Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 9

Wilhelm-Pieck-Universität
Rostock

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 9

1978

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Redaktion: Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 25 Rostock, Vogelsang 13/14
Fernruf 369 577

Verantwortlicher Redakteur: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage
Fachredakteur: Doz. Dr. sc. nat. Gerhard Maeß,
Sektion Mathematik

Herausgegeben von der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock unter Genehmigungs-Nr. C 1035/78

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II

Inhalt

Konrad Engel

Über zwei Lemmata von Kaplansky

1. Problemstellung

Zwei Lemmata von Kaplanski /4/ bilden eine wesentliche Grundlage eines Lösungsweges zum klassischen Ehepaarproblem (vgl. /1/, S. 133 ff). Sie lauten:

Lemma K1:

Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ aus n Elementen gegeben. $\mathcal{L}(n,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,k)$ von $\mathfrak{M}(n)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,k)| = k$,
2. $\forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: Ist $i \neq j$ und $a_i, a_j \in \mathfrak{M}(n,k)$, so $|i-j| \geq 2$.

Es sei $H(n,k) = |\mathcal{L}(n,k)|$.

Es gilt:

$$H(n,k) = \begin{cases} \binom{n-k+1}{k}, & \text{falls } n \geq k \\ 0, & \text{falls } n < k. \end{cases}$$

Lemma K2:

Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ aus n Elementen gegeben. $\mathcal{L}(n,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,k)$ von $\mathfrak{M}(n)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,k)| = k$,
2. $\forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: Ist $i \neq j$ und $a_i, a_j \in \mathfrak{M}(n,k)$, so $|i-j| \geq 2$
3. $a_1 \in \mathfrak{M}(n,k) \Rightarrow a_n \notin \mathfrak{M}(n,k)$.

Es sei $I(n,k) = |\mathcal{L}(n,k)|$.

Es gilt:

$$I(n,k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}, \text{ falls } n > k \geq 1$$

$$I(n,0) = 1 \qquad I(1,k) = 0, \text{ falls } k \geq 2$$

$$I(0,k) = 0, \text{ falls } k \geq 1 \qquad I(n,k) = 0, \text{ falls } k \geq n \geq 2.$$

$$I(1,1) = 1$$

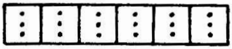
Diese Lemmata sollen nun verallgemeinert werden. Wir ermitteln die Anzahlen von Auswahlen verschiedenen Typs aus endlichen Mengen. Die Typen der Auswahlen seien zunächst anschaulich dargestellt.

1.1. Es sei ein Weg aus n Knoten und n-1 Kanten gegeben. Eine Auswahl 1. Typs sei eine Teilmenge der Menge der Knoten, die der Bedingung genügt, daß keine zwei Knoten durch nur eine Kante verbunden sind.

Figur 1

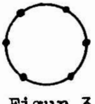
Diese Auswahlen werden im Lemma K1 betrachtet.

1.2. Gegeben sei eine Folge von n Rechtecken, die, wie aus Figur 2 ersichtlich, je eine Seite gemeinsam haben. In den Rechtecken seien jeweils q Punkte gekennzeichnet. Eine Auswahl 2. Typs sei eine Teilmenge der Menge der Punkte, die die Bedingung erfüllt, daß keine 2 Punkte in benachbarten Rechtecken enthalten sind.



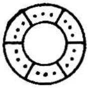
Figur 2

1.3. Es sei ein Kreis aus n Knoten und n Kanten gegeben. Eine Auswahl 3. Typs sei eine Teilmenge der Menge der Knoten, die die Bedingung aus 1.1. erfüllt.
Diese Auswahlen werden im Lemma K2 betrachtet.



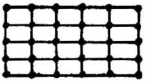
Figur 3

1.4. Gegeben sei ein Kreisring, der in n Flächenstücke aufgeteilt ist, wie Figur 4 angibt. In jedem Flächenstück seien q Punkte gekennzeichnet. Eine Auswahl 4. Typs sei eine Teilmenge der Menge der Punkte, die der Bedingung genügt, daß sie keine zwei Punkte aus benachbarten Flächenstücken enthält.



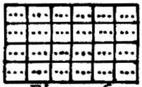
Figur 4

1.5. Es sei ein Graph aus n·p Knoten und (n-1)(p-1) Kanten der Form, wie sie in Figur 5 ersichtlich ist, gegeben. Eine Auswahl 5. Typs sei eine Teilmenge der Menge der Knoten, die die Bedingung erfüllt, daß keine zwei Knoten durch nur eine Kante verbunden sind.



Figur 5

1.6. Ein Rechteck sei in n·p Rechtecke aufgeteilt (Figur 6). In jedem Rechteck seien q Punkte gekennzeichnet. Eine Auswahl 6. Typs sei eine Teilmenge der Menge der Punkte, die die Bedingung erfüllt, daß keine zwei Punkte benachbarten Rechtecken angehören.



Figur 6

2. Abstrakte Formulierung der Probleme 1.2., 1.4., 1.5., 1.6. und deren Lösung

2.1. Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{M}(n,q)$ aus n·q Elementen, die in einer Matrix angeordnet seien.

$$\mathfrak{M}(n,q) = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nq} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}(n,q,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,q,k)$ von $\mathfrak{M}(n,q)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,q,k)| = k$

2. $\forall i,\ r \in \{1,\dots,n\}\ \ \forall j,\ s \in \{1,\dots,q\}$ gilt: Ist $i \neq r$ und $a_{ij},\ a_{rs} \in \mathfrak{M}(n,q,k)$, so $|i-r| \geq 2$.

Es sei $H(n,q,k) = |\mathcal{L}(n,q,k)|$.

<u>Satz 1:</u>

Es gilt:

$$H(n+1,q,k) = \binom{q}{0} H(n,q,k) + \binom{q}{1} H(n-1,q,k-1)$$
$$+ \binom{q}{2} H(n-1,q,k-2) + \dots + \binom{q}{k} H(n-1,q,0)$$

$H(n,q,0) = 1$

$H(n,q,1) = n \cdot q$

$H(0,q,k) = 0$, für $k \geq 1$

$H(1,q,k) = \binom{q}{k}$.

<u>Beweis:</u> Wir können $\mathcal{L}(n+1,q,k)$ in paarweise disjunkte Teilmengen zerlegen.

$\mathcal{L}_0 = \{\mathfrak{M}(n,q,k);\ \nexists\, j \in \{1,\ \dots,\ q\}$, so daß $a_{n+1\ j} \in \mathfrak{M}(n,q,k)\}$

$\mathcal{L}_1 = \{\mathfrak{M}(n,q,k); \exists!\, T(1)$ mit $T(1) \subseteq \{1,\ \dots,\ q\}$ und $|T(1)| = 1$, so daß $j \in T(1) \Longrightarrow a_{n+1\ j} \in \mathfrak{M}(n,q,k)\}$

...

$\mathcal{L}_t = \{\mathfrak{M}(n,q,k); \exists!\, T(t)$ mit $T(t) \subseteq \{1,\ \dots,\ q\}$ und $|T(t)| = t$, so daß $j \in T(t) \Longrightarrow a_{n+1\ j} \in \mathfrak{M}(n,q,k)\}$ $(1 \leq t \leq k)$.

Wir ermitteln

$|\mathcal{L}_0| = \binom{q}{0} H(n,q,k)$

$|\mathcal{L}_1| = \binom{q}{1} H(n-1,q,k-1)$

...

$|\mathcal{L}_t| = \binom{q}{t} H(n-1,q,k-t)$.

Hieraus ergibt sich die Behauptung. Die Anfangswerte sind evident. q.e.d.

Aus dieser Rekursionsformel ist schwer eine explizite Formel abzuleiten, deshalb gehen wir hier einen anderen Weg. Dazu behandeln wir vorerst ein Lemma.

Lemma 1:

Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(t,q)$ aus $t\cdot q$ Elementen, die in einer Matrix angeordnet seien, gegeben.

$$\mathfrak{M}(t,q) = \begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1q} \\ \dots\dots\dots \\ a_{t1}\dots a_{tq} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{L}(t,q,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(t,q,k)$ von $\mathfrak{M}(t,q)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(t,q,k)| = k$
2. $\forall i \in \{1, \dots, t\}\ \exists j \in \{1, \dots, q\}\ a_{ij} \in \mathfrak{M}(t,q,k)$.

Es sei $B(t,q,k) = |\mathcal{L}(t,q,k)|$.

Es gilt: $B(t,q,k) = \sum\limits_{i=o}^{t} (-1)^i \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k}$.

Beweis:

Zunächst sei $\mathcal{A}_0(t,q,k)$ die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{A}_0(t,q,k)$ von $\mathfrak{M}(t,q)$, für die gilt:

$|\mathfrak{A}_0(t,q,k)| = k$.

Weiterhin seien $\mathcal{A}_i(t,q,k)$ $(i=1,\dots,t)$ die Mengen aller Teilmengen $\mathfrak{A}_i(t,q,k)$ von $\mathfrak{M}(t,q)$, für die gilt:

1. $|\mathfrak{A}_i(t,q,k)| = k$
2. $\forall j \in \{1, \dots, q\}\ a_{ij} \notin \mathfrak{A}_i(t,q,k)$.

Offenbar gilt: $\mathcal{L}(t,q,k) = \mathcal{A}_0(t,q,k) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t} \mathfrak{A}_i(t,q,k)$, d. h.

$$B(t,q,k) = |\mathcal{A}_0(t,q,k)| - |\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{A}_i(t,q,k)|.$$

Leicht erhält man $|\mathcal{A}_0(t,q,k)| = \binom{t\cdot q}{k}$.

Wir benutzen nun die Formel für Inklusion und Exklusion (vgl. /1/ , S. 101 ff) und setzen kurz $\mathfrak{A}_i(t,q,k) = \mathfrak{A}_i$.

Es sei $S_i = \sum |\bigcap\limits_{\nu\in T(i)} \mathfrak{A}_\nu|$; $T(i) \subseteq \{1, \dots, t\}$ und $|T(i)| = i$.

Es ist $\bigcap_{\nu\in T(i)} \mathfrak{A}_\nu = \{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}(t,q);\ |\mathfrak{A}|=k \text{ und } \forall j \in \{1,\dots,q\}\ i\in T(i) \Rightarrow a_{ij} \notin \mathfrak{A}\}$,

d. h. $\left|\bigcap_{\nu\in T(i)} \mathfrak{A}_\nu\right| = \binom{(t-i)q}{k}$.

Da es nun $\binom{t}{i}$ Teilmengen $T(i)$ gibt, erhalten wir

$$S_i = \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k}.$$

Damit ist

$$\left|\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{A}_i\right| = \sum_{i=1}^{t} (-1)^{i+1} \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k} \text{ und letzten Endes}$$

$$B(t,q,k) = \sum_{i=0}^{t} (-1)^{i} \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k}.$$

q.e.d.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir den folgenden Satz 2 beweisen.

Satz 2:

Es gilt:

$$H(n,q,k) = \sum_{t=1}^{n} H(n,t)\cdot B(t,q,k)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \binom{n-t+1}{t} \cdot \sum_{i=0}^{t} (-1)^{i} \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k}.$$

Beweis:

Wir können wieder $\mathfrak{L}(n,q,k)$ in paarweise disjunkte Teilmengen zerlegen ($t=1, \dots, n$). Dazu sei im Lemma K1 $\mathfrak{M}(n) = \{1,\dots, n\}$ gesetzt, d. h. $a_i = i$ ($i=1, \dots, n$). $\mathfrak{L}(n,t)$ und $\mathfrak{M}(n,t)$ werden wie im Lemma K1 definiert. Nun sei

$\mathfrak{L}_t = \{\mathfrak{M}(n,q,k);\ \exists!\, \mathfrak{M}(n,t), \text{ so daß } \forall\, i \in \mathfrak{M}(n,t)\ \exists\, j \in \{1, \dots, q\}\ a_{ij} \in \mathfrak{M}(n,q,k)\}$.

Es existieren nach Lemma K1 $\binom{n-t+1}{t}$ Mengen $\mathfrak{M}(n,t)$.

Numerieren wir diese Mengen $\mathfrak{M}(n,t)$ irgendwie durch, so können wir $\mathfrak{L}_t$ weiter in disjunkte Teilmengen $\mathfrak{L}_{t,\nu}$ zerlegen

($\nu = 1, \dots, \binom{n-t+1}{t}$).

$\mathcal{L}_{t,\nu} = \{\mathfrak{M}(n,q,k);\ \forall i \in \mathfrak{M}_\nu(n,t)\ \exists j \in \{1,\dots,q\}\ a_{ij} \in \mathfrak{M}(n,q,k)\}$.
Es ist nun offenbar $|\mathcal{L}_{t,\nu}| = B(t,q,k)$, so daß

$$|\mathcal{L}_t| = H(n,t)\cdot B(t,q,k) = \binom{n-t+1}{t} \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k} \quad \text{und}$$

$$|\mathcal{L}(n,q,k)| = H(n,q,k) = \sum_{t=1}^{n} H(n,t)\cdot B(t,q,k)$$

$$= \sum_{t=1}^{n}\binom{n-t+1}{t}\sum_{i=0}^{t} (-1)^i \binom{t}{i}\binom{(t-i)q}{k}.$$

q.e.d.

2.2. Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{M}(n,q)$ aus $n\cdot q$ Elementen, die in einer Matrix angeordnet seien.

$$\mathfrak{M}(n,q) = \begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nq}\end{pmatrix}.$$

$\mathcal{L}(n,q,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,q,k)$ von $\mathfrak{M}(n,q)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,q,k)| = k$
2. $\forall i,\ r \in \{1, \dots, n\}\ \forall j,\ s \in \{1, \dots, q\}$ gilt: Ist $i \neq r$ und $a_{ij},\ a_{rs} \in \mathfrak{M}(n,q,k)$, so $|i-r| \geq 2$
3. $\forall j,\ s \in \{1, \dots, q\}\ a_{1j} \in \mathfrak{M}(n,q,k) \rightarrow a_{ns} \notin \mathfrak{M}(n,q,k)$.

Sei $I(n,q,k) = |\mathcal{L}(n,q,k)|$.

<u>Satz 3:</u>

$$I(n,q,k) = \sum_{t=1}^{n} I(n,t)\cdot B(t,q,k).$$

Der Beweis dieses Satzes läuft analog dem des Satzes 2.

2.3. Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n,p)$ aus $n\cdot p$ Elementen, die in einer Matrix angeordnet seien, gegeben.

$$\mathfrak{M}(n,p) = \begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{np}\end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}(n,p,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,p,k)$ von $\mathfrak{M}(n,p)$

mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,p,k)| = k$
2. $\forall i, r \in \{1, \ldots, n\} \forall j, s \in \{1, \ldots, p\}$ gilt: Ist $(i,j) \neq (r,s)$ und $a_{ij}, a_{rs} \in \mathfrak{M}(n,p,k)$, so $|i-r| \geq 2$, $|j-s| \geq 2$.

Sei $Q(n,p,k) = |\mathcal{L}(n,p,k)|$.

Es werden zunächst die Fälle $p = 2$ und $p = 3$ untersucht.

2.3.1. Der Fall $p = 2$

Lemma 2:

Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ aus n Elementen gegeben. $\mathcal{L}(n,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,k)$ von $\mathfrak{M}(n)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,k)| = k$
2. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: Ist $a_i, a_j \in \mathfrak{M}(n,k)$ und $i < j$, so
   $|j-i| \geq 3$, falls i ungerade,
   $|j-i| \neq 2$, falls i gerade.

Sei $R(n,k) = |\mathcal{L}(n,k)|$.

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{ll}
R(2n+1,k) = R(2n,k) + R(2n-2,k-1) + R(2n-3,k-2) & \\
R(2n,k) = R(2n-1,k) + R(2n-3,k-1) & \\
R(n,0) = 1 & R(1,k) = 0 \text{ für } k \geq 2 \\
R(n,1) = n & R(2,k) = 0 \text{ für } k \geq 2 \\
R(0,k) = 0 \text{ für } k \geq 1 & R(3,2) = 1 \\
 & R(3,k) = 0 \text{ für } k \geq 3.
\end{array}\right\} (*)$$

Beweis:

Die speziellen Werte sind wieder leicht einzusehen.

Es sei $\mathcal{L}^{n-1}(n,k)$ eine Teilmenge von $\mathcal{L}(n,k)$, für deren Elemente $\mathfrak{M}^{n-1}(n,k)$ gilt: $a_{n-1} \notin \mathfrak{M}^{n-1}(n,k)$.

Sei $R^{n-1}(n,k) = |\mathcal{L}^{n-1}(n,k)|$.

Wir zerlegen $\mathcal{L}(2n+1,k)$ in

$\mathcal{L}_1 = \{\mathfrak{M}(2n+1,k);\ a_{2n+1} \notin \mathfrak{M}(2n+1,k)\}$

$\mathcal{L}_2 = \{\mathfrak{M}(2n+1,k);\ a_{2n+1} \in \mathfrak{M}(2n+1,k)\}$.

Es gilt: $|\mathcal{L}_1| = |\mathcal{L}(2n,k)| = R(2n,k)$

$$|\mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}^{2n-1}(2n,k-1)| = R^{2n-1}(2n,k-1).$$

Wir zerlegen $\mathcal{L}^{2n-1}(2n,k-1)$ in

$$\mathcal{L}_3 = \{\mathfrak{M}^{2n-1}(2n,k-1);\ a_{2n} \notin \mathfrak{M}^{2n-1}(2n,k-1)\}$$

$$\mathcal{L}_4 = \{\mathfrak{M}^{2n-1}(2n,k-1);\ a_{2n} \in \mathfrak{M}^{2n-1}(2n,k-1)\}.$$

Es gilt: $|\mathcal{L}_3| = |\mathcal{L}(2n-2,k-1)| = R(2n-2,k-1)$

$|\mathcal{L}_4| = |\mathcal{L}(2n-3,k-2)| = R(2n-3,k-2)$.

Somit ist $R(2n+1,k) = |\mathcal{L}_1| + |\mathcal{L}_3| + |\mathcal{L}_4| = R(2n,k) + R(2n-2,k-1) + R(2n-3,k-2)$.

Wir zerlegen $\mathcal{L}(2n,k)$ in

$$\mathcal{L}_5 = \{\mathfrak{M}(2n,k);\ a_{2n} \notin \mathfrak{M}(2n,k)\}$$

$$\mathcal{L}_6 = \{\mathfrak{M}(2n,k);\ a_{2n} \in \mathfrak{M}(2n,k)\}.$$

Es gilt: $|\mathcal{L}_5| = R(2n-1,k)$

$|\mathcal{L}_6| = R(2n-3,k-1)$.

Somit ist $R(2n,k) = R(2n-1,k) + R(2n-3,k-1)$.

Die folgende Tabelle, die man schnell durch Benutzung geeigneter Schablonen erhält, gibt die Werte $R(n,k)$ für kleine Zahlen n,k an.

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	0	1	2	5	8	13	18	25	32
3	0	0	0	0	0	1	2	7	12	25	38
4	0	0	0	0	0	0	0	1	2	9	16
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 1

<u>Lemma 3:</u>

Es gilt:

$$R(2n,k) = (n-k+1) \sum_{i=\max(n-k,k-1)}^{n} \frac{i!}{(i-k+1)!(i-n+k)!(n-i)!}$$

$$R(2n+1,k) = \sum_{i=\max(n-k,k-1)}^{n} \frac{(i+1)!}{(i-k+1)!(i-n+k)!(n-i)!}.$$

Beweis:
Hier und im folgenden wird bei der Ermittlung expliziter Darstellungen der Anzahlen aus rekursiven Darstellungen der Kalkül der formalen Potenzreihen angewandt (vgl. /3/, S. 11 ff).

Sei $$\Phi_1 = \sum_{i,j=0}^{\infty} R(2i+1, j)x^{2i+1}y^j$$

$$\Phi_2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} R(2i, j)x^{2i}y^j$$

Wegen (*) gilt:

$$\Phi_1(1 - x^2y) + \Phi_2(-x) = xy$$

$$\Phi_1(-x - x^3y) + \Phi_2 \cdot 1 = 1 + x^2y.$$

Diese Gleichungen können als Gleichungssystem über dem Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[x,y]$ aufgefaßt werden. Als Lösungen ergeben sich

$$\Phi_1 = \frac{x + yx + yx^3}{1 - (x^2 + yx^2 + yx^4)}$$

$$\Phi_2 = \frac{1 + yx^2}{1 - (x^2 + yx^2 + yx^4)}$$

Die Reihenzerlegung führt zu

$$\Phi_1 = x(1+y+x^2y) \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}(1+y+yx^2)^i$$

$$= x(1+y+x^2y) \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \sum_{\nu=0}^{i} \binom{i}{\nu} y^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} x^{2\mu}$$

$$\Phi_2 = (1+yx^2) \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \sum_{\nu=0}^{i} \binom{i}{\nu} y^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} x^{2\mu}$$

Sei $F(n,k)$ der Faktor vor $x^{2n}y^k$ der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \sum_{\nu=0}^{i} \binom{i}{\nu} y^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} x^{2\mu}.$$

Es gilt: $F(n,k) = \sum_{i=\max(k,n-k)}^{n} \binom{i}{k}\binom{k}{n-i}$.

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$R(2n+1,k) = F(n,k) + F(n,k-1) + F(n-1,k-1)$
$R(2n,k) = F(n,k) + F(n-1,k-1)$.

Eine Rechnung bestätigt die im Lemma angegebenen Formeln.

q.e.d.

Satz 4:
Es gilt: $Q(n,2,k) = R(2n,k)$.
Beweis:
Eine Umnumerierung der Art $a_{2\cdot i-1} = a_{i1}$, $a_{2\cdot i} = a_{i2}$ $(i=1,\ldots,n)$ ermöglicht die direkte Anwendung von Lemma 3.

q.e.d.

2.3.2. Der Fall p = 3

Lemma 4:
Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n) = \{a_1,\ldots,a_n\}$ aus n Elementen gegeben. $\mathcal{L}(n,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,k)$ von $\mathfrak{M}(n)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,k)| = k$
2. $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt: Ist $a_i, a_j \in \mathfrak{M}(n,k)$ und $i<j$, so
   $|j-i| \neq 3$, falls $i \equiv 0\ (3)$
   $|j-i| \neq 1$ und $j-i \neq 3$, falls $i \equiv 1\ (3)$ oder $i \equiv 2\ (3)$.

Sei $R(n,k) = |\mathcal{L}(n,k)|$.

Es sei $\mathcal{L}^{\gamma}(n,k)$ eine Teilmenge von $\mathcal{L}(n,k)$, für deren Elemente $\mathfrak{M}^{\gamma}(n,k)$ gilt: $a_{\gamma} \notin \mathfrak{M}^{\gamma}(n,k)$ $(\gamma \in \{1,\ldots,n\})$.
Weiterhin sei $R^{\gamma}(n,k) = |\mathcal{L}^{\gamma}(n,k)|$.
Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l}
R(3n+1,k) = R(3n,k) + R(3n-4,k-2) + R^{3n-2}(3n-1,k-1) \\
R(3n+2,k) = R(3n+1,k) + R^{3n-1}(3n,k-1) \\
R(3n,k) \quad = R(3n-1,k) + R^{3n-3}(3n-2,k-1) \\
R^{n-1}(n,k) = R(n-2,k) + R^{n-3}(n-2,k-1) \\
\text{und} \\
\begin{array}{ll}
R(n,0) = 1 & R^{n-1}(n,0) = 1 \\
R(n,1) = n & \\
R(0,k) = 0 \text{ für } k \geq 2 & R^{-1}(0,k) = 0 \text{ für } k \geq 1 \\
R(1,k) = 0 \text{ für } k \geq 2 & \\
R(2,k) = 0 \text{ für } k \geq 2 & R^{0}(1,1) = 1 \\
R(3,2) = 1 & \\
R(3,k) = 0 \text{ für } k \geq 3 & R^{0}(1,k) = 0 \text{ für } k \geq 1 \\
R(4,2) = 3 & \\
R(4,k) = 0 \text{ für } k \geq 3. &
\end{array}
\end{array}\right\} (**)$$

<u>Beweis:</u>

Die Anfangswerte ermittelt man leicht.

Wir zerlegen $\mathcal{L}(3n+1,k)$ in

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathfrak{M}(3n+1,k);\ a_{3n+1} \notin \mathfrak{M}(3n+1,k)\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathfrak{M}(3n+1,k);\ a_{3n+1} \in \mathfrak{M}(3n+1,k)\}.$$

Es ist

$$|\mathcal{L}_1| = R(3n,k)$$

$$|\mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}^{3n-2}(3n,k-1)| = R^{3n-2}(3n,k-1).$$

Wir zerlegen ferner $\mathcal{L}^{3n-2}(3n,k-1)$ in

$$\mathcal{L}_3 = \{\mathfrak{M}^{3n-2}(3n,k-1);\ a_{3n} \notin \mathfrak{M}^{3n-2}(3n,k-1)\}$$

$$\mathcal{L}_4 = \{\mathfrak{M}^{3n-2}(3n,k-1);\ a_{3n} \in \mathfrak{M}^{3n-2}(3n,k-1)\}.$$

Es ist

$$|\mathcal{L}_3| = R^{3n-2}(3n-1,k-1)$$

$$|\mathcal{L}_4| = R(3n-4,k-2).$$

Hieraus ergibt sich die erste der im Lemma angegebenen Formeln. Die anderen errechnet man analog.
Aus der folgenden Tabelle, die man wieder leicht durch Benutzung geeigneter Schablonen erhält, kann man die Werte $R(n,k)$ und $R^{n-1}(n,k)$ für kleine Zahlen n,k ablesen. Dabei steht in der linken Spalte unter n der Wert $R(n,k)$ und in der rechten Spalte unter n der Wert $R^{n-1}(n,k)$.

k \ n	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8	7	9	8	10	9	11	10	12	11
2	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	5	3	8	6	13	9	18	13	24	19	32	25	40	32	49	41
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	7	4	13	8	22	16	40	26	59	41	84	65
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	6	5	19	10	35	22	61	45
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	8	6	18	13
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 2

Lemma 5:

Sei
$$F(n,k) = \sum_{\substack{i_1+i_2+2i_3+2i_4+2i_5+3i_6+3i_7+4i_8=n \\ i_2+i_3+2i_4+3i_5+2i_6+4i_7+4i_8=k}} P(i_1,i_2,\ldots,i_8),$$

wobei

$$P(i_1,i_2,\ldots,i_8) = \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_8)!}{i_1!i_2!\ldots i_8!} \cdot 2^{i_3} \cdot 3^{i_4} \cdot (-1)^{i_7} \cdot (-1)^{i_8}.$$

Die Summe werde dabei über alle 8-Tupel aus nichtnegativen ganzen Zahlen erstreckt, für die die beiden Gleichungen gelten.

Es gilt:

$$R(3n,k) = F(n,k)+2F(n-1,k-1)+F(n-1,k-2)+F(n-2,k-2)-F(n-3,k-4)$$

$$R(3n+1,k) = F(n,k)+F(n,k-1)+2F(n-1,k-1)+2F(n-1,k-2)+F(n-2,k-2)-F(n-3,k-4)$$

$$R(3n+2,k) = F(n,k)+2F(n,k-1)+2F(n-1,k-1)+3F(n-1,k-2)+F(n-1,k-3)+F(n-2,k-2)-F(n-2,k-4)-F(n-3,k-4).$$

Beweis:

Sei $\Phi_1 = \sum_{i,j=o}^{\infty} R(3i+1,j)x^{3i+1}y^j$

$$\Phi_2 = \sum_{i,j=o}^{\infty} R(3i+2,j)x^{3i+2}y^j$$

$$\Phi_3 = \sum_{i,j=o}^{\infty} R(3i,j)x^{3i}y^j$$

$$\Phi_4 = \sum_{i,j=o}^{\infty} R^{i-1}(i,j)x^iy^j.$$

Wegen (**) gilt:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - x^2y\,\Phi_1 - x^2y\,\Phi_2 - x^2y\,\Phi_3 = x\,\Phi_1 + x\,\Phi_2 + x\,\Phi_3 - x^3y\,\Phi_1 - x^3y\,\Phi_2 - x^3y\,\Phi_3 + x^5y^2\,\Phi_2 - x^7y^3\,\Phi_2 + x^4y\,\Phi_1 + x^4y\,\Phi_2 + x^4y\,\Phi_3 + 1 + xy + x^3y + x^4y^2 - x^6y^3.$$

Wir können nun auf beiden Seiten die Glieder zusammenfassen, in denen x in einer i-ten Potenz auftaucht, wobei $i \equiv 0(3)$, $i \equiv 1(3)$ bzw. $i \equiv 2(3)$. Die Summen dieser Glieder müssen auf beiden Seiten der Gleichung gleich sein. So erhalten wir:

$$\Phi_1 - x^2y\,\Phi_2 - x\,\Phi_3 = xy$$

$$-x(1+x^3y)\,\Phi_1 + (1+x^3y)\,\Phi_2 - x^2y\,\Phi_3 = 0$$

$$-x^2y\,\Phi_1 + x(x^6y^3-x^3y-1)\,\Phi_2 + (1+x^3y)\,\Phi_3 = 1+x^3y-x^6y^3.$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem über dem Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[x,y]$ auf, so erhalten wir mit

$z = x^3$ und

$$N = 1 - (z+zy+2z^2y+3z^2y^2+z^2y^3+z^3y^2-z^3y^4-z^4y^4)$$

$$\Phi_1 = x(1+y+2zy+2zy^2+z^2y^2-z^3y^4)/N$$

$$\Phi_2 = x^2(1+2y+2zy+3zy^2+zy^3+z^2y^2-z^2y^4-z^3y^4)/N$$

$$\Phi_3 = (1+2zy+zy^2+z^2y^2-z^3y^4)/N.$$

Durch Reihenzerlegung und Koeffizientenvergleich erhält man die angegebenen Formeln. Die Rechnung sei kurz am Beispiel Φ_3 vorgeführt.

$$\Phi_3 = (1+2zy+zy^2+z^2y^2-z^3y^4)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty} (z+zy+2z^2y+3z^2y^2+z^2y^3+z^3y^2-z^3y^4-z^4y^4)^i.$$

Unter Anwendung des Polynomischen Lehrsatzes ergibt sich

$$\Phi_3 = (1+2zy+zy^2+z^2y^2-z^3y^4)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_8=i \\ i_1,\ldots,i_8\geq 0}} \frac{i!}{i_1!\cdot\ldots\cdot i_8!} \cdot z^{i_1}\, z^{i_2}\, y^{i_2}\, 2^{i_3}\, z^{2i_3}\, y^{i_3}\, 3^{i_4}$$

$$\cdot\, z^{2i_4}\, y^{2i_4}\, z^{2i_5}\, y^{3i_5}\, z^{3i_6}\, y^{2i_6}\, (-1)^{i_7}\, z^{3i_7}\, y^{4i_7}\, (-1)^{i_8}\,\cdot$$

$$\cdot\, z^{4i_8}\, y^{4i_8}.$$

Ein Koeffizientenvergleich bestätigt das Ergebnis.

q.e.d.

