underline{U}'_{h1} = (-1)^{h-2} \det \underline{U}_{h1} = -A_{h1} \quad \text{und folglich}$$

$$\det \underline{A} = \sum_{h=1}^{n} a_{h1} A_{h1}.$$

Ist $a_{11} = 0$, und gibt es jedoch in der ersten Spalte ein nichtverschwindendes Element a_{i1}, so vertauschen wir in $\underline{A}$ die erste mit der i-ten Zeile und entwickeln die neue Metrix $\underline{A}'$ nach der ersten Spalte:

$$-\det \underline{A} = a_{i1} \det \underline{U}'_{11} + \sum_{\substack{h=2 \\ h \neq i}}^{n} a_{h1} (-1)^{h+1} \det \underline{U}'_{h1}. \qquad (12)$$

$\underline{U}'_{i1}$ hat die Gestalt (11) mit h := i, so daß nach i-2 Zeilenvertauschungen $\det \underline{U}'_{i1} = (-1)^{i-2} \det \underline{U}_{i1} = -A_{i1}$ folgt. Dagegen sind in den Matrizen $\underline{U}'_{h1}$ für $h \neq i$ lediglich zwei Zeilen gegenüber $\underline{U}_{h1}$ vertauscht (und zwar die erste und i-te $\underline{A}$-Zeile), womit

$$(-1)^{h+1} \det \underline{U}'_{h1} = -(-1)^{h+1} \det \underline{U}_{h1} = -A_{h1}$$

gilt. Aus (12) erhalten wir daher

$$\det \underline{A} = \sum_{h=2}^{n} a_{h1}A_{h1} = \sum_{h=1}^{n} a_{h1}A_{h1}.$$

Diese Entwicklungsformel ist schließlich unmittelbar auch für den Fall $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$ gültig.
Um die Formel für die Entwicklung nach der j-ten Spalte zu gewinnen, vertauschen wir in $\underline{A}$ die j-te Spalte nacheinander mit den j-1 vor ihr stehenden Spalten und entwickeln die neue Matrix $\underline{A}'$ nach der ersten Spalte:

$$(-1)^{j-1} \det \underline{A} = \sum_{h=1}^{n} a_{hj} (-1)^{h+1} \det \underline{U}'_{h1} .$$

Wegen $\underline{U}'_{h1} = \underline{U}_{hj}$ (h = 1(1)n) folgt hieraus

$$\det \underline{A} = \sum_{h=1}^{n} a_{hj} (-1)^{h+j} \det \underline{U}_{hj} = \sum_{h=1}^{n} a_{hj}A_{hj},$$

und damit ist der Entwicklungssatz bewiesen.

Literatur

/1/ Borewitsch, S.J., Determinanten und Matrizen, Leipzig: Teubner 1972

/2/ Brehmer, S. und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 4. Auflage, Berlin: Deutscher Verlag der Wiss. 1974

/3/ Drews, K.-D., Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben, Berlin: Deutscher Verlag der Wiss. 1975

/4/ Drews, K.-D., Zum Beweis der Existenz von n orthonormierten Eigenvektoren bei symmetrischen Matrizen n-ter Ordnung, Wiss. Zeitschr. der Univ. Rostock 21 (1972), Math.-nat. Reihe, Heft 8, 751 - 754

/5/ Drews, K.-D., Eine determinantenfreie Herleitung der charakteristischen Gleichung einer Matrix, Wiss. Zeitschr. der Univ. Rostock (im Druck)

Anschrift des Verfassers:

Dr. paed. K.-D. Drews
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Günter Sietmann

Zur Festigung mathematischen Wissens und Könnens im naturwissenschaftlichen Unterricht

Eine wesentliche Spezifik des Lernprozesses in der allgemeinbildenden Schule besteht darin, daß der Schüler das erworbene Wissen und Können zu einem großen Teil erst nach Beendigung der Schulzeit produktiv anwenden kann. Er lernt gewissermaßen auf "Vorrat"; dabei müssen Kenntnisse gespeichert und Können ausgeprägt werden.

Deshalb kommt in allen Unterrichtsfächern neben der Neuvermittlung von Wissen und Können den Phasen der Konsolidierung der Ergebnisse des Lernprozesses große Bedeutung zu. In den Lehrplänen der einzelnen Unterrichtsfächer sind darum Ziele, Aufgaben, Inhalte und Methoden der Festigung ausgewiesen. Zu beachten ist jedoch, daß die Festigung keine isolierte didaktiech-methodische Phase des Unterrichts ist, sondern diesen prinzipiell durchdringen muß. So sollte die Vermittlung neuen Stoffes i. a. so erfolgen, daß die darin enthaltenen Festigungspotenzen durch Wiederholung, Verknüpfung usw. voll wirksam werden; in diesem Sinne kann man die Arbeit am neuen Stoff gleichzeitig als Festigung von bereits früher erworbenem Wissen und Können ansehen. Bei einem gezielten Vorgehen hierbei ergibt sich eine Integration vorhandener Wissens- und Könnenselemente in neue Stoffzusammenhänge und Handlungsstrukturen. Von nicht unwesentlichem Interesse ist dabei, daß dieser Prozeß notwendigerweise Elemente erfassen muß, die innerhalb verschiedener Unterrichtsfächer an den Schüler herangetragen worden sind.
So kommen die Schulfächer Biologie, Chemie und Physik gar nicht umhin, bei der Festigung fachspezifischen Wissens und Könnens auf mathematische Vorleistungen verschiedener Art zurückzugreifen und sie einzubeziehen. Andererseits würde der Mathematikunterricht die ihm gestellten Ziele, insbesondere hinsichtlich der Vermittlung der Einsicht, daß mathematische

Ergebnisse in Wissenschaft und Produktion universell anwendbar sind, ohne bewußte Einbeziehung naturwissenschaftlicher Sachzusammenhänge nicht erfüllen können. Viele Möglichkeiten einer für den Schüler ansprechenden Motivation und Problemstellung müßten ungenutzt bleiben.

