Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 13

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT
ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 13

1980

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Redaktion: Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-
Universität Rostock, 25 Rostock, Vogelsang 13/14
Fernruf 369 577

Verantwortlicher Redakteur: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage
Fachredakteur : Doz. Dr. sc. nat. Gerhard Maeß,
Sektion Mathematik

Herausgegeben von der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock unter
Genehmigungs-Nr. C 69/80 ODR/WII/Cd/1

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003812

Inhalt

Autorreferate von Dissertationen

Rostock. Math. Kolloq. 13, 5 - 18 (1980)

Dietlinde Lau

Kongruenzen auf Postschen Algebren von Funktionen über einer Familie endlicher Mengen

Die in /6/ untersuchte Algebra $\mathcal{P}_A$ läßt sich in natürlicher Weise zu einer Algebra $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ verallgemeinern, die aus Funktionen der Gestalt

$$f: K_{i_1} \times K_{i_2} \times \ldots \times K_{i_n} \longrightarrow K_j \qquad (1)$$

besteht, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_n$ und j aus $\{1,2,\ldots,t\}$ sind und $K_1, K_2, \ldots, K_t$ gewisse endliche Mengen mit mindestens zwei Elementen bezeichnen. Einige Beispiele solcher Verallgemeinerungen wurden erstmalig von V. B. Kudrjavcev, G. Burosch und G. N. Blochina in den Arbeiten /1/ - /4/ untersucht. Allgemeine Eigenschaften von Algebren, deren Elemente Funktionen des Typs (1) sind, wurden von V. B. Kudrjavcev in /5/ angegeben. Eine Reihe von Resultaten über eine verallgemeinerte Boolesche Algebra $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ aus Funktionen der Form (1), wo die Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_t$ paarweise disjunkt sind, wurden von R. Pöschel erzielt (z. B. in /7/ und /8/).
Vorrangig befaßte man sich in den oben zitierten Arbeiten mit Vollständigkeitskriterien. Wir werden im folgenden nach Einführung einiger Begriffe und Bezeichnungen für Teilalgebren von $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$, die sämtliche Projektionen und eine gewisse Menge $\mathfrak{U}_{w_1,\ldots,w_t}$ enthalten, sämtliche Kongruenzen bestimmen. Es handelt sich hierbei um eine Übertragung der in /6/ vorliegenden Sätze über Kongruenzen von Teilalgebren von $\mathcal{P}_A$ auf Teilalgebren von $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$.

1. Einige Grundbegriffe und Bezeichnungen

Seien $K_1, K_2, \ldots, K_t$ ($t \geq 2$) gewisse endliche Mengen, die alle mindestens zwei Elemente enthalten und paarweise nicht ineinander enthalten sind. Mit $f^{n_1,n_2,\ldots,n_t;i}$ bezeichnen wir Funktionen der Gestalt

$$K_1^{n_1} \times K_2^{n_2} \times \ldots \times K_t^{n_t} \longrightarrow K_i \tag{2}$$

($n_1, n_2, \ldots, n_t \geq 1$; $i \in \{1,2,\ldots,t\}$). Wenn die Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_t$ nicht paarweise disjunkt sind, wollen wir vereinbaren, daß i der kleinste Index mit der Eigenschaft (2) ist.

$(n_1, n_2, \ldots, n_t; i)$ wird Information der Funktion $f^{n_1,n_2,\ldots,n_t;i}$ genannt. Ist aus dem Zusammenhang die Information von $f^{n_1,\ldots,n_t;i}$ ersichtlich, so schreiben wir nur f. Weiter sei $af^{n_1,\ldots,n_t;i} = (n_1,\ldots,n_t)$ und $a_i f = n_i$. Die Menge aller Funktionen der Art (2) bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t;K_i}$ oder kurz mit $\mathcal{P}_i$. $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ sei dann die Menge $\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{P}_i$.

Seien f bzw. g Funktionen aus $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ mit den Informationen $(n_1,\ldots,n_t;i)$ bzw. $(m_1,\ldots,m_t;j)$. Analog zu /6/ kann man Operationen über Funktionen aus $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ auf folgende Weise definieren:

Umordnen von Variablen – τ_k, ξ_k ($1 \leq k \leq t$)

$$(\tau_k f)(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{n_k}^k, \ldots, x_1^t, x_2^t, \ldots, x_{n_t}^t)$$

$$:= f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_{n_{k-1}}^{k-1},$$

$$x_2^k, x_1^k, x_3^k, \ldots, x_{n_k}^k, x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{n_{k+1}}^{k+1}, \ldots, x_{n_t}^t),$$

$$(\xi_k f)(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{n_k}^k, \ldots, x_1^t, x_2^t, \ldots, x_{n_t}^t)$$

$$:= f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_2^k,x_3^k,\ldots,x_{n_k}^k,x_1^k,\ldots,x_1^t,\ldots,x_{n_t}^t).$$

<u>Identifizieren von Variablen - Δ_k $(1 \leq k \leq t)$</u>

$$(\Delta_k f)(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_1^k,x_2^k,\ldots,x_{n_k-1}^k,\ldots,x_1^t,x_2^t,\ldots,x_{n_t}^t)$$
$$:= f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_1^k,x_1^k,x_2^k,\ldots,x_{n_k-1}^k,\ldots,x_1^t,\ldots,x_{n_t}^t).$$

<u>Hinzufügen fiktiver Variablen - ∇_k $(1 \leq k \leq t)$</u>

$$(\nabla_k f)(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_1^k,x_2^k,\ldots,x_{n_k+1}^k,\ldots,x_1^t,x_2^t,\ldots,x_{n_t}^t)$$
$$:= f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_2^k,x_3^k,\ldots,x_{n_k+1}^k,\ldots,x_1^t,x_2^t,\ldots,x_{n_t}^t).$$

<u>Substitution - $\underset{r,s}{*}$ $(\{r,s\} \subseteq \{1,2,\ldots,t\})$</u>

Die Operation $\underset{r,s}{*}$ ist nur definiert für Funktionen g, deren Wertebereich W(g) in K_r oder in K_s enthalten ist. Für

$$u = \begin{cases} r \text{ für } W(g) \subseteq K_r \\ s \text{ für } W(g) \subseteq K_s \text{ und } W(g) \not\subseteq K_r \end{cases}$$

gelte

$$(f \underset{r,s}{*} g)(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1+m_1}^1,\ldots,x_1^u,x_2^u,\ldots,x_{n_u+m_u-1}^u,\ldots,$$
$$x_1^t,x_2^t,\ldots,x_{n_t+m_t}^t)$$
$$:= f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_1^{u-1},x_2^{u-1},\ldots,x_{n_{u-1}}^{u-1},g(x_{n_1+1}^1,x_{n_1+2}^1,\ldots,$$
$$x_{n_1+m_1}^1,\ldots,x_{n_{u-1}+1}^{u-1},\ldots,x_{n_{u-1}+m_{u-1}}^{u-1},x_1^u,\ldots,x_{m_u}^u,\ldots,x_1^t,\ldots,x_{m_t}^t),$$
$$x_{m_u+1}^u,\ldots,x_{m_u+n_u-1}^u,x_{m_{u+1}+1}^{u+1},\ldots,x_{m_{u+1}+n_{u+1}}^{u+1},\ldots,x_{m_t+1}^t,\ldots,x_{m_t+n_t}^t).$$

Ist W(g) eine Teilmenge von K_r, so schreiben wir anstelle von $f \underset{r,s}{*} g$ oft nur $f \underset{r}{*} g$.

Die Menge $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ mit den oben definierten Operationen bildet eine Algebra, die wir auch mit $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ bezeichnen wollen.
Die durch

$$e_j(x_1^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_1^i,\ldots,x_{n_i}^i,\ldots,x_1^t,\ldots,x_{n_t}^t) := x_j^i$$

definierten Funktionen $e_j^{n_1,\ldots,n_t;i}$ heißen <u>Projektionen</u>.

<u>Konstanten</u> $c_a^{n_1,\ldots,n_t;i}$ $(a \in K_i)$ sind Funktionen mit den definierenden Gleichungen

$$c_a(x_1^1,\ldots,x_{n_1}^1,\ldots,x_1^t,\ldots,x_{n_t}^t) := a.$$

Eine Äquivalenzrelation $\varkappa$ auf einer Teilalgebra $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ von $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$, die mit sämtlichen Operationen der Algebra $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$ verträglich ist, nennen wir wie üblich <u>Kongruenz auf $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$</u>. Wenn $\varkappa$ und $\varkappa'$ Kongruenzen auf $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ sind und aus $f \sim g\ (\varkappa)$ stets $f \sim g\ (\varkappa')$ für alle Funktionen f und g aus $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ folgt, schreiben wir $\varkappa \subseteq \varkappa'$.

2. Kongruenzen auf Teilalgebren von $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$, die sämtliche Projektionen und eine gewisse Menge $\mathcal{U}_{w_1,\ldots,w_t}$ enthalten

Bezeichne $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ in diesem Paragraphen stets eine Teilalgebra von $\mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t}$. Wir nennen die Menge K_i genau dann mit der Menge K_j bez. $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ <u>verkettet</u>, wenn gewisse $r_1,r_2,\ldots,r_q$ aus $\{1,2,\ldots,t\}$ mit den Eigenschaften $r_1 = i$, $r_q = j$ existieren, wobei für jedes p aus $\{1,2,\ldots,q-1\}$ die Menge $\mathcal{P}_{r_p} \cap \mathcal{P}_{r_{p+1}} \cap \mathcal{O}\!\mathcal{L}$ nichtleer ist. $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_s$ sei die Zerlegung der Menge $\{K_1,\ldots,K_t\}$ bez. der Verkettungsrelation, d. h., je zwei Mengen K_i und K_j sind genau dann bez. $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ verkettet, wenn sie in ein und derselben Klasse $\mathfrak{K}_q$ $(1 \leq q \leq s)$ liegen. Für $\mathfrak{K} \subseteq \{K_1, \ldots K_t\}$ gelte ferner $\mathcal{P}_{\mathfrak{K}} := \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} \mathcal{P}_{K_1,\ldots,K_t;K}$. Von den nachfolgend definierten Relationen $\varkappa_0$, $\varkappa_1^{I_1,\ldots,I_r}$ $(I_1,\ldots,I_r$ paarweise disjunkte Teilmengen von $\{1,2,\ldots,s\})$ und $\varkappa_1$ kann man leicht nachprüfen, daß es sich um Kongruenzen auf $\mathfrak{A}$ handelt:

$$f \sim g \ (\varkappa_0) :\Longleftrightarrow f = g;$$

$$\begin{aligned} f \sim g \ (\varkappa_1^{I_1,\ldots,I_r}) :\Longleftrightarrow & (\exists i: 1 \leq i \leq s \wedge \{f,g\} \subseteq \mathcal{P}_i) \\ & \vee (\exists j: 1 \leq j \leq r \wedge \{f,g\} \subseteq \bigcup_{i \in I_j} \mathcal{P}_{\mathfrak{K}_i}); \end{aligned}$$

bezüglich $\varkappa_1$ seien alle Funktionen untereinander kongruent.

Speziell gilt: $\varkappa_1^{\{1,2,\ldots,t\}} = \varkappa_1$.

Für $I \subseteq \{1,2,\ldots,t\}$ sei

$$\begin{aligned} f \sim g \ (\varkappa_a^I) :\Longleftrightarrow & (\exists i: 1 \leq i \leq s \wedge \{f,g\} \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{K}_i}) \\ & \wedge (\forall j \in I: a_j f = a_j g). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\varkappa_a^I$ eine Kongruenz auf $\mathfrak{A}$, wenn für alle i, j aus I, $i \neq j$, K_i nicht mit K_j bez. $\mathfrak{A}$ verkettet ist. Aus dem Beweis von Lemma 3 kann man später entnehmen, daß diese Bedingung auch notwendig ist. Speziell ist außerdem $\varkappa_a^{\emptyset} = \varkappa_1^{\{i\}} = \varkappa_1^{\{i\},\{j\}} = \ldots = \varkappa_1^{\{1\},\{2\},\ldots,\{s\}} = \varkappa_1^{\emptyset}$. Man prüft leicht nach, daß für eine beliebige Kongruenz $\varkappa$ auf $\mathfrak{A}$ und Mengen I_1, $I_2 \subseteq \{1,2,\ldots,s\}$, I_1', $I_2' \subseteq \{1,2,\ldots,t\}$ folgendes gilt:

$$\varkappa_1^{I_1} \subseteq \varkappa \wedge \varkappa_1^{I_2} \subseteq \varkappa \Rightarrow \begin{cases} \varkappa_1^{I_1,I_2} \subseteq \varkappa & \text{für } I_1 \cap I_2 = \emptyset \\ \varkappa_1^{I_1 \cup I_2} \subseteq \varkappa & \text{für } I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\varkappa_a^{I_1'} \subseteq \varkappa \wedge \varkappa_a^{I_2'} \subseteq \varkappa \Rightarrow \varkappa_a^{I_1' \cap I_2'} \subseteq \varkappa.$$

Für $w_i \in K_i$ $(i=1,2,\dots,t)$ bezeichne $\mathfrak{U}_{w_1,\dots,w_t}$ die Menge aller derjenigen Funktionen $f^{n_1,\dots,n_t;i}$ aus $\mathcal{P}_{K_1,\dots,K_t}$, die auf Tupeln der Menge $\bigtimes_{i=1}^{t} K_i^{n_i} \setminus (K_i \setminus \{w_i\})^{n_i}$ nur Werte aus $\{w_1,w_2,\dots,w_t\}$ annehmen $(u_1,u_2,\dots,u_t \geq 1)$.

Unser Ziel ist der Beweis folgender Aussage:

__Satz 1:__ Auf einer Teilalgebra $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{P}_{K_1,\dots,K_t}$, die sämtliche Projektionen und eine gewisse Menge $\mathfrak{U}_{w_1,\dots,w_t}$ enthält, existieren nur die Kongruenzen $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ sowie Kongruenzen des Typs $\varkappa_1^{I_1,\dots,I_r}$ ($I_1,\dots,I_r$ paarweise disjunkte Teilmengen von $\{1,2,\dots,s\}$) und $\varkappa_a^I$, wobei $I \subseteq \{1,2,\dots,t\}$ ist und für alle $i \neq j$ aus I die zu diesen Indizes gehörenden Mengen K_i und K_j nicht bez. $\mathfrak{A}$ miteinander verkettet sind.

Der __Beweis__ dieses Satzes ergibt sich aus den nachfolgenden drei Lemmata und den oben angegebenen Eigenschaften der Kongruenzen. Verwendet werden folgende Funktionen aus

$\mathfrak{U}_{w_1,\dots,w_t} \subseteq \mathfrak{A}$:

$$c_{u;j}^{1,\dots,1;i}(x^1,x^2,\dots,x^t) := \begin{cases} u & \text{für } x^j \neq w_j \\ w_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$q_u^{1,\dots,1;i}(x^1,x^2,\dots,x^t) := \begin{cases} u & \text{für } x^i = u \\ w_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$p^{1,\dots,1,2,1,\dots1;i}(x^1,x^2,\dots,x^{i-1}, x_1^i,x_2^i,x^{i+1},\dots,x^t)$$
$$:= \begin{cases} x_2^i & \text{für } x_1^i \neq w_i \\ w_i & \text{sonst} \end{cases}$$

$(u \in K_i;\ i,j=1,2,\dots,t)$,

$$r^{1,\dots,1;i}_{a_1,a_2,\dots,a_t;c}(x^1,x^2,\dots,x^t) := \begin{cases} c & \text{für } x^1 = a_1 \wedge x^2 = a_2 \\ & \qquad \wedge\dots\wedge x^t = a_t \\ w_i & \text{sonst} \end{cases}$$

(mindestens ein $a_j \neq w_j$; $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2, \dots, a_t \in K_t$;
$i = 1,2,\dots,t$),

$$t^{1,\dots,1;i}_{a}(x^1,x^2,\dots,x^t) := \begin{cases} w_i & \text{für } x^1 = w_1 \wedge x^2 = w_2 \\ & \qquad \wedge\dots\wedge x^t = w_t \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

($a \in K_i$).

<u>Lemma 1:</u> Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}_{w_1,\dots,w_t} \subseteq \mathfrak{A}$.

Wenn $\varkappa$-kongruente Funktionen $f^{n_1,\dots,n_t;i}$, $g^{n_1,\dots,n_t;i} \in \mathfrak{A}$ mit $f \neq g$ existieren, dann gilt $\varkappa_a^{\{1,2,\dots,t\}} \subseteq \varkappa$.

<u>Beweis:</u> Da $f \neq g$ ist, existiert ein Tupel
$\tilde{a} = (a_1,a_2,\dots,a_{n_1+\dots+n_t}) \in K_1^{n_1} \times K_2^{n_2} \times \dots \times K_t^{n_t}$ mit
$f(\tilde{a}) =: a \neq b := g(\tilde{a})$. O. B. d. A. sei $i = 1$ und $a \neq w_1$. Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von

$$c^{1,\dots,1;1}_{w_1} \sim c^{1,\dots,1;1}_{a;1} \ (\varkappa). \tag{3}$$

<u>Fall 1:</u> Es existiert für ein gewisses j eine Funktion
$h^{m_1,\dots,m_t;j}$ aus $\mathfrak{A}$ mit
$h(w_1,\dots,w_1,w_2,\dots,w_2,\dots,w_t,\dots,w_t) = d \neq w_j$.

In diesem Fall gehören die Konstanten von $\mathcal{P}_{K_1,\dots,K_t}$ zu $\mathfrak{A}$, denn es gilt
$h(c_{w_1}, c_{w_1},\dots,c_{w_t}) = c_d^{1,\dots,1;j}$ und

$c^{1,\dots,1;i}_{u;j} \underset{j}{*} c_d^{1,\dots,1,;j} = c_u^{2,\dots,2,1,2,\dots,2;i} \in \mathfrak{A}$

für beliebiges $u \in K_i$ und beliebiges i.

Folglich ist

$$f(c_{a_1},c_{a_2},\dots,c_{a_{n_1+\dots+n_t}}) = c_a^{1,\dots,1;1}$$

$$\sim g(c_{a_1},c_{a_2},\dots,c_{a_{n_1+\dots+n_t}}) = c_b^{1,\dots,1;1}\ (\varkappa) \text{ und}$$

$$q_a^{1,\dots,1;1}(c_a(x^1,x^2,\dots,x^t),x^2,\dots,x^t) = c_a^{1,\dots,1;1}$$

$$\sim q_a^{1,\dots,1;1}(c_b(x^1,x^2,\dots,x^t),x^2,\dots,x^t) = c_{w_1}^{1,\dots,1;1}\ (\varkappa).$$

Hieraus ergibt sich dann für den ersten Fall die Aussage (3):

$$c_{a;1}(p^{2,1,\dots,1;1}(c_a(x^1,\dots,x^t),x^1,\dots,x^t),x^2,\dots,x^t) = c_{a;1}$$

$$\sim c_{a;1}(p^{2,1,\dots,1;1}(c_{w_1}(x^1,\dots,x^t),x^1,\dots,x^t),x^2,\dots,x^t) = c_{w_1}\ (\varkappa).$$

<u>Fall 2:</u> Für jedes i und für alle Funktionen h aus $\mathcal{O} \cap \mathcal{R}_i$ gilt

$$h(w_1,\dots,w_1,\dots,w_t,\dots,w_t) = w_i.$$

Dann gilt auch für unsere $\varkappa$-kongruenten Funktionen f, g:

$$f(w_1,\dots,w_1,\dots,w_t,\dots,w_t) = g(w_1,\dots,w_t) = w_1.$$

Folglich ist

$$f(c_{a_1;1},c_{a_2;1},\dots,c_{a_{n_1+\dots+n_t};1}) = c_{a;1}^{1,\dots,1;1}$$

$$\sim g(c_{a_1;1},c_{a_2;1},\dots,c_{a_{n_1+\dots+n_t};1}) = c_{b;1}^{1,\dots,1;1}\ (\varkappa) \text{ und}$$

$$q_a^{1,\dots,1;1}(c_{a;1}^{1,\dots,1;1}(x^1,x^2,\dots,x^t),x^2,\dots,x^t) = c_{a;1}^{1,\dots,1;1}$$

$$\sim q_a^{1,\dots,1;1}(c_{b;1}^{1,\dots,1;1}(x^1,x^2,\dots,x^t),x^2,\dots,x^t) = c_{w_1}^{1,\dots,1;1}\ (\varkappa),$$

d. h., auch im zweiten Fall wurde (3) nachgewiesen.
Aus (3) erhält man:

$$p^{2,1,\dots,1;1}(c_{a;1}(x^1,x^2,\dots,x^t),x^1,x^2,\dots,x^t) = e_1^{1,\dots,1;1}$$

$$\sim p^{2,1,\dots,1;1}(c_{w_1}(x^1,\dots,x^t),x^1,x^2,\dots,x^t) = c_{w_1}^{1,\dots,1;1}\ (\varkappa).$$

Folglich gilt

$$e^{1,\dots,1;1}(h^{m_1,\dots,m_t;1}(x_1^1,\dots,x_{m_t}^t),x_1^2,x_1^3,\dots,x_1^t) = h(x_1^1,x_2^1,\dots,x_{m_t}^t)$$

$$\sim c_{w_1}(h(x_1^1,x_2^1,\dots,x_{m_t}^t),x_1^2,\dots,x_1^t) = c_{w_1}^{m_1,\dots,m_t}(x_1^1,\dots,x_{m_t}^t)\ (\varkappa)$$

für jede Funktion $h^{m_1,\ldots,m_t;1} \in \mathfrak{A}$, d. h., alle Funktionen gleicher Stellenzahl aus $\mathfrak{A} \cap \mathcal{P}_1$ sind untereinander $\varkappa$-kongruent. Da aber aus $f \sim g$ $(\varkappa)$, $f \neq g$ und $f,g \in \mathcal{P}_1$ für beliebiges $i \geq 2$ auch

$$r^{1,..,1;i}_{a,w_1,..,w_t}(f(x^1_1,..,x^t_{n_t}),x^2_1,..,x^t_1) =: \hat{f}^{n_1,..,n_t;i}$$

$$\sim r^{1,..,1;i}_{a,w_2,..,w_t}(g(x^1_1,..,x^t_{n_t}),x^2_1,..,x^t_1) =: \hat{g}^{n_1,..,n_t;i} (\varkappa)$$

mit $f \neq g$ folgt, lassen sich unsere oben angegebenen Konstruktionen für beliebiges i durchführen. Folglich ist $\varkappa_a^{\{1,2,\ldots,t\}} \subseteq \varkappa$ und das Lemma bewiesen.

<u>Lemma 2:</u> Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf der Teilalgebra $\mathfrak{A}$, die alle Projektionen und $\mathfrak{W}_{w_1,\ldots,w_t}$ enthält. Wenn $\varkappa$-kongruente Funktionen $f^{n_1,\ldots,n_t;i}$, $g^{m_1,\ldots,m_t;i} \in \mathfrak{A}$ mit $a_r f \neq a_r g$ für ein $r \in \{1,2,\ldots,t\}$ existieren, dann gilt $\varkappa_a^{\{1,2,\ldots,t\}\setminus\{i\}} \subseteq \varkappa$.

<u>Beweis:</u> Mit Hilfe der Operationen Δ_k erhält man aus $f \sim g$ $(\varkappa)$ leicht $\varkappa$-kongruente Funktionen f',g', für die $a_r f' = 2$, $a_r g' = 1$ und $a_q f' = a_q g' = 1$ für alle $q \in \{1,2,\ldots,t\}\setminus\{r\}$ ist.

O. B. d. A. können wir also $r = 1$, $i = 1$, $n_1 = 2$ und $n_2=n_3=\ldots=n_t=m_1=\ldots=m_t=1$ voraussetzen. Wegen $f \sim g$ $(\varkappa)$ gilt

$$e_2^{2,1,\ldots,1;1} \underset{1}{*} f = e_3^{3,2,\ldots,2;1}$$

$$\sim e_2^{2,1,\ldots,1;1} \underset{1}{*} g = e_2^{2,2,\ldots,2;1} (\varkappa).$$

Hieraus läßt sich leicht

$$e_p^{p,m_2,\ldots,m_t;1} \sim e_1^{1,m_2,\ldots,m_t;1} (\varkappa) \tag{4}$$

herleiten $(m_2,m_3,\ldots,m_t \geq 1)$.

Folglich gilt für eine beliebige Funktion $h^{m_1,\ldots,m_t;1} \in \mathfrak{A}$:

$$e_1^{1,1,\dots,1;1}(h(x_1^1,\dots,x_{m_t}^t),x_1^2,\dots,x_1^t) = h(x_1^1,\dots,x_{m_t}^t)$$
$$\sim e_2^{2,1,\dots,1;1}(h(x_1^1,\dots,x_{m_t}^t),x_{n_1+1}^1,x_1^2,\dots,x_1^t)$$
$$= e_{n_1+1}^{m_1+1,m_2,\dots,m_t;1}(x_1^1,\dots,x_{m_t}^t)\ (\varkappa).$$

Aus dieser Beziehung und (4) ergibt sich, daß alle Funktionen aus $\mathcal{P}_1 \cap \mathfrak{A}$ untereinander $\varkappa_a^{\{2,3,\dots,t\}}$-kongruent sind.
Folglich gilt

$$c_{w_i}^{1,1,\dots,1;i}(c_{w_1}^{n_1,1,\dots,1;1}(x_1^1,\dots,x_{n_1}^1,x_1^2,\dots,x_1^t),x_1^2,\dots,x_1^t)$$
$$= c_{w_i}^{n_1,1,\dots,1;i}(x_1^1,\dots,x_1^t)$$
$$\sim c_{w_i}^{1,\dots,1;i}(c_{w_1}^{1,\dots,1;1}(x_1^1,\dots,x_1^t),x_1^2,\dots,x_1^t) = c_{w_i}^{1,\dots,1;i}\ (\varkappa) \quad (5)$$

und für $a \in K_1 \setminus \{w_1\}$ und $b \in K_i$

$$c_{b;1}^{1,\dots,1;i}(t_a^{1,\dots,1;1}(x_1^1,\dots,x_1^t),x_1^2,\dots,x_1^t) = t_b^{1,\dots,1;i}$$
$$\sim c_{b;1}^{1,\dots,1;i}(c_{w_1}^{1,\dots,1;1}(x_1^1,\dots,x_1^t),x_1^2,\dots,x_1^t) = c_{w_i}^{1,\dots,1;i}\ (\varkappa).$$

Hieraus ergibt sich

$$p^{\overbrace{1,\dots,1}^{i-1},2,1,\dots,1;i}(x_1^1,x_1^2,\dots,x_1^{i-1},t_b^{1,\dots,1;i}(x_1^1,\dots,x_1^t),$$
$$e_1^{n_1,\dots,n_t;i}(x_1^1,\dots,x_{n_t}^t),x_1^{i+1},\dots,x_1^t) = e_1^{n_1,\dots,n_t;i}$$
$$\sim p^{1,\dots,1,2,1,\dots,1;i}(x_1^1,x_1^2,\dots,x_1^{i-1},c_{w_i}^{1,\dots,1;i}(x_1^1,\dots,x_1^t),$$
$$e_1^{n_1,\dots,n_t;i}(x_1^1,\dots,x_{n_t}^t),x_1^{i+1},\dots,x_1^t) = c_{w_i}^{n_1,\dots,n_t;i}$$
$$\sim c_{w_i}^{1,n_2,\dots,n_t;i}\ (\varkappa)$$

wegen (5).

Bezeichne $h^{n_1,\dots,n_t;i}$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A} \cap \mathcal{P}_i$ $(i \geq 2)$.

Dann gilt

$$e_1^{1,\dots,1;i}(x_1^1,\dots,x_1^{i-1},h^{n_1,\dots,n_t;i}(x_1^1,\dots,x_{n_t}^t),x_1^{i+1},\dots,x_1^t) = h^{n_1,n_2,\dots,n_t;i}$$

$$\sim c_{w_1}^{1,n_2,\dots,n_t;i}\ (\varkappa),\ \text{d. h.}\ \varkappa_a^{\{2,3,\dots,t\}} \subseteq \varkappa.$$

Lemma 3: Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf der Teilalgebra $\mathfrak{A}$, die alle Projektionen und $\mathfrak{A}_{w_1,\dots,w_t}$ enthält. Wenn $\varkappa$-kongruente Funktionen $f^{n_1,\dots,n_t;i}$, $g^{m_1,\dots,m_t;j} \in \mathfrak{A}$ mit $f, g \notin \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j$ existieren, dann ist $\varkappa_a^{\{1,2,\dots,t\} \setminus \{i,j\}} \subseteq \varkappa$.

Beweis: O. B. d. A. sei $n_1 = \dots = n_t = m_1 = \dots = m_t = 1$, $i = 1$ und $j = 2$. Es gilt dann

$$c_{w_i}^{1,1,\dots,1;i} \underset{1,2}{*} f = c_{w_i}^{1,2,2,\dots,2;i}$$

$$\sim c_{w_i}^{1,1,\dots,1;i} \underset{1,2}{*} g = c_{w_i}^{2,1,2,\dots,2;i}\ (\varkappa).$$

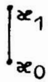
Folglich ist nach Lemma 2 $\varkappa_a^{\{1,3,4,\dots,t\}}$, $\varkappa_a^{\{2,3,4,\dots,t\}} \subseteq \varkappa$.

Hieraus ergibt sich dann die Behauptung $\varkappa_a^{\{3,4,\dots,t\}} \subseteq \varkappa$, w. z. b. w.

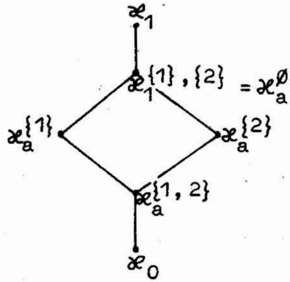
Abschließend geben wir als Beispiele noch die Struktur der Kongruenzen auf $\mathcal{P}_{K_1,K_2}$ und $\mathcal{P}_{K_1,K_2,K_3}$ an. Dazu vereinbaren wir, die Kongruenzen als Knoten eines Graphen aufzufassen und den Knoten der Kongruenz $\varkappa$ mit dem Knoten der Kongruenz $\varkappa'$ genau dann durch eine Kante zu verbinden, wenn $\varkappa \subsetneq \varkappa'$ und kein $\varkappa''$ mit $\varkappa \subsetneq \varkappa'' \subsetneq \varkappa'$ existiert. Außerdem sei der Knoten $\varkappa'$ "über" dem Knoten $\varkappa$ angeordnet, wenn $\varkappa \subset \varkappa'$ gilt.

Kongruenzen auf $\mathcal{P}_{K_1,K_2}$

(a) $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$:



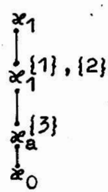
(b) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$:



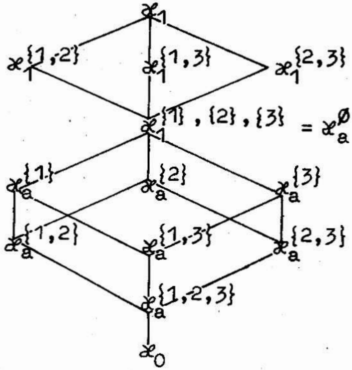
Kongruenzen auf $\mathcal{P}_{K_1,K_2,K_3}$

(a) K_1, K_2, K_3 paarweise miteinander verkettet:

(b) K_1 nur mit K_2 verkettet:



(c) K_1, K_2, K_3 paarweise disjunkt:



Literatur

/1/ Blochina, G. N., Burosch, G., und Kudrjavcev, V. B.: Ein Vollständigkeitskriterium bis auf eine gewisse Äquivalenzrelation für eine verallgemeinerte Postsche Algebra. Publ. Math. Debrecen 20, 141 - 152 (1973)

/2/ Blochina, G. N., Burosch, G., und Kudrjavcev, V. B.: Vollständigkeitsbedingungen für zwei Algebren vom Postschen Typ. Math. Balkanica 3, 281 - 296 (1973)

/3/ Blochina, G. N., Kudrjavcev, V. B., und Burosch, G.: Das Problem der Vollständigkeit für Boolesche Funktionen über zwei Dualmengen mit nichtleerem Durchschnitt I, II. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 19, 163 - 180 (1973); 20, 79 - 96 (1974)

/4/ Kudrjavcev, V. B., und Burosch, G.: Das Problem der Vollständigkeit für Boolesche Funktionen über zwei Dualmengen. Math. Nachr. 54, 105 - 125 (1972)

/5/ Kudrjavcev, V. B.:
Über einige allgemeine Eigenschaften des Funktionalsystems P_{Σ}. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin Math.-Natur. Reihe XXIV 6 (1975)

/6/ Mal'cev, A. I.:
Iterativnye algebry i mnogoobrazija Posta (Russ.). Algebra i Logika 5, № 2, 5 - 24 (1966)

/7/ Pöschel, R.: Postsche Algebren von Funktionen über einer Familie endlicher Mengen. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 19, 37 - 74 (1973)

/8/ Pöschel, R.: Die funktionale Vollständigkeit von Funktionenklassen über einer Familie endlicher Mengen. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 20, 537 - 550 (1974)

eingegangen: 26. 09. 1979

Anschrift des Verfassers:

Dr. Dietlinde Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 19 - 41 (1980)

Konrad Engel

Über die Anzahl elementarer, teilweise balancierter, unvollständiger Blockpläne

1. Einleitung

In /5/ wird der Begriff zusammengesetzter bzw. elementarer BUB eingeführt. Anzahlbestimmungen gewisser paarweise nichtisomorpher, elementarer BUB werden in den Arbeiten /1/, /2/, /3/, /5/ und /6/ vorgenommen. In dieser Arbeit wird die angegebene Begriffsbildung auf in 2 Gruppen teilbare, teilweise balancierte, unvollständige Blockpläne (2GTBUB) ausgedehnt, jede der im folgenden definierten Größen $f_t^*(4,3)$, $f_t(4,3)$, $f_t^*(6,3)$, $f_t(6,3)$ ermittelt und für $f^*(8,3)$ eine Abschätzung angegeben.

2. Allgemeine Grundlagen

Definition 1: Unter einer Multimenge verstehen wir ein Paar $\underline{Z}(X) := (X,z)$, wobei X eine endliche Menge, die Grundmenge, und z eine eindeutige Abbildung von X in die Menge der positiven ganzen Zahlen sei.

Ist $x \in X$, so bezeichne $z(x)$ den Wert der Abbildung z an der Stelle x. Er bedeutet die Anzahl von x in $\underline{Z}(X)$. Wir setzen $z(x) := 0$, wenn $x \notin X$ ist. Offenbar ist $\underline{Z}(X)$ eindeutig durch Angabe einer Menge $Y \supseteq X$ und aller Werte $z(y)$ für $y \in Y$ festgelegt. $z(X) := \sum_{x \in X} z(x)$ nennen wir die Mächtigkeit von $\underline{Z}(X)$.