<u>Satz 5:</u>

Es gilt:

$Q(n,3,k) = R(3n,k)$.

Beweis:

Wir numerieren um:

$a_{3\cdot i-2}=a_{i1}$, $a_{3\cdot i-1}=a_{i2}$, $a_{3\cdot i}=a_{i3}$ $(i=1,\ldots,n)$.

Wir können direkt Lemma 5 anwenden.

q. e. d.

2.5.3. Der Fall $p>3$

Lemma 6:

Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n)=\{a_1,\ldots,a_n\}$ aus n Elementen gegeben. $\mathcal{L}(n,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,k)$ von $\mathfrak{M}(n)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,k)|=k$
2. $\forall i,j\in\{1,\ldots,n\}$ gilt: Ist $a_i,a_j\in\mathfrak{M}(n,k)$ und $i<j$, so

   $|j-i|\neq p$, falls $i\equiv 0(p)$

   $|j-i|\neq 1$, $|j-i|\neq p$, falls $i\not\equiv 0(p)$.

Sei $R(n,k)=|\mathcal{L}(n,k)|$.

Weiterhin sei $\mathfrak{E}(n)$ die Menge aller Teilmengen von $\{n-p+1,\ldots,n\}$ und $\mathfrak{E}_i(n)$ deren Elemente.

$\mathcal{L}^{\mathfrak{E}_i(n)}(n,k)$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{L}(n,k)$, für deren Elemente $\mathfrak{M}^{\mathfrak{E}_i(n)}(n,k)$ gilt:

$\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ $j\in\mathfrak{E}_i(n)\Rightarrow a_j\notin\mathfrak{M}^{\mathfrak{E}_i(n)}(n,k)$.

Sei $|\mathcal{L}^{\mathfrak{E}_i(n)}(n,k)|=R^{\mathfrak{E}_i(n)}(n,k)$. (Man beachte: $R^{\emptyset}(n,k)=R(n,k)$).

Es gilt:

$$R(n+1,k)=R(n,k)+R^{\mathfrak{E}_1(n)}(n,k-1),\ \text{falls } n\equiv 0(p)$$
$$\mathfrak{E}_1(n)=\{n-p+1\}$$

$$R(n+1,k)=R(n,k)+R^{\mathfrak{E}_2(n-1)}(n-1,k-1),\ \text{falls } n\not\equiv 0(p)$$
$$\mathfrak{E}_2(n-1)=\{n-p+1\}.$$

Sei nun $\mathfrak{E}_i(n+1)=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ $(n-p+2\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_r\leq n+1)$.

Es gilt weiter

$$R^{\zeta_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\zeta_3(n)}(n,k) + R^{\zeta_4(n)}(n,k-1), \text{ falls } n \equiv 0(p)$$
$$\text{und } \alpha_r < n+1; \zeta_3(n) = \zeta_i(n+1);$$
$$\zeta_4(n) = \{n-p+1\} \cup \zeta_i(n+1)$$

$$R^{\zeta_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\zeta_5(n)}(n,k), \text{ falls } \alpha_r = n+1$$
$$\zeta_5(n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}$$

$$R^{\zeta_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\zeta_3(n)}(n,k) + R^{\zeta_6(n-1)}(n-1,k-1),$$
$$\text{falls } n \not\equiv 0(p) \text{ und } \alpha_r < n$$
$$\zeta_6(n-1) = \zeta_i(n+1) \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\zeta_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\zeta_3(n)}(n,k) + R^{\zeta_7(n-1)}(n-1,k-1),$$
$$\text{falls } n \not\equiv 0(p) \text{ und } \alpha_r = n$$
$$\zeta_7(n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}.$$

Außerdem ist

$R(n,0) = 1$	$R^{\zeta_i(n)}(n,0) = 1$
$R(0,k) = 0$ für $k \geq 1$	$R^{\zeta_i(o)}(0,k) = 0$ für $k \geq 1$
$R(1,1) = 1$	$R^{\zeta_i(1)}(1,1) = \begin{cases} 0, \text{ falls } 1 \in \zeta_i(1) \\ 1, \text{ falls } 1 \notin \zeta_i(1) \end{cases}$
$R(1,k) = 0$ für $k \geq 2$	$R^{\zeta_i(1)}(1,k) = 0$ für $k \geq 2.$

<u>Beweis:</u>

Die Anfangswerte sind leicht einzusehen, und die Rekursionsformeln ermittelt man analog zu 2.3.2. Man überlegt sich auch leicht, daß die neu auftretenden Mengen $\zeta_v(k)$ ($v \in \{1, \dots, 7\}$, $k \in \{n, n-1\}$) tatsächlich in $\zeta(n)$ bzw. $\zeta(n-1)$ enthalten sind.

q.e.d.

Es ist möglich, die Zahl der auftretenden Hilfsgrößen $R^{\zeta_i(n)}(n,k)$ zu reduzieren. Dazu beweisen wir das folgende

Lemma 7.

<u>Lemma 7:</u>

Sei $\mathcal{G}(n)$ die Menge aller Teilmengen $\mathcal{G}_i(n)$ von $\{n-p+1,\ldots,n-1\}$ mit den Eigenschaften

1. $\forall u,v \in \{n-p+1,\ldots, n-1\}\ u,v \in \mathcal{G}_i(n)$ und $u < v$ und $u \not\equiv 0(p)$
   $\Rightarrow v - u \geq 2$
2. $\forall u \in \{n-p+1,\ldots, n-1\}\ u \in \mathcal{G}_i(n)$ und $n \not\equiv 0(p) \Rightarrow u - (n-p+1) \geq 1.$

$\mathcal{L}^{\mathcal{G}_i(n)}(n,k)$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{L}(n,k)$, für deren Elemente $\mathfrak{M}^{\mathcal{G}_i(n)}(n,k)$ gilt:

$\forall j \in \{1,\ldots,n\}\ j \in \mathcal{G}_i(n) \Rightarrow a_j \notin \mathfrak{M}^{\mathcal{G}_i(n)}(n,k).$

Sei $R^{\mathcal{G}_i(n)}(n,k) = |\mathcal{L}^{\mathcal{G}_i(n)}(n,k)|$. (Man beachte $R^{\emptyset}(n,k) = R(n,k)$).

Es gilt:

$$R(n+1,k) = R(n,k) + R^{\mathcal{G}_1(n)}(n,k-1), \text{ falls } n \equiv 0(p)$$
$$\mathcal{G}_1(n) = \{n-p+1\}$$
$$R(n+1,k) = R(n,k) + R^{\mathcal{G}_2(n-1)}(n-1,k-1), \text{ falls } n \not\equiv 0(p)$$
$$\mathcal{G}_2(n-1) = \{n-p+1\}.$$

Sei $\mathcal{G}_i(n+1) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ $\qquad (n-p+2 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_r \leq n)$.

Weiterhin gilt:

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_3(n)}(n,k) + R^{\mathcal{G}_4(n)}(n,k-1),$$
falls $n \equiv 0(p)$ und $\alpha_r < n$
$$\mathcal{G}_3(n) = \mathcal{G}_i(n+1);\ \mathcal{G}_4(n) = \mathcal{G}_i(n+1) \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_5(n-1)}(n-1,k) + R^{\mathcal{G}_6(n-1)}(n-1,k-1),$$
falls $n \equiv 0(p)$ und $\alpha_r = n$
$$\mathcal{G}_5(n-1) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}\};$$
$$\mathcal{G}_6(n-1) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}\} \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_7(n)}(n,k) + R^{\mathcal{G}_8(n)}(n-1,k-1),$$

falls $n \not\equiv 0(p)$ und $\alpha_r < n-1$

$$\mathcal{G}_7(n) = \mathcal{G}_i(n+1);\ \mathcal{G}_8(n-1) = \mathcal{G}_i(n+1) \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_9(n)}(n,k) + R^{\mathcal{G}_{10}(n-2)}(n-2,k-1),$$

falls $n \not\equiv 0(p)$ und $\alpha_r = n-1$ und $\alpha_{r-1} = n-3$

$$\mathcal{G}_9(n) = \mathcal{G}_i(n+1);$$

$$\mathcal{G}_{10}(n-2) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\} \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_{11}(n)}(n,k) + R^{\mathcal{G}_{12}(n-3)}(n-3,k-1),$$

falls $n \not\equiv 0(p)$ und $\alpha_r = n-1$

und $\alpha_{r-1} = n-2$, d. h. $n \equiv 2(p)$

$$\mathcal{G}_{11}(n) = \mathcal{G}_i(n+1);$$

$$\mathcal{G}_{12}(n-3) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}\} \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_{13}(n-1)}(n-1,k) + R^{\mathcal{G}_{14}(n-1)}(n-1,k-1),$$

falls $n \not\equiv 0(p)$ und $\alpha_r = n$ und $\alpha_{r-1} \leq n-2$

$$\mathcal{G}_{13}(n-1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\};$$

$$\mathcal{G}_{14}(n-1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\} \cup \{n-p+1\}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(n+1)}(n+1,k) = R^{\mathcal{G}_{15}(n-2)}(n-2,k) + R^{\mathcal{G}_{16}(n-2)}(n-2,k-1),$$

falls $n \not\equiv 0(p)$ und $\alpha_r = n$

und $\alpha_{r-1} = n-1$, d. h. $n \equiv 1(p)$

$$\mathcal{G}_{15}(n-2) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}\};$$

$$\mathcal{G}_{16}(n-2) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2}\} \cup \{n-p+1\}$$

Für Anfangswerte gilt:

$R(0,0) = 1$

$R(0,k) = 0$ für $k \geq 1$

$R^{\mathcal{G}_i(n)}(n,0) = 1$

$R^{\mathcal{G}_i(0)}(0,k) = 0$ für $k \geq 1$

$R^{\mathcal{G}_i(1)}(1,1) = 1$

$R^{\mathcal{G}_i(1)}(1,k) = 0$ für $k \geq 1$

$$R^{\mathcal{G}_i(2)}(2,1) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \in \mathcal{G}_i(2) \\ 2, & \text{falls } 1 \notin \mathcal{G}_i(2) \end{cases}$$

$R^{\mathcal{G}_i(2)}(2,k) = 0$ für $k \geq 2$

$$R^{\mathcal{G}_i(3)}(3,1) = \begin{cases} 2, & \text{falls } |\{1,2\} \cap \mathcal{G}_i(3)| = 1 \\ 3, & \text{falls } |\{1,2\} \cap \mathcal{G}_i(3)| = 0 \end{cases}$$

$$R^{\mathcal{G}_i(3)}(3,2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 1 \in \mathcal{G}_i(3) \\ 1, & \text{falls } 1 \notin \mathcal{G}_i(3) \end{cases}$$

$R^{\mathcal{G}_i(3)}(3,k) = 0$ für $k \geq 3$.

Beweis:

Die Überlegungen müssen analog zum Beweis des Lemmas 6 geführt werden. Die Bestätigung, daß die neu auftretenden Mengen $\mathcal{G}_v(k)$ ($v \in \{1, \ldots, 16\}$, $k \in \{n, n-1, n-2, n-3\}$) tatsächlich zu $\mathcal{G}(k)$ gehören, sei hier nicht im einzelnen dargelegt.

q.e.d.

Satz 6:

Es gilt:

$Q(n,p,k) = R(n \cdot p,k)$.

Beweis:

Wir numerieren um:

$a_{p\cdot i-(p-1)} = a_{i1}$, $a_{p\cdot i-(p-2)} = a_{i2}$, ..., $a_{p\cdot i-1} = a_{ip-1}$,

$a_{p\cdot i} = a_{ip}$ $(i=1, \ldots, n)$.

Wir können direkt Lemma 6 bzw. Lemma 7 anwenden. q.e.d.

Prinzipiell existieren nun keine theoretischen Schwierigkeiten, mit Hilfe formaler Potenzreihen auch explizite Formeln für spezielle Werte von p auszurechnen. Jedoch erhöht sich der Rechenaufwand beträchtlich im Vergleich zu $p=3$, so daß diese Rechnungen nicht weiter durchgeführt worden sind.

2.4. Es sei eine Menge $\mathfrak{M}(n,p,q)$ aus $n\cdot p\cdot q$ Elementen, die in q Matrizen angeordnet sind, gegeben.

$$\mathfrak{M}_1(n,p) = \begin{pmatrix} a_{111}\dots a_{1p1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n11}\dots a_{np1} \end{pmatrix}, \ \dots, \quad \mathfrak{M}_q(n,p) = \begin{pmatrix} a_{11q}\dots a_{1pq} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1q}\dots a_{npq} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}(n,p,q,k)$ sei die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{M}(n,p,q,k)$ von $\mathfrak{M}(n,p,q)$ mit den Eigenschaften

1. $|\mathfrak{M}(n,p,q,k)| = k$
2. $\forall i,r\in\{1, \dots, n\}\ \forall j,s\in\{1, \dots, p\}\ \forall u,v\in\{1, \dots, q\}$ gilt:
Ist a_{iju}, $a_{rsv}\in\mathfrak{M}(n,p,q,k)$ und $(i,j)\neq(r,s)$, so $|i-r|\geq 2, |j-s|\geq 2$.

Sei $Q(n,p,q,k) = |\mathcal{L}(n,p,q,k)|$.

Satz 7:

Es gilt:

$$Q(n,p,q,k) = \sum_{t=1}^{np} Q(n,p,t)\ B(t,q,k).$$

Der Beweis wird analog zum Beweis des Satzes 2 unter Benutzung von Lemma 1 durchgeführt.

Literatur

/1/ Flachsmeyer, J. Kombinatorik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

/2/ Halder, H.-R., Heise, W. Einführung in die Kombinatorik, Akademie-Verlag, Berlin 1977.

/3/ Jeger, M. Einführung in die Kombinatorik, Band 2. Ernst Klett Verlag Stuttgart, Stuttgart 1976.

/4/ Kaplansky, I. Solution of the "Problème des ménages". Bull. Amer. Math. Soc. 49, 784 - 785 (1943).

/5/ Kofman, A. Vvedenie v prikladnuju kombinatoriku. Izd. Nauka, Moskva 1975.

eingegangen: 02. 02. 1978

Anschrift des Verfassers:

Stud.-Math. Konrad Engel
Wilhelm-Pieck Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR - 25 Rostock
Universitätsplatz 1

Hans-Dietrich Gronau

Einige Bemerkungen zur Arbeit "Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien" von D. Rasch und G. Herrendörfer

In /1/ werden vollständige und eingeschränkte (v,k)-Familien von balancierten unvollständigen Blockanlagen (BUB) eingeführt und einige Sätze über die Anzahl der elementaren BUBs in diesen Familien gegeben. Dem Autor erscheint es notwendig, zu den Sätzen 1, 5 und 8 Bemerkungen zu machen.
Wir benutzen im wesentlichen die Terminologie von /1/, bezeichnen aber zwei BUBs B_1 und B_2 mit gleichen Parametern, für die eine Permutation π der Elemente von $\mathfrak{W} = \{1, 2, \ldots, v\}$ mit $\pi(B_2) = B_1$ existiert, als isomorph, geschrieben $B_1 \cong B_2$. Wir benutzen auch die Satz- und Formelzählung von /1/. $B^*(v,k)$ bezeichne die Menge der Kombinationen von $\mathfrak{W}$ zur k-ten Klasse.

1.

Auf Grund von Satz 1 beschränken sich die Autoren von /1/ auf $3 \leq k \leq \frac{v}{2}$. Da $f(v,1)$ und $f^*(v,1)$ nicht definiert sind, gelten die Gleichungen

$$f(v,k) = f(v,v-k)$$

und

$$f^*(v,k) = f^*(v,v-k)$$

nur für $2 \leq k \leq v-2$.
Nach der eingangs gemachten Einschränkung $2 \leq k < v$ bleibt noch $k = v-1$ zu untersuchen.
Es gilt

<u>Lemma 1.</u> $$f(v,v-1) = f^*(v,v-1) = 1.$$

<u>Beweis:</u> Es sei $B \in F(v,v-1)$ eine beliebige elementare BUB. Dann ist wegen (1) und $(v,v-1) = 1$: $b = v \cdot t$ und $r = (v-1) \cdot t$ für eine gewisse natürliche Zahl $t \geq 1$. Für jedes $i \in \mathfrak{W}$ existieren genau $b - r = t$ Blocks, die das Element i nicht enthal-

ten, d. h., der Block $B_i = \mathcal{W} \setminus \{i\} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, v\}$ tritt genau t-mal auf.
Für $t = 1$ erhalten wir die BUB $B' = (B_1, B_2, \dots, B_v)$.
Für $t \geq 2$ ist B in genau t BUBs B' zerlegbar, was aber unserer Annahme widerspricht, d. h. $f(v,v-1) \leq 1$. B' ist elementar und sogar blockwiederholungsfrei, also $f^*(v,v-1) \geq 1$. Aus $f(v,v-1) \geq f^*(v,v-1)$ folgt unmittelbar unser Lemma. q.e.d.

2.

Im Beweis zum Satz 5 wird gezeigt:

1. Es gibt bis auf Isomorphie genau eine BUB in $F^*(7,3)$ mit $\lambda = 1$.
2. Die Teilmenge 3 ist eine elementare BUB.

Sind B_1 und B_2 zwei BUBs mit $\lambda = 3$, die man aus je zwei disjunkten BUBs B_{11} und B_{12} bzw. B_{21} und B_{22} mit $\lambda = 1$ durch $B_1 = B^*(7,3) \setminus (B_{11} \cup B_{12})$ und $B_2 = B^*(7,3) \setminus (B_{21} \cup B_{22})$ bilden kann, so ist zwar $B_1 \cong B_2$ genau dann, wenn $B_{11} \cup B_{12} \cong B_{21} \cup B_{22}$ gilt, doch letzteres folgt noch nicht aus der Tatsache, daß alle BUBs mit $\lambda = 1$ untereinander isomorph sind.
Überdies ist denkbar, daß elementare BUBs mit $\lambda = 2$ existieren.
Die Komplemente bezüglich $B^*(7,3)$ wären dann BUBs mit $\lambda = 3$ und falls elementar, solche, die wir noch nicht erzeugt hatten.
Deshalb vervollständigen wir den Beweis zu Satz 5 durch folgende Lemmata.

<u>Lemma 2.</u> Es gibt keine elementare BUB $B \in F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$.

<u>Beweis:</u> Wir nehmen an, es existiert eine elementare BUB $B \in F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$. Dann ist $r = 6$ und $b = 14$.
Da wir unsere Untersuchungen auf eine geeignete BUB unter allen zu B isomorphen BUBs beschränken können, werden wir o.B.d.A. annehmen können, daß B gewisse Eigenschaften hat.
O.B.d.A. ist wegen $\lambda = 2$: $123, 124 \in B$. Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. $134 \in B$ und $134 \notin B$.

1. In B existieren außerdem drei Blocks von Typ 1ab mit $a,b \in \{5,6,7\}$, vier Blocks vom Typ 2ab und, da genau einer von diesen das Paar 23 enthält, drei Blocks vom Typ 3ab mit $a,b \in \{4,5,6,7\}$. Wegen $\lambda = 2$ tritt eine 4 in Block 2ab genau einmal und in Blocks 3ab höchstens einmal auf. Wegen $r = 6$ muß es somit mindestens 2 Blocks vom Typ 4ab mit $a,b \in \{5,6,7\}$ geben, d. h., B hat mindestens 6+4+3+2=15 Blocks, was $b = 14$ widerspricht. Folglich kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Da es außer den beiden ersten Blocks genau je einen Block mit 13 und 14 gibt, ist o.B.d.A. $135, 146 \in B$. Unmittelbar folgt: $157, 167 \in B$.
Wäre $234 \in B$, so könnte man B durch die Permutation (12) in eine BUB vom Typ 1 überführen. Also gibt es in B noch folgende 6 Gruppen von Blocks, wobei a bis f die Anzahl der Blocks in der entsprechenden Gruppe bezeichne, die das Element 5 enthalten:

$$\begin{array}{ll} 23. & a \\ 24. & b \\ \left.\begin{array}{l} 2.. \\ 2.. \end{array}\right\} & c \\ \left.\begin{array}{l} 34. \\ 34. \end{array}\right\} & d \\ 3.. & e \\ 4.. & f. \end{array}$$

Wir bemerken, daß die freien Stellen nur noch durch die Elemente 5,6 und 7 belegt werden können.
Wegen $\lambda = 2$ und $r = 6$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} a + b + c + d + e + f &=& 4, \\ a + b + c &=& 2, \\ a + d + e &=& 1, \\ b + d + f &=& 2. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat genau die beiden Lösungen:
1) a=o, b=o, c=2, d=1, e=o, f=1 und
2) a=o, b=1, c=1, d=o, e=1, f=1.

Da keine Blocks mehrfach und alle Paare genau zweimal auftreten, ergeben sich nun alle Blocks zwangsläufig, so daß wir insgesamt die beiden folgenden BUBs erhalten:

1) 123 135 157 236 256 345 367
   124 146 167 247 257 347 456 und

2) 123 135 157 237 256 346 356
   124 146 167 245 267 347 457.

Durch Angabe jeweils einer Teil-BUB mit $\lambda = 1$ weisen wir nach, daß diese BUBs nicht elementar sind, was unserer Annahme widerspricht. Folglich gibt es keine elementare BUB mit $\lambda = 2$.
Zum Beispiel sind Teil-BUBs:

1) 123 157 256 367
   146 247 345 und

2) 123 157 267 356
   146 245 347.

q.e.d.

Nach Lemma 2 sind die BUBs von $F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$ genau die BUBs, die man als Vereinigung von disjunkten BUBs mit $\lambda = 1$ erhält.
Es gilt

<u>Lemma 3.</u> Je zwei BUBs $B_1, B_2 \in F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$ sind isomorph.

<u>Beweis:</u> Wir beweisen das Lemma indirekt. Es seien B_1, B_2 beliebige nichtisomorphe BUBs aus $F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$. Nach Lemma 2 sind sie jeweils in BUBs mit $\lambda = 1$ zerlegbar. Da alle BUBs aus $F^*(7,3)$ mit $\lambda = 1$ isomorph zueinander sind, gibt es sicher Permutationen π_1 und π_2 von $\{1, \ldots, 7\}$ mit $G \subset \pi_1(B_1)$ und $G \subset \pi_2(B_2)$, wobei $G = (123, 145, 167, 246, 257, 347, 356)$ sei.
$\pi_1(B_1)$ und $\pi_2(B_2)$ sind natürlich auch nichtisomorph.
$\pi_1(B_1) \setminus G$ und $\pi_2(B_2) \setminus G$ sind zu G disjunkte BUBs mit $\lambda = 1$.
Man findet genau die folgenden 8 zu G disjunkten BUBs mit $\lambda = 1$ (Die Paare 12, 13 und 23 kommen in (paarweise) verschiedenen

Blocks vor. Durch diese 3 Blocks ist jede dieser BUBs eindeutig bestimmt.):

G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
124	124	125	125	126	126	127	127
136	137	136	137	134	135	134	135
157	156	147	146	157	147	156	146
237	235	234	236	235	237	236	234
256	267	267	247	247	245	245	256
345	346	357	345	367	346	357	367
467	457	456	567	456	567	467	457

Zum Nachweis von $G \cup G_i \cong G \cup G_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ geben wir Permutationen φ_i von $\{1, 2, \ldots, 7\}$ mit $\varphi_i(G) = G$ $\varphi_i(G_i) = G_1$, $i \in \{2, \ldots, 8\}$, an:

i	2	3	4	5
φ_i	(23)(4657)	(23)(4756)	(45)(67)	(46)(57)

i	6	7	8
φ_i	(246)(357)	(247)(356)	(47)(56)

Mithin sind auch $\mathcal{T}_1(B_1)$ und $\mathcal{T}_2(B_2)$ isomorph, was unserer Annahme widerspricht. Damit ist Lemma 3 bewiesen. q.e.d.

3.

In Analogie zu den Bemerkungen zu Satz 5 ist zum Beweis von Satz 8 ebenfalls nachzuweisen, daß je zwei BUBs $B(v,k,a\cdot\lambda_o)$, die man als Vereinigung von a paarweise disjunkten BUBs $B(v,k,\lambda_o)$ erzeugen kann, isomorph sind. Dieses folgt nicht daraus, daß alle BUBs $B(v,k,\lambda_o)$ untereinander isomorph sind.

4.

In Abschnitt 5 wird $f(8,3) \geq 2$ ohne Angabe eines Beispiels einer elementaren BUB aus $F(8,3) \setminus F^*(8,3)$ behauptet. Beispiele für BUBs aus $F(8,3) \setminus F^*(8,3)$ kann man durch folgendes Verfahren gewinnen. Es seien B_1 und B_2 zwei verschiedene BUBs aus $F^*(6,3)$ bzw. $F^*(7,3)$ (B_1 und B_2 können durchaus isomorph zueinander sein, doch sollen sie nicht in allen Blocks übereinstimmen). Dann ist $B' = (B^*(8,3) \setminus B_1) \dot{\cup} B_2$ ($A \dot{\cup} B$ enthalte genau die Blocks von A und B mit den entsprechenden Vielfachheiten) eine elementare BUB aus $F(8,3) \setminus F^*(8,3)$. Wegen $B_1 \subset B^*(8,3)$ ist B' sicher eine BUB mit den Parametern $v = 8$, $k = 3$ und $\lambda = 6$. Da es keine BUB mit $\lambda < 6$ gibt, ist B' elementar und wegen $B_1 \neq B_2$ kommt mindestens ein Block doppelt vor. Jeder BUB $B(v,k,\lambda)$ ordnen wir eindeutig den charakteristischen Vektor $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_\lambda)$ zu. Dabei bezeichne x_i ($i = 0, 1, \ldots, \lambda$) die Anzahl der verschiedenen Blocks, die genau i-mal in B vorkommen.

Insbesondere ist $\sum_{i=0}^{\lambda} i \cdot x_i = b$.

Sind zwei BUBs isomorph, so haben sie sicher den gleichen charakteristischen Vektor. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Wir geben nun einige BUBs aus $F(8,3) \setminus F^*(8,3)$ an. Die Nichtisomorphie weisen wir durch verschiedene charakteristische Vektoren nach.

Wir benutzen folgende BUBs:

$F^*(6,3)$:

B_1:	B_2:	B_3:	B_4:
123 ,	123 ,	123 ,	124 ,
134	124	125	125
145	145	136	135
156	156	145	136
126	136	146	146
235	235	234	234
245	246	246	236
246	256	256	256
346	345	345	345
356	346	356	456

$F^*(7,3)$: B_5: Teilmenge 1, B_6: Teilmenge 2, B_7: Teilmenge 3

(Für diese Teilmengen s. Abschnitt 4 von /1/.)

Beispiel	charakteristischer Vektor
$(B^*(8,3) \setminus B_1) \dot{\cup} B_2$	(4,48,4,0,0,0,0)
$(B^*(8,3) \setminus B_1) \dot{\cup} B_3$	(6,44,6,0,0,0,0)
$(B^*(8,3) \setminus B_5) \dot{\cup} B_6$	(7,42,7,0,0,0,0)
$(B^*(8,3) \setminus B_1) \dot{\cup} B_4$	(10,36,10,0,0,0,0)
$(B^*(8,3) \setminus B_7) \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_6$	(21,21,7,7,0,0,0)
$(B^*(8,3) \setminus B_7) \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_5$	(21,28,0,0,7,0,0)
$(B^*(8,3) \setminus B_6 \setminus B_7) \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_5 \dot{\cup} B_5$	(28,21,0,0,0,7,0).

Damit gilt

Lemma 4. $f(8,3) \geq 7$.