Von uns durchgeführte theoretisch-konzeptionelle Untersuchungen zu Lehrplänen und Nachfolgematerialien (Lehrbücher, Unterrichtshilfen, methodische Literatur) haben ergeben, daß es vielerlei Ansatzpunkte für die Festigung von Wissens- und Könnenselementen der Schüler im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht gibt. Hospitationen und Gespräche mit Fachlehrern zeigen jedoch, daß diese vielfach noch zu einseitig genutzt werden. Überwiegend und häufig auch ausschließlich geschieht das allein unter dem Gesichtspunkt, Wissen und Können aus der Sicht <u>ihres</u> Unterrichtsfaches zu festigen. Das ist zweifelsohne die notwendige und unbestrittene Hauptaufgabe jedes Fachlehrers. Er darf aber nicht übersehen, daß ihm bei der Verwendung und Nutzung von Wissen und Können aus anderen Fächern auch Aufgaben ihrer Festigung zufallen; insbesondere unter dem Aspekt, Anliegen fachübergreifender Art zu berücksichtigen, an deren Erfüllung verschiedene Unterrichtsfächer beteiligt sind. Zeitprobleme dürften hierbei insgesamt kaum ein wesentliches Hindernis sein, da es sich hierbei um einen wechselseitigen Prozeß handelt, der, richtig geführt, zur Rationalisierung der Schulausbildung beitragen kann.

Das von uns dargestellte Anliegen bezieht sich auf alle Formen der Festigung im Unterrichtsprozeß, also auf das Üben, das Anwenden, das Vertiefen und Systematisieren sowie auf alle Arten der Wiederholung. Wir wollen uns nachfolgend einigen Möglichkeiten der Festigung mathematischen Wissens und Könnens in den Unterrichtsfächern Physik, Chemie und Biologie zuwenden. Unsere Grundgedanken werden wir am Beispiel der Übung darstellen; viele von ihnen sind auch für andere Formen der Festigung und insbesondere auch bei ihrem ständigen Zusammenwirken im Unterrichtsprozeß von Bedeutung.

Die Übung ist eine spezielle Form der Festigung, die den Unterricht ständig begleitet. Neben der Festigung von Wissen sind ihre Ziele vorwiegend darauf gerichtet, Fähigkeiten und Fertigkeiten als wichtige Komponenten des Könnens in ständig zunehmender Vervollkommnung auszuprägen. Das gilt insbesondere für solche fachspezifischer Art. Hierzu gibt es Festlegungen in den Lehrplänen. Wege zu ihrer Verwirklichung werden in der pädagogisch-methodischen Literatur gezeigt. Wir wollen uns hier der gezielten Herausbildung von Fähigkeiten und Fertigkeiten zuwenden, die sich entweder aus direkten Beziehungen zwischen den Inhalten verschiedener Unterrichtsfächer ergeben oder aus fachübergreifenden Zielstellungen resultieren. Beide Aspekte sollten in den Übungen im naturwissenschaftlichen Unterricht bei der Verwendung und Festigung mathematischer Kenntnisse und bei der Ausprägung von Könnensqualitäten bewußt gepflegt werden. Das gilt für alle Übungsformen; für die tägliche Übung ebenso wie für direkte und indirekte Übungsformen.

In der <u>täglichen Übung</u> sollten bewußt solche mathematischen Fähigkeiten bzw. Fertigkeiten vervollkommnet werden, die für das betreffende Unterrichtsfach von fundamentaler Bedeutung sind und häufig gebraucht werden. Aufgaben dieser Art erwachsen vor allem dem Physikunterricht. Aus der Fülle möglicher Beispiele sei nur das des Umrechnens von Maßeinheiten angeführt. Unter Beachtung der in den Klassen 1 bis 4 vermittelten Kenntnisse über Maßeinheiten werden im Mathematikunterricht in Klasse 5 systematisch Längen-, Flächen- und Raummaße behandelt sowie die Maßeinheiten der Masse wie auch Geld- und Zeitmaße eingeführt. Dabei werden Fähigkeiten im Umwandeln von Maßzahlen bei verschiedenen Maßeinheiten entwickelt, die dann später im Mathematikunterricht, besonders in Klasse 6 im Rahmen der Einführung und des Arbeitens mit gebrochenen Zahlen, in beschränktem Umfange zu Fertigkeiten weiterentwickelt werden. Hierbei erwachsen dem Physikunterricht weiterführende Aufgaben, da das Umrechnen von Zahlenwerten bei verschiedenen Einheiten hier zum ständigen Arbeitszeug gehört. Es sollte bewußt in die tägliche Übung aufgenommen werden. Der Physiklehrer hat hiervon nicht nur sichtbare Vorteile in seinem weiteren Unterricht; er leistet damit auch für die mathematische Könnensentwicklung einen guten Beitrag, der im fachübergreifenden Sinne auch anderen Unterrichtsfächern von Nutzen ist und zur polytechnischen Ausbildung der Schüler gerechnet werden kann.