In der Bezeichnung einer Multimenge wird u. U. die Grundmenge weggelassen, jedoch verwenden wir grundsätzlich unterstrichene, lateinische Großbuchstaben. Der Wert der Abbildung bzw. die Mächtigkeit wird mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet. Wir vereinbaren, daß x genau dann in $\underline{Z}(X)$ enthalten sein möge ($x \in \underline{Z}$), wenn x in X enthalten ist ($x \in X$). Die Multimenge $\underline{Z}(X)$ identifizieren wir mit der Menge X, wenn für alle $x \in X$ gilt $z(X) = 1$.

Definition 2: $\underline{Z}_1(X_1)$ und $\underline{Z}_2(X_2)$ heißen gleich, $(\underline{Z}_1(X_1) = \underline{Z}_2(X_2))$, wenn gilt:

1. $X_1 = X_2$,
2. für alle $x \in X$ ist $z_1(x) = z_2(x)$.

Wir setzen $\underline{Z}_1(X) = \emptyset$ genau dann, wenn $X = \emptyset$ ist.

Definition 3: $\underline{Z}_3(X_3) = \underline{Z}_1(X_1) \uplus \underline{Z}_2(X_2)$ heißt Vereinigungsmultimenge von $\underline{Z}_1(X_1)$ und $\underline{Z}_2(X_2)$, wenn gilt:

1. $X_3 = X_1 \cup X_2$,
2. $z_3(x) = z_1(x) + z_2(x)$ für alle $x \in X_3$.

$\underline{Z}_3(X_3) = \underline{Z}_1(X_1) \mathbin{\cap\!\!\!\!+} \underline{Z}_2(X_2)$ heißt Durchschnittsmultimenge von $\underline{Z}_1(X_1)$ und $\underline{Z}_2(X_2)$, wenn gilt:

1. $X_3 = X_1 \cap X_2$,
2. $z_3(x) = \min\,(z_1(x),\ z_2(x))$ für alle $x \in X_3$.

$\underline{Z}_3(X_3) = \underline{Z}_1(X_1) \mathbin{\setminus\!\!\!+} \underline{Z}_2(X_2)$ heißt Differenzmultimenge von $\underline{Z}_1(X_1)$ und $\underline{Z}_2(X_2)$, wenn gilt:

1. $X_3 = \{x \in X_1 \cap X_2;\ z_1(x) > z_2(x)\} \cup (X_1 \setminus X_2)$,
2. $z_3(x) = \begin{cases} z_1(x) - z_2(x), \text{ falls } x \in X_1 \cap X_2,\ z_1(x) > z_2(x), \\ z_1(x), \text{ falls } x \in X_1 \setminus X_2. \end{cases}$

Offenbar gelten Kommutativität und Assoziativität bei Vereinigung und Durchschnittsbildung. ~~Ferner ist $(\underline{Z}_1 \mathbin{\setminus\!\!\!+} \underline{Z}_2) \uplus \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$.~~

Definition 4: $\underline{Z}_1(X_1)$ ist Teilmultimenge von $\underline{Z}_2(X_2)$ $(\underline{Z}_1(X_1) \mathbin{\subseteq\!\!\!\!+} \underline{Z}_2(X_2))$, wenn gilt:

1. $X_1 \subseteq X_2$,
2. für alle $x \in X_1$ ist $z_1(x) \leq z_2(x)$.

$\underline{Z}_1$ ist echte Teilmultimenge von $\underline{Z}_2$ $(\underline{Z}_1 \mathbin{\subset\!\!\!\!+} \underline{Z}_2)$, wenn $\underline{Z}_1 \mathbin{\subseteq\!\!\!\!+} \underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2$ ist.

Wir geben Multimengen $\underline{Z}(\{x_1,\dots,x_n\})$ wie folgt an:

$$\underline{Z}\colon \underbrace{x_1,x_1,\dots,x_1}_{z(x_1)},\dots,\underbrace{x_n,x_n,\dots,x_n}_{z(x_n)}.$$

Ist $\underline{Z}(\mathcal{X})$ eine Multimenge und $\mathcal{X}$ eine Mengenfamilie mit $\mathcal{X}=(X_1,\dots,X_n)$, so setzen wir

$$z(x_1,\dots,x_k) = \begin{cases} \sum\limits_{X\in\mathcal{X};\ x_1,\dots,x_k\in X} z(X) & \text{, falls } \{X\in\mathcal{X}; x_1,\dots,x_k\in X\}\neq\emptyset \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $z(x_1,\dots,x_k) = z(\pi(x_1),\dots,\pi(x_k))$, wobei π eine beliebige Permutation der Elemente $x_1,\dots,x_k$ ist. $z(x_1,\dots,x_k)$ bedeutet die Anzahl der Mengen (versehen mit der entsprechenden Vielfachheit), die in $\underline{Z}(\mathcal{X})$ enthalten sind und $x_1,\dots,x_k$ als Elemente enthalten. $\mathcal{P}_k(M)$ sei die Menge aller k-elementigen Teilmengen der endlichen Menge M. Aus drucktechnischen Gründen schreiben wir die Elemente von $\mathcal{P}_k(M)$ in der Form $(x_1,\dots,x_k)$ oder auch, wenn es keine Mißverständnisse geben kann, $x_1\dots x_k$.

<u>Definition 5</u>: Eine Multimenge $\underline{T}(\mathcal{B})$ heißt $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB über M mit den Gruppen M_1 und M_2, wenn gilt:

1. $|M| = v = 2n \quad (n\in\mathbb{N})$,
2. $\emptyset\subset\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}_k(M)$ (die Elemente von $\mathcal{B}$ werden auch Blocks genannt),
3. für alle $x\in M$ ist $t(x) = \text{const.}$,
4. Es existiert eine Zerlegung $M = M_1\cup M_2$ von M mit $|M_1| = |M_2| = n$ und

$$t(x,y) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x,y\in M_1 \text{ oder } x,y\in M_2, \\ \lambda_2, & \text{falls } x\in M_1 \text{ und } y\in M_2. \end{cases}$$

Wir setzen $r := t(x)$ und $b := t(\mathcal{B})$. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ist $\underline{T}(\mathcal{B})$ offenbar ein (v,k,λ)-BUB (vgl. /5/, S. 71).

Es gelten folgende grundlegende Beziehungen:

$$vr = bk, \qquad (1)$$
$$(n-1)\lambda_1 + n\lambda_2 = r(k-1) \quad \text{(vgl. /4/, S.122).}$$

Definition 6: Es sei p eine eineindeutige Abbildung von M auf M'.
Ist $B = (x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{P}_k(M)$, so sei $p(B) := (p(x_1),\dots,p(x_k))$.
Ist $\mathcal{B} = \{B_1,\dots,B_i\} \subseteq \mathcal{P}_k(M)$, so sei $p(\mathcal{B}) := \{p(B_1),\dots,p(B_i)\}$.
Weiter sei $p(\underline{T}(\mathcal{B}))$ diejenige Multimenge $\underline{T}'(\mathcal{B}')$, für die gilt:
1. $\mathcal{B}' := p(\mathcal{B})$,
2. für alle $B \in \mathcal{B}$ ist $t'(p(B)) := t(B)$.
Sind die 2GTBUB $\underline{T}$ und $\underline{T}'$ gegeben und existiert eine Abbildung p mit $p(\underline{T}) = \underline{T}'$, so nennen wir $\underline{T}$ und $\underline{T}'$ isomorph ($\underline{T} \cong \underline{T}'$).

Man überzeugt sich leicht, daß gilt:

$$p(\underline{T}_1 \uplus \underline{T}_2) = p(\underline{T}_1) \uplus p(\underline{T}_2).$$

$$\text{Aus } \underline{T} \cong \underline{T}' \text{ folgt } t(\underline{T}) = t'(\underline{T}'). \tag{2}$$

Ist $\underline{T}$ ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB über M mit den Gruppen M_1 und M_2, so ist $p(\underline{T})$ offenbar ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB über M mit den Gruppen $p(M_1)$ und $p(M_2)$. Weiterhin ist die oben definierte Isomorphie eine Äquivalenzrelation. Nach der Einführung des Isomorphiebegriffes können wir uns auf $M = \{1,\dots,v\}$ beschränken.

Definition 7: Ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB $\underline{T}$ mit den Gruppen M_1 und M_2 heißt zusammengesetzt, wenn es einen $(v,k,\lambda_1',\lambda_2')$-2GTBUB $\underline{T}'$ mit den Gruppen M_1 und M_2 gibt, so daß $\underline{T}' \Subset \underline{T}$ ist. Andernfalls heißt $\underline{T}$ elementar.

Wir können uns nun im weiteren auf die Betrachtung von 2GTBUB mit den Gruppen $M_1 = \{1,\dots,n\}$ und $M_2 = \{n+1,\dots,v\}$ beschränken.

Definition 8: Ein 2GTBUB $\underline{T}(\mathcal{B})$ heißt wiederholungsfrei, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $t(B) = 1$.

Im Fall $\underline{T} \cong \underline{T}'$ ist $\underline{T}$ offenbar elementar (wiederholungsfrei) genau dann, wenn $\underline{T}'$ elementar (wiederholungsfrei) ist. Ebenso leicht beweist man folgenden

Satz 1: Ist $\underline{T}$ ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB und $\underline{T}'$ ein $(v,k,\lambda_1',\lambda_2')$-2GTBUB mit $\underline{T}' \Subset \underline{T}$, so ist $\underline{T}'' = \underline{T} \setminus\!\!+ \underline{T}'$ ein $(v,k,\lambda_1-\lambda_1',\lambda_2-\lambda_2')$-2GTBUB.

Wir bezeichnen mit $f_t(v,k)$ $[f_t^*(v,k)]$ die Anzahl der Äquivalenzklassen bez. Isomorphie in der Menge aller elementaren [und wiederholungsfreien] 2GTBUB. Offenbar ist $f_t(v,k)$ $[f_t^*(v,k)]$ gleich der maximalen Anzahl von paarweise nichtisomorphen elementaren [und wiederholungsfreien] 2GTBUB. Bevor wir die Werte von f und f^* für spezielle v und k bestimmen, beweisen wir einige allgemeine Aussagen.

<u>Satz 2:</u> Sind $\underline{T}$ und $\underline{T}'$ zwei $(v,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt:

Es ist $\underline{T} \cong \underline{T}'$ genau dann, wenn es eine Permutation π gibt, für die $\pi(\underline{T}) = \underline{T}'$ ist und die sich aufspalten läßt in eine der 2 Formen:

1. $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1$. Hierbei sei π_i eine Permutation der Elemente von M_i $(i=1,2)$.
2. $\pi = f_1 \cdot f_2 = f_2 \cdot f_1$. Hierbei sei f_1 eine eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2 und f_2 eine eineindeutige Abbildung von M_2 auf M_1.

<u>Beweis:</u> Die Hinlänglichkeit ist offensichtlich. Wäre andererseits π nicht in eine der beiden Formen aufspaltbar, so gäbe es zwei Zahlen i,j aus M_1 mit $\pi(i) \in M_1$ und $\pi(j) \in M_2$. Wegen $t(i,j) = \lambda_1$ wäre dann $t'(\pi(i), \pi(j)) = \lambda_1$. Nach Voraussetzung ist aber $t'(\pi(i), \pi(j)) = \lambda_2$ im Widerspruch zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Unter π_1, π_2, f_1, f_2 wollen wir immer solche Abbildungen verstehen, wie sie in Satz 2 angegeben sind. Ist $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$ und $i \in M_1$, so ist $\pi(i) = \pi_1(i)$. Diese und ähnliche Beziehungen werden wir im folgenden öfter verwenden. Weiterhin sei

$V_1 := \{(x,y,z);\ x,y,z \in M_1\}$, $V_2 := \{(x,y,z);\ x,y,z \in M_2\}$,

$V_3 := \{(x,y,z);\ x,y \in M_1,\ z \in M_2\}$, $V_4 := \{(x,y,z);\ x \in M_1,\ y,z \in M_2\}$.

<u>Satz 3:</u> $\underline{G}_1(\mathcal{B}_1)$, $\underline{G}_2(\mathcal{B}_2)$, $\underline{U}_1(\mathcal{B}_3)$, $\underline{U}_2(\mathcal{B}_4)$ seien vier Multimengen mit den Eigenschaften:

1. $\mathfrak{B}_i \subseteq V_i$ $(i = 1,\ldots,4)$,

2. $\underline{G}_1$ ist ein $(n,3,\lambda_1')$-BUB über $\{1,\ldots,n\}$, und

   $\underline{G}_2$ ist ein $(n,3,\lambda_1'')$-BUB über $\{n+1,\ldots,2n\}$.

Dann gilt: $\underline{T} = \underline{G}_1 \uplus \underline{G}_2 \uplus \underline{U}_1 \uplus \underline{U}_2$ ist genau dann ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB, wenn folgende Beziehungen bestehen:

$$u_1(i,i') = \lambda_1-\lambda_1', \quad u_2(j,j') = \lambda_1-\lambda_1'', \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_1(k,j) = \sum_{l=n+1}^{2n} u_1(l,i) = (\lambda_1-\lambda_1')\,(n-1), \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_2(j,k) = \sum_{l=n+1}^{2n} u_2(l,i) = (\lambda_1-\lambda_1'')\,(n-1), \tag{5}$$

$$u_1(i,j) + u_2(j,i) = \lambda_2 \quad (i,i' \in M_1,\ j,j' \in M_2). \tag{6}$$

Beweis: Offenbar ist

$$\begin{aligned} 2\,u_1(j) &= \sum_{k=1}^{n} u_1(k,j), \quad u_1(i) = \sum_{l=n+1}^{2n} u_1(i,l), \\ u_2(j) &= \sum_{k=1}^{n} u_2(j,k), \quad 2\,u_2(i) = \sum_{l=n+1}^{2n} u_2(l,i). \end{aligned} \tag{7}$$

Wir beweisen die Notwendigkeit. (3) ist evident. Zum Beweis von (4) und (5) reicht es aus zu zeigen, daß

$2u_1(j) = u_1(i) = (\lambda_1-\lambda_1')\,(n-1)$ und

$u_2(j) = 2u_2(i) = (\lambda_1-\lambda_1'')\,(n-1)$ gilt. Es ist

$g_1(i,k) + g_2(i,k) + u_1(i,k) + u_2(i,k) = \lambda_1 \quad (i,k=1,\ldots,n)$.

Offenbar ist $g_1(i,k) = \lambda_1'$ und $g_2(i,k) = u_2(i,k) = 0$.

Also folgt $u_1(i,k) = \lambda_1-\lambda_1'$ und

$$u_1(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} u_1(i,k) = (n-1)(\lambda_1-\lambda_1').$$

Analog zeigen wir, daß $u_2(j) = (n-1)\,(\lambda_1-\lambda_1'')$ ist.

Wegen $u_1(j) + u_2(j) + g_1(j) + g_2(j) = t(j) = r$
(vgl. 3. in Def. 5),
$g_1(j) = 0$ und
$g_2(j) = \frac{\lambda_1''}{2}(n-1)$ ($\underline{G}_2'$ ist ein $(n,3,\lambda_1'')$-BUB) gilt
$u_1(n+1) = \ldots = u_1(2n)$.

Offenbar ist $\sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{k=1}^{n} u_1(k,j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=n+1}^{2n} u_1(i,l)$, d. h.
$\sum_{j=n+1}^{2n} 2u_1(j) = \sum_{i=1}^{n} u_1(i) = n(n-1)(\lambda_1-\lambda_1')$, und damit
$2\,u_1(j) = (n-1)(\lambda_1-\lambda_1')$. Analog zeigen wir, daß
$2\,u_2(i) = (n-1)(\lambda_1-\lambda_1'')$ ist.
Wegen $g_1(i,j) + g_2(i,j) + u_1(i,j) + u_2(i,j) = \lambda_2$ und
$g_1(i,j) = g_2(i,j) = 0$ gilt (6).

Es folgt der Beweis der Hinlänglichkeit. Um zu zeigen, daß $\underline{T}$ ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB ist, brauchen wir nur 3. von Definition 5 zu überprüfen. Alle anderen Bedingungen sind trivialerweise erfüllt.
Nun gilt aber

$$t(i) = g_1(i) + g_2(i) + u_1(i) + u_2(i)$$
$$= \frac{\lambda_1'}{2}(n-1) + 0 + (\lambda_1-\lambda_1')(n-1) + \frac{\lambda_1-\lambda_1''}{2}(n-1) = \frac{n-1}{2}(3\lambda_1-\lambda_1'-\lambda_1'')$$

und

$$t(j) = g_1(j) + g_2(j) + u_1(j) + u_2(j)$$
$$= 0 + \frac{\lambda_1''}{2}(n-1) + \frac{\lambda_1-\lambda_1'}{2}(n-1) + (\lambda_1-\lambda_1'')(n-1) = \frac{n-1}{2}(3\lambda_1-\lambda_1'-\lambda_1''),$$

d. h., für alle $x \in M$ ist $t(x) = \text{const}$.
Für das Folgende vereinbaren wir: Ist ein 2GTBUB $\underline{T}$ in der Form $\underline{T}(\mathcal{B}) = \underline{G}_1(\mathcal{B}_1) \uplus \underline{G}_2(\mathcal{B}_2) \uplus \underline{U}_1(\mathcal{B}_3) \uplus \underline{U}_2(\mathcal{B}_4)$ (oder kürzer $\underline{T} = \underline{G}_1 \uplus \underline{G}_2 \uplus \underline{U}_1 \uplus \underline{U}_2$) gegeben, so soll damit die eindeutige Zerlegung von $\underline{T}$ in 4 Multimengen $\underline{G}_1$, $\underline{G}_2$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ gemeint sein, für die $\mathcal{B}_i \subseteq V_i$ (i=1,2,3,4) ist.

Unter der U_1-Tabelle bzw. der U_2-Tabelle verstehen wir die Anordnung der Werte von $u_1(i,j)$ bzw. $u_2(j,i)$ in folgender Form

$$\begin{array}{c|c} & n+1 \ldots j \ldots 2n \\ \hline 1 & \\ \vdots & \\ i & u_1(i,j) \\ \vdots & \\ n & \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c|c} & 1 \ldots i \ldots n \\ \hline n+1 & \\ \vdots & \\ j & u_2(j,i) \\ \vdots & \\ 2n & \end{array} \qquad \begin{array}{l} (i \in M_1, \\ \ j \in M_2). \end{array}$$

Satz 4: Es seien $\underline{T} = \underline{G}_1 \uplus \underline{G}_2 \uplus \underline{U}_1 \uplus \underline{U}_2$, $\underline{T}' = \underline{G}_1' \uplus \underline{G}_2' \uplus \underline{U}_1' \uplus \underline{U}_2'$ und $\underline{T}' = \pi(\underline{T})$ mit einer Permutation π von M.

1. Ist $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$, so gilt

$\underline{G}_1' = \pi(\underline{G}_1)$, $\underline{G}_2' = \pi(\underline{G}_2)$,

$\underline{U}_1' = \pi(\underline{U}_1)$, $\underline{U}_2' = \pi(\underline{U}_2)$ und

$$\begin{aligned} u_1(i,j) &= u_1' \, (\pi_1(i),\ \pi_2(j)), \\ u_2(j,i) &= u_2' \, (\pi_2(j),\ \pi_1(i)). \end{aligned} \tag{8}$$

2. Ist $\pi = f_1 \cdot f_2$, so gilt

$\underline{G}_1' = \pi(\underline{G}_2)$, $\underline{G}_2' = \pi(\underline{G}_1)$,

$\underline{U}_1' = \pi(\underline{U}_2)$, $\underline{U}_2' = \pi(\underline{U}_1)$ und

$$\begin{aligned} u_1(i,j) &= u_2' \, (f_1(i),\ f_2(j)), \\ u_2(j,i) &= u_1' \, (f_2(j),\ f_1(i)) \quad (i \in M_1,\ j \in M_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Beweis: Es sei $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$. Für $(x,y,z) \in \underline{G}_1$ ist $\pi(x,y,z)$ $= (\pi_1(x),\ \pi_1(y),\ \pi_1(z)) \in \underline{G}_1'$ und $g_1(x,y,z)$ $= g_1'(\pi_1(x),\ \pi_1(y),\ \pi_1(z))$ (vgl. Definition 6).

Für $(x,y,z) \notin \underline{G}_1$ ist $\pi(x,y,z) \notin G_1'$. Also gilt $\pi(\underline{G}_1) = \underline{G}_1'$. Die entsprechenden Beziehungen hierzu zeigt man analog.
Ist $(i,j) \subseteq B \in \underline{U}_1$, so ist offenbar $(\pi_1(i),\ \pi_2(j)) \subseteq \pi(B) \in \underline{U}_1'$.

Dagegen ist im Fall $(i,j) \notin B \in \underline{U}_1$ auch $(\pi_1(i),\pi_2(j)) \notin \pi(B) \in \underline{U}_1'$. Somit gilt $u_1(i,j) = u_1'(\pi_1(i),\pi_2(j))$. Genauso werden die weiteren Gleichungen (auch im Fall $\pi = f_1 \cdot f_2$) gezeigt.

Veranschaulichen kann man sich (8) und (9) wie folgt: Notwendig für $\underline{T} \cong \underline{T}'$ ist die Bedingung, daß die entsprechenden U_1- und U_2-Tabellen von $\underline{T}$ und $\underline{T}'$ durch Spalten- oder Reihenpermutation auseinander hervorgehen oder daß die $U_1(U_2)$-Tabelle von $\underline{T}$ aus der $U_2(U_1)$-Tabelle von $\underline{T}'$ durch Spalten- oder Reihenpermutation und Spiegelung an der Hauptdiagonalen hervorgeht. (Hierbei werden beim Permutieren die linke Spalte und obere Zeile unberücksichtigt gelassen. Diese Bemerkung gilt auch für später.)

Satz 5: Y sie die Familie aller $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB $\underline{T}$, für die $\underline{G}_1 \uplus \underline{G}_2 = \underline{Z}$ und $u_1(i,j) = a_{ij}$ ist ($i \in M_1$, $j \in M_2$). Hierbei sei $\underline{Z}$ eine feste Multimenge, und die a_{ij} seien feste Zahlen. Ferner möge für jede Permutation π, die in der Form $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$ von Satz 2 aufspaltbar ist, $\pi(\underline{Z}) = \underline{Z}$ gelten. Weiterhin sei $\underline{T}'$ ein $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB, für den $\underline{G}_1' \uplus \underline{G}_2' = \underline{Z}$ ist. Dann gilt:
Ist $u_1'(\pi_1(i), \pi_2(j)) = a_{ij}$, so existiert ein $\underline{T} \in Y$ mit $\underline{T} \cong \underline{T}'$.

Beweis: Es sei $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$ und $\underline{T} = \pi^{-1}(\underline{T}') = \underline{G}_1 \uplus \underline{G}_2 \uplus \underline{U}_1 \uplus \underline{U}_2$.
Nach Voraussetzung ist $\pi^{-1}(\underline{G}_1' \uplus \underline{G}_2') = \underline{Z}$.
Andererseits erhält man wegen (2) und Satz 4
$\pi^{-1}(\underline{G}_1' \uplus \underline{G}_2') = \pi^{-1}(\underline{G}_1') \uplus \pi^{-1}(\underline{G}_2') = G_1 \uplus G_2$, d. h. $\underline{G}_1 \uplus \underline{G}_2 = \underline{Z}$.
Weiterhin ist wegen (8) $u_1(i,j) = a_{ij}$, d. h. $\underline{T} \in Y$ und $\underline{T} \cong T'$.

Bemerkung: Der Satz gilt auch, wenn wir überall statt $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB nur wiederholungsfreie $(v,k,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB betrachten. Mit $\underline{T}$ ist nämlich auch $\pi(\underline{T})$ wiederholungsfrei. Ein analoger Satz läßt sich formulieren, wenn wir $\pi = f_1 \cdot f_2$ anstelle von $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$ zugrunde legen.

3. Bestimmung von $f_t^*(4,3)$ und $f_t(4,3)$

Satz 6: Es gilt $f_t^*(4,3) = f_t(4,3) = 1$.

Beweis: Sei $\underline{T}$ ein $(4,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB. Wir setzen

$t_1 = t(1,2,3)$, $t_2 = t(1,2,4)$, $t_3 = t(1,3,4)$, $t_4 = t(2,3,4)$.

Dann gilt $t_1 + t_2 = t_3 + t_4 = \lambda_1$,

$t_1 + t_3 = t_2 + t_3 = t_1 + t_4 = t_2 + t_4 = \lambda_2$. Also ist

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2}{2} . \tag{10}$$

Es sei $\underline{T}_1$: (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4). $\underline{T}_1$ ist ein (4,3,2,2)-2GTBUB. Wegen (10) gilt für jeden $(4,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB $\underline{T}$, daß $\underline{T}_1 \subseteq \underline{T}$ ist. Da außerdem $\underline{T}_1$ wiederholungsfrei ist, gilt $f_t^*(4,3) = f_t(4,3) = 1$.

4. Bestimmung von $f_t^*(6,3)$ und $f_t(6,3)$

Aus (1) ergibt sich

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2r = b. \tag{11}$$

Im folgenden bestimmen wir für $r \leq 12$ sechs elementare, paarweise nichtisomorphe $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB. Dabei wird sich zeigen, daß es für $r \leq 12$ bis auf Isomorphie keine weiteren elementaren 2GTBUB gibt und alle $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB mit $r > 12$ zusammengesetzt sind. Für $r = 1$ ist $\underline{T}_1$: (1,2,3), (4,5,6) eindeutig bestimmt. Bei der Ermittlung weiterer elementarer 2GTBUB $\underline{T}$ können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß $(4,5,6) \notin \underline{T}$ ist.

Satz 7: Ist $\underline{T}$ ein $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB mit $(4,5,6) \notin \underline{T}$, so gilt:

$$\begin{aligned} &g_1(1,2,3) = 2\lambda_1 - \tfrac{3}{2}\lambda_2, \quad \frac{u_1(i)}{2} = u_1(j) = u_1(i,i') = r_1, \\ &\frac{u_2(j)}{2} = u_2(i) = u_2(j,j') = \lambda_1, \quad u_1(i,j) \leq r_1, \quad u_2(j,i) \leq \lambda_1, \end{aligned} \tag{12}$$

$$4\lambda_1 \geq 3\lambda_2 \geq 2\lambda_1. \tag{13}$$

(Hierbei seien $r_1 := \frac{3}{2}\lambda_2 - \lambda_1$ und $i,i' \in M_1$, $j,j' \in M_2$.)

<u>Beweis:</u> Es ist Satz 3 mit $\lambda_1' = g_1(1,2,3)$ und $\lambda_1'' = 0$ anwendbar. Wegen (3) gilt

$$u_1(1,2) + u_1(1,3) + u_1(2,3) = 3\lambda_1 - 3g_1(1,2,3),$$

$$u_2(4,5) + u_2(4,6) + u_2(5,6) = 3\lambda_1.$$

Außerdem ist

$$g_1(1,2,3) + u_1(1,2) + u_1(1,3) + u_1(2,3) + u_2(4,5) + u_2(4,6) + u_2(5,6) = b = 2\lambda_1 + 3\lambda_2.$$

Also gilt $g_1(1,2,3) = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 6\lambda_1 + 3g_1(1,2,3)$ bzw.

$$g_1(1,2,3) = 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2.$$

Wegen (3) ist daher $u_1(i,i') = r_1$. Aus (4) und (7) folgt

$2u_1(j) = 2(\lambda_1 - g_1(1,2,3)) = 2r_1$, also $u_1(j) = r_1$.

Offenbar ist dann $u_1(i,j) \leq r_1$. Die restlichen Beziehungen von (12) ergeben sich ebenfalls aus Satz 3. (13) gilt wegen $g_1(1,2,3) \geq 0$ und $u_1(j) \geq 0$.

Für $2 \leq r \leq 12$ ergeben sich genau folgende Lösungen von (11) und (13) im Bereich der natürlichen Zahlen:

r	λ_1	λ_2	Es ist dann $g_1(1,2,3)$	r_1
5	2	2	1	1
6	3	2	3	0
9	3	4	0	3
10	4	4	2	2
11	5	4	4	1
12	6	4	6	0

<u>Fall $r = 5$:</u> Es sei $\underline{T}_2$: 123 145 246 346
124 156 256
136 235 345.

$\underline{T}_2$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. /5/, Satz 4).

Für die Betrachtung der Fälle $r = 6$ und $r = 9$ ist folgende Bemerkung, die leicht nachzuprüfen ist, wichtig:

Aus $u_1(a_1,j) = 1$, $u_1(a_2,j) = 2$, $u_1(a_3,j) = 3$ folgt
$t(a_1,a_2,j) = 0$, $t(a_1,a_3,j) = 1$, $t(a_2,a_3,j) = 2$, und aus
$u_1(a_1,j) = 2$, $u_1(a_2,j) = 2$, $u_1(a_3,j) = 2$ folgt
$t(a_1,a_2,j) = t(a_1,a_3,j) = t(a_2,a_3,j) = 1 \quad (\{a_1,a_2,a_3\} = M_1,\ j \in M_2)$.
Analoges gilt für die U_2-Tabelle.

Fall $r = 6$: Wegen Satz 7 und (6) liegen folgende Tabellen vor:

U_1-Tabelle

	4	5	6
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

U_2-Tabelle

	1	2	3
4	2	2	2
5	2	2	2
6	2	2	2

.

Hieraus ergibt sich eindeutig

T_3:

1 2 3	4 5 1	4 6 1	5 6 1
1 2 3	4 5 2	4 6 2	5 6 2
1 2 3	4 5 3	4 6 3	5 6 3

Fall $r = 9$: Nach Satz 7 ist $u_1(j) = u_2(i) = 3$, $u_1(i) = u_2(j) = 6$ und $u_1(i,j) \leq 3$, $u_2(j,i) \leq 3$ $(i \in M_1,\ j \in M_2)$.
Wegen (6) und (7) kommen bis auf Reihen- oder Spaltenpermutation nur folgende drei U_1-Tabellen in Frage:

	4	5	6
1	1	2	3
2	2	2	2
3	3	2	1

	4	5	6
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

	4	5	6
1	2	2	2
2	2	2	2
3	2	2	2

.

Die entsprechenden U_2-Tabellen sind:

	1	2	3
4	3	2	1
5	2	2	2
6	1	2	3

	1	2	3
4	3	2	1
5	2	1	3
6	1	3	2

	1	2	3
4	2	2	2
5	2	2	2
6	2	2	2

.

Hieraus ergeben sich eindeutig folgende 2GTBUB:

T_4:

1 3 4	1 2 5	1 2 6	4 5 1	4 5 2	4 6 3
2 3 4	1 3 5	1 2 6	4 5 1	4 6 2	5 6 3
2 3 4	2 3 5	1 3 6	4 6 1	5 6 2	5 6 3

T_5:

1 3 4	1 2 5	1 2 6	4 5 1	4 6 2	4 5 3
2 3 4	1 2 5	1 3 6	4 5 1	4 6 2	5 6 3
2 3 4	2 3 5	1 3 6	4 6 1	5 6 2	5 6 3

$\underline{T}_6$:	1 2 4	1 2 5	1 2 6	4 5 1	4 5 2	4 5 3
	1 3 4	1 3 5	1 3 6	4 6 1	4 6 2	4 6 3
	2 3 4	2 3 5	2 3 6	5 6 1	5 6 2	5 6 3.

Nach Satz 5 sind $\underline{T}_3$ bis $\underline{T}_6$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. (Die entsprechende Familie Y besteht nämlich jeweils nur aus einem 2GTBUB.)
Berücksichtigt man Satz 1 und die Lösungsmenge von (11) und (13) für $2 \leq r \leq 9$, so erhält man leicht, daß $\underline{T}_1,\ldots,\underline{T}_6$ elementar sind. Außerdem sind sie wegen Satz 4 paarweise nicht isomorph.

Fall $r = 10$: Wegen $\lambda_1 = \lambda_2$ ist ein 2GTBUB mit $r = 10$ zusammengesetzt (vgl. /1/).

Fall $r = 11$: $\underline{T}$ ist zusammengesetzt, es ist nämlich $\underline{T}_3 \subset\!\!\!\!+ \underline{T}$.
Wäre o.B.d.A. $(4,5,1) \notin \underline{U}_2$, so würde $u_2(1,6) = u_2(1) = 5$ gelten im Widerspruch zu $\lambda_2 = 4$. Also ist $\underline{T}_3 \subseteq\!\!\!\!+ \underline{T}$. Die Beziehung $\underline{T}_3 \neq \underline{T}$ ist offensichtlich richtig, also ist $\underline{T}_3 \subset\!\!\!\!+ \underline{T}$. Im folgenden werden wir auf solche Bemerkungen wie $\underline{T}_3 \neq \underline{T}$ verzichten.

Fall $r = 12$: Wir schließen analog wie im Fall $r = 11$.

Die folgenden Sätze 8, 9 und 10 benötigen wir, um zu zeigen, daß alle 2GTBUB mit $r > 12$ zusammengesetzt sind.

Satz 8: Ist $\underline{T}$ ein $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB mit $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$, $\lambda_1 \geq 5$, $t(1,2,4) = 0$ und $t(1,2,5) = 1$, so ist $\underline{T}$ zusammengesetzt.

Beweis: Es muß $t(1,3,6) = 1$ und $t(2,3,6) = 0$ oder $t(1,3,6) = 0$ und $t(2,3,6) = 1$ sein. Wir setzen o.B.d.A. $t(1,3,6) = 1$.

Wegen der Voraussetzung und wegen (12) gilt:

$$t(1,2,3) = \frac{\lambda_1 - 3}{2},\ t(1,2,4) = 0,\ t(1,2,5) = 1,$$

$$t(1,2,6) = \frac{\lambda_1 + 1}{2}\ \ (u_1(1,2) = r_1),\ t(1,3,6) = 1,$$

$$t(2,3,6) = 0\ (u_1(6) = r_1),\ t(4,5,3) = 0\ (t(3,6) = \lambda_1 + 1 \text{ und } u_2(3) = \lambda_1).$$

Setzt man $t(1,3,4) = x$, so ist

$$t(1,3,5) = \frac{\lambda_1+1}{2} - x \quad (u_1(1,3) = r_1),$$

$$t(2,3,4) = \frac{\lambda_1+3}{2} - x \quad (u_1(4) = r_1), \quad t(2,3,5) = x \quad (u_1(5) = r_1),$$

$$t(5,6,3) = \frac{\lambda_1+1}{2} \quad (t(3,5) = \lambda_1 + 1).$$

Weiterhin gelten wegen $u_2(1) = \lambda_1$ und $u_2(6,1) = \lambda_1 + 1 - \frac{\lambda_1+3}{2}$ die Gleichungen

$$t(4,5,1) = (t(4,5,1) + t(4,6,1) + t(5,6,1)) - (t(4,6,1) + t(5,6,1))$$

$= \lambda_1 - \frac{\lambda_1-1}{2} = \frac{\lambda_1+1}{2}$. Also ist

$$t(4,5,2) = \frac{\lambda_1-1}{2} \quad (u_2(4,5) = \lambda_1), \quad t(4,6,1) = \frac{\lambda_1+1}{2} - x \quad (t(4,1) = \lambda_1+1),$$

$$t(4,6,2) = x \quad (t(4,2) = \lambda_1+1), \quad t(4,6,3) = \frac{\lambda_1-1}{2} \quad (t(4,3) = \lambda_1+1),$$

$$t(5,6,1) = x-1 \quad (t(5,1) = \lambda_1+1), \quad t(5,6,2) = \frac{\lambda_1+1}{2} - x \quad (t(5,2) = \lambda_1+1).$$

Offenbar gilt $1 \leq x \leq \frac{\lambda_1+1}{2}$. Für $1 \leq x \leq \frac{\lambda_1-1}{2}$ ist $\underline{T}_4 \Subset \underline{T}$, und für $x = \frac{\lambda_1+1}{2}$ ist $\pi(\underline{T}_5) \Subset \underline{T}$, wobei wir $\pi = (2\ 3)\ (4\ 5)$ wählen.

