Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 15

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 15

1980

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Schriftleitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion Mathematik

Doz. Dr. Gerhard Maeß, Schriftleiter
Dr. Klaus-Dieter Drews, Lektor
Dorothea Meyer, Herstellung der Druckvorlage

Sektion Mathematik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 1

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR - 2500 Rostock, Vogelsang 13/14
Fernruf: 369 577
Leiter: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage
Genehmigungs-Nr.: C 166/80
Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003816

Inhalt

Rostock. Math. Kolloq. 15, 5 – 10 (1980)

Lothar Berg

Über quasivertauschbare Matrixinversen

Unter den zahlreichen Typen von verallgemeinerten Inversen R (vgl. A. Ben-Israel und T. N. E. Greville /1/) wurden von I. Erdélyi /4/ durch die Bedingungen

$$A = ARA,\ R = RAR,\ A^nR = RA^n,\ R^nA = AR^n \tag{1}$$

mit $n \geq 1$ für quadratische Matrizen A die quasivertauschbaren Inversen eingeführt. Wir nehmen an, daß A singulär ist und n die Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 0$ im Minimalpolynom von A. Dann existiert stets eine Matrix R mit (1).

Im Fall $n = 1$ ist R durch (1) eindeutig bestimmt und wird nach I. Erdélyi /5/ auch als Gruppeninverse bezeichnet. Im Fall $n > 1$ ist R nicht eindeutig bestimmt, wobei sogar der folgende Satz gilt:

Satz 1: Im Fall $n > 1$ ist es nicht möglich, R durch zusätzliche algebraische Beziehungen zwischen A und R allgemein eindeutig festzulegen.

Dabei verstehen wir unter einer algebraischen Beziehung eine Polynomgleichung in A und R mit komplexen Zahlen als Koeffizienten. Abschließend wird im Fall $n = 1$ noch eine explizite Darstellung von R durch das Minimalpolynom von A hergeleitet, die einfacher als die in /1/ auf Seite 172 angegebene ist.

Um die negative Aussage von Satz 1 zu beweisen, genügt es, wenn wir uns auf die Jordan-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \Large 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \Large 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

vom Format $n \times n$ mit $A^n = 0$ beschränken. Hierüber gilt:

Satz 2: Jede quasivertauschbare Inverse R von (2) mit $R^n = 0$ hat die Form

$$R = T^{-1} A^T T \tag{3}$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_2 & t_3 & \cdot & \cdot & \cdot & t_n \\ & 1 & t_2 & \cdot & \cdot & \cdot & t_{n-1} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & t_{n-2} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & t_2 & t_3 \\ & \bigcirc & & & & 1 & t_2 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Beweis: Da A^T eine spezielle quasivertauschbare Inverse von A ist und offenbar $A = T^{-1}AT$ gilt, ist (3) für beliebige Matrizen T der Form (4) ebenfalls eine quasivertauschbare Inverse von A. Somit bleibt zu zeigen, daß es unter der Voraussetzung $R^n = 0$ keine weiteren quasivertauschbaren Inversen von (2) gibt. Zu diesem Zweck wählen wir zwei beliebige Projektoren P, Q mit

$$AP = 0, \quad QA = 0,$$

d. h.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p_2 & p_3 & \cdot & \cdot & \cdot & p_n \\ & & & & & & \\ & & & \bigcirc & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & q_n \\ & \vdots \\ \bigcirc & q_3 \\ & q_2 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige innere Inverse R von A mit

$$P = I - RA, \quad Q = I - AR$$

läßt sich dann in der Form

$$R = (I-P)\, A^T (I-Q)$$

darstellen und umgekehrt. Ausführlich geschrieben lautet R

$$R = \begin{pmatrix} -p_2 & -p_3 & \cdot & -p_n & r \\ 1 & & & & -q_n \\ & \vdots & \bigcirc & & \cdot \\ \bigcirc & & \cdot & & -q_3 \\ & & & 1 & -q_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit

$$r = p_2q_n + p_3q_{n-1} + \dots + p_nq_2. \tag{6}$$

Wie man leicht nachrechnet, haben die Potenzen von R die Form

$$R^{n-m} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -p_{m+1} & & -p_{m+2}-q_{m+2} & \cdot & \cdot \\ 1 & & & & & & -q_{m+1} & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & & -q_2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{7}$$

für $0 \leq m < n$ mit $p_{n+1} + q_{n+1} = -r$. Da $R^n = 0$ wegen Rang $R^{n-m} \geq m$ nur für Rang $R^{n-m} = m$ möglich ist, folgt durch Berechnung der aus (7) zu entnehmenden Unterdeterminante

$$p_{m+2} + q_{m+2} = -p_2q_{m+1} - p_3q_m - \dots - p_{m+1}q_2 \tag{8}$$

für $0 \leq m < n$, wobei diese Gleichung für $m = 0$ in $p_2 + q_2 = 0$ und für $m = n - 1$ in (6) übergeht. Wählen wir jetzt in (4)

$$t_m = p_m$$

für $m = 2, \dots, n$, so besagen die Gleichungen (8) nichts anderes, als daß

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & q_2 & q_3 & \cdot & \cdot & q_n \\ & 1 & q_2 & \cdot & \cdot & q_{n-1} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & q_{n-2} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & & 1 & q_2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Berechnen wir schließlich mit dieser Matrix T die Matrix (3), so stellen wir wegen (8) fest, daß letztere mit (5) übereinstimmt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Aus (3) und $A = T^{-1}AT$ geht hervor, daß jede algebraische Beziehung zwischen der Matrix (2) und ihrer speziellen quasivertauschbaren Inversen A^T automatisch auch für A und alle übrigen quasivertauschbaren Inversen R mit $R^n = 0$ gilt, so daß Satz 1 ebenfalls bewiesen ist.

Bemerkungen: 1°. In /3/ findet man eine ganze Reihe von algebraischen Beziehungen zwischen A und A^T, beispielsweise

$$I = AA^T + (A^T)^{n-1}A^{n-1},$$

woraus mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation T unmittelbar

$$Q = R^{n-1}A^{n-1}$$

hervorgeht. Analog gilt $P = A^{n-1}R^{n-1}$ usw.

2°. Durch Ausrechnung der rechten Seite von $R^{n-1} = T^{-1}(A^T)^{n-1}T$ ergibt sich leicht die einfache Darstellung

$$R^{n-1} = \begin{pmatrix} q_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ p_2\ \dots\ p_n).$$

3°. Das nichtlineare Gleichungssystem (8) läßt sich bei vorgegebenen Werten q_i rekursiv auflösen. Durch Anwendung bekannter Formeln (vgl. etwa /2/) entsteht dabei

$$p_m = \sum (-1)^k \frac{k!\ q_2^{j_2} \dots q_m^{j_m}}{j_2! \dots j_m!},$$

wobei über alle natürlichen Zahlen j_i mit

$$\sum_{i=2}^{m} (i-1)j_i = m-1, \quad \sum_{i=2}^{m} j_i = k, \quad 1 \leq k < m$$

zu summieren ist. Insbesondere ist

$$p_2 = -q_2, \quad p_3 = q_2^2 - q_3, \quad p_4 = -q_2^2 + 2q_2q_3 + q_4.$$

4°. Die vorhergehenden Ergebnisse kann man auch bei einer beliebigen quadratischen Matrix B verwenden, wenn man B zunächst mit Hilfe einer Transformationsmatrix S auf die Jordansche Normalform $B = S^{-1}JS$ bringt und bezüglich der Jordankästchen (2) von J die Darstellungsformel (3) für die quasivertauschbare Inverse benutzt.

<u>Satz 3:</u> Ist A eine quadratische Matrix mit dem Minimalpolynom

$$\sum_{i=1}^{k} a_i A^i = 0, \tag{9}$$

wobei $a_k = 1$ ist und $a_1 \neq 0$ vorausgesetzt wird, so lautet die zugehörige Gruppeninverse R

$$R = \frac{1}{a_1^2} \sum_{i=1}^{k-1} (a_2 a_{i+1} - a_1 a_{i+2}) A^i \tag{10}$$

mit $a_{k+1} = 0$, und sie besitzt das Minimalpolynom

$$\frac{1}{a_1} \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} R^{k-i} = 0. \tag{11}$$

<u>Beweis:</u> Wegen $A = A^2R$ ergibt sich zunächst aus (9) nach Multiplikation mit R und Umordnung

$$AR = -\frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{k-1} a_{i+1} A^i. \tag{12}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit R folgt wegen $R = AR^2$ analog

$$R = -\frac{a_2}{a_1} AR - \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{k-2} a_{i+2} A^i$$

und hieraus durch Einsetzen von (12) die Behauptung (10). Durch Multiplikation von (12) mit R^k entsteht nach Umordnung die Gleichung (11), und diese stellt nach bekannten Spektraleigenschaften der Gruppeninversen (vgl. /1/) das Minimalpolynom von R dar.

<u>Literatur</u>

/1/ Ben-Israel, A., and Greville, T. N. E.:
Generalized Inverses: Theory and Applications.
New York - London - Sydney - Toronto 1974

/2/ Berg, L.: Über eine Differenzengleichung aus der Theorie der Partitionen. Wiss. Z. Univ. Rostock Math.-Natur. Reihe 5, 269 - 278 (1955/56)

/3/ Berg, L.: Solution of degenerate linear initial value problems. Z. Angew. Math. Mech. 57, 65 - 73 (1977)

/4/ Erdélyi, I.: The quasi-commuting inverses for a square matrix. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 42, 626 - 633 (1967) (zitiert nach Math. Rev. 38 # 3279)

/5/ Erdélyi, I.: On the matrix equation Ax = λBx. J. Math. Anal. Appl. 17, 119 - 132 (1967) (zitiert nach Math. Rev. 34 # 2594)

eingegangen: 11. 04. 1980

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Lothar Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 11 - 19 (1980)

Detlef Gronau

Meromorphe Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen - ein Überblick

1. Einleitung

Die vorliegende Note ist eine Zusammenfassung einiger funktionentheoretischer Untersuchungen einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen mit holomorphen Koeffizienten im Komplexen, insbesondere der Lösungen des Goursat-Problems mit singulären Anfangswerten. Die so erhaltenen Lösungen haben wir in Analogie zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen "bewegliche Singularitäten" genannt (siehe Bieberbach /1/ und Gronau /3/). Es handelt sich dabei um die Tatsache, daß eine normierte lineare gewöhnliche Differentialgleichung etwa der Form

$$w' + f(z)\,w = 0$$

unabhängig von der speziellen Wahl des Anfangswertes im Regularitätsbereich von $f(z)$ immer analytische Lösungen hat, dagegen etwa die Gleichung

$$w' = w^2$$

mit

$$w = 0 \text{ bzw. } w(z) = (c-z)^{-1}$$

abhängig vom Anfangswert $w(0) = 0$ bzw. $w(0) = c^{-1}$ eine reguläre Lösung bzw. singuläre Lösungen (mit Pol in $z = c$) besitzt.