Große Bedeutung im Rahmen fachübergreifender Aufgabenstellungen hat das indirekte (immanente) Üben im naturwissenschaftlichen Unterricht. Hierbei wird Wissen und Können, das der Mathematikunterricht vermittelt hat, gefestigt. Das geschieht nicht vordergründig, sondern verdeckt und überlagert durch Zielstellungen und Prozesse naturwissenschaftlicher Art. Häufig tritt der Fall auf, daß ganz bestimmte Sach- cder Verfahrenskenntnisse mathematischer Art im naturwissenschaftlichen Unterricht genutzt und geübt werden müssen. Das gilt zum Beispiel für Begriff und Übungen zur Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (k. g. V.) im Chemieunterricht der Klasse 7. Hier werden mit Hilfe des k. g. V. der Wertigkeiten der Elemente Formeln als Bezeichnungen für chemische Verbindungen sowie Gleichungen als Ausdrücke für chemische Reaktionen ermittelt. Beispiele ähnlicher Art treten auch im Physik- und Biologieunterricht auf. Wir wollen sie hier nicht weiter verfolgen, da ihre mathematische und fachübergreifende Bedeutung zugunsten fachspezifischer Anliegen weit zurücktritt.
Anders verhält es sich dagegen bei solchen Übungen im naturwissenschaftlichen Unterricht, die wesentliche Beiträge zu den fachspezifischen Aufgaben des Mathematikunterrichts liefern. Typische Beispiele sind Konstruktionen in der geometrischen Optik des Physikunterrichts, Betrachtungen räumlicher Anordnungen bei Molekülmodellen im Chemieunterricht und Systematisierungen biologischer Einzelkenntnisse durch mengentheoretische Begriffsbildungen und Verfahren. Von wirklichem Nutzen für die Festigung mathematischen Wissens und Könnens werden Übungen zu Problemkreisen der angeführten Art jedoch nur sein, wenn die Fachlehrer im naturwissenschaftlichen Unterricht bewußt Beziehungen und Einordnungen zum mathematischen Lehrstoff herstellen. Das erfordert genaue Kenntnisse des mathematischen

Ausgangsniveaus und die Bestimmung der mathematischen Anteile der Übungsergebnisse mit dem Blick auf spätere Aufgabenstellungen des Mathematikunterrichts, die hierzu Berührung haben. Auf diese Forderungen kann aus mathematischer Sicht nicht verzichtet werden, denn ihre Außerachtlassung kann sogar der mathematischen Ausbildung der Schüler schaden; wenn man z.B. beim Umgang mit mathematischen Zeichengeräten im naturwissenschaftlichen Unterricht Einsichten und Gewohnheiten hinsichtlich des Zustandes und der Handhabung der Geräte außer acht läßt oder Fragen der Genauigkeit und Sauberkeit nicht die notwendige Aufmerksamkeit erfahren. Besonderes Augenmerk verlangen innerhalb der indirekten Übungen in den naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern solche Aufgabenstellungen, die fachübergreifenden Zielen dienen. Als Beispiel sei die Befähigung der Schüler zur rationellen Ausführung notwendiger Berechnungen angeführt. Zu dieser recht weiten Aufgabe gehören Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit graphischen Darstellungen, mit Tafelwerken und Rechengeräten. Hierbei handelt es sich ohne jeden Zweifel um fachübergreifende Aufgabenstellungen, an deren Erfüllung nicht zuletzt aus polytechnischer Sicht zumindest die naturwissenschaftlichen Fächer neben dem Mathematikunterricht beitragen müssen. Wir wollen die genannte Problematik noch weiter einschränken und die notwendige rationelle Handhabung des logarithmischen Rechenstabes durch den Schüler betrachten. Die Einführung in den Gebrauch des Stabes erfolgt in Klasse 7, obgleich seine mathematischen Grundlagen erst in Klasse 9 bei der Behandlung der Logarithmen aufgezeigt werden. Der Grund für die frühzeitige Einführung ist vor allem durch die häufige Verwendungsmöglichkeit im naturwissenschaftlichen Unterricht, vorwiegend in den Fächern Physik und Chemie, gegeben. Daraus muß nun die Forderung abgeleitet werden, den Stab in diesen Fächern auch tatsächlich von den Schülern heranziehen zu lassen und rationelle Wege bei seiner Verwendung zu besprechen und zu üben. Untersuchungen in der Schulpraxis haben gezeigt, daß es hierbei noch recht große Unterschiede im Unterricht der einzelnen Fachlehrer gibt. Ein großer Teil der Schüler besitzt, wie man im Mathematikunterricht der 9. Klasse unschwer

erkennen kann, zwar Fähigkeiten in der Handhabung des Stabes, zu Fertigkeiten haben sich diese jedoch nicht entwickelt. Für Überschlagsrechnungen wird beispielsweise viel zu viel Zeit benötigt.
Die Form der <u>direkten Übung</u> von mathematischem Wissen und Können tritt im naturwissenschaftlichen Unterricht verhältnismässig selten auf. Fachspezifische Ziel- und Aufgabenstellungen lassen nicht zu, daß ganze Übungsstunden hierzu verwandt werden. Wichtig für rationelles Arbeiten in naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern sind jedoch Übungsabschnitte, die bewußt durch entsprechend gewählte Übungsaufgaben mathematisches Wissen und Können so festigen, daß der Gang fachspezifischer Prozesse nicht durch mathematische Schwierigkeiten beim Schüler verdeckt wird. Das trifft beispielsweise zu für relativ schwierige Umformungen von Termen und Gleichungen, in denen die Beseitigung von Doppelbrüchen hohe mathematische Anforderungen an die Schüler stellt. Das tritt im Physikunterricht häufiger auf, z.B. findet man entsprechende Aufgaben im Physiklehrbuch der Klasse 9 bei Geschwindigkeits- und Beschleunigungsberechnungen. Auch für andere nicht ganz einfache Umformungen von Größengleichungen sind gewisse Übungen im Physik- und Chemieunterricht unumgänglich. So bereitet erfahrungsgemäß den Schülern die Auflösung der Widerstandsgleichung in einem verzweigten Stromkreis nach einem Teilwiderstand ebenso große Schwierigkeiten, wie bestimmte Umformungen der Zustandsgleichung für ideales Gas im Chemieunterricht.