<u>Satz 9:</u> Es sei $\underline{T}$ ein $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB mit $\lambda_1,\lambda_2 \geq 5$. Dann ist $\underline{T}$ zusammengesetzt, oder es gilt:

$$t(a_1,a_2,b_1) = 0 \Longrightarrow t(a_1,a_3,b_1) \geq 2, \tag{14}$$

$$t(a_1,a_2,b_1) = 0 \Longrightarrow t(a_1,a_2,b_2) \geq 2, \tag{15}$$

$$t(b_1,b_2,a_1) = 0 \Longrightarrow t(b_1,b_3,a_1) \geq 2, \tag{16}$$

$$t(b_1,b_2,a_1) = 0 \Longrightarrow t(b_1,b_2,a_2) \geq 2, \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} t(a_1,a_2,b_1) = 0 \\ t(a_1,a_3,b_2) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow t(b_1,b_2,a_1) \geq 2, \tag{18}$$

$$\left.\begin{array}{l} t(b_1,b_2,a_1) = 0 \\ t(b_1,b_3,a_2) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow t(a_1,a_2,b_1) \geq 2, \tag{19}$$

$$t(a_1,a_2,b_1) = 0 \Longrightarrow t(b_2,b_3,a_3) \geq 2, \tag{20}$$

$$t(b_1,b_2,a_1) = 0 \Longrightarrow t(a_2,a_3,b_3) \geq 2, \tag{21}$$

$$(\{a_1,a_2,a_3\} = M_1, \quad \{b_1,b_2,b_3\} = M_2).$$

<u>Beweis:</u> Angenommen, $\underline{T}$ wäre elementar und eine der Beziehungen gälte nicht.

(14): Aus $t(a_1,a_2,b_1) = 0$ und $t(a_1,a_3,b_1) \leq 1$ folgt $u_1(a_1,b_1) \leq 1$, d. h., $\lambda_1 \geq u_2(b_1,a_1) \geq \lambda_2 - 1$.

1. Fall: $\lambda_2 < \lambda_1$. Es ist $t(1,2,3) = 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 \geq \frac{\lambda_1}{2} \geq 3$.
Wäre $t(b_4,b_5,a_4) = 0$, so würde gelten
$u_2(b_6,a_4) = \lambda_1 \leq \lambda_2$ $(\{b_4,b_5,b_6\} = M_2,\ a_4 \in M_1)$.
Folglich gilt $\underline{T}_3 \not\subseteq \underline{T}$.

2. Fall: $\lambda_2 = \lambda_1$. Wegen $\lambda_2 = \lambda_1 \geq 5$ ist $\underline{T}$ zusammengesetzt (vgl. /1/).

3. Fall: $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$. Dieser Fall ist nur möglich, wenn $t(a_1,a_3,b_1) = 1$ ist $(u_2(b_1,a_1) \leq \lambda_1)$. Dann wäre aber $t(a_2,a_3,b_1) = r_1 - 1$ und $t(a_2,a_3,b_2) = 0$, $t(a_2,a_3,b_3) = 1$.

Es sei $\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Mit $\underline{T}$ wäre aber auch $\pi(\underline{T})$ elementar im Widerspruch zu Satz 8.

(15): Aus $t(a_1,a_2,b_1) = 0$ und $t(a_1,a_2,b_2) \leq 1$ folgt $t(a_1,a_2,b_3) \geq r_1 - 1$. Also ist $t(a_1,a_3,b_3) = 0$, $t(a_2,a_3,b_3) \leq 1$ oder $t(a_1,a_3,b_3) \leq 1$, $t(a_2,a_3,b_3) = 0$. Das widerspricht (14).

(16): Aus $t(b_1,b_2,a_1) = 0$ und $t(b_1,b_3,a_1) \leq 1$ folgt $u_2(b_1,a_1) \leq 1$, also ist $u_1(a_1,b_1) \geq \lambda_2 - 1$. Somit gilt $\frac{3}{2}\lambda_2 - \lambda_1 \geq \lambda_2 - 1$ bzw. $\lambda_2 \geq 2\lambda_1 - 2$.

Berücksichtigen wir (13), so erhalten wir $4\lambda_1 \geq 3\lambda_2 \geq 6\lambda_1 - 6$ und $\lambda_1 \leq 3$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(17): Aus $t(b_1,b_2,a_1) = 0$ und $t(b_1,b_2,a_2) \leq 1$ folgt $t(b_1,b_2,a_3) \geq \lambda_1 - 1$. Also ist o.B.d.A. $t(b_1,b_3,a_3) = 0$ und $t(b_2,b_3,a_3) \leq 1$ im Widerspruch zu (16).

(18): Ist $t(a_1,a_2,b_1) = 0$, $t(a_1,a_3,b_2) = 0$, $t(b_1,b_2,a_1) \leq 1$, so gilt $u_1(a_3,b_1) = u_1(a_2,b_2) = r_1$ und
$u_2(b_1,b_2,a_2) + u_2(b_1,b_2,a_3) \geq \lambda_1 - 1$. Also ist
$u_2(b_1,a_3) + u_2(b_2,a_2) \geq \lambda_1 - 1$. Wir erhalten
$2\lambda_2 = u_1(a_3,b_1) + u_1(a_2,b_2) + u_2(b_1,a_3) + u_2(b_2,a_2)$
$\geq 2r_1 + \lambda_1 - 1 = 3\lambda_2 - \lambda_1 - 1$, d. h. $\lambda_2 \leq \lambda_1 + 1$.
Wegen $t(b_1,b_2,a_1) \leq 1$ ist weiterhin $u_2(b_3,a_1) \geq \lambda_1 - 1$.
Nach (15) gilt $t(a_1,a_2,b_3) \geq 2$ und $t(a_1,a_3,b_3) \geq 2$, also
$u_1(a_1,b_3) \geq 4$. Mithin gilt $\lambda_2 = u_1(a_1,b_3) + u_2(b_3,a_1) \geq \lambda_1 + 3$.
Das ist ein Widerspruch zu $\lambda_2 \leq \lambda_1 + 1$.

(19): Für $t(b_1,b_2,a_1) = 0$, $t(b_1,b_3,a_2) = 0$, $t(a_1,a_2,b_1) \leq 1$ ist $u_2(b_3,a_1) = u_2(b_2,a_2) = \lambda_1$ und $u_1(a_1,b_3) + u_1(a_2,b_2) \geq r_1 - 1$.
Wir erhalten $2\lambda_2 \geq 2\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 - \lambda_1 - 1$ bzw. $\lambda_2 \geq 2\lambda_1 - 2$.
Wegen (13) gilt dann $4\lambda_1 \geq 3\lambda_2 \geq 6\lambda_1 - 6$ und $\lambda_1 \leq 3$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(20): Aus $t(a_1,a_2,b_1) = 0$ und $t(b_2,b_3,a_3) \leq 1$ folgt
$u_1(a_3,b_1) = r_1$ und $u_2(b_1,a_3) \geq \lambda_1 - 1$.
Also ist $\lambda_2 \geq r_1 + \lambda_1 - 1 = \frac{3}{2}\lambda_2 - 1$ bzw. $\lambda_2 \leq 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(21): Aus $t(b_1,b_2,a_1) = 0$ und $t(a_2,a_3,b_3) \leq 1$ folgt
$u_2(b_3,a_1) = \lambda_1$ und $u_1(a_1,b_3) \geq r_1 - 1$.

Also ist $\lambda_2 \geq \lambda_1 + r_1 - 1$ bzw. $\lambda_2 \leq 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Satz 10: Ein $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB $\underline{T}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \geq 5$ ist zusammengesetzt.

Beweis: Angenommen, es gäbe einen solchen elementaren 2GTBUB $\underline{T}$. Dann müssen die Beziehungen (14) bis (21) gelten. Mit deren Hilfe zeigen wir, daß $\underline{T}$ zusammengesetzt ist, und erhalten so einen Widerspruch. $h(V_3)$ bzw. $h(V_4)$ bezeichne die Anzahl derjenigen Elemente von V_3 bzw. V_4, die nicht in $\underline{T}$ enthalten sind. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

	$h(V_3)$	$h(V_4)$	
1.1	0	0	
1.2	0	1	$t(4,5,1) = 0$
1.3	0	≥ 2	$t(4,5,1) = t(4,6,2) = 0$
2.1	1	0	$t(1,2,4) = 0$
2.2	1	1	$t(1,2,4) = 0$
2.3	1	≥ 2	$t(1,2,4) = 0$
3.1	≥ 2	0	$t(1,2,4) = t(1,3,5) = 0$
3.2	≥ 2	≥ 1	$t(1,2,4) = t(1,3,5) = 0.$

Im Fall 1.1 ist $\underline{T}_6 \Subset \underline{T}$, d. h., $\underline{T}$ ist zusammengesetzt. In den Fällen 1.2 und 1.3 können wir o.B.d.A. annehmen, daß $t(4,5,1) = 0$ bzw. $t(4,5,1) = t(4,6,2) = 0$ ist. (Man beachte (16) und (17).) Unter Berücksichtigung von (14) und (15) können wir in den Fällen 2.1, 2.2, 2.3 und 3.1, 3.2 o.B.d.A. $t(1,2,4) = 0$ bzw. $t(1,2,4) = t(1,3,5) = 0$ setzen. (Dies ist in der 4. Spalte der obigen Tabelle mit angegeben.)
Wir ermitteln isomorphe 2GTBUB zu $\underline{T}_4$ und $\underline{T}_5$, für die $t(1,2,4) = 0$ bzw. $t(4,5,1) = 0$ ist, wie folgt. In den entsprechenden U_1- bzw. U_2-Tabellen nehmen wir beliebige Spalten- oder Reihenpermutationen vor unter der Voraussetzung, daß die entstehenden Tabellen folgendermaßen beschaffen sind:

U$_1$-Tabelle

	4	5	6
1	1	.	.
2	2	.	.
3	3	.	.

	4	5	6
1	2	.	.
2	1	.	.
3	3	.	.

bzw.

U$_2$-Tabelle

	1	2	3
4	1	.	.
5	2	.	.
6	3	.	.

	1	2	3
4	2	.	.
5	1	.	.
6	3	.	.

.

Aus den Tabellen lassen sich dann leicht die 2GTBUB ablesen. Die 2GTBUB werden in abgekürzter Schreibweise angegeben. In der linken bzw. rechten Spalte stehen diejenigen Blöcke (x,y,z), für die t(x,y,z) = 0 bzw. t(x,y,z) = 2 ist. Für alle anderen Blöcke (x,y,z) gilt dann t(x,y,z) = 1 ((x,y,z) $\in V_3 \cup V_4$).

T_{41}:

1 2 4	2 3 4	(14)
2 3 6	1 2 6	(15)
5 6 1	4 5 1	
4 5 3	5 6 3	(20)

T_{42}:

1 2 4	2 3 4	(14)
2 3 5	1 2 5	(15)
5 6 1	4 6 1	
4 6 3	5 6 3	(20)

T_{43}:

1 2 4	1 3 4	(14)
1 3 6	1 2 6	(15)
5 6 2	4 5 2	
4 5 3	5 6 3	(20)

T_{44}:

1 2 4	1 3 4	(14)
1 3 5	1 2 5	(15)
5 6 2	4 6 2	((20))
4 6 3	5 6 3	(20)

T_{51}:

1 2 4	2 3 4	(14)
1 3 5	1 2 5	(15)
2 3 6	1 3 6	((15))
5 6 1	4 5 1	((18))
4 5 2	4 6 2	((20))
4 6 3	5 6 3	(20)

T_{52}:

1 2 4	2 3 4	(14)
2 3 5	1 3 5	
1 3 6	1 2 6	(15)
5 6 1	4 6 1	
4 6 2	4 5 2	
4 5 3	5 6 3	(20)

T_{53}:

1 2 4	1 3 4	(14)
1 3 5	2 3 5	((14))
2 3 6	1 2 6	(15)
4 6 1	4 5 1	((18))
5 6 2	4 6 2	((20))
4 5 3	5 6 3	(20)

T_{54}:

1 2 4	1 3 4	(14)
2 3 5	1 2 5	(15)
1 3 6	2 3 6	
4 5 1	4 6 1	
5 6 2	4 5 2	
4 6 3	5 6 3	(20)

T_{45}:

2 3 4	1 2 4	
1 2 6	2 3 6	(21)
4 5 1	5 6 1	(16)
5 6 3	4 5 3	(17)

T_{46}:

2 3 4	1 3 4	
1 3 6	2 3 6	(21)
4 5 1	5 6 1	(16)
5 6 2	4 5 2	(17)

T_{47}:

2 3 5	1 2 5	
1 2 6	2 3 6	(21)
4 5 1	4 6 1	(16)
4 6 3	4 5 3	(17)

T_{48}:

2 3 5	1 3 5	
1 3 6	2 3 6	(21)
4 5 1	4 6 1	(16)
4 6 2	4 5 2	(17)

$\underline{T}_{55}$:

2 3 4	1 2 4	
1 2 5	1 3 5	
1 3 6	2 3 6	(21)
4 5 1	5 6 1	(16)
4 6 2	4 5 2	(17)
5 6 3	4 6 3	.

Wir werden zeigen, daß in den Fällen 1.2 bis 3.2 einer der angegebenen 2GTBUB $\underline{T}_{\alpha\beta}$ Teilmultimenge von $\underline{T}$ ist, und erhalten so einen Widerspruch zur Annahme. Offenbar sind dafür folgende Bedingungen hinreichend:

Ist $t(x,y,z) = 0$, so ist $t_{\alpha\beta}(x,y,z) = 0$. (22)

Ist $t_{\alpha\beta}(x,y,z) = 2$, so ist $t(x,y,z) \geq 2$. (23)

Wir werden deshalb für die Fälle 1.2 bis 3.2 unter Berücksichtigung von Satz 9 $\underline{T}_{\alpha\beta}$ so bestimmen, daß (22) und (23) erfüllt sind. In der obigen Tabelle bedeutet (x,y,z) (i) folgendes: Wegen $t(1,2,4) = 0$ bzw. $t(4,5,1) = 0$ und wegen (i) aus Satz (9) ist $t(x,y,z) \geq 2$. (x,y,z) ((i)) dagegen bedeutet: Wegen $t(1,2,4) = 0$, $t(1,3,5) = 0$ und wegen (i) aus Satz 9 ist $t(x,y,z) \geq 2$. Ausdrücke der Form (i), (j), (k) $\Rightarrow \underline{T}_{\alpha\beta} \Subset \underline{T}$ sollen darauf hinweisen, daß mit Hilfe der entsprechenden Beziehungen von Satz 9 gemeinsam mit den in der obigen Tabelle angegebenen Beziehungen gezeigt werden kann, daß $\underline{T}_{\alpha\beta} \Subset \underline{T}$ gilt.

Ausdrücke wie (i), (j), (k) $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $t(x_1,y_1,z_1) = 0$ oder $t(x_2,y_2,z_2) = 0$ bedeuten: Wegen (i), (j), (k) kann höchstens $t(x,y,z) = 0$ oder (und) $t(x_2,y_2,z_2) = 0$ sein.

1.2: Wir nehmen an, daß $t(1,2,4) = t(1,3,4) = t(1,2,5) = t(1,3,5) = 1$ ist. Dann gilt $t(1,2,6) = t(1,3,6) = r_1-2$, d. h. $u_1(1,6) = 2r_1-4$.

Wegen $t(4,5,1) = 0$ ist $u_2(6,1) = \lambda_1$. Wir erhalten

$$\lambda_2 = 2r_1-4 + \lambda_1 = 3\lambda_2 - \lambda_1-4 \text{ bzw. } \lambda_1 = 2\lambda_2-4.$$

Wegen $u_2(6,1) = \lambda_1$ ist $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Also ist $2\lambda_2-4 \leq \lambda_2$ bzw. $\lambda_2 \leq 4$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Somit gilt $\underline{T}_{45} \Subset \underline{T}$, $\underline{T}_{46} \Subset \underline{T}$, $\underline{T}_{47} \Subset \underline{T}$ oder $\underline{T}_{48} \Subset \underline{T}$.

1.3: (17), (16) $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $t(5,6,3) = 0$, also (19), (21), (17) $\Rightarrow \underline{T}_{55} \Subset \underline{T}$.

2.1: Wäre $T(4,5,1) = t(4,6,1) = t(4,5,2) = t(4,6,2) = 1$, so würde $t(4,5,3) = t(4,6,3) = \lambda_1-2$, d. h.

$u_2(3) = \lambda_1 \geq 2\lambda_1-4$ bzw. $\lambda_1 \leq 4$ gelten im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es ist also $\underline{T}_{41} \notin \underline{T}$, $\underline{T}_{42} \notin \underline{T}$, $\underline{T}_{43} \notin \underline{T}$ oder $\underline{T}_{44} \notin \underline{T}$.

2.2.1: $t(4,5,1) = 0$: (21), (16), (17) $\Longrightarrow \underline{T}_{54} \notin \underline{T}$.

2.2.2: $t(4,5,2) = 0$: (21), (17), (16) $\longrightarrow \underline{T}_{51} \notin \underline{T}$.

2.2.3: $t(4,5,3) = 0$: (17) $\longrightarrow \underline{T}_{43} \notin \underline{T}$.

2.2.4: $t(4,6,1) = 0$: (21), (16), (17) $\Longrightarrow \underline{T}_{53} \notin \underline{T}$.

2.2.5: $t(4,6,2) = 0$: (21), (17), (16) $\longrightarrow \underline{T}_{52} \notin \underline{T}$.

2.2.6: $t(4,6,3) = 0$: (17) $\longrightarrow \underline{T}_{44} \notin \underline{T}$.

2.2.7: $t(5,6,1) = 0$: (16) $\longrightarrow \underline{T}_{42} \notin \underline{T}$.

2.2.8: $t(5,6,2) = 0$: (16) $\Longrightarrow \underline{T}_{43} \notin \underline{T}$.

2.3.1: $t(4,5,1) = 0$: (17), (16), (19), (20) $\overset{\sim}{\Longrightarrow} t(4,6,3) = 0$ oder $t(5,6,2) = 0$. Es ist $\underline{T}_{54} \notin \underline{T}$ (vgl. 2.2.1).

2.3.2: $t(4,5,2) = 0$: (17), (19), (16), (20) $\overset{\sim}{\Longrightarrow} t(4,6,3) = 0$ oder $t(5,6,1) = 0$. Es ist $\underline{T}_{51} \notin \underline{T}$ (vgl. 2.2.2).

2.3.3.1: $t(4,5,3) = t(4,6,1) = 0$: (17), (16) $\overset{\sim}{\Longrightarrow} t(5,6,2) = 0$. Es ist $\underline{T}_{53} \notin \underline{T}$ (vgl. 2.2.4).

2.3.3.2: $t(4,5,3) = t(4,6,2) = 0$: (16) $\overset{\sim}{\Longrightarrow} t(5,6,1) = 0$. Es ist $\underline{T}_{52} \notin \underline{T}$ (vgl. 2.2.5).

Im weiteren können wir also für den Fall 2.3 voraussetzen, daß $t(4,5,i) \neq 0$ ist ($i \in M_1$).

2.3.4: $t(4,6,1) = 0$: (17), (16), (20) $\overset{\sim}{\Longrightarrow} t(5,6,2) = 0$. Es ist $\underline{T}_{53} \notin \underline{T}$ (vgl. 2.2.4).

2.3.5: $t(4,6,2) = 0$: (17), (16), (20) $\overset{\sim}{\Longrightarrow} t(5,6,1) = 0$. Es ist $\underline{T}_{52} \notin \underline{T}$ (vgl. 2.2.5).

2.3.6.1: $t(4,6,3) = t(5,6,1) = 0$: (19), (16), (17) $\Rightarrow \underline{T}_{51} \notin \underline{T}$.

2.3.6.2: $t(4,6,3) = t(5,6,2) = 0$: (17) $\Rightarrow \underline{T}_{44} \notin \underline{T}$.

3: (14), (15) $\Rightarrow$ $t(2,3,6) = 0$.

3.1: Es ist $\underline{T}_{51} \Subset \underline{T}$.

3.2.1: $t(4,5,2) = 0$: (17), (19), (16), (20) $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $t(4,6,3) = 0$
oder $t(5,6,1) = 0$. Es ist $\underline{T}_{51} \Subset T$.

3.2.2: $t(4,5,3) = 0$: (20), (16), (19) $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $t(4,6,1) = 0$
oder $t(5,6,2) = 0$. Es ist $\underline{T}_{53} \Subset \underline{T}$.

Wir können nun für 3.2 $t(4,5,i) \neq 0$ voraussetzen ($i \in M_1$).

3.2.3: $t(4,6,1) = 0$ (17), (16), (20) $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $t(5,6,2) = 0$.
Es ist $\underline{T}_{53} \Subset \underline{T}$.

3.2.4.1: $t(4,6,3) = 0$, $t(5,6,2) > 0$: (16) $\overset{\sim}{\Rightarrow}$ $t(5,6,1) = 0$.
Es ist $\underline{T}_{51} \Subset \underline{T}$.

3.2.4.2: $t(4,6,3) = t(5,6,2) = 0$: Wegen (19) ist $t(2,3,6) > 0$.
Es ist $\underline{T}_{44} \Subset \underline{T}$.

Wir können weiterhin für 3.2 $t(4,6,i) \neq 0$ voraussetzen ($i \in M_1$).

3.2.5: $t(5,6,1) = 0$: Es ist $\underline{T}_{51} \Subset \underline{T}$.

3.2.6: $t(5,6,2) = 0$: Es ist $\underline{T}_{53} \Subset \underline{T}$.

Damit sind alle möglichen Fälle erfaßt.

<u>Satz 11:</u> Es gilt $f_t(6,3) = 6$, $f_t^*(6,3) = 3$.

<u>Beweis:</u> Die Überlegungen zu Beginn von 4. führten zum Resultat, daß für $1 \leq r \leq 12$ bis auf Isomorphie $\underline{T}_1, \ldots, \underline{T}_6$ die einzigen elementären, paarweise nichtisomorphen $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB sind. Für $r > 12$ ist wegen (11) $2\lambda_1 + 3\lambda_2 > 24$ und wegen (13)

$6\lambda_1 = 2\lambda_1 + 4\lambda_1 \geq 2\lambda_1 + 3\lambda_2 > 24$, d. h. $\lambda_1 \geq 5$, und

$6\lambda_2 = 3\lambda_2 + 3\lambda_2 \geq 2\lambda_1 + 3\lambda_2 > 24$, d. h. $\lambda_2 \geq 5$.

Wegen Satz 10 sind also alle $(6,3,\lambda_1,\lambda_2)$-2GTBUB mit $r > 12$ zusammengesetzt. Es ergibt sich $f_t(6,3) = 6$. Unter diesen 6 elementaren 2GTBUB sind $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$, $\underline{T}_6$ die einzigen wiederholungsfreien, also ist $f_t^*(6,3) = 3$.

5. Ermittlung einer Abschätzung für $f_t^*(8,3)$

Satz 12: Es gilt $8 \leq f_t^*(8,3) \leq 58$.

Aus Platzgründen müssen wir hier auf einen ausführlichen Beweis verzichten. Es werden alle Lösungen des Systems $8r = 3b$, $3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2r$, $2\lambda_2 \leq 3\lambda_1 \leq 2\lambda_2 + 6$ im Bereich der natürlichen Zahlen untersucht. Hierbei ist $r = 9$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $b = 24$ der einzige schwierige Fall. Er führt auf die Betrachtung von 8 U_1- bzw. U_2-Tabellen, die nicht paarweise durch Reihen- oder Spaltenpermutation auseinander hervorgehen. Für 2 dieser Tabellen sind umfangreichere Überlegungen nötig, um die maximale Anzahl von paarweise nichtisomorphen 2GTBUB, die zu diesen Tabellen gehören, zu ermitteln. Vorerst konnte dafür nur eine Abschätzung angegeben werden. Nach Zusammenfassung der Resultate aller Fälle erhält man die obige Abschätzung.

Literatur

/1/ Burosch, G.: Über die Anzahl elementarer BUB der vollständigen (6,3)-Familie.
Rostock. Math. Kolloq. 11, 5 - 11 (1979)

/2/ Gronau, H.-D.: Einige Bemerkungen zur Arbeit "Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien" von D. Rasch und G. Herrendörfer.
Rostock. Math. Kolloq. 9, 27 - 34 (1978)

/3/ Harnau, W.: Die Anzahl paarweise nichtisomorpher elementarer, wiederholungsfreier 2-(9,3,λ)-Blockpläne. Teil I.
Rostock. Math. Kolloq. 11, 75 - 83 (1979)

/4/ Raghavarao, D.: Constructions and combinatorial problems in design of experiments.
New York - London - Sidney - Toronto 1971

/5/ Rasch, D., und Herrendörfer, G.:
Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien.
Rostock. Math. Kolloq. 8, 71 - 82 (1978)

/6/ Rasch, D., und Herrendörfer, G.:
Weitere Bemerkungen zur Anzahl elementarer BUB in (v,k)-Familien.
Rostock. Math. Kolloq. 9, 35 - 42 (1978)

eingegangen: 01. 10. 1979

Anschrift des Verfassers:

Stud.-Math. Konrad Engel
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 43 - 47 (1980)

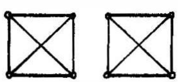
Walter Harnau

Die Anzahl paarweise nichtisomorpher, elementarer, wiederholungsfreier 2-(9,3,λ)-Blockpläne. Teil II.

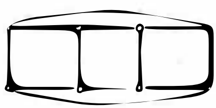
In /1/, dem ersten Teil dieser Arbeit, wurde im Lemma 2 gezeigt, daß wiederholungsfreie 2-(9,3,λ)-Blockpläne (BP) nur für $\lambda \leq 7$ existieren können, wobei λ eine positive ganze Zahl ist. Dort wurde die Anzahl der paarweise nichtisomorphen, elementaren, wiederholungsfreien 2-(9,3,λ)-BP für $\lambda \in \{1,2,5,6,7\}$ bestimmt. Wie bereits in /1/ angekündigt, sollen hier nun die Fälle $\lambda = 3$ und $\lambda = 4$ behandelt werden. Dabei werden wir uns wieder der dort eingeführten graphentheoretischen Methode bedienen. Alle in /1/ eingeführten Begriffe und Bezeichnungen werden hier übernommen, so daß für ein Verständnis dieser Arbeit die Kenntnis des ersten Teiles unumgänglich ist. Um diese Einheit noch mehr zu unterstreichen, erfolgt für beide Teile eine durchgehende Zählung der Paragraphen, Lemmata, Sätze usw. Es kann hier nur eine Beweisidee der dargestellten Resultate gegeben werden, da ein vollständiger Beweis mindestens drei Hefte dieser Zeitschrift umfassen würde.

5. Darstellung der Beweisidee für $\lambda \in \{3,4\}$

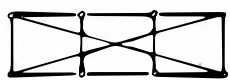
Es gibt folgende sechs paarweise nichtisomorphe 3-reguläre Graphen mit acht Knoten ohne Mehrfachkanten:



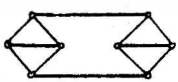
Typ 1



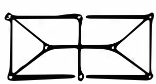
Typ 2



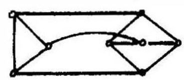
Typ 3



Typ 4



Typ 5



Typ 6

Für $x \in M$ identifizieren wir $G(Q_x)$ mit Q_x. Es sei Q ein wiederholungsfreier 2-(9,3,3)-BP über $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Dann enthält Q genau 36 Blocks, und jedes Element aus M tritt in den 36 Blocks 12mal auf.
Q ordnen wir den Vektor $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ zu, indem für $i = 1,2,3,4,5,6$ gelte:

a_i := Anzahl der $x \in M$, für die Q_x vom Typ i ist.

Wir sagen dann auch, daß Q vom Typ $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ ist.
Aus dem Lemma 1 in /1/ folgt nun sofort das

<u>Lemma 6:</u> Es seien Q und Q' zwei wiederholungsfreie 2-(9,3,3)-BP und $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ bzw. $(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5',a_6')$ die ihnen zugeordneten Vektoren. Wenn $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) \neq (a_1',a_2',a_3',a_4',a_5',a_6')$ ist, so sind Q und Q' nichtisomorph.

Wir bestimmen nun für $\lambda \in \{3,4\}$ eine Menge $BL(\lambda)$ von wiederholungsfreien 2-(9,3,λ)-BP mit folgenden Eigenschaften:

(i) Wenn $Q,Q' \in BL(\lambda)$ und $Q \neq Q'$, so sind Q und Q' nichtisomorph.
(ii) Wenn Q ein wiederholungsfreier 2-(9,3,λ)-BP ist, so gibt es ein $Q' \in BL(\lambda)$ mit $Q \cong Q'$.

Die Bestimmung von $BL(3)$ erfolgt durch eine Fallunterscheidung in folgende sechs Fälle:
<u>Fall i:</u> Q_1 ist vom Typ i. Für $j \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ist Q_j vom Typ r_j, wobei $i \leq r_j \leq 6$ ist.
Notwendige Isomorphiebetrachtungen werden durch das Lemma 6 wesentlich vereinfacht.
Nachdem wir $BL(3)$ erzeugt haben, erhalten wir $BL(4)$, wie aus dem Beweis des Lemmas 3 in /1/ folgt, auf folgende Art und Weise:

$$BL(4) = \{\overline{Q} : \overline{Q} = \mathcal{P}_3(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) \setminus Q,\ Q \in BL(3)\}.$$

Damit ist $g^*(9,3,2,3) = g^*(9,3,2,4) = |BL(3)|$. Durch Anwendung von Lemma 4 erhalten wir aus $BL(\lambda)$ für $\lambda \in \{3,4\}$ auch $f^*(9,3,2,\lambda)$ (Anzahl der paarweise nichtisomorphen, elementaren, wiederholungsfreien 2-(9,3,λ)-BP).

6. Resultate für $\lambda = 3$ und $\lambda = 4$

Zur besseren Illustration der Resultate geben wir die Tabelle 1 an, in der a die Anzahl aller paarweise nichtisomorphen, wiederholungsfreien 2-(9,3,3)-BP und b die Anzahl der darunter befindlichen elementaren Blockpläne bezeichnet. Für alle nicht aufgeführten Typen (in der Tabelle als transponierter Vektor von $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ geschrieben) gibt es keine Blockpläne.

	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	2	1	0	0	0	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
Typ	0	2	3	4	3	2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	2	2	2	1	1	2	2	1
	0	2	3	4	3	2	0	2	4	6	4	3	2	5	4	3	2	5
	4	2	1	0	2	4	8	2	1	0	0	1	2	0	1	2	3	1
a	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	2	1	1	1
b	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1

Tabelle 1a

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Typ	0	0	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
	1	0	2	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	2	2	2	1	1
	4	6	2	1	1	4	3	2	1	5	4	3	6	4	3	2	6	5
	2	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	0	1	2	3	0	1
a	3	1	1	1	1	4	6	4	1	5	4	1	1	3	3	2	2	10
b	0	1	0	0	0	1	1	2	0	3	2	0	0	2	2	1	2	5

Tabelle 1b

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Typ	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	3	3	3
	1	0	0	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	2	1	3	2	2
	4	7	6	2	6	5	4	3	8	7	6	5	4	3	4	0	4	3
	2	0	1	4	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	0	3	0	1
a	8	4	3	2	1	7	5	1	1	5	4	1	1	2	1	1	2	4
b	4	2	1	1	0	3	4	1	1	3	0	1	1	0	0	0	1	3

Tabelle 1c

Typ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
	2	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	2	2	1
	2	5	4	5	4	3	2	6	5	4	3	7	6	5	4	3	2	7
	2	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	3	4	0
a	3	5	6	1	4	8	3	3	17	14	2	4	8	6	1	1	1	3
b	2	5	2	1	3	2	3	2	9	7	1	3	6	4	0	0	0	2

Tabelle 1d

Typ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	6	5	4	3	8	7	6	5	3	6	5	4	9	8	7	6	5	3	0
	1	2	3	4	0	1	2	3	4	2	3	4	0	1	2	3	4	6	9
a	14	22	12	7	1	9	5	4	1	3	4	2	4	3	2	6	5	3	1
b	9	15	8	3	0	8	1	1	1	2	2	1	0	3	1	3	5	1	0

Tabelle 1e

Satz 3: Es ist $g^*(9,3,2,3) = g^*(9,3,2,4) = 329$ und
$f^*(9,3,2,3) = 171$.

Satz 4: Es ist $f^*(9,3,2,4) = 0$.

Der Satz 4 sagt aus, daß es keinen elementaren, wiederholungsfreien 2-(9,3,4)-BP gibt. Aus dem Beweis des Satzes 4 ließ sich noch folgendes erkennen:
Es seien $Q(1)$, $Q(2)$ und $Q(3)$ Blockpläne aus $BL(3)$, wobei $Q(1)$ der Blockplan vom Typ (1,0,0,0,0,8), $Q(2)$ ein bestimmter der fünf Blockpläne vom Typ (0,0,3,1,5,0) und $Q(3)$ ein bestimmter der sechs elementaren Blockpläne vom Typ (0,0,2,0,6,1) ist.
Für $i = 1,2,3$ sei $\overline{Q(i)} = \mathcal{P}_3(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) \setminus Q(i)$.
Dann gilt: Wenn $\overline{Q} \in BL(4)$ ist, so gibt es entweder ein $i \in \{1,2,3\}$ mit $\overline{Q} = \overline{Q(i)}$ oder $\overline{Q}$ besitzt einen 2-(9,3,1)-BP als Teilblockplan.

In der Tabelle 2 stellen wir die bisher erhaltenen Ergebnisse zusammen und erhalten daraus unmittelbar den abschließenden Satz 5.

λ	1	2	3	4	5	6	7
$g^*(9,3,2,\lambda)$	1	13	329	329	13	1	1
$f^*(9,3,2,\lambda)$	1	11	171	0	0	0	0

Tabelle 2

Satz 5: Es ist $g^*(9,3,2) = 687$ und $f^*(9,3,2) = 183$.