Es wird der tatsächliche Wert aber wesentlich höher liegen. Hier sollte auch nur auf das Erzeugungsverfahren und die Verschiedenartigkeit von BUBs aus $F(8,3)$ hingewiesen werden. Als unmittelbare Folgerung beweisen wir

Lemma 5. Für alle natürlichen Zahlen s und t mit $s \geq 1$ und $t \in \{2,4,5,6\}$ gilt $f(6s+t,3) > f^*(6s+t,3)$.

Beweis: Nach /2/ existieren BUBs $B(v,3,1)$ genau für $v \equiv 1$ (6) und $v \equiv 3$ (6). Für alle anderen v gibt es höchstens BUBs mit $\lambda \geq 2$. s und t seien wie in Lemma 5 beschrieben.

$$B' = (B^*(6s+t,3) \setminus B^*(6s+1,3)) \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup_{i=1}^{6s-1}} B(6s+1,3,1) \text{ ist eine BUB}$$

aus $F(6s+t,3)$ mit $\lambda = 6s+t-2$. Ist B' elementar, so sind wir bereits fertig. Wir haben also nur noch zu zeigen: Wenn B' zerlegbar ist, so ist mindestens eine der Teil-BUBs elementar und gehört zu $F(6s+t,3) \setminus F^*(6s+t,3)$, d. h. enthält Blocks mehrfach. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann ist B' in höchstens $\frac{6s+t-2}{2}$ BUBs zerlegbar. Da diese alle blockwiederholungsfrei sind, kann B' einen Block höchstens $\frac{6s+t-2}{2}$ - mal enthalten. B' enthält aber gewisse Blocks genau $(6s-1)$-mal. Wegen $\frac{6s+t-2}{2} < 6s-1$ für $(s,t) \neq (1,6)$ ist unsere Annahme falsch, Lemma 5 bewiesen. Für $(s,t) = (1,6)$ bilden wir B' nicht durch BUBs $B(7,3,1)$, sondern durch BUBs $B(9,3,1)$ und erhalten analog einen Widerspruch.

q.e.d.

Literatur

/1/ Rasch, D., Herrendörfer, G.
Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien,
Rostocker Math. Kolloquium Heft 8, 71 - 82 (1978)

/2/ Reiss, M. Über eine Steinersche Aufgabe, welche im 45sten Bande dieses Journals, Seite 181 gestellt worden ist, J. reine angew. Math. 56, 326 - 344 (1859)

eingegangen: 23. 2. 1978

Anschrift des Verfassers:

Hans-Dietrich Gronau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock, Universitätsplatz 1

Dieter Rasch und Günter Herrendörfer

Weitere Bemerkungen zur Anzahl elementarer BUB in (v,k)-Familien[1]

Die Arbeit Rasch und Herrendörfer /9/ lag einem Vortrag der Autoren am 9. 3. 1978 für die wissenschaftlichen Sitzungen zur Statistik am ZIMM der AdW zugrunde, zu der Koll. Prof. G. Burosch ein Gutachten anfertigte. In diesem Gutachten wurden Lücken in den Beweisen der Sätze 5 und 8 aufgezeigt, die von den Autoren in Vorbereitung ihres Vortrages nur zum Teil selbst bemerkt wurden.

Dank der Hinweise von Burosch /2/ auf diese Lücken vor der Sitzung, war es den Autoren möglich, die Lücken bei Satz 5 zu schließen und den vollständigen Beweis vorzutragen. Satz 8 kann in dieser Form nicht aufrechterhalten werden. Die Autoren hatten schon selbst vor der Sitzung bemerkt, daß bei Satz 5 noch zu zeigen ist, daß es für $\lambda = 2$ und damit $r = 6$ keine elementaren BUB in $F^*(7,3)$ gibt. Das läßt sich folgendermaßen beweisen.

Mit Sicherheit müssen zwei Blocks mit 12 auftreten. Es sei $(a_1, \ldots, a_5)$ eine Permutation der Zahlen 3,4,5,6,7, dann muß eine BUB aus $F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$ wie folgt beginnen:

$$
\begin{array}{l}
1\,2\,a_1 \\
1\,2\,a_2 \\
1\,a_1 a_3 \\
1\,a_2 a_4 \\
1\,a_3 a_5 \\
1\,a_4 a_5
\end{array}
$$

O. B. d. A. können wir aus der Gesamtheit isomorpher BUB die BUB mit $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$ und $a_5 = 7$ betrachten.

---

1 Ergänzung zur Arbeit /9/ der Verfasser

Der nächste Block könnte 234, 235, 236 oder 237 sein, und diese vier Fälle sind durchzumustern.

Fall 1:

123
124
1[illegible]
146
157
167
234
256
257
267

(die drei Blocks nach 234 folgen zwingend).
Eine Fortsetzung ist nicht möglich, da von den möglichen nächsten Blocks 345, 346 und 347 jeder zwingend zu einem Block 367 führt und damit würde in der Blockanlage dreimal das Paar 67 auftreten, das ist aber ein Widerspruch zu $\lambda = 2$.

Fall 2:

123
124
135
146
157
167
235.

Es muß noch ein Block mit 24 folgen und wegen $r = 6$ müssen außerdem zwei weitere Blocks mit einer 2 auftreten. 245 ist nicht möglich, weil sonst zweimal 267 folgen müßte. Denkbar sind zunächst die Fortsetzungen

246	oder	247
257		256
267		267.

Beide würden aber, wegen der Notwendigkeit je zweimal die Paare 34, 36 und 37 aufzuschreiben, zu den nächsten Blocks

346
347
367

führen, und das geht nicht, da dann dreimal das Paar 67 vorkäme.

Fall 3: 123
124
135
146
157
167
236.

Denkbare Fortsetzungen sind

245 oder 247, da 246 verboten ist
257 256 257
267 257 257.

Im ersten Fall würde, wenn man mit 346 fortsetzt 346, 347, 357 (d. h. dreimal das Paar 57) oder, wenn man mit 345 fortsetzt, 345, 347, 367 (d. h. dreimal das Paar 67) folgen.
Im zweiten Fall kann nur mit 345, 347, 367 fortgesetzt werden, da 346 notwendig zum dritten Paar 57 führt. Folglich ist aus den untersuchten Fällen bisher nur die BUB

123	247
124	256
135	257
146	345
157	347
167	367
236	456

hervorgegangen.

Fall 4: 123
124
135
146
157
167
237.

Es kann, da je zweimal das Paar 25 und 26 auftreten muß, nur mit 245, 256, 267 fortgesetzt werden. Da 367 (wegen des dritten Paares 67) nicht auftreten darf, ist nur eine Fortsetzung möglich, die zu der BUB

123	245
124	256
135	267
146	346
157	347
167	356
237	457

führt.

Andere BUB mit $\lambda = 2$ als die aus den Fällen drei und vier hervorgegangen sind bis auf Isomorphien in $F^*(7,3)$ nicht möglich.

Da die Permutation $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ die BUB von Fall 3 in die BUB von Fall 4 überführt, sind alle BUB mit $\lambda = 2$ in $F^*(7,3)$ isomorph. Außerdem besteht die BUB von Fall 3 aus den beiden elementaren BUB

123	und	124
146		135
157		167
247		236
256		257
345		347
367		456.

Folglich gibt es keine elementare BUB mit $\lambda = 2$ in $F^*(7,3)$. Damit kann der Beweis von Satz 5 in Rasch und Herrendörfer /9/ nach der Feststellung, daß es nur eine (bis auf Isomorphien) elementare BUB mit $\lambda = 1$ in $F^*(7,3)$ gibt, abgebrochen und durch die gerade bewiesenen Aussagen, daß alle BUB in $F^*(7,3)$ mit $\lambda = 2$ zusammengesetzt und isomorph sind, zum vollständigen Beweis ergänzt werden. Notwendig sind dann nämlich alle (zu den BUB mit $\lambda = 2$ komplementären) BUB mit $\lambda = 3$ in $F^*(7,3)$ isomorph und daraus folgt $f^*(7,3) = 2$. Die Isomorphie der BUB mit $\lambda = 3$ war in der ersten Arbeit nicht vollständig gezeigt worden, dies war die eingangs erwähnte Lücke, für die-

sen Hinweis danken die Autoren Kollegen Prof. Burosch. Ergänzend sei noch bemerkt, daß die ohne Beweis in der ersten Arbeit aufgestellte Behauptung, daß $f(8,3) > 2$ ist, durch einige Beispiele noch verschärft werden kann. Es gilt zunächst $f(8,3) \geq 6$. Dazu müssen fünf paarweise nicht-isomorphe elementare BUB, die nicht in $F^*(8,3)$ enthalten sind, angegeben werden. Diese fünf elementaren BUB konstruiert man nach folgendem Verfahren:
Aus den $\binom{8}{3}$ Kombinationen streiche man die in Tabelle 1 unter I stehenden Kombinationen und füge die unter II stehenden hinzu.

Tabelle 1

Aus den $\binom{8}{3}$ Kombinationen zu streichende (I) und zum Rest zu addierende (II) Blocks.

Blockplan 1

I	II
1 2 3	1 2 5
1 4 5	1 3 4
2 5 6	2 3 6
3 4 6	4 5 6

Blockplan 2

I	II
1 2 3	1 2 4
1 4 5	1 3 7
1 6 7	1 5 6
2 4 8	2 3 8
3 7 8	4 5 8
5 6 8	6 7 8

Blockplan 3

I	II
1 2 3	1 2 4
1 2 6	1 2 7
1 4 5	1 3 6
1 6 7	1 5 6
2 4 8	2 3 8
2 7 8	2 6 8
3 6 8	4 5 8
5 6 8	6 7 8

Blockplan 4

I	II
1 2 3	1 2 4
1 2 6	1 2 7
1 4 5	1 3 7
1 4 7	1 4 6
1 6 7	1 5 6
2 4 8	2 3 8
2 7 8	2 6 8
3 7 8	4 5 8
4 6 8	4 7 8
5 6 8	6 7 8

Blockplan 5

I	II
1 2 3	1 2 4
1 2 6	1 2 7
1 3 5	1 3 4
1 4 5	1 3 6
1 4 7	1 5 6
1 6 7	1 5 7
2 4 8	2 3 8
2 7 8	2 6 8
3 4 8	3 5 8
3 6 8	4 5 8
5 6 8	4 7 8
5 7 8	6 7 8

Da unter I und II jeweils die Ziffern mit der gleichen Häufigkeit auftreten, und das auch für die Paare gilt, ist der neue Plan wieder eine elementare BUB. Das Konstruktionsverfahren der Blocks unter I und II ist aus den Beispielen leicht zu ersehen. Es entstehen elementare BUB mit 4,6,8,10 und 12 doppelten Blocks.

Eine weitere zu den angegebenen BUB nicht-isomorphe elementare BUB, die nicht in $F^*(8,3)$ liegt und in der 7 Blocks 5 mal auftreten, findet man bei Herrendörfer und Rasch /4/ als Beispiel 4,21 (S. 111, 112). Damit ist $f(8,3) \geq 7$. Gronau /3/ fand weitere zu den hier angegebenen nicht-isomorphe BUB in $F(8,3) - F^*(8,3)$, so daß sich die Ungleichung für $f(8,3)$ weiter verschärfen läßt.

Da nach der Bibliographie von Federer und Balaam (1973) vergl. /9/, die bezüglich der sehr umfangreichen Literatur zu Blockanlagen in der ersten Arbeit zitiert wurde, mehrere Arbeiten über die Anzahl bzw. mit Abschätzungen zur Anzahl nichtisomorpher BUB erschienen, sollen einige dieser neueren Arbeiten zitiert werden. Bhat and Shrikhande /1/ gaben ein Verfahren zur Erzeugung nichtisomorpher BUB in (mit unserer Bezeichnung) $F\,(4t+3,2t+1) = F_1$ mit $\lambda_1 = t$ an und zeigten, daß sofern eine solche BUB für irgendein (positives ganzes) t existiert die Zahl der nichtisomorphen BUB in $F\left[2^{n+2}(t+1)-1,2^{n+1}(t+1)\right] = F_2$ mit $n > 0$ und $\lambda_2 = 2^n(t+1) - 1$ für $n \longrightarrow \infty$ gegen unendlich strebt. Singhi /10/ zeigte, daß sofern für $t \geq 3$ eine BUB mit $\lambda_1 = t$ in F_1 existiert, wenigstens $\frac{1}{2}\, l(3^{n-1}+1)+3^{n-1} (n > 0)$ nichtisomorphe BUB mit $\lambda_3 = 2^{n+1}(t+1) - 1$ in $F_3 = F\left[2^{n+3}(t+1) - 1;\ 2^{n+2}(t+1) - 1\right]$ existieren, wobei $l = \mathrm{Min}\ (4t+4,\ 2^n+1)$ ist.

Ausgehend von Steinerschen Quadrupeln werden in den Arbeiten von Mendelsohn and Hung /8/, Lindner /5/, Lindner, Mendelsohn and Rosa /7/ und Lindner and Rosa /6/ Aussagen über die Anzahl nichtisomorpher sogenannter abgeleiteter Steinertripel, d. h. Elemente aus $F(v,3)$, die aus den Steinerschen Quadrupeln entstehen, indem man aus allen diesen Quadrupeln, in denen ein bestimmtes Symbol vorkommt, gerade dieses Symbol streicht, gemacht.

<u>Literatur</u>

/1/ Bhat, V. N. and Shrikhande, S. S.
Nonisomorphic solution of some balanced incomplete block designs J. Comb. Theory 9(1970) 174 - 191.

/2/ Burosch, G., Gutachten zur Arbeit /9/
Unveröffentlicht Rostock (1978).

/3/ Gronau, H.-D., Einige Bemerkungen zur Arbeit "Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien" von D. Rasch und G. Herrendörfer
Rostocker Math. Kolloq. 9 (1978), 27 - 34.

/4/ Herrendörfer, G. und Rasch, D.
Versuchsanlagen unter besonderer Berücksichtigung von Blockanlagen
Anlage zum F/E-Bericht 1978,
AdL der DDR Nr. 051420/1.

/5/ Lindner, C. C.
Some remarks on the Steiner triple systems associated with Steiner quadruple systems
Colloqn. Math. 32(1975) 301 - 306.

/6/ Lindner, C. C. and Rosa, A.
Steiner quadruple systems all of whose derived Steiner triple systems are nonisomorphic .
J. Comb. Theory (A) 21(1976) 35 - 43

/7/ Lindner, C. C., Mendelsohn, E. and Rosa, A.,
On the number of 1-factorizations of the complete graph J. Comb. Theory (B) 20(1976) 265 - 282.

/8/ Mendelsohn, N. S. and Hung, S. H. Y.,
On the Steiner systems S.(3.4.14) and S. (4,5,15), Utilitas Math. 1(1972) 5 - 95.

/9/ Rasch, D. und Herrendörfer, G.,
Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien
Wissenschaftliche Sitzungen zur Stochastik am ZIMM der AdW der DDR (März 1978),
Rostock. Math. Kolloq. 8(1978) 71 - 82

/10/ Singhi, N. M.,
Nonisomorphic solutions of (4t+3,2t+1,t)-designs, Geometriae Dedicata 4(1975) 387 - 402

eingegangen: 05. 04. 1978

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. Dieter Rasch; Dr. rer. nat. Günter Herrendörfer
Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR
Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf-Rostock
DDR-2551 Dummerstorf

Ingeborg Reckziegel
Manfred Tasche

Eine verallgemeinerte Inverse eines Matrizenpolynoms

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine reflexive Inverse des Matrizenbüschels L

$$L(\lambda) = A + B\lambda \tag{1}$$

konstruiert. Dabei sind A und B komplexe (m,n)-Matrizen und λ eine komplexe Variable. Im Unterschied zu vorherigen Arbeiten (/4/, /5/) wird hier auf einschränkende Voraussetzungen wie z. B. m = n und det $L(\lambda) \not\equiv 0$ verzichtet. Im folgenden ist $\underline{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $\underline{C}^n$ das n-fache kartesische Produkt von $\underline{C}$.
Ausgehend von der Kroneckerschen kanonischen Form des Matrizenbüschels (1) (siehe z. B. /3/, S. 32) werden im ersten Abschnitt direkte Summenzerlegungen von $\underline{C}^n$ und $\underline{C}^m$ in Teilräume $\mathcal{L}_k$ und $\mathcal{L}'_k$, (k=1,2,...,5), die Zerlegungen von A und B in direkte Summen von jeweils fünf Operatoren $A_k : \mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{L}'_k$ und $B_k : \mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{L}'_k$, (k=1,2,...,5) nach sich ziehen, vorgenommen. Mittels der speziellen Invertierbarkeitseigenschaften der Operatoren A_k und B_k (Satz 1) wird dann im zweiten Abschnitt eine meromorphe reflexive Inverse L^+ des Matrizenbüschels (1) konstruiert (Satz 2). Dabei besitzt die angegebene reflexive Inverse L^+ höchstens endlich viele Pole in der komplexen Ebene und i. allg. in $\lambda = \infty$ einen Pol. Der dritte Abschnitt ist der Behandlung der regulären Matrizenbüschel (1) vorbehalten. Hierin wird gezeigt, daß in diesem Fall der Satz 1 die endlichdimensionale Version eines Ergebnisses von H. Bart und D. C. Lay (/1/, /2/) ist, die für spezielle Operatorenbüschel A + Bλ mit linearen beschränkten Operatoren A und B in einem Banachraum eine meromorphe Inverse konstruiert haben. Im letzten Abschnitt werden die vorher erzielten Ergebnisse auf Matrizenpolynome mittels des bekannten Verfahrens der Linearisierung übertragen.

1. Ein Darstellungssatz für Matrizenbüschel

Wir bezeichnen im folgenden für h, k=1,2,... mit I_k die (k,k)-Einheitsmatrix, mit $O_{h,k}$ bzw. O_k die (h,k)- bzw. (k,k)-Nullmatrix, mit $C_k = (\delta_{ij})$ und $D_k = (\delta_{i+1,j})$ Matrizen vom Format (k,k+1) sowie mit $H_k = (\delta_{i+1,j})$ eine (k,k)-Matrix. Dabei ist δ_{ij}, (i,j=1,2,...) das Kronecker-Symbol. Es gelten folgende Beziehungen für k=1,2,... :

$$C_k C_k^T = D_k D_k^T = I_k, \tag{2}$$

$$C_k^T D_k = H_{k+1}, \quad D_k C_k^T = H_k \tag{3}$$

und für k=2,3,... :

$$(H_k)^{k-1} \neq O_k, \quad (H_k)^k = O_k, \tag{4}$$

wobei A^T die Transponierte der Matrix A bedeutet. Weiterhin bezeichnen wir mit $(A_1;A_2;...;A_k)$ die von den gegebenen Matrizen A_j, (j=1,2,...,k) gebildete verallgemeinerte Diagonalmatrix.
Es seien m und n feste natürliche Zahlen. Ferner seien zwei komplexe (m,n)-Matrizen A und B, $(B \neq O_{m,n})$ gegeben, mit denen das Matrizenbüschel (1) gebildet wird. Wie L. Kronecker zeigte (siehe z. B. /3/, S. 32), gilt für das Matrizenbüschel (1) der folgende Darstellungssatz:

Satz:

Es existieren zu dem gegebenen Matrizenbüschel (1) reguläre Matrizen X und Y vom Format (m,m) bzw. (n,n), so daß für alle $\lambda \in \underline{C}$ die Gleichung

$$L(\lambda) = X(M+N\lambda)Y \tag{5}$$

mit verallgemeinerten Diagonalmatrizen

$$M = (O_{h,g};\ D;\ E;\ I_{u'};\ J), \quad N = (O_{h,g};\ C;\ F;\ H;\ I_{n'})$$

erfüllt ist. Dabei sind

$$D = (D_{k_1};\ ...;\ D_{k_p}), \quad E = (D^T_{j_1};\ ...;\ D^T_{j_q}),$$

$$C = (C_{k_1}; \ldots; C_{k_p}),\quad F = (C^T_{j_1}; \ldots; C^T_{j_q}),$$

$$H = (H_{u_1}; \ldots; H_{u_s})$$

und J eine (n',n')-Matrix in Jordanscher Normalform.

Wir können annehmen, daß in (5)

$$\begin{aligned} &k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_p, \\ &j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_q, \\ &u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_s \end{aligned} \tag{6}$$

gilt. Zur Vereinfachung setzen wir

$$k' = \sum_{\nu=1}^{p} k_\nu,\quad j' = \sum_{\nu=1}^{q} j_\nu,\quad u' = \sum_{\nu=1}^{s} u_\nu.$$

Offenbar ist dann

$$\begin{aligned} n &= g + k' + p + j' + u' + n', \\ m &= h + k' + j' + q + u' + n'. \end{aligned}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} &CC^T = I_{k'},\quad DD^T = I_{k'}, \\ &C^TD = (H_{k_1+1}; \ldots; H_{k_p+1}) \end{aligned} \tag{7}$$

und

$$\begin{aligned} &E^TE = I_{j'},\quad F^TF = I_{j'}, \\ &E^TF = (H_{j_1}; \ldots; H_{j_q}). \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (4) und (6) sind die Matrizen C^TD, E^TF und H nilpotent vom Grade k_p+1, j_q bzw. u_s.

Bekanntlich vereinfacht sich die kanonische Darstellung (5) bei einem regulären Matrizenbüschel (1), d. h. im Fall $m = n$ und $\det L(\lambda) \not\equiv 0$. Für ein reguläres Matrizenbüschel gilt nämlich

$$L(\lambda) = X(I_{u'} + H\lambda;\ J + I_{n'}\lambda)Y, \tag{9}$$

falls $\det B = 0$ ist, und

$$L(\lambda) = X(J + I_n\lambda)Y, \tag{10}$$

falls $\det B \neq 0$ ist.

Ausgehend von der kanonischen Darstellung (5) des Matrizenbüschels (1) führen wir folgende Matrizen ein:

$$P_1 = Y^{-1}(I_g;\ O_{n-g})Y,$$

$$P_2 = Y^{-1}(O_g;\ I_{k'+p};\ O_{j'+u'+n'})Y,$$

$$P_3 = Y^{-1}(O_{g+k'+p};\ I_{j'};\ O_{u'+n'})Y,$$

$$P_4 = Y^{-1}(O_{n-u'-n'};\ I_{u'};\ O_{n'})Y,$$

$$P_5 = Y^{-1}(O_{n-n'};\ I_{n'})Y.$$

Die so definierten Matrizen bilden eine vollständige disjunkte Projektorenschar in $\underline{C}^n$, d. h. es gilt

$$\sum_{j=1}^{5} P_j = I_n,\quad P_jP_k = \delta_{jk}I_n,\quad (j,k=1,2,\dots,5). \tag{11}$$

Analog werden die Matrizen

$$P_1' = X(I_h;\ O_{m-h})X^{-1},$$

$$P_2' = X(O_h;\ I_{k'};\ O_{m-h-k'})X^{-1},$$

$$P_3' = X(O_{h+k'};\ I_{j'+q};\ O_{u'+n'})X^{-1},$$

$$P_4' = X(O_{m-u'-n'};\ I_{u'};\ O_{n'})X^{-1},$$

$$P_5' = X(O_{m-n'};\ I_{n'})X^{-1}$$

eingeführt, die eine vollständige disjunkte Projektorenschar in $\underline{C}^m$ bilden:

$$\sum_{j=1}^{5} P_j' = I_m,\quad P_j'P_k' = \delta_{jk}I_m,\quad (j,k=1,2,\dots,5). \tag{12}$$

Ferner gilt wegen (5) für k=1,2,...,5

$$AP_k = P'_kA, \quad BP_k = P'_kB. \tag{13}$$

Die Bildräume $P_k\underline{C}^n \subseteq \underline{C}^n$ und $P'_k\underline{C}^m \subseteq \underline{C}^m$ der Projektoren P_k bzw. P'_k, (k=1,2,...,5) bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_k$ und $\mathcal{L}'_k$. Wegen (11) und (12) erhält man dann die direkten Summenzerlegungen von $\underline{C}^n$ und $\underline{C}^m$:

$$\begin{aligned} \underline{C}^n &= \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \mathcal{L}_4 \oplus \mathcal{L}_5, \\ \underline{C}^m &= \mathcal{L}'_1 \oplus \mathcal{L}'_2 \oplus \mathcal{L}'_3 \oplus \mathcal{L}'_4 \oplus \mathcal{L}'_5. \end{aligned} \tag{14}$$

Aus der Form der Projektoren P_k und P'_k, (k=1,2,...,5) ergeben sich die Dimensionen der Teilräume:

$$\begin{array}{ll} \dim \mathcal{L}_1 = g, & \dim \mathcal{L}'_1 = h, \\ \dim \mathcal{L}_2 = k' + p, & \dim \mathcal{L}'_2 = k', \\ \dim \mathcal{L}_3 = j', & \dim \mathcal{L}'_3 = j' + q, \\ \dim \mathcal{L}_4 = u', & \dim \mathcal{L}'_4 = u', \\ \dim \mathcal{L}_5 = n', & \dim \mathcal{L}'_5 = n'. \end{array}$$

Wegen (13) bilden die auf $\mathcal{L}_k$ eingeschränkten Operatoren $A_k = A|\mathcal{L}_k$ und $B_k = B|\mathcal{L}_k$, (k=1,2,...,5) den Teilraum $\mathcal{L}_k$ in $\mathcal{L}'_k$ ab. Daher erhält man wegen (14) die folgenden Zerlegungen von A und B in direkte Summen von Operatoren:

$$\begin{aligned} A &= A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5, \\ B &= B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4 \oplus B_5. \end{aligned} \tag{15}$$

<u>Satz 1:</u>

Die Operatoren A_k und B_k, (k=1,2,...,5) besitzen folgende Eigenschaften:

i) $A_1 = B_1 = O_{m,n}|\mathcal{L}_1$.

ii) A_2 und B_2 sind rechtsinvertierbar, d. h., es gibt Matrizen $A_2^!$ und $B_2^!$ mit $A_2A_2^! = B_2B_2^! = P_2^!$ und die Matrizen $B_2^!A_2$ sowie $A_2^!B_2$ sind nilpotent vom Grad $k_p + 1$.

iii) A_3 und B_3 sind linksinvertierbar, d. h., es existieren Matrizen A_3'' und B_3'' mit $A_3''A_3 = B_3''B_3 = P_3$ und die Matrizen $B_3''A_3$ und $A_3''B_3$ sind nilpotent vom Grad j_q.

iv) A_4 ist bijektiv, d. h. $A_4^{-1}A_4 = P_4$ und $A_4A_4^{-1} = P_4^!$, und $A_4^{-1}B_4$ sowie $B_4A_4^{-1}$ sind nilpotent vom Grad u_s.

v) B_5 ist bijektiv, d. h. $B_5^{-1}B_5 = P_5$ und $B_5B_5^{-1} = P_5^!$.

Der Beweis erfolgt durch einfache Rechnungen, so daß wir hier nur den Beweis von ii) wiedergeben wollen. Wegen (5) ergibt sich

$$L(\lambda) \mid \mathcal{L}_2 = X\,(O_{h,g};\ D + C\lambda;\ O_{m-h-k',\ j'+u'+n'})Y,$$

woraus man A_2 und B_2 bestimmt:

$$A_2 = X\,(O_{h,g};\ D;\ O_{m-h-k',\ j'+u'+n'})Y,$$
$$B_2 = X\,(O_{h,g};\ C;\ O_{m-h-k',\ j'+u'+n'})Y.$$

Man erkennt mittels (7) sofort, daß die Matrizen

$$A_2^! = Y^{-1}(O_{g,h};\ D^T;\ O_{j'+u'+n',\ m-h-k'})X^{-1},$$

$$B_2^! = Y^{-1}(O_{g,h};\ C^T;\ O_{j'+u'+n',\ m-h-k'})X^{-1}$$

die Eigenschaft $A_2A_2^! = B_2B_2^! = P_2^!$ besitzen. Wegen (7) gilt

$$B_2^!A_2 = Y^{-1}(O_g;\ C^TD;\ O_{j'+u'+n'})Y,$$

$$A_2^!B_2 = Y^{-1}(O_g;\ D^TC;\ O_{j'+u'+n'})Y.$$

Diese beiden Matrizen sind wegen (4) und (6) nilpotent vom Grad $k_p + 1$. Analog zeigt man die restlichen Behauptungen.

2. Eine reflexive Inverse von L

Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie im ersten Abschnitt und bestimmen jetzt eine meromorphe reflexive Inverse L^+ des gegebenen Matrizenbüschels (1), d. h., L^+ ist eine meromorphe Matrixfunktion mit der Eigenschaft

$$L(\lambda)L^+(\lambda)L(\lambda) = L(\lambda), \quad L^+(\lambda)L(\lambda)L^+(\lambda) = L^+(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \underline{C}$ aus dem Definitionsbereich von L^+.
Wir führen die Matrizenbüschel L_k, $(k=1,2,\dots,5)$:

$$L_k(\lambda) = A_k + B_k\lambda : \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_k', \quad (\lambda \in \underline{C})$$

ein, für die wegen (15) offenbar

$$L(\lambda) = L_1(\lambda) \oplus L_2(\lambda) \oplus L_3(\lambda) \oplus L_4(\lambda) \oplus L_5(\lambda) \tag{16}$$

für alle $\lambda \in \underline{C}$ gilt. Um eine meromorphe reflexive Inverse L^+ von (1) anzugeben, genügt es, meromorphe reflexive Inverse $L_k^+(\lambda) : \mathcal{L}_k' \to \mathcal{L}_k$, $(k=1,2,\dots,5)$ von L_k zu konstruieren, denn wegen (14) und (16) ist dann

$$L^+(\lambda) = L_1^+(\lambda) \oplus L_2^+(\lambda) \oplus L_3^+(\lambda) \oplus L_4^+(\lambda) \oplus L_5^+(\lambda) \tag{17}$$

eine meromorphe reflexive Inverse von (1).