Bei partiellen Differentialgleichungen ist der Sachverhalt naturgegebenermaßen wesentlich komplizierter, da das Verhalten der Lösungen in viel stärkerem Maße von den Anfangswerten abhängt, die ja schon selbst singuläre Funktionen sein können. Wir wollen uns daher von vornherein auf lineare partielle Differentialgleichungen beschränken.

Die klassischen Sätze im Sinne von Cauchy-Kowalewsky oder

Goursat garantieren für eine große Klasse von linearen partiellen Differentialgleichungen (die auch den im nachfolgenden behandelten Typ von Gleichungen umfaßt) bei Vorgabe von analytischen Anfangswerten eine lokale analytische Lösung (siehe z. B. Hörmander /7/, S. 116). Diese Existenzsätze sind in den meisten Fällen von lokaler Art, für weite Klassen von Gleichungen bzw. für spezielle Regularitätsgebiete gibt es auch globale Existenzaussagen (siehe z. B. Gilbert /2/, Gronau /4/, Hörmander /7/, Persson /9/, Trèves /11/ und Vekua /12/). Im Fall der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen wird das Fehlen von beweglichen Singularitäten dadurch nachgewiesen, daß man Existenz und Eindeutigkeit der holomorphen Lösungen für jeden Anfangswert und für jeden Punkt des Regularitätsgebietes nachweist (siehe etwa Bieberbach /1/) und die so erhaltenen Lösungen analytisch fortsetzt. Dabei seien immer nur einfach zusammenhängende Gebiete vorausgesetzt. Diese Beweismethode kann jedoch bei partiellen Differentialgleichungen nicht so ohne weiteres übernommen werden, da das Regularitätsgebiet einer lokalen Lösung auch vom Regularitätsgebiet der lokalen Anfangsdaten abhängt, so daß noch zusätzlich äußerst komplizierte Abschätzungen erforderlich sind (siehe /4/).

2. Globale holomorphe Lösungen

Dieser Abschnitt enthält einen globalen Existenzsatz für eine lineare partielle Differentialgleichung in mehreren Variablen. Dazu verwenden wir die Multiindexschreibweise. Seien $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ Multiindizes aus $\mathbb{N}_0^n$. Wir definieren:

$$\alpha < \beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha_i \leq \beta_i,\ i = 1,\dots,n \text{ und } \alpha \neq \beta.$$

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann bezeichnen wir mit $H(G)$ die Menge aller in G holomorphen Funktionen. Weiters sei für $f \in H(G)$:

$$D^{\alpha}f := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f \text{ mit } D_i := \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Satz 1: Es sei $G = G_1 \times \ldots \times G_n \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in G_i \subset \mathbb{C}$, G_i einfach zusammenhängend, β ein Multiindex und $\varphi \in H(G)$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$D^\beta w = \sum_{\alpha<\beta} a_\alpha D^\alpha w + f, \quad a_\alpha, f \in H(G), \tag{1}$$

zum Anfangswertproblem

$$D_i^k (w-\varphi)|_{z_i=0} = 0, \quad 0 \leq k < \beta_i, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

genau eine Lösung $w \in H(G)$.

Den Beweis dieses Satzes findet man für $n=2$ in /4/. Eine Verallgemeinerung auf beliebige n ist ohne Schwierigkeiten möglich. Es wird dabei zuerst ein lokaler Existenzsatz unter Verwendung einer Majorantenmethode nach Reich /10/ bewiesen und die lokale Lösung dann auf ganz $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ fortgesetzt. Die getroffene Einschränkung auf ein einfach zusammenhängendes Polyzylindergebiet ist zunächst nur von beweistechnischer Natur, es erhebt sich jedoch die Frage, ob die spezielle Art des Gebietes (das holomorph konvex ist) durch die Art des Anfangswertproblems (2) bedingt ist. Dieses besteht im Grunde aus $|\beta| := \beta_1 + \ldots + \beta_n$ Anfangsbedingungen. Benutzt man die Bezeichnungen

$$G_{(i)} := G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n \subset \mathbb{C}^{n-1},$$

dann lautet Satz 1, anders formuliert:

Satz 1': Setzt man für die Anfangswerte von w

$$D_i^k w|_{z_i=0} \in H(G_{(i)}), \quad i = 1,\ldots,n, \quad 0 \leq k < \beta_i,$$

voraus, so gilt für die dadurch eindeutig bestimmte Lösung:
$w \in H(G)$.

Dieser Satz enthält auch ein wohlbekanntes Ergebnis (siehe Persson /9/) über Differentialgleichungen mit ganzen Koeffizienten, indem man $G = \mathbb{C}^n$ setzt:

Korollar 2: Sind die Koeffizienten a_α und f von (1) sowie die Anfangsfunktion φ von Satz 1 ganze Funktionen (d. h. holomorph in ganz $\mathbb{C}^n$), dann ist auch die nach Satz 1 eindeutig bestimmte Lösung eine ganze Funktion.

3. Lokal-meromorphe logarithmenbehaftete Lösungen

Im folgenden beschränken wir uns auf lineare Differentialgleichungen in zwei Variablen. Es sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$.

Mit $H(a)$ bezeichnen wir den Ring der in einer Umgebung von a holomorphen Funktionen in zwei komplexen Variablen, und $M(a)$ sei der Quotientenkörper von $H(a)$, also die Menge der in einer Umgebung von a meromorphen Funktionen.

Zunächst interessieren wir uns für meromorphe logarithmenbehaftete Lösungen der Differentialgleichungen (1) und können feststellen, daß solche singulären Lösungen beliebig hoher Ordnung immer existieren (siehe Gronau/Reich /6/). Wir betrachten dabei die Differentialgleichung

$$D_1^m D_2^n w = \sum_{(\mu,\nu)<(m,n)} a_{\mu\nu}(z_1,z_2) D_1^\mu D_2^\nu w + f(z_1,z_2) \tag{1'}$$

mit $a_{\mu\nu}$, $f \in H(a)$. Es gilt:

Satz 2: Jede meromorphe logaritmenbehaftete Lösung

$$w = u + v \log(z_1-a_1)(z_2-a_2) \text{ mit } u,v \in M(a) \tag{3}$$

von (1') hat die spezielle Form

$$w = \frac{u_0}{(z_1-a_1)^\gamma (z_2-a_2)^\delta} + v \log(z_1-a_1)(z_2-a_2)$$

mit $u_0, v \in H(a)$ und $\gamma, \delta \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung: Auf Grund von Satz 2 kann man nun die Funktionen u und v als allgemeine Laurentreihen

$$u = \sum_{i\geq-\gamma,\, j\geq-\delta} u_{ij}(z_1-a_1)^i (z_2-a_2)^j \tag{4}$$

und

$$v = \sum_{i,j \geq o} v_{ij}(z_1-a_1)^i(z_2-a_2)^j \tag{5}$$

ansetzen, und es ergeben sich die Anfangsbedingungen, für die Koeffizienten von u und v formuliert, folgendermaßen. Die sogenannten Randkoeffizienten $u_{i\nu}$ und $u_{\mu j}$ mit $i \geq -\gamma$, $j \geq -\delta$, $o \leq \mu < m$, $o \leq \nu < n$ sind frei wählbar mit der Bedingung, daß die $m+n$ Teilreihen $\sum_{i \geq o} u_{i\nu} z^i$ und $\sum_{j \geq o} u_{\mu j} z^j$ in einer Umgebung von $z = a$ konvergent sind. Die Koeffizienten v_{ij} mit $o \leq i < m$ und $o \leq j < n$ sind frei wählbar. Durch diese Koeffizienten ist die Lösung (3) von (1') eindeutig bestimmt, insbesondere erhält man die für das Verhalten der Lösung in der Nähe von a wichtige Bedingung:

$$u_{ij} = o \text{ für } i < o \text{ und } j < o. \tag{6}$$

Der Beweis dieses Satzes wird mittels konsequenter Ausnützung der algebraischen Eigenschaften von formalen Potenz- bzw. Laurentreihen geführt. Es zeigt sich nämlich, daß man mit Hilfe von Potenzreihen auch allgemeine meromorphe Funktionen erfassen kann. Dies geschieht, indem man den Ring H(a) in den Ring der formalen Potenzreihen einbettet:

$$H(a) \hookrightarrow \mathbb{C}[[z_1, z_2]]. \tag{7}$$

Der Ring $\mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ ist im Körper $(\mathbb{C}\{z_2\})\{z_1\}$ enthalten (dabei bezeichnet $K\{z\}$ den Körper der formalen Laurentreihen mit endlichem Hauptteil in einer Variablen z und Koeffizienten aus dem Körper K). Die Einbettung (7) ist ein Differentialhomomorphismus und kann auf eindeutige Weise auf den Quotientenkörper erweitert werden (siehe etwa Kaplansky /8/):

$$M(a) \hookrightarrow (\mathbb{C}\{z_2\})\{z_1\}.$$

Damit kann man die Differentialgleichung (1') unter Verwendung der Taylorentwicklungen der Koeffizienten $a_{\mu\nu}(z_1, z_2)$ und $f(z_1, z_2)$ als Differentialgleichung in $(\mathbb{C}\{z_2\})\{z_1\}$ behandeln.