Im Interesse einer möglichst rationellen Arbeitsweise sollte bei solchen Übungen das gleiche Vorgehen wie im Mathematikunterricht angestrebt werden. Das gilt speziell für die Auflösung von Verhältnisgleichungen. Es ist nicht einzusehen, weshalb das im Lehrbuch der Chemie (Klasse 8, Seite 131) durch Gleichsetzen der Produkte der Innen- und Außenglieder erfolgt, obgleich hierfür bereits im Mathematikunterricht in der Klasse 6 ein anderer Weg an die Schüler herangetragen wird.
Große Bedeutung für die Festigung mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten kommen Übungen in der Verwendung der Potenz-

schreibweise im Physik- und Chemieunterricht zu. Das tritt sowohl bei der Einführung von Einheiten auf (z.B. Physikunterricht: 1 Coulomb = $6{,}2 \cdot 10^{18}$ e; Chemieunterricht: die absolute Atommasse des Kohlenstoffatoms beträgt $1{,}99 \cdot 10^{-24}$ g) als auch bei dem schon erwähnten Umrechnen von Zahlenwerten bei Änderung der Maßeinheiten. Dabei spielen solche abgeleiteten Maßeinheiten, die durch die Vorsilben Mega, Giga, Tera bzw. Mikro, Nano, Pico ausgedrückt werden, eine besondere Rolle.
Gewisse direkte Übungen müssen auch bei der Einbeziehung von solchen mathematischen Unterrichtsstoffen durchgeführt werden, die im Mathematikunterricht bereits vor längerer Zeit behandelt worden sind. Das kann u.a. zutreffen bei Prozentberechnungen, bei der Anlage und Auswertung von graphischen Darstellungen sowie bei Flächen- und Rauminhaltsberechnungen. Für Übungen solcher Art findet man teilweise verbindliche Festlegungen in den Lehrplänen der naturwissenschaftlichen Schulfächer bzw. Hinweise in den Schulbüchern oder in Unterrichtshilfen.
Unumgänglich sind auch direkte Übungen, wenn bewußt Vergleiche zwischen Inhalten des naturwissenschaftlichen und des mathematischen Unterrichts angestellt werden. Das gilt bei systematischen Darstellungen naturwissenschaftlicher Einzelkenntnisse im Vergleich mit Mengendiagrammen zum Aufbau der Zahlenbereiche oder zur systematischen Anordnung geometrischer Zusammenhänge. Unbedingt notwendig sind solche Übungen auch im Physikunterricht, um dem Schüler z.B. zu verdeutlichen, daß der Definitionsbereich einer Funktion nicht immer mit dem Gültigkeitsbereich eines physikalischen Gesetzes übereinstimmt.

Abschließend sei jedoch noch darauf hingewiesen, daß die meisten der angeführten Forderungen auch für den Mathematikunterricht volle Gültigkeit haben. Selbst die beste Nutzung aller angeführten Übungsmöglichkeiten im naturwissenschaftlichen Unterricht entbindet den Mathematikunterricht nicht von der selbstverständlichen Pflicht, eingeführte mathematische Kenntnisse verschiedener Art bewußt und zielgerichtet zu festigen und dabei Abstimmungen mit dem Unterricht der Fächer Physik, Chemie und Biologie vorzunehmen. Dabei erwachsen dem Mathematikunterricht auch wichtige Aufgaben bei der Festigung naturwissenschaftlichen Wissens und Könnens.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. paed. habil. Günter Sietmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Ingo Kölbl

Begriffssysteme und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht[1]

Der Systembegriff hat in unserer Zeit an aktueller Bedeutung zugenommen und steht oft im Mittelpunkt vieler Betrachtungen im täglichen Leben, in der wissenschaftlichen Arbeit und in anderen gesellschaftlichen Bereichen. Das zeigt sich nicht nur daran, daß das Wort "System" im allgemeinen Sprachgebrauch immer häufiger auftritt, man denke nur an "ökonomisches System", "Systemanalyse" u.a., sondern auch in dem Bestreben der Zusammenfassung vielfältiger Einzelerkenntnisse unter allgemeine Prinzipien, sie in Beziehung zu bereits vorhandenen zu bringen, sie einzuordnen und zu systematisieren, d.h. sie in einem System zu verarbeiten. Das sind Forderungen, die an den Menschen z.B. in der Produktion, in der politischen und wissenschaftlichen Arbeit gestellt werden. Die Verflechtungen innerhalb der Produktion, eine gesellschaftliche Entwicklung und andere Vorgänge im Leben sind nur bei Kenntnis der Einzelheit in der Verbindung zur Gesamtheit zu verstehen. Der Prozeß der Spezialisierung und Differenzierung in den Wissenschaften verlangt ein Zusammenfügen einzelner Erkenntnisse und Theorien, denn "... die Einzelwissenschaften sind nur dann wirkliche Wissenschaften, wenn sie als System auftreten" (/1/, S. 422).