Satz 2:

Es gilt:

i) Für alle $\lambda \in \underline{C}$ ist

$$L_1^+(\lambda) = O_{n,m}|\mathcal{L}_1$$

eine reflexive Inverse von L_1.

ii) Für alle $\lambda \in \underline{C}$ ist

$$L_2^+(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{k_p} (-A_2'B_2)^\nu \lambda^\nu A_2' \tag{18}$$

eine Rechtsinverse von L_2, d. h., es gilt $L_2(\lambda)L_2^+(\lambda) = P_2$

Außerdem gilt für alle $\lambda \in \underline{C}$

$$P_2 - L_2^+(\lambda)L_2(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{k_p} (-A_2^{\prime}B_2)^\nu \lambda^\nu (P_2 - A_2^{\prime}A_2). \tag{19}$$

iii) Für alle $\lambda \in \underline{C}$ ist

$$L_3^+(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{j_q-1} (-A_3^{\prime\prime}B_3)^\nu \lambda^\nu A_3^{\prime\prime} \tag{20}$$

eine Linksinverse von L_3, d. h., es gilt $L_3^+(\lambda)L_3(\lambda) = P_3$. Ferner gilt für alle $\lambda \in \underline{C}$

$$\begin{aligned} P_3^{\prime} - L_3(\lambda)L_3^+(\lambda) &= (P_3^{\prime} - A_3A_3^{\prime\prime}) \\ &- (P_3^{\prime} - A_3A_3^{\prime\prime}) \sum_{\nu=1}^{j_q} B_3(-A_3^{\prime\prime}B_3)^{\nu-1} \lambda^\nu A_3^{\prime\prime}. \end{aligned} \tag{21}$$

iv) Für alle $\lambda \in \underline{C}$ ist

$$L_4^+(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{u_s-1} (-A_4^{-1}B_4)^\nu \lambda^\nu A_4^{-1} \tag{22}$$

die Inverse von L_4, d. h., es gilt $L_4^+(\lambda)L_4(\lambda) = P_4$ und $L_4(\lambda)L_4^+(\lambda) = P_4^{\prime}$.

v) Für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit $|\lambda| > \sigma$ für hinreichend großes $\sigma > 0$ ist

$$L_5^+(\lambda) = (A_5+B_5\lambda)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-B_5^{-1}A_5)^\nu \lambda^{-\nu-1} B_5^{-1} \tag{23}$$

die Inverse von L_5, d. h., es gilt $L_5^+(\lambda)L_5(\lambda) = P_5$ und $L_5(\lambda)L_5^+(\lambda) = P_5^{\prime}$. Im Fall $|\lambda| \leq \sigma$ besitzt L_5 eine meromorphe Inverse L_5^+, deren Polstellen die Wurzeln der Gleichung det $(J + I_n, \lambda) = 0$ sind.

Die Matrixfunktion (17) ist eine meromorphe reflexive Inverse von (1), die in $\lambda = \infty$ einen Pol der Ordnung max $\{k_p, j_q-1, u_s-1\}$ besitzt. Ferner gilt für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit höchstens endlichvielen Ausnahmen

$$\begin{aligned} I_n - L^+(\lambda)L(\lambda) &= P_1 + P_2 - L_2^+(\lambda)L_2(\lambda)P_2, \\ I_m - L(\lambda)L^+(\lambda) &= P_1' + P_3' - L_3(\lambda)L_3^+(\lambda)P_3'. \end{aligned} \tag{24}$$

<u>Beweis:</u>

Die Behauptungen i) - v) zeigt man durch einfache Rechnungen mit Hilfe von Satz 1. Die durch (17) definierte Matrixfunktion L^+ ist meromorph und die Ordnung des Poles $\lambda = \infty$ beträgt max $\{k_p, j_q-1, u_s-1\}$ wegen i) - v). Dabei vereinbaren wir, daß $\lambda = \infty$ ein Pol der Ordnung Null ist, falls $L^+(\lambda^{-1})$ in $\lambda = 0$ holomorph ist.

Aus (11), (12), (13), (16), (17) und den Eigenschaften i) - v) ergeben sich die Gleichungen (24). Mittels (13), (24) und ii), iii) bekommt man dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} L(\lambda) - L(\lambda)L^+(\lambda)L(\lambda) &= L(\lambda)(I_n - L^+(\lambda)L(\lambda)) \\ &= L_1(\lambda)P_1 + (L_2(\lambda) - L_2(\lambda)L_2^+(\lambda)L_2(\lambda))P_2 = 0_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L^+(\lambda) - L^+(\lambda)L(\lambda)L^+(\lambda) &= L^+(\lambda)(I_m - L(\lambda)L^+(\lambda)) \\ &= L_1^+(\lambda)P_1' + (L_3^+(\lambda) - L_3^+(\lambda)L_3(\lambda)L_3^+(\lambda))P_3' = 0_m \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit höchstens endlichvielen Ausnahmen. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 2 ergibt sich, daß die Matrixfunktion (17) genau dann in einer Umgebung von $\lambda = \infty$ eine Inverse des Matrizenbüschels (1) ist, wenn $\mathcal{L}_k = \{o\}$ und $\mathcal{L}_k' = \{o\}$, (k=1,2,3) bzw. $h = g = k_p = j_q = 0$ gilt, wobei o der entsprechende Nullvektor ist. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn $m = n$ und $\det L(\lambda) \not\equiv 0$ ist (vgl. (9), (10)). Im nächsten Abschnitt befassen wir uns mit derartigen Matrizenbüscheln näher.

3. Die Inverse eines regulären Matrizenbüschels

Wir betrachten nun ein reguläres Matrizenbüschel (1), d.h., wir setzen voraus, daß $m = n$ und $\det L(\lambda) \not\equiv 0$ gilt. Wie bereits erwähnt, ist dann (9) bzw. (10) die kanonische Darstellung von (1). Daher vereinfacht sich Satz 1 zu folgender Aussage:

Satz 3:

Es sei $m = n$ und $\det L(\lambda) \neq 0$. Dann sind $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k' = \{o\}$ $(k=1,2,3)$, und es gilt

$$\underline{C}^n = \mathcal{L}_4 \oplus \mathcal{L}_5 = \mathcal{L}_4' \oplus \mathcal{L}_5'.$$

Die Operatoren A_4 und B_5 sind bijektiv und $A_4^{-1}B_4$ sowie $B_4A_4^{-1}$ sind nilpotent vom Grad u_s.

Wir zeigen jetzt, daß Satz 3 die endlichdimensionale Version eines allgemeineren Satzes von H. Bart und D. C. Lay (/1/, /2/) ist. Dazu erklären wir wie in /1/, /2/ rekursiv Teilräume von $\underline{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_0 &= \{o\}, & \mathfrak{M}_{\nu+1} &= B^{-1}A(\mathfrak{M}_\nu),\\
\mathfrak{R}_0 &= \underline{C}^n, & \mathfrak{R}_{\nu+1} &= A^{-1}B(\mathfrak{R}_\nu),\\
\mathfrak{M}_0' &= \{o\}, & \mathfrak{M}_{\nu+1}' &= AB^{-1}(\mathfrak{M}_\nu'),\\
\mathfrak{R}_0' &= \underline{C}^n, & \mathfrak{R}_{\nu+1}' &= BA^{-1}(\mathfrak{R}_\nu')
\end{aligned}$$

für $\nu = 0,1,\ldots$. Ferner versteht man unter dem verallgemeinerten Anstieg des Matrizenbüschels (1)

$$\alpha(L) = \inf\left\{\nu;\ \mathfrak{N}(B)\cap\mathfrak{R}_\nu = \{o\}\right\}$$

und unter dem verallgemeinerten Abstieg von (1)

$$\delta(L) = \inf\left\{\nu;\ B(\underline{C}^n) + \mathfrak{M}_\nu' = \underline{C}^n\right\}$$

(/1/, /2/). Dabei bedeuten $A(\mathfrak{M})$ und $A^{-1}(\mathfrak{M})$ das Bild bzw. volle Urbild eines Teilraumes $\mathfrak{M} \subseteq \underline{C}^n$ bei dem Operator A. Weiterhin ist $\mathfrak{N}(A)$ der Kern von A.

Satz 4:

Es sei $m = n$ und $\det L(\lambda) \not\equiv 0$. Dann gilt

$$\mathfrak{M}_{u_s} = \mathcal{L}_4, \qquad \mathfrak{R}_{u_s} = \mathcal{L}_5,$$

$$\mathfrak{M}'_{u_s} = \mathcal{L}'_4, \qquad \mathfrak{R}'_{u_s} = \mathcal{L}'_5$$

und es ist $\alpha(L) = \delta(L) = u_s$.

Beweis:

Im Fall $\det B \neq 0$ ist Satz 4 wegen (10) mit $u_s = 0$ erfüllt. Deshalb betrachten wir im folgenden nur den Fall $\det B = 0$, so daß (1) die kanonische Darstellung (9) mit $u_s > 0$ besitzt. Der Kürze halber führen wir hier nur den Beweis von $\mathfrak{R}_{u_s} = \mathcal{L}_5$ und $\alpha(L) = u_s$ aus.

Aus der Definition von $\mathfrak{R}_\nu$ folgt, daß $x \in \underline{C}^n$ genau dann zu $\mathfrak{R}_\nu$, $(\nu=0,1,\ldots)$ gehört, wenn eine Vektorfolge $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ mit

$$x_\nu = x, \quad Bx_j = Ax_{j+1}, \quad (j=0,1,\ldots,\nu-1) \tag{25}$$

exisitert. Wegen (9) gilt

$$A = X\,(I_{u'};\ J)\,Y, \quad B = X\,(H;\ I_{n'})\,Y. \tag{26}$$

Wir setzen $y_j = Yx_j$ und zerlegen die Vektoren

$$y_j = \begin{bmatrix} y'_j \\ y''_j \end{bmatrix}$$

mit $y'_j \in \underline{C}^{u'}$ und $y''_j \in \underline{C}^{n'}$, $(j=0,1,\ldots,\nu)$. Demzufolge ist (25) gleichbedeutend mit der Bedingung

$$y_\nu = Yx, \quad y'_j = H^j y'_0, \quad y''_0 = J^j y''_j, \quad (j=0,1,\ldots,\nu-1).$$

Da H nilpotent vom Grad u_s ist, ist y'_j für $j \geq u_s$ stets der Nullvektor. Folglich gehört im Fall $\nu \geq u_s$ der Vektor x genau dann zu $\mathcal{R}_\nu$, wenn y'_ν der Nullvektor ist, d. h., wenn

$$x \in Y^{-1}(O_{u'};\ I_{n'})\ \underline{C}^n = P_5\underline{C}^n = \mathcal{L}_5$$

gilt. Dabei ist $P_5 = Y^{-1}(O_{u'};\ I_{n'})\ Y$. Somit erhält man $\mathcal{R}_\nu = \mathcal{L}_5$ für alle $\nu \geq u_s$.

Wir beweisen nun die Gleichung $\alpha(L) = u_s$. Ist $x \in \mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}_\nu$ im Fall $\nu \geq u_s$, so besitzt x die Form $x = Y^{-1}(O_{u'};\ I_{n'})v$ mit gewissem $v \in \underline{C}^n$. Wegen (26) gilt dann

$$Bx = X\ (O_{u'};\ I_{n'})v = o,$$

so daß $v'' \in \underline{C}^{n'}$ der Nullvektor ist. Damit ist auch $x = o$ und $\alpha(L) \leq u_s$.

Andererseits gehört das Element $x = Y^{-1}y \neq o$, wobei die $(u'-u_s+1)$-te Koordinate von y gleich 1 und alle anderen gleich 0 sind, zu $\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}_{u_s-1}$, so daß $\alpha(L) \geq u_s$ gilt. Folglich ist $\alpha(L) = u_s$. Damit sind die beiden Behauptungen bewiesen.

Offenbar gilt

$$\dim \mathcal{L}_4 = \dim \mathcal{L}'_4 = u',$$
$$\dim \mathcal{L}_5 = \dim \mathcal{L}'_5 = n' = n - u'.$$

Da andererseits $\lambda = 0$ im Fall $\det B = 0$ aufgrund der kanonischen Darstellung (9) eine u'-fache Nullstelle des Polynoms $\det(A\lambda + B) = \lambda^n \det L(\lambda^{-1})$ ist, kann man die Dimensionen der obigen Teilräume auch aus der Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = 0$ von $\det(A\lambda + B)$ bestimmen.

Die Einschränkungen von A und B auf $\mathcal{L}_4$ bzw. $\mathcal{L}_5$ lauten

$$A_4 = X\ (I_{u'};\ O_{n'})\ Y, \qquad B_4 = X\ (H;\ O_{n'})\ Y,$$
$$A_5 = X\ (O_{u'};\ J)\ Y, \qquad B_5 = X\ (O_{u'};\ I_{n'})\ Y$$

und besitzen offensichtlich die in Satz 3 angegebenen Eigenschaften, wobei

$$A_4^{-1} = Y^{-1}(I_{u'};\ O_{n'})\ X^{-1}, \quad B_5^{-1} = Y^{-1}(O_{u'};\ I_{n'})\ X^{-1}$$

sind. Folglich existiert eine Zahl $\delta > 0$, so daß $(A_5 + B_5\lambda)$: $\mathcal{L}_5 \rightarrow \mathcal{L}_5'$ invertierbar ist und

$$(A_5 + B_5\lambda)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\ B_5^{-1}A_5)^{\nu}\ \lambda^{-\nu-1}B_5^{-1}$$

gilt. Satz 2 lautet deshalb jetzt:

<u>Satz 5:</u>
Es sei $m = n$, det $B = 0$ und det $L(\lambda) \not\equiv 0$. Dann ist die für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit $|\lambda| > \delta$ erklärte Matrixfunktion $L^{-1} = L^{+}$ mit

$$L^{-1}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{u_s-1} (-\ A_4^{-1}B_4)^{\nu}\ \lambda^{\nu}A_4^{-1}P_4' \ + (A_5 + B_5\lambda)^{-1}P_5'$$

die Inverse von (1), die in $\lambda = \infty$ einen Pol der Ordnung u_s-1 besitzt.

Im Fall det $B \neq 0$ vereinfacht sich Satz 5 zu der Aussage, daß für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit $|\lambda| > \delta$

$$L^{-1}(\lambda) = (A + B\lambda)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\ B^{-1}A)^{\nu}\ \lambda^{-\nu-1}B^{-1}$$

eine Inverse von (1) ist, die in $\lambda = \infty$ holomorph ist.

4. Matrizenpolynome

Die erzielten Ergebnisse sollen nun auf Matrizenpolynome der Form

$$P(\lambda) = Z_r\lambda^r + Z_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + Z_1\lambda + Z_0 \tag{27}$$

mit gegebenen komplexen (m,n)-Matrizen Z_j, $(j=0,1,\ldots,r)$ und $Z_r \neq O_{m,n}$ übertragen werden. Im folgenden sei $r \geq 2$ und $t = (r-1)n + m$.
Wir ordnen dem Matrizenpolynom (27) nach der Methode der Linearisierung (siehe z. B. /1/, /4/, /5/, /6/) das Matrizenbü-

schel (1) zu, indem wir die (t,rn)-Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} Z_{r-1} & Z_{r-2} & \cdots & Z_1 & Z_0 \\ -I_n & O_n & \cdots & O_n & O_n \\ O_n & -I_n & \cdots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & \cdots & -I_n & O_n \end{bmatrix}$$

$$B = (Z_r;\ I_{(r-1)n})$$

einführen. Dann besteht zwischen (1) und (27) der folgende Zusammenhang:

$$L(\lambda) = C(\lambda)\,(P(\lambda);\ I_{(r-1)n})\,D(\lambda), \quad (\lambda \in \underline{C}), \tag{28}$$

wobei $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ die Matrizenpolynome vom Format (t,t) bzw. (rn,rn)

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & C_{r-1}(\lambda) & \cdots & C_2(\lambda) & C_1(\lambda) \\ O_{n,m} & O_n & \cdots & O_n & -I_n \\ O_{n,m} & O_n & \cdots & -I_n & O_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O_{n,m} & -I_n & \cdots & O_n & O_n \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} O_n & O_n & \cdots & O_n & I_n \\ O_n & O_n & \cdots & I_n & -I_n\lambda \\ O_n & O_n & \cdots & -I_n\lambda & O_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ I_n & -I_n\lambda & \cdots & O_n & O_n \end{bmatrix}$$

sind. Hierbei vereinbaren wir noch

$$C_1(\lambda) = Z_r\lambda + Z_{r-1}, \quad C_{j+1}(\lambda) = C_j(\lambda)\lambda + Z_{r-j-1}, \quad (j=1,2,\ldots,r-2).$$

Die Matrizenpolynome $C(\lambda)$ und $D(\lambda)$ sind für alle $\lambda \in \underline{C}$ invertierbar und ihre Inversen sind wiederum Matrizenpolynome:

$$C^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & C_1(\lambda) & \cdots & C_{r-2}(\lambda) & C_{r-1}(\lambda) \\ 0_{n,m} & 0_n & \cdots & 0_n & -I_n \\ 0_{n,m} & 0_n & \cdots & -I_n & 0_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0_{n,m} & -I_n & \cdots & 0_n & 0_n \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n\lambda^{r-1} & I_n\lambda^{r-2} & \cdots & I_n\lambda & I_n \\ I_n\lambda^{r-2} & I_n\lambda^{r-3} & \cdots & I_n & 0_n \\ I_n\lambda^{r-3} & I_n\lambda^{r-4} & \cdots & 0_n & 0_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ I_n & 0_n & \cdots & 0_n & 0_n \end{bmatrix}$$

Nach Satz 2 (oder Satz 5 im Fall $m = n$ und $\det L(\lambda) \not\equiv 0$) kann man eine meromorphe reflexive Inverse L^+ von (1) bilden. Wegen (28) ist $D(\lambda)L^+(\lambda)C(\lambda)$ eine meromorphe reflexive Inverse von $(P(\lambda);\ I_{(r-1)n})$. Durch Matrizenmultiplikationen von

$D(\lambda)L^+(\lambda)C(\lambda)$ und

$$(P(\lambda);\ I_{(r-1)n})D(\lambda)L^+(\lambda)C(\lambda)(P(\lambda);\ I_{(r-1)n}) = (P(\lambda);\ I_{(r-1)n})$$

erkennt man, daß

$$P^-(\lambda) = QL^+(\lambda)R \tag{31}$$

eine meromorphe innere Inverse von (27) ist, d. h., es gilt

$$P(\lambda)P^-(\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit endlich vielen Ausnahmen. Dabei sind in (31) die Operatoren $R\colon \underline{C}^m \to \underline{C}^t$ und $Q\colon \underline{C}^{rn} \to \underline{C}^n$ durch die Gleichungen

$$Ry = \begin{bmatrix} y \\ o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix}, \quad Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = x_r$$

mit $o \in \underline{C}^n$ und beliebigen $x_j \in \underline{C}^n$, $(j=1,2,\ldots,r)$ sowie $y \in \underline{C}^m$ erklärt. Wir fassen zusammen:

Satz 6:
Dem Matrizenpolynom (27) sei in der angegebenen Weise das Matrizenbüschel L zugeordnet. Dann ist (31) eine meromorphe innere Inverse von (27).
Wir bemerken noch, daß im Fall $m = n$ und $\det P(\lambda) \not\equiv 0$ der Operator (31) die meromorphe Inverse von (27) ist. Denn wegen $\det P(\lambda) \not\equiv 0$ ist $\det L(\lambda) \not\equiv 0$, so daß $L^+(\lambda) = L^{-1}(\lambda)$ nach Satz 5 und somit

$$D(\lambda)L^{-1}(\lambda)C(\lambda)(P(\lambda);\ I_{(r-1)n}) =$$
$$= (P(\lambda);\ I_{(r-1)n})D(\lambda)L^{-1}(\lambda)C(\lambda) = I_{rn}$$

gilt, woraus die Behauptung folgt.

Literatur

/1/ Bart, H. Meromorphic operator valued functions. Thesis, Vrije Universiteit Amsterdam 1973

/2/ Bart, H.; Lay, D. C. Poles of a generalized resolvent operator. Proc. roy. Irish Acad., Sect. A, 74, 147 - 168 (1974)

/3/ Gantmacher, F. R.
Matrizenrechnung II (Übersetzung aus dem Russ.). Berlin 1959

/4/ Lancaster, P. A fundamental theorem on lambda-matrices with applications, I: Ordinary differential equations with constant coefficients. Linear Algebra Appl. 18, 189 - 212 (1977)

/5/ Lancaster, P. A fundamental theorem on lambda-matrices with applications, II: Difference equations with constant coefficients. Linear Algebra Appl. 18, 213 - 222 (1977)

/6/ Tasche, M. Funktionalanalytische Methoden in der Operatorenrechnung, Nova Acta Leopoldina, Neue Folge, Nr. 231, Bd. 49 (1978)

eingegangen: 02. 05. 1978

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Math. Ingeborg Reckziegel
Doz. Dr. sc. nat. Manfred Tasche
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathomatik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Andreas Kossow

Basen in einer speziellen Algebra über einem endlichen Vektorraum

1. Einführung

Es sei $V_k = \left\{ \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix},\ a_i \in \{0,1\} \right\}$. V_k ist ein Vektorraum über dem Körper der Charakteristik 2. Auf V_k sei die folgende Operation ϱ definiert: $\varrho \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ a_1 \end{pmatrix}$. Die Operation ϱ bewirkt also eine zyklische Vertauschung der Komponenten von $\underline{a} \in V_k$.

Wir wollen folgende Bezeichnungsweisen vereinbaren:

1) $\varrho^0(\underline{v}) := \underline{v}$, $\varrho^{m+1}(\underline{v}) := \varrho(\varrho^m(\underline{v}))$, wobei $\underline{v} \in V_k$, $m \in \mathbb{N}$.

2) Sei $M \subseteq V_k$. $[M]_\varrho := \{ \underline{a} \in V_k \mid$ Es existiert ein $\underline{b} \in M$ und ein gewisses $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $\varrho^m(\underline{b}) = \underline{a} \}$.

Damit kann die folgende grundlegende Definition formuliert werden:

<u>Definition 1:</u> $M \subseteq V_k$ heißt (ϱ-)<u>Basis</u> von V_k genau dann, wenn gilt:

i) $[M]_\varrho = V_k$ (d. h., M erzeugt V_k mittels ϱ)

ii) M ist minimal bez. i). (Das heißt, aus M kann man keinen Vektor fortlassen, ohne daß i) verletzt wird.)

Wir formulieren die Problemstellung:

<u>Problem A:</u> Haben alle Basen eines beliebigen, aber fest gewählten Vektorraumes V_k die gleiche Mächtigkeit?

Problem B: Wenn ja, wie kann diese Mächtigkeit bestimmt werden? Man gebe die Mächtigkeit der Basis eines beliebigen V_k an!

2. Eigenschaften der Operation ϱ

Um uns mit der Algebra (V_k, ϱ) etwas vertraut zu machen, geben wir zunächst einige elementare Eigenschaften der Operation ϱ an, auf die später zurückgegriffen wird.
Es seien $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3 \in V_k$. Dann gilt:

a) $\varrho^{n \cdot k}(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

b) $\varrho^a(\varrho^b(\underline{v}_1)) = \varrho^{a+b}(\underline{v}_1)$, wobei a, $b \in \mathbb{N}$.

c) Wenn $0 \leq a \leq k$ und $\varrho^a(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$, so $\underline{v}_1 = \varrho^{k-a}(\underline{v}_2)$.

d) Wenn $0 \leq a \leq b \leq k$ und $\varrho^a(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$ sowie $\varrho^b(\underline{v}_1) = \underline{v}_3$,
so $\underline{v}_3 = \varrho^{b-a}(\underline{v}_2)$ sowie $\underline{v}_2 = \varrho^{k-b+a}(\underline{v}_3)$.

e) Wenn $0 \leq a \leq b \leq k$ und $\varrho^a(\underline{v}_1) = \underline{v}_3$ sowie $\varrho^b(\underline{v}_2) = \underline{v}_3$,
so $\underline{v}_1 = \varrho^{b-a}(\underline{v}_2)$ sowie $\underline{v}_2 = \varrho^{k-b+a}(\underline{v}_1)$.

Bemerkung: Auf den Beweis dieser elementaren Eigenschaften sei hier verzichtet. Die Forderungen an a und b in c), d), e) sind in folgendem Sinne keine Beschränkung der Allgemeinheit: Alle Fälle mit a, $b > k$ lassen sich durch geeignete Hinzufügung von $n \cdot k$ Operationen mittels a) auf die obigen Fälle zurückführen.

3. Das Problem A

Zunächst führen wir zwei Bezeichnungen ein, die im folgenden die Beweistechnik erleichtern:

1) $K_k^{(\nu)}$ sei die Menge aller Vektoren einer beliebigen (ϱ-)Basis von V_k mit genau ν Einsen ($\nu = 0, 1, \dots, k$).

2) $V_k^{(\nu)}$ sei die Menge aller Vektoren aus V_k mit genau ν Einsen ($\nu = 0, 1, \dots, k$).

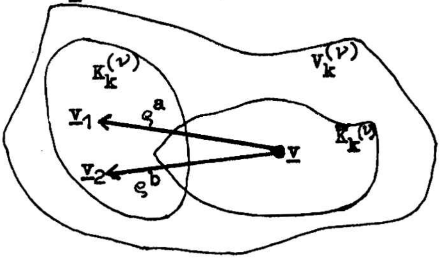
Wir beweisen den folgenden

<u>Satz 1:</u> **Alle Basen für V_k (k fest, aber beliebig) haben die gleiche Mächtigkeit.**

<u>Beweis:</u> $M = K_k^{(o)} \cup K_k^{(1)} \cup \ldots \cup K_k^{(k)}$ und $\bar{M} = \bar{K}_k^{(o)} \cup \bar{K}_k^{(1)} \cup \ldots \cup \bar{K}_k^{(k)}$ seien Basen von V_k. Wir zeigen, daß die Mengen $K_k^{(\nu)}$ und $\bar{K}_k^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k$ alle gleiche Mächtigkeit haben. Dies beweisen wir indirekt.

Wir betrachten beliebige Mengen $K_k^{(\nu)}$ und $\bar{K}_k^{(\nu)}$ mit $\nu \in \{0, 1, \ldots, k\}$ der folgenden Art: $K_k^{(\nu)}$ enthält genau r Vektoren und $\bar{K}_k^{(\nu)}$ enthält genau $s \neq r$ Vektoren (unter der Annahme, daß es solche Mengen $K_k^{(\nu)}$ und $\bar{K}_k^{(\nu)}$ gibt).

Es sei o.B.d.A. $r > s$. Dann existiert ein Element $\underline{v} \in V_k^{(\nu)}$ mit: $\underline{v} \in \bar{K}_k^{(\nu)}$ und $\varrho^a(\underline{v}) = \underline{v}_1 \in K_k^{(\nu)}$ und $\varrho^b(\underline{v}) = \underline{v}_2 \in K_k^{(\nu)}$. Dabei kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß $0 \leq a \leq b \leq k$ gilt (wegen der oben angegebenen Eigenschaft a). Denn es gilt offenbar $[\bar{K}_k^{(\nu)}]_\varrho = V_k^{(\nu)}$, da $\bar{M}$ eine Basis ist. Da weiterhin $V_k^{(\nu)} \supseteq K_k^{(\nu)}$, gehört zu jedem Element von $K_k^{(\nu)}$ ein Element in $\bar{K}_k^{(\nu)}$, aus dem es sich mittels ϱ erzeugen läßt. Da $K_k^{(\nu)}$ größere Mächtigkeit besitzt als $\bar{K}_k^{(\nu)}$, werden zwei Elemente $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ ($\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$) aus $K_k^{(\nu)}$ von dem gleichen Element $\underline{v}$ aus $\bar{K}_k^{(\nu)}$ mittels ϱ erzeugt.



$\underline{w} \xleftarrow{\varrho^i} \underline{x}$ bedeutet, daß $\underline{w} = \varrho^i(\underline{x})$ gilt

Abb. 1

Aus der Eigenschaft d) folgt: $\underline{v}_2 = \varrho^{b-a}(\underline{v}_1)$.

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß M minimal ist (da M eine Basis von V_k ist), denn es kann entweder $\underline{v}_1$ oder $\underline{v}_2$ aus M fortgelassen werden, und die Mengen $M \setminus \{\underline{v}_1\}$ bzw. $M \setminus \{\underline{v}_2\}$ erzeugen weiterhin den Vektorraum V_k.