Die Reihen $\sum u_{ij} z_1^i z_2^j$ aus $(\mathbb{C}\{z_2\})\{z_1\}$ haben folgende leicht zu beweisende Eigenschaft: Für jedes Indexpaar $(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gibt es nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten u_{ij} mit $i \leq k$ und $j \leq l$. Diese Eigenschaft ist bei der Auswertung der durch Koeffizientenvergleich erhaltenen Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Lösungsreihen u und v von (3) wesentlich und führt zu den speziellen Formen (4) und (5). Der Konvergenzbeweis für die formalen Reihen erfolgt mittels eines Majorantenkriteriums nach Reich /10/. Im einzelnen sei auf Gronau/Reich /6/ verwiesen.

4. Lokal-meromorphe logarithmenfreie Lösungen

Im vorigen Abschnitt wird somit die Frage nach dem Vorhandensein von beweglichen Singularitäten positiv beantwortet. Logarithmenbehaftete Lösungen von beliebig hoher Wachstumsordnung existieren immer. Anders verhält sich der Sachverhalt bei logarithmenfreien meromorphen Lösungen. Hier sind nicht immer meromorphe Lösungen zu singulären Anfangsdaten zulässig. Es ergeben sich komplizierte Zulässigkeitskriterien in Form von überbestimmten Systemen gewöhnlicher linearer homogener Differentialgleichungen. Da über solche Differentialgleichungssysteme im allgemeinen sehr wenig bekannt ist, ist es noch nicht gelungen, konkretere Kriterien zu gewinnen. Es gilt aber auch hier (siehe /3/ und /6/):

Satz 3: Jede logarithmenfreie meromorphe Lösung $w \in M(a)$ von (1') hat, falls es überhaupt so eine Lösung gibt, die Gestalt

$$w = \frac{u}{(z_1-a_1)^{\gamma}(z_2-a_2)^{\delta}} \tag{8}$$

mit $\gamma,\delta \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und $u \in H(a)$.
Für die Koeffizienten u_{ij} der Potenzreihenentwicklung

$w = \sum_{i \geq -\gamma,\, j \geq -\delta} u_{ij}(z_1-a_1)^i(z_2-a_2)^j$ gilt ebenfalls (6), d. h., nur für $\gamma = o$ oder $\delta = o$ ist w eine Singularität 1. Art (Pol).

Für den speziellen Fall von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann das Kriterium der überbestimmten Differentialgleichungssysteme noch weiter ausgewertet werden, und es ergibt sich ein sehr handgreifliches Ergebnis:

<u>Satz 4:</u> Die Differentialgleichung

$$\sum_{\mu=o}^{m} \sum_{\nu=o}^{n} a_{\mu\nu} D_1^{\mu} D_2^{\nu} u = o, \quad a_{\mu\nu} \in \mathbb{C}, \quad a_{mn} = 1, \tag{1''}$$

besitzt genau dann eine Lösung der Form (8) mit $\gamma > o$ bzw. $\delta > o$, wenn die Polynome

$$p_{\mu}(D) = \sum_{\nu=o}^{n} a_{\mu\nu} D^{\nu}, \qquad \mu = o, \ldots, m,$$

bzw. die Polynome

$$q_{\nu}(D) = \sum_{\mu=o}^{m} a_{\mu\nu} D^{\mu}, \qquad \nu = o, \ldots, n,$$

einen nichttrivialen gemeinsamen Teiler besitzen, d. h. $\mathrm{ggT}(p_o, \ldots, p_m) \neq 1$ bzw. $\mathrm{ggT}(q_o, \ldots, q_n) \neq 1$.

Die Schwierigkeiten, die im Falle von logarithmenfreien Lösungen auftreten, seien hier nur kurz angedeutet. Eine Lösung $w \in M(a)$ hat auf Grund von Satz 2 und insbesondere unter Berücksichtigung von (6) notwendigerweise die Form

$$w = \sum_{i,j \geq o} u_{ij} (z_1 - a_1)^i (z_2 - a_2)^j + \sum_{i=1}^{\gamma} z_1^{-i} \cdot u_i(z_2) + \sum_{j=1}^{\delta} z_2^{-j} v_j(z_1). \tag{9}$$

Setzt man nun (9) in die Differentialgleichung (1') bzw. (1") ein, so resultieren aus dem Koeffizientenvergleich insbesondere nach den negativen Potenzen von z_1 und z_2 ein System von $\gamma + m$ gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen für die Funktionen $u_1(z_2), \ldots, u_{\gamma}(z_2)$ und $\delta + n$ Gleichungen in $v_1(z_1), \ldots, v_{\delta}(z_1)$. Es folgt daraus, daß es logarithmenfreie meromorphe Lösungen der Ordnung γ bez. z_1 genau dann gibt, wenn die entsprechenden überbestimmten linearen homogenen Differentialgleichungssysteme nichttriviale Lösungen besitzen. Für die allgemeine Gleichung (1') konnten hier noch keine konkreten Kriterien für die Existenz solcher Lösungen erbracht werden. Handelt es sich jedoch um die Gleichung (1") mit konstanten Koeffizienten, so sind die entsprechenden Gleichungssysteme ebenfalls Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Dieser Fall konnte völlig gelöst werden (siehe Satz 4), wobei in /5/ die explizite Normalform der Gleichungssysteme für die Funktionene $u_1, \ldots, u_\gamma, v_1, \ldots, v_\delta$ angegeben ist.

In der Arbeit /5/ wird außerdem noch ein Zusammenhang zwischen der Existenz von logarithmenfreien meromorphen Lösungen und Lösungen mittels Differentialoperatoren (siehe die dort angegebene Literatur) hergestellt.

<u>Literatur</u>

/1/ Bieberbach, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin 1965

/2/ Gilbert, R. P.: Function theoretic methods in partial differential equations. New York 1969

/3/ Gronau, D.: Bewegliche Singularitäten von linearen partiellen Differentialgleichungen. In: Function theoretic methods for partial differential equations. Proc. Internat. Sympos., Darmstadt 1976. Lecture Notes in Math. <u>561</u>, 218 - 226, Berlin 1976

/4/ Gronau, D.: A global version of a linear Goursat problem. Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste <u>10</u>, 1/2 (1978)

/5/ Gronau, D.: Meromorphe Lösungen und Lösungen durch Differentialoperatoren von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. In: Colloquia Math. Societatis János Bolyai, 30, Qualitative theory of differential equations. Amsterdam 1980

/6/ Gronau, D., und Reich, L.: Meromorphe Lösungen einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen. Beiträge Anal. 14, 93 - 107 (1979)

/7/ Hörmander, L.: Linear partial differential operators. Berlin 1969

/8/ Kaplansky, I.: Introduction to differential algebra, Paris 1957

/9/ Persson, J.: Linear Goursat problems for entire functions when the coefficients are variable. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 23, 87 - 98 (1969)

/10/ Reich, L.: Eine Bemerkung zur Majorantenmethode. Anzeigen der math. naturwiss. Kl. der Österr. Akad. d. Wiss., 1968, 6, 140 - 144 (1968)

/11/ Trèves, F.: Linear partial differential equations with constant coefficients. New York 1966

/12/ Vekua, I. N.: New methods for solving elliptic equations. Amsterdam 1968

eingegangen: 11. 04. 1980

Anschrift des Verfassers:

Universitätsdozent Dr. Detlef Gronau
Institut für Mathematik
Universität Graz
Brandhofgasse 18
A-8010 Graz
Österreich

Rostock. Math. Kolloq. 15, 21 - 34 (1980)

Jürgen Roßmann

Eine Regularitätsaussage für die schwache Lösung der biharmonischen Gleichung in $\overset{\circ}{W}{}^2(\Omega)$, wenn Ω ein konvexes Polyeder im R^3 ist

0. Einleitung

In dieser Arbeit wird das Randverhalten schwacher Lösungen elliptischer Differentialgleichungen für den biharmonischen Operator untersucht, wenn es sich bei dem betreffenden Gebiet um ein konvexes Polyeder im R^3 handelt. In Gebieten mit glatten Rändern ist die Theorie hierzu sehr gut entwickelt, jedoch lassen sich diese Ergebnisse nicht unmittelbar auf Gebiete mit nichtglatten Rändern übertragen.
Es sei $Lu = f$ eine elliptische Differentialgleichung der Ordnung $2m$ über einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset R^N$, die für $f \in W^{-m+[N/2]}(\Omega)$ eine schwache Lösung in $\overset{\circ}{W}{}^m(\Omega)$ besitzen möge. Wir fragen dann, ob diese Lösung auch im Raum $C^{m-1}(\bar{\Omega})$ liegt.
Im ebenen Fall, d. h. in dem Fall, daß Ω ein Gebiet im R^2 ist, wurde dieses Problem u. a. von J. Nečas /1/ analysiert. In dieser Arbeit wird eines der Resultate in dem speziellen Fall, daß Ω ein konvexes Polyeder im R^3 und L der biharmonische Operator ist, auf den Fall $N = 3$ ausgedehnt. Dabei konnte ich mich insbesondere auf eine Arbeit von A.-M. Sändig /2/ stützen, die sich ebenfalls mit diesem Problem im Fall $N > 2$ beschäftigte, in der allerdings für den biharmonischen Operator eine sehr einschränkende Bedingung an das Gebiet Ω erhalten wurde. Im Unterschied zu dieser Arbeit verwenden wir anstelle der Gewichtsfunktion $r(x) = |x-y|$ den Abstand des Punktes x zu einer speziell gewählten Ebene. Dadurch erhalten wir das folgende Ergebnis:

Ist Ω ein konvexes Polyeder im R^3 und $y \in \partial\Omega$ Eck- oder Kantenpunkt von Ω, dann hat die Gleichung $Lu = f$ für den biharmonischen Operator L und $f \in W^{-1}(\Omega)$ eine schwache Lösung in $\overset{\circ}{W}{}^2(\Omega)$, deren Repräsentant u aus $C^1(\Omega)$ die Beziehungen

$$\lim_{\substack{x^{(n)} \to y \\ x^{(n)} \in \Omega_1}} u(x^{(n)}) = \lim_{\substack{x^{(n)} \to y \\ x^{(n)} \in \Omega_1}} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x^{(n)}) = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

erfüllt, wobei $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}$ ein beliebiges Polyeder ist, das mit $\partial\Omega$ außer dem Punkt y höchstens die Kante, die durch y geht, gemeinsam hat.