In den pädagogischen Disziplinen liegen eine Reihe von empirisch und theoretisch gefundenen, oft nicht miteinander verbundenen Erkenntnissen vor, die zu einem System zusammengefügt werden müssen, um somit für die Theorie der sozialistischen Persönlichkeit wirksam zu werden. Das bedeutet, daß der Systemcharakter der Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten herausgebildet werden muß. Neben dieser Seite der wissenschaft-

---

[1] Die Grundgedanken zu diesem Thema gingen aus einer Diskussion in einer Arbeitsgruppe, die unter Leitung des Verfassers stand, des intersektionellen Forschungskollektivs der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methodiken der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock hervor.

lichen Arbeit ist es aber auch erforderlich zu untersuchen, wie bei der Herausbildung sozialistischer Persönlichkeiten im Lehr- und Lernprozeß der Gedanke "Wie lehrt und lernt man das Bilden von Systemen" aufgenommen werden kann. Bevor jedoch darauf speziell für den Mathematikunterricht eingegangen wird, soll zunächst geklärt werden, was wir unter einem System verstehen wollen.

Neben einer Reihe von Definitionen zum Begriff "System" sei für unser Anliegen die aus dem Philosophischen Wörterbuch (/2/, S. 1201) genommen: "... unter einem System von Objekten (ist) eine nichtleere Menge, eine Klasse oder ein Bereich (oder möglicherweise auch mehrere solcher Mengen usw.) von Objekten zu verstehen, zwischen denen gewisse Relationen bestehen". (Es soll nicht Aufgabe dieses Artikels sein, die verschiedenen Definitionen des Systembegriffs zu interpretieren. Der interessierte Leser sei zu dieser Problematik auf /3/ verwiesen).

Durch diese mengentheoretische Fassung des Systembegriffs wird eine große Allgemeinheit erreicht, so daß über die Objekte, die die Elemente des Systems darstellen, und über die Relationen keine speziellen Voraussetzungen gemacht zu werden brauchen. Die Objekte können materiell wie z.B. Dinge und Prozesse, oder auch ideell sein, wie z.B. Begriffe und Aussagen. Die Relationen spiegeln ganz allgemein irgendwie geartete Beziehungen wider, die zwischen den gegebenen Objekten aufgrund bestimmter Eigenschaften bestehen bzw. hergestellt werden können. Sie können ebenfalls materiell oder ideell sein, je nachdem ob die in Relation zueinander stehenden Objekte materiell oder ideell sind. Hieraus ergibt sich eine (von einer Vielfalt möglicher) Einteilung der Systeme in materielle und ideelle.

In unserem Fall, in dem wir Begriffssysteme untersuchen wollen, sind die Elemente des Systems Begriffe und die zwischen ihnen bestehenden Relationen Begriffe oder Aussagen. Es handelt sich hier also um ideelle Systeme. Sie sind Widerspiegelungen materieller Systeme oder an die Existenz materieller Träger gebunden. Das ist aber für die Betrachtung von Begriffssystemen im Mathematikunterricht problematischer als z.B. im Physikunterricht, wo sich hinter dem ideellen System eine in der Natur vorkommende Gesetzmäßigkeit verbirgt. Wir wollen bei der Betrachtung von Begriffssystemen des Mathematikunterrichts uns orientieren an der Wissenschaft Mathematik und sie als den "materiellen" Träger zugrunde legen, natürlich unter Beachtung der dem Lehr- und Lernprozeß innewohnenden didaktischen Vereinfachungen und Niveauabstufungen. Damit sind Aufbau und Anordnung eines Systems nicht willkürlich, sondern durch ganz bestimmte Gesetze festgelegt. Die Elemente eines Systems sind innerhalb dieses Systems nicht mehr weiter aufteilbar. Sie können aber in einem anderen System den Charakter eines Teilsystems haben, d.h., daß eine Systemhierarchie aufgebaut werden kann. Man spricht dann auch von Systemen höherer und niederer Ordnung.

Kommen wir nun zu dem am Anfang aufgeworfenen Gedanken über das Bilden von Systemen im Lehr- und Lernprozeß zurück, wobei wir davon ausgehen, daß Begriffssysteme die Grundlage für die Herausbildung von Wissenssystemen bilden. In Vorträgen und Artikeln über den Mathematikunterricht in unseren Schulen wird oft darauf hingewiesen, man vergleiche z.B. /4/, daß durch Leistungsanalysen festgestellt wurde, daß die Schüler sich grundlegende mathematische Begriffe nur formal aneignen. Sie sind dann nicht in der Lage, diese Begriffe auf mathematische und außermathematische Probleme anzuwenden, weil ihnen "die Einsicht in den vollständigen Inhalt und in die Stellung des Begriffs im System des Wissens fehlt" (/4/, S. 358). Ungeordnete Kenntnisse über mathematische Begriffe und ihre Zusammenhänge führen u.a. auch dazu, daß diese von den Schülern schnell vergessen werden. Es ist daher bei der Einführung und Behandlung von Begriffen unbedingt notwendig, die Zusammenhänge zwischen ihnen mit in den Unterrichtsprozeß einzubeziehen und den Schülern bewußt zu machen. Dabei sollte das Prinzip der Verbindung von neueingeführtem Wissen zu bereits erworbenem Wissen Beachtung finden.