Folglich gibt es keine Mengen $K_k^{(\nu)}$ und $\overline{K}_k^{(\nu)}$ der angenommenen Art, d. h., für beliebiges ν haben die Mengen $K_k^{(\nu)}$ und $\overline{K}_k^{(\nu)}$ die gleiche Mächtigkeit. Da $K_k^{(\nu)} \cap K_k^{(\mu)} = \emptyset$ und $\overline{K}_k^{(\nu)} \cap \overline{K}_k^{(\mu)} = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$, folgt: M und $\overline{M}$ haben die gleiche Mächtigkeit. Weil M und $\overline{M}$ zwei beliebige Basen von V_k sind, folgt die Behauptung.

4. Ein Beispiel für eine Basis und die Basismächtigkeiten spezieller Vektorräume

Aus dem Satz 1 ergibt sich eine Möglichkeit, die Basismächtigkeit von V_k für kleines k leicht zu bestimmen. Man sucht eine spezielle Basis des betrachteten V_k auf und bestimmt ihre Mächtigkeit.

Wir wollen beispielsweise eine Basis des V_6 angeben:

$$K_6^{(0)} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad K_6^{(1)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad K_6^{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$K_6^{(3)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$K_6^{(4)} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad K_6^{(5)} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad K_6^{(6)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Man prüft leicht nach, daß es sich tatsächlich um eine Basis des V_6 handelt.
Durch Aufsuchen spezieller Basen ergaben sich folgende Basismächtigkeiten:

V_k	Basismächtigkeit	V_k	Basismächtigkeit
V_1	2	V_4	6
V_2	3	V_5	8
V_3	4	V_6	14

5. Das Problem B

Bevor wir die Basismächtigkeit eines beliebigen Vektorraumes V_k bestimmen, wollen wir als Zwischenresultat die in Satz 2 angegebene Eigenschaft beweisen.

Satz 2: Jede Basis eines Vektorraumes V_k mit ungeradem k ist von gerader Mächtigkeit.

Beweis: Wir konstruieren eine spezielle Basis von V_k.

Die Mengen $K_k^{(0)}, K_k^{(1)}, \ldots, K_k^{(\frac{k-1}{2})}$ mögen folgende Eigenschaften haben:

i) $\left[K_k^{(0)}\right]_\varsigma = V_k^{(0)}, \left[K_k^{(1)}\right]_\varsigma = V_k^{(1)}, \ldots, \left[K_k^{(\frac{k-1}{2})}\right]_\varsigma = V_k^{(\frac{k-1}{2})}$

ii) $K_k^{(0)}, K_k^{(1)}, \ldots, K_k^{(\frac{k-1}{2})}$ sind alle minimal bez. i), d. h., aus keiner dieser Mengen läßt sich ein Element streichen, ohne daß i) verletzt wird.

Wir konstruieren nun Mengen $K_k^{(\frac{k+1}{2})}, K_k^{(\frac{k+3}{2})}, \ldots, K_k^{(k)}$ folgendermaßen:

$K_k^{(\frac{k+1}{2})}$ entsteht aus $K_k^{(\frac{k-1}{2})}$, indem man bei jedem Vektor der letzten Menge die Einsen durch Nullen und die Nullen durch Einsen ersetzt. Auf die gleiche Weise entsteht $K_k^{(\frac{k+3}{2})}$ aus $K_k^{(\frac{k-3}{2})}$, ..., $K_k^{(k)}$ aus $K_k^{(0)}$.

Dann gilt:

i) $\left[K_k^{(\frac{k+1}{2})}\right]_\varsigma = V_k^{(\frac{k+1}{2})}, \left[K_k^{(\frac{k+3}{2})}\right]_\varsigma = V_k^{(\frac{k+3}{2})}, \ldots, \left[K_k^{(k)}\right]_\varsigma = V_k^{(k)}$

ii) $K_k^{(\frac{k+1}{2})}, K_k^{(\frac{k+3}{2})}, \ldots, K_k^{(k)}$ sind alle minimal bez. i).

Denn nach Konstruktion übertragen sich die Eigenschaften, die $K_k^{(0)}, K_k^{(1)}, \ldots, K_k^{(\frac{k-1}{2})}$ bez. Eins hatten, auf $K_k^{(\frac{k+1}{2})}$, $K_k^{(\frac{k+3}{2})}, \ldots, K_k^{(k)}$ bez. Null. Mithin ist $M = \bigcup_{\nu=0}^{k} K_k^{(\nu)}$ eine Basis von V_k, und nach Konstruktion haben die Mengen $K_k^{(0)}$ und $K_k^{(k)}$, $K_k^{(1)}$ und $K_k^{(k-1)}, \ldots, K_k^{(\frac{k-1}{2})}$ und $K_k^{(\frac{k+1}{2})}$ jeweils die gleiche Mächtigkeit. Folglich gilt:

$$|M| = \left|\bigcup_{\nu=0}^{k} K_k^{(\nu)}\right| = \sum_{\nu=0}^{k}\left|K_k^{(\nu)}\right| = 2\cdot\sum_{\nu=0}^{(k-1)/2}\left|K_k^{(\nu)}\right|,$$ d.h., $|M|$ ist gerade.

Wir wenden uns nun dem Problem B zu. Dazu betrachten wir zwei Typen von Vektoren aus V_k:

1. T y p: Durch beliebig häufiges Anwenden von ς auf einen Vektor dieses Typs entstehen k voneinander verschiedene Vektoren aus V_k.

Z. B. sind im V_6 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ Vektoren des 1. Typs.

2. T y p: Es entstehen durch beliebig häufiges Anwenden von ϱ auf einen Vektor dieses Typs weniger als k voneinander verschiedene Vektoren. Zum Beispiel ist der unten angegebene Vektor $\underline{v}$ des V_6 ein Vektor des zweiten Typs.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\varrho^{3\cdot l}(\underline{v}) = \underline{v}$ für beliebiges natürliches l.
Es gilt nun, diese Vektortypen mathematisch zu beschreiben und zu unterscheiden. Wir werden den 2. Typ beschreiben. (Ist dieser Vektortyp beschrieben, so ergibt sich sofort auch eine Charakterisierung des 1. Typs.) Der zweite Typ zeichnet sich dadurch aus, daß die Vektoren sich in bestimmte gleiche Abschnitte teilen lassen, die zueinander deckungsgleich sind. Dies ist z. B. bei

dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für die ersten drei und die übrigen drei

Komponenten der Fall. Die deckungsgleichen Abschnitte wollen wir <u>Elementarbestandteile</u> vom ursprünglichen Vektor nennen. Die Einteilung eines Vektors in Elementarbestandteile braucht nicht eindeutig zu sein, denn z. B. im V_{12} läßt sich der folgende Vektor $\underline{w}$ in a) sechs Elementarbestandteile, b) drei Elementarbestandteile und c) zwei Elementarbestandteile zerlegen.

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Elementarbestandteile sind ihrerseits Vektoren (aber natürlich nicht aus V_k).

Bezeichnungen:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} X \\ X \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X \end{pmatrix} \in V_k^{(\nu)} \subseteq V_k$$

X – Elementarbestandteil

A – Anzahl der Elementarbestandteile X von $\underline{v}$

$L = k : A$ – die Länge des Elementarbestandteils X, d. h. $X \in V_L$

$E = \nu : A$ – die Anzahl der Einsen in X, d. h. $X \in V_L^{(E)}$

Die notwendige Bedingung dafür, daß in $V_k^{(\nu)}$ Vektoren des 2. Typs existieren, lautet dann: g.g.T.$(k, \nu) > 1$. (Sowohl k als auch ν müssen nämlich durch die Anzahl A der Elementarbestandteile teilbar sein.) Gilt g.g.T.$(k, \nu) = 1$, so liegen nur Vektoren des 1. Typs in $V_k^{(\nu)}$.

Der folgende Weg zur Bestimmung der Basismächtigkeit des V_k soll eingeschlagen werden:

1. Wir untersuchen die Mächtigkeit einer beliebigen Basisklasse $K_k^{(\nu)}$. Danach summieren wir die Mächtigkeit der $K_k^{(\nu)}$ für alle ν und erhalten damit die Basismächtigkeit des V_k.

2. Wir spalten auf: $K_k^{(\nu)} = T_1 \cup T_2$, wobei

   $T_1 := \left\{ \underline{v} \,\middle|\, \underline{v} \text{ ist Vektor vom 1. Typ in } K_k^{(\nu)} \right\}$

   $T_2 := \left\{ \underline{v} \,\middle|\, \underline{v} \text{ ist Vektor vom 2. Typ in } K_k^{(\nu)} \right\}$.

   Dann ist $\left| K_k^{(\nu)} \right| = \left| T_1 \right| + \left| T_2 \right|$. (Da T_1 und T_2 disjunkt sind.)

3. Wir bestimmen die Mächtigkeit $\mathfrak{M}$ der Menge der Vektoren vom 2. Typ in $V_k^{(\nu)}$.

4. Wir bestimmen die Mächtigkeit $\mathfrak{N}$ der Menge der Vektoren vom 1. Typ in $V_k^{(\nu)}$. $\mathfrak{N} = C_k^\nu - \mathfrak{M} = \binom{k}{\nu} - \mathfrak{M}$. ($C_k^\nu$ wird als übliche Bezeichnung für den Binomialkoeffizienten $\binom{k}{\nu}$ benutzt.)

5. $|T_1| = \frac{\mathfrak{N}}{k}$, denn jeder Vektor aus T_1 erzeugt mittels ς k voneinander verschiedene Vektoren.

6. $|T_2|$ erhält man, indem man auf die Mächtigkeiten niederer Basen (d. h. Basen gewisser Vektorräume V_q mit $q < k$) zurückgeht. Man betrachtet dann nämlich die Vektorräume, in denen die Elementarbestandteile liegen.

Um $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, werden wir Relationen zwischen Mengen von Vektoren des 2. Typs betrachten:

Es sei $V_k^{(\nu)}$ eine Menge mit g.g.T.$(k, \nu) > 1$, d. h., in $V_k^{(\nu)}$ gibt es Vektoren des 2. Typs. Sei g.g.T.$(k,\nu) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{t_m}$ die Primzahlzerlegung des größten gemeinsamen Teilers von k und ν. Dann treten als Anzahl A von Elementarbestandteilen bei Vektoren aus $V_k^{(\nu)}$ folgende Zahlen auf: $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$ mit $0 \leq a_i \leq t_i$ $(1 \leq i \leq m)$ und $\sum_i a_i > 0$. (Zum Beispiel liegen in $V_{12}^{(6)}$ Vektoren mit 2, 3, 6 Elementarbestandteilen.)

Es sei $\{\underline{v} | A = z\}$ die Menge der Vektoren aus $V_k^{(\nu)}$, die sich in z Elementarbestandteile einteilen lassen. Offenbar gelten folgende Beziehungen:

$$\{\underline{v} | A = p_1\} \supseteq \{\underline{v} | A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}\}, \text{ wobei } a_1 > 0$$

$$\vdots$$

$$\{\underline{v} | A = p_m\} \supseteq \{\underline{v} | A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}\}, \text{ wobei } a_m > 0.$$

Dann gilt aber: $\{\underline{v} | \underline{v} \text{ ist Vektor vom 2. Typ in } V_k^{(\nu)}\} = \{\underline{v} | A = p_1\} \cup \cup \{\underline{v} | A = p_2\} \cup \ldots \cup \{\underline{v} | A = p_m\}$.

Die Mengen $\{\underline{v} | A = p_i\}$ sind dabei nicht paarweise disjunkt (1). Denn es ist z. B. die Menge $\{\underline{v} | A = \text{g.g.T.}(k, \nu)\}$ in allen diesen Mengen enthalten.

B e s t i m m u n g   v o n $\mathfrak{M}$:

Wir führen folgende Bezeichnung ein: $S := \sum_{i=1}^{m} \left| \left\{ \underline{v} | A = p_i \right\} \right|$.

Dann gilt

$$\mathfrak{M} = S - \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \{1, 2, \ldots, m\}^2 \\ n_1 < n_2}} \left| \left\{ \underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \right\} \right|$$

$$+ \sum_{\substack{(n_1, n_2, n_3) \in \{1, 2, \ldots, m\}^3 \\ n_1 < n_2 < n_3}} \left| \left\{ \underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot p_{n_3} \right\} \right| - + \ldots,$$

denn wegen (1) sind in S Elemente mehrfach gezählt. Diese müssen wieder abgezogen werden. Ein Element, das in genau zwei Mengen $\left\{ \underline{v} | A = p_i \right\}$ liegt, wurde in S doppelt gezählt. Es muß deshalb einmal abgezogen werden. Alle diese Elemente besitzen die Darstellung $\underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2}$. Ein Element, das in genau drei Mengen $\left\{ \underline{v} | A = p_i \right\}$ liegt, wurde in S dreifach gezählt. Es liegt aber auch in $C_2^3 = 3$ Mengen $\left\{ \underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \right\}$. Es wurde also bereits dreimal wieder abgezogen. Deshalb müssen alle diese Elemente, die die Darstellung $\underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot p_{n_3}$ besitzen, wieder einmal hinzugefügt werden. Diese Betrachtung wird solange fortgeführt, bis wir bei der Menge der Vektoren angelangt sind, die in allen Mengen $\left\{ \underline{v} | A = p_i \right\}$ enthalten sind. Dies sind die Vektoren mit der Darstellung $\underline{v} | A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$. Es ergibt sich dann:

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{m} \Bigl(g_i \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_i) \in \{1, 2, \ldots, m\}^i \\ n_1 < n_2 < \ldots < n_i}} \left| \left\{ \underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i} \right\} \right| \Bigr)$$

wobei $g_1 = 1$ und $g_i + \sum_{\varkappa=1}^{i-1} g_\varkappa \cdot C_i^\varkappa = 1$ für $i = 2, 3, \ldots, k$.

Die explizite Darstellung lautet $g_i = (-1)^{i+1}$.

Es bleibt die Mächtigkeit einer Menge $\{\underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i}\}$ mit $i = 1, 2, \ldots, k$ zu bestimmen. In einer solchen Menge gibt es genau soviel verschiedene Vektoren, wie es verschiedene Elementarbestandteile der Länge $L = k : A$ mit $E = \nu : A$ Einsen gibt: $\left|\{\underline{v} | A = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i}\}\right| = \left|V_L^{(E)}\right| = C_L^E$.

Folglich gilt

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{m} \left((-1)^{i+1} \cdot \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_i) \in \{1, 2, \ldots, m\}^i \\ n_1 < n_2 < \ldots < n_i}} C_{k/p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i}}^{\nu/p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i}} \right)$$

und $|T_1| = \dfrac{C_k^\nu - \mathfrak{M}}{k}$. Da $\left|K_k^{(\nu)}\right| = |T_1| + |T_2|$ gilt, bleibt die Mächtigkeit von T_2 zu bestimmen.

Aus der Menge der Vektoren $\underline{v}$ in $V_k^{(\nu)}$, die sich in A Elementarbestandteile zerlegen lassen, finden wir Vektoren in der Menge $K_k^{(\nu)}$ wieder. Denn die Vektoren, die A Elementarbestandteile aufweisen, können mittels ς auch nur aus Vektoren hervorgehen, die A Elementarbestandteile besitzen.

Wir bestimmen nun die minimale Anzahl $\mathcal{R}_A$ von Vektoren $\underline{v}$, die sich in A Elementarbestandteile zerlegen lassen und die mittels ς die gesamte Menge $\{\underline{v} | \underline{v}$ ist zerlegbar in A Elementarbestandteile$\}$ erzeugen.

$$\text{Sei } \underline{v} = \begin{pmatrix} X \\ X \\ \vdots \\ X \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow 1 \\ \longleftarrow 2 \\ \vdots \\ \longleftarrow A \end{matrix} \qquad X \in V_L^{(E)} = V_{K/A}^{(\nu/A)}$$

und $K_L^{(E)} = \{X_1, X_2, \ldots, X_q\}$, d. h. $[\{X_1, X_2, \ldots, X_q\}]_\varsigma = V_L^{(E)}$ und $\{X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ minimal.

Dann ist offenbar

$$\begin{array}{l} 1\rightarrow \\ 2\rightarrow \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A\rightarrow \end{array} \left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_q \\ X_q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_q \end{pmatrix} \right] = \left\{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ ist zerlegbar in A Elementarbestandteile.} \right\}$$

Mithin ist $\mathcal{K}_A = |K_L^{(E)}|$. Dann ergibt sich durch analoge Betrachtung wie bei der Bestimmung von $\mathfrak{M}$:

$$|T_2| = \left|K_{k/p_1}^{(\nu/p_1)}\right| + \left|K_{k/p_2}^{(\nu/p_2)}\right| + \ldots + \left|K_{k/p_m}^{(\nu/p_m)}\right|$$
$$- \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \{1, 2, \ldots, m\}^2 \\ n_1 < n_2}} \left|K_{k/p_{n_1}p_{n_2}}^{(\nu/p_{n_1}p_{n_2})}\right| + - \ldots,$$

$$|T_2| \cdot = \sum_{i=1}^{m} \left((-1)^{i+1} \cdot \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_i) \in \{1, 2, \ldots, m\}^i \\ n_1 < n_2 < \ldots < n_i}} \left| K_{k/p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i}}^{(\nu/p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \ldots \cdot p_{n_i})} \right| \right).$$

Es wird also auf die Mächtigkeit von niederen Basisklassen $K_L^{(E)}$ Bezug genommen, d.h. auf solche Mengen $K_L^{(E)}$ mit der Eigenschaft E ist Teiler von ν und L ist Teiler von k. Wir gehen so lange auf niedere Basisklassen $K_L^{(E)}$ zurück, bis g.g.T.(L,E) = 1 erreicht ist, d.h. so lange, bis in $V_L^{(E)}$ keine Vektoren mehr auftreten, die sich in Elementarbestandteile zerlegen lassen. Dieser Algorithmus gibt uns die Möglichkeit, $|T_2|$ rekursiv zu bestimmen. Damit ist die Basismächtigkeit ebenfalls rekursiv bestimmt.

Abschließend sei noch auf folgendes offenes Problem aufmerksam gemacht: Man gebe die Basismächtigkeit explizit an, bzw. man finde geeignete Schranken für die Basismächtigkeit!

eingegangen: 10. 05. 1977

Anschrift des Verfassers

Dipl.-Math. Andreas Kossow
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Reinhard Strecker

Das Radikal rad $\underline{K}$ für kleine Kategorien $\underline{K}$

0. Einleitung

In seiner Arbeit /3/ hat Hoehnke in Analogie zur Jacobsontheorie für Ringe die Radikale rad S und $\overline{\text{rad}}$ S einer Halbgruppe S definiert und Strukturssätze für Halbgruppen gewonnen. Seidel /9/ gab eine innere Charakterisierung von rad S. Klassische Ergebnisse der Ringtheorie wurden von Sehgal /7, 8/ auf Ringoide übertragen, Ringoide sind dabei kleine Kategorien, in denen die Mengen Hom (A,B) eine additive Gruppe bilden. Leduc /4,5/ übertrug ebenfalls Ergebnisse aus der Ringtheorie auf additive Kategorien. In der vorliegenden Arbeit sollen Ergebnisse von Hoehnke für Halbgruppen auf beliebige, d. h. nicht notwendig additive, kleine Kategorien $\underline{K}$ übertragen werden. Dabei geht es vor allem um die Definition und verschiedene Charakterisierungen von rad $\underline{K}$. Struktursätze sollen in einer weiteren Arbeit hergeleitet werden. Eine Kategorie wird aufgefaßt als eine algebraische Struktur mit einer partiell definierten binären und partiell definierten nullstelligen Operationen. Der Anschaulichkeit halber werden wir auch in der üblichen Weise von Objekten einer Kategorie sprechen. Wir betrachten nur kleine Kategorien, die durch $\underline{K}$, $\underline{H}$, $\underline{L}$, ... bezeichnet werden. Objekte werden durch A, B, C, ..., X, Y, ..., Morphismen durch α_{AB}, β_{CD}, γ, δ, κ, λ, ... bezeichnet, wobei α_{AB} ein Morphismus mit der Quelle A und dem Ziel B ist. Ens sei die (große) Kategorie der Mengen.

I. Darstellungen

Es sei $\varphi : \underline{K} \longrightarrow$ Ens ein Funktor. Ein Subfunktor χ von φ ist ein Funktor $\chi : \underline{K} \longrightarrow$ Ens derart, daß $\chi(X) \subseteq \varphi(X)$ für alle Objekte $X \in \underline{K}$ und daß die Inklusionen $i_X : \chi(X) \longrightarrow \varphi(X)$ eine natürliche Transformation von χ in φ bilden (s. Schubert /6/).

Wir werden nur Funktoren betrachten für die gilt

Aus $\varphi(A) = \varphi(B)$ folgt $A = B$. (1)

Das sind Funktoren erster Art im Sinne von Hoehnke /2/, s. auch Strecker /10/. Es ergibt sich

Ist $\varphi : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$, so ist φ Funktor auf eine Teilkategorie von $\underline{L}$. (2)

Es sei $\varphi : \underline{K} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ ein Funktor für den gilt: Für jedes Objekt $A \in \underline{K}$ gibt es einen Subfunktor φ_A von φ mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi_A(X) = \emptyset \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(A,X) = \emptyset, \tag{3}$$

$$\varphi_A(X) \cap \varphi_B(X) = \emptyset \quad \text{für } A \neq B, \tag{4}$$

$$\varphi(X) = \bigcup_{A \in \underline{K}} \varphi_A(X). \tag{5}$$

Dann nennen wir das System $\underline{\varphi} = \{\varphi, \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ eine Darstellung von $\underline{K}$.
Ist zu jedem $A \in \underline{K}$ ein Funktor $\varphi_A : \underline{K} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ gegeben, der (3) erfüllt, und erfüllt das System der Funktoren φ_A die Bedingung (4), so wird durch (5) ein Funktor φ definiert, und das System $\underline{\varphi} = \{\varphi, \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ ist eine Darstellung.

<u>Beispiel:</u> Wählt man für eine Kategorie $\underline{K}$ als Funktoren φ_A die kovarianten Hom-Funktoren, $\varphi_A = \mathrm{Hom}(A,?)$, so wird durch (5) φ als folgender Funktor gegeben, $\varphi(X) = \{\alpha_{AX}, A \in \underline{K}\}$ und es ist $\underline{\varphi} = \{\varphi, \mathrm{Hom}(A,?), A \in \underline{K}\}$ eine Darstellung.
Ein Homomorphismus der Darstellung $\underline{\varphi} = \{\varphi, \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ in die Darstellung $\underline{\psi} = \{\psi, \psi_A, A \in \underline{K}\}$ ist eine natürliche Transformation η von φ in ψ derart, daß η auch die Subfunktoren φ_X in ψ_X transformiert, d. h., für $\alpha : A \to B$ und für alle Objekte

X sind alle Diagramme

$$\begin{tikzcd} \varphi_X(A) \arrow[r, "\varphi_X(\alpha)"] \arrow[d, "\eta_A"] & \varphi_X(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ \psi_X(A) \arrow[r, "\psi_X(\alpha)"] & \psi_X(B) \end{tikzcd} \qquad (6)$$

kommutativ.
Zwei Funktoren heißen isomorph, wenn sie natürlich äquivalent sind. Entsprechend heißen zwei Darstellungen $\underline{\varphi}$ und $\underline{\psi}$ isomorph, wenn φ und ψ natürlich äquivalent sind und die natürliche Äquivalenz η auch eine natürliche Äquivalenz der entsprechenden Subfunktoren ist.
Ist $\underline{\varphi} = \{\varphi, \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ eine Darstellung, so heißt $\underline{\psi} = \{\psi, \psi_A, A \in \underline{K}\}$ eine Teildarstellung, wenn ψ Subfunktor von φ und die ψ_A Subfunktoren der φ_A sind.

Einen Funktor $\varphi : \underline{K} \longrightarrow$ Ens nennen wir trivial, wenn $\varphi(X)$ für alle X leer oder eine einelementige Menge ist.
Es sei φ eine Darstellung und $x \in \varphi(A)$. x heißt Fixelement, wenn $x\varphi(\alpha_{AA}) = x$ für alle α_{AA} gilt[1].
Eine Darstellung $\underline{\varphi}$ einer Kategorie $\underline{K}$ heißt irreduzibel, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) Zu jedem $x \in \varphi_A(X)$ existieren ein $y \in \varphi_A(A)$ und ein $\alpha_{AX} \in \underline{K}$ mit $x = y\,\varphi(\alpha_{AX})$. (7)

ii) Ist φ_A nichttrivial, so gibt es ein Objekt X derart, daß $\varphi_A(X)$ nicht nur aus Fixelementen besteht. (8)
Es gibt ein A, so daß φ_A nichttrivial ist.

iii) Für jede Teildarstellung ψ von φ und für alle $A \in \underline{K}$ gilt $\varphi_A = \psi_A$ oder ψ_A ist trivial. (9)

---
1 Wir fassen die Abbildungen $\varphi(\alpha_{XY})$ als Rechtsoperatoren auf.

iv) Wenn Hom(X,A) leer ist, so ist $\varphi_A(X)$ einelementig (10) oder leer.

<u>Bemerkung:</u> Ist $\underline{\varphi} = \{\varphi,\ \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ eine Darstellung und φ_B' ein Subfunktor von φ_B, so ist auch $\underline{\varphi}' = \{\varphi',\ \varphi_A',\ A \in \underline{K}\}$ mit $\varphi_A' = \varphi_A$ für $A \neq B$ und φ' durch φ_A' gemäß (5) definiert, eine Darstellung von $\underline{K}$. Daher besagt (9) sogar, daß für jeden beliebigen Subfunktor φ_A' eines Funktors φ_A aus einer irreduziblen Darstellung gilt $\varphi_A' = \varphi_A$ oder φ_A' ist trivial.

<u>Hilfssatz 1.</u> Ist φ irreduzibel, so liegt in jeder Menge $\varphi_A(X)$ höchstens ein Fixelement.

<u>Beweis:</u> $\varphi_A(X)$ enthalte zwei verschiedene Fixelemente x und y. Wegen (10) ist Hom(X,A) nicht leer, α_{XA} sei ein Element daraus. Es sind $y\,\varphi(\alpha_{XA})$ und $x\,\varphi(\alpha_{XA}) \in \varphi_A(A)$.

1) Es sei $x\,\varphi(\alpha_{XA})$ kein Fixelement.
Wir setzen $\varphi_A'(Y) = \{z/z = x\,\varphi(\alpha_{XA})\,\varphi(\alpha_{AY}),\ \alpha_{AY} \in \underline{K}\}$. Es ist φ_A' ein nichttrivialer Subfunktor von φ_A. Weil φ irreduzibel ist, folgt $\varphi_A' = \varphi_A$. Es ist jedoch $y\,\varphi(\alpha_{XA}) \notin \varphi_A'(A)$, denn sonst wäre $y\,\varphi(\alpha_{XA}) = x\,\varphi(\alpha_{XA})\,\varphi(\gamma_{AA})$ für ein geeignetes γ_{AA}, und wir hätten $y = y\,\varphi(\alpha_{XA}\beta_{AX}) = x\,\varphi(\alpha_{XA}\gamma_{AA}\beta_{AX}) = x$ für alle $\beta_{AX} \in$ Hom(A,X). Hom(A,X) ist wegen (7) nichtleer, damit haben wir einen Widerspruch, Fall 1) kann nicht eintreten.

2) Es seien sowohl $x\,\varphi(\alpha_{XA})$ als auch $y\,\varphi(\alpha_{XA})$ Fixelemente.
2a) $\varphi_A(A)$ enthalte noch weitere Elemente. Dann ist durch
$\varphi_A'(Y) = \{z/z = x\,\varphi(\alpha_{XA})\,\varphi(\alpha_{AY}), \alpha_{AY} \in \underline{K}$ oder
$z = y\,\varphi(\alpha_{XA})\,\varphi(\alpha_{AY}),\ \alpha_{AY} \in \underline{K}\}$ ein nichttrivialer Subfunktor von φ_A definiert. Es ist $\varphi_A' \neq \varphi_A$. Das ist wegen der Bemerkung oben ein Widerspruch zur Irreduzibilität.

2b) $x\varphi(\alpha_{XA})$ und $y\varphi(\alpha_{XA})$ sind die einzigen Elemente von $\varphi_A(A)$. Wir bilden $\varphi_A'(Y) = \{z/z = x\varphi(\alpha_{XA})\varphi(\alpha_{AY}), \alpha_{AY} \in \underline{K}\}$ und $\varphi_A''(Y) = \{z/z = y\varphi(\alpha_{XA})\varphi(\alpha_{AY}), \alpha_{AY} \in \underline{K}\}$. φ_A' und φ_A'' sind Subfunktoren von φ_A und nach der Bemerkung oben trivial, d. h., alle Elemente $z = x\varphi(\alpha_{XA}\alpha_{AY})$ und alle Elemente $z = y\varphi(\alpha_{XA}\alpha_{AY})$ sind Fixelemente. Wir setzen $\varphi_A'''(Y) = \varphi_A'(Y) \cup \varphi_A''(Y)$. Wegen $x \neq y$ ist φ_A''' nichttrivial, also gleich φ_A. Da $\varphi_A'(Y)$ und $\varphi_A''(Y)$ nur Fixelemente enthalten, gilt das auch für $\varphi_A'''(Y)$ für alle $Y \in \underline{K}$, im Widerspruch zu (8).