1. Existenz einer schwachen Lösung der biharmonischen Gleichung im Sobolevraum $\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)^{-1}}(\Omega)$

Es sollen zunächst folgende Bezeichnungen vereinbart werden:

$$W^m_{\sigma(x)}(\Omega) = \{u(x),\ x \in \Omega : \|u\|_{m,\sigma} < \infty\},$$

wobei $\|u\|^2_{m,\sigma} = \sum_{|\alpha| < m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \sigma(x)\, dx$ ist.

($D^\alpha u$ mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ bezeichne dabei die schwache Ableitung von u(x)).
Mit dieser Norm $\|\cdot\|_{m,\sigma}$ ist $W^m_{\sigma(x)}(\Omega)$ ein Banachraum.

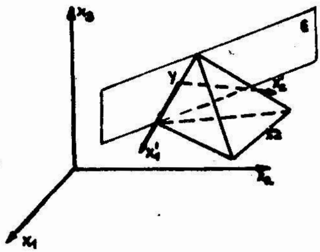
$\overset{\circ}{W}{}^m_{\sigma(x)}(\Omega)$ bezeichne die Abschließung des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ bez. dieser Norm.
Es sei nun Ω ein konvexes Polyeder im R^3. Wir betrachten die biharmonische Gleichung

$$Lu = \Delta^2 u = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = f, \tag{1}$$

wobei $f \in W^{-1}(\Omega)$ vorausgesetzt wird. Dabei bezeichne $W^{-1}(\Omega)$ den Dualraum zu $\overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$. Eine zu L zugehörige Dirichletform ist offensichtlich

$$B(u,v) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \, dx. \tag{2}$$

Es sei y ein Punkt auf einer Kante des konvexen Polyeders Ω, der auch gleichzeitig Eckpunkt sein darf.



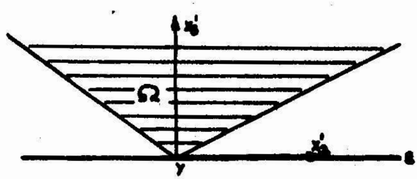
Durch die entsprechende Kante werde eine Ebene $\mathcal{E}$ gelegt, die mit $\bar{\Omega}$ nur diese Kante gemeinsam hat, so daß also das Polyeder Ω in genau einem der beiden durch die Ebene $\mathcal{E}$ begrenzten Halbräume liegt. Auf Grund der Konvexität von Ω ist dies stets möglich.

$\sigma(x)$ sei nun der Abstand des Punktes $x \in \Omega$ zu $\mathcal{E}$, d. h.

$$\sigma(x) = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + \text{const.},$$

wobei $(e_1,e_2,e_3)^T$ Normalenvektor zu $\mathcal{E}$ mit der Länge $(e_1^2+e_2^2+e_3^2)^{1/2} = 1$ ist.

Den Punkt y wählen wir gleichzeitig als Koordinatenursprung eines neuen Koordinatensystems mit den Achsen x_1', x_2' und x_3'.



Dabei möge x_1' längs der Kante verlaufen, die $\bar{\Omega}$ mit $\mathcal{E}$ gemeinsam hat, x_2' möge ebenfalls in $\mathcal{E}$ liegen und senkrecht auf dieser Kante stehen, und x_3' schließlich möge im Punkt y senkrecht auf $\mathcal{E}$ stehen. In diesem neuen Koordinatensystem wäre dann also $\sigma(x) = x_3'$, und für die Punkte $x \in \Omega$ ist die x_3'-Koordinate bez. des Koordinatensystems x_1', x_2', x_3' nichtnegativ. Zwischen den Koordinaten $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ eines Punktes bez. des ursprünglichen Koordinatensystems und den Koordinaten $x' = (x_1', x_2', x_3')^T$ dieses Punktes bez. des neuen Koordinatensystems besteht folgender Zusammenhang:

$$x = Ax' + y, \tag{3}$$

wobei $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ eine orthogonale 3×3-Matrix ist. Da dann $A^{-1} = A^T$ ist, ist dies gleichbedeutend mit

$$x' = A^T x - A^T y. \tag{4}$$

Außerdem gelten für die Matrixelemente a_{ij} wegen der Orthogonalität von A die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases} \tag{5}$$

Die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1', x_2', x_3')}$ hat offenbar den Wert $\det A = 1$.

Es soll nun die Existenz einer schwachen Lösung der Gleichung $Lu = \Delta^2 u = f$ in $\overset{o}{W}{}^2_{(\sigma(x))^{-1}}(\Omega)$ nachgewiesen werden. Dazu wird der folgende verallgemeinerte Satz von Lax/Milgram (Nečas /1/) benutzt:

<u>Satz 1:</u> Es seien V_1 und V_2 zwei reflexive Banachräume und $B(u,v)$ eine Bilinearform auf $V_1 \times V_2$ mit

$$\forall u \in V_1,\ v \in V_2 \quad |B(u,v)| \leq c_1 \|u\|_{V_1} \|v\|_{V_2}, \tag{6}$$

$$\forall v \in V_2 \quad \sup_{\substack{u \in V_1 \\ \|u\|_{V_1} \leq 1}} |B(u,v)| \geq c_2 \|v\|_{V_2}, \tag{7}$$

$$\forall u \in V_1 \quad \sup_{\substack{v \in V_2 \\ \|v\|_{V_2} \leq 1}} |B(u,v)| \geq c_3 \|u\|_{V_1}. \tag{8}$$

Es sei f ein lineares stetiges Funktional auf V_2. Dann existiert genau ein Element $\tilde{u} \in V_1$ mit

$$\forall v \in V_2 \quad B(\tilde{u},v) = (f,v),$$

und es ist $\|\tilde{u}\|_{V_1} \leq c_4 \|f\|_{V_2'}$. ($V_2'$ ist hierbei der Dualraum zu V_2, und (f,v) bezeichnet den Wert des Funktionals f für das Element v.)

Wir setzen $V_1 = \overset{\circ}{W}{}^2_{(\sigma(x))^{-1}}(\Omega)$ und $V_2 = \overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega)$. $B(u,v)$ sei die zum biharmonischen Operator gehörige Dirichletform (2). Die Gültigkeit der Bedingung (6) erhält man dann durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega)$ und in $\overset{\circ}{W}{}^2_{(\sigma(x))^{-1}}(\Omega)$ ist, genügt es deshalb, die Beziehungen (7) und (8) für Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ nachzuweisen.

In der Arbeit von A.-M. Sändig /2/ wurde für die Gewichtsfunktion $\sigma(x) = r^\alpha(x) = |x-y|^\alpha$ folgende hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Bedingungen (7) und (8) des verallgemeinerten Satzes von Lax/Milgram bewiesen, die man völlig analog auf die bei uns verwendete Gewichtsfunktion $\sigma(x)$ übertragen kann:

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad |B(v\sigma(x),v)| \geq c_5 \|v\|_{V_2} \|v\sigma(x)\|_{V_1}. \tag{9}$$

Mit $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist nämlich auch $v\sigma(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, und damit folgt aus (9)

$$\sup_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega) \\ \|u\|_{V_1} \leq 1}} |B(u,v)| \geq B\left(\frac{v\sigma(x)}{\|v\sigma(x)\|_{V_1}},v\right) = \frac{|B(v\sigma(x),v)|}{\|v\sigma(x)\|_{V_1}} \geq c_5 \|v\|_{V_2}.$$

Setzt man andererseits in (9) $v\sigma(x) = u$, dann erhält man

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega) \quad \left|B\left(u,\frac{u}{\sigma(x)}\right)\right| \geq c_5 \left\|\frac{u}{\sigma(x)}\right\|_{V_2} \|u\|_{V_1}.$$

Daraus folgt dann

$$\sup_{\substack{v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \|v\|_{V_2} \leq 1}} |B(u,v)| \geq \frac{|B(u,u\sigma^{-1})|}{\|u/\sigma(x)\|_{V_2}} \geq c_5 \|u\|_{V_1}.$$

Die Bedingung (9) ist damit hinreichend für die Bedingungen (7) und (8) .
Es wird nun bewiesen, daß die Bedingung (9) unter den gegebenen Voraussetzungen erfüllt ist. Dazu werden die folgenden beiden Lemmata bewiesen.

<u>Lemma 1:</u> Es gilt $\forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad \|v\sigma(x)\|_{V_1} \leq c_6 \|v\|_{V_2}$.

<u>Beweis:</u> Wir treffen zunächst folgende Vereinbarung:
Als Funktion von x_1', x_2', x_3' bezeichnen wir die Funktion v mit $\hat{v}$.
Es sei also $v(x_1,x_2,x_3) = \hat{v}(x_1',x_2',x_3')$.

Nun ist $x_i' = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + \text{const.}$ $(i=1,2,3)$, d. h.
$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = a_{ji}$. Daraus ergibt sich $\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_k'}$

und $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{jk} a_{il} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x_k' \partial x_l'}$.

Wegen (5) erhält man dann

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j'}\right)^2 \tag{10}$$

und

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x_i' \partial x_j'}\right)^2. \tag{11}$$

Ist nun $v(x_1,x_2,x_3) \in C_0^\infty(\Omega)$, dann ist $\hat{v}(x_1',x_2',x_3') \in C_0^\infty(\Omega')$, wobei Ω' das Gebiet sei, das aus Ω durch die Transformation $x \to x'$ entsteht.