Die Herausbildung von geordneten mathematischen Kenntnissen bis hin zur Systembildung ist mit den Schülern ständig im Unterricht zu üben und sollte nicht nur Übungs- und Systematisierungsstunden vorbehalten sein. Dabei sind die beiden Seiten, die beim Prozeß des Bildens von Begriffssystemen im Mathematikunterricht auftreten, zu beachten. Einmal lernen die Schüler, Beziehungen zwischen den Begriffen herzustellen, d.h. Begriffssysteme zu bilden und zum anderen wird ihnen geholfen, mathematische Kenntnisse zu festigen und das mathematische Denken zu entwickeln.
Beim Arbeiten mit Begriffen, insbesondere beim Herausstellen der Beziehungen zwischen ihnen, müssen natürlich die Aussagen der formalen Logik beachtet werden. Faßt man einen Begriff als eine "gedankliche Widerspiegelung einer Klasse von Individuen oder von Klassen auf der Grundlage ihrer invarianten Merkmale" auf (/1/, S. 206), so können die Beziehungen zwischen Begriffen auf die Beziehungen zwischen Klassen zurückgeführt werden. Damit betrachtet man im allgemeinen nur die Beziehungen, die aufgrund des Begriffsumfanges (Extension), d.i. die Widerspiegelung der Klasse von Individuen, auf die der Begriff zutrifft, hergestellt werden können. Dieses sind die des "Enthaltenseins", der "Identität", der "Überschneidung" und des "Disjunktseins". Hier sehen wir eine enge Verbindung zur mengentheoretischen Fassung des Systembegriffs und auch zu mengentheoretischen Betrachtungen im Mathematikunterricht. Unumgänglich sind aber bei der Herstellung der zwischen den Begriffen bestehenden Relationen die Betrachtungen zum Begriffsinhalt (Intension), d.i. die Widerspiegelung des Komplexes der Merkmale, der allen im entsprechenden Begriffsumfang widergespiegelten Dingen gemeinsam ist (siehe /1/, S. 206). Dadurch wird deutlich, daß das Bilden von Begriffssystemen über eine rein mengentheoretische Einordnung hinausgeht. Dazu ein Beispiel zu der Beziehung des "Enthaltenseins" aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6:

Im Lehrplan der Klasse 6 wird gefordert: "Systematisieren der Viereckarten unter Verwendung des Mengen-Begriffs (Veranschaulichung durch Diagramme)" (/5/, S. 52). Der Einfachheit halber seien hier nur die Begriffe "Trapez" und "Parallelogramm" herausgenommen. Die Erarbeitung des Begriffs "Parallelogramm" erfolgt durch die Betrachtung von verschiedenen Trapezen, die durch Drehen eines Schenkels um einen Eckpunkt entstehen. Dadurch treten gewisse Veränderungen auf, die zu Sonderfällen führen. Besonders wird der Sonderfall herausgestellt, in dem die jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Für dieses spezielle Trapez wird der Begriff "Parallelogramm" eingeführt und definiert. Betrachtet man jetzt die Mengenbeziehung zwischen der Menge aller Trapeze und der Menge aller Parallelogramme, so ist die Menge aller Parallelogramme eine echte Teilmenge der Menge der Trapeze. Im Diagramm dargestellt:

Vom Standpunkt der Begriffe aus gesehen liegt hier die Beziehung des Enthaltenseins vor. Parallelogramm und Trapez stehen im Verhältnis von Art- und Gattungsbegriff, d.h., daß diese Systematisierung extensional vorgenommen wurde. Für die Bestimmung der Relation zwischen den Begriffen Trapez und Parallelogramm ist es notwendig, den Inhalt beider Definitionen näher zu betrachten, d.h. intensionale Beziehungen herauszuarbeiten. Im Lehrbuch der Klasse 6 (/6/, S. 130 und 132) werden folgende Definitionen angegeben:

Definition (Trapez): Jedes konvexe Viereck mit einem Paar zueinander paralleler Gegenseiten heißt Trapez.

Definition (Parallelogramm): Jedes Viereck mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten heißt Parallelogramm.

Durch die "Methode des Vergleichens" sind die wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften beider Begriffe herauszustellen. Wesentliche Eigenschaften sind: beide Begriffe sind Vierecke, das Trapez hat ein Paar zueinander garallele Gegenseiten, das Parallelogramm hat zwei Paar parallele Gegenseiten. Eine unwesentliche Eigenschaft wäre z.B. die Länge der Seiten. Aus den wesentlichen Eigenschaften, durch die sich beide Begriffe unterscheiden, läßt sich eine Aussage formulieren, die als Relation zwischen beiden Begriffen aufgefaßt werden kann. In unserem Beispiel würde die Relation R lauten:

"Ein zweites Paar paralleler Gegenseiten".

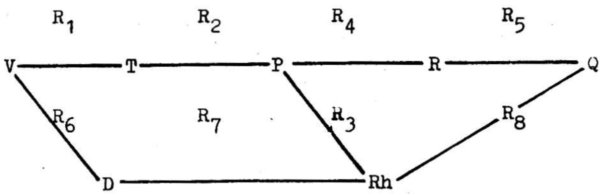
Fassen wir die Begriffe "Parallelogramm" (P) und "Trapez" (T) als Elemente und R als Relation zwischen diesen Elementen auf, so bilden sie ein System.

Wir wollen auch für Systeme eine schematische Darstellung angeben, wobei die Relationen durch Verbindungsgeraden gekennzeichnet werden sollen:

$$P \overset{R}{\rule[0.5ex]{3cm}{0.4pt}} T \tag{1}$$

An diesem Beispiel wird deutlich, daß eine Voraussetzung für das Herausarbeiten der Relationen zwischen einzelnen Begriffen im Unterricht darin besteht, daß die Schüler sichere Kenntnisse über Inhalt und Umfang der in Relation zu bringenden Begriffe haben müssen. Dazu gehört unter anderem das inhaltliche Wiedergeben von Definitionen bzw. deren Interpretation. Der Lehrer muß einerseits die Begriffe voneinander abgrenzen lassen aber andererseits sie durch die Formulierung der wesentlichen Unterschiede als Aussage wieder verbinden.