Literatur

/1/ Harnau, W.: Die Anzahl paarweise nichtisomorpher, elementarer, wiederholungsfreier 2-$(9,3,\lambda)$-Blockpläne. Teil I. Rostock. Math. Kolloq. 11, 75 - 83 (1979)

eingegangen: 01. 10. 1979

Anschrift des Verfassers:

Dr. Walter Harnau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 49 - 64 (1980)

Р.Г.Нигматуллин

Распознавание максимальности паросочетания за O(m+n) операций

Z u s a m m e n f a s s u n g

Ein O(m+n)-Algorithmus zur Erkennung der Maximalität nichtadjazenter Kantenmengen

Der Artikel behandelt die Frage der Erkennung der Maximalität nichtadjazenter Kantenmengen. Dabei werden vom Autor zwei Zielstellungen betrachtet: Die erste ist die Frage nach der Optimalität des Algorithmus; die zweite ist methodischer Art und besteht in der Suche nach einfachen und verständlichen Beweisen und Algorithmen. Zur ersten Zielstellung wird ein optimaler Algorithmus zur Erkennung der Maximalität nichtadjazenter Kantenmengen gegeben. Die Kompliziertheit dieses Algorithmus ist O(m+n). Der Autor hofft, daß die in dieser Form dargestellten Resultate und Beweise Eingang in Vorlesungen über Graphentheorie finden können.

S u m m a r y

An O(m+n)-Algorithm for Matching Maximality Recognition

The work concerns to the matching problem in graphs. The author concentrates himself on two tasks: the first one is the optimality of the algorithm; the second one is methodic, i. e., the search of simple and clear algorithms and proofs. To the first goal an optimal algorithm for the maximality of matchings recognition is proposed. The runtime of the algorithm is O(m+n). It is hoped by the author that the proposed decision is suitable for lectures in graph theory.

Задача построения максимального паросочетания в графе замечательна тем, что она решается за полиномиальное время. Значительный вклад в ее решение внесли К.Берж /I/ и Дж.Эдмондс /2/. Однако известное к настоящему времени решение этой задачи нельзя признать окончательным по двум причинам. Во-первых, не доказана оптимальность алгоритма построения максимального паросочетания, хотя и получена хорошая верхняя оценка ($O(n^3)$). Во-вторых, конструкция алгоритма, а главное, доказательство довольно громоздки. Изложение с аккуратным обоснованием требует многих страниц. Поэтому редкие авторы решаются включать в учебник классический результат Эдмондса, а если и включают его, то без строгого обоснования /3,4/.

Настоящая работа преследует две цели. Во-первых, строится алгоритм распознавания максимальности паросочетания и доказывается его оптимальность по порядку путем получения верхней оценки сложности $O(m+n)$. Такая же по порядку нижняя оценка очевидна. Предлагаемый алгоритм является индустриализацией алгоритма Эдмондса. Быстродействие алгоритма достигается за счет упорядочения последовательности обхода ребер графа. Автор надеется, что благодаря простоте используемых понятий и машинная реализация алгоритма проявит себя с хорошей стороны.

Другая цель, которую ставил перед собой автор,-методическая, а именно, сделать решение более прозрачным и простым. Насколько это ему удалось, судить читателю.

Работа состоит из четырех параграфов. В первых двух вводятся основные понятия и обосновывается операция стягивания бутона (по терминологии /2/ срезания цветка). Здесь новыми являются не столько результаты, сколько доказательства, хотя избранный подход диктует другую систему промежуточных результатов. В третьем и четвертом параграфах описывается алгоритм распознавания максимальности паросочетания, даются обоснование алгоритма и оценка его трудоемкости.

I. Охватывающие чередующиеся цепи

Граф G с множеством вершин V и множеством ребер E будем обозначать $G(V,E)$. Всюду в этой работе графы предполагаются неориентированными, без петель и без параллельных ребер. Будем полагать $|V| = n$, $|E| = m$ ($|A|$ обозначает мощность множества A).

Подмножество M ребер графа G называется п а р о с о ч е т а н и е м , если любые два ребра из M не смежны, т.е. не имеют общих вершин. В дальнейшем для согласования с рисунками ребра из M будем называть жирными, а ребра из E\M тонкими. Если вершина x инцидентна некоторому жирному ребру, будем называть ее покрытой (паросочетанием M в графе G).

Паросочетание называется м а к с и м а л ь н ы м в графе G, если оно содержит максимальное число ребер по сравнению со всеми другими паросочетаниями графа G. Задача о максимальном паросочетании в графе заключается в построении паросочетания наибольшей мощности в этом графе.

Последовательность ребер $e_I, e_2, \ldots, e_p$ называется ц е п ь ю, если ребра $e_к$ и $e_{к+I}$ $к=I,\ldots,p-I$ смежны. Иногда цепь задается последовательностью своих вершин. Будем также иногда рассматривать цепь как множество своих вершин. Цепь называется ч е р е д у ю щ е й с я (относительно M в графе G), если ее ребра попеременно жирные и тонкие и никакая вершина не встречается в цепи дважды. В зависимости от жирности крайних ребер цепи будем различать классы ж и р н о - ж и р н ы х, ж и р н о - т о н к и х и т о н к о - т о н к и х чередующихся цепей. Чередующиеся цепи из одного класса с одинаковыми концами будем называть п о д о б н ы м и. Крайняя вершина цепи называется ж и р н о й или т о н к о й в зависимости от жирности инцидентного ей крайнего ребра. О х в а т ы в а ю щ е й чередующейся цепью называется чередующаяся цепь, у которой крайние вершины не покрыты. Очевидно, она тонко-тонкая. Все внутренние вершины чередующейся цепи очевидно покрыты. В дальнейшем будем применять сокращения ОЧЦ и ЧЦ соответственно для охватывающей чередующейся цепи и чередующейся цепи. Роль ОЧЦ для задачи построения максимального паросочетания ясна из следующей теоремы Бержа.

<u>Теорема I</u>: Паросочетание M максимально в графе G тогда и только тогда, когда граф G не содержит охватывающих чередующихся относительно M цепей.

Эта теорема позволяет понять, почему задача распознавания максимальности паросочетания имеет полиномиальную сложность, чего не удается доказать для более общих задач на покрытие. Действительно, из теоремы I следует, что для распознавания максимальности паросочетания достаточно проверить для каждой непокрытой вершины z наличие охватывающей чередующейся цепи, начинающейся в этой вершине z. Хотя при этом нужно принять во внимание все чередующиеся цепи (а их число может быть экспоненциальным относительно числа вершин), фактически достаточно снабдить каждую вершину x двумя метками, которые свидетельствуют о возможности или невозможности соединить данную непокрытую вершину z с данной вершиной x соответственно тонко-жирной или тонко-тонкой охватывающей ЧЦ. Ясно, что в графе без циклов нечетной длины эти две возможности являются взаимоисключающими. Это значительно упрощает задачу и делает почти очевидным следующее утверждение.

<u>Предложение I</u>: Распознавание максимальности паросочетания в двудольном графе возможно за $O(m+n)$ шагов.

<u>Доказательство</u>: Напомним, что двудольным называется граф, вершины которого можно разбить на два подмножества X и $У$ так, что любое ребро графа инцидентно некоторой вершине $x \in X$ и некоторой вершине $y \in У$. Непустой граф двудолен тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.
Будем помечать вершины с помощью следующего алгоритма. Выбираем непокрытую вершину z и помечаем ее ЖИР. Если вершина помечена ЖИР, то все смежные с ней и еще непомеченные вершины помечаем ТОН (тонкий конец ЧЦ, начинающейся в z). Если покрытая вершина x помечена ТОН, то противоположный конец жирного ребра, инцидентного x, помечаем ЖИР (жирный конец ЧЦ, начинающейся в z). Заметим, что в случае двудольного графа вершина, помеченная ЖИР, уже не может помечаться ТОН и наоборот. В противном случае имелся бы цикл нечетной длины.
Если никакой вершины пометить уже нельзя, то в графе, порожденном непомеченными вершинами, выбираем непокрытую вершину в качестве вершины z и снова применяем алгоритм. Работа заканчивается, когда не останется непомеченных непокрытых вершин. Паросочетание максимально тогда и только тогда, когда ни одна непокрытая вершина не получает пометки ТОН. Поскольку каждое ребро проходится при этом не более одного раза, трудоемкость алгоритма ограничена сверху величиной $O(m+n)$.

<u>Замечание</u>: Обратим внимание, что описанный алгоритм не различа-

ет цепи с самопересечениями и без. Поскольку пометки ТОН и ЖИР в случае двудольного графа исключают друг друга, то нет необходимости выявлять самопересечения - новых меток они все равно не дадут.

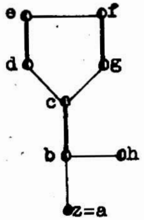


Рис.I

В случае графов общего вида дело существенно меняется. Если пытаться применить алгоритм распознавания максимальности паросочетания из предложения I к графам общего вида, то можно пометить непокрытую вершину меткой ТОН, в то время как паросочетание максимально (см.,например, рис.I. Здесь и далее символом o обозначается вершина с меткой ТОН, символом • вершина с меткой ЖИР и символом ◐ вершина, которая может получить обе метки относительно вершины z). На рис.I непокрытая вершина h получает метку ТОН на чередующейся цепи [a,b,c,d,e,f,g,c,b,h]. Если же взять за правило не помечать уже помеченную вершину, то некоторые ОЧЦ окажутся неучтенными (см. рис. 2. Здесь вершина h помечена ЖИР в то время как существует ОЧЦ [a,b,c,g,f,h]).

Итак, специфическая трудность распознавания максимальности паросочетания в произвольном графе - это возможность обеих меток в циклах нечетной длины. Средство борьбы с такими циклами было предложено Эдмондсом /2/.

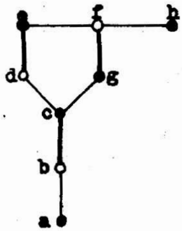


Рис.2

Оно заключается в последовательном стягивании циклов нечетной длины, способных дать альтернативные метки, в одну вершину.

2. Операция стягивания бутона

Б у т о н о м в графе G с паросочетанием M называется цикл нечетной длины, все вершины которого, за исключением одной, инцидентны жирным ребрам этой цепи. Одна вершина, которая инцидентна только тонким ребрам цикла, называется о с н о в а н и е м б у т о н а . На рис.3а бутон определяется вершинами b,d,e,f,g. Основанием бутона служит вершина b. В этом графе есть и другие бутоны, например, {f,d,e} или {i,c,b,d,e}. Иногда мы будем рассматривать бутон как множество его вершин. Все точки бутона,

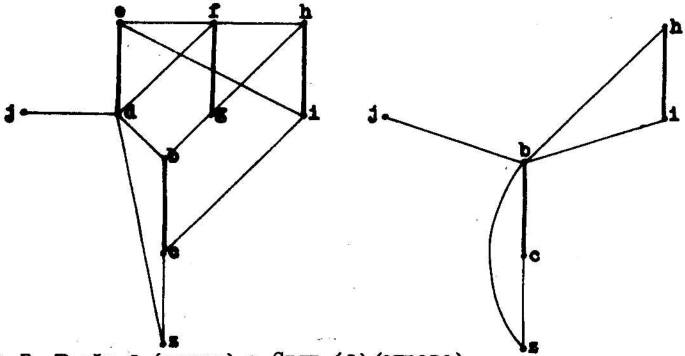


Рис.3. Графы G (слева) и Стяг (G) (справа)

кроме основания, называются с о б с т в е н н ы м и точками бутона.

К основанию бутона может прикрепляться жирным ребром с т е б е л ь - жирно-тонкая ЧЦ. Бутон с прикрепленным стеблем называется ц в е т к о м. Тонкий конец стебля называется к о р н е м цветка. Допускаются стебли, состоящие только из корня. Бутон цветка z обозначается B_Z. На рис.3а вершина z - корень цветка со стеблем [z,c,b]. Сформулируем несколько очевидных утверждений.

Предложение 2: Любая собственная точка бутона соединима с основанием бутона (и следовательно с корнем цветка) тонко-тонкой и жирно-тонкой ЧЦ.

Предложение 3: Любая ЧЦ может "заходить" в цветок и "выходить" из цветка только по тонким ребрам.

Предложение 4: Если вершина x является неконцевой вершиной ЧЦ C и покрыта жирным ребром (x,y), то точка y является соседней с x в ЧЦ C.

С т я г и в а н и е м б у т о н а называется отождествление всех вершин бутона с его основанием (все возникшие при этом петли удаляются, а параллельные ребра отождествляются). Эта вершина в полученном графе называется макровершиной. Граф на рис.3б получен стягиванием бутона {b,d,e,f,g} графа на рис.3а, b - макровершина. Если граф G' получен стягиванием бутона B в графе G, то будем писать $G'=\text{Стяг}_B(G)$. Обозначим символом $\text{Стяг}_B(M)$ образ паросочетания M при стягивании бутона B.

Отметим одно очевидное свойство операции стягивания бутона.

<u>Предложение 5</u>: Операция стягивания бутона сохраняет свойство "быть паросочетанием", т.е. $\text{Стяг}_B(M)$ есть паросочетание в графе $\text{Стяг}_B(G)$.

Действительно, собственным вершинам бутона инцидентны только тонкие ребра из небутона.
Пусть фиксирована некоторая непокрытая вершина z. Отныне, говоря о цветках, будем иметь в виду цветки с корнем в этой вершине z. Будем говорить, что вершина x имеет в графе G метку ЖИР (ТОН) относительно паросочетания M и открытой вершины z, если она соединена жирно-тонкой (тонко-тонкой) ЧЦ с этой вершиной z. Заметим, что некоторые вершины x могут иметь обе метки. Это прежде всего собственные точки бутона. Кроме того, этим же свойством обладают точки предбутона, который определяется ниже. Тонко-тонкая ЧЦ, не имеющая общих ребер с бутоном B и "подвешенная" к концам некоторого жирно-жирного отрезка бутона B, называется п р е д б у т о н о м относительно бутона B.
Очевидно, что при стягивании бутона B предбутон превращается в бутон. Точки предбутона, как легко видеть, тоже имеют обе метки. Теорема 2 показывает, что этим и исчерпывается список вершин, имеющих обе метки.

<u>Теорема 2</u>: Вершина x ($x \neq z$) имеет метки и ТОН и ЖИР относительно непокрытой вершины z в графе G тогда и только тогда, когда x является собственной точкой бутона некоторого цветка с корнем z или принадлежит предбутону такого бутона.
Дальнейшие результаты на эту теорему не опираются. Поэтому сейчас достаточно сказать, что она следует из теоремы 4. Теорема 2 показывает необходимость выявления бутонов и предбутонов. Обоснованием операции стягивания бутонов служит следующая теорема.

<u>Теорема 3 (о стягивании бутона)</u>: Паросочетание M максимально в графе G тогда и только тогда, когда паросочетание $\text{Стяг}_B(M)$ максимально в графе $\text{Стяг}_B(G)$.

<u>Доказательство</u>: Покажем, что любая вершина x графа $\text{Стяг}_{B_z}(G)$

имеет относительно корня z одинаковые метки в графах G и $Стяг_{B_z}(G)$.

→Пусть в графе $Стяг_{B_z}(G)$ есть ЧЦ C от корня до вершины x. Если C не проходит через макровершину b, то она же является ЧЦ в графе G и следовательно дает вершине x ту же метку, что и в графе $Стяг_{B_z}(G)$.

Пусть теперь ЧЦ C проходит в графе $Стяг_{B_z}(G)$ через макровершину b.

Если b имеет метку ЖИР на ЧЦ C, то предшествующая ей в C вершина принадлежит стеблю или b совпадает с корнем. Поэтому отрезок [корень,...,b] ЧЦ C имеется и в графе G и следовательно дает в нем те же метки. Если $b \neq x$, пусть c – следующая за b вершина в ЧЦ C. В графе G вершина c соединена тонким ребром с основанием b бутона или с некоторой собственной вершиной d бутона. В пер-

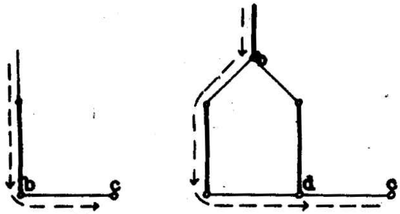


Рис.4. Фрагменты графов G (справа) и Стяг (G)(слева)

вом случае C является ЧЦ в графе G. Во втором случае, заменив тонкое ребро (b,c) в ЧЦ C на тонко-жирную ЧЦ, проходящую по бутону от b до d, и тонкое ребро (d,c) (см. рис.4), получим подобную ЧЦ между корнем и вершиной x в графе G.

Если b имеет метку ТОН, то b не может быть корнем. Обозначим a предшествующую b вершину в ЧЦ C. В графе G вершина a соединена тонким ребром с основанием бутона b или с некоторой собственной точкой d бутона B_z. В первом из этих случаев C является ЧЦ и в графе G. Во втором случае заменим тонкое ребро (a,b) в ЧЦ C на тонкое ребро (a,d) и жирно-тонкую ЧЦ [d,...,b] по бутону. Получим подобную ЧЦ в графе G.

←Является композицией приведенных ниже лемм I и 2.

ЧЦ C, начинающаяся в корне z, называется к а н о н и ч е с к о й относительно цветка Z, если она не содержит собственных точек бутона B_Z этого цветка или либо первым либо последним вхождением ребер бутона B_Z в C является тонкое ребро бутона B_Z, инцидентное основанию бутона. В графе на рис.3 слева ЧЦ [z,d,e, f,g,b,c] является канонической, а ЧЦ [z,d,e,f,g,h] нет. Важность понятия канонической ЧЦ видна из следующей леммы.

Лемма I: Если $x \in$ Стяг$_{B_Z}$(G), то для любой канонической относительно ЧЦ C=[z,...,x] графа G существует подобная ей ЧЦ C' в графе Стяг$_{B_Z}$(G).

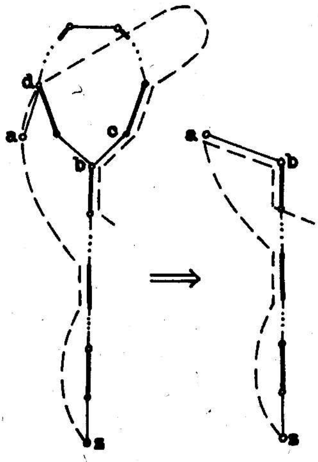


Рис.5. ЧЦ в графе G (слева) и подобная ей ЧЦ в графе Стяг$_B$(G) (справа)

Доказательство: Если цепь C не содержит собственных точек бутона B_Z, то в качестве C' можно взять C.

Пусть теперь для определенности последним вхождением ребер бутона B_Z в ЧЦ C является тонкое ребро (c,b) бутона, где b - основание бутона B_Z. Очевидно, оно проходится в C от c к b, иначе этой же ЧЦ принадлежало бы следующее по бутону жирное ребро, инцидентное c. Пусть d первое вхождение собственных точек бутона в ЧЦ C, а a - непосредственно предшествующая ей в ЧЦ C вершина. Поскольку $d \neq z$, точка a существует. В силу предложения 3 ребро (a,d) тонкое. Заменив (см. рис.5) в ЧЦ C тонко-тонкий отрезок [a, d,...,c,b] на тонкое ребро a,b), получим подобную ЧЦ C' в графе Стяг$_{B_Z}$(G).

Лемма 2: Для каждого цветка Z с корнем z и каждой ЧЦ с началом в z существует подобная ей каноническая относительно цветка Z ЧЦ.

Доказательство: индукцией по длине к стебля.

При к=0 корень цветка z совпадает с основанием бутона B_Z. Пусть d – последнее вхождение точек бутона B_Z в ЧЦ С. Заменив начальный отрезок [z,...,d] этой ЧЦ С на подобный путь по бутону, получим каноническую ЧЦ.

Предположим, что утверждение леммы верно при длинах стеблей 0, 2,...,2(к-I). Пусть теперь цветок Z имеет стебель длины 2к. Пусть последнее вхождение жирного ребра цветка Z в ЧЦ С есть (c,d). Если таковых нет, в силу предложения 4 цепь С каноническая.

Если (c,d) есть ребро бутона, заменив в ЧЦ [z,...,c,d,...,x] начальный отрезок [z,...,c] на подобный путь по стеблю и бутону, получим подобную каноническую ЧЦ. Это можно сделать в силу предложения 2.

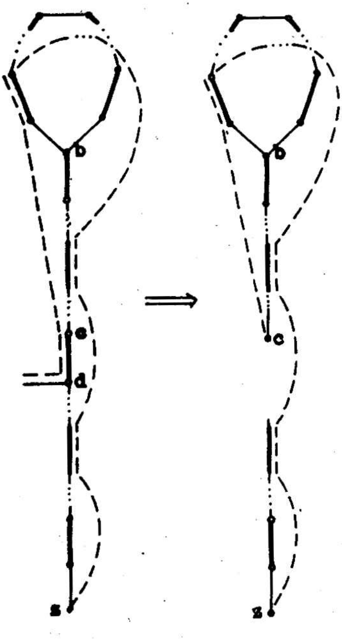


Рис.6. Графы G и G_I

Если (c,d) есть ребро стебля и c по стеблю ближе к корню, то заменив начальный тонко-тонкий отрезок [z,...,c] ЧЦ С на тонко-тонкую ЧЦ [z,...c] по стеблю, получим ЧЦ С', которая не содержит собственных точек бутона B_Z и поэтому является канонической.

Если же на стебле d находится между z и c, обозначим X' множество вершин конечного отрезка ЧЦ С, начиная с вершины d. Рассмотрим подграф G_I графа G, порожденный множеством вершин X\X'. В этом графе c – открытая вершина (см. рис.6 справа). Отрезок [c,...,b] стебля цветка Z вместе с бутоном B_Z входят в граф G_I и определяют в нем цветок Z_I. Длина стебля этого цветка меньше, чем 2к. Поэтому для ЧЦ C_I=[c,...,z] графа G_I, которая является обращением начального отрезка [z,...,c] ЧЦ С, по предположению индукции существует каноническая

относительно цветка z_I ЧЩ C_I'. Переориентировав ее от z к c и добавив к ней конечный отрезок $[c,d,\ldots,x]$ ЧЩ C, получим ЧЩ C', которая либо не содержит собственных точек бутона B_Z, либо первым или последним вхождением ребер бутона B_Z в ЧЩ C является тонкое ребро, инцидентное основанию бутона.
На этом заканчивается доказательство леммы 2 и теоремы 3.

3. Алгоритм расстановки меток

При описании алгоритма будем использовать АЛГОЛоподобный язык. Поясним некоторые специфические операции.
Запись $G\backslash x$ означает удаление из графа G вершины x вместе с инцидентными ей ребрами. В операции $X\cup\{к\}$, где X – линейно упорядоченное множество, предполагается, что вершина к добавляется с конца.
Тела процедур ВЕРШИНА, МЕТКА и НЕХОЖЕНОЕ ТОНКОЕ РЕБРО опущены ввиду своей очевидности. Первая из них выдает последнюю вершину линейно упорядоченного множества. Вторая выдает метку вершины в ЧЩ с началом в z, если корень z имеет метку ЖИР. Третья выдает очередное тонкое ребро, инцидентное вершине, или символ $\emptyset$, если таковых не осталось.

Алгоритм A(z) расстановки меток на вершинах графа G относительно непокрытой вершины z:

НАЧАЛО ГРАФ ГРАФ; ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО ПУТЬ;
ПРОЦЕДУРЫ-ФУНКЦИИ ВЕРШИНА(ПУТЬ), МЕТКА(ВЕРШ,ПУТЬ), НЕХОЖЕНОЕ ТОНКОЕ РЕБРО(ВЕРШ,ГРАФ);
ШАГ1: ГРАФ:=граф G с непокрытой вершиной z; ПУТЬ:={z};
ШАГ2: если ПУТЬ=$\emptyset$, то останов. Пусть теперь ВЕРШИНА(ПУТЬ)=к. Если МЕТКА(ПУТЬ,к)=ЖИР, то пусть НЕХОЖЕНОЕ ТОНКОЕ РЕБРО(к, ГРАФ)=(к,i). Если таких ребер нет, т.е. (к,i)=$\emptyset$, то переход на ШАГ9;
ШАГ3: i$\in$ПУТЬ? Если нет, переход на ШАГ6;
ШАГ4: если МЕТКА(ПУТЬ,i)=ТОН, то переход на ШАГ2;
ШАГ5: отсекаем от множества ПУТЬ конечный отрезок X, расположенный после вершины i. Полагаем B_Z=$X\cup\{i\}$; ГРАФ:=$Стяг_{B_Z}$(ГРАФ); переход на ШАГ2;
ШАГ6: ПУТЬ:=ПУТЬ $\cup\{i\}$;
ШАГ7: Пусть ВЕРШИНА(ПУТЬ)=i. Пусть j – другой конец жирного ребра, инцидентного i в графе ГРАФ. Если такого нет, то пере-

ход на ШАГ9;

ШАГ8: ПУТЬ:=ПУТЬ $\cup\{j\}$; переход на ШАГ2;

ШАГ9: ГРАФ:=ГРАФ\ВЕРШИНА (ПУТЬ); ПУТЬ:=ПУТЬ\ВЕРШИНА (ПУТЬ); если МЕТКА (ПУТЬ, ВЕРШИНА(ПУТЬ))=ЖИР или ПУТЬ=$\emptyset$, то переход на ШАГ2. Если нет, то повторить ШАГ9

КОНЕЦ

Приведем некоторые комментарии к алгоритму A(z).

Комментарий 1: Линейно упорядоченное множество ПУТЬ определяет ЧЦ в графе ГРАФ, а функция МЕТКА (ПУТЬ,x) вычисляет метку вершины x относительно корня z на ЧЦ ПУТЬ.

Комментарий 2: Конечный отрезок множества ПУТЬ, начиная с вершины i (см. шаг 5) действительно является бутоном. В самом деле ребра цепи ПУТЬ чередуются и вершина i встречается в ней во второй раз с новой меткой.

Комментарий 3: На шаге 8 в отличие от шага 3 не проверяется $j \leftarrow$ ПУТЬ? Дело в том, что по жирному ребру нельзя прийти в вершину множества ПУТЬ.

Комментарий 4: Хотя при описании алгоритма метки явным образом не расставляются (чтобы не загромождать описание), на самом деле алгоритм решает эту задачу. Действительно, на шаге 5 все отсекаемые вершины снабжаются обеими метками ТОН и ЖИР. На шаге 9 при исключении вершины из множества ПУТЬ она снабжается меткой. Таким образом все вершины исходного графа, достижимые по ЧЦ из z, в итоге получают метки.

Ч е р е д у ю щ и м с я д е р е в о м (относительно паросочетания M) с корнем z в графе G называется подмножество множества вершин графа G, соединимых с непокрытой вершиной z хотя бы одной ЧЦ.

Множество вершин графа G можно разбить на 4 класса относительно непокрытой вершины z:

- класс ТОН(z) вершин, соединимых с вершиной z только тонко-тонкими ЧЦ,
- класс ЖИР(z) вершин, соединимых с вершиной z только жирно-тонкими ЧЦ,
- класс ТОН(z)&ЖИР(z) вершин, соединимых с вершиной z и тонко-тонкими и жирно-тонкими ЧЦ,
- класс НЕЧЕР(z) вершин, не соединимых с вершиной z ЧЦ (заметим что они могут соединяться с z нечередующимися цепями).

Объединение первых трех классов дает чередующееся дерево с корнем z в графе G.

Лемма 3: Алгоритм A(z) "посещает" все вершины чередующегося дерева с корнем z.
Доказательство: индукцией по длине к кратчайшей ЧЦ, соединяющей вершину x с корнем z.
При к=0 x=z и утверждение очевидно.
Пусть лемма верна для ЧЦ длины $\leq$ к-1 и пусть ЧЦ C=[z,...,y,x] имеет длину к. По предположению индукции вершина y посещается алгоритмом A(z). Если вершина x не посещалась ранее, то при выполнении шага 2 алгоритма A(z) она будет посещена. Шаг 2 обязательно выполнится, поскольку на него передают управление все ветви алгоритма.
Вершина x называется т у п и к о в о й относительно паросочетания M, если никакую нетривиальную ЧЦ [a,...,x] нельзя продолжить вправо в графе G. Очевидно тупиковая вершина не может быть собственной точкой бутона.
Сформулируем два очевидных утверждения, связанных с удалением тупиковых вершин.

Предложение 6: Пусть G - граф с тупиковой вершиной x. Тогда метки любой вершины относительно любого корня инвариантны относительно удаления вершины x.
Доказательство: Действительно, относительно любого корня в любой ЧЦ вершина x может встречаться лишь на последнем месте, т.е. она не участвует в формировании меток других вершин.

Предложение 7: Шаг 9 алгоритма A(z) удаляет из графа ГРАФ только тупиковые вершины.

Теорема 4: Алгоритм A(z) правильно классифицирует вершины графа G по множествам ТОН(z), ЖИР(z), ТОН(z)&ЖИР(z) и НЕЧЕР(z).

Доказательство: В силу леммы 3 алгоритм A(z) "посещает" все вершины графа из первых трех множеств. Под посещением вершины мы понимаем здесь зачисление вершины в ЧЦ ПУТЬ, начинающуюся в корне z. Поэтому вершина из НЕЧЕР(z) посещена быть не может. Итак, при работе алгоритма A(z) непомеченными остаются в точности вершины из множества НЕЧЕР(z).
Далее, вершины из чередующегося дерева вершины z разбиваются на

два класса: те, которые удаляются на шаге 5, и те, которые удаляются на шаге 9. Первые, очевидно, являются точками бутона. Вторые, столь же очевидно в силу предложения 7, точками бутона не являются. Поскольку к моменту окончания работы алгоритма все вершины множества ПУТЬ удалены либо на шаге 5 либо на шаге 9, то множество ТОН(z)&ЖИР(z) в точности совпадает с множеством вершин, удаляемых на шаге 5. Поскольку метки остальных вершин определяются ЧЦ ПУТЬ, а второй метки они иметь не могут, то алгоритм A(z) правильно сортирует их по множествам ТОН(z) и ЖИР(z).

4. Трудоемкость распознавания максимальности паросочетания

Покажем сначала, что задачу распознавания максимальности паросочетания можно разложить на подзадачи.

Пусть G - граф с паросочетанием M и непокрытой вершиной z. Пусть далее G(z) есть чередующееся дерево вершины z в графе G, а G - G(z) есть подграф графа G, порожденный всеми остальными вершинами (т.е. не входящими в G(z)). Пусть M(z) и M\M(z) есть разбиение паросочетания M по графам G(z) и G ⁄ G(z).

<u>Лемма 4</u>: Паросочетание M максимально в графе G тогда и только тогда, когда паросочетания M(z) и M\M(z) максимальны соответственно в графах G(z) и G - G(z).

<u>Доказательство</u>: В силу теоремы I достаточно рассмотреть ОЧЦ. ⇒Если в одном из графов G(z) или G - G(z) есть ОЧЦ, то она же очевидно является ОЧЦ в графе G.

⇐Пусть C=[a,...,l,m,n,...,t] произвольная ОЧЦ в графе G. Предположим, что она содержит точки чередующегося дерева G(z). Рассмотрим произвольную кратчайшую ЧЦ D от вершины z до ЧЦ C. Если второй конец этой ЧЦ D совпадает с одной из непокрытых вершин a или t, то D есть ОЧЦ в графе G(z). Если второй конец ЧЦ D есть некоторая внутренняя вершина m (см. рис.7) ЧЦ C, то в результате склеивания ЧЦ D с одним из отрезков

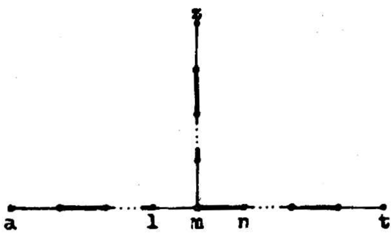


Рис. 7

[m,...,a] или [m,...,t] получим ОЧЦ в графе G(z).

Теорема 5: Максимальность паросочетания в графе с n вершинами и m ребрами можно распознать за $O(m+n)$ операций.

Доказательство: Пусть z - непокрытая вершина в графе G. Если таковых нет, паросочетание максимально. Пусть G(z) - чередующееся дерево вершины z в графе G, n_z и m_z - соответственно числа вершин и ребер в нем. Применим к графу G(z) алгоритм A(z). Операции удаления тупиковой вершины, стягивания бутона, определения метки вершины в ЧЦ и нахождения конца цепи, а также выделения очередного тонкого ребра, инцидентного вершине, которые использует этот алгоритм, можно считать элементарными. Они действительно элементарны при разумной организации информации. Поскольку алгоритм A(z) посещает каждое ребро графа G(z) ровно один раз, его трудоемкость ограничена сверху $O(m_z)$.
Если среди вершин ТОН(z) нет непокрытых, то в качестве графа G в силу леммы 4 можно теперь взять граф G - G(z), выбрать в нем непокрытую вершину и повторить процесс.

Работа была выполнена во время пребывания автора в университете им. Вильгельма Пика (Росток, ГДР) в качестве приглашенного доцента.

Литература:

/1/ Berge, C.: Two Theorems in Graph Theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 43, 842 - 844 (1957)

/2/ Edmonds, J.: Paths, Trees and Flowers. Canadian Journ. Math. 17, 449 - 467 (1965)

/3/ Busaker, R., and Saaty, T.: Finite Graphs and Networks. New York 1970

/4/ Christofides, N.: Graph Theory, an Algorithmic Approach. London, New York 1975

поступило: I4. 09. I979

Адрес автора:

Доц. Р.Г.Нигматуллин
Казанский гос. университет им. В.И.Ульянова-Ленина
факультет вычислительной математики и кибернетики
СССР-420008 Казань
ул. Ленина I8

Rostock. Math. Kolloq. 13, 65 - 72 (1980)

Hans-Jürgen Hogh
Günther Wildenhain

Eine Bemerkung zum Balayage-Prinzip für Riesz-Kerne

1. Seitdem die allgemeine Maßtheorie (unter anderem durch die Arbeiten von G. C. Evans, O. Frostman und M. Riesz) zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der modernen Potentialtheorie geworden ist, spielt das sogenannte Balayage-Prinzip in dieser Theorie eine zentrale Rolle.
Es sei Ω eine einfach zusammenhängende offene echte Teilmenge des R^n und μ ein (nicht notwendig positives) Maß mit supp $\mu \subset \overline{\Omega}$. $\phi\mu$ bezeichne das von μ erzeugte Newtonsche Potential. Dann existiert mindestens ein Maß ν auf dem Rand von Ω (supp $\nu \subset \partial\Omega$), so daß mit Ausnahme höchstens einer Menge der Kapazität Null auf $\partial\Omega$ die Gleichheit $\phi\mu = \phi\nu$ besteht. Nach H. Poincaré bezeichnet man diese Eigenschaft als Balayage-Prinzip. Es bestehen enge Zusammenhänge zu anderen wichtigen Prinzipien der Potentialtheorie, insbesondere zur Lösung des Dirichlet-Problems (vgl. /2/, /4/).
Man kann die Frage stellen, unter welchen Bedingungen an den Kern das Balayage-Prinzip in der obigen Form auch für allgemeinere Potentiale gilt. In /1/ wurde gezeigt, daß das Bestehen einer Ungleichung der Gestalt

$$\sup_{x \in \Omega} |\phi\lambda(x)| \leq C \sup_{x \in \partial\Omega} |\phi\lambda(x)| \tag{1}$$

für alle signierten Maße λ mit supp $\lambda \subset \partial\Omega$ und stetigem Potential $\phi\lambda$ dafür hinreichend ist. Die positive Konstante C muß dabei von λ unabhängig sein.
Auf Riesz-Potentiale kann man dieses Resultat nicht unmittelbar anwenden, da die Ungleichung (1) in diesem Falle nur für positive Maße λ gilt (vgl. /3/). Ziel der vorliegenden Note ist es zu zeigen, daß man die Gültigkeit des Balayage-Prinzips auch unter dieser schwächeren Voraussetzung beweisen kann.