Zum Beweis des Lemmas benötigen wir die Hardysche Ungleichung:

$$\int_0^\infty |u(t)|^p\, t^{\alpha-p}\, dt \le \left(\frac{p}{|\alpha-p+1|}\right)^p \int_0^\infty |u'(t)|^p\, t^\alpha dt, \tag{12}$$

für $p \ge 1$ und 1) $\alpha < p-1$ und $u(0) = 0$

oder 2) $\alpha > p-1$ und $u(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Im Fall $p=2$ folgt aus dieser Ungleichung für $\hat{v}(x_1', x_2', x_3') \in C_0^\infty(\Omega')$

$$\int_{\Omega'} x_3'^{\alpha-2}\, \hat{v}^2\, dx' \le \left(\frac{2}{\alpha-1}\right)^2 \int_{\Omega'} x_3'^{\alpha} \left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x_3'}\right)^2 dx' \tag{13}$$

für $\alpha \ne 1$, denn setzt man

$$\bar{v} = \begin{cases} \hat{v} \text{ für } x' \in \Omega' \\ 0 \text{ für } x' \in R_+^3 \setminus \Omega', \end{cases}$$

wobei $R_+^3 = \{x' = (x_1', x_2', x_3') \in R^3 : x_3' > 0\}$ sei, dann ist $\bar{v} \in C_0^\infty(R_+^3)$ wegen $\Omega' \subset R_+^3$, und damit folgt aus (12)

$$\int_0^\infty x_3'^{\alpha-2}\, \bar{v}^2(x_1', x_2', x_3')\, dx_3' \le \left(\frac{2}{\alpha-1}\right)^2 \int_0^\infty x_3'^{\alpha} \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_3'}\right)^2 dx_3',$$

d. h. $$\int_{R_+^3} x_3'^{\alpha-2}\, \bar{v}^2\, dx' \le \left(\frac{2}{\alpha-1}\right)^2 \int_{R_+^3} x_3'^{\alpha} \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_3'}\right)^2 dx',$$

woraus (13) folgt.

Für $\alpha = 1$ können wir für unser spezielles Gebiet Ω' eine ähnliche Beziehung herleiten. Wir führen Zylinderkoordinaten ein, d. h., wir setzen $x_3' = r\cos\varphi$, $x_2' = r\sin\varphi$, $x_1' = x_1'$, und bezeichnen v als Funktion von r, φ, x_1' mit $\tilde{v}$. Da dann für $x' \in \Omega'$ wegen $x_3' > 0$ auch $\cos\varphi > 0$ ist, erhält man analog zu (13) für den Fall $\alpha = 0$

$$\int_\Omega \frac{1}{\cos\varphi}\, \tilde{v}^2\, dr\, d\varphi\, dx_1' \le 4 \int_\Omega \frac{r^2}{\cos\varphi} \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}\right)^2 dr\, d\varphi\, dx_1',$$

und damit

$$\int_{\Omega'} \frac{1}{x_3'} \hat{v}^2 \, dx' = \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{r\cos\varphi} \tilde{v}^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dx_1'$$

$$\leq 4 \int_{\tilde{\Omega}} \frac{r^2}{\cos\varphi} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}\right)^2 dr \, d\varphi \, dx_1'$$

$$= 4 \int_{\Omega'} \frac{r}{\cos\varphi} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2'} \frac{\partial x_2'}{\partial r} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_3'} \frac{\partial x_3'}{\partial r}\right)^2 dx'$$

$$\leq 8 \int_{\Omega'} \frac{r}{\cos\varphi} \left(\left(\frac{x_2'}{r} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{x_3'}{r} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_3'}\right)^2\right) dx'$$

$$= 8 \int_{\Omega'} \left(\frac{x_2'^2}{x_3'} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2'}\right)^2 + x_3' \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_3'}\right)^2\right) dx' .$$

Da das Koordinatensystem mit den Achsen x_1', x_2', x_3' so gewählt worden war, daß es ein $a \neq 0$ gibt, so daß für $x' \in \Omega'$ die Ungleichung

$$x_3'^2 \geq a^2 x_2'^2 \tag{14}$$

erfüllt ist, erhalten wir

$$\int_{\Omega'} \frac{1}{x_3'} \hat{v}^2 \, dx' \leq 8\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \int_{\Omega'} x_3' \left(\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_3'}\right)^2\right) dx' . \tag{15}$$

Die Ungleichungen (13) und (15) gelten auch, wenn man $\hat{v}$ durch $\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i'}$ ersetzt ($i=1,2,3$).

Wegen $\sigma(x) = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 + \text{const.}$ mit $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ erhält man

$$\|v\sigma(x)\|_{V_1}^2 = \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma(x)} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 (v\sigma(x))}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial (v\sigma(x))}{\partial x_j}\right)^2 + v^2 \sigma^2(x) \right\} dx$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{\sigma(x)} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sigma(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + e_j \frac{\partial v}{\partial x_i} + e_i \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \left(\sigma(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + e_j v\right)^2 + v^2 \sigma^2(x) \right\} dx$$

$$= \| v \|_{V_2}^2 + 2 \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left(e_j \frac{\partial v}{\partial x_i} + e_i \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} e_j v \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\} dx$$

$$+ \int_\Omega \frac{1}{\sigma(x)} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left(e_j \frac{\partial v}{\partial x_i} + e_i \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 + v^2 \right\} dx.$$

Nun ist wegen $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = - \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j} v \, dx, \text{ d. h. } \int_\Omega v \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = 0 \qquad (16)$$

und entsprechend $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx = 0 \quad (i,j=1,2,3).$

Ferner ist nach (15)

$$\int_\Omega \frac{1}{\sigma(x)} v^2 dx = \int_{\Omega'} \frac{1}{x_3'} \hat{v}^2 dx' \le 8(1+a^{-2}) \int_{\Omega'} x_3' \left(\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_3'}\right)^2\right) dx'$$

$$\le 8(1+a^{-2}) \| v \|_{V_2}^2$$

sowie

$$\int_\Omega \frac{1}{\sigma(x)} \left(e_j \frac{\partial v}{\partial x_i} + e_i \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 \le 2 \int_\Omega \frac{1}{\sigma(x)} \left(e_j^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + e_i^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right) dx$$

$$\le 12 \sum_{k=1}^{3} \int_{\Omega'} \frac{1}{x_3'} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_k'}\right)^2 dx' \le c_6' \| v \|_{V_2}^2,$$

da $|e_j| \le 1$ und $|a_{ij}| \le 1$ ist für $i,j=1,2,3$. Damit ist

$\| v\sigma(x) \|_{V_1}^2 \le c_6 \| v \|_{V_2}^2$, womit Lemma 1 bewiesen ist.

Lemma 2: Es existiert ein $c_7 > 0$ mit

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) \qquad B(v\sigma(x),v) \geq c_7 \|v\|^2_{V_2}.$$

Beweis: Es ist

$$B(v\sigma(x),v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 (v\sigma(x))}{\partial x_i \partial x_j}\,dx$$

$$= \int_\Omega \sigma(x) \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx + 2\sum_{i,j=1}^{3} e_i \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\,dx$$

$$= \int_\Omega \sigma(x) \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx \quad \text{(nach (16)).}$$

Ferner ist

$$\|v\|^2_{V_2} = \int_\Omega \sigma(x) \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx + \int_\Omega \sigma(x) \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 + \int_\Omega \sigma(x) v^2 dx$$

$$= B(v\sigma(x),v) + \int_{\Omega'} x_3' \left\{ \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j'}\right)^2 + \vartheta^2 \right\} dx'.$$

Dabei ist

$$\int_{\Omega'} x_3' \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j'}\right)^2 dx' \leq \int_{\Omega'} x_3'^3 \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j' \partial x_3'}\right)^2 dx' \leq c_7' \int_{\Omega'} x_3' \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j' \partial x_3'}\right)^2 dx'$$

mit $c_7' = \sup\limits_{x' \in \Omega'} x_3'^2 = \sup\limits_{x \in \Omega} (\sigma(x))^2$ und entsprechend

$$\int_{\Omega'} x_3' \vartheta^2 dx \leq \frac{1}{4} c_7'^2 \int_{\Omega'} x_3' \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_3'^2}\right)^2 dx'.$$

Folglich gibt es ein $c_7 > 0$ mit $c_7 \|v\|^2_{V_2} \leq B(v\sigma(x),v)$, womit Lemma 2 bewiesen ist.

Aus Lemma 1 und Lemma 2 folgt unmittelbar die Gültigkeit von (9). Daraus folgt für $f \in V_2' = (\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega))'$ aus dem verallgemeinerten Satz von Lax/Milgram die Existenz eines Elementes $\tilde{u} \in V_1$ mit $\forall v \in V_2 \quad B(\tilde{u},v) = (f,v)$, d. h. die Existenz einer schwachen Lösung von $Lu = \Delta^2 u = f$ aus dem Raum $\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma^{-1}}(\Omega)$.

Nun gilt $W^{-1}(\Omega) \subset (\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega))'$, denn mit Hilfe von (15) kann man leicht die Ungleichung

$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)} \leq c_8 \|v\|_{V_2}$ für Funktionen v aus $C_0^\infty(\Omega)$ nachweisen,

woraus $\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$ und $W^{-1}(\Omega) \subset (\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega))'$ folgt.

Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 2: Es sei $f \in W^{-1}(\Omega)$. Dann existiert genau ein Element $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma^{-1}}(\Omega)$ mit $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma(x)}(\Omega) \quad B(\tilde{u},v) = (f,v)$, d. h. genau eine schwache Lösung von $Lu = \Delta^2 u = f$ in $\overset{\circ}{W}{}^2_{\sigma^{-1}}(\Omega)$.

2. Randwertannahme der schwachen Lösung der biharmonischen Gleichung in den Eck- und Kantenpunkten des konvexen Polyeders Ω

Für den folgenden Satz benötigen wir ein Lemma, das von Nečas /1/ bewiesen wurde.

Lemma 3: Es sei $K_R = \{x \in R^N : |x| < R\}$, $L = \sum_{|i|,|j| \leq m} (-1)^{|i|} D^i(a_{ij}D^j)$

mit $a_{ij} \in C^{\lambda_i,1}(\bar{K}_R)$,

$\lambda_i = \max(0, |i| - m - 1 + [\frac{N}{2}])$ und $\|a_{ij}\|_{C^{\lambda_i,1}(\bar{K}_R)} \leq c_9$.