In den vorangegangenen Ausführungen hatten wir ein Beispiel, wie im Mathematikunterricht ein Artbegriff aus einem Gattungsbegriff gewonnen wurde. Man spricht auch von einer Begriffsunterordnung, wobei der Artbegriff der untergeordnete Begriff ist. Wir möchten uns hier den in der formalen Logik verwendeten Begriffen anschließen, aber betonen, daß sie und die damit zusammenhängende Problematik im Mathematikunterricht nicht behandelt werden sollte. Zu einem Begriff kann es verschiedene Art- und Gattungsbegriffe geben. Ein und derselbe Begriff kann im Hinblick auf einen Begriff als Gattungsbegriff und im Hinblick auf einen anderen als Artbegriff auftreten. So ist z.B. der Begriff "Trapez" Gattungsbegriff im Hinblick auf den Begriff "Parallelogramm" und im Hinblick auf den Begriff "Viereck" Artbegriff. Für den Begriff "Parallelogramm" treten die Begriffe "Viereck" und "Trapez" als Gattungsbegriffe auf. Es soll noch einmal betont werden, daß diese Verhältnisse zwischen den Begriffen extensionale Beziehungen sind, die durch Mengendiagramme anschaulich dargestellt werden können. Für die in Klasse 6 zu behandelnden Vierecke ist solch ein Mengendiagramm in /7/ auf Seite 223 angegeben. Ein System für diese Begriffe soll hier angeführt werden (Abkürzungen: V: Viereck, T: Trapez, P: Parallelogramm, R: Rechteck, Q: Quadrat, D: Drachenviereck, Rh: Rhombus):



(2)

Die Relationen haben folgende Bedeutung:

R_1: Ein Paar parallele Gegenseiten

R_2: Ein zweites Paar paralleler Gegenseiten

R_3: Ein Paar gleich langer benachbarter Seiten

R_4: Ein rechter Winkel

$R_5 = R_3$

R_6: Zwei Paar gleich langer benachbarter Seiten

R_7: Zwei Paar parallele Gegenseiten

$R_8 = R_4$

Das System (1) muß im System (2) als Teilsystem auftreten. Für die Erarbeitung des Systems (2) gibt es im Unterricht verschiedene Möglichkeiten. Einmal kann die Aufstellung gleichzeitig mit der Behandlung der einzelnen Begriffe bzw. einzelner

Teilsysteme erfolgen, zum anderen schrittweise und zwar in der Reihenfolge, wie die einzelnen Begriffe im Unterricht eingeführt werden. Durch Indizes an den Relationen wird so eine zeitliche Abfolge der Behandlung mit angegeben. Das System (2) wurde auf diese Art auf der Grundlage des Lehrbuches für Mathematik der Klasse 6 (siehe /6/, S. 129 - 136) aufgestellt. Bei diesen beiden Möglichkeiten erfolgt eine Parallelbehandlung von Begriffen und Erarbeitung des Begriffssystems. Eine Systematisierung kann aber auch in Form einer Wiederholung nach Einführung aller Begriffe im Unterricht durchgeführt werden.

Der Vorteil des Einsatzes eines solchen Systems im Unterricht drückt sich darin aus, daß die Schüler den inneren Zusammenhang zwischen den Begriffen erkennen und nicht nur auf rein umfangsmäßige Betrachtungen, wie sie bei Teilmengenbeziehungen zustande kommen, geführt werden. Die Teilmengenbeziehungen können auch aus dem System mit Hilfe der Relationen abgelesen und danach grafisch dargestellt werden. System und Mengenbeziehungen sollten eine Einheit bilden.

Für die Arbeit mit dem System (2) im Unterricht soll noch hervorgehoben werden, daß nicht nur die Relationen zwischen zwei unmittelbar "benachbarten" Begriffen betrachtet werden, sondern auch z.B. solche, wie sie zwischen den Begriffen "Viereck" und "Rhombus" bestehen. Diese Relation ergibt sich dann als Summe der Relationen R_1, R_2 und R_3 oder R_6 und R_7. Solche Betrachtungen tragen mit zur Herausbildung der Fähigkeit im Definieren und zur sprachlich-logischen Schulung bei. Für den Begriff "Rhombus" können z.B. folgende Definitionen formuliert werden:

- Ein Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten heißt Rhombus (/6/, S. 134).
- Ein Drachenviereck mit zwei Paar paralleler Gegenseiten heißt Rhombus.
- Ein Viereck mit zwei Paar benachbarter gleich langer Seiten und zwei Paar paralleler Gegenseiten heißt Rhombus.

Die Bildung des Systems (2) erfolgte durch Ableitung von Artbegriffen aus Gattungsbegriffen. Im Mathematikunterricht tritt aber oft der umgekehrte Fall auf. Man spricht dann von der Bildung eines Oberbegriffs. Die Definition des neuen Begriffs ergibt sich dann aus den bereits behandelten Begriffen durch eine Erweiterung oder Zusammenfassung wesentlicher Eigenschaften. Ein Beispiel dazu wäre die Erarbeitung des Begriffs "Bewegung" im Mathematikunterricht der Klasse 6. Nach Einführung des Begriffs "Abbildung", Wiederholung der Begriffe "Verschiebung", "Drehung"und "Spiegelung" und Formulierung ihrer Definitionen mit Hilfe von "eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich" (vgl. /6/, S. 95 und 96) und Herausstellung der gemeinsamen Eigenschaften von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen wird der Begriff "Bewegung" erarbeitet und definiert (/6/, S. 98):

"Unter Bewegung versteht man
(1) Verschiebungen
(2) Drehungen
(3) Spiegelungen und die
(4) Abbildungen, die man erhält, wenn man endlich viele Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen nacheinander ausführt".