2. Im n-dimensionalen Euklidischen Raum R^n betrachten wir den Riesz-Kern der Ordnung α $(0<\alpha<n)$, d. h. die Abbildung

$$\Phi_\alpha(x,y) = |x-y|^{\alpha-n} \text{ von } R^n \times R^n \text{ in } R^1.$$

Für den ganzzahligen Fall $\alpha = 2m$ ist $\Phi_\alpha(x,y)$, abgesehen von einem konstanten Faktor, Fundamentallösung des polyharmonischen Operators Δ^m.

Für ein beliebiges beschränktes Gebiet Ω von R^n bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}(\bar\Omega)$ den Raum aller Radon-Maße mit dem Träger in $\bar\Omega$; $\mathfrak{M}^+(\bar\Omega)$ sei die Teilmenge der Maße μ aus $\mathfrak{M}(\bar\Omega)$ mit $\mu \geq 0$.

Zu jedem $\mu \in \mathfrak{M}(\bar\Omega)$ existiert bekanntlich eine ausgezeichnete Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ $(\mu^+, \mu^- \in \mathfrak{M}^+(\bar\Omega))$ mit der Eigenschaft $\mu^+ \leq \mu_1$, $\mu^- \leq \mu_2$ für eine beliebige Zerlegung $\mu = \mu_1 - \mu_2$ von μ.

Für $\mu \in \mathfrak{M}(\bar\Omega)$ sind die Riesz-Potentiale der Ordnung α folgendermaßen definiert:

$$\Phi_\alpha \mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} = \int \frac{d\mu^+(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} - \int \frac{d\mu^-(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Mit $\mathfrak{M}_0^+$ bezeichnen wir die Menge aller positiven Radon-Maße mit kompaktem Träger und mit $\mathcal{F}_\alpha^+$ die Menge aller Maße λ aus $\mathfrak{M}_0^+$, welche ein stetiges Riesz-Potential der Ordnung α erzeugen, d. h. $\mathcal{F}_\alpha^+ = \left\{\lambda : \lambda \in \mathfrak{M}_0^+,\ \Phi_\alpha\lambda \in C(R^n)\right\}$.

Für eine kompakte Menge $K \subset R^n$ sei ferner $\mathcal{F}_\alpha^+(K) = \left\{\lambda : \lambda \in \mathcal{F}_\alpha^+, \text{ supp } \lambda \subset K\right\}$. Die Menge $\mathcal{F}_\alpha^+$ ist erblich, d. h., mit $\lambda \in \mathcal{F}_\alpha^+$ und $0 \leq \nu \leq \lambda$ ist auch $\nu \in \mathcal{F}_\alpha^+$ (zum Beweis vgl. /4/, II.1.3, Satz 2). Daraus folgt sofort

<u>Lemma 1:</u> Es sei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}_\alpha^+(K)$ und $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Dann gilt für die ausgezeichnete Zerlegung $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ ebenfalls $\lambda^+, \lambda^- \in \mathcal{F}_\alpha^+(K)$.

Es sei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der universell meßbaren Mengen im R^n.
Dann definieren wir für $\lambda \in \mathcal{F}_\alpha^+$:

$\mathcal{J}_\lambda = \{A : A \in \mathcal{A},\ \lambda(A) = 0\}$ und $\mathcal{J}_\alpha = \cap\{\mathcal{J}_\lambda : \lambda \in \mathcal{F}_\alpha^+\}$.

Die Elemente des Mengensystems $\mathcal{J}_\alpha$ heißen Mengen der Kapazität Null. Eine Eigenschaft, die in einer Teilmenge E des R^n bis auf eine Menge aus $\mathcal{J}_\alpha$ erfüllt ist, heißt $\mathcal{J}_\alpha$-fast überall auf E (Abkürzung $\mathcal{J}_\alpha$-f.ü.) gültig.

<u>Lemma 2</u>: Für alle Mengen E aus $\mathcal{A}$ gilt:
Genau dann ist $f(x) = 0$ $\mathcal{J}_\alpha$-f.ü. auf E,
falls $\int_E f(x)\, d\lambda(x) = 0$ für alle $\lambda \in \mathcal{F}_\alpha^+(E)$ gilt.

Zum Beweis vergleiche man /4/, II.1.4, Satz 3.

3. Im Produktraum $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ wird jetzt die Teilmenge $D_\alpha(\bar{\Omega})$ betrachtet:

$D_\alpha(\bar{\Omega}) = \{(\Phi_\alpha \lambda^+,\ \Phi_\alpha \lambda^-) : \lambda^+,\ \lambda^- \in \mathcal{F}_\alpha^+(\partial\Omega)\}$.

Dabei soll die Definition eines Elementes g aus $D_\alpha(\bar{\Omega})$, $g = (\Phi_\alpha \lambda^+,\ \Phi_\alpha \lambda^-)$, stets auf die ausgezeichnete Zerlegung $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ des Maßes λ bezogen sein.
Indem wir das Element g aus $D_\alpha(\bar{\Omega})$ mit dem Potential $\Phi_\alpha \lambda$ aus $C(\bar{\Omega})$ identifizieren, können wir durch Übertragung der gewöhnlichen linearen Struktur von $C(\bar{\Omega})$ in natürlicher Weise in $D_\alpha(\bar{\Omega})$ ebenfalls eine lineare Struktur einführen.

Es sei $g^{(1)} = (\Phi_\alpha \lambda_1^+,\ \Phi_\alpha \lambda_1^-)$, $g^{(2)} = (\Phi_\alpha \lambda_2^+,\ \Phi_\alpha \lambda_2^-)$ sowie $a, b \in R^1$. Aus der Identifizierung von $a\, g^{(1)} + b\, g^{(2)}$ mit $a \Phi_\alpha \lambda_1 + b \Phi_\alpha \lambda_2 = \Phi_\alpha (a\lambda_1 + b\lambda_2)$ ergibt sich dann die Festsetzung

$$a(\Phi_\alpha \lambda_1^+,\ \Phi_\alpha \lambda_1^-) + b(\Phi_\alpha \lambda_2^+,\ \Phi_\alpha \lambda_2^-)$$
$$:= (\Phi_\alpha (a\lambda_1 + b\lambda_2)^+,\ \Phi_\alpha (a\lambda_1 + b\lambda_2)^-).$$

Insbesondere erhalten wir

$$(\Phi_\alpha \lambda_1^+, \Phi_\alpha \lambda_1^-) + (\Phi_\alpha \lambda_2^+, \Phi_\alpha \lambda_2^-) \qquad (2)$$
$$:= (\Phi_\alpha (\lambda_1 + \lambda_2)^+, \Phi_\alpha (\lambda_1 + \lambda_2)^-),$$

$$a(\Phi_\alpha \lambda^+, \Phi_\alpha \lambda^-) := (\Phi_\alpha (a\lambda)^+, \Phi_\alpha (a\lambda)^-). \qquad (3)$$

Berücksichtigt man $(a\lambda)^+ = a\lambda^+$ und $(a\lambda)^- = a\lambda^-$ für $a \geq 0$ bzw. $(a\lambda)^+ = |a|\lambda^-$ und $(a\lambda)^- = |a|\lambda^+$ für $a < 0$, so ergibt sich

$$a(\Phi_\alpha \lambda^+, \Phi_\alpha \lambda^-) = (a \Phi_\alpha \lambda^+, a \Phi_\alpha \lambda^-) \text{ für } a \geq 0, \qquad (4)$$

$$a(\Phi_\alpha \lambda^+, \Phi_\alpha \lambda^-) = (|a| \Phi_\alpha \lambda^-, |a| \Phi_\alpha \lambda^+) \text{ für } a < 0. \qquad (5)$$

Hieraus erhalten wir

Lemma 3: Mit der durch (2) - (5) gegebenen Festsetzung ist $D_\alpha(\bar{\Omega})$ ein Vektorraum.

Setzen wir für $g \in D_\alpha(\bar{\Omega})$ nun $g = (g_1, g_2)$, dann ist durch

$$\|g\|_{D_\alpha(\bar{\Omega})} := \|g_1\|_{C(\bar{\Omega})} + \|g_2\|_{C(\bar{\Omega})}$$

darüber hinaus in $D_\alpha(\bar{\Omega})$ eine Norm definiert. Die Gültigkeit der Normaxiome folgt unmittelbar aus (2) - (5) sowie aus den Ungleichungen

$$|\Phi_\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)^{\pm}| \leq |\Phi_\alpha \lambda_1^{\pm}| + |\Phi_\alpha \lambda_2^{\pm}|.$$

Für Riesz-Potentiale gilt bekanntlich das folgende verallgemeinerte Maximum-Prinzip (vgl. /3/, Seite 66):

Aus $\Phi_\alpha \mu(x) \leq M$ für alle $x \in \operatorname{supp} \mu$ und $\mu \in \mathfrak{M}_0^+$ $(0 < \alpha < n)$ folgt $\Phi_\alpha \mu(x) \leq 2^{n-\alpha} M$ für alle $x \in R^n$.

Setzen wir $D_\alpha(\partial\Omega) := r_{\partial\Omega} D_\alpha(\bar{\Omega})$, wobei $r_{\partial\Omega}$ den Einschränkungsoperator auf $\partial\Omega$ bezeichnet, und

$$\|g\|_{D_\alpha(\partial\Omega)} := \|g_1\|_{C(\partial\Omega)} + \|g_2\|_{C(\partial\Omega)},$$

so läßt sich daraus unmittelbar das folgende Lemma herleiten.

<u>Lemma 4:</u> Es existiert eine von g unabhängige positive Konstante C, so daß für beliebige $g \in D_\alpha(\bar{\Omega})$ die Ungleichung

$$\|g\|_{D_\alpha(\bar{\Omega})} \leq C \|g\|_{D_\alpha(\partial\Omega)}$$

gilt.

Es bezeichne X die Abschließung von $D_\alpha(\bar{\Omega})$ in $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{D_\alpha(\bar{\Omega})}$ und X' den dualen Raum zu X.

Durch analoge Schlußweise wie in /5/ zeigt man

<u>Lemma 5:</u> Es gilt $X' = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_i \in \mathfrak{M}(\bar{\Omega}),\ i = 1, 2\}$,
d. h., zu jedem $L \in X'$ existiert ein Paar (μ_1, μ_2) von Maßen mit

$$L(g) = \int g_1 \, d\mu_1 + \int g_2 \, d\mu_2 \text{ für alle } g = (g_1, g_2) \in X.$$

Im folgenden schreiben wir zur Abkürzung $L = \mu = (\mu_1, \mu_2)$ und $L(g) =: \mu(g)$.

4. <u>Lemma 6:</u> Der Einschränkungsoperator $r_{\partial\Omega}$ bildet $D_\alpha(\bar{\Omega})$ eineindeutig, linear und stetig auf $D_\alpha(\partial\Omega)$ ab. Der Operator $r_{\partial\Omega}^{-1}$ ist ebenfalls linear und stetig.

<u>Beweis:</u> Die Linearität von $r_{\partial\Omega}$ ist offensichtlich.
Aus der Ungleichung

$$\|r_{\partial\Omega} g\|_{D_\alpha(\partial\Omega)} = \|g\|_{D_\alpha(\partial\Omega)} \leq \|g\|_{D_\alpha(\bar{\Omega})} \quad (g \in D_\alpha(\bar{\Omega}))$$

folgt die Stetigkeit von $r_{\partial\Omega}$ und $\|r_{\partial\Omega}\| \leq 1$.

Die Eineindeutigkeit und damit die Existenz von $r_{\partial\Omega}^{-1}$ ist eine unmittelbare Konsequenz aus Lemma 4.

Es sei $g^{(1)}, g^{(2)} \in D_\alpha(\partial\Omega)$ sowie $a, b \in R^1$. Dann gilt

$$g := r_{\partial\Omega}^{-1}(ag^{(1)} + bg^{(2)}) - a\, r_{\partial\Omega}^{-1} g^{(1)} - b\, r_{\partial\Omega}^{-1} g^{(2)} \in D_\alpha(\bar{\Omega}).$$

Wegen der Linearität von $r_{\partial\Omega}$ folgt daraus

$$r_{\partial\Omega}\, g = ag^{(1)} + bg^{(2)} - ag^{(1)} - bg^{(2)} = 0$$

und nach Lemma 4 weiter $g = 0$, was mit der Linearität von $r_{\partial\Omega}^{-1}$ gleichbedeutend ist.
Schließlich erhalten wir aus

$$\| r_{\partial\Omega}^{-1}(r_{\partial\Omega} g) \|_{D_\alpha(\bar{\Omega})} = \| g \|_{D_\alpha(\bar{\Omega})} \le C \, \| r_{\partial\Omega} g \|_{D_\alpha(\partial\Omega)}$$

die Stetigkeit von $r_{\partial\Omega}^{-1}$ und $\| r_{\partial\Omega}^{-1} \| \le C$.

<u>Lemma 7:</u> Es sei $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in X'$ (d. h. $\mu_i \in \mathfrak{M}(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2$) beliebig gegeben. Dann existiert ein $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in X'$ mit $\operatorname{supp} \nu_i \subset \partial\Omega$ ($i = 1, 2$) und

$$\mu(g) = \nu(g) \text{ für alle } g \in D_\alpha(\bar{\Omega}).$$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten $g = (\Phi_\alpha \lambda^+, \ \Phi_\alpha \lambda^-) \in D_\alpha(\bar{\Omega})$ und

$$\mu(g) = \mu_1(\Phi_\alpha \lambda^+) + \mu_2(\Phi_\alpha \lambda^-) = \mu(r_{\partial\Omega}^{-1}(r_{\partial\Omega} g)).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann wegen

$$r_{\partial\Omega} g \in D_\alpha(\partial\Omega) \subset C(\partial\Omega) \times C(\partial\Omega)$$

als Linearform $\nu(r_{\partial\Omega} g)$ auf $D_\alpha(\partial\Omega)$ aufgefaßt werden, die wegen Lemma 6 und

$$|\nu(r_{\partial\Omega} g)| \le \|\mu\| \, \| r_{\partial\Omega}^{-1}(r_{\partial\Omega} g) \|_{D_\alpha(\bar{\Omega})} \le \|\mu\| \, \| r_{\partial\Omega}^{-1} \| \, \| r_{\partial\Omega} g \|_{D_\alpha(\partial\Omega)}$$

stetig ist. Analog zu Lemma 5 läßt sich dann ν (in der Regel auf nicht eindeutige Weise) durch ein Paar (ν_1, ν_2) von Maßen mit $\operatorname{supp} \nu_i \subset \partial\Omega$ ($i = 1, 2$) darstellen, woraus die Behauptung folgt.
Aus Lemma 7 folgern wir nun die Gültigkeit des klassischen Balayage-Prinzips für den Riesz-Kern.

<u>Satz:</u> Es sei μ_0 ein skalares (nicht notwendig positives) Maß mit $\operatorname{supp} \mu_0 \subset \bar{\Omega}$. Dann existiert ein Maß ν_0 mit $\operatorname{supp} \nu_0 \subset \partial\Omega$ und

$$\Phi_\alpha \mu_0 = \Phi_\alpha \nu_0 \quad \mathcal{J}_\alpha\text{-f.ü. auf } \partial\Omega.$$

<u>Beweis:</u> Wir ergänzen μ_0 durch ein beliebiges Maß μ_2 mit $\operatorname{supp} \mu_2 \subset \bar{\Omega}$ zu einem Paar (μ_0, μ_2), das wir als Element

von X' auffassen.

Nach Lemma 7 existiert dann ein Paar (ν_0, ν_2) mit supp $\nu_0 \subset \partial\Omega$, supp $\nu_2 \subset \partial\Omega$ und

$$\mu_0(\Phi_\alpha \lambda^+) + \mu_2(\Phi_\alpha \lambda^-) = \nu_0(\Phi_\alpha \lambda^+) + \nu_2(\Phi_\alpha \lambda^-)$$

für alle $g = (\Phi_\alpha \lambda^+, \Phi_\alpha \lambda^-) \in D_\alpha(\bar{\Omega})$.

Nach Anwendung des Satzes von Fubini folgt daraus unter Berücksichtigung der Symmetrie des Riesz-Kernes

$$\lambda^+(\Phi_\alpha \mu_0 - \Phi_\alpha \nu_0) = \lambda^-(\Phi_\alpha \mu_2 - \Phi_\alpha \nu_2)$$

für alle $\lambda^+, \lambda^- \in \mathcal{F}_\alpha^+(\partial\Omega)$. Setzt man speziell $\lambda^- = 0$ und wendet Lemma 2 an, so ergibt sich

$$\Phi_\alpha \mu_0 = \Phi_\alpha \nu_0 \quad \mathcal{T}_\alpha\text{-f.ü. auf } \partial\Omega.$$

Eine Analyse der voranstehenden Überlegungen zeigt, daß das Balayage-Prinzip in der obigen Formulierung für positive und symmetrische Kerne stets gilt, falls die durch positive Maße erzeugten stetigen Potentiale der Ungleichung (1) genügen. Die Grundidee des Beweises besteht in dem in 3. durchgeführten Übergang zum Produktraum $D_\alpha(\bar{\Omega})$ und einer geeigneten Einführung einer linearen Struktur in diesem Raum. Dieser Gesichtspunkt ist gegenüber der in /4/ dargelegten allgemeinen Balayage-Theorie neu.

Literatur

/1/ Anger, G.: Balayage-Prinzip und stetige Projektionen, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden. 11, 417 - 426 (1962)

/2/ Brelot, M.: Eléménts de la théorie classique du potentiel. Paris 1961

/3/ Landkof, N. S.: Foundations of modern potential theory. Berlin, Heidelberg, New York 1972 (engl. Übers. a. d. Russischen)

/4/ Schulze, B. W., und Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin, Basel, Stuttgart 1977

/5/ Wildenhain, G.: Über Distributionen endlicher Ordnung I. Math. Nachr. 35, 339 - 348 (1967)

eingegangen: 30. 07. 1979

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Math. Hans-Jürgen Hogh
Prof. Dr. Günther Wildenhain
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 73 - 80 (1980)

Lothar Berg

Distributionenalgebren mit Wurzeln

Die in /1/ definierten und in /2/ weiter ausgebauten Distributionenalgebren enthalten neben einigen echten Distributionen wie $\delta = \delta(t)$ viele neue Elemente wie δ^2, aber nur relativ wenige Funktionen wie die Heavisidesche Sprungfunktion $h = h(t)$ und die Spline-Funktion $t_+ = th(t)$. In /3/ wurde ein zu t_+ reflexiv inverses Element r, d. h. ein Element mit den Eigenschaften

$$t_+ = t_+rt_+, \quad r = rt_+r$$

eingeführt, das als Ersatz für die wegen $t_+\delta = 0$ nicht existierende Inverse von t_+ angesehen werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird zu jeder ganzen Zahl $m \geq 2$ eine Distributionenalgebra D_m mit einem Element w konstruiert, das die Gleichung

$$w^m = t_+$$

erfüllt und somit eine m-te Wurzel von t_+ ist. Diese Wurzel besitzt allerdings Eigenschaften, die nicht denen der Funktion $\sqrt[m]{t}\, h(t)$ entsprechen, so daß die Aufgabe bestehen bleibt, andersartige Konstruktionen von Wurzeln mit günstigeren Eigenschaften durchzuführen. Da im folgenden die Funktion t nicht mehr explizit auftritt, lassen wir wie in der Arbeit /3/ bei t_+ den Index weg und schreiben von jetzt ab t an Stelle von t_+.

Bevor wir auf den allgemeinen Fall eingehen, beschäftigen wir uns mit dem Spezialfall m = 2, in dem also die Beziehung

$$t = w^2 \tag{1}$$

gilt und die daraus durch Differentiation folgende Beziehung

$$h = w'w + ww'. \tag{2}$$

1. Negative Ergebnisse

Eine Distributionenalgebra ist nach Definition eine assoziative, nichtkommutative Differentiationsalgebra, die ein Element h mit den Eigenschaften

$$h^2 = h,\ h' \neq 0$$

besitzt. Für die Ableitung von h benutzen wir die übliche Bezeichnung $\delta = h'$, der Koeffizientenbereich soll hier mindestens aus den rationalen Zahlen bestehen. Der Zusammenhang zu den Funktionen wird durch ein Element t mit den Eigenschaften

$$t = th, \quad t' = h \tag{3}$$

und damit $t'' = h' = \delta$ ermöglicht. Im Hinblick auf (3) scheint es vernünftig zu sein, von der gesuchten Quadratwurzel w von t die analoge Eigenschaft

$$w = wh \tag{4}$$

zu verlangen, aus der durch Differentiation

$$w' = w'h + w\delta \tag{5}$$

folgt und in Verbindung mit (2)

$$w = ww'w + tw'. \tag{6}$$

Im folgenden sei D eine Distributionenalgebra mit (1), (3) und (4).

<u>Hilfssatz 1:</u> Ist in D die Gleichung

$$w = 2w't \tag{7}$$

erfüllt, so gilt $\delta^2 = 0$.

<u>Beweis:</u> Aus (7) folgt zunächst $w\delta = 0$ und daher wegen (5) $w' = w'h$. Durch Differentiation von (7) entsteht $w' = 2w''t + 2w'h$, somit folgt $w' = -2w''t$ und hieraus $w'\delta = 0$. Durch Differentiation von $w\delta = 0$ ergibt sich $w'\delta + w\delta' = 0$ und somit $w\delta' = 0$, woraus $w^2\delta' = t\delta' = -h\delta = 0$ hervorgeht. Aus $\delta = \delta h + h\delta$ ergibt sich damit $\delta = \delta h$ und schließlich die Behauptung $\delta^2 = \delta h \delta = 0$.

Hilfssatz 2: In D ist die Gleichung (7) zu der Gleichung

$$(w^3)' = \frac{3}{2} w \tag{8}$$

äquivalent und unter der Zusatzvoraussetzung

$$w = hw \tag{9}$$

auch zu der Gleichung

$$w = 2ww'w. \tag{10}$$

Beweis: Unter Beachtung von (6) gilt

$$(w^3)' = w't + ww'w + tw' = w't + w,$$

woraus die erste Äquivalenz hervorgeht. Aus (2) und (9) folgt

$$w = w't + ww'w,$$

woraus die zweite Äquivalenz hervorgeht.

Hilfssatz 3: Sind in D die Gleichungen (9), $w' = w'h = hw'$ und (10) erfüllt, so gilt

$$w'w = ww'. \tag{11}$$

Ist in D die Gleichung (11) erfüllt, so gelten die Gleichungen (7) und (10).

Beweis: Die Gleichung (10) besagt, daß $2w'$ eine innere Inverse von w ist. Da h nach Voraussetzung auf w und w' wie ein Einselement wirkt, sind

$$p = h - 2w'w, \quad q = h - 2ww'$$

Projektoren. Aus (2) folgt $p = -q$, was $p = q = 0$ nach sich zieht, d. h. (11). Aus (6) und (11) ergeben sich die letzten Behauptungen unmittelbar.

Obwohl die Voraussetzungen der Hilfssätze im Bereich der Funktionen ganz natürlich sind, können sie wegen der Folgerung $\delta^2 = 0$ nur in trivialen Distributionenalgebren erfüllt sein, so daß sie in Zukunft geeignet zu modifizieren sind (vgl. /2/). Entsprechend ist auch eine modifizierte Form der Gleichung

$$r = 4w'^2 \tag{12}$$

zu finden, um einen Zusammenhang mit der in /3/ konstruierten Distributionenalgebra herstellen zu können.

2. Quadratwurzeln

Um zu zeigen, daß es eine Distributionenalgebra D_2 mit (1) gibt, gehen wir von der durch t mit (3) und t = ht erzeugten Distributionenalgebra D_1 mit den Basiselementen

$$t^n, \quad \delta^{(n)}, \quad \delta^{(n)}h, \quad \delta^{(n)}\,\delta^{(m)} \tag{13}$$

für $n,m \geq 0$ aus, wobei $t^0 = h$ gesetzt wird. Nach /1/ besitzt D_1 eine Matrixdarstellung, wobei die Indizes der Matrizen $a = (a_{ik})$ alle ganzen Zahlen durchlaufen. Diese Darstellung wird hier etwas abgeändert, indem wir $t = (t_{ik})$ durch

$$t_{2k+2,2k} = t_{2k+1,2k-1} = -k, \quad t_{2i,2i-2} = t_{2i+1,2i-1} = -i \tag{14}$$

für $i < 0 < k$ und $t_{ik} = 0$ sonst festlegen und die Differentiation durch

$$a' = (a_{i,k-2} - a_{i+2,k}). \tag{15}$$

Beispielsweise ist die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & & & & \\
6 & 0 & 3 & 0 & 1 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & 6 & 0 & 3 & 0 & 1 & & & & & 0 & 0 & & & & & \\
 & & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & & & & -1 & 0 & -3 & & & & \\
 & & & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right),$$

bei der das unterstrichene Element dasjenige mit den Indizes 0,0 ist, und die freien Plätze durch Nullen zu ergänzen sind, die Darstellung von

$$\frac{1}{2}t^2 + t + h + \delta + \delta' + \delta''.$$

Dabei stehen die von Null verschiedenen Elemente von $h = (h_{ik})$ in der Hauptdiagonalen, diejenigen von σ in der zweiten, von σ' in der vierten und von σ'' in der sechsten oberen Kodiagonalen und schließlich diejenigen von t in der zweiten und von $\frac{1}{2}\,t^2$ in der vierten unteren Kodiagonalen. Da die hier benutzte Darstellung $a = (a_{ik})$ aus der in /1/ betrachteten Darstellung $a = (A_{ik})$ hervorgeht, indem $a_{2i,2k} = A_{ik}$ gesetzt, $a_{2i+1,2k+1}$ entweder durch Null oder durch ein benachbartes Element ersetzt und alle übrigen Elemente gleich Null gesetzt werden, ist leicht zu sehen, daß sich die Darstellungseigenschaften von /1/ auf den vorliegenden Fall übertragen.

Die neue Darstellung hat den Vorteil, daß man sie unmittelbar zu einer Distributionenalgebra D_2 erweitern kann, in der ein Element $w = (w_{ik})$ mit den Eigenschaften (1), (4) und (9) existiert. Man braucht nämlich nur

$$w_{2k+1,2k} = -k, \quad w_{2i,2i-1} = -i, \quad w_{2k,2k-1} = w_{2i+1,2i} = 1$$

für $i < 0 < k$ und $w_{ik} = 0$ sonst zu wählen und w zu D_1 zu adjungieren. Beispielsweise ist die Matrix

$$\begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & & & & & \\
12 & 3 & 3 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 6 & 2 & 2 & 1 & 1 & & & -1 & & & & & & & & \\
 & & & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & & -1 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & -1 & -1 & -1 & -1 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & & & 2 & -2 & -2 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

nach der Erweiterung von D_1 zu D_2 die Darstellung von

$$w^3 + t + w + h + w' + \delta + w'' + \delta',$$

wobei die von Null verschiedenen Elemente von w' in der ersten und diejenigen von w" in der dritten oberen Kodiagonalen stehen und diejenigen von w in der ersten und die von w^3 in der dritten unteren Kodiagonalen. Weitere Darstellungen in D_2 sind

$$w\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \delta w = \begin{bmatrix} \underline{0} & -1 \end{bmatrix} ;$$

sie zeigen, daß diese Produkte nicht verschwinden.
Offenbar sind neben (1) auch die Beziehungen (4) und (9) erfüllt. Die Darstellungen

$$ww' = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \underline{0} & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad w'w = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & \underline{0} & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (16)$$

illustrieren sehr deutlich die Zerlegung (2) und zeigen, daß weder (10) noch (11) erfüllt ist. Aus (16) entnimmt man auch, daß die Produkte ww' und w'w Projektoren sind, die noch dazu zueinander orthogonal sind, so daß

$$ww'^2w = w'tw' = 0$$

gilt. Leider verhindern diese Relationen die gewünschte Interpretation von t, w, h als Funktionen und von δ als Schwartzsche Distribution.

3. Beliebige Wurzeln

Die vorhergehenden Ausführungen lassen sich leicht auf den Fall einer m-ten Wurzel von t mit $m > 2$ übertragen. Wir brauchen dann nur von einer Matrixdarstellung für D_1 auszugehen, in der t nicht durch (14), sondern durch

$$t_{mk+m,mk} = t_{mk+m-1,mk-1} = \dots = t_{mk+1,mk-m+1} = -k,$$
$$t_{mi,mi-m} = t_{mi+1,mi-m+1} = \dots = t_{mi+m-1,mi-1} = -i$$
für $i < 0 < k$ und $t_{ik} = 0$ sonst festgelegt wird und die Differentiation an Stelle von (15) durch
$$a' = (a_{i,k-m} - a_{i+m,k}).$$
Adjungiert man zu D_1 das Element $w = (w_{ik})$ mit
$$w_{mk+1,mk} = -k, \quad w_{mi,mi-1} = -i,$$
$$w_{mk+1-j,mk-j} = w_{mi+j,mi-1+j} = 1$$
für $i < 0 < k$, $0 < j < m$ und $w_{ik} = 0$ sonst, so entsteht die gesuchte Distributionenalgebra D_m mit $w^m = t$, (4) und (9). Beispielsweise ist dann im Fall $m = 4$ die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\
 & & & & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right)$$

die Darstellung von

$$t + w^3 + w^2 + w + h,$$

wobei die von Null verschiedenen Elemente von w^j, $j = 0, \ldots, 4$, mit $w^0 = h$, $w^4 = t$ in der j-ten unteren Kodiagonalen stehen. Die Striche wurden lediglich zur besseren Übersicht eingeführt.

Es bereitet keine Mühe, die Distributionenalgebra D_2 in D_4 einzubetten. Man braucht nur in den entsprechenden Matrizen von D_4 alle Elemente mit mindestens einem ungeraden Index wegzulassen und die entstehende Matrix als Matrix aus D_2 zu interpretieren. Wie man leicht sieht, geht hierbei w^2 aus D_4 in w aus D_2 über, während beispielsweise t, h und δ invariant bleiben.

Literatur:

/1/ Berg, L.: Representations for distribution algebras. Z. Angew. Math. Mech. 56, 177 - 181 (1976)

/2/ Berg, L.: Construction of distribution algebras. Math. Nachr. 82, 255 - 262 (1978)

/3/ Berg, L.: Distribution algebras with reflexive inverses. Resultate Math. (im Druck)

eingegangen: 09. 07. 1979

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Lothar Berg
Wilhelm-Pieck-Universität
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 81 - 96 (1980)

Ingeborg Reckziegel
Manfred Tasche

Über die Lösung entarteter Operatorgleichungen mit Matrixkoeffizienten

In der vorliegenden Arbeit werden Operatorgleichungen der Form

$$(A + BD)x = f \tag{1}$$

mit komplexen (m,n)-Matrizen A und B, einem linearen Operator D aus X^n in X^n und einem vorgegebenen Vektor $f \in X^m$ betrachtet. Dabei ist X ein Vektorraum über dem Körper $\underline{C}$ der komplexen Zahlen und X^n der n-fache kartesische Produktraum von X. Ist B nicht invertierbar, so heißt (1) entartet. Einfache Beispiele für derartige Gleichungen sind lineare Differential- und Differenzengleichungssysteme.
Die Lösung entarteter Differentialgleichunssysteme ist seit langem bekannt und kann z. B. mittels der von L. Kronecker angegebenen kanonischen Form des Matrizenbüschels

$$L(\lambda) = A + B\lambda\,, \quad (\lambda \in \underline{C}) \tag{2}$$

erfolgen (siehe z. B. /5/, S. 21 - 43; /9/ - /11/). Spezielle Typen entarteter Operatorgleichungen (1) werden in /1/ - /4/, /6/ und /8/ gelöst. Während in /1/ - /3/verallgemeinerte inverse Matrizen zur Lösung von (1) herangezogen werden, erfolgt in /4/, /6/ und /8/ die Lösung von (1) mit Hilfe einer durch A und B bestimmten Zerlegung von X^n und X^m in direkte Summen von Teilräumen. In dieser Note wird die letztgenannte Methode der Zerlegung in direkte Summen weiterentwickelt, so daß schließlich eine vollständige Lösung der entarteten Operatorgleichung (1) vorgenommen werden kann. Zum Beweis werden die in /12/ erzielten Ergebnisse herangezogen. In der Arbeit wird vor allem auf den engen Zusammenhang zwischen einer meromorphen verallgemeinerten Inversen von (2) und den konstruierten Lösungen von (1) hingewiesen.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden entartete Oparatorgleichungen (1) gelöst. Die in /12/ eingeführten direkten Summenzerlegungen von $\underline{C}^n$ und $\underline{C}^m$ ziehen in natürlicher Weise direkte Summenzerlegungen von X^n und X^m in Teilräume X_k und X_k' $(k=1,2,\ldots,5)$ nach sich, so daß man anstelle der entarteten Operatorgleichung (1) auch deren Projektionen auf X_k' $(k=1,2,\ldots,5)$ untersuchen kann. Von den fünf erhaltenen Gleichungen sind vier entartet. Diese entarteten Gleichungen lassen sich mittels der in /12/ erzielten Ergebnisse unter entsprechenden Voraussetzungen an das Element $f \in X^m$ explizit lösen. Folglich kann man entartete Operatorgleichungen mit Matrixkoeffizienten auf eine nicht entartete Operatorgleichung zurückführen, deren Lösbarkeit dann wesentlich von den Invertierbarkeitseigenschaften von D abhängt.
Ist der Operator D rechtsinvertierbar, so kann man zusätzlich zu der Gleichung (1) noch eine Anfangsbedingung stellen. Bekanntlich können entartete Anfangswertprobleme unlösbar sein. Ist ein entartetes Anfangswertproblem lösbar, so ist die Lösung i. allg. nicht eindeutig bestimmt. Im zweiten Abschnitt werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit entarteter Anfangswertprobleme angegeben. Schließlich wird eine reflexive Inverse $L^+(D)$ des Operators $L(D) = A + BD$ bestimmt, mit deren Hilfe sich die allgemeine Lösung eines (lösbaren) entarteten Anfangswertproblems übersichtlich darstellen läßt. Damit ordnen sich die entarteten Anfangswertprobleme auch in die allgemeine Theorie der nicht entarteten Anfangswertprobleme (siehe z. B. /13/) ein, wenn man nur von Rechtsinversen zu verallgemeinerten Inversen übergeht.
Wir bemerken noch, daß sich ein Teil der Ergebnisse auf entartete Operatorgleichungen, deren Koeffizienten A und B allgemeinere Operatoren als Matrizen sind, übertragen läßt (/7/, /13/, /14/).