Wir sagen, daß eine Darstellung $\underline{\varphi}$ ein System F von Fixelementen $\{f_{AB}/A,B \in \underline{K}\}$ besitzt, wenn jede Menge $\varphi_A(B) \neq \emptyset$ ein Fixelement f_{AB} besitzt und wenn gilt

$$f_{AB}\varphi(\alpha_{BC}) = f_{AC} \text{ für alle } \alpha_{BC} \in \underline{K}. \tag{11}$$

<u>Hilfssatz 2.</u> Es sei $\underline{\varphi}$ eine irreduzible Darstellung.

a) Besitzt jede Menge $\varphi_A(B) \neq \emptyset$ ein Fixelement f_{AB}, so gilt (11).

b) Enthält $\varphi_A(A)$ neben einem Fixelement f noch ein anderes Element, so enthält jede Menge $\varphi_A(X)$ ein Fixelement.

<u>Beweis:</u>

<u>Zu a).</u> Es sei α_{AB} beliebig aus $\underline{K}$ und $y = f_{AA}\varphi(\alpha_{AB})$ kein Fixelement. Da φ irreduzibel ist, gibt es ein β_{AB} mit $f_{AB} = z\varphi(\beta_{AB})$ für ein geeignetes $z \in \varphi_A(A)$.

Fall 1. Es kann $z = f_{AA}$ gewählt werden. Da nach (10) Hom(B,A) nicht leer ist, gibt es ein α_{BA}. Es ist $\varphi(\alpha_{BA}) = f_{AA} = f_{AA}\varphi(\beta_{AB}\alpha_{BA})$. Daraus folgt $y\varphi(\alpha_{BA}\alpha_{AB}) = f_{AA}\varphi(\alpha_{AB}) = y = f_{AA}\varphi(\beta_{AB}\alpha_{BA}\alpha_{AB}) = f_{AB}\varphi(\alpha_{BA}\alpha_{AB}) = f_{AB}$, Widerspruch.

Fall 2. Es kann z nicht gleich f_{AA} gewählt werden, d. h., es ist $f_{AB} \in / f_{AA}$ Hom(A,B). Wir setzen $\varphi_A'(X) = \{z/z = f_{AA}\varphi(\alpha_{AX}),$

$\alpha_{AX} \in \underline{K}\}$. Wegen $y \neq f_{AB}$ ist φ'_A ein nichttrivialer Subfunktor von φ_A, daher gilt $\varphi_A = \varphi'_A$. Das ist ein Widerspruch, da $f_{AB} \in \varphi_A(B)$, aber $\notin \varphi'_A(B)$.

Damit ist bewiesen, daß $f_{AA}\,\varphi(\alpha_{AB})$ für alle α_{AB} ein Fixelement ist. Es folgt $f_{AB}\,\varphi(\alpha_{BC}) = f_{AA}\,\varphi(\alpha_{AB}\alpha_{BC}) = f_{AC}$.

Zu b). Es sei $f\,\varphi(\alpha_{AX})$ kein Fixelement. Dann enthält $\varphi_A(X)$ mehr als ein Element, und es ist φ'_A mit $\varphi'_A(Y) = \{f\,\varphi(\alpha_{AX})\,\varphi(\alpha_{XY}) / \alpha_{XY} \in \underline{K}\}$ ein nichttrivialer Subfunktor von φ_A, stimmt also mit φ_A überein. Es ist aber $\varphi'_A(A) = f$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Zu jedem Funktor φ gehört eine Kongruenz δ_φ von $\underline{K}$

$$(\alpha,\beta) \in \delta_\varphi \longleftrightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(\beta). \qquad (12)$$

Umgekehrt gehört zu jeder Kongruenz ϱ auf $\underline{K}$ mit

$$\text{Aus } (\alpha_{AB}, \beta_{CD}) \in \varrho \text{ folgt } A = C \text{ und } B = D \qquad (13)$$

(Kongruenz erster Art) ein Funktor $\varphi_\varrho : \underline{K} \to \underline{\overline{K}}$, der jedem Morphismus von $\underline{K}$ seine Kongruenzklasse zuordnet. $\underline{\overline{K}}$ besitzt dieselben Objekte wie $\underline{K}$ und die Morphismen von $\underline{\overline{K}}$ sind die Kongruenzklassen nach ϱ.

Ist $\varphi : \underline{K} \longrightarrow \underline{H}$ ein Funktor und ϱ eine Kongruenz mit (13) und

$$\varrho \leq \delta_\varphi \qquad (14)$$

so läßt sich φ gemäß dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{K} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_\varrho"'] & & \underline{H} \\ & \underline{\overline{K}} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

zerlegen.

<u>Hilfssatz 3.</u> Ist $\Phi = \{\varphi, \varphi_A,\ A \in \underline{K}\}$ eine (irreduzible) Darstellung von $\underline{K}$ und ϱ eine Kongruenz mit (13) und (14), so ist $\Psi = \{\psi, \psi_A,\ A \in \underline{\overline{K}}\}$ eine (irreduzible) Darstellung, wobei $\psi_A(X)$

$= \varphi_A(X)$ und $\psi_A(\varphi_\varrho(\alpha_{AB})) = \varphi_A(\alpha_{AB})$ gesetzt wird. Ist umgekehrt ϱ eine Kongruenz mit (13) und $\underline{\Psi} = \{\psi, \psi_A, A \in \underline{K}\}$ eine (irreduzible) Darstellung von $\underline{K}$, so ist $\underline{\varphi} = \{\varphi\,\varphi_\varrho, \psi_A\,\varphi_\varrho, A \in \underline{K}\}$ eine (irreduzible) Darstellung von $\underline{K}$.

Beweis: Wegen (14) ist $\underline{\psi}$ eine Darstellung und wenn $\underline{\varphi}$ irreduzibel ist, ist (7) für ψ erfüllt. Wegen (14) ist (8) erfüllt und (10) gilt für ψ_A, weil es für φ_A gilt. Es sei ψ' eine Teildarstellung von ψ. Definieren wir $\varphi_A'(X) = \psi_A'(X)$, $\varphi'(X) = \bigcup_{A \in \underline{K}} \varphi_A'(X)$, so ist das System $\{\varphi', \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ eine Teildarstellung von $\underline{\varphi}$, es folgt $\varphi_A' = \varphi_A$ oder φ_A' trivial. Daraus ergibt sich $\psi_A' = \psi_A$ oder ψ_A' ist trivial. Der zweite Teil des Hilfssatzes ist klar.

Wir definieren

$$\operatorname{rad}\underline{K} = \bigcap_{\substack{\underline{\varphi}\ \text{irred.}\\ \text{Darst.}}} \sigma_\varphi$$

$\underline{K}$ heißt radikalfrei, wenn rad $\underline{K}$ die Nullrelation $\underline{O}$ ist. Wir bezeichnen mit $\underline{1}$ die Relation $(\alpha_{AB}, \beta_{CD}) \in \underline{1} \longleftrightarrow A = C$ und $B = D$.

Gibt es keine irreduzible Darstellung von $\underline{K}$, so setzen wir rad $\underline{K} = \underline{1}$. Eine Kategorie mit rad $\underline{K} = \underline{1}$ nennen wir radikal.

Satz 4. Es ist $\operatorname{rad}(\underline{K}/\operatorname{rad}\underline{K}) = \underline{O}$.

Beweis: Nach Hilfssatz 3 kann aus jeder Darstellung $\underline{\psi}$ von $\underline{K}/\operatorname{rad}\underline{K}$ eine Darstellung $\underline{\varphi}$ von $\underline{K}$ gewonnen werden. Es ist $\underline{\varphi}$ genau dann irreduzibel, wenn $\underline{\psi}$ irreduzibel ist. Daher ist

$$\operatorname{rad}(\underline{K}/\operatorname{rad}\underline{K}) = \bigcap_{\substack{\psi\ \text{irreduz. Darst.}\\ \text{von}\ \underline{K}/\operatorname{rad}\underline{K}}} \sigma_\psi = \bigcap_{\substack{\varphi\ \text{irreduz.}\\ \text{Darst. von}\ \underline{K}}} (\sigma_\varphi/\operatorname{rad}\underline{K})$$

$$= (\cap\, \sigma_\varphi)/\operatorname{rad}\underline{K} = \operatorname{rad}\underline{K}\,/\,\operatorname{rad}\underline{K} = \underline{O}.$$

Eine Darstellung $\underline{\varphi}$ von $\underline{K}$ heißt zyklisch, wenn es ein System $S = \{x_A \in \varphi(A), A \in \underline{K}\}$ gibt derart, daß zu jedem Element y aus $\bigcup \varphi(A)$, $A \in \underline{K}$ genau ein $x_A \in S$ existiert mit $y = x_A\,\varphi(\alpha), \alpha \in \underline{K}$.

Das System heißt ein System erzeugender Elemente und jedes Element, das in einem Erzeugendensystem vorkommt, heißt erzeugendes Element.

Hilfssatz 5. Ist $\underline{\varphi}$ eine zyklische Darstellung und $y_A \in \varphi(A)$ ein nichterzeugendes Element, so sind auch die Elemente $y_A \varphi(\alpha_{AB})$ nichterzeugende Elemente.

Beweis: Es sei $y_A \varphi(\alpha_{AB}) = x_B$ ein erzeugendes Element. Es gibt also ein Erzeugendensystem $S = \{x_A, A \in \underline{K}\}$. Weiter gibt es ein $C \in \underline{K}$, so daß $y_A = x_C \varphi(\alpha_{CA})$ und daher $x_B = x_C \varphi(\alpha_{CA}) \varphi(\alpha_{AB})$, α_{CA}, α_{AB} geeignet. Aus der Definition des zyklischen Erzeugendensystems folgt $C = B$. Ersetzt man in dem System S das Element x_A durch y_A, so erhält man wieder ein Erzeugendensystem, im Widerspruch zur Annahme.

Satz 6. Jede irreduzible Darstellung $\underline{\varphi} = \{\varphi, \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ ist zyklisch und besitzt ein Erzeugendensystem der Form $S = \{x_A, x_A \in \varphi_A(A)\}$.

Beweis: In jeder Menge $\varphi_A(A)$, $A \in \underline{K}$, wählen wir ein Element x_A; falls möglich, soll x_A kein Fixelement sein. Es sei S die Menge der so gewählten Elemente x_A. Wir setzen $\psi_A(Y) = \{z \mid z = x_A \varphi(\alpha_{AY}), \alpha_{AY} \in \underline{K}\}$ und definieren $\psi_A(\alpha_{YZ})$ als Abbildung von $\psi_A(Y)$ in $\psi_A(Z)$: $x_A \varphi(\alpha_{AY}) \longrightarrow x_A \varphi(\alpha_{AY} \alpha_{YZ})$. Damit ist ψ_A ein Funktor von $\underline{K}$ in Ens. Für $A \neq B$ ist $\psi_A(X) \cap \psi_B(X) = \emptyset$. Setzen wir $\psi(Y) = \bigcup_{A \in \underline{K}} \psi_A(Y)$, so ist ψ zusammen mit den Subfunktoren ψ_A eine Darstellung. ψ ist Subfunktor von φ, und die ψ_A sind Subfunktoren der φ_A. Daher ist $\underline{\psi}$ Teildarstellung von $\underline{\varphi}$. Ist x_A kein Fixelement, so ist ψ_A nichttrivial, d. h., es ist $\varphi_A = \psi_A$. Ist x_A Fixelement, so gilt nach der Auswahl der Elemente x_A die Gleichheit $\varphi_A(A) = \{x_A\}$, und daraus folgt $\varphi_A(X) = \psi_A(X)$ für alle $X \in \underline{K}$. Daher ist allgemein $\varphi_A = \psi_A$, also $\varphi = \psi$. Jedes Element $y \in \varphi(Z)$ läßt sich in der Form

$y = x_A \varphi(\alpha_{AZ})$ darstellen, wobei x_A aus S durch y eindeutig bestimmt ist. Es ist also $\underline{\varphi}$ zyklisch und S ein Erzeugendensystem. Es sei $\varphi_A(\underline{K}) = \bigcup_{X \in \underline{K}} \varphi_A(X)$.

Hilfssatz 7. Ist $\underline{\varphi}$ eine irreduzible Darstellung und $S = \{x_A, x_A \in \varphi(A), A \in \underline{K}\}$ ein System erzeugender Elemente, so enthält jede Menge $\varphi_A(\underline{K})$ genau ein Element aus S.

Beweis: Es ist klar, daß $\varphi_A(\underline{K})$ mindestens ein Element aus S enthält. Sei $\{x_i, i \in I\} = \varphi_A(\underline{K}) \cap S$. Zu jedem x_i gibt es ein $z_i \in \varphi_A(A)$ für ein geeignetes A und einen Morphismus α_i mit $x_i = z_i \varphi(\alpha_i)$.

Fall 1. Es sei $z_l = z_j = z$ für zwei verschiedene $l, j \in I$. Da S ein Erzeugendensystem ist, gibt es ein $x_k \in \varphi_A(\underline{K}) \cap S$ und ein $\beta \in \underline{K}$ mit $z = x_k \varphi(\beta)$.Daraus folgt $x_j = x_k \varphi(\beta) \varphi(\alpha_j)$ und $x_l = x_k \varphi(\beta) \varphi(\alpha_l)$. Nach Definition der erzeugenden Elemente folgt daraus $x_k = x_l = x_j$, im Widerspruch zur Annahme.

Fall 2. Sei l,j ein Paar mit $z_l \neq z_j$. Ist z_l ein nichterzeugendes Element, dann nach Hilfssatz 5. auch x_l, im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist z_l erzeugendes Element, nach demselben Schluß auch z_j. Es gibt daher ein $\gamma \in \mathrm{Hom}(A,A)$ mit $z_l = z_j \varphi(\gamma)$. Daraus folgt $x_l = z_j \varphi(\gamma) \varphi(\alpha_l)$, und wir haben Fall 1) vor uns. Der Beweis ist beendet.

Es sei $\varphi : \underline{K} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ und $\underline{\varphi} = \{\varphi, \varphi_A, A \in \underline{K}\}$ eine zyklische Darstellung und $S = \{x_A, A \in \underline{K}\}$ ein System erzeugender Elemente. Wir betrachten in $\underline{K}$ die Rechtskongruenz $\equiv$:

$$\alpha_{AB} \equiv \beta_{CD} \qquad x_A \varphi(\alpha_{AB}) = x_A \varphi(\beta_{CD}) \tag{15}$$

und bezeichnen die Rechtskongruenzklasse von α nach $\equiv$ mit $[\alpha]$.

Es gilt

Aus $\alpha_{AB} \equiv \beta_{CD}$ folgt $A = C$ und $B = D$. (16)

Die Zuordnung

$$\chi(A) = \bar{A} = \left\{[\alpha_{XA}],\ \alpha_{XA} \in \underline{K},\ X \in \underline{K}\right\} \qquad (17)$$

und die Abbildungen

$$\chi(\alpha_{AB}) \text{ von } \chi(A) \text{ in } \chi(B) : [\alpha_{XA}] \longrightarrow [\alpha_{XA}\ \alpha_{AB}] \qquad (18)$$

ergeben einen Funktor von $\underline{K}$ in Ens. Setzen wir

$$\chi_A(X) = \left\{ [\alpha_{AX}],\ \alpha_{AX} \in \underline{K} \right\}, \qquad (19)$$

so ist das System $\{\chi,\ \chi_A,\ A \in \underline{K}\}$ eine Darstellung von $\underline{K}$. Wir bezeichnen mit $K / \equiv$ die Kategorie, die die Mengen $\bar{A}$, $A \in \underline{K}$ als Objekte und die Elemente $\chi(\alpha_{AB})$ als Morphismen hat. Die Zuordnung $\xi : \varphi(A) \longrightarrow \chi(A)$ mit $x_X \cdot \varphi(\alpha_{XA}) \longrightarrow [\alpha_{XA}]$ ist für alle $A \in \underline{K}$ eine eindeutige Abbildung zwischen den Mengen $\varphi(A)$ und $\psi(A)$ und vermittelt eine natürliche Äquivalenz zwischen $\underline{\varphi} = \{\varphi,\ \varphi_A,\ A \in \underline{K}\}$ und $\chi = \{\chi,\ \chi_A,\ A \in \underline{K}\}$. Die Darstellungen $\underline{\varphi}$ und $\underline{\psi}$ sind isomorph.

Ist umgekehrt $\equiv$ eine Rechtskongruenz in $\underline{K}$ mit (16), so ergeben die durch (17) bis (19) definierten Zuordnungen χ bzw. χ_A eine zyklische Darstellung, $S = \{[\varepsilon_{AA}],\ A \in \underline{K},\ \varepsilon_{AA}$ die Einheiten von $\underline{K}\}$ ist ein System erzeugender Elemente.

Wir fassen zusammen.

<u>Satz 8.</u> Jede zyklische Darstellung $\underline{\varphi}$ von $\underline{K}$ ist isomorph einer Darstellung $\underline{\chi} = \{\chi,\ \chi_A,\ A \in \underline{K}\}$ mit $\chi : \underline{K} \longrightarrow \underline{K} / \equiv$, wobei $\equiv$ eine Rechtskongruenz von $\underline{K}$ mit (16) ist. Umgekehrt erhält man aus einer Rechtskongruenz von $\underline{K}$ mit (16) vermittels (17) bis (19) eine zyklische Darstellung.

<u>Hilfssatz 9.</u> Es sei $\underline{\varphi} = \{\varphi,\ \varphi_A,\ A \in K\}$ eine irreduzible Darstellung. In jeder Menge $\varphi_A(X)$ gibt es höchstens ein nichterzeu-

gendes Element, das ist Fixelement.

Beweis: In $\varphi_A(X)$ gebe es die nichterzeugenden Elemente y und z, $y \neq z$. Wegen (10) ist Hom(X,A) nichtleer. Wir definieren $\varphi_A'(U) = \{w \,/\, w = y\,\varphi(\alpha_{XU}),\ \alpha_{XU} \in \underline{K} \text{ oder } w = z\,\varphi(\alpha_{XU}),\ \alpha_{XU} \in \underline{K}\}$.
φ_A' ist nichttrivialer Subfunktor von φ_A. Nach der Bemerkung vor Hilfssatz 1 gilt $\varphi_A' = \varphi_A$. Nach Hilfssatz 7 besitzt $\varphi_A'(\underline{K})$ ein erzeugendes Element, das ist ein Widerspruch zu Hilfssatz 5. Daher gibt es in $\varphi_A(X)$ höchstens ein nichterzeugendes Element, dieses ist nach Hilfssatz 5 ein Fixelement.
Es sei φ eine zyklische Darstellung von $\underline{K}$, die wir in der Form $\varphi: \underline{K} \longrightarrow \underline{K} / \equiv$ annehmen. In $\underline{K} / \equiv$ führen wir die Kongruenz σ ein.

$$[\alpha_{AB}]\,\sigma\,[\beta_{AB}] \longleftrightarrow \begin{cases} [\alpha_{AB}] = [\beta_{AB}] & \text{oder} \\ [\alpha_{AB}] \text{ und } [\beta_{AB}] & \text{sind nichterzeugende Elemente.} \end{cases}$$

Mit $[\alpha_{AB}]_\sigma$ bezeichnen wir die Kongruenzklasse von $[\alpha_{AB}]$ nach σ.
Es sei

$$\bar{\varphi}(\varphi(A)) = \bar{\varphi}\varphi(A) = \{\alpha_{XA\,\sigma},\ \alpha_{XA} \in \underline{K}\}, \tag{20}$$

und es sei $\bar{\varphi}(\varphi(\alpha_{AB})) = \bar{\varphi}\varphi(\alpha_{AB})$ die Abbildung von $\bar{\varphi}$ (A) in $\bar{\varphi}\varphi$(B) mit

$$[\alpha_{XA}]\sigma \longrightarrow [\alpha_{XA}\,\alpha_{AB}]\sigma \tag{21}$$

Wir setzen

$$(\bar{\varphi}\varphi)_A(X) = \bar{\varphi}(\varphi_A(X)) = \{[\alpha_{AX}]\sigma\}.$$

Es ist $\bar{\varphi}\varphi = \{\bar{\varphi}\varphi,\ (\bar{\varphi}\varphi)_A,\ A \in \underline{K}\}$ eine Darstellung und $\bar{\varphi}$ eine homomorphe Abbildung der Darstellung φ auf die Darstellung $\bar{\varphi}\varphi$.

Satz 10. Es sei φ eine zyklische Darstellung von $\underline{K}$. Es gebe ein A und ein X derart, daß $\varphi_A(X)$ mehr als ein Element, darunter ein erzeugendes, besitzt. Dann ist die durch (20) und (21) definierte Darstellung $\bar{\varphi}\varphi$ von $\underline{K}$ irreduzibel.

Beweis: Es sei ψ Teildarstellung von $\bar{\varphi}\varphi$. Ist ψ_A nichttrivial, so gibt es ein X derart, daß $\psi_A(X)$ mehr als ein Element enthält. Eines dieser Elemente muß aber erzeugendes Element sein, d. h., es ist $\psi_A = (\bar{\varphi}\varphi)_A$, also $\psi = \bar{\varphi}\varphi$. Die anderen Bedingungen sind leicht nachzuprüfen.

II. Eine äußere Charakterisierung von rad K.

Hilfssatz 11. Es sei ϱ eine Rechtskongruenz in $\underline{K}$. φ mit $\varphi : \underline{K} \longrightarrow K/\varrho$ eine Darstellung. Dann ist $\delta_\varphi \subseteq \varrho$.

Beweis: Es ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \varrho \longleftrightarrow [\alpha_{AB}]_\varrho = [\beta_{AB}]_\varrho \longleftrightarrow [\varepsilon_{AA}]_\varrho\, \alpha_{AB} = [\varepsilon_{AA}]_\varrho\, \beta_{AB}$. Weiter ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \delta_\varphi \longleftrightarrow \varphi(\alpha_{AB}) = \varphi(\beta_{AB}) \longleftrightarrow x_A\varphi(\alpha_{AB}) = x_A\varphi(\beta_{AB})$ für alle $x_A \in \varphi(A)$, insbesondere für $[\varepsilon_{AA}]$, d. h. $\delta_\varphi \subseteq \varrho$.

Es sei φ zyklisch und $S = \{x_A,\ A \in \underline{K}\}$ ein Erzeugendensystem. Wir führen die Rechtskongruenz μ_S ein.

$$(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu_S \longleftrightarrow x_A\varphi(\alpha_{AB}) = x_A\varphi(\beta_{AB}). \tag{22}$$

Hilfssatz 12. Es sei $\varphi : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}/\equiv$ irreduzibel und es sei $E_\varphi = \{\varrho / \varrho$ ist Rechtskongruenz in $\underline{K}$ derart, daß $\chi : \underline{K} \longrightarrow K/\varrho$ zu φ isomorph ist$\}$. (χ nach (17) bis (19) erklärt). Dann ist

$$\delta_\varphi = \bigcap_{\varrho \in E_\varphi} \varrho .$$

Beweis: Wenn χ mit $\chi : K \longrightarrow \underline{K}/\varrho$ isomorph zu φ ist, so ist $\delta_\chi = \delta_\varphi$, nach Hilfssatz 11 ist $\delta_\varphi \subseteq \varrho$, daraus folgt

$$\delta_\varphi \subseteq \bigcap_{\varrho \in E_\varphi} \varrho .$$

Es sei $S = \{x_A,\ A \in \underline{K}\}$ ein Erzeugendensystem von φ, und es sei $\psi : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}/\mu_S$. Die Zuordnung $\eta_B : [\beta_{AB}]_\equiv \longrightarrow [\beta_{AB}]_{\mu_S}$ ist ein

Isomorphismus zwischen φ und ψ. Denn η_B ist umkehrbar eindeutig, da sich jedes erzeugende Element $x_A \in \varphi_X(A)$ der irreduziblen und daher zyklischen Darstellung φ in der Form $x_A = [\varepsilon_{XX}] \equiv \varphi(\gamma_{XA})$ darstellen läßt. Darüber hinaus gilt

$(\eta_B [\alpha_{XB}]^{\equiv}) \psi(\beta_{BC}) = [\alpha_{XB}]_{\mu_S} \psi(\beta_{BC}) = [\alpha_{XB}\, \beta_{BC}]_{\mu_S}$

$= \eta_C([\alpha_{XB}\, \beta_{BC}]^{\equiv}) = \eta_C([\alpha_{XB}]^{\equiv} \varphi(\beta_{BC}))$.

Damit ist $\mu_S \in E_\varphi$. Offensichtlich ist $\delta_\varphi = \bigcap_S \mu_S$.

Daraus folgt $\delta_\varphi \geq \bigcap_{\varrho \in E_\varphi} \varrho$.

Aus Hilfssatz 12 ergibt sich als Folgerung der

Satz 13. Es sei E die Menge der Rechtskongruenzen ϱ für die $\varphi : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}/\varrho$ irreduzibel ist. Dann ist

$$\mathrm{rad}\underline{K} = \bigcap_{\varrho \in E} \varrho.$$

III. Eine innere Charakterisierung von rad K

Es sei $\mu(\gamma_{AA})$ die feinste Rechtskongruenz in $\underline{K}$, die alle Paare $(\alpha_{AB}, \gamma_{AA}\alpha_{AB})$ enthält.

Hilfssatz 14. Genau dann gilt $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\gamma_{AA})$, wenn zwei ganze Zahlen m und $n \geq 0$ existieren mit

$$\gamma^m_{AA}\alpha_{AB} = \gamma^n_{AA}\, \beta_{AB}.$$

Dabei wird $\gamma^0_{AA}\alpha_{AB} = \alpha_{AB}$ für alle α_{AB} gesetzt.

Beweis: Es sei Q die folgende Relation

$Q = \{(\alpha_{AB}, \gamma_{AA}\, \alpha_{AB}), (\gamma_{AA}\alpha_{AB}, \alpha_{AB}), (\beta_{XY}, \beta_{XY})$, mit β_{XY}, $\alpha_{AB} \in \underline{K}$, $X, Y, B \in \underline{K}\}$. Q ist reflexiv und symmetrisch. Aus $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in Q$ folgt $(\alpha_{AB}\lambda_{BC}, \beta_{AB}\lambda_{BC}) \in Q$ für alle $\lambda_{BC} \in \underline{K}$, $C \in \underline{K}$. Schließen wir Q transitiv ab, so erhalten wir offensichtlich $\mu(\gamma_{AA})$. Also ist $\mu(\gamma_{AA}) = \bigcup_{k>0} Q^k$, wobei Q^k das übliche

Produkt von Relationen ist. Wir beweisen den Hilfssatz durch Induktion über k. Ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in Q$, dann ist alles klar. Sei $(\alpha_{AB}, \beta_{AB})\ Q^{k+1}$. Es gibt ein δ_{AB} mit $(\alpha_{AB}, \delta_{AB}) \in Q^k$ und $(\delta_{AB}, \beta_{AB}) \in Q$. Gilt $\gamma^m_{AA}\, \alpha_{AB} = \gamma^n_{AA}\, \delta_{AB}$, so folgt aus $\delta_{AB} = \beta_{AB}$ bzw. $\delta_{AB} = \gamma_{AA}\, \beta_{AB}$ unmittelbar $\gamma^m_{AA}\, \alpha_{AB} = \gamma^n_{AA}\, \beta_{AB}$ bzw. $\gamma^m_{AA}\, \alpha_{AB} = {}^{n+1}_{AA}\, \beta_{AB}$. Ist $\beta_{AB} = \gamma_{AA}\, \delta_{AB}$, so gilt $\gamma^{m+1}_{AA}\alpha_{AB} = \gamma^n_{AA}\beta_{AB}$. Die Bedingung des Hilfssatzes ist auch hinreichend. Denn es ist $(\alpha_{AB}, \gamma^k_{AA}\, \alpha_{AB}) \in \mu(\gamma_{AA})$ für alle $k \geq 0$. Damit folgt aus $\gamma^m_{AA}\, \alpha_{AB} = \gamma^n_{AA}\ \ {}_{AB}$ leicht $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\gamma_{AA})$.

<u>Hilfssatz 15.</u> Ist Hom)B,A) leer, so ist für beliebige α_{AB}, β_{AB} das Paar $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in$ rad $\underline{K}$.

<u>Beweis:</u> Für jedes irreduzible $\underline{\varphi}$ ist die Menge $\varphi(\mathrm{Hom}(A,B))$ höchstens einelementig, daher ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \delta_\varphi$, also aus rad $\underline{K}$.

<u>Hilfssatz 16.</u> Ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in$ rad $\underline{K}$ und Hom(B,A) nichtleer, so ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\alpha_{AB}\, \kappa_{BA})$ für alle $\kappa_{BA} \in \underline{K}$.