Die Formulierung dieser Definition ist so gewählt, daß für die Schüler der "Oberbegriff"charakter zum Ausdruck kommt, also die Zusammenfassung der drei Begriffe aufgrund ihrer gemeinsamen Eigenschaften zu einem neuen Begriff. In dieser Zusammenfassung liegen auch die inhaltlichen Beziehungen oder die Relationen zwischen den Begriffen Bewegung und den anderen begründet. Ein Vergleich der Definition der Bewegung z.B. mit der der Verschiebung (/6/, S. 95),

"Unter Verschiebungen versteht man eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich mit folgenden Eigenschaften:
(1) Die Geraden AA' und BB', die die Originalpunkte A bzw. B mit den ihnen zugeordneten Bildpunkten A' bzw. B' verbinden, sind zueinander parallel.

(2) Die Strahlen AA' und BB' sind gleich orientiert.
(3) Die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ sind gleich lang."

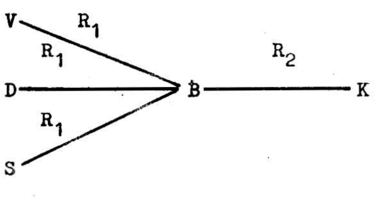
ohne die Eigenschaften der Bewegung mit heranzuziehen, würde für die Schüler sehr schwer sein. Aus den Eigenschaften (1) bis (3) der Verschiebung folgt die Eineindeutigkeit dieser Abbildung. Diese folgt auch aus den Eigenschaften der Bewegung, d.h., man kann als Relation zwischen beiden Begriffen den Begriff "Eigenschaften der eineindeutigen Abbildung" herausstellen. Dieser inhaltliche Bezug, der ebenfalls zu den Begriffen Drehung und Spiegelung besteht, kann durch Umformulierung der Definition der Bewegung deutlich gemacht werden, wobei m.E. auch der "Oberbegriff"charakter erhalten bleibt.

"Bewegungen sind eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich, die Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen oder Zusammensetzungen von endlich vielen Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen sein können".

Mit Hilfe des Bewegungsbegriffs wird der Begriff "Kongruenz" im Unterricht definiert (/6/, S. 100):

"Geometrische Figuren heißen kongruent (deckungsgleich) genau dann, wenn es eine Bewegung gibt, die eine Figur auf die andere abbildet".

Die Relation zwischen beiden Begriffen ist der "Nachweis der Existenz einer Bewegung zwischen den geometrischen Figuren". Schematisch ergibt sich das System der Begriffe Verschiebung (V), Drehung (D), Spiegelung (S), Bewegung (B) und Kongruenz (K) als



mit den Relationen:

R_1: Eigenschaften der eineindeutigen Abbildung
R_2: Nachweis der Existenz einer Bewegung zwischen den geometrischen Figuren.

An Hand dieses Begriffssystems können analoge Betrachtungen im Unterricht durchgeführt werden, wie sie am vorangegangenen Beispiel gezeigt wurden.

Es konnten in diesem Rahmen nur einige Aspekte des Aufstellens und Arbeitens mit Begriffssystemen im Mathematikunterricht dargelegt werden. Auch ist es schwierig und wohl auch gar nicht notwendig, alle Begriffe des Mathematikunterrichts in Systemen zu erfassen. Dort, wo sich Möglichkeiten der Systembildung im Unterricht anbieten, sollten sie mit den Schülern durchgeführt und für den Unterricht genutzt werden. Ziel der Aufstellung von Begriffssystemen für den und im Mathematikunterricht besteht darin,

- einen Überblick über Inhalt und Umfang des zu behandelnden Stoffes zu geben
- grundlegendes zu behandelndes Wissen festzulegen
- eine gewisse Abfolge von Handlungen bei der Einführung des Stoffes vorzuschreiben
- den Schülern extensionale und intensionale Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Begriffen zu verdeutlichen.

Die Begriffssysteme können dem Lehrer eine Hilfe zur Vorbereitung auf den Unterricht sein. Ihre Aufstellung und das Arbeiten mit ihnen im Unterricht tragen dazu bei, das mathematische Denken und die sprachlich-logischen Fähigkeiten der Schüler zu verbessern und Fertigkeiten im Systematisieren und Definieren herauszubilden. Begriffssysteme können eingesetzt werden zur Wiederholung, Anwendung, Festigung und Kontrolle mathematischer Begriffe. Sie sind Grundlage für die Herausbildung von Wissenssystemen.

Literatur

/1/ Klaus, G. Moderne Logik, Berlin 1966

/2/ Klaus, G. und Buhr, M. (Hrsg.)
Philosophisches Wörterbuch, Leipzig 1974

/3/ Rostocker Philosophische Manuskripte, Heft 14
Struktur - Strukturalismus, Universität Rostock 1975

/4/ Dietzel, K. Stand und Aufgaben des Mathematikunterrichtes bei der weiteren inhaltlichen Ausgestaltung der Oberschule
Mathematik in der Schule, 13, 7, S. 353 - 369 (1975)

/5/ Lehrplan Mathematik Klassen 5 bis 10, Berlin 1975

/6/ Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6, Berlin 1973

/7/ Autorenkollektiv, Methodik Mathematikunterricht, Berlin 1975

/8/ Bogojawlenski, D.N. und Mentschinskaja, N.A.
Psychologische Probleme des Kenntniserwerbs in der Schule, Berlin 1962

/9/ Freitag, H. Untersuchungen zu Begriffssystemen auf dem Gebiet des Stoff- und Energiewechsels des Menschen (Klasse 8) unter besonderer Berücksichtigung facheigener und fachübergreifender Beziehungen, Dissertation, Rostock 1974

/10/ Ley, H. und Wessel, K.-F. (Hrsg.)
Weltanschaulich - philosophische Bildung und Erziehung im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin 1974

/11/ Segeth, W. Elementare Logik, Berlin 1969

Anschrift des Verfassers

Dr. paed. Ingo Kölbl
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock, Universitätsplatz 1