1. Lösung entarteter Operatorgleichungen

Wir wenden die in /12/ erzielten Ergebnisse über das Matrizenbüschel (2) zur Lösung entarteter Operatorgleichungen an und benutzen dabei die in /12/ eingeführten Bezeichnungen. Es sei X ein komplexer Vektorraum, in dem ein linearer Operator $\underline{D} : \mathcal{D} \to X$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\underline{D}) \subseteq X$ und dem Kern $N = N(\underline{D})$ erklärt ist. Wir erweitern $\underline{D}$ zu einem linearen Operator $D : \mathcal{D}^n \longrightarrow X^n$ mittels

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = (\underline{D}x_1, \underline{D}x_2, \ldots, \underline{D}x_n)^T$$

für $x_k \in \mathcal{D}$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Die komplexen (m,n)-Matrizen A und B $(B \neq O_{m,n})$ erzeugen Operatoren von X^n in X^m, die wir erneut mit A und B bezeichnen. Dann bilden wir den Operator $L(D) = A + BD : \mathcal{D}^n \longrightarrow X^m$. Wir beschäftigen uns nun mit der Operatorgleichung

$$L(D)x = f \tag{3}$$

für einen gegebenen Vektor $f \in X^m$ und ein gesuchtes Element $x \in \mathcal{D}^n$. Wir setzen im folgenden voraus, daß (3) entartet ist, d. h., daß B nicht invertierbar ist.

Mit Hilfe der in /12/ eingeführten Projektoren P_k und P_k' $(k=1,2,\ldots,5)$ führen wir die Teilräume $X_k = P_k X^n$, $X_k' = P_k' X^m$ $(k=1,2,\ldots,5)$ ein, so daß man nach /12/ direkte Summenzerlegungen von X^n und X^m erhält:

$$\begin{aligned} X^n &= X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 \oplus X_5, \\ X^m &= X_1' \oplus X_2' \oplus X_3' \oplus X_4' \oplus X_5'. \end{aligned} \tag{4}$$

Die auf X_k eingeschränkten Operatoren $A_k = A|X_k$ und $B_k = B|X_k$ $(k=1,2,\ldots,5)$ bilden X_k in X_k' ab und besitzen die Eigenschaften i) - v) von Satz 1 in /12/. Wir führen die Operatoren $L_k(D) = A_k + B_k D : \mathcal{D}^n \cap X_k \to X_k'$ $(k=1,2,\ldots,5)$ ein, so daß man wegen (4) die Zerlegung von L(D) in eine direkte Summe von Teiloperatoren erhält:

$$L(D) = L_1(D) \oplus L_2(D) \oplus L_3(D) \oplus L_4(D) \oplus L_5(D). \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

Lemma 1: Die Operatorgleichung (3) ist äquivalent zu den fünf Operatorgleichungen

$$L_k(D)x_k = P_k'f \quad (k=1,2,\ldots,5) \tag{6}$$

mit $x_k \in \mathcal{D}^n \cap X_k$. Sind $x_k \in \mathcal{D}^n \cap X_k$ $(k=1,2,\ldots,5)$ Lösungen von (6), so ist

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \in \mathcal{D}^n \tag{7}$$

eine Lösung von (3). Ist umgekehrt $x \in \mathcal{D}^n$ eine Lösung von (3), so sind $x_k = P_k x$ $(k=1,2,\ldots,5)$ Lösungen von (6).

Mit Hilfe von Lemma 1 kann man die gegebene entartete Operatorgleichung (3) in fünf Operatorgleichungen (6) überführen, die zu (3) äquivalent und von denen vier entartet sind und sich explizit lösen lassen:

Satz 2: Die Teiloperatoren $L_k(D)$ $(k=1,2,\ldots,5)$ besitzen folgende Eigenschaften:

i) $L_1(D) = 0_{m,n}|X_1$ hat eine reflexive Inverse $L_1^+(D)\colon X_1' \to X_1$ der Form

$$L_1^+(D) = 0_{n,m} \mid X_1'.$$

ii) $L_2(D)$ besitzt eine Rechtsinverse $L_2^+(D)\colon \mathcal{D}(L_2^+(D)) \to X_2$ der Form

$$L_2^+(D) = \sum_{\nu=0}^{k_p} (-A_2'B_2)^\nu D^\nu A_2' \tag{8}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(L_2^+(D)) = \left\{x \in X_2';\ A_2'x \in \mathcal{D}^n(D^{k_p+1})\right\}$.

Ferner gilt auf $\mathcal{D}(L_2^+(D))$ bzw. $\mathcal{D}^n(D^{k_p+1}) \cap X_2$

$$L_2(D)L_2^+(D) = P_2',\ P_2 - L_2^+(D)L_2(D) = \sum_{\nu=0}^{k_p}(-A_2'B_2)^\nu D^\nu (P_2 - A_2'A_2). \tag{9}$$

Der Kern von $L_2(D)$ hat die Form

$$N(L_2(D)) = (\sum_{\nu=0}^{k_p}(-A_2'B_2)^\nu D^\nu)(N(A_2)\cap \mathcal{D}^n(D^{k_p+1})). \qquad (10)$$

iii) $L_3(D)$ besitzt eine Linksinverse $L_3^+(D) : \mathcal{D}(L_3^+(D)) \longrightarrow X_3$ der Form

$$L_3^+(D) = \sum_{\nu=0}^{j_q-1} (-A_3''B_3)^\nu D^\nu A_3'' \qquad (11)$$

mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(L_3^+(D)) = \{x \in X_3';\ A_3''x \in \mathcal{D}^n(D^{j_q})\}$.

Ferner gilt auf $\mathcal{D}^n(D^{j_q}) \cap X_3$ bzw. $\mathcal{D}(L_3^+(D))$

$$L_3^+(D)L_3(D) = P_3, \qquad (12)$$

$$P_3' - L_3(D)L_3^+(D) = (P_3'-A_3A_3'') - (P_3'-A_3A_3'') \sum_{\nu=1}^{j_q} B_3(-A_3''B_3)^{\nu-1}D^\nu A_3''.$$

iv) $L_4(D)$ hat die Inverse $L_4^+(D) : \mathcal{D}(L_4^+(D)) \rightarrow X_4$ der Form

$$L_4^+(D) = \sum_{\nu=0}^{u_s-1} (-A_4^{-1}B_4)^\nu D^\nu A_4^{-1} \qquad (13)$$

mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(L_4^+(D)) = \{x \in X_4';\ A_4^{-1}x \in \mathcal{D}^n(D^{u_s})\}$.

Ferner gilt auf $\mathcal{D}^n(D^{u_s}) \cap X_4$ bzw. $\mathcal{D}(L_4^+(D))$

$$L_4^+(D)L_4(D) = P_4,\ L_4(D)L_4^+(D) = P_4'. \qquad (14)$$

v) Es gilt

$$L_5(D) = B_5(B_5^{-1}A_5 + D).$$

Der <u>Beweis</u> beruht auf den in /12/, Satz 1 gezeigten Eigenschaften der Operatoren A_k und B_k ($k=1,2,\ldots,5$), wobei (10) eine unmittelbare Folgerung aus der zweiten Gleichung von (9) ist.

<u>Satz 3</u>: Es sei $P_k'f \in \mathcal{D}(L_k^+(D))$ ($k=2,3,4$). Unter dieser Voraussetzung ist die entartete Operatorgleichung (3) genau dann lösbar, wenn die nicht entartete Operatorgleichung

$$L_5(D)x_5 = P_5'f \tag{15}$$

eine Lösung $x_5 \in \mathscr{D}^n \cap X_5$ besitzt und $f \in X^m$ folgenden Bedingungen genügt:

1) $P_1'f = o$,

2) $(P_3' - L_3(D)L_3^+(D))P_3'f = o$.

Ist (15) lösbar und sind die Bedingungen 1) und 2) erfüllt, so hat eine beliebige Lösung $x \in \mathscr{D}^n$ von (3) die Form (7) mit

a) einem beliebigen Element $x_1 \in \mathscr{D}^n \cap X_1$,

b) $x_2 = L_2^+(D)P_2'f + w_2$, wobei w_2 ein beliebiges Element aus $N(L_2(D))$ ist,

c) $x_3 = L_3^+(D)P_3'f$,

d) $x_4 = L_4^+(D)P_4'f$ und

e) einer beliebigen Lösung $x_5 \in \mathscr{D}^n \cap X_5$ von (15).

Beweis: Nach Lemma 1 ist (3) mit (6) äquivalent. Dabei ist $L_1(D)x_1 = P_1'f$ nach Satz 2 genau dann lösbar, wenn $P_1'f = o$ ist. Jedes Element $x_1 \in \mathscr{D}^n \cap X_1$ löst in diesem Fall die Gleichung. Da $L_2(D)$ nach Satz 2 eine Rechtsinverse $L_2^+(D)$ besitzt, lautet die allgemeine Lösung von $L_2(D)x_2 = P_2'f$

$$x_2 = L_2^+(D)P_2'f + w_2$$

mit beliebigem $w_2 \in N(L_2(D))$. Nach Satz 2 hat $L_3(D)$ eine Linksinverse $L_3^+(D)$, so daß die Gleichung $L_3(D)x_3 = P_3'f$ nur unter der Bedingung 2) lösbar ist. In diesem Fall lautet die eindeutige Lösung $x_3 = L_3^+(D)P_3'f$. Da $L_4(D)$ nach Satz 2 die Inverse $L_4^+(D)$ besitzt, hat die Gleichung $L_4(D)x_4 = P_4'f$ die eindeutige Lösung $x_4 = L_4^+(D)P_4'f$, womit der Beweis beendet ist.

Für homogene entartete Operatorgleichungen ergibt sich aus Satz 3 eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von /6/:

Folgerung 4: Die homogene entartete Operatorgleichung $L(D)x = o$

besitzt die allgemeine Lösung

$$x = x_1 + w_2 + x_5$$

mit beliebigen Elementen $x_1 \in \mathscr{D}^n \cap X_1$, $w_2 \in N(L_2(D))$ und $x_5 \in N(L_5(D))$. Es gilt also

$$N(L(D)) = (\mathscr{D}^n \cap X_1) \oplus N(L_2(D)) \oplus N(L_5(D)).$$

Im Fall $m = n$, $\det B = 0$ und $\det L(\lambda) \not\equiv 0$ erhält man aus /12/, Satz 3(/1/, /8/, /13/):

<u>Folgerung 5:</u> Ist $L(\lambda)$ ein reguläres Matrizenbüschel mit $\det B = 0$ und $P_4'f \in \mathscr{D}(L_4^+(D))$, so ist die entartete Operatorgleichung (3) genau dann lösbar, wenn die nicht entartete Operatorgleichung (15) eine Lösung $x_5 \in \mathscr{D}^n \cap X_5$ besitzt. Ist (15) lösbar, so hat die allgemeine Lösung von (3) die Form

$$x = L_4^+(D)P_4'f + x_5$$

mit einer beliebigen Lösung $x_5 \in \mathscr{D}^n \cap X_5$ von (15).

2. Lösung entarteter Anfangswertprobleme

Wir nehmen an, daß der Operator $D : \mathscr{D}^n \longrightarrow X^n$ eine lineare Rechtsinverse $T : X^n \longrightarrow X^n$ besitzt. Mit $F = I_n - TD$ bezeichnen wir den zugehörigen Anfangswertprojektor, der $\mathscr{D}^n$ auf den Kern $N^n = N(D)$ von D projiziert. Ist B nicht invertierbar, so untersuchen wir für vorgegebene Elemente $f \in X^m$ und $z \in N^n$ das entartete Anfangswertproblem

$$L(D)x = f, \quad Fx = z. \tag{16}$$

Falls B invertierbar ist, heißt (16) nicht entartetes Anfangswertproblem.

Wie bekannt, kann das entartete Anfangswertproblem (16) unlösbar sein. Ist jedoch (16) lösbar, so ist die Lösung $x \in \mathscr{D}^n$ i. allg. nicht eindeutig bestimmt. Wir werden im folgenden notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingungen für (16) und im Falle der Lösbarkeit von (16) die allgemeine Lösung angeben. Die Lösung des entarteten Anfangswertproblems (16) erfolgt ähnlich wie im ersten Abschnitt die Lösung der entarteten Operatorgleichung (3).

Lemma 6: Das entartete Anfangswertproblem (16) ist äquivalent zu den fünf Anfangswertproblemen

$$L_k(D)x_k = P_k'f, \quad Fx_k = P_k z \quad (k=1,2,\dots,5) \tag{17}$$

mit $x_k \in \mathcal{D}^n \cap X_k$. Sind $x_k \in \mathcal{D}^n \cap X_k$ $(k=1,2,\dots,5)$ Lösungen von (17), so ist (7) eine Lösung von (16). Ist umgekehrt $x \in \mathcal{D}^n$ eine Lösung von (16), so sind $x_k = P_k x$ $(k=1,2,\dots,5)$ Lösungen von (17).

Mittels Lemma 6 kann man des entartete Anfangswertproblem (16) in fünf äquivalente Anfangswertprobleme (17) überführen, von denen vier entartet sind und sich unter entsprechenden Verträglichkeitsbedingungen für $f \in X^m$ und $z \in N^n$ explizit lösen lassen:

Satz 7: Es sei $P_k'f \in \mathcal{D}(L_k^+(D))$ $(k=2,3,4)$. Unter dieser Voraussetzung ist das entartete Anfangswertproblem (16) genau dann lösbar, wenn das nicht entartete Anfangswertproblem

$$L_5(D)x_5 = P_5'f, \quad Fx_5 = P_5 z \tag{18}$$

eine Lösung $x_5 \in \mathcal{D}^n \cap X_5$ besitzt, wenn $f \in X^m$ den Bedingungen 1) - 2) von Satz 3 genügt und wenn für $z \in N^n$ gilt:

3) $FL_2^+(D)P_2'f + Fw_2 = P_2 z$ für ein gewisses $w_2 \in N(L_2(D))$,

4) $FL_2^+(D)P_3'f = P_3 z$,

5) $FL_4^+(D)P_4'f = P_4 z$.

Ist (18) lösbar und sind die Bedingungen 1) - 5) erfüllt, so hat die allgemeine Lösung von (16) die Form

$$x = x_1 + L_2^+(D)P_2'f + w_2 + L_3^+(D)P_3'f + L_4^+(D)P_4'f + x_5 \tag{19}$$

mit einem beliebigen Element $x_1 \in \mathcal{D}^n \cap X_1$, für das $Fx_1 = P_1 z$ gilt, einem beliebigen Element $w_2 \in N(L_2(D))$, für das $Fw_2 = P_2 z - FL_2^+(D)P_2'f$ gilt, und einer beliebigen Lösung $x_5 \in \mathcal{D}^n \cap X_5$ von (18).

Der Beweis ergibt sich aus Satz 3 und Lemma 6.
Das Anfangswertproblem (18) ist nach /12/, Satz 1 mit der Gleichung

$$(B_5^{-1}A_5T + P_5)x_5 = TB_5^{-1}P_5'f + P_5z$$

äquivalent. Falls der Operator $(B_5^{-1}A_5T + P_5) : X_5 \longrightarrow X_5$ invertierbar ist, so besitzt (18) eine eindeutige Lösung und der Operator $L(D) : \mathscr{D}^n \longrightarrow X^m$ wegen (5) und Satz 2 eine reflexive Inverse $L^+(D) : \mathscr{D}(L^+(D)) \longrightarrow X^n$ der Form

$$L^+(D) = L_1^+(D) \oplus L_2^+(D) \oplus L_3^+(D) \oplus L_4^+(D) \oplus (B_5^{-1}A_5T + P_5)^{-1}TB_5^{-1} \tag{20}$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathscr{D}(L^+(D)) = (\mathscr{D}^m \wedge X_1') \oplus \mathscr{D}(L_2^+(D)) \oplus \mathscr{D}(L_3^+(D)) \oplus \mathscr{D}(L_4^+(D)) \oplus X_5'.$$

Wir führen die Operatoren $Q(D) : \mathscr{D}(L^+(D)) \longrightarrow X^m$ und $P(D) : \mathscr{D}(P(D)) \longrightarrow X^n$ durch die Gleichungen

$$Q(D) = I_m - L(D)L^+(D) = P_1' + P_3' - L_3(D)L_3^+(D), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} P(D) = I_n - L^+(D)L(D) &= P_1 + P_2 - L_2^+(D)L_2(D) \\ &\quad + (B_5^{-1}A_5T + P_5)^{-1}FP_5 \end{aligned} \tag{22}$$

mit dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(P(D)) = (\mathscr{D}^n \wedge X_1) \oplus (\mathscr{D}^n(D^{k_p+1}) \wedge X_2) \oplus (\mathscr{D}^n(D^{j_q}) \wedge X_3) \\ \oplus (\mathscr{D}^n(D^{u_s}) \wedge X_4) \oplus (\mathscr{D}^n \wedge X_5) \end{aligned}$$

ein. Mit Hilfe der Operatoren (20) - (22) läßt sich Satz 7 vereinfachen:

Satz 8: Es sei $f \in \mathscr{D}(L^+(D))$ und $(B_5^{-1}A_5T + P_5) : X_5 \longrightarrow X_5$ invertierbar. Unter diesen Voraussetzungen ist das entartete Anfangswertproblem (16) genau dann lösbar, wenn $f \in X^m$ und $z \in N^n$ den Bedingungen

$$Q(D)f = o, \quad FL^+(D)f = z - FP(D)y \tag{23}$$

für ein gewisses $y \in \mathscr{D}(P(D))$ genügen. Ist (23) erfüllt, so lautet die allgemeine Lösung von (16)

$$x = L^+(D)f + P(D)y \in \mathscr{D}^n \tag{24}$$

mit einem beliebigen Element $y \in \mathscr{D}(P(D))$, für welches $FL^+(D)f + FP(D)y = z$ gilt.

__Beweis:__ Ist $x \in \mathscr{D}^n$ eine Lösung von (16), so gilt einerseits $L^+(D)L(D)x = L^+(D)f$ und andererseits

$$x = L^+(D)L(D)x + P(D)x,$$

woraus sich $x = L^+(D)f + P(D)x$, und damit

$$Fx = z = FL^+(D)f + FP(D)x$$

ergibt. Da $L^+(D)$ eine reflexive Inverse ist, gilt ferner

$$f = L(D)x = L(D)L^+(D)L(D)x = L(D)L^+(D)f,$$

d. h. $Q(D)f = o$.
Ist umgekehrt (23) erfüllt, so bildet man ein Element der Form (24) mit einem gewissen $y \in \mathscr{D}(P(D))$, für welches $FL^+(D)f + FP(D)y = z$ gilt. Wegen (23) und $L(D)P(D) = 0_n$ ergibt sich

$$L(D)x = L(D)L^+(D)f + L(D)P(D)y = f,$$

$$Fx = FL^+(D)f + FP(D)y = z,$$

so daß (24) eine Lösung von (16) ist.
Im Fall $m = n$, $\det B = 0$, $\det L(\lambda) \not\equiv 0$ ist für den Fall der Lösbarkeit von (16) die Lösung sogar eindeutig bestimmt. Wir erhalten aus Satz 7 bzw. 8 nämlich (/1/, /3/, /6/, /9/, /13/, /14/):

__Folgerung 9:__ Es sei $L(\lambda)$ ein reguläres Matrizenbüschel mit $\det B = 0$. Ferner sei $P_4'f \in \mathscr{D}(L_4^+(D))$ und $(B_5^{-1}A_5T + P_5): X_5 \to X_5'$ invertierbar. Unter diesen Voraussetzungen besitzt das entartete Anfangswertproblem (16) genau dann die eindeutig bestimmte Lösung

$$x = L_4^+(D)P_4'f + (B_5^{-1}A_5T + P_5)^{-1}(TB_5^{-1}P_5'f + P_5z), \tag{25}$$

wenn für $f \in X^m$ und $z \in N^n$ die Bedingung

$$FL_4^+(D)P_4'f = P_4z \tag{26}$$

erfüllt ist.

<u>Bemerkung:</u> Im folgenden sei $m = n$, $L(\lambda)$ ein reguläres Matrizenbüschel mit $\det B = 0$ und $(B_5^{-1}A_5T + P_5)$ ein invertierbarer Operator. Dann genügt es, (16) im Fall $z = o$ zu betrachten. Denn besitzt (16) für $z \neq o$ die Lösung x, so ist wegen (13), (26) und /12/, (13) auch

$$L(D)y = f - Az, \quad Fy = o$$

lösbar, und es gilt $x = y + z$.

Wir geben nun ein Lösungsverfahren des entarteten Anfangswertproblems

$$L(D)x = f, \quad Fx = o \tag{27}$$

an. Zuerst berechne man die inverse Matrix $L^{-1}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \underline{C}$ mit $\det L(\lambda) \neq 0$ und entwickle danach $L^{-1}(\lambda)$ in eine für $|\lambda| > \delta$ (mit hinreichend großem $\delta > 0$) konvergente Laurentreihe um $\lambda = \infty$:

$$L^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{r-1} N_k\lambda^k + M(\lambda)$$

mit

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k\lambda^{-k}$$

und $N_{r-1} \neq 0_n$. Nach den Sätzen 4 und 5 in /12/ ergibt sich $\alpha(L) = \delta(L) = r$ und

$$L_4^+(\lambda) = \sum_{k=0}^{r-1} N_k\lambda^k,$$

$$(A_5 + B_5\lambda)^{-1} = M(\lambda).$$

Ein Vergleich von (13) und /12/, (22) zeigt somit, daß

$$L^+(D) = \sum_{k=0}^{r-1} N_k D^k$$

ist. Folglich ist (27) nach Folgerung 9 lösbar, wenn $f \in \mathcal{D}(D^r)$ gilt und

$$\sum_{k=0}^{r-1} FN_k D^k f = o. \tag{28}$$

Ist beispielsweise X^n ein komplexer Banachraum und ist $T : X^n \to X^n$ quasinilpotent, so ist $(B_5^{-1} A_5 T + P_5)$ invertierbar. Unter den Voraussetzungen $f \in \mathcal{D}(D^r)$ und (28) lautet die eindeutige Lösung (25) von (27) nach /13/

$$x = \sum_{k=0}^{r-1} N_k D^k f + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \varrho} M(\lambda)(I_n - \lambda T)^{-1} Tf \, d\lambda \tag{29}$$

mit $\varrho > \delta$.

Wir veranschaulichen diese Methode im Fall $n = 3$ anhand der Matrizen

$$A = I_3, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für zwei spezielle entartete Anfangswertprobleme. Dann gilt für $|\lambda| > 1/3$

$$\begin{aligned} L^{-1}(\lambda) &= (I_3 - \tfrac{1}{3} B) + \frac{1}{3(1+3\lambda)} B \\ &= (I_3 - \tfrac{1}{3} B) - \tfrac{1}{3} B \sum_{k=1}^{\infty} (-3\lambda)^{-k}, \end{aligned}$$

d. h., es ist $r = 1$ und

$$N_0 = I_3 - \tfrac{1}{3} B, \quad M(\lambda) = \frac{1}{3(1+3\lambda)} B.$$

<u>Beispiel 1:</u> Es sei X der Banachraum $C[0, t_0]$ mit $0 < t_0 < \infty$. In X^3 sei $\mathcal{D}^3$ die Teilmenge aller stetig differenzierbaren Funktionen $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$. Wir betrachten den

Operator $D : \mathscr{D}^3 \to X^3$ mit $Dx(t) = \frac{d}{dt}\, x(t)$, der eine quasinilpotente Rechtsinverse $T : X^3 \to X^3$ der Form

$$Tx(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$$

besitzt. Dann ist F durch $Fx(t) = x(0)$ gegeben, und für alle $\lambda \in \underline{C}$ gilt

$$(I_3 - \lambda T)^{-1} Tx(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau.$$

Somit ist für $f(t) \in \mathscr{D}^3$ das entartete Differentialgleichungssystem (27) mit verschwindenden Anfangsbedingungen genau dann lösbar, wenn (28) gilt, d. h. $f(0) = o$. In diesem Fall lautet nach (29) die eindeutige Lösung von (27)

$$x(t) = (I_3 - \tfrac{1}{3} B) f(t) + \tfrac{1}{9} B \int_0^t e^{-(t-\tau)/3} f(\tau)\, d\tau.$$

<u>Beispiel 2:</u> Es sei X^3 der Vektorraum aller Vektorfolgen $x = (x_k) = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})^T \in \underline{C}^3$ $(k=0,1,\ldots)$. Der Operator $D : X^3 \to X^3$ sei der Verschiebungsoperator

$$Dx = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}, \ldots),$$

der eine Rechtsinverse $T : X^3 \to X^3$ der Form

$$Tx = (o, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots)$$

besitzt. Dann gilt $Fx = (x_0, o, o, \ldots)$ und

$$(I_3 - \lambda T)^{-1} Tx = (o, x_0, x_1 + \lambda x_0, \ldots, \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j x_{k-j-1}, \ldots)$$

für alle $\lambda \in \underline{C}$. Somit ist für ein gegebenes $f = (f_k) \in X^3$ das entartete Differenzengleichungssystem (27) unter der Anfangsbedingung $x_0 = o$ genau dann lösbar, wenn (28) gilt, d. h. $f_0 = o$. In diesem Fall besitzt (27) nach (29) die eindeutige

Lösung $x = (x_k)$ mit $x_0 = o$ und

$$x_k = (I_3 - \frac{1}{3} B)f_k + \frac{1}{9} B \sum_{j=0}^{k-1} (-\frac{1}{3})^j f_{k-j-1} \quad (k=1,2,\ldots).$$

<u>Literatur</u>

/1/ Berg, L.: Solution of degenerate linear initial value problems. Z. Angew. Math. Mech. <u>57</u>, 65 - 73 (1977)

/2/ Campbell, S. L.: Linear systems of differential equations with singular coefficients. SIAM J. Math. Anal. <u>8</u>, 1057 - 1066 (1977)

/3/ Campbell, S. L., Meyer, C. D., and Rose, N. J.: Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients. SIAM J. Appl. Math. <u>31</u>, 411 - 425 (1976)

/4/ Cooper, J. L. B.: Fourier transform methods for solution of differential equations. In: Butzer, P. L., and Sz.-Nagy, B. (Eds.): Linear Operators and Approximation II. 443 - 460, Basel - Stuttgart 1974

/5/ Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung II (Übersetzung aus dem Russ.). Berlin 1959

/6/ Kai - Tak Wong: The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$. J. Differential Equations <u>16</u>, 270 - 280 (1974)

/7/ Kvedaras, B., i Macionis, I.: Zadača Koši (Cauchy) dlja vyroždennogo differencial'nogo uravnenija (Russ.). Litovsk. Mat. Sb. <u>15</u>, 3, 121 - 131 (1975)

/8/ Krejn, S. G., i Osinov, V. B.:
Funkcii Ljapunova i zadača Koši (Cauchy) dlja nekotorych sistem uravnenij v častnych proizvodnych (Russ.). Differencial'nye Uravnenija 6, 11, 2053 - 2061 (1970)

/9/ Lancaster, P.: A fundamental theorem on lambda-matrices with applications, I: Ordinary differential equations with constant coefficients. Linear Algebra Appl. 18, 189 - 212 (1977)

/10/ Lancaster, P.: A fundamental theorem on lambda-matrices with applications, II: Difference equations with constant coefficients. Linear Algebra Appl. 18, 213 - 222 (1977)

/11/ Mohr, E.: Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mittels Operatorenrechnung. Math. Nachr. 10, 1 - 49 (1953)

/12/ Reckziegel, I., und Tasche, M.:
Eine verallgemeinerte Inverse eines Matrizenpolynoms. Rostock. Math. Kolloq. 9, 43 - 59 (1978)

/13/ Tasche, M.: Funktionalanalytische Methoden in der Operatorenrechnung. Nova Acta Leopoldina, (N. F.) Nr. 231, Bd. 49 (1978)

/14/ Tasche, M.: On degenerate operator equations. In: Dimovski, I. (Ed): Generalized Functions and Operational Calculus. 205 - 210, Sofia 1979

eingegangen: 02. 08. 1979

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Math. Ingeborg Reckziegel
Doz. Dr. sc. nat. Manfred Tasche
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 97 - 106 (1980)

Hans-Jürgen Albrand

Verallgemeinerte Zeilen- und Spaltensummenkriterien

Es ist das Ziel dieser Arbeit, ein Kriterium von Elsner /6/ zu verallgemeinern und die Nützlickeit dieser Verallgemeinerung zu zeigen. Die Verallgemeinerten Zeilen- und Spaltensummenkriterien (VZSK und VSSK) liefern einen allgemeinen Zugang zur Konstruktion von speziellen hinreichenden Konvergenzkriterien für stationäre lineare Iterationsverfahren. Jede Wahl einer Parametermatrix P liefert ein spezielles Kriterium. Auf diesem Wege erhält man z. B. auch ein zum oft verwendeten Sassenfeld-Kriterium /8/ ähnlich strukturiertes Kriterium bezüglich der Spalten der Iterationsmatrix. Dabei ergibt sich eine gegenüber /2/ vereinfachte und einheitlichere Darstellung.
Ferner wird eine Anwendung auf schwach gekoppelte Systeme vorgenommen.

0. Bezeichnungen

D : die nichtsinguläre Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$.
I : die Einheitsmatrix.
T^t : die transponierte Matrix zu $T = (t_{ij})$.
T^{-1} : die zu T inverse Matrix.
$|T|$: die Matrix $(|t_{ij}|)$.
$\varrho(T)$: der Spektralradius von T.
A_D : die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{nn})$.
A_L : die linke, untere Dreiecksmatrix zu A.
A_R : die rechte, obere Dreiecksmatrix zu A.
$\|T\|_Z$: die Zeilensummennorm $\max\limits_i \sum\limits_j |t_{ij}|$.
$x < y$: die koordinatenweise Ordnung.
$\|z\|_1$: die Vektornorm $\sum\limits_i |z_i|$.

1. Verallgemeinerte Zeilen- und Spaltensummenkriterien

Es sei $A x = b$, A vom Format $n \times n$, ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem und

$$x^{s+1} = T x^s + v, \qquad s = 0,1,\ldots, \tag{1}$$

ein zugehörendes stationäres Gesamtschrittverfahren. Für jede nichtsinguläre Parametermatrix P vom Format $n \times n$ gilt bekanntlich die Ungleichung

$$\varrho(T) \leq \min\,(\|P^{-1}TP\|_Z,\ \|P^{-1}T^tP\|_Z).$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$Z[T,P] := \|P^{-1}TP\|_Z\ .$$

Die hinreichende Konvergenzbedingung

$$Z[T,P] < 1 \tag{2}$$

soll ein VZSK und die Bedingung

$$Z[T^t,P] < 1 \tag{3}$$

ein VSSK heißen. Diese Erklärung steht im Einklang mit der folgenden Definition von Elsner /6/: T erfüllt ein VZSK, wenn es einen Vektor $x > 0$ gibt mit $|T|x < x$. Für $P = \mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_n)$ folgt aus (2), daß die Bedingung der Definition von Elsner erfüllt ist. Sie ist also ein Spezialfall von (2).
Für $P = I$ liefert (2) das starke ZSK und (3) das starke SSK. Beschränkt man sich bei der Auswahl von P auf Diagonalmatrizen D, so hat man zu beachten, daß es genau dann eine Diagonalmatrix D gibt mit $Z[T,D] < 1$, wenn $\varrho(|T|) < 1$ ist (siehe z. B. /4/). Es ist ein Vorteil der Kriterien (2) und (3), daß die Wahl von P sich nicht auf Diagonalmatrizen D beschränkt. Wenn auch der Wahl von $P = D$ die größere praktische Bedeutung zukommt, kann auch eine Wahl $P \neq D$ nützliche Resultate liefern. Wir zeigen dies im 2. Abschnitt an einem speziellen, aber wichtigen Beispiel. Bekanntlich gibt es zu jeder Matrix T und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nichtsinguläre Matrix P mit $Z[T,P] \leq \varrho(T) + \varepsilon$. Hat jeder Eigenwert λ von T mit $|\lambda| = \varrho(T)$ nur lineare Elemen-

tarteiler, so existiert sogar eine nichtsinguläre Matrix P mit $Z[T,P] = \varrho(T)$ (siehe z. B. /9/). Natürlich ist es im allgemeinen nicht möglich, solche Matrizen P praktisch anzugeben. In den üblichen Beweisen (z. B. /7/, /9/) wird P mit Hilfe der Eigenvektoren von T aufgebaut. Um den Aufwand gering zu halten, wird man P in der Regel eine einfache Struktur geben, z. B. als Dreiecksmatrix wählen oder einfacher noch als Diagonalmatrix. Wie weit man mit der Minimierung von Normen durch Diagonaltransformationen kommt, wurde u. a. auch von Ström /10/ für einige Normen und Klassen von Matrizen untersucht.

2. Anwendungen

Im folgenden werden einige spezielle Kriterien einheitlich aus (2) und (3) durch konkrete Wahl von P gefolgert.
Für das Jacobi-Verfahren ist

$$T = - A_D^{-1}(A_L+A_R).$$

Wir erhalten aus (2) für $P = A_D^{-1}$ und $P = I$ die bekannten ZSK

$$Z\left[-A_D^{-1}(A_L+A_R),\ A_D^{-1}\right] < 1,$$

$$Z\left[-A_D^{-1}(A_L+A_R),\ I\right] < 1$$

und aus (3) für $P = A_D$ und $P = I$ die bekannten SSK

$$Z\left[-(A_L+A_R)^t A_D^{-1},\ A_D\right] < 1,$$

$$Z\left[-(A_L+A_R)^t A_D^{-1},\ I\right] < 1.$$

Für das zum Gesamtschrittverfahren (1) gehörende Einzelschrittverfahren

$$(I-T_L)\, x^{s+1} = (T_D+T_R)\, x^s + v \tag{4}$$

folgen für $P = D$, $P = (I-T_L)^{-1}D$ und $P = (I-T_L)^t D$ die hinreichenden Kriterien

$$Z\left[(I-T_L)^{-1}(T_D+T_R),\ D\right] < 1, \tag{5}$$

$$Z\left[(I-T_L)^{-1}(T_D+T_R),\ (I-T_L)^{-1}D\right] < 1, \tag{6}$$

$$Z\left[(T_D+T_R)^t(I-T_L{}^t)^{-1},\ D\right] < 1, \tag{7}$$

$$Z\left[(T_D+T_R)^t(I-T_L{}^t)^{-1},\ (I-T_L{}^t)D\right] < 1. \tag{8}$$

Durch obere Abschätzungen der links in den Ungleichungen (5) - (8) stehenden Ausdrücke erhält man einfacher zu handhabende Kriterien. Wir beschränken uns hier auf Abschätzungen der in (5) und (6) stehenden Ausdrücke.
Zunächst geben wir eine obere Abschätzung von
$Z\left[(I-T_L)^{-1}(T_D+T_R),\ D\right]$ **an. Wir setzen**

$$t_{ij}(D) := t_{ij}\, d_j / d_i, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

$$t^k(D) := (0,\dots,0,t_{kk}(D),\dots,t_{kn}(D)), \quad k = 1,\dots,n.$$

Der k-te Zeilenvektor $z^k(D)$, $k = 1,\dots,n$, **von**

$$(I-D^{-1}T_LD)^{-1}D^{-1}(T_D+T_R)D$$

läßt sich wegen

$$D^{-1}(T_D+T_R)D = (I-D^{-1}T_LD)\begin{pmatrix} z^1(D) \\ \vdots \\ z^n(D) \end{pmatrix}$$

rekursiv berechnen:

$$z^1(D) = t^1(D),$$

$$z^k(D) = t^k(D) + \sum_{i=1}^{k-1} t_{ki}(D)\, z^i(D), \quad k = 2,\dots,n.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$\|z^1(D)\|_1 = \|t^1(D)\|_1 =: \alpha_1(D),$$

$$\|z^k(D)\|_1 \le \|t^k(D)\|_1 + \sum_{i=1}^{k-1} |t_{ki}(D)|\, \|z^i(D)\|_1$$

$$\le \|t^k(D)\|_1 + \sum_{i=1}^{k-1} |t_{ki}(D)|\alpha_i(D) =: \alpha_k(D),\ k=2,3,\dots,n,$$

und mit $\alpha(D) := \max\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i(D)$ gilt

$$[Z\ (I-T_L)^{-1}(T_D+T_R),\ D] \le \alpha(D).$$

Das hinreichende Kriterium (enthalten in /1/) $\alpha(D) < 1$ ist für $D = I$ das bekannte Sassenfeld-Kriterium /8/.