<u>Beweis:</u> Wir setzen $\sigma = \mu(\alpha_{AB}\, \kappa_{BA})$. Bildet die Menge Hom(A,B) nach σ nur eine Kongruenzklasse, so sind wir fertig. Zerfällt Hom(A,B) in mehrere Klassen, so ist $\varphi : \underline{K} \to \underline{K}/\sigma$ zyklisch, und $\varphi_A(B)$ enthält mehr als ein Element. Weil $(\gamma_{AX}, \alpha_{AB}\, \kappa_{BA}\, \gamma_{AX})$ $\in \mu(\alpha_{AB}\, \kappa_{BA})$ für alle γ_{AX} gilt, ist $[\varepsilon_{AA}]\sigma = [\alpha_{AB}\, \kappa_{BA}\, \varepsilon_{AA}]\sigma$ erzeugendes Element, also auch $[\alpha_{AB}]\sigma$.
Wenden wir nun den durch (20) und (21) bestimmten Homomorphismus $\bar{\varphi}$ an, der jeder Restklasse $[\gamma]_\sigma$ die Restklasse $\tau([\gamma]_\sigma) = [\gamma]_\tau$ zuordnet, so erhalten wir nach Satz 10 eine irreduzible Darstellung. Weil $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \delta_{\bar{\varphi}\varphi}$, so gilt $[\gamma]_\tau\ \bar{\varphi}\varphi(\alpha_{AB}) = [\gamma]_\tau\ \bar{\varphi}\varphi(\beta_{AB})$ für alle $[\gamma]_\tau$, insbesondere für

$[\alpha_{AB} \quad {}_{BA}]_{\sigma}$. Daher gilt

$$[\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \alpha_{AB}]\sigma = [\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \beta_{AB}]\sigma . \tag{23}$$

wegen $[\alpha_{AB}]\sigma = [\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \alpha_{AB}]\sigma$ ist $[\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \alpha_{AB}]\sigma$ erzeugendes Element für φ: $\underline{K} \longrightarrow \underline{K}/\sigma$. σ bildet daher nur $[\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \alpha_{AB}]\sigma$ auf $[\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \alpha_{AB}]\sigma$ ab. Aus (23) folgt $[\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \alpha_{AB}]\sigma = [\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}\ \beta_{AB}]\sigma$. Das Element auf der linken Seite ist $[\alpha_{AB}]\sigma$, das auf der rechten Seite ist $[\beta_{AB}]\sigma$, und es ergibt sich $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\alpha_{AB}\ \kappa_{BA})$.

<u>Hilfssatz 17.</u> Ist Hom(B,A) nicht leer und $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}) \cap \mu(\beta_{AB}\ \kappa_{BA})$ für alle $\kappa_{BA} \in \underline{K}$, so ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB})$ rad $\underline{K}$.

<u>Beweis:</u> Wir nehmen $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \notin$ rad $\underline{K}$ an. Dann gibt es eine irreduzible Darstellung φ : $\underline{K} \longrightarrow \underline{K}/\equiv$ derart, daß

$$x\,\varphi(\alpha_{AB}) \neq x\,\varphi(\beta_{AB}) \text{ für ein } x \in \underline{K}/\equiv. \tag{24}$$

Wegen Hilfssatz 9 können nicht beide Elemente aus (24) nichterzeugende Elemente sein. Es sei o.B.d.A. $x\,\varphi(\alpha_{AB})$ erzeugendes Element. Dann ist wegen Hilfssatz 5 auch x ein erzeugendes Element. Sei S ein Erzeugendensystem in dem x vorkommt. Es gibt ein γ_{BA} derart, daß $x = x\,\varphi(\alpha_{AB}\ \gamma_{BA})$. Für alle κ_{AY} ist

$$(\kappa_{AY}, \alpha_{AB}\ \gamma_{BA}\ \ {}_{AY}) \in \mu_S, \tag{25}$$

wobei μ_S nach (22) erklärt ist. Damit ist $\mu(\alpha_{AB}\ \gamma_{BA}) \subseteq \mu_S$. Da nach Voraussetzung $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\alpha_{AB}\ \gamma_{BA})$, also aus μ_S ist, haben wir einen Widerspruch zu (24).
Wir fassen die Hilfssätze zusammen zu

Satz 18. Es ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mathrm{rad}\ \underline{K}$ genau dann wenn

i) Hom(B,A) leer ist, oder

ii) Hom(B,A) nichtleer ist und $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mu(\alpha_{AB}\ \kappa_{BA}) \cap \mu(\beta_{AB}\ \kappa_{BA})$ für alle κ_{BA}.

Mit Hilfe von Hilfssatz 14 ergibt sich die

Folgerung 19. Es ist $(\alpha_{AB}, \beta_{AB}) \in \mathrm{rad}\ \underline{K}$ genau dann, wenn

i) Hom(B,A) leer ist, oder

ii) zu jedem γ_{BA} ganze Zahlen i, j, k, l ≥ 0 existieren, so daß

$$(\alpha_{AB}\ \gamma_{BA})^i \alpha_{AB} = (\alpha_{AB}\ \gamma_{BA})^j \beta_{AB} \text{ und}$$

$$(\beta_{AB}\ \gamma_{BA})^k \alpha_{AB} = (\beta_{AB}\ \gamma_{BA})^l \beta_{AB}.$$

Literatur

/1/ Hasse, M. und Michler, L., Theorie der Kategorien, Berlin 1966.

/2/ Hoehnke, H.-J., Zur Theorie der Gruppoide I, Math. Nachr. 24, 137 - 168 (1962).

/3/ Hoehnke, H.-J., Structure of semigroups, Canad. J. Math. 18, 449 - 491 (1966).

/4/ Leduc, P.-Y., Catégories semi-simples et catégories primitives, Canad. J. Math. 20, 612 - 628 (1968).

/5/ Leduc, P.-Y., Radical et primitivité des catégories, Cahiers de Top. et géom. diff. 10, 347 - 350 (1968).

/6/ Schubert, H., Kategorien, Berlin 1970.

/7/ Sehgal, S. K., Jacobson theory of ringoids, Notre Dame J. Formal Logic 4, 206 - 215 (1963).

/8/ Sehgal, S. K., Ringoids with minimum condition, Math. Z. 83, 395 - 408 (1964).

/9/ Seidel, H., Über das Radikal einer Halbgruppe, Math. Nachtr. 29, 255 - 263 (1965).

/10/ Strecker, R., Zum Begriff des Normalteilers in Kategorien, Math. Nachr. 41, 271 - 300 (1969).

eingegangen: 05. 04. 1978

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. Reinhard Strecker
Pädagogische Hochschule
"Liselotte Herrmann"
Sektion Mathematik/Physik
DDR-26 Güstrow
Goldberger Straße 12

Fritz Rühs

Über die Lösung der Potentialgleichung im Halbstreifen durch Integraltransformation

1. Zur Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik bedient man sich häufig einer Integraltransformation. Liegt ein ebenes Problem vor und ist das Integrationsgebiet ein Halbstreifen, so wendet man bei hyperbolischen und parabolischen Differentialgleichungen die Laplace-Transformation mit Erfolg an. G. Doetsch benutzt diese Transformation auch zur Lösung der ebenen Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

im Halbstreifen $0 < x < 1$, $t > 0$ (/1/, S. 378 - 383; /2/, S. 51 - 55). Da die Laplace-Transformation speziell für Anfangswertprobleme geeignet ist, werden zur eindeutigen Festlegung der Lösung $u(x,t)$ die Werte

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = u_0(x), \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u_1(x) \tag{2}$$

benötigt[1]. Ferner sollen die Werte auf den Rändern $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sein:

$$\lim_{x \downarrow 0} u(x,t) = a_0(t), \quad \lim_{x \uparrow 1} u(x,t) = a_1(t). \tag{3}$$

Nun ist für elliptische Differentialgleichungen die Laplace-Transformation sicher keine geeignete Integraltransformation, da es nach Hellwig (/3/, S. 342) im allgemeinen keine rechte Halbebene gibt, in der die Bildfunktion analytisch ist, was

---

1 Diese Werte werden zunächst auch bei jeder anderen Integraltransformation benötigt.

aber für die Rücktransformation in den Originalraum wichtig ist. Daher erscheint die Lösung des Dirichletschen Problems bei Doetsch auch ziemlich erzwungen. Seine Forderung nämlich, solche Lösungen zu suchen, die eine in der Halbebene Re $(s) > 0$ existierende Laplace-Transformierte besitzen, führt ihn auf eine gewisse Bedingung (/1/, S. 379 bzw. /2/, S. 53, (8)) zwischen den gegebenen Größen $u_0(x)$, $u_1(x)$, $a_0(t)$ und $a_1(t)$, die dann etwa $a_1(t)$ zu eliminieren und damit das Dirichletsche Randwertproblem zu lösen gestattet. Und seine weitere Forderung, daß die komplexe Umkehrformel sowie der Residuenkalkül anwendbar sei, führt bei der Rücktransformation auf einen Ausdruck, dem man nicht ohne weiteres ansieht, daß er die Lösung des Problems ist. Daher meint G. Doetsch mit Recht, es wäre nun weiter zu untersuchen, ob der genannte Ausdruck (/1/, S. 383, (6), bzw. /2/, S. 55, (10)) wirklich die gesuchte Lösung ist.

Wir werden im folgenden eine zur Lösung der Potentialgleichung geeignetere Integraltransformation verwenden, nämlich die endliche Sinus-Transformation. Wir werden ferner erkennen, daß sich die erwähnte Bedingung zwischen den Funktionen $u_0(x)$, $u_1(x)$, $a_0(t)$ und $a_1(t)$ als die vernünftige Forderung erweist, daß die Lösungsfunktion $u(x,t)$ im Unendlichen verschwinde. Und wir werden schließlich einen Ausdruck angeben, der sich von dem Ausdruck von Doetsch um ein Zusatzglied unterscheidet, und von dem wir zeigen werden, daß er die gesuchte Lösung ist, also die Differentialgleichung (1) und die gestellten Randbedingungen erfüllt.

2. Um die Gleichung (1) durch eine passende Integraltransformation zu lösen, multiplizieren wir sie zur Kernbestimmung mit einer noch festzulegenden Funktion $v(x)$ und integrieren über x von 0 bis 1 (/5/). Bezeichnen wir, wie üblich, das Skalarprodukt im $L^2(0,1)$ mit $(.,.)$, so erhalten wir durch partielle Integration

$$-\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, v(x)dx = B[u,v] - (u,v'')$$

mit

$$B[u,v] = u(l,t)v'(l) - \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)v(l) - u(0,t)v'(0) + \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)v(0),$$

wenn wir der Kürze halber einfach $u(x_0,t)$ statt $\lim\limits_{x \to x_0} u(x,t)$ usw. schreiben. Insbesondere wird mit den Bedingungen (3)

$$B[u,v] = a_1(t)v'(l) - a_0(t)v'(0),$$

wenn wir die Funktion $v(x)$ so bestimmen, daß sie Lösung des Eigenwertproblems

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0; \; v(0) = v(l) = 0 \tag{4}$$

ist. Hierdurch wird aber ein symmetrischer Differentialoperator definiert mit den diskreten Eigenwerten $\lambda_n = \mu_n^2$ und den (orthonormierten) Eigenfunktionen

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{l}, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

und es wird dann

$$B[u,v_n] = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\mu_n\left[(-1)^n a_1(t) - a_0(t)\right]. \tag{6}$$

Setzen wir

$$\tilde{u}_n(t) = (u,v_n) = \int_0^l u(x,t)v_n(x)dx,$$

so erhalten wir wegen

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v_n\right) = B[u,v_n] - (u,v_n'') = B[u,v_n] + \lambda_n \tilde{u}_n$$

nach (1) für $t > 0$ die unendlich vielen Bildgleichungen

$$\frac{d^2\tilde{u}_n(t)}{dt^2} - \lambda_n\tilde{u}_n = B[u,v_n]\,,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{7}$$

deren Lösungen wegen der Bedingungen (2) die Anfangsbedingungen

$$\tilde{u}_n(0) = (u_o,v_n),\quad \frac{d\tilde{u}_n(0)}{dt} = (u_1,v_n)$$

erfüllen müssen. Es wird

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(t) &= (u_o,v_n)\cosh\mu_n t + \frac{1}{\mu_n}(u_1,v_n)\sinh\mu_n t \\ &+ \frac{1}{\mu_n}\int_0^t B[u,v_n](\tau)\sinh\mu_n(t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

Bekanntlich bildet die Gesamtheit der Funktionen (5) eine vollständige Basis im $L^2(0,1)$. Wir können daher die Lösung $u(x,t)$ des Problems (1), (2), (3) nach diesen Funktionen entwickeln und erhalten die im Mittel konvergente Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n(x).$$

3. Wir kehren nun zu unserer ursprünglichen Aufgabe, dem Dirichletschen Problem für den Halbstreifen zurück. Offenbar wachsen nach (8) die Funktionen $u_n(t)$ und folglich auch die Lösung $u(x,t)$ für $t \to \infty$ sehr stark an, was physikalisch wenig sinnvoll erscheint. Wir verlangen daher, daß

$$u(x,t) \to 0 \text{ für } t \to \infty \text{ und jedes } x \in (0,1)$$

gelte. Offenbar gilt dann auch $u_n(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ für jedes $n = 1,\ 2,\ \ldots.$ Fordern wir von den vorgegebenen Funktionen $a_o(t)$ und $a_1(t)$, daß die Integrale

$$\int_0^\infty B[u,v_n](\tau)e^{\mu_n\tau}\,d\tau \quad \text{für } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

existieren, dann folgt aus (8)

$$e^{\mu_n t}\left[(u_o,v_n) + \frac{1}{\mu_n}(u_1,v_n) + \frac{1}{\mu_n}\int_0^t B[u,v_n](\tau)e^{-\mu_n\tau}\,d\tau\right] \longrightarrow 0$$

für $t \longrightarrow \infty$. Also muß insbesondere für jedes $n = 1, 2, \ldots$ notwendig die Bedingung

$$(u_o,v_n)+ \frac{1}{\mu_n}(u_1,v_n)+ \frac{1}{\mu_n}\int_0^\infty B[u,v_n](\tau)e^{-\mu_n\tau}\,d\tau = 0 \qquad (9)$$

oder, wenn wir (5) und (6) berücksichtigen,

$$\int_0^1 u_o(\xi)\sin\mu_n\xi\,d\xi + \frac{1}{\mu_n}\int_0^1 u_1(\xi)\sin\mu_n\xi\,d\xi - \int_0^\infty e^{-\mu_n\tau}a_o(\tau)\,d\tau$$

$$+ (-1)^n\int_0^\infty e^{-\mu_n\tau}a_1(\tau)\,d\tau = 0$$

erfüllt sein. Das ist genau die in 1. erwähnte Bedingung von Doetsch. Betrachtet man (9) als die Bestimmungsgleichung für (u_1,v_n), dann wird nach (8)

$$\tilde{u}_n(t) = e^{-\mu_n t}(u_o,v_n) - \frac{1}{\mu_n}\sinh\mu_n t\int_0^\infty B[u,v_n](\tau)e^{-\mu_n\tau}\,d\tau$$

$$+ \frac{1}{\mu_n}\int_0^t B[u,v_n](\tau)\sinh\mu_n(t-\tau)\,d\tau \qquad (10)$$

$$= e^{-\mu_n t}\left[(u_o,v_n) - \frac{1}{\mu_n}\int_0^\infty B[u,v_n](\tau)\sinh\mu_n\tau\,d\tau\right]$$

$$- \frac{1}{\mu_n} \int_t^{\infty} B\left[u,v_n\right](\tau)\sinh \mu_n(t - \tau)d\tau$$

und somit[1]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t)v_n(x)$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \sin \mu_n x \left\{ \int_0^l u_o(\xi)\sin \mu_n \xi d\xi \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \left[a_o(\tau) - (-1)^n a_1(\tau)\right] \sinh \mu_n \tau \, d\tau \right\} \tag{11}$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \mu_n x \int_t^{\infty} \left[a_o(\tau) - (-1)^n a_1(\tau)\right] \sinh \mu_n(t-\tau)d\tau.$$

4. Wir wollen nun nachweisen, daß der Ausdruck (11) tatsächlich die Lösung des Dirichletschen Problems ist. Formale Differentiation ergibt unter Berücksichtigung von (4) und (7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B\left[u,v_n\right](t)v_n(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \left[a_1(t)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mu_n v_n(x) - a_o(t)\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n v_n(x)\right].$$

Reihenentwicklung nach dem Orthonormalsystem $\left\{v_n(x)\right\}$ ergibt

$$- \frac{x}{\sqrt{2l}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} v_n(x), \quad \frac{1}{\sqrt{2l}} (l-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} v_n(x).$$

1 Siehe 5. Anhang

Setzen wir die Funktionen $v_n(x)$ periodisch auf die ganze reelle Gerade fort, dann liefert zweimalige gliedweise Differentiation die im Raum der verallgemeinerten Funktionen konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mu_n v_n(x) = -\sqrt{2l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta'(x-(2m+1)l),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n v_n(x) = -\sqrt{2l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta'(x-2ml),$$

worin $\delta(x)$ die Diracsche δ-Distribution ist. Folglich erfüllt der Ausdruck (11) für $0 < x < l$ die Differentialgleichung (1). Klar ist auch, daß für diese x-Werte der Ausdruck (11) die Bedingungen

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(0) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_o, v_n) v_n(x) = u_o(x)$$

und $u(x,t) \to 0$ für $t \to \infty$ erfüllt. Um schließlich nachzuweisen, daß der Ausdruck (11) auch die Bedingungen (3) erfüllt, lösen wir zunächst folgendes Problem:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{ für } 0 < x < l,\ 0 < t < h, \\ &w(x,0) = u_o(x),\ w(x,h) = 0, \\ &w(0,t) = a_o(t),\ w(l,t) = a_1(t) \end{aligned} \tag{12}$$

mit $h > 0$. An Stelle von (10) erhalten wir nach derselben Methode den Ausdruck

$$\tilde{w}_n(t) = \frac{\sinh \mu_n(h-t)}{\sinh \mu_n h} \left[(u_o, v_n) - \frac{1}{\mu_n} \int_0^h B[w,v_n](\tau) \sinh \mu_n \tau \, d\tau\right]$$

$$- \frac{1}{\mu_n} \int_t^h B[w,v_n](\tau) \sinh \mu_n (t-\tau) \, d\tau,$$

der die Bildgleichungen (7) und die Bedingungen $\tilde{w}_n(0)=(u_o,v_n)$, $\tilde{w}_n(h) = 0$ erfüllt und für $h \to \infty$ in den Ausdruck (10) übergeht. Wir wollen zeigen, daß der Ausdruck

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n(t)v_n(x), \tag{13}$$

der für jedes $h > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist und offenbar die geforderten Bedingungen an den Rändern $t = 0$ und $t = h$ erfüllt, auch die restlichen Randbedingungen erfüllt. Wir können und wollen nun der Einfachheit halber weiterhin $u_o(x) \equiv 0$ setzen, dann läßt sich $\tilde{w}_n(t)$ auch in der Form schreiben:

$$\tilde{w}_n(t) = -\frac{\sinh \mu_n t}{\mu_n \sinh \mu_n h} \int_0^h B[w,v_n] \sinh \mu_n(h-\tau)d\tau$$

$$+ \frac{1}{\mu_n} \int_0^t B[w,v_n](\tau) \sinh \mu_n(t-\tau)d\tau .$$

Im Raum $L^2(0,h)$ bilden die Funktionen $z_m(t) = \sqrt{2/h}\sin \varrho_m t$ mit $\varrho_m = m\pi/h$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Wir entwickeln die Funktion (13) in eine Reihe nach diesem Orthonormalsystem:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{c}_m(x)z_m(t)$$

und erhalten nach (13) als Koeffizienten

$$\tilde{c}_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{w}_n, z_m \rangle \, v_n(x),$$

wo $\langle .,. \rangle$ das Skalarprodukt im Raum $L^2(0,h)$ ist. Man berechnet

$$\langle \sinh \mu_n t,\ z_m \rangle = \sqrt{\frac{2}{h}}\,\frac{(-1)^{m+1}\,\varrho_m \sinh \mu_n h}{\varrho_m^2 + \mu_n^2}$$

$$\langle \frac{1}{\mu_n} B[w,v_n](t) * \sinh \mu_n t,\ z_m \rangle =$$

$$\sqrt{\frac{2}{h}}\,\frac{\varrho_m^2}{\mu_n(\varrho_m^2 + \mu_n^2)}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{\varrho_m}\int_0^h B[w,v_n](\tau)\sinh \mu_n(h-\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.- \frac{\mu_n}{\varrho_m^2}\int_0^h B[w,v_n](t)\sin \varrho_m t\,dt\right].$$

Damit wird

$$\langle \tilde{w}_n, z_m \rangle = -\sqrt{\frac{2}{h}}\,\frac{1}{\varrho_m^2 + \mu_n^2}\int_0^h B[w,v_n](t)\sin \varrho_m t\,dt$$

sowie

$$\tilde{c}_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n v_n(x)}{\varrho_m^2 + \mu_n^2}\int_0^h \left[a_o(t) - (-1)^n a_1(t)\right] z_m(t)\,dt$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n v_n(x)}{\varrho_m^2 + \mu_n^2}\right)\int_0^h a_o(t) z_m(t)\,dt$$

$$- \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \mu_n v_n(x)}{\varrho_m^2 + \mu_n^2}\right)\int_0^h a_1(t) z_m(t)\,dt$$

$$= \frac{\sinh \varrho_m(l-x)}{\sinh \varrho_m l}\langle a_o, z_m\rangle + \frac{\sinh \varrho_m x}{\sinh \varrho_m l}\langle a_1, z_m\rangle,$$

und somit

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sinh \varrho_m(l-x)}{\sinh \varrho_m l}\langle a_o, z_m\rangle + \frac{\sinh \varrho_m x}{\sinh \varrho_m l}\langle a_1, z_m\rangle\right] z_m(t). \tag{14}$$

Man erkennt hieran, daß in der Tat $w(0,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle a_o, z_m\rangle z_m(t) =$ $a_o(t)$ und $w(l,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle a_1, z_m\rangle z_m(t) = a_1(t)$ wird. Ausgeschrieben lautet (14)

$$w(x,t) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\sinh \varrho_m (l-x)}{\sinh \varrho_m l} \int_0^h a_o(\tau) \sin \varrho_m \tau \, d\tau + \frac{\sinh \varrho_m x}{\sinh \varrho_m l} \int_0^h a_1(\tau) \sin \varrho_m \tau \, d\tau \right] \sin \varrho_m t.$$

Vollzieht man hierin den Grenzübergang $h \longrightarrow \infty$; so erhält man die Lösung der Potentialgleichung im Halbstreifen mit den Randbedingungen $w(0,t) = a_o(t)$, $w(l,t) = a_1(t)$, $w(x,0) = 0$, $w(x,t) \longrightarrow 0$ $(t \longrightarrow \infty)$ auch in der Gestalt

$$w(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a_o(\tau) \left(\int_0^{\infty} \frac{\sinh \xi (l-x)}{\sinh \xi l} \sin \xi t \sin \xi \tau \, d\xi \right) d\tau + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a_1(\tau) \left(\int_0^{\infty} \frac{\sinh \xi x}{\sinh \xi l} \sin \xi t \sin \xi \tau \, d\xi \right) d\tau ,$$

ein Ausdruck, den Miles (/4/, S. 97) für $a_1(t) = 0$ mit der Fouriertransformation gewinnt.

5. Anhang.

Unsere Lösung (11) unterscheidet sich von der von G. Doetsch angegebenen um den zweiten Summanden. Die Laplace-Transformierte von (11) lautet, wenn man die Bildfunktionen mit großen Buchstaben bezeichnet,

$$U(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_n(s) v_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(u_o,v_n)}{s+\mu_n} - \frac{B[U,v_n](\mu_n)}{s^2-\mu_n^2} + \frac{B[U,v_n](s)}{s^2-\mu_n^2} \right] v_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B[U,v_n](s)v_n(x)}{s^2-\mu_n^2} + U_1(x,s)$$

$$= A_1(s)\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n v_n(x)}{s^2-\mu_n^2}$$

$$- A_o(s)\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n v_n(x)}{s^2-\mu_n^2} + U_1(x,s)$$

$$= \frac{A_1(s)\sin sx + A_o(s)\sin s(l-x)}{\sin sl} + U_1(x,s).$$

Mit (8) wird

$$U_1(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(u_o,v_n)}{s+\mu_n} - \frac{B[U,v_n](\mu_n)}{s^2-\mu_n^2} \right] v_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(u_o,v_n)}{s+\mu_n} + \frac{\mu_n(u_o,v_n)+(u_1,v_n)}{s^2-\mu_n^2} \right] v_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s(u_o,v_n)+(u_1,v_n)}{s^2-\mu_n^2} \right] v_n(x)$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi)v_n(x)}{s^2-\mu_n^2} \right) \left[su_o(\xi) + u_1(\xi) \right] d\xi .$$

$U_1(x,s)$ ist somit die Lösung des inhomogenen Problems $U_1''(x) + s^2U_1(x) = su_o(x) + u_1(x)$, $U_1(0) = U_1(l) = 0$. Die

Laplace-Transformierte U(x,s) unserer Lösung (11) stimmt somit mit der Bildfunktion /2/, S. 52, (6) überein. Dies zeigt, daß man in unserem Fall nicht ohne weiteres den Residuenkalkül anwenden kann, weil dabei ein wichtiges Glied verloren geht.

Literatur

/1/ Doetsch, G. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.

/2/ Doetsch, G. Handbuch der Laplace-Transformation, Band III Basel 1956.

/3/ Hellwig, G. Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern, Math. Zeitschr. 58 (1953), S. 337 - 357.

/4/ Miles, J. W. Integral Transforms. In F. Beckenbach, Modern Mathematics for the Engineer, 2nd series. New York-Toronto-London 1961.

/5/ Rühs, F. Zur Theorie der Integraltransformationen. Beiträge zur Analysis 4 (1972), S. 123 - 128.

eingegangen: 02. 03. 1978

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. habil. Fritz Rühs
Bergakademie Freiberg
Sektion Mathematik
DDR-92 Freiberg
Akademiestraße 6

Günter Riedewald

Attribute grammars

Abstract

The aim of this paper is to give a survey about some kinds of attribute grammars. For deficiency of space we will give only informal descriptions of the grammars, first of all important distinctions and applications.

Introduction

An old problem of the compiler construction is the connection between syntax and semantic of programming languages. Often it is done after recognizing a syntactical unit by call of semantic routines. Regarding to the notation, this means the association of semantic actions with syntactic rules.
As a kind of attributed descriptions of programming languages Irons'method /I 61/ can be considered.
But the proper development of attribute grammars began only with the introduction of this type of grammars by D. E. Knuth /Kn 68/. In a certain sense, it is possible to consider the two-levels van Wijngaarden grammars as attribute grammars. They gave a rise to the development of the affix grammars /Ko 71/ and the grammars of syntactical functions /Rie 71/. A further important sort of the attribute grammars are the attributed transformational grammars /LRS 74/.
All named kinds of attribute grammars realize the connection between syntax and semantic by the association of attributes (parameters, affixes etc.) with the syntactic units of a context-free grammar. In this sense we will consider the description of programming languages by Irons as an attribute grammar each of its syntactic units has only one attribute. The value of this attribute is the semantic meaning of that unit.

Distinctions between the attribute grammars arise from the motivation, the notation and from the evaluation of the attributes.

In the following sections we will deal especially with the above named attribute grammars.
In the appendix, an example will give an optic impression of those grammars.

Irons' method /I 61/

For the definition of programming languages Irons used a meta-language which is an extension of the BNF. The meta-language is a system of translation rules or specifications which have the following form:

<components> =:: <subject> ⇒ {<definition>} .

The part of the specification on the left side of ⇒ is a syntactic rule in reducing order (the sequence of syntactic units <components> can be reduced to the nonterminal element <subject>).

The <definition> associates a semantic meaning with the <subject> . This semantic meaning is computed from the semantic meanings of the components by certain functions. In the <definition> the functions are given by their designator .

The meta-language enables a description of a language A by the elements of a second language B. Whereas the part of a specification on the left of ⇒ defines the syntactic structure of the language A, the <definition> provides the semantic meaning of a syntactic structure in the language A in terms of syntactic structures of the language B.

For such descriptions of programming languages it is possible to specify a translator which is completely independent of either language. Therefore, the described method allows an easy extension of the compiler or modifications in the source language.

The method was used at Princeton University on a CD 1604 to translate ALGOL 60 to an assembly language.

Attribute grammars /Kn 68/

Knuth introduced the attribute grammars, first of all, as a tool for describing programming languages.

Attribute grammars are context-free grammars each nonterminal element of which has a certain number (it may be zero) of attributes. The determination of the attribute values is realized by semantic rules (attribute functions).
An attribute can be of the type inherited or synthesized. The values of the inherited attributes are determined top-down, whereas the values of sythesized attributes bottom-up.
The attribute functions can depend on each node of a syntactic tree of a word generated by the underlying context-free grammar of the attribute grammar. This is possible, because at each node of the syntactic tree the whole tree (in a suited notation) can be at our disposition by suited attributes /Kn 68/.
An attribute grammar is well-defined, if it is possible to compute the values of all attributes of the words generated by the underlying context-free grammar.
As a consequence, a well-defined grammar generates a context-free language, if we do not include the semantic meaning into the definition of a language.
An attribute grammar is well-defined, if it does not contain cycles, that is, no word exists with such a syntactic structure and such an attribute at a node which depends on itself by an attribute function. For the indication of cycles some algorithms were developed. But in /JOR 75/ it is proved, that each such algorithm must be exponential. Therefore, in practice the application of such an algorithm is avoided. Instead of, restrictions for the grammar are given securing, that the grammar does not contain cycles (see for example /GW 77/).
For the application of attribute grammars in a compiler-compiler the order of computing the attribute values in the generated compiler is of great importance. It is the aim to construct an algorithm for computing the attribute values already during the generation of the compiler. Two strategies are used:

- The attribute values are computed by so many passes through the syntactic tree as are needed. It is possible to determine the number of passes from the given attribute grammar /Bo 76/.