Die entsprechende Dirichletform sei $\overset{\circ}{W}{}^m_2(K_R)$-elliptisch

mit $|B(\varphi,\varphi)| \geq c_{10} \|\varphi\|_{W^m(K_R)}$. Ist $f \in W^{-m+[N/2]}(K_R)$

und $u \in W^m(K_R)$ schwache Lösung von $Lu = f$ in K_R, dann

ist $u \in C^{m-1}(K_R)$ und

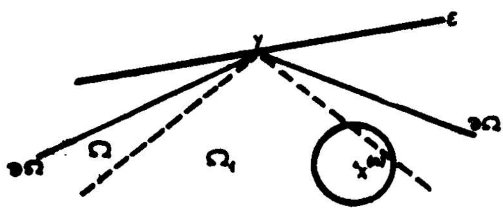
$$\sum_{|i|\le m-1} |D^i u(0)| \le c_{11} \sum_{|i|\le m} R^{-N/2-m+1+|i|} \|D^i u\|_{L_2(K_R)} + R^{1+[N/2]-N/2} \|f\|_{W^{-m+[N/2]}(K_R)}.$$

<u>Satz 3:</u> Es sei Ω ein konvexes Polyeder im R^3 und $y \in \partial\Omega$ Eck- oder Kantenpunkt von Ω. Dann hat die Gleichung $Lu = f$ für den biharmonischen Operator L und $f \in W^{-1}(\Omega)$ eine schwache Lösung u in $\overset{\circ}{W}{}^2(\Omega)$, die gleichzeitig in $C^1(\Omega)$ liegt und für die

$$\lim_{\substack{x^{(n)}\to y\\ x^{(n)}\in\Omega_1}} u(x^{(n)}) = \lim_{\substack{x^{(n)}\to y\\ x^{(n)}\in\Omega_1}} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x^{(n)}) = 0$$

$(i=1,2,3)$ gilt, wobei $\Omega_1 \subset \Omega$ ein beliebiges Polyeder ist, für das $\bar\Omega_1$ mit $\bar\Omega$ außer dem Punkt y höchstens eine Kante gemeinsam hat, die durch y geht.

<u>Beweis:</u> Nach Satz 2 besitzt die Gleichung $Lu = f$ eine schwache Lösung in $\overset{\circ}{W}{}^2_{(\sigma(x))^{-1}}(\Omega)$, wobei $\sigma(x)$ der Abstand des Punktes x zu einer Ebene ist, die mit $\bar\Omega$ nur die Kante gemeinsam hat, die durch y geht. Es sei nun $x^{(n)}$ eine Folge von Punkten aus dem in Ω enthaltenen Polyeder Ω_1.



Um jedes dieser $x^{(n)}$ werde eine Kugel K_n mit dem Radius

$$r_n = \tfrac{1}{2}\, d(x^{(n)}, \partial\Omega) \le \tfrac{1}{2}\, \sigma(x^{(n)})$$

gelegt. Für jedes $x \in K_n$ ist dann $\sigma(x) \le \sigma(x^{(n)}) + r_n \le \frac{3}{2}\, \sigma(x^{(n)})$.

Damit erhält man

$$\|u\|_{L_2(K_n)} = \int_{K_n} (\sigma(x))^5 (\sigma(x))^{-5} u^2 \, dx \le (\tfrac{3}{2}\, \sigma(x^{(n)}))^5 \, A_n \tag{17}$$

$$\text{mit } A_n = \int_{K_n} (\sigma(x))^{-5} u^2 \, dx$$

und entsprechend

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(K_n)} \le (\tfrac{3}{2}\, \sigma(x^{(n)}))^3 \, B_{ni} \qquad (i=1,2,3) \tag{18}$$

$$\text{mit } B_{ni} = \int_{K_n} (\sigma(x))^{-3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(K_n)} \le \tfrac{3}{2}\, \sigma(x^{(n)}) \, C_{nij} \tag{19}$$

$$\text{mit } C_{nij} = \int_{K_n} (\sigma(x))^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx.$$

Da $x^{(n)} \in \Omega_1$ ist, gibt es ein $c_{12} > 0$, so daß

$$2r_n = d(x^{(n)}, \partial\Omega) \ge c_{12} \sigma(x^{(n)})$$

ist. Wendet man Lemma 3 auf K_n an, erhält man deshalb

$$\begin{aligned} \sum_{|i| \le 1} |D^i u(x^{(n)})| \le c_{11} \Big\{ &\left(\frac{3}{c_{12}}\right)^{5/2} \sqrt{A_n} + \left(\frac{3}{c_{12}}\right)^{3/2} \sum_{i=1}^{3} \sqrt{B_{ni}} \\ &+ \left(\frac{3}{c_{12}}\right)^{1/2} \sum_{i,j=1}^{3} \sqrt{C_{nij}} \Big\} + \sqrt{r_n}\, \|f\|_{W^{-1}(Kn)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Nun kann man zeigen, daß A_n, B_{ni} und C_{nij} für $n \to \infty$ gegen 0 streben, denn nach (13) und (11) ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\sigma(x))^{-5} u^2 \, dx &= \int_{\Omega'} x_3'^{-5} \hat{u}^2 \, dx' \le \frac{1}{4} \int_{\Omega'} x_3'^{-3} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3'}\right)^2 dx' \\ &\le \frac{1}{4} \int_{\Omega'} x_3'^{-1} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_3'^2}\right)^2 dx' \le \frac{1}{4} \|u\|^2_{V_1} < \infty \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\int_\Omega (\sigma(x))^{-3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \le \|u\|^2_{V_1} < \infty ,$$

$$\int_\Omega (\sigma(x))^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx \le \|u\|^2_{V_1} < \infty ,$$

wobei $V_1 = \overset{o}{W}{}^2_{(\sigma(x))^{-1}}(\Omega)$ ist.

Gilt aber für eine nichtnegative, über Ω integrierbare Funktion φ

$$\int_\Omega \varphi \, dx < \infty ,$$

so folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\int_{K_n} \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \chi_{K_n} \, dx \to 0,$$

wenn $K_n \subset \Omega$ Kugeln sind, deren Radien gegen 0 streben.

($\chi_{K_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in K_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ bezeichnet hierbei die charakteristische Funktion von K_n.)

Läßt man in (20) n gegen ∞ streben, dann erhält man die Behauptung des Satzes.

Literatur

/1/ Nečas, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prag 1967

/2/ Sändig, A.-M.: Über das Randverhalten schwacher Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen höherer Ordnung in beschränkten Gebieten im R^N. Erscheint demnächst in Math. Nachr.

eingegangen: 01. 04. 1980

Anschrift des Verfassers:

stud. math. Jürgen Roßmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 35 - 43 (1980)

Uwe Hamann

Einige Bemerkungen zum Dirichlet-Problem für die polyharmonische Gleichung bei Gebieten mit Randteilen verschiedener Dimensionen

In der vorliegenden Note werden mit Hilfe der schwachen Lösungstheorie einige Aussagen zum Dirichlet-Problem für die polyharmonische Gleichung für den Fall gewonnen, daß der Rand außer einem (n-1)-dimensionalen Randteil noch Komponenten niederer Dimension besitzt. Das Interesse richtet sich dabei insbesondere auf die punktweise stetige Randwertannahme in den inneren Randpunkten.

1. Es sei $\Omega \subset R^n$ ein beschränktes offenes Gebiet mit einem hinreichend glatten (n-1)-dimensionalen Rand $\partial\Omega$ und $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge mit einem leeren Inneren. Mit $W^p(S)$ bezeichnen wir Whitney-Taylor-Felder der Ordnung p auf der kompakten Menge $S \subset R^n$ (vgl. /5/, Kap. VII).
In /1/ und /4/ sind einige Aspekte des folgenden Problems untersucht worden (sogar für allgemeinere Differentialoperatoren):
Gegeben ist $g = (g_\alpha)_{|\alpha| \le p} \in W^p(K)$.
Gesucht wird eine Funktion

$$u \in C^p(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega} \setminus K) \cap C^{2m}(\Omega \setminus K)$$

mit

$$\begin{cases} \Delta^m u = 0 & \text{in } \Omega \setminus K, \\ D^\alpha u\big|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \le m-1, \\ D^\alpha u\big|_K = g_\alpha & \text{für } |\alpha| \le p. \end{cases} \tag{1}$$

Aus dieser Problemstellung ergibt sich die folgende Aufgabe: Man gebe ein möglichst großes p derart an, daß zu allen Vorgaben $g \in W^p(K)$ Lösungen von (1) existieren!

Mit Hilfe des Satzes von Sobolev-Slobodeckij gelingt es immerhin, für bestimmte p Bedingungen an die Komponenten von $g \in W^p(K)$ anzugeben, die die Existenz von Lösungen des Randwertproblems (1) garantieren. Für den Spezialfall, daß K nur aus einem Punkt besteht, liefert dieser Satz sogar die vollständige Lösung der obigen Aufgabe.

2. Es sei $K = K_d$ ein glattes d-dimensionales Flächenstück $(1 \leq d \leq n-1)$.

<u>Satz 1:</u> (Sobolev-Slobodeckij, s. /6/, vgl. /8/): Das Problem

$$\Delta^m u = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \setminus K_d,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} u\Big|_{\partial\Omega} = h_k \qquad \text{für} \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial \mu_{n-d}^\beta} u\Big|_{K_d} = \tilde{g}_\beta \qquad \text{für} \quad |\beta| \leq m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1$$

besitzt genau dann eine eindeutige Lösung aus dem Sobolev-Raum $W_2^m(\Omega)$, wenn $\tilde{g}_\beta \in W_2^{m-|\beta|-\frac{n-d}{2}}(K_d)$ für $|\beta| \leq m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1$ und $h_k \in W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ für $0 \leq k \leq m-1$ gilt. Es ist hierbei $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-d})$ ein Multiindex, und $\frac{\partial^\beta}{\partial \mu_{n-d}^\beta}$ sind die Ableitungen in die Normalenrichtungen von K_d.

Es sei bemerkt, daß im Falle $m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1 < 0$ K_d für Δ^m und $W_2^m(\Omega)$ eine hebbare Singularität ist, so daß dann auf K_d keine Vorgaben möglich sind. Wir setzen im folgenden $m-\left[\frac{n}{2}\right]-1 \geq 0$ voraus.

Aus Satz 1 ergibt sich: Stellt man auf K_d nur Vorgaben bis zu einer Ordnung $p < m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1$, so existieren unendlich viele Lösungen aus $W_2^m(\Omega)$, da die Ableitungen z. B. der Ordnung $m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1$ dann beliebig vorschreibbar sind.