Wir wenden uns nun einer analogen Abschätzung für

$$Z\left[(I-T_L)^{-1}(T_D+T_R),\ (I-T_L)^{-1}D\right]$$

zu. Zur Abkürzung setzen wir

$$s^i(D) := (t_{1i}(D),\dots,t_{ii}(D),0,\dots,0)^t, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Der k-te Spaltenvektor $w^k(D)$, $k = 1,\dots,n$, von

$$D^{-1}(T_D+T_R)D(I-D^{-1}T_LD)^{-1}$$

läßt sich wegen

$$D^{-1}(T_D+T_R)D = (w^1(D),\dots,w^n(D))\ (I-D^{-1}T_LD)$$

rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned} w^n(D) &= s^n(D), \\ w^k(D) &= s^k(D) - \sum_{r=k+1}^{n} t_{rk}(D)\ w^r(D), \qquad k = n-1,\ n-2,\dots,1. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (9) erhalten wir die Abschätzung

$$\|w^n(D)\|_1 = \|s^n(D)\|_1 =: \beta_n(D),$$

$$\begin{aligned} \|w^k(D)\|_1 &\le \|s^k(D)\|_1 + \sum_{r=k+1}^{n} |t_{rk}(D)|\ \|w^r(D)\|_1 \\ &\le \|s^k(D)\|_1 + \sum_{r=k+1}^{n} |t_{rk}(D)|\ \beta_r(D) =: \beta_k(D), \end{aligned}$$

$k = n-1,\ n-2,\dots,1.$

Mit $\beta(D) := \max\limits_{1 \le k \le n} \beta_k(D)$ wird

$$Z\left[(I-T_L)^{-1}(T_D+T_R),\ (I-T_L)^{-1}D\right] \le \beta(D).$$

Das hinreichende Kriterium (enthalten in /1/) $\beta(D) < 1$ ist für $T := -A_D^{-1}(A_L+A_R)$ und $D = I$ enthalten in /2/.

Für $T_D = 0$ ist jede der Ungleichungen

$$\tilde{\alpha}(D) := \max_{2 \le i \le n} \alpha_i(D) < 1,$$

$$\tilde{\beta}(D) := \max_{1 \le i \le n-1} \beta_i(D) < 1$$

hinreichend für die Konvergenz von (4), da die Elemente der ersten Spalte von $(I-T_L)^{-1}T_R$ und die Elemente der letzten Zeile von $T_R(I-T_L)^{-1}$ sämtlich verschwinden.

Im folgenden widmen wir uns kurz der Bestimmung von

$$\inf_D \alpha(D), \inf_D \beta(D)$$

und der näherungsweisen Berechnung dieser Werte. Es ist

$$\varrho := \varrho\left[(I-|T_L|)^{-1}|T_D+T_R|\right] \le Z\left[(I-|T_L|)^{-1}|T_D+T_R|,\ D\right] = \alpha(D)$$

und

$$\varrho \le Z\left[(I-|T_L|)^{-1}|T_D+T_R|,\ (I-|T_L|)^{-1}D\right] = \beta(D).$$

Die Matrizen $(I-|T_L|)^{-1}|T_D+T_R|$, $|T_D+T_R|\ (I-|T_L|)^{-1}$ mögen positive Eigenvektoren $d^* := (d_1^*,\dots,d_n^*)^t > 0$, $\tilde{d} := (\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)^t > 0$ zu dem Eigenwert ϱ besitzen. Dann gelten mit $D^* := \mathrm{diag}(d_1^*,\dots,d_n^*)$, $\tilde{D} := \mathrm{diag}(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)$ die Gleichungen

$$\alpha(D^*) = \beta(\tilde{D}) = \varrho,$$

und die Vektoren d^*, $\tilde{d}$ sind durch die Gleichung $\tilde{d} = (I-|T_L|)d^*$ miteinander verbunden.
Der Eigenvektor d^* läßt sich mit Hilfe der Iteration

$$d^0 = (1,\dots,1)^t,$$

$$d^{k+1} = |T_L|\, d^{k+1} + |T_D+T_R| d^k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{10}$$

approximieren. Mit $D_k := \mathrm{diag}(d_1^k,\dots,d_n^k)$ wird

$$\alpha(D_k) = \max_{1 \le i \le n} d_i^{k+1}/d_i^k =: q_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

und nach einem Einschließungssatz von Collatz /5/ (siehe auch /3/) liegt monotones Verhalten der Quotienten q_k vor:

$$q_0 \ge q_1 \ge \ldots \ge q_k \ge q_{k+1} \ge \ldots \ge \varrho .$$

Insgesamt haben wir den folgenden

Satz 1: 1. Jede der Ungleichungen $\alpha(D) < 1$, $\beta(D) < 1$ ist hinreichend für die Konvergenz der Iteration (4).

2. Für $T_D = 0$ ist auch jede der Ungleichungen $\tilde{\alpha}(D) < 1$, $\tilde{\beta}(D) < 1$ hinreichend.

3. Es ist $\varrho \le \min(\inf_D \alpha(D), \inf_D \beta(D))$.

4. Besitzen $(I-|T_L|)^{-1}|T_D+T_R|$, $|T_D+T_R|(I-|T_L|)^{-1}$ positive Eigenvektoren d^*, $\tilde{d}$ zum Eigenwert ϱ, so gilt $\alpha(D^*) = \beta(\tilde{D}) = \varrho\left[(I-|T_L|)^{-1}|T_D+T_R|\right]$ und $\tilde{d} = (I-|T_L|)\, d^*$.

5. Der Eigenvektor $d^* > 0$ kann mit Hilfe der Iteration (10) approximiert werden.

Die Anwendungen sollen mit einem Kriterium für schwach gekoppelte Systeme beschlossen werden. Es sei

$$T = \begin{pmatrix} U & E \\ V & W \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wobei $U = (u_{ij})$ eine $(r \times r)$-Matrix ist, $W = (w_{ij})$ eine $(s \times s)$-Matrix, $r + s = n$, $V = (v_{ij})$ und $E = (\varepsilon_{ij})$ mit $|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon$ $(i = 1,\ldots,s;\ j = 1,\ldots,r)$ für hinreichend kleines ε.

Wir betrachten die Iteration (1) in Verbindung mit (11). Der folgende Satz enthält ein VZSK und ein VSSK für diese Iteration.

Satz 2: 1. Die Iteration (1) konvergiert, falls eine Zahl $c > 0$ existiert mit

$$\sum_{j=1}^{r} |u_{ij}| < 1 - s\,\varepsilon\, c, \quad i = 1,\ldots,r,$$
$$\sum_{j=1}^{r} |v_{ij}|/c + \sum_{j=1}^{s} |w_{ij}| < 1, \quad i = 1,\ldots,s, \tag{12}$$

oder mit

$$\sum_{j=1}^{r} |u_{ij}| + \sum_{i=1}^{s} |v_{ij}|/c < 1, \quad j = 1,\ldots,r,$$
$$\sum_{i=1}^{s} |w_{ij}| < 1 - r\,\varepsilon\, c, \quad j = 1,\ldots,s. \tag{13}$$

2. Für $E = 0$ (entkoppeltes System) konvergiert (1) (bei beliebigem V), falls

$$\sum_{j=1}^{r} |u_{ij}| < 1, \quad i = 1,\ldots,r,$$
$$\sum_{j=1}^{s} |w_{ij}| < 1, \quad i = 1,\ldots,s, \tag{12'}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{r} |u_{ij}| < 1, \quad j = 1,\ldots,r,$$
$$\sum_{i=1}^{s} |w_{ij}| < 1, \quad j = 1,\ldots,s, \tag{13'}$$

gilt.

Beweis: Es sei $P = \mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$, $d_1 = \ldots = d_r = 1$, $d_{r+1} = \ldots = d_n = c$. Dann folgen die Ungleichungen (12) aus (2). Umgekehrt ist mit (12) das VZSK (2) erfüllt. Die Ungleichungen (13) sind mit dem VSSK (3) äquivalent, wenn wir P durch P^{-1} ersetzen. Die Ungleichungen (12'), (13') ergeben sich aus (12), (13) in Verbindung mit Stetigkeitsbetrachtungen und $\varepsilon c \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $c \to \infty$. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Literatur

/1/ Albrand, H.-J.: Beiträge zur Theorie zyklischer Iterationsverfahren. Dissertation (B), Rostock 1978

/2/ Albrand, H.-J.: Weitere Konvergenzkriterien für das Gauß-Seidel-Verfahren. Z. Angew. Math. Mech. 59, 225 - 232 (1979)

/3/ Albrecht, J.: Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge. Numer. Math. 4, 196 - 208 (1962)

/4/ Bohl, E.: Eigenwertaufgaben bei monotonen Operatoren und Fehlerabschätzungen für Operatorgleichungen. Arch. Rational Mech. Anal. 22, 313 - 332 (1966)

/5/ Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, 2. Aufl. Leipzig 1963

/6/ Elsner, L.: Bemerkungen zum Zeilensummenkriterium. Z. Angew. Math. Mech. 49, 97 (1969)

/7/ Isaacson, E., und Keller, H. B.: Analyse Numerischer Verfahren. Leipzig 1972

/8/ Sassenfeld, H.: Ein hinreichendes Konvergenzkriterium und eine Fehlerabschätzung für die Iteration in Einzelschritten bei linearen Gleichungen. Z. Angew. Math. Mech. 31, 92 - 94 (1951)

/9/ Stoer, J., und Bulirsch, R.: Einführung in die Numerische Mathematik II. Berlin - Heidelberg - New York 1973

/10/ Ström, T.: Minimization of Norms and Logarithmic Norms by Diagonal Similarities. Computing 10, 1 - 7 (1972)

eingegangen: 10. 10. 1979

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. Hans-Jürgen Albrand
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 107 - 117 (1980)

Wolfgang Mönch

Schrittweitensteuerung bei der iterativen Verbesserung näherungsweise berechneter Lösungen linearer Ausgleichsprobleme[1]

1. Einleitung

Es wird die Lösung eines (überbestimmten) linearen Gleichungssystems
$Ax = b$ $(A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ m \geq n,\ \mathrm{Rang}(A) = r \leq n)$
im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate betrachtet, d. h., es sind Quadratmittellösungen
$x^Q \in Q = \{z \in \mathbb{R}^n : \|b-Az\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|b-Ax\|\}$ bzw. die eindeutig bestimmte Normallösung $x^N \in Q$ mit $\|x^N\| = \min\limits_{x^Q \in Q} \|x^Q\|$ von $Ax = b$ gesucht ($\|\cdot\|$ bezeichnet stets die euklidische Vektornorm).

Formal lassen sich x^Q und x^N mittels verallgemeinerter Inversen von A (d. h. Lösungen einiger bzw. aller vier Penrose-Gleichungen $AXA = A$ (1), $XAX = X$ (2), $(AX)^T = AX$ (3), $(XA)^T = XA$ (4)) darstellen. Es ist $x^N = A^+b$, wobei A^+ die Lösung von (1) bis (4) ist, und es ist $x^Q = A^{1,3}b + (I-A^1A)y$ mit einem beliebigem Element $y \in \mathbb{R}^n$ und beliebigen (1,3)-Inversen $A^{1,3}$ bzw. (1)-Inversen A^1 von A (s. Ben-Israel, Greville /1/).

Für die Berechnung von x^Q und x^N steht eine Reihe direkter Verfahren, gekoppelt mit einer iterativen Nachkorrektur zur Verfügung. Golub, Wilkinson /6/ gehen z. B. von einer näherungsweise berechneten QR-Zerlegung von A aus,

---

1 Erweiterte Fassung eines Vortrags, den der Autor am 15. 06. 1979 im Rahmen des Mathematischen Kolloquiums der Sektion Mathematik der WPU gehalten hat.

$QR \approx A$ ($Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q^TQ = I_n$, R eine obere Dreiecksmatrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit Rang$(R) = n$), und betrachten das Verfahren:

(VO) Startwert: $x^0 = 0$;

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \delta x^k \qquad (k=0,1,\dots)$ mit

$$R^TR\delta x^k = A^T(b-Ax^k).$$

Verfahren (VO) versagt, wenn die näherungsweise berechnete QR-Zerlegung von A zu schlecht ist, was insbesondere bei schlecht konditionierten Aufgaben der Fall sein kann.
Hier werden Verfahren betrachtet, die aus (VO) durch Einführen einer geeigneten Schrittweite hervorgehen und (theoretisch) stets konvergieren. Testrechnungen zeigen, daß durch die Schrittweitensteuerung zum Teil eine Konvergenzbeschleunigung erzielt wird oder praktisch überhaupt erst einmal Konvergenz erreicht werden kann, wo das entsprechende Verfahren ohne Schrittweitensteuerung versagt.
Die Schrittweitensteuerung ist z. B. dann vorteilhaft, wenn bei notwendiger Regularisierung der Aufgabe der Regularisierungsparameter ungünstig gewählt wurde. Falls allerdings (VO) bereits hinreichend schnell konvergiert, bringt sie keinen Vorteil. Da die Schrittweitensteuerung auch bei anderen Verfahren als (VO) eingesetzt werden kann (z. B. dann, wenn mit einer Zerlegung von A^TA nach Cholesky oder mit einer Singulärwertzerlegung von A gearbeitet wird), soll im weiteren eine etwas allgemeinere Verfahrensklasse betrachtet werden, bei der R^TR durch eine symmetrische, positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ersetzt wird. Es gibt dann eine symmetrische, positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B^2 = P$. Für die Konvergenzaussagen wird eine Singulärwertzerlegung von AB^{-1} benötigt:

$$AB^{-1} = USV^T \text{ mit } U \in \mathbb{R}^{m \times m},\ V \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal},$$
$$S = \operatorname{diag}(s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^{m \times n},\ s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_n = 0. \qquad (5)$$

2. Das Iterationsverfahren mit Schrittweitensteuerung

(V1) Startwerte: $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit,

$x^o \in \mathbb{R}^n$ beliebig vorgegeben;

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \gamma_k \delta x^k$ $(k=0,1,\ldots)$ mit

$P\delta x^k = A^T(b-Ax^k)$.

Schrittweitensteuerung

Es gibt stets eine hinreichend kleine, konstante Schrittweite $\gamma_k = \gamma$, so daß (V1) konvergiert. Genauer gilt der

Satz 1: Für die nach dem Verfahren (V1) mit $\gamma_k = \gamma = \omega/s_1^2$ $(k=0,1,\ldots)$ berechnete Folge $\{x^k\}$ gilt

$$\lim x^k = B^{-1}(AB^{-1})^+b + [I-B^{-1}(AB^{-1})^+A]\ x^o = x^Q$$

genau dann, wenn $0 < \omega < 2$ ist.

Beweis: Durch vollständige Induktion wird zunächst die Aussage

$$x^k = x^o + \gamma \sum_{l=o}^{k-1} (I-\gamma P^{-1}A^TA)^l\ P^{-1}A^T(b-Ax^o),\ k=1,2,\ldots, \tag{6}$$

bewiesen. Für k=1 ist $x^1 = x^o + \gamma\delta x^o = x^o + \gamma P^{-1}A^T(b-Ax^o)$, also (6) richtig. Schluß von k auf k+1:

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + \gamma\delta x^k \\
&= x^k + \gamma P^{-1}A^T(b-Ax^k) = \gamma P^{-1}A^Tb + (I-\gamma P^{-1}A^T)x^k \\
&= \gamma P^{-1}A^Tb + (I-\gamma P^{-1}A^TA)x^o + \gamma \sum_{l=1}^{k} (I-\gamma P^{-1}A^TA)^l P^{-1}A^T(b-Ax^o) \\
&= x^o + \gamma P^{-1}A^T(b-Ax^o) + \gamma \sum_{l=1}^{k} (I-\gamma P^{-1}A^TA)^l P^{-1}A^T(b-Ax^o) \\
&= x^o + \gamma \sum_{l=o}^{k} (I-\gamma P^{-1}A^TA)^l P^{-1}A^T(b-Ax^o).
\end{aligned}$$

Mit $P = B^2$ und $B^T = B$ folgt weiter

$$x^k = x^o + \gamma B^{-1} \sum_{l=o}^{k-1} [I-\gamma(AB^{-1})^T(AB^{-1})]^l (AB^{-1})^T(b-Ax^o),$$

und über die Singulärwertzerlegung von AB^{-1}:

$$\sum_{l=o}^{k-1} [I-\gamma(AB^{-1})^T(AB^{-1})]^l (AB^{-1})^T = \sum_{l=o}^{k-1}(I-\gamma VS^TSV^T)^l VS^TU^T$$

$$= V \sum_{l=o}^{k-1}(I-\gamma S^TS)^l S^TU^T = \ldots = VS^T \sum_{l=o}^{k-1}(I_r-\gamma SS^T)^l U^T.$$

(Die ersten r Spalten von I_r sind die Einheitsvektoren $e^1,\ldots,e^r$ aus $\mathbb{R}^m$, die restlichen (m-r) Spalten sind gleich dem Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^m$.)

Da $\lim \sum_{l=o}^{k-1}(I_r-\gamma SS^T)^l = \frac{1}{\gamma} (S^+)^TS^+$ genau dann gilt, wenn $|1-\gamma s_i^2| < 1$ für $i=1,\ldots,r$, d. h. $0 < \gamma < 2/s_1^2$ ist, folgt

$$\lim x^k = x^o + \gamma B^{-1}VS^T \frac{1}{\gamma} (S^+)^TS^+U^T(b-Ax^o)$$

$$= x^o + B^{-1}VS^+U^T(b-Ax^o) = x^o + B^{-1}(AB^{-1})^+(b-Ax^o)$$

$$= B^{-1}(AB^{-1})^+b + (I-B^{-1}(AB^{-1})^+A)x^o$$

genau dann, wenn $0 < \gamma < 2/s_1^2$.

Die Matrix $B^{-1}(AB^{-1})^+$ ist eine (1,2,3)-Inverse von A, und damit ist der Grenzwert $\lim x^k = x^Q$ stets eine Quadratmittellösung von $Ax = b$.

<u>Bemerkungen:</u>

1. Im Gegensatz zu Golub, Wilkinson /6/ und Björck /2/ wird hier nicht Rang(A) = n vorausgesetzt.

2. Ist Rang(A) = n, dann ist $B^{-1}(AB^{-1})^+ = A^+$, d. h., falls (V1) konvergiert, gilt in diesem Fall $\lim x^k = A^+b = x^N$.

3. Die Konvergenz des Verfahrens hängt ab von der Konvergenz der Faktoren

$$\sigma_i^k = \sum_{l=o}^{k-1} (1-\gamma s_i^2)^l = \frac{1-(1-\gamma s_i^2)^k}{\gamma s_i^2}$$

gegen $1/(\gamma s_i^2)$ $(i=1,\ldots,r)$ (vgl. Beweis zu Satz 1).

Da $\sigma_i^{k+1} - 1/(\gamma s_i^2) = (1-\gamma s_i^2)(\sigma_i^k - 1/(\gamma s_i^2))$ $(i=1,\ldots,r,\ k=1,2,\ldots)$ ist, hängt die Konvergenz von

$$c = c(\gamma) = \max_{1\le i\le r} |1-\gamma s_i^2| = \max\,(|1-\gamma s_1^2|,\ |1-\gamma s_r^2|) \text{ ab.}$$

Es gilt

$$\frac{s_1^2 - s_r^2}{s_1^2 + s_r^2} = \frac{\operatorname{cond}_2 (P^{-1}A^TA) - 1}{\operatorname{cond}_2 (P^{-1}A^TA) + 1} \le c(\gamma) < 1,$$

wobei die untere Schranke für $\gamma_{opt} = 2/(s_1^2+s_r^2)$, d. h.

$\omega_{opt} = 2s_1^2/(s_1^2 + s_r^2)$ angenommen wird.

Die Verwendung der konstanten Schrittweite $\gamma_k = \gamma = \omega/s_1^2$ hat den Nachteil, daß s_1 i. allg. nicht bekannt und eine brauchbare obere Schranke für s_1 nur schwer beschafft werden kann (außer in dem praktisch nicht interessanten Fall $P = I$, wo (V1) gerade das Gradientenverfahren für die Aufgabe $f(x) = \|b-Ax\|^2 \to \min!$ darstellt). Als Ausweg bietet sich an, die Schrittweite γ_k so zu bestimmen, daß die Abstiegsbedingung $\|b-Ax^{k+1}\| < \|b-Ax^k\|$ $(k=0,1,\ldots)$ erfüllt ist.

<u>Satz 2:</u> Für die nach dem Verfahren (V1) mit

$$\gamma_k = \begin{cases} \omega_k (b-Ax^k)^T A\delta x^k / \|A\delta x^k\|^2, & \text{falls } A\,\delta x^k \ne 0 \\[2ex] 0, & \text{falls } A\,\delta x^k = 0 \end{cases}$$

und $0 < \underline{\omega} \le \omega_k \le \overline{\omega} < 2$ berechnete Folge $\{x^k\}$ gilt

$$\lim x^k = B^{-1}(AB^{-1})^+b + [I-B^{-1}(AB^{-1})^+A]\, x^o = x^Q.$$

Beweis: Es sei

$$\varphi_k(\gamma) = \| b - A(x^k + \gamma\delta x^k) \|^2 = \| (I-\gamma AP^{-1}A^T)(b-Ax^k) \|^2$$

$$= (b-Ax^k)^T(b-Ax^k) - 2\gamma(b-Ax^k)^T A\delta x^k + \gamma^2(\delta x^k)^T A^T A\delta x^k,$$

d. h., φ_k ist eine quadratische Funktion in γ mit dem Scheitelpunkt bei $\gamma_{k,s} = (b-Ax^k)^T A\delta x^k / \| A\delta x^k \|^2 > 0$, falls $A\delta x^k \neq 0$ ist. Mit den Abkürzungen $z^k = V^T Bx^k$, $c = U^T b$ und über die Singulärwertzerlegung $AB^{-1} = USV^T$ erhält man

$$\varphi_k(\gamma) = \| b - AB^{-1}(Bx^k + \gamma B^{-1}A^T(b-AB^{-1}Bx^k)) \|^2$$

$$= \| b - US(z^k + \gamma S^T U^T(b-USz^k)) \|^2$$

$$= \| U^T b - S(z^k + \gamma S^T(U^T b - Sz^k)) \|^2$$

$$= \| c - S(z^k + \gamma S^T(c-Sz^k)) \|^2 = \| (I-\gamma SS^T)(c-Sz^k) \|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}(1-\gamma s_i^2)^2(c_i - s_i z_i^k)^2 + \sum_{i=r+1}^{m} c_i^2,$$

und demnach $\gamma_{k,s} = \sigma_k/\mu_k$ mit $\sigma_k = \sum_{i=1}^{r} s_i^2(c_i - s_i z_i^k)^2$ und

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{r} s_i^4(c_i - s_i z_i^k)^2, \text{ falls } A\delta x^k \neq 0 \text{ ist.}$$

Es sei zunächst $A\delta x^k \neq 0$ für alle k, dann folgt

$$\| b - Ax^{k+1} \|^2 = \varphi_k(\gamma_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{r}(c_i - s_i z_i^k)^2 - \omega_k(2-\omega_k)\sigma_k^2/\mu_k + \sum_{i=r+1}^{m} c_i^2$$

$$= \| b - Ax^k \|^2 - \omega_k(2-\omega_k)\sigma_k^2/\mu_k.$$

Aus der letzten Beziehung liest man

$$0 < \ldots < \| b - Ax^{k+1} \| < \| b - Ax^k \| < \ldots < \| b - Ax^0 \| \text{ ab,}$$

d. h., es existiert $\lim \|b - Ax^k\| \geq 0$.

Wegen $\lim (\|b-Ax^{k+1}\|^2 - \|b-Ax^k\|^2) = 0$ und $\omega_k(2-\omega_k) \geq \underline{\omega}(2-\bar{\omega}) > 0$ für alle k ist $\lim \sigma_k^2/\mu_k = 0$.

Wegen $(c_i-s_i z_i^k)^2 \leq \sum_{i=1}^{r}(c_i-s_i z_i^k)^2 \leq \|b - Ax^k\|^2 = \|b - Ax^o\|^2$ (für $i=1,\ldots,r$ und $k=0,1,\ldots$) ist $\{\mu_k\}$ beschränkt. Damit ist aber $\lim \sigma_k = 0$, also $\lim (c_i-s_i z_i^k) = 0$ bzw. $\lim z_i^k = c_i/s_i$ $(i=1,\ldots,r)$.

Ist $A\delta x^k = 0$ für irgendein $k = k_o$, dann ist $\varphi_k(\gamma) = \text{const.}$ für alle γ, d. h. $\sum_{i=1}^{r} s_i^2(c_i-s_i z_i^{k_o})^2 = 0$; daraus folgt unmittelbar $z_i^k = c_i/s_i$ $(i=1,\ldots,r,\ k=k_o,\ k_o+1,\ldots)$, also ebenfalls $\lim z_i^k = c_i/s_i$.

Für die Komponenten z_i^k $(i=r+1,\ldots,n)$ von z^k erhält man aus der Iterationsvorschrift $z^{k+1} = z^k + \gamma_k S^T(c-Sz^k)$ die Beziehung $z_i^k = z_i^o$ $(i=r+1,\ldots,n,\ k=0,1,\ldots)$.

Insgesamt gilt daher $\lim z^k = S^+c + (I-S^+S)z^o$.

Für $\{x^k\}$ folgt somit

$$\begin{aligned}\lim x^k &= B^{-1}VS^+U^Tb + B^{-1}V(I-S^+S)V^TBx^o \\ &= B^{-1}(AB^{-1})^+b + (I-B^{-1}(AB^{-1})^+A)x^o = x^o + B^{-1}(AB^{-1})^+(b-Ax^o).\end{aligned}$$

3. Anwendung des Verfahrens zur Nachkorrektur

Die symmetrische, positiv definite Matrix P ist als Näherung für A^TA (bzw. $\alpha I + A^TA$ mit einem geeigneten Regularisierungsparameter $\alpha > 0$, falls $\text{Rang}(A) < n$) so zu wählen, daß δx^k 'leicht berechnet' werden kann.

Beispiele:

a) QR-Zerlegung von A ($QR \approx A$, Q orthogonal, R obere Dreiecksmatrix mit Rang(R) = n): $P = R^TR$.

b) LR-Zerlegung von A^TA nach Cholesky ($R^TR \approx A^TA$, R obere Dreiecksmatrix): $P = R^TR$.

c) LR-Zerlegung von A nach Gauß ($LR \approx A$, $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $l_{ij} = 0$ für $i < j$, $R = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $r_{ij} = 0$ für $i > j$, Rang(L) = Rang(R) = n): $P = R^T(L^TL)R$.

d) Singulärwertzerlegung von A ($USV^T \approx A$, U und V orthogonal, $S = \mathrm{diag}(s_i) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $s_i > 0$, $i=1,\ldots,n$): $P = VS^TSV^T$.

Eine iterative Verbesserung ist i. allg. nur dann erfolgreich, wenn geeignete Werte mit höherer Genauigkeit berechnet werden. Ist $Ax = b$ konsistent, dann genügt es, den Defekt $b - Ax^k$ mit höherer Genauigkeit zu ermitteln. Ist dagegen $Ax = b$ inkonsistent, dann ist entweder $A^T(b-Ax^k)$ mit höherer Genauigkeit zu berechnen, oder statt (V1) das folgende, mit (V1) im Sinne der Analysis äquivalente Verfahren (V2) zu benutzen (s. Golub /4/, Golub, Saunders /5/, Björck /2/).

(V2) Startwerte: $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $r^0 \in \mathbb{R}^m$ beliebig vorgegeben;

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \gamma_k \delta x^k$, $r^{k+1} = r^k + \delta r^k$ mit

$$P\delta x^k = A^T(b-Ax^k-r^k) + A^Tr^k \text{ und}$$

$$\delta r^k = (b-Ax^k-r^k) - \gamma_k A\delta x^k \quad (k=0,1,\ldots),$$

wobei $(b-Ax^k-r^k)$ mit höherer Genauigkeit und alle übrigen Terme mit einfacher Genauigkeit berechnet werden.

Falls der Grenzwert $\lim x^k = x^Q$ existiert, konvergiert die Folge $\{r^k\}$ gegen $b - Ax^Q = [I-AB^{-1}(AB^{-1})^+](b-Ax^0)$. Daher sind

$r^0 = b - Ax^0$ (mit einfacher Genauigkeit) und $r^0 = 0$ (d. h. $r^1 = b - Ax^1$) als Startvektoren r^0 naheliegend.

4. Numerische Tests

Vorgelegt sei das lineare, überbestimmte Gleichungssystem $Ax = b$ mit der von Zielke /8/ angegebenen Testmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a-1 & a \\ a+1 & a & a & a \\ a & a & a-1 & a \\ a+1 & a & a & a \\ a+1 & a+1 & a & a+1 \end{bmatrix},$$

$\mathrm{Rang}(A) = 3$, $\mathrm{cond}_F(A) = \|A\|_F \, \|A^+\|_F \approx 7.75 \, |a|^2$ für $|a| \gg 1$,

und der rechten Seite $b = (1,1,1,1,1)^T$.
Als Lösungen erhält man hier (unabhängig vom gewählten Parameter a in A) $x^N = (1,0,-1,0)^T$ und $x^Q = (1,g,-1,-g)^T$, wobei g beliebig reell ist; nun gilt $\|b-Ax^N\| = \|b-Ax^Q\| = 0$, d. h., $Ax = b$ ist konsistent. Mittels Householder-Transformationen wurden QR-Zerlegungen von A und $\begin{bmatrix} A \\ \hdashline \sqrt{\alpha}\, I \end{bmatrix}$ mit verschiedenen Regularisierungsparametern $\alpha > 0$ und für verschiedene Werte von a berechnet. Die durch Regularisierung bestimmten Näherungen $x^0 = R^{-1}Q^Tb$ für x^N wurden anschließend mit (V1) verbessert (Berechnung von $(b-Ax^k)$ mit doppelter Genauigkeit). Zur Einschätzung der Genauigkeit der nach iterativer Verbesserung erhaltenen Näherungen x wurden die Größen

$$\varkappa(x) = -\lg(\max_i q_i) \text{ berechnet, wobei}$$

$$q_i = \begin{cases} |x_i - x_i^Q| / |x_i^Q|, & \text{falls } |x_i^Q| \neq 0 \\ |x_i - x_i^Q|, & \text{falls } |x_i^Q| = 0 \end{cases}$$

mit der 'am nächsten' gelegenen Quadratmittellösung x^Q war, die in den meisten Fällen mit x^N übereinstimmte.

In der folgenden Tabelle beziehen sich die Werte in der jeweils

1. Zeile auf die Startwerte, in der
2. Zeile auf die Iteration (V1) mit $\gamma_k = 1$ $(k=0,1,\ldots)$ und in der
3. Zeile auf die Iteration (V1) mit γ_k gemäß Satz 2 $(\omega_k=1)$.

ANZ gibt die Anzahl der benötigten Iterationsschritte (maximal 50) an. Maschinengenauigkeit: 8 dezimale Mantissenstellen.

<u>Tabelle</u>

	a = 200			a = 500			a = 1000		
α	$\lVert b - Ax \rVert$	$\varkappa$	ANZ	$\lVert b - Ax \rVert$	$\varkappa$	ANZ	$\lVert b - Ax \rVert$	$\varkappa$	ANZ
0	.65#-4	2.8		.78#-4	1.6		.40#-3	1.8	
#-8	.15#-4	3.6		.92#-4	1.5		.71#-4	1.3	
	.21#-5	5.5	3	.23#-5	5.1	4	.24#-4	3.9	2
	.21#-5	5.5	2	.26#-5	5.0	4	.11#-4	4.1	2
#-7	.51#-4	2.0		.16#-3	1.1		.19#-3	0.6	
	.16#-5	5.7	3	.71#-4	4.2	4	.65#-4	4.6	4
	.65#-6	6.1	2	.70#-4	3.2	1	.13#-4	3.1	2
#-6	.43#-3	1.0		.71#-3	0.4		.61#-3	0.1	
	.86#-6	5.9	6	.43#-5	3.4	9	.16#-4	3.0	19
	.35#-6	6.3	4	.55#-5	3.3	3	.14#-3	2.1	5
#-5	.22#-2	0.3		.14#-2	0.1		.79#-3	0.0	
	.24#-5	4.0	14	.13#-4	2.3	41	.15#-3	0.7	5o
	.23#-5	4.0	3	.31#-5	3.8	5	.11#-3	1.8	6
#-4	.38#-2	0.0		.16#-2	0.0		.81#-3	0.0	
	.69#-4	1.8	50	.83#-3	0.3	5o	.69#-3	0.1	50
	.39#-5	3.9	4	.36#-5	3.0	7	.51#-5	2.5	4
#-3	.40#-2	0.0		.16#-2	0.0		.82#-3	0.0	
	.28#-2	0.2	5o	.15#-2	0.0	5o	.80#-3	0.0	50
	.25#-4	3.5	4	.37#-4	1.7	5	.24#-3	0.5	3
#-2	.41#-2	0.0		.16#-2	0.0		.82#-3	0.0	
	.39#-2	0.0	50	.16#-2	0.0	50	.81#-3	0.0	50
	.77#-3	0.7	50	.14#-2	0.1	5o	.81#-3	0.0	5o

Literatur

/1/ Ben-Israel, A., and Greville, T. N. E.:
Generalized inverses. Theory and Applications. New York 1974

/2/ Björck, A.: Comment on the iterative refinement of least-squares solutions. J. Amer. Stat. Ass. 73, 161 - 166 (1978)

/3/ Businger, P., and Golub, G. H.:
Linear least squares solution by Householder transformations. Numer. Math. 7, 269 - 276 (1965)

/4/ Golub, G. H.: Matrix decompositions and statistical calculations. In: Milton, R. C., and Nelder, J.A. (Eds.): Statistical Computations. 365 - 397, New York 1969

/5/ Golub, G. H., and Saunders, M. A.:
Linear least squares and quadratic programming. In: Abadie, J. (Ed.): Integer and Nonlinear Programming. 229 - 256, Amsterdam - London 1970

/6/ Golub, G. H., and Wilkinson, J. H.:
Note on the iterative refinement of least squares solution. Numer. Math. 9. 139 - 148 (1966)

/7/ Yolles, M. I.: Least squares successive relaxation. J. Inst. Math. Applic. 16, 329 - 343 (1975)

/8/ Zielke, G.: Beiträge zur Theorie und Berechnung von verallgemeinerten inversen Matrizen. Dissertation (B), Halle 1977

eingegangen: 19. 09. 1979

Anschrift des Verfassers:

Dr. Wolfgang Mönch
Bergakademie Freiberg
Sektion Mathematik
DDR-92 Freiberg
Bernhard-von-Cotta-Str. 2

Rostock. Math. Kolloq. 13, 119 - 122 (1980)

Lothar Berg

Ein ableitungsfreies Dreistufenverfahren mit quadratischer Konvergenz zur Berechnung von Nullstellen

Um für einen Kleinrechner ein Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung für eine gegebene Funktion $f(x)$ zu programmieren, das bei verhältnismäßig geringem Aufwand eine überlineare Konvergenz besitzt, wurden verschiedene Verallgemeinerungen der Regula falsi ins Auge gefaßt, bei denen die neue Iterierte aus drei vorhergehenden Näherungen berechnet wird. Es ist naheliegend, durch die drei zugehörigen Punkte der Funktion wie bei R. Zurmühl /5/ eine quadratische Interpolationsparabel zu legen. Im Gegensatz zu dem in /1/ beschriebenen Verfahren ist dann aber im allgemeinen nur eine einzige der beiden Nullstellen der Parabel eine verbesserte Näherung an die gesuchte Nullstelle. Aus diesem Grunde benutzt A. M. Ostrowski /2/ zur Interpolation eine gebrochen lineare Funktion, die keine überzählige Nullstelle besitzt. Von den zahlreichen Iterationsverfahren, die man auf der Grundlage der allgemeinen Interpolationstheorie erhalten kann, sei hier noch das Beispiel 6-2 aus J. F. Traub /3/

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_i}{f[x_i,x_{i-1}]} + \frac{f_i f_{i-1}}{f_i - f_{i-2}}\left(\frac{1}{f[x_i,x_{i-1}]} - \frac{1}{f[x_{i-1},x_{i-2}]}\right)$$

angeführt, bei dem die Ausdrücke mit den eckigen Klammern die Steigungen

$$f[x,y] = (f(x) - f(y))/(x-y)$$

bedeuten. Alle bisher genannten Verfahren zeichnen sich dadurch aus, daß sie bei jedem Iterationsschritt, vom Start abgesehen, die Berechnung von nur einem einzigen neuen Funktionswert erfordern und keine Ableitungen benutzen. Im folgenden soll ein weiteres Verfahren dieser Art betrachtet werden, das eine sehr anschauliche Deutung zuläßt.