- From the dependencies of the attributes an ordering of visiting the nodes of the syntactic tree is determined /Ka 76/. The number of visits of a node depends only on the dependencies of the attributes.

One pass evaluation of semantic attributes and the application of the stack model for it requires restrictions to the grammar (/GW 77/, /Bo 76/, /L 75/).

The implementation of the attribute functions in a compiler depends on the way of the definition of those functions. The definitions of these functions can be done in any suited way /Kn 71/.
Some compiler-compilers were developed based on the definition of this type of attribute grammars. for example the systems DELTA /L 77/, MUG 1 /GRW 76/, COPS /B 75/.
It was shown, that it is possible to use optimizing techniques for the generated compilers /L 77/, /GRW 77/.

Affix grammars /Ko 71/

The affix grammars were introduced by C. H. A. Koster. Although they descend from the two-level van Wijngaarden grammars, they are also related to the attribute grammars. Also in this case semantic is connected with a context-free grammar. For this purpose the syntactic rules are extended by affixes which are associated with the syntactic units, and by primitive predicates with affixes. These primitive predicates are defined by total recursive functions and supply dependencies between the affixes in one rule.
The domains of the affixes are given, analogously to the van Wijngaarden grammars, by a meta-grammar (affix rules). An affix may be an terminal or a nonterminal element in such a grammar. With the affix positions are connected the inherited and deri-

ved types which correspond to the inherited and synthesized types of the attribute grammars.
Conditions of well-formedness which are not decidable secure, that it is possible to interpret the rules of an affix grammar as boolean procedures for top-down syntactic analysis with a single left-right handling of the affixes of a rule. Whereas the inherited affixes of the left side of a rule are regarded as input parameters the derived affixes of the left side are considered as output parameters of those procedures.
Affix grammars are equivalent to Chomsky type 0 grammars /Ko 71/. Because of interpreting the rules of an affix grammar as algorithms for top-down syntactic analysis (usually the method of recursive descendant is used), rules with empty productions and left recursion are not allowed.
From the affix grammars the compiler description language CDL /Ko 74/ was developed.
Crowe /C 72/ developed a method for a class of affix grammars which enable the syntactic analysis bottom-up.

Watt /W 74/ introduced the extended affix grammars. They differ from the affix grammars by the following details:

- In the affix positions affix strings are permitted the components of which are itemizeable (analogously to the two-level van Wijngaarden grammars).

- The same nonterminal affix may occur in more than one position on the left side of a rule. In inherited positions they are interpreted as transfer of productions of this nonterminal affix. In derived positions they are interpreted as an examination of the equality of productions (this corresponds to the uniform replacement rule of the van Wijngaarden grammars).

Extended affix grammars are used for the automatic generation of parsers. For this purpose the extended affix grammar is transformed into a so called head grammar which is a context-free grammar extended by predicates and functions. This head grammar is the startingpoint for a modified parser generator for context-free grammars. The base for the transformation of extended affix grammars to head grammars are, that the conditions of well-formedness are satisfied and a stack model for handling the attributes /FHR 76/.

Attributed transformational grammars /LRS 74/

Attributed transformational grammars differ from Knuth's attribute grammars only by the extension of the syntactic rules by action symbols. It is possible to associate inherited attributes with the action symbols. They can be handled in the same way as other inherited attributes. Such a grammar generates words containing terminal elements and action symbols. A word is decorated by the values of the attributes of the terminal elements and of the action symbols.
We can divide each part into two parts: the attributed input sequence which contains only the attributed terminal elements from the word, and the attributed activity sequence which contains the attributed action symbols. Then, an attributed translation is defined as a pair (attributed input sequence, attributed activity sequence).

The problems of well-definedness and of the computation of the attribute values are similar to those problems in the case of the Knuth's attribute grammars. We can guarantee the well-definedness by certain restrictions. An example are the L-grammars /LRS 74/, /LRS 76/.
Attribute transformational grammars are used in compiler-compilers. Such a compiler-compiler is developed, for instance, at the Technical University /ČVUT/ in Prague.

Grammars of syntactical functions /Rie 71/, /Rie 72/

Grammars of syntactical functions were introduced in 1970/71 in connection with the syntactic analysis of ALGOL 68 programs. Modifications were accomplished in the following years /Rie 76/. /Rie 771/, /Rie 772/.

The origin of the grammars of syntactical functions /GSF/ arises from this consideration:

The ALGOL 68 grammar consists of hyperrules the elements of which are hypernotions. Certain substitutions of the metanotions, containing in the hypernotions, by terminal productions of the metagrammar provide notions. Thereby, we obtain production rules from the hyperrules. By different substitutions of the same metanotion, from one hypernotion we can get an infinite number of notions. All these notions can be considered as function values of a syntactical function. If we denote such a function by a name with a parameter list included in parentheses, a function value is obtainable by substitutions of the parameters by certain values.

A result of the consideration is the GSF. It has the following form:

It is a context-free grammar the syntactic elements of which in the rules can be complemented by parameter lists included in parentheses. The relationships between the parameters are determined by auxiliary syntactical functions and semantic functions. The names of these functions with corresponding parameter lists included in parentheses occur immediately in the rules.

Parameters may be variables or constants. Variables are local in a rule. Different occurences of the same variable in a rule represent the same value.

Auxiliary syntactical functions and semantic functions are interpreted in two ways: In the definition of the grammar they are used as predicates and in practical applications of the grammar they are used as functions. That is possible, because we have

> f(X1, ..., XN) has the value true iff a function $\bar{f}$ exists such, that X1 = $\bar{f}$(X2, ..., XN).

For each syntactical element of a GSF one parameter can be marked the values of which are interpreted as the semantic values of the element (better: of the subtrees the origin of which is the syntactic element). The semantic value of a word is given by the marked parameter of the start symbol of the grammar.

If we substitute formulae instead of computing parameter values for the nodes of a syntactic tree of a given word, we obtain a formula in the sense of the functional calculus /Rie 771/. Then, the semantic value of a word is obtainable by interpretation of this formula.

Before computing the semantic value of a word from the corresponding formula we can optimize the formula. For example, it is possible to eliminate from the formula those parts which do not contribute to the semantic value of the word.

A formula can split up into two parts:

- into the condition which contains only auxiliary syntactical functions
- into the formula for the determination of the semantic value which contains only semantic functions.

By special choice of the parameters and the semantic functions the second part is nothing else than the linear representation (introduced by Kantorovich) of the syntactical tree of the given word /Rie 771/.

GSF are equivalent to the Chomsky type 0 grammars.

A compiler generated on the base of a GSF by a compiler-compiler has a clear logic structure:

After the lexical analysis the syntactic analysis follows which is done correspondingly to the underlying context-free grammar of the GSF. As a method for the syntactic analysis any suited algorithm for context-free grammars can be choiced. The result is a syntactic tree.

The semantic analysis is carried out correspondingly to the condition. The condition can be constructed explicitly and then its inspection can be realized later. Also it is possible to avoid this construction and immediately inspect the condition by computing the parameter values of the nodes of the syntactic tree. The code generation is realized by the second part of the above named formula. Also this part can be constructed first explicitly.

A simple model of such a compiler from the language ASPLE /CU 73/ into FORTRAN 63 is described in /Rie 76/.
Let us notice, that a compiler which is constructing the formula for determination of the semantic value explicitly does not depend neither on the source language nor on the object language. The dependence begins only at the moment of the interpretation of the formula.

The determination of the parameter values (resp. the explicit construction of the formula) is very much like the computation of the attribute values in the case of other attribute grammars. But here we use another method for solution of this problem. For the computation of the parameter values an algorithm is applicated which passes through the nodes of the syntactic tree of a word only once and in a certain order. If it is not possible to compute the values of all parameters of a node, the algorithm uses references for marking the way for later transfer of values. Functions which has input parameters with unknown values are written down in a waiting list. Such a function is called only, if the values of all input parameters are known. The algorithm detects cycles occuring in the computation of parameter values.
Because the algorithm can be very space consuming, depending on the GSF, a kind of garbage collection is used. This garbage collection, however, is very simple, since if the value of a parameter has been used for further computation, the memory space allocated to it can be freed.

For saving time, the computation of parameter values works with addresses rather than values.

Another chance to save time lies in a good balance between a language definition, the method of syntactic analysis and the order of passing through the nodes of a syntactic tree.

	Iron's method	Knuth's attr. grammars	Attr. transform. grammars	Affix grammars	Grammars of synt. functions
Structure of rules	context-free synt. rules in reducing order with associated expressions for the computation of the semantic meaning of the element of the right side from the semantic meanings of the elements of the left side of the rule	context-free synt. rules with assoc. semantic rules for the computation of the attribute values	in addition to the previous type synt. rules may contain action symbols and semantic rules for the computation of the values of the inherited attributes of the action symbols may exist	rules of a cf grammar the elements of which may be extended by affixes; the rules may be extended by primitive predicates which are defined by total recursive functions	rules of a cf grammar the elements of which may be extended by parameter lists; the rules may be extended by auxiliary syntactical functions and semantic functions which are interpreted
Types of attributes	no types	inherited and synthesized		inherited and derived	no types
Domains of attributes	given sets			meta-grammar	given sets
Well-definedness	not defined	secures the cycle-free computation of attribute values		secures the interpretation of the rules as boolean procedures for top-down syntactic analysis and left-right computation of the parameters	not defined
Computation of the attribute values	bottom-up	in one or more passes depending on certain restrictions			one pass with detection of cycles using strings of references
Syntactic analysis		any suited method			any suited method

Comparison of different types of attribute grammars

In the table to the left some properties of the above named attribute grammars are listed once more. Also in this case it happens only in an informal way.

Appendix

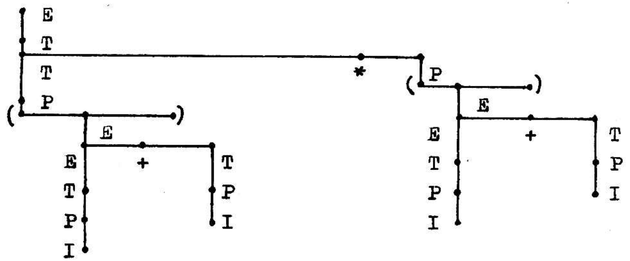
For illustration of the above named attribute grammars we give the definition of arithmetic expressions consisting of the identifiers a, b, c, the operators +, *, and of parentheses, by means of attribute grammars. It is supposed, that the grammars produce object code for the computation of the expressions. A vector T stores the values of the identifiers and the results. For deficiency of space we do not give the complete definitions.

Attributed transformational grammars LRS 76

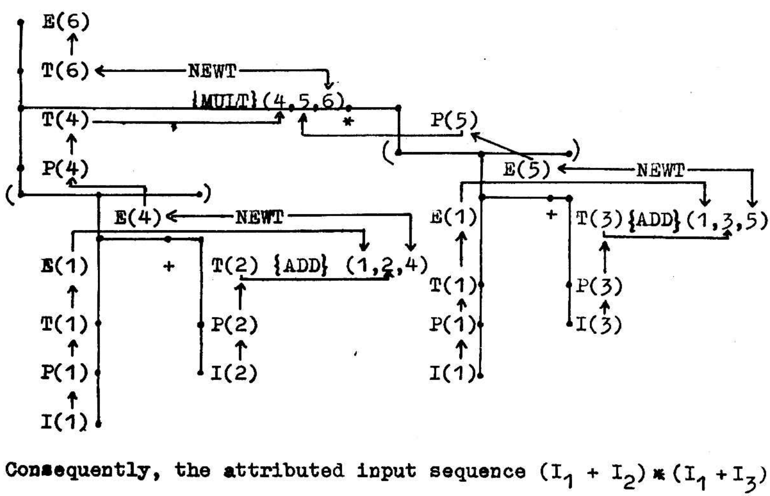
Syntactic rules	Semantic rules
$\langle E\rangle_x \rightarrow \langle E\rangle_q + \langle T\rangle_r \{ADD\}_{y,z,p}$	$\langle x,p\rangle \leftarrow$ NEWT, $y \leftarrow q$, [illegible] $\leftarrow r$
$\langle E\rangle_x \rightarrow \langle T\rangle_p$	$x \leftarrow p$
$\langle T\rangle_x \rightarrow \langle T\rangle_q * \langle P\rangle_r \{MULT\}_{y,z,p}$	$\langle x,p\rangle \leftarrow$ NEWT, $y \leftarrow$ [illegible], $z \leftarrow r$
$\langle T\rangle_x \rightarrow \langle P\rangle_p$	$x \leftarrow p$
$\langle P\rangle_x \rightarrow (\langle E\rangle_p)$	$x \leftarrow p$
$\langle P\rangle_x \rightarrow I_p$	$x \leftarrow p$

I represents an identifier. Different identifiers differ by different values of the attribute p.
The attributes of the syntactic elements and of the action symbols are written down as indices of the corresponding elements and symbols.
ADD and MULT are action symbols.

The attributes x and q have the synthesized type, whereas y, z and p are inherited.
NEWT delivers the first free component of the vector T.
The expression (a + b) * (a + c) has the following syntactic tree corresponding to the underlying context-free grammar:



Then, the (with attribute values) decorated syntactic tree is (arrows mark the way of attribute value transfer):



Consequently, the attributed input sequence $(I_1 + I_2) * (I_1 + I_3)$ (here I_1, I_2, I_3 represent the identifiers a, b, c correspondingly) has the assigned attributed activity sequence $ADD_{1,2,4}$ $ADD_{1,3,5}$ $MULT_{4,5,6}$ which can be interpreted as follows:

$ADD_{1,2,4}$: The values of the first component (value of a) and the second component (value of b) of T are added. The sum is assigned to the fourth component of T.

$ADD_{1,3,5}$: The values of the first and the third components (values of a and c) of T are added. The sum is assigned to the fifth component of T.

$MULT_{4,5,6}$: The values of the sixth component of T results from the product of the fourth and fifth components.

Grammar of syntactical function

E(X) : E(Q), plus symbol, T(R), SUM(X,Q,R).
E(X) : T(X).
T(X) : T(Q), times symbol, P(R), PROD(X,Q,R).
T(X) : P(X).
P(X) : open symbol, E(X), close symbol.
P(X) : tag symbol (X).

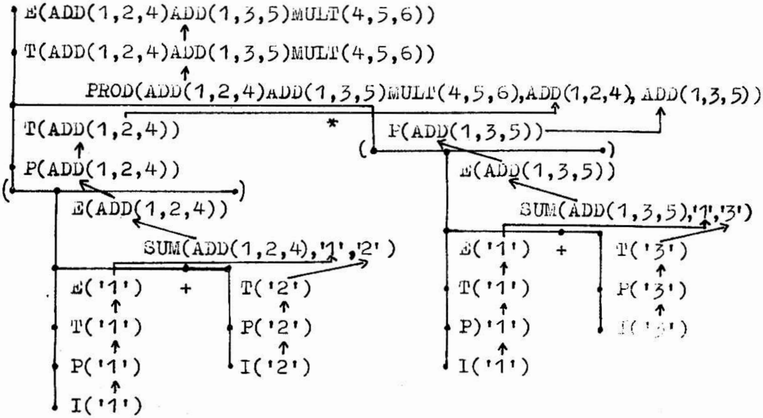
The values of the parameters of the elements E, T and P are the semantic values of constructions which are productions of E, T and P correspondingly. The semantic value (object code) of an arithmetic expression is the value of the parameter of E. The semantic functions SUM and PROD are used to generate object code. That means, in the definition of the grammar they operate as predicates and examine, whether the value of the first parameter is the object code of the sum resp. of the product the object codes of the operands of which form the values of the second and the third parameter. In practical uses of the grammar, $\overline{\text{SUM}}$ and $\overline{\text{PROD}}$ are used to generate object code of a sum resp. a product. They are defined as follows:

SUM(X,Y,Z) has the value true iff X = $\overline{\text{SUM}}$(Y,Z).
PROD(X,Y,Z) has the value true iff X = $\overline{\text{PROD}}$(Y,Z).

tag symbol represents identifiers. Different identifiers differ by different parameter values.
(a + b) * (a + c) has the above named symtactic tree, if the representations of plus symbol, times symbol, open symbol,

close symbol and tag symbol are + * ( ) I in this order.

Suppose the object code a, b and c is '1', '2', '3' correspondingly, the decorated syntactic tree is:



Therefore, the semantic value of (a + b) * (a + c) is
$ADD_{1,2,4}\ ADD_{1,3,5}\ MULT_{4,5,6}$.

If we substitute formulae rather than compute the parameter values, we get the following formula for the computation of the semantic value:

$\overline{PROD}(\overline{SUM}('1','2'),\ \overline{SUM}('1','3'))$.

Affix grammars

For the definition of arithmetic expressions by an affix grammar we must take into consideration that the underlying context-free grammar may not contain left recursion. This fact influences the order of computation of arithmetic expressions.

```
  arithmetic expression + CODEN : expression + CODEN.
expression + CODE : tertiary + CODE 1, plus symbol, expression
                    + CODE 2, sum + CODE + CODE 1 + CODE 2.
tertiary + CODE : primary + CODE 1, times symbol, tertiary
                    + CODE 2, prod + CODE + CODE 1+ CODE 2.
expression + CODEN : tertiary + CODEN.
tertiary + CODEN : primary + CODEN.
primary + CODEN : open symbol, expression + CODEN, close symbol.
primary + NUM : tag symbol.
```

Nonterminal elements of the underlying grammar are: arithmetic expression, expression, tertiary, primary.
Terminal elements are: plus symbol, times symbol, open symbol, close symbol with their representations + * ( ). tag symbol stands for any identifier.
prod and sum are primitive predicates the effect of which is defined by total recursive functions.
CODE, CODEN, NUM, CODE 1, CODE 2 are affixes.
All affix positions excluded the second and the third of sum and prod are derived. The second and the third positions of sum and prod are inherited.
sum and prod examines, whether the terminal production of the first affix is, in a certain way, composed from the terminal productions of the second and the third affix. The terminal production of the first affix can be interpreted as a metaform of the object code of a sum resp. product, whereas the terminal productions of the second and the third affix can be interpreted as metaforms of the object code of the operands.

The following affix rules generate the terminal productions:

```
CODEN :: CODE; NUM.
CODE :: CODEP; CODE CODEP.
CODEP :: add NUM1 NUM2 NUM3; mult NUM1 NUM2 NUM3.
NUM1 :: NUM.  NUM2 :: NUM.  NUM3 :: NUM.  NUM :: O; n NUM.
CODE 1 :: CODE; NUM.    CODE 2 :: CODE; NUM.
```

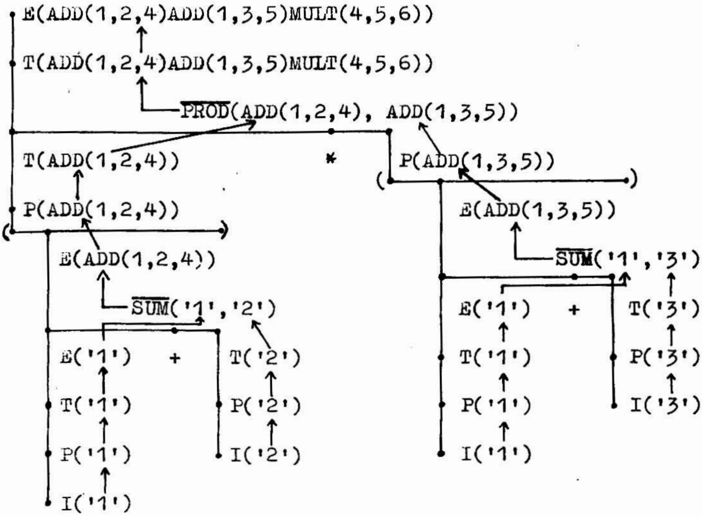
From these rules we obtain: (a + b) * (a + c) is an arithmetic expression and the value of its associated affix is

add nO nnO nnnnO add nO nnnO nnnnnO mult nnnnO nnnnnO nnnnnnO
which is the metaform of $ADD_{1,2,4}$ $ADD_{1,3,5}$ $MULT_{4,5,6}$.

Knuth's attribute grammars

Syntactic rules	Semantic rules
$E_1 \longrightarrow E_2 + T$	$X(E_1) = \overline{SUM}\ (X(E_2),\ X(T))$
$E \longrightarrow T$	$X(E) = X(T)$
$T_1 \longrightarrow T_2 * P$	$X(T_1) = \overline{PROD}\ (X(T_2),\ X(P))$
$T \longrightarrow P$	$X(T) = X(P)$
$P \longrightarrow (E)$	$X(P) = X(E)$
$P \longrightarrow I$	$X(P)$ = '1', if the identifier is a '2', if the identifier is b '3', if the identifier is c

The indices 1 and 2 denote different occurences of the same syntactic element in one rule.
With each nonterminal element the synthesized attribut (bottom-up transfer of attribute values) X is associated. $X(NT)$ denotes the attribute X of the nonterminal element NT.
$\overline{SUM}$ generates the object code of a sum from the object codes of the operands. $\overline{PROD}$ generates the object code of a product from the object codes of the operands.
The decorated syntactic tree of the expression (a+b) * (a+c) is:



The example shows, that attribute grammars of this type enables to construct a formula for determination of the semantic meaning. For this purpose, the right sides of all semantic rules must be denoted as formulae.

The formula for determination of the semantic meaning of (a+b) * (a+c) is $\overline{\text{PROD}}(\overline{\text{SUM}}('1','2'),\ \overline{\text{SUM}}('1','3'))$ which is the same as in the case of GSF.

Iron's method

$$E + T ::= E \Rightarrow \{\mathcal{F}_2\{[P_1;\ P_2]\}\}$$

$$T ::= E \Rightarrow \{P_1\}$$

$$T * P ::= T \Rightarrow \{\mathcal{F}_1\{[P_1;\ P_2]\}\}$$

$$P ::= T \Rightarrow \{P_1\}$$

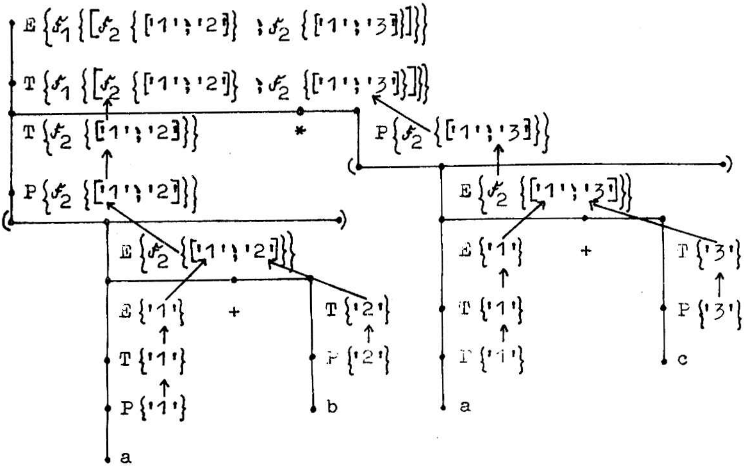
$$(E) ::= P \Rightarrow \{P_2\}$$

$$a ::= P \Rightarrow \{'1'\}$$

$$b ::= P \Rightarrow \{'2'\}$$

$$c ::= P \Rightarrow \{'3'\}$$

P_i represents the semantic meaning of the i-th component. $\mathcal{F}_1$ generates the object code of a product from the object codes of the operands. $\mathcal{F}_2$ generates the object code of a sum from the object codes of the operands.
The semantic meaning of the expression (a + b) * (a + c) is $\mathcal{F}_1\{[\mathcal{F}_2\{['1';\ '2']\}\ ;\ \mathcal{F}_2\{['1';\ '3']\}]\}$. The corresponding decorated syntax tree is (arrows mark the way of processing the semantic meanings):



Let us now substitute $\mathcal{F}_1$ by $\overline{\text{PROD}}$, $\mathcal{F}_2$ by $\overline{\text{SUM}}$, ; by , ,{[ ]} by ( ) in the semantic meaning. The result is again $\overline{\text{PROD}}$ ($\overline{\text{SUM}}$('1','2'), $\overline{\text{SUM}}$('1','3')).

<u>References</u>

/Be 75/ Berlin, H.: Realisierung der statischen Semantik von Programmiersprachen, die durch eine Grammatik syntaktischer Funktionen beschrieben werden. Diplomarbeit, Universität Rostock, Sekt. Mathematik, Rostock, 1975

/Bo 76/ Bochmann, G. V.: Semantic evaluation from left to right. CACM, Vol. 19, No. 2, Februar 1976

/B 75/ Borowiec, J.: Pragmatics in a compiler producing system. Warsaw, July 1975

/CU 73/ Cleaveland, J. C., Uzgalis, R. C.: What every programmer should know about grammar. Modeling and Measurement Note No. 12, Comp. Sc. Dept., School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles, March 1973

/C 72/ Crowe, D.: Generating parsers for affix grammars. CACM, Vol. 15, No. 8, August 1972

/FHP 76/ Franzen, H., Hoffmann, B., Petersen, I.-R.: Ein Parser-Generator für Erweiterte Affix-Grammatiken. Bericht Nr. 76 - 24, TU Berlin (West), Fachbereich 20 - Kybernetik, Berlin (West), Oktober 1976

/GRW 76/ Ganzinger, H., Ripken, K., Wilhelm, R.: MUG 1 - an incremental compiler-compiler. Proceedings of ACM '76 Annual Conference, Oct. 1976

/GRW 77/ Ganzinger, H., Ripken, K., Wilhelm, R.: Automatic Generation of Optimizing Multipass Compilers. Information Processing 77, B. Gilchrist (ed.), North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977

/GW 77/ Giegerich, R., Wilhelm, R.: Implementierbarkeit attributierter Grammatiken. 7. Jahrestagung der GI, Nürnberg, 1977

/I 61/ Irons, E. T.: A syntax directed compiler for ALGOL60. CACM, Vol. 4, No. 1, Jan. 1961

/JOR 75/ Jazayeri, M., Ogden, W. T., Rounds, W. C.: The intrinsically exponential complexity of the circularity problem for attribute grammars.

CACM, Vol. 18, No. 12, Dec. 1975

/Ka 76/ Kastens, U.: Ein Übersetzer-erzeugendes System auf der Basis attributierter Grammatiken. Dissertation, TH Karlsruhe, Karlsruhe, Juni 1976

/Kn 68/ Knuth, D. E.: Semantics of context-free languages. Math. Systems Theory 2, 1968

/Kn 71/ Knuth, D. E.: Examples of formal semantics Symposium on Semantics of Algorithmic Languages, E. Engeler (ed.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, Lecture Notes in Mathematics 188

/Ko 71/ Koster, C. H. A.: Affix grammars. ALGOL 68 Implementation, J. E. L. Peck (ed.), North-Holland Publ. Co., Amsterdam - London, 1971

/Ko 74/ Koster, C. H. A.: Using the CDL-compiler-compiler. Compiler Construction: An Advanced Course, F. L. Bauer and J. Eickel (eds.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974, Lecture Notes in Computer Science

/LRS 74/ Lewis, P. M., Rosenkrantz, D. J., Stearns, R. E.: Attributed translations. Journal of Computer and System Science, Vol. 9, No. 4, Dec. 1974

/LRS 76/ Lewis, P. M., Rosenkrantz, D. J., Stearns, R. E.: Compiler disign theory. The systems programming series, Addison-Wesly Publ. Co., 1976, Reading, Mass.

/L 75/ Lorho, B.: Algorithms for checking consistency of attribute grammars. Symposium I.R.I.A., Proving and improving programs, Arc et-Senans, 1975

/L 77/ Lorho, B.: Semantic attributes processing in the system DELTA Methods of algorithmic language implementation, A. Ershov and C.H.A. Koster (eds.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977, Lecture Notes in Computer Science 47

/Rie 71/ Riedewald, G.: Syntaktische Analyse von ALGOL 68 Programmen TEKMO - Seminar Definition und Realisierung von Spezialsprachen, Dresden, Okt. 1971, Schriftenreihe des Weiterbildungszentrums für MKR, Heft 6/74

/Rie 72/ Riedewald, G.: Syntaktische Analyse von ALGOL 68-Programmen. Dissertation A, Universität Rostock, Sektion Mathematik, Rostock 1972

/Rie 76/ Riedewald, G.: Compilermodell auf der Grundlage einer Grammatik syntaktischer Funktionen.
Preprint, W.-Pieck-Universität Rostock, Sektion Mathematik, Rostock, 1976

/Rie 771/ Riedewald, G.: Grammars of syntactical functions. Lecture, Oct. 1977, Warsaw

/Rie 772/ Riedewald, G.: Algorithmus zur Steuerung der Bearbeitung von Daten mit Baumstruktur.
Forschungsbericht FG-PS 1977/04, W.-Pieck-Universität Rostock, Sektion Mathematik, Rostock 1977

/W 74/ Watt, D. A.: The parsing problem for affix grammars Acta informatica 8, 1 (1977)

eingegangen: 23. 05. 1978

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Günter Riedewald
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Rechenzentrum

DDR-25 Rostock

Albert-Einstein-Straße 21

Anmerkungen

A n m e r k u n g e n