Aus dem Einbettungssatz $W_2^m(\Omega) \subset C^{m-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\Omega)$ erhält man weiter

Satz 2: Ist $p \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$, so besitzt das Problem (1) für alle jene Whitney-Taylor-Felder $g = (g_\alpha)_{|\alpha| \leq p} \in W^p(K_d)$ eine Lösung aus $C^p(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega}\setminus K_d) \cap C^{2m}(\Omega \setminus K_d)$, deren Komponenten g_α in den Sobolev-Räumen $W_2^{m-|\alpha|-\frac{n-d}{2}}(K_d)$ liegen. Gilt weiterhin sogar $p < m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1$, dann gibt es stets unendlich viele Lösungen. Alle diese Lösungen liegen in $W_2^m(\Omega) \subset C^p(\Omega)$.

3. Wir werden jetzt zeigen, daß das Problem (1) auch Lösungen aus $C^p(\Omega)$ haben kann, die nicht in $W_2^m(\Omega)$ liegen. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Hilfssätze (vgl. /3/, /4/).

Lemma 1: a) Genügt $u \in W_2^m(\Omega)$ der Gleichung $\Delta^m u = 0$ in $\Omega \setminus K_d$ und ist $m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1 \geq 0$, dann gilt $(\Delta^m u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $D^\alpha \varphi|_{K_d} = 0$ für $|\alpha| \leq m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1$.

b) Genügt $u \in C^k(\Omega)$ der Gleichung $\Delta^m u = 0$ in $\Omega \setminus K_d$ und ist $2m-k-n+d-1 \geq 0$, so gilt $(\Delta^m u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $D^\alpha \varphi|_{K_d} = 0$ für $|\alpha| \leq 2m-k-n+d-1$.

Lemma 2: Es sei $K \subset \Omega$ eine in der Hyperebene $R^d \times \{0\}$ liegende kompakte Menge. Dann gilt: Ist $f \in D'(\Omega)$ eine Distribution mit $(f, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $D^\alpha \varphi|_K = 0$ für $|\alpha| \leq 1$, so existieren eindeutig bestimmte Distributionen $f_\gamma \in D'(R^d)$ mit

$$f(x) = \sum_{|\gamma| \leq 1} f_\gamma(x_1, \dots, x_d) \otimes D^\gamma \delta(x_{d+1}, \dots, x_n).$$

(γ ist ein $(n-d)$-dimensionaler Multiindex und δ das Punktmaß.)

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $K_d \subset \Omega \subset R^n$ ein ebenes d-dimensionales Flächenstück ist, das in der Hyperebene $R^d \times \{0\}$ liegt. Das auf K_d eingeschränkte d-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnen wir mit λ. Weiter sei

$\mu(x) = \lambda(x_1,\dots,x_d) \otimes \delta(x_{d+1},\dots,x_n)$.

Ist $E(x)$ die Fundamentallösung von Δ^m im R^n, so gilt

$$E*\mu(x) = \int E(x-y)\,d\mu(y) \in C^{2m-n-1+d}(R^n)$$

(vgl. /4/, /2/). Für einen Multiindex β der Gestalt $\beta = (0,\dots,0,\beta_{d+1},\dots,\beta_n)$ mit $|\beta| = 2m-n-1+d-p$ setzen wir

$$v = D^\beta E*\mu \in C^p(R^n). \tag{2}$$

Die Funktion v ist Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta^m u &= 0 && \text{in } \Omega\setminus K_d, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} &= h_\alpha && \text{für } |\alpha| \le m-1, \\ D^\alpha u|_{K_d} &= g_\alpha && \text{für } |\alpha| \le p, \end{aligned}$$

wobei die h_α und die g_α durch v induziert sind.
Das Problem

$$\begin{aligned} \Delta^m u &= 0 && \text{in ganz } \Omega, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} &= -h_\alpha && \text{für } |\alpha| \le m-1 \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutige Lösung $H \in C^\infty(\bar\Omega)$.
$V := v + H \in C^p(\Omega)$ löst somit

$$\begin{aligned} \Delta^m u &= 0 && \text{in } \Omega\setminus K_d, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{für } |\alpha| \le m-1, \\ D^\alpha u|_{K_d} &= g_\alpha + D^\alpha H|_{K_d} && \text{für } |\alpha| \le p, \end{aligned}$$

also ein Problem der Gestalt (1).

Wir zeigen jetzt, daß für $p \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$

$$V \notin W_2^m(\Omega)$$

gilt. Wegen (2) gilt einerseits

$$\Delta^m V = D^\beta \mu = \lambda(x_1,\dots,x_d) \otimes D^\beta \delta(x_{d+1},\dots,x_n),$$

und es ist $|\beta| = 2m-n-1+d-p \geq m-n+\left[\frac{n}{2}\right]+d$ für $o \leq p \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$.
Andererseits würde aus $V \in W_2^m(\Omega)$ nach den Lemmata 1 und 2

$$\Delta^m V = \sum_{|\gamma| \leq m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1} f_\gamma(x_1,\dots,x_d) \otimes D^\gamma \delta(x_{d+1},\dots,x_n)$$

folgen. Aus $m-\left[\frac{n-d}{2}\right]-1 < m-n+\left[\frac{n}{2}\right]+d$ ($d \geq 1$!) ergibt sich der Widerspruch. Es ist also $V \notin W_2^m(\Omega)$, und wir erhalten die

<u>Bemerkung 1:</u> Es gibt für $p \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ Lösungen aus $C^p(\Omega)$ des Problems (1), die nicht in $W_2^m(\Omega)$ liegen.

Weiterhin läßt sich folgendes zeigen:

<u>Bemerkung 2:</u> Das Problem (1) kann für $p \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ gleichzeitig sowohl Lösungen aus $W_2^m(\Omega)$ als auch solche aus $C^p(\Omega) \setminus W_2^m(\Omega)$ besitzen.

Dafür geben wir ein Beispiel an. Es sei n ungerade (für gerade n sind die Überlegungen analog). Die Fundamentallösung von Δ^m im R^n ist dann $E(x) = c|x|^{2m-n}$, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E(x) = (2m-n) \cdot c \cdot |x|^{2m-n-2} \cdot x_i .$$

Für $d < i \leq n$ setzen wir

$$v(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} E * \mu$$
$$= (2m-n) \cdot c \cdot x_i \int_{K_d} \left(\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_d-y_d)^2+x_{d+1}^2+\dots+x_n^2}\right)^{2m-n-2} dy_1 dy_2 \dots dy_d .$$

Es gilt $v \in C^{2m-n+d-2}(R^n) \subseteq C(R^n)$ (es sei $2m-n+d-2 \geq 0$) und $v|_{K_d} = 0$. $V = v + H \in C(\Omega)$ (H erhält man wie oben) ist damit Lösung des Problems

$$\begin{cases} \Delta^m u = 0 & \text{in } \Omega|K_d, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \\ u|_{K_d} = H|_{K_d}. \end{cases} \tag{3}$$

V liegt nicht in $W_2^m(\Omega)$ (siehe oben). Andererseits hat das gleiche Problem (3) wegen $H|_{K_d} \in C^\infty(K_d)$ nach Satz 1 auch eine Lösung aus $W_2^m(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Bezüglich des Satzes 2 sei noch folgendes bemerkt: Gilt für eine Komponente g_α des Whithney-Taylor-Feldes $g \in W^p(K_d)$ nicht $g_\alpha \in W_2^{m-|\alpha|-\frac{n-d}{2}}(K_d)$, so besitzt das Problem (1) keine Lösung aus $W_2^m(\Omega)$ (ähnlich wie beim Beispiel von Hadamard, s. /7/, S. 96). Ob in solch einem Falle trotzdem eine Lösung aus $C^p(\Omega)$ existiert, ist eine offene Frage.

4. Wir betrachten jetzt den Fall, daß K nur aus einem Punkt besteht. Hier läßt sich sogar die Frage, wann für alle Vorgaben eine Lösung existiert, beantworten. Es sei also $K = \{0\} \subset \Omega \subset R^n$.
Das Randwertproblem lautet:
Gegeben ist ein Vektor $a = (a_\alpha)_{|\alpha| \leq p}$ reeller Zahlen.
Gesucht wird eine Funktion

$u \in C^p(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega \setminus \{0\}) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$ mit

$$\begin{cases} \Delta^m u = 0 & \text{in } \Omega\setminus\{0\}, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{für } |\alpha| \leq m-1, \\ D^\alpha u(0) = a_\alpha & \text{für } |\alpha| \leq p. \end{cases} \tag{4}$$

In /1/ wurde für beliebige elliptische Differentialoperatoren gezeigt: Notwendig dafür, daß zu jeder Vorgabe $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq p}$ eine Lösung existiert, ist $p \leq m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$. Es stellt sich jetzt für den polyharmonischen Operator heraus, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

Satz 3: a) Genau dann, wenn $p \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ ist, existiert zu allen Vorgaben $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq p}$ eine Lösung aus $W_2^m(\Omega) \subset C^p(\Omega)$.

b) Ist n ungerade, so gibt es für $p = m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ zu allen Vorgaben genau eine Lösung aus $C^{m-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\Omega)$.

c) Ist n gerade, so gibt es für $p = m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ auch Lösungen aus $C^{m-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\Omega) \setminus W_2^m(\Omega)$.

d) Für $p < m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$ gibt es sowohl für gerade als auch für ungerade n neben Lösungen aus $W_2^m(\Omega)$ auch solche aus $C^p(\Omega) \setminus W_2^m(\Omega)$.