<u>Das Iterationsverfahren:</u> Zu drei gegebenen Näherungswerten x_i, x_{i-1}, x_{i-2} berechne man zunächst die Steigungen

$$a_i = f[x_{i-1},x_{i-2}],\ b_i = a_{i+1},\ c_i = f[x_i,x_{i-2}] \tag{1}$$

sowie den Quotienten

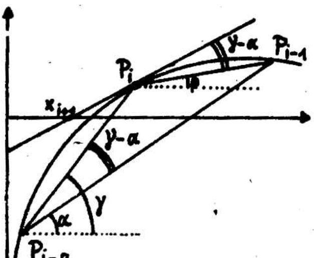
$$m_i = \frac{(1 + a_i c_i) - (c_i - a_i)b_i}{(1 + a_i c_i)b_i + (c_i - a_i)}\ , \tag{2}$$

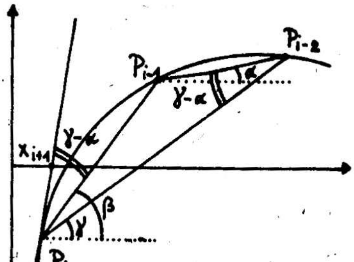
wobei die Klammerung in einer solchen Weise durchgeführt wurde, wie sie für numerische Rechnungen günstig ist. Der nächste Iterationswert wird dann durch

$$x_{i+1} = x_i - m_i f(x_i) \tag{3}$$

festgelegt. Es genügt, eine einzige Ausgangsnäherung x_2 als Startwert vorzugeben, wenn man stets $x_0 = x_2 - r$, $x_1 = x_2 + r$ und beispielsweise $r = 0.01$ wählt. Die Iteration beginnt mit dem Wert $i = 2$ und wird abgebrochen, sobald der Defekt $f(x_{i+1})$ hinreichend klein ist. Will man vermeiden, daß das Verfahren vorher versagt, so hat man in den drei Fällen, wo im Rahmen der Rechengenauigkeit entweder der Zähler oder der Nenner von m_i verschwindet oder $x_{i+1} = x_{i-1}$ wird, die letzten drei Iterierten geeignet abzuändern.

<u>Geometrische Interpretation:</u> Das Iterationsverfahren (3) besagt offenbar, daß die Nullstelle der Geraden durch den Kurvenpunkt $P_i = (x_i, f(x_i))$ mit dem Steigungsfaktor $1/m_i$ als neue Iterierte x_{i+1} zu wählen ist.





Diese Gerade ist aber nichts anderes als die Tangente des Kreises durch die Punkte P_i, P_{i-1}, P_{i-2} im Punkt P_i. Um uns hiervon zu überzeugen, bemerken wir zunächst, daß die Tangente nach dem elementaren Satz über den Sehnentangentenwinkel mit den Bezeichnungen der vorstehenden Abbildungen den Steigungsfaktor $\tan(\gamma - \alpha + \beta)$ besitzt. Da nach (1)

$$a_i = \tan\alpha\,,\quad b_i = \tan\beta,\quad c_i = \tan\gamma$$

gilt, findet man leicht mit Hilfe des Additionstheorems für den Tangens, daß der Steigungsfaktor der Tangente gleich dem reziproken Wert von (2) ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>Konvergenzgüte:</u> Wir zeigen jetzt, daß das Verfahren (3) in der Umgebung einer einfachen Nullstelle x^* einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion dasselbe Konvergenzverhalten wie das Newton-Verfahren besitzt und daher insbesondere quadratisch konvergiert. Zu diesem Zweck setzen wir $d_j = x_{i-2+j} - x^*$ und berechnen mit Hilfe der Taylorentwicklung

$$a_i = f' + \tfrac{1}{2}(d_o+d_1)f'',\quad b_i = f' + \tfrac{1}{2}(d_1+d_2)f'',\quad c_i = f' + \tfrac{1}{2}(d_o+d_2)f''$$

bis auf Glieder höherer Ordnung. Das Argument von f' und f'' ist dabei überall x^*. Hieraus folgt

$$a_i c_i = f'^2 + (d_o + \tfrac{1}{2}(d_1+d_2))f'f'',$$

$$c_i - a_i = \tfrac{1}{2}(d_2 - d_1)f''$$

und nach kurzer Rechnung

$$m_i = \frac{1}{f'}(1 - d_2\frac{f''}{f'}),$$

$$m_i f(x_i) = (1 - \frac{1}{2}\, d_2\frac{f''}{f'})d_2\,.$$

sowie schließlich wegen (3)

$$d_3 = \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\, d_2^2$$

bis auf Glieder höherer Ordnung. Diese Gleichung besagt, daß das Verfahren (3) wie das Newton-Verfahren die Konvergenzordnung 2 und den Konvergenzfaktor $f''(x^*)/2f'(x^*)$ besitzt.

Es sei noch erwähnt, daß kürzlich von W. Werner /4/ ein Verfahren der Ordnung $1 + \sqrt{2}$ entwickelt wurde, das allerdings Ableitungen benutzt. Außerdem ist dort jeder Schritt ein Doppelschritt, so daß sich die Ordnung eigentlich auf $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ reduziert.

Beispiele: Das Verfahren (3) wurde auf dem Robotron K 1002 an Hand der Funktion $f(x) = \sin x - 0.5$ mit den Nullstellen $\pi/6 + 2\pi k$ und $5\pi/6 + 2\pi k$ getestet, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Von dem günstigen Startwert $x_2 = 0.5$ ausgehend, ergaben sich die Iterierten

$$x_3 = 0.5234450168, \quad x_4 = 0.5235987573, \quad x_5 = 0.5235987756,$$

wobei der letzte Wert sich beim nächsten Iterationsschritt nicht mehr ändert und im Rahmen der Rechengenauigkeit gleich $\pi/6$ ist. Wählt man r zwischen 10^{-9} und 0.5, so ändern sich nur die Zwischenwerte, während x_5 unverändert bleibt. Im Fall $r = 1$ entsteht bei x_5 eine Abweichung um 10^{-9}, so daß zur Erreichung der vorhergehenden Genauigkeit ein weiterer Schritt erforderlich ist. Bei dem ungünstigeren Startwert $x_2 = 0$ (und wieder $r = 0.01$) sind ebenfalls 4 Iterationsschritte erforderlich. Bei dem besonders ungünstigen Startwert $x_2 = 1.5$ in der Nähe eines Extremwertes sind sogar 10 Schritte erforderlich, um die Nullstelle $-7\pi/6 = -3.665191429$ zu erreichen. Dieses Beispiel unterstreicht, daß die allgemeine Konvergenzaussage nur lokaler Natur ist, da das Iterationsverfahren am Anfang Schwierigkeiten hat, sich auf eine der unendlich vielen Nullstellen einzupendeln.

Literatur

/1/ Berg, L.: On the simultaneous calculation of two zeros. Computing (to appear)

/2/ Ostrowski, A. M.: Solution of equations and systems of equations. New York - London 1960

/3/ Traub, J. F.: Iterations methods for the solution of equations. Englewood Cliffs - New York 1964

/4/ Werner, W.: Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung. Numer. Math. 32, 333-342 (1979)

/5/ Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin - Heidelberg - New York 1965

eingegangen: 19. 09. 1979

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Lothar Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 123 - 131 (1980)

Hans-Wolfgang Stolle

Zu einigen Problemen der Mathematikausbildung für Ingenieure[1]

Die Gestaltung der mathematischen Ausbildung von Ingenieuren muß sich an den Zielstellungen, die dieser Ausbildung zugrunde liegen, orientieren. Diese Ziele sind in den Lehrplandokumenten der Hochschulen der DDR verankert und beinhalten im wesentlichen:

1. Die Vermittlung derjenigen mathematischen Grundlagen, die für das Verständnis und für die Aneignung naturwissenschaftlicher und technischer Erkenntnisse erforderlich sind.
2. Das Erlangen der Befähigung, naturwissenschaftliche und technische Probleme mathematisch zu formulieren und zu lösen bzw. in Zusammenarbeit mit Mathematikern einer Lösung zuzuführen.

Dazu ist die Kenntnis und das Verständnis für verschiedene grundlegende mathematische Denk- und Ausdrucksweisen erforderlich, wie auch die Beherrschung einer Reihe wichtiger, damit in Zusammenhang stehender mathematischer Begriffe, Regeln und Verfahren. Insbesondere muß die mathematische Ausbildung folgende Denkweisen besonders schulen:

a) Das deterministische Denken, wie es bei der Behandlung der Mehrzahl naturwissenschaftlicher und technischer Probleme etwa durch die Beschreibung mittels gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen und Integralgleichungen auftritt.

b) Das stochastische Denken, das bei der Erfassung irregulärer Vorgänge und bei statistischen Untersuchungen der verschiedensten Art anzuwenden ist.

---

1 Vortrag, gehalten auf einem internationalen Seminar zu Problemen der Ausbildung in Varna (VR Bulgarien) 1979

c) Das numerische Denken, das darauf gerichtet ist, die analytischen und stochastischen Modelle der physikalisch-technischen Realität durch geeignete Diskretisierungsverfahren auf algebraische Gleichungen und Gleichungssysteme zurückzuführen, um sie auf diese Weise mit Hilfe der modernen Rechentechnik einer Lösung zuzuführen.

d) Das geometrische Denken, das es einerseits ermöglicht, das anschaulich Erfaßbare mit analytischen Mitteln zur Darstellung zu bringen (z. B. der Vektorbegriff), und das andererseits durch Abstraktion zur anschaulichen Beschreibung analytischer Sachverhalte dienen kann (z. B. der Begriff des Funktionenraumes).

Die Vermittlung dieser Denkweisen erfolgt im Rahmen der mathematischen Grundausbildung nicht gleichrangig. Nach wie vor ist für die Schulung des deterministischen Denkens der größte Teil der Zeit reserviert, obwohl in den letzten Jahren gemäß den Anforderungen der Praxis die stochastische Betrachtungsweise an Umfang immer mehr zugenommen hat. Demgegenüber wird nach unseren Erfahrungen den numerischen und geometrischen Problemen noch zu wenig Raum gewidmet, obwohl gerade diese Denkweisen für den berechnenden und konstruierenden Ingenieur eine immense Bedeutung besitzen.
Neben der Schulung des Ingenieurs in den genannten vier Denkweisen sind noch einige allgemeine Zielstellungen der mathematischen Ausbildung hervorzuheben, die der Mathematik als Wissenschaft immanent sind:

- das logische Schließen
- die Fähigkeit zur Abstraktion
- das axiomatische Herangehen.

Bei der Realisierung der oben genannten Zielstellungen werden wir stets aufs neue mit folgenden Fragen konfrontiert:

1. Welche Form des Unterrichts gestaltet die mathematische Ausbildung von Ingenieuren optimal?

2. Wie kann die Mitarbeit der Studenten aktiviert werden, um zu besseren Studienergebnissen zu gelangen?

3. Wie kann das in der Grundausbildung erworbene mathematische Wissen anwendungsbereit gehalten und weiter vertieft werden?

Diese drei Fragen sollen im folgenden aus der Sicht der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock beantwortet werden. Eine allen Anforderungen gerecht werdende optimale Methode für die mathematische Ausbildung gibt es natürlich nicht. Zunächst stehen einander zwei extreme Auffassungen scharf gegenüber:

a) Die für Ingenieure erforderliche Mathematik wird in die Kurse der technischen Mechanik und der Physik integriert und dort nur soweit aufbereitet, wie es die jeweiligen technischen, physikalischen und numerisch-rechentechnischen Belange notwendig erscheinen lassen. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß dem Studenten die Nützlichkeit der mathematischen Ausdrucksweise unmittelbar bewußt wird. Es gibt auch keine großen zeitlichen Unterschiede zwischen der Vermittlung mathematischer Erkenntnisse und deren Anwendung. Auf der anderen Seite wird aber unter solchen Bedingungen meist nur ein mehr oder weniger breites Rezeptwissen vermittelt, insbesondere wenn es sich bei dem Lehrenden, wie das dann in der Regel der Fall sein wird, um Wissenschaftler aus dem Ingenieurbereich handelt, die naturgemäß die Mathematik nur als eine Hilfswissenschaft betrachten. Auf jeden Fall wird eine systematische Entwicklung der oben genannten Zielstellungen nicht möglich sein. So wird der Student die jeweils vermittelte mathematische Methode stets nur mit dem jeweils betrachteten Spezialfall in Verbindung bringen, und er wird im Normalfall auch nicht in der Lage sein, allgemeine mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, die es ihm gestatten, diese Erkenntnisse auf andersgeartete Problemstellungen seines Anwendungsbereichs zu übertragen.

b) Die Mathematik wird in strenger Form entsprechend den inneren Gesetzmäßigkeiten der einzelnen mathematischen Disziplinen abgehandelt, wobei die Bezüge zu den technischen und physikalischen Wissenschaften gar nicht oder in kaum erwähnenswerter Weise zur Geltung kommen. Sicher wird bei einem solchen Vorgehen den Zielsetzungen der Entwicklung des logischen Schließens, der Fähigkeit zur Abstraktion und der axiomatischen Betrachtungsweise in hohem Maße Rechnung getragen. Gerade jüngere Mathematiker, die mit diesbezüglichen Lehraufgaben betraut werden und keine Praxiserfahrung besitzen, sehen häufig in der Erziehung zur mathematischen Strenge das Haupterziehungsziel. Abgesehen davon, daß eine derartige Methode von der Mehrzahl der Studenten der technischen Wissenschaften nicht bewältigt werden kann, ist besonders zu bemängeln, daß hierbei fast jede Möglichkeit der Motivierung verloren geht. Der Student erkennt nicht, wozu er die Mathematik in ihren Details studieren muß, und lehnt sie daher ab. Er sieht es nur als eine mathematische Spitzfindigkeit an, wenn er gezwungen wird, einen mathematischen Sachverhalt bei einer vollständigen Fallunterscheidung in allen Einzelheiten präzis zu untersuchen.

Ich bin der Überzeugung, daß hier ein Mittelweg zwischen diesen beiden extremen Auffassungen der Richtige ist. Man muß in der Ingenieurausbildung die positiven Aspekte beider Lehrauffassungen miteinander zu verbinden suchen. Einerseits muß die Mathematik des Ingenieurs in jeweils inhaltlich geschlossenen Teilabschnitten dargestellt und vom Studenten verarbeitet werden, so daß ihm der rote Faden des inneren mathematischen Zusammenhangs erkennbar bleibt. Auf der anderen Seite muß der Motivierung für die Behandlung eines mathematischen Stoffgebietes ein breiter Raum gegeben werden.
Es ist notwendig, alle mathematischen Begriffe exakt zu definieren und die Sätze mit ihren genauen Voraussetzungen, die den Anwendungsbereich dieser Sätze abgrenzen, zu formulieren. Hier darf es keine Abstriche geben. Aber sowohl die Anzahl als auch die Tiefe der ausgeführten Beweise muß sich den angestrebten Zielsetzungen anpassen. Um der Motivierung entsprechend Raum zu geben, ist es allein schon aus Zeitgründen notwendig, Beweise exemplarisch zu bringen und gegebenenfalls unter vereinfachenden Voraussetzungen zu führen. Dabei steht die Frage nach der Konstruktion der Lösung einer Funktionalgleichung immer vor der Frage nach deren Existenz.
Als ein Beispiel für ein mathematisch einwandfreies und doch sehr ökonomisches und den Anwendungen vorzüglich angepaßtes

Verfahren sei die Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation genannt. Sie kann leicht als uneigentliches Integral eingeführt werden. Durch die Laplace-Transformation kann die im Verhältnis komplizierte Differentialgleichung auf eine einfache algebraische Gleichung zurückgeführt werden, deren Lösung im Bildraum sofort angegeben werden kann. Natürlich muß die Frage der Eindeutigkeit der Rücktransformation in den Originalraum im Rahmen des Mathematikkurses für Ingenieure unbeantwortet bleiben. Daß die Originalfunktion der Lösung der algebraischen Gleichung tatsächlich die Lösung der Differentialgleichung ist, kann dagegen ohne Schwierigkeit verifiziert werden.
Die Herstellung von Bezügen zu den Anwendungen muß in der Vorlesung und in der Übung permanent sein und sollte in jedem Fall die Behandlung eines neuen Abschnittes einleiten. Nach Möglichkeit muß eine Abstimmung mit den Nachbardisziplinen erfolgen. Aber nur eine solche Lehrkraft kann eine sinnvolle Motivierung in einem entsprechend breitem Umfang geben, die selbst ein physikalisches oder ingenieurmäßiges Denken in einem genügend hohem Maße besitzt. Bei der Lehrkraft muß eine Synthese zwischen mathematischer und praxisbezogener Denkweise vorhanden sein. Deshalb sollte sich jeder Mathematiker, der in der Ausbildung für Ingenieure tätig ist, über einen längeren Zeitraum hin mit konkreten Problemen aus den Anwendungen beschäftigt haben bzw. in der interdisziplinären Forschung tätig sein. Auf diese Weise lernt er die Denkweise des Ingenieurs am besten kennen und kann demzufolge auch das mathematische Auffassungsvermögen des Ingenieurs richtig einschätzen.
Um es noch einmal zu sagen: Die Grundvorlesung in Mathematik für den Ingenieur muß eine niveauvolle, aber den Denk- und Anschauungsweisen des Ingenieurs angepaßte mathematische Lehrveranstaltung sein, die in starkem Maße die für die Praxis wichtigen Fragestellungen berücksichtigt und deren Inhalt weitgehend durch physikalische und technische Probleme motiviert wird, ohne dabei die mathematische Aussagekraft und die allgemeingültige Anwendbarkeit der Sätze und Aussagen zu verwässern.

Ich gehe nun zur Frage der Aktivierung der studentischen Mitarbeit über. Es ist klar, daß der Erfolg der mathematischen Lehrveranstaltungen sehr stark davon abhängig ist, mit welcher Intensität sich der Student mit dem mathematischen Lehrstoff beschäftigt. Das Verhältnis von Vorlesung und Übung muß so gewählt werden, daß die rezeptive Phase der Vorlesung nicht die aktive Phase der Übung überwiegt. Der Übungsanteil sollte daher größer als der Vorlesungsanteil sein. In der Praxis ist diese Relation meistens leider umgekehrt. Das hat für das Verständnis des Stoffes und für die Bereitschaft zur Mitarbeit oft schwerwiegende Folgen und kann in der Regel nicht durch das häusliche Selbststudium ausgeglichen werden.
Ein anderer Gesichtspunkt ist der, daß die Vorlesung so aufgebaut sein muß, daß der Student zur selbständigen Arbeit angeregt wird. Nach unseren Erfahrungen scheint ein wichtiges Mittel dazu die ständige und vielseitige Einbeziehung eines dafür geeigneten Lehrbuches in den Unterricht zu sein, wobei natürlich nicht etwa daran gedacht ist, den Unterricht schulmäßig durchzuführen. In der DDR ist dazu in hervorragendem Maße die 21-bändige Reihe "Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte" (erschienen im Teubner-Verlag Leipzig) geeignet, die, nach dem Baukastenprinzip zusammengestellt, allen Spezialisierungsrichtungen der Naturwissenschaft und Technik Rechnung zu tragen vermag. Für die Grundausbildung der Ingenieure reichen die Bände

Band 1 - Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen,

Band 2 - Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen,

Band 3 - Unendliche Reihen,

Band 4 - Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen,

Band 5 - Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen,

Band 7/1 - Gewöhnliche Differentialgleichungen,

Band 13 - Lineare Algebra ,

Band 17 - Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik und in einem bestimmten kleineren Umfang für spezielle Fachrichtungen

Band 8 - Partielle Differentialgleichungen,
Band 9 - Komplexe Funktionen und konforme Abbildungen,
Band 10 - Operatorenrechnung,
Band 14 - Lineare Optimierung
vollkommen aus.

Um eine regelmäßige Arbeit des Ingenieurstudenten mit dem Lehrbuch zu erreichen und um auf diese Weise das Selbststudium der Studenten zu stimulieren, muß sich der Dozent auf ein bestimmtes, von ihm ausgewähltes Lehrbuch beziehen und eine gezielte Anleitung zum Studium dieser Literatur neben der Vorlesung geben. Man muß hier Unterschiede machen zwischen dem Mathematikstudenten, von dem man erwartet, daß er verschiedene Bücher zur Hand nimmt, und dem Ingenieurstudenten, der sich bei der Vielzahl seiner Fächer nur auf ein, die Vorlesung ergänzendes Mathematiklehrbuch konzentrieren kann. Es ist natürlich erforderlich, daß sich der Dozent in wesentlichen Abschnitten sowohl in der Form der Darstellung als auch in den Bezeichnungen weitgehend auf dieses Lehrbuch stützt, wobei allerdings die zeitliche Anordnung des Stoffes, die Stoffauswahl, die Ergänzungen zum Buch und die Schwerpunktsbildung in seiner Hand liegen und die Darstellung den jeweiligen Bedürfnissen der Fachrichtung und den zeitlichen Möglichkeiten anzupassen ist. Hinweise auf wichtige Definitionen und Sätze und auf besonders wesentliche Abschnitte des Buches regen den Studenten an, sich selbständig mit dieser Literatur zu beschäftigen und sollten daher regelmäßig erfolgen. Auch eine so gehaltene Vorlesung kann und muß durchaus individuelle Züge des Dozenten zum Ausdruck bringen, ohne die eine Vorlesung beim Studenten nicht zündet. Insbesondere hat der Dozent bei der Motivierung und Anwendung der mathematischen Erkenntnisse viel freien Spielraum. Aber der Student soll aus der Vorlesung erkennen, daß ihm das Buch eine hilfreiche Ergänzung zum Verständnis des Lehrstoffes bietet. Es hat sich z. B. sehr bewährt, fachlich gute Studenten zu beauftragen, spezielle im Lehrbuch behandelte Beispielrechnungen und Anwendungen in den Übungsstunden vorzutragen.

Hierbei werden die Verbindung zum Buch und die eigenständige Mitarbeit besonders gefördert.
Eine für den Erfolg der Mathematikausbildung fundamentale Problematik ist der Umfang der Kenntnisse des neu immatrikulierten Studenten in der Elementarmathematik. Nur wenn auf diesem Gebiet in der allgemeinbildenden Schule eine gute Vorarbeit geleistet worden ist, kann die Mathematikausbildung an der Hochschule erfolgreich sein. Es muß erreicht werden, daß jeder Student zu Beginn seines Studiums sichere Kenntnisse und Fertigkeiten auf den Gebieten "Bruchrechnung", "Potenz- und Wurzelrechnung", "Grundbegriffe der Geometrie", "Grundbegriffe der Trigonometrie", "Quadratische Gleichungen" und "Grundbegriffe der elementaren Funktionen unter besonderer Berücksichtigung der Logarithmusfunktion" besitzt. Eine sichere Beherrschung dieser Grundtatsachen ermöglicht dem Studenten ein ihn befriedigendes, zielorientiertes Studium der höheren Mathematik. Um alle Studenten auf ein gemeinsames Grundniveau zu bringen, ist es daher erforderlich, daß sie sich vor dem Studium mit diesen Fragestellungen noch einmal auseinandersetzen. Das erfolgt in Rostock durch die Ausgabe von Aufgaben zu den oben genannten Problemkreisen, die von den angehenden Studenten bis zum Studienbeginn gelöst und an den Lehrbeauftragten eingeschickt werden müssen. Zur Auswahl der Aufgaben und zur Anleitung des Selbststudiums wird bei uns ein spezieller Vorbereitungsband des oben genannten Lehrwerks verwandt, auf den die Studenten hingewiesen werden. Erforderlichenfalls werden zu Beginn des Studiums noch Förderkurse durchgeführt.

Ich komme zum Schluß meiner Ausführungen zur Frage der Festigung und Vertiefung des in der Grundausbildung erworbenen mathematischen Wissens. Die intensivste Form der Anwendung der Mathematik während des Studiums erfolgt oft im Rahmen der Diplomarbeit. Es ist daher wichtig, über das ganze Studium hinweg mathematische Lehrveranstaltungen anzubieten, die so ausgerichtet sein müssen, daß für die theoretisch interessierten Studenten die vorhandenen mathematischen Kenntnisse auf höherer Ebene wiederholt, weiter vertieft und kontinuierlich ausgebaut werden. Diesbezügliche Themen sind z. B. "Grundlagen der Funktionalanalysis", "Spezielle Verfahren der numerischen Mathematik", "Lösungsverfahren für nichtlineare Operatorgleichungen", "Vertiefung der Kenntnisse in der mathematischen Statistik", "Behandlung optimaler Prozesse und Systeme", "Nichtlineare Optimierung", "Spezielle Funktionen der höheren Analysis", "Spezielle algebraische Strukturen" und ähnliches. Natürlich muß bei solchen Lehrveranstaltungen stets ein ganz besonders enger Bezug zu den Anwendungen vorhanden sein. Hier bietet sich ein interessantes Feld der Zusammenarbeit zwischen Theoretikern der Ingenieurwissenschaften und Mathematikern an. Veranstaltungen dieser Art haben in Rostock in früheren Jahren sehr gute Erfolge gezeigt und sollten auch jetzt verstärkt wieder aufgenommen werden. Der wissenschaftlich-technische Fortschritt kann nur gemeistert werden, wenn ein großer Teil der Absolventen der Technischen Hochschulen ein hohes theoretisches Niveau besitzt. Daher müssen wir insbesondere auch an die mathematische Ausbildung der Ingenieurstudenten entsprechend hohe Anforderungen stellen.

eingegangen: 02. 10. 1979

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Hans-Wolfgang Stolle
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 133 - 134 (1980)

Günther Steffen

Zur Struktur endlicher metabelscher Gruppen mit abelscher Fittinggruppe

Autorreferat der Dissertation

Es wird die Struktur derjenigen auflösbaren Gruppen untersucht, die auf ihren Hauptfaktoren als abelsche Gruppen dargestellt werden. Da eine irreduzible abelsche Matrixgruppe zyklisch ist, kann man eine relativ übersichtliche Struktur solcher Gruppen erwarten. Die Gruppen G sind durch $G' \subseteq F(G)$ ($F(G)$ = Fittinggruppe, G' = Kommutatorgruppe von G) gekennzeichnet. Da diese Gruppenklasse noch recht umfangreich ist, wird zusätzlich die Kommutativität von $F(G)$ gefordert und auch der Fall $G' = F(G)$ getrennt betrachtet. Ferner wird unterschieden, ob G über $F(G)$ zerfällt oder nicht. Man kann die Untersuchungen ansehen als Teil des Fittingschen Programms zur Klassifikation der endlichen auflösbaren Gruppen.
Bei der Bestimmung solcher Gruppen geht es im wesentlichen um die Konstruktion von abelschen Gruppen aus Automorphismen einer abelschen Gruppe. Arbeitsmittel bei der Konstruktion solcher Gruppen ist der Begriff des total irreduziblen Polynoms bzw. der total irreduziblen Matrixgruppen über dem Restklassenring modulo p^k; das sind solche irreduziblen Polynome bzw. Matrixgruppen, die bei Reduktion modulo p irreduzibel bleiben.
Wichtig ist dabei, daß zu vorgegebenen Zahlen n,r mit $n = \mathrm{ord}\ p \bmod r$ bis auf Äquivalenz genau eine irreduzible $n \times n$-Matrixgruppe modulo p^k von der Ordnung r existiert, wobei die modulo p reduzierte Matrixgruppe die Ordnung r hat.
In einigen Spezialfällen können vollständige Übersichten über die betrachteten Gruppen gegeben werden. Als Nachweis für die Anwendbarkeit der gewonnenen Resultate werden alle metabelschen Gruppen, bei denen die Ordnungen der abelschen Fittinggruppen kleiner oder gleich 50 sind, bestimmt.

eingereicht: 31. 07. 1978 verteidigt: 16. 02. 1979

Gutachter: Prof. Dr. habil. G. Pazderski (Rostock),
Prof. Dr. habil. O.-H. Keller (Halle),
Doz. Dr. L. Prohaska (Rostock)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Günther Steffen
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Rostock. Math. Kolloq. 13, 135 - 136 (1980)

Hans-Jürgen Albrand

Beiträge zur Theorie zyklischer Iterationsverfahren

Autorreferat der Dissertation

Die Beiträge der Arbeit beziehen sich auf theoretische Fragestellungen mit praktischem Hintergrund. Die Arbeit ist in zwei Kapitel geteilt. Das erste Kapitel ist der Untersuchung von Gesamt- und Einzelschrittverfahren bei linearen Gleichungssystemen gewidmet. In Verallgemeinerung der klassischen Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren werden allgemeine Gesamt- und Einzelschrittverfahren höherer Ordnung definiert. Unter geeigneten Voraussetzungen beinhaltet das Konzept der Verfahren höherer Ordnung eine Konstruktionsvorschrift für Iterationsverfahren mit höherer asymptotischer Konvergenzgeschwindigkeit. Ein anderer Abschnitt widmet sich der Konstruktion "angepaßter" Iterationsverfahen. Dabei werden die individuellen Besonderheiten der Koeffizientenmatrix eines gegebenen linearen Gleichungssystems durch Verwendung einer Parametermatrix berücksichtigt. Die Elemente der Parametermatrix werden mit Hilfe gewisser l_1-Approximationsaufgaben bestimmt. Die Konvergenzuntersuchungen beziehen sich auf die folgenden Problemkreise. Mit Hilfe eines "Verallgemeinerten Zeilensummenkriteriums" wird ein allgemeiner Zugang zur Konstruktion von hinreichenden Konvergenzkriterien gegeben. In Verbindung mit einer Abschwächung des schwachen Zeilensummenkriteriums werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Lösungen T der Matrixgleichung $\varrho(T) = \|T\|_Z$ abgeleitet ($\varrho(T)$ = Spektralradius, $\|T\|_Z$ = Zeilensummennorm von T). Aus dem Studium der Gleichung $\varrho(\lambda T_0+T-T_0)=\lambda$ ergeben sich eine Erweiterung des Theorems von Stein-Rosenberg auf eine umfassendere Klasse von Matrizen und weitere Vergleichsaussagen. Ferner wird ein zum Ostrowski-Reich-Theorem analoger Satz für die Relaxation beim Gesamtschrittverfahren bewiesen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Lösung von Minimierungsproblemen des Typs: min $(F(x),\ x \in Z)$, $F: R^n \to R^1$, $Z \subset R^n$.

Dabei wird das ursprüngliche Problem in eine Folge von leichter zu lösenden, kleiner dimensionierten Minimumaufgaben zerlegt. Im einfachsten Falle ergeben sich eindimensionale Minimumaufgagen. Es werden allgemeine Gesamt- und Einzelschrittverfahren definiert, bei denen gewisse Teilmengen des R^n zyklisch "durchlaufen" werden. Hauptanliegen des zweiten Kapitels ist der Nachweis der Konvergenz unter möglichst schwachen Voraussetzungen und das Herausstellen der konvergenztragenden Begriffe. Fast zwangsläufig wird man dabei auf die in der Arbeit definierten Begriffe: G-System, E-System, Verträglichkeit, G^*-System, E^*-System geführt. Ausgangspunkt dieser Entwicklung waren allgemeine Konvergenzuntersuchungen für die Spaltenapproximationsverfahren, auf die kurz eingegangen wird. Hier konnte ein gewisser Abschluß erzielt werden. Es zeigte sich, daß die flach konvexen Banachräume für die Spaltenapproximationsverfahren geeignet sind. Die G- bzw. G^*-Systeme sind die Grundlage für die Konvergenz der Gesamtschrittverfahren. Analog sind die E- bzw. E^*-Systeme die Grundlage für die Konvergenz der Einzelschrittverfahren. Jedes der Systeme beinhaltet gleichzeitig eine Charakterisierung der gesuchten optimalen Lösung. Beispiele und Anwendungen auf verschiedenartige Probleme zeigen die Nützlichkeit der systematischen Darstellung der definierten Gesamt- und Einzelschrittverfahren sowie des Konzepts der G-, G^*-, E-, E^*-Systeme und ihren möglichen Einsatz bei der Konstruktion global konvergenter Verfahren.

eingereicht: 02. 09. 1978 verteidigt: 01. 06. 1979

Gutachter: Prof. Dr. L. Berg (Rostock), Prof. Dr. K. Beyer (Rostock), Prof. Dr. L. Bittner (Greifswald)

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. Hans-Jürgen Albrand
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1