Beweis: Die Aussage a) ergibt sich unmittelbar aus Satz 1 bzw. 2. Es sei u eine Lösung aus $C^{m-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\Omega)$. Dann gilt insbesondere $\Delta^m u = 0$ in $\Omega\setminus\{0\}$. Aus Lemma 1 (dieses Lemma gilt auch für $K_d = \{0\}$!) erhält man $(\Delta^m u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $D^\alpha\varphi(0) = 0$ für $|\alpha| \leq m-n+\left[\frac{n}{2}\right]$, woraus

$$\Delta^m u = \sum_{|\alpha| \leq m-n+\left[\frac{n}{2}\right]} c_\alpha D^\alpha \delta \quad (c_\alpha \text{ Konstanten}) \text{ und}$$

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m-n+\left[\frac{n}{2}\right]} c_\alpha D^\alpha E(x) + w(x) \tag{5}$$

gefolgert werden kann. Hier ist E(x) die Fundamentallösung von Δ^m im R^n und w eine Funktion mit $\Delta^m w = 0$ in ganz Ω und

$$D^\beta w|_{\partial\Omega} = - D^\beta \sum_{|\alpha| \leq m-n+\left[\frac{n}{2}\right]} c_\alpha D^\alpha E|_{\partial\Omega}.$$

Zu b) Ist n ungerade, geht die Summation in (5) bis $m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$. Aus den Eigenschaften der Fundamentallösung folgt $D^\alpha E \in W_2^m(\Omega)$ für $|\alpha| \leq m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$, d. h. $u \in W_2^m(\Omega)$ (s. /4/, Satz 3.13, vgl. /2/).

Zu c) Für gerade n geht die Summation in (5) bis $m - \frac{n}{2}$. Für $|\alpha| = m - \frac{n}{2}$ ist $D^\alpha E \in C^{m-\frac{n}{2}-1}(R^n)$ (s. /4/, vgl. /2/), jedoch $D^\alpha E \notin W_2^m(\Omega)$. Letzteres erhält man folgendermaßen: Es gilt $\Delta^m D^\alpha E = D^\alpha \delta$, also $\Delta^m D^\alpha E = 0$ in $R^n \setminus \{0\}$. Wäre $D^\alpha E \in W_2^m(\Omega)$, so müßte nach Lemma 1 $\Delta^m D^\alpha E = \sum\limits_{|\beta| \leq m-\frac{n}{2}-1} c_\beta D^\beta \delta$ gelten. Aus diesem Widerspruch erhält man $D^\alpha E \notin W_2^m(\Omega)$ für $|\alpha| = m - \frac{n}{2}$.

Alle Funktionen der Gestalt

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m-\frac{n}{2}} c_\alpha D^\alpha E(x) + w(x),$$

wobei für mindestens ein α mit $|\alpha| = m-\frac{n}{2}$ $c_\alpha \neq 0$ ist, sind also Lösungen des Problems (4) (mit durch die Konstanten c_α induzierten Vorgaben für $x = 0$), die in $C^{m-\frac{n}{2}-1}(\Omega) \setminus W_2^m(\Omega)$ liegen.

Der Beweis von d) erfolgt in analoger Weise (vgl. auch Beweis von Bemerkung 2).

Literatur

/1/ Hamann, U.: Das Dirichletproblem für elliptische Differentialgleichungen bei Gebieten mit Randteilen verschiedener Dimensionen. In: Elliptische Differentialgleichungen, Bericht über die Tagung vom 10. -16. 10. 1977 in Rostock, S. 113 - 124 Rostock 1978

/2/ Hamann, U.: Eigenschaften von Potentialen bezüglich elliptischer Differentialoperatoren.
Math. Nachr. (erscheint demnächst)

/3/ Hamann, U.: Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Hebbarkeit von Singularitäten.
Math. Nachr. (erscheint demnächst)

/4/ Hamann, U.: Hebbarkeit von Singularitäten und ein Dirichlet-Problem für elliptische Differentialgleichungen.
Dissertation, Rostock 1979

/5/ Schulze, B.-W., und Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin 1977

/6/ Slobodeckij, L. N.: Verallgemeinerte Räume von S. L. Sobolev und ihre Anwendung auf Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen (Russ.).
Učen. Zap. Leningrad. Gos. Inst. im. A. I. Gercena 197, 54 - 112 (1958)

/7/ Sobolev, S. L.: Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik.
Berlin 1964

/8/ Sternin, B. Ju.: Elliptische und parabolische Aufgaben auf Mannigfaltigkeiten mit Rand, die aus Komponenten verschiedener Dimension bestehen. (Russ.)
Trudy Moskov. Mat. Obšč. 15, 346 - 382 (1966)

eingegangen: 18. 02. 1980

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Uwe Hamann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 45 - 54 (1980)

Charles W. Groetsch

Relaxed Steepest Descent for Singular Linear Operator Equations

1. Introduction.

It is well known that the successive residuals in the steepest descent method for linear equations are orthogonal (see e.g. [1, p. 504]). Therefore it seems reasonable to overrelax the method in an attempt to obtain faster convergence, in much the same way that the S.O.R. method may be considered to be a device for accelerating the Gauss-Seidel method by use of an overrelaxation parameter (see e.g. [6, Chapter 3]). In this note we will investigate the steepest descent method with relaxation for approximating the minimal norm least squares solution of the equation

$$Tx = b \tag{1}$$

where $T:H_1 \to H_2$ is a bounded linear operator from the Hilbert space H_1 into the Hilbert space H_2. Given an approximation x_n the method consists of forming a steepest descent step to obtain the approximation

$$\bar{x}_n = x_n - \alpha_n r_n, \quad r_n = T^*Tx_n - T^*b, \quad \alpha_n = ||r_n||^2/||Tr_n||^2. \tag{2}$$

One then forms another steepest descent step

$$y_n = \bar{x}_n - \bar{\alpha}_n \bar{r}_n, \quad r_n = T^*Tx_n - T^*b, \quad \bar{\alpha}_n = ||\bar{r}_n||^2/||T\bar{r}_n||^2 \tag{3}$$

and defines a new approximation x_{n+1} by

$$x_{n+1} = x_n + \omega(y_n - x_n) = x_n - \omega\rho_n \tag{4}$$

where

$$\rho_n = \alpha_n r_n + \bar{\alpha}_n \bar{r}_n \tag{5}$$

and ω is a relaxation parameter, $0<\omega<2$. Note that if $\omega=1$, then one step of the algorithm above corresponds exactly to two steps of the steepest descent algorithm. If $0<\omega<1$, the method amounts to an "underrelaxed" version of the steepest descent method, while for $1<\omega<2$ the method is an "overrelaxed" method of steepest descent. In the next section we will present a convergence proof for the relaxed steepest descent method for singular linear operator equations in Hilbert space.

2. Convergence

We shall denote the inner product in each of the Hilbert spaces H_1 and H_2 by $(\cdot,\cdot)$. The Moore-Penrose inverse of the bounded linear operator $T:H_1\to H_2$ will be denoted by $T^\dagger$. We recall that $T^\dagger:D(T^\dagger)\to H_1$ is the closed linear operator which assigns to each

$$b \in D(T^\dagger):=R(T) + R(T)^\perp$$

the minimal norm least squares solution $x = T^\dagger b$ of equation (1) (see e.g. [2]). Given $b \in D(T^\dagger)$ and $x_0 \in H_1$ we will denote the error in the approximation x_n by e_n, i.e.

$$e_n = x_n - x - P_N x_0 ,$$

where P_N is the orthogonal projection of H_1 onto N, the nullspace of T. Similarly,

$$\bar{e}_n = \bar{x}_n - x - P_N x_0 .$$

<u>Lemma 1</u>. For each n we have

(i) $(r_n, \bar{r}_n) = 0$

(ii) $T^*Te_n = r_n$

(iii) $\alpha_n||r_n||^2 \leq (r_n, e_n)$ and $\bar{\alpha}_n||\bar{r}_n||^2 \leq (\bar{r}_n, \bar{e}_n)$

(iv) $||\rho_n||^2 = \alpha_n^2||r_n||^2 + \bar{\alpha}_n{}^2||\bar{r}_n||^2 \leq (e_n, \rho_n)$

(v) $||\rho_n|| \leq ||e_n||$

(vi) $\alpha_n(e_n, r_n) \leq (e_n, \rho_n)$.

Proof: Equalities (i) and (ii) follow directly from the definitions and (iii) is well-known (see e.g. [2, p. 125]). The equality in (iv) follows directly from (5) and (i). Also, since

$$(\bar{e}_n, \bar{r}_n) = (e_n - \alpha_n r_n, \bar{r}_n) = (e_n, \bar{r}_n)$$

we have by (5) and (iii)

$$\begin{aligned}(e_n, \rho_n) &= \alpha_n(e_n, r_n) + \bar{\alpha}_n(e_n, \bar{r}_n) \\ &\geq \alpha_n^2||r_n||^2 + \bar{\alpha}_n^2||\bar{r}_n||^2 = ||\rho_n||^2.\end{aligned}$$

Part (v) follows directly from (iv) by use of the Schwarz inequality. Since

$$\bar{r}_n = r_n - \alpha_n T^*Tr_n ,$$

we have by (ii) and (iii)

$$\begin{aligned}(e_n, \rho_n) &= \alpha_n(e_n, r_n) + \bar{\alpha}_n(e_n, \bar{r}_n) \\ &= \alpha_n(e_n, r_n) + \bar{\alpha}_n(e_n, r_n - \alpha_n T^*Tr_n) \\ &= (\alpha_n + \bar{\alpha}_n)(e_n, r_n) - \bar{\alpha}_n\alpha_n||r_n||^2 \\ &\geq (\alpha_n + \bar{\alpha}_n)(e_n, r_n) - \bar{\alpha}_n(e_n, r_n) ,\end{aligned}$$

proving (vi). #

Lemma 2. The sequence $\{||e_n||\}$ decreases and $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i ||Te_i||^2 < \infty$.

Proof: By (4) and (iv), (vi) and (ii) of Lemma 1 we have

$$\begin{aligned} ||e_{n+1}||^2 &= ||e_n||^2 - 2\omega(e_n,\rho_n) + \omega^2 ||\rho_n||^2 \\ &\leq ||e_n||^2 - \omega(2-\omega)(e_n,\rho_n) \\ &\leq ||e_n||^2 - \omega(2-\omega)\alpha_n(e_n,r_n) \\ &= ||e_n||^2 - \omega(2-\omega)\alpha_n||Te_n||^2 . \end{aligned}$$

Therefore $\{||e_n||\}$ is a decreasing sequence and hence $\lim ||e_n|| = d \geq 0$. We then have

$$\omega(2-\omega) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i||Te_i||^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} (||e_i||^2 - ||e_{i+1}||^2) = ||e_0||^2 - d^2 . \quad \#$$

The discussion which follows parallels the presentation of the steepest descent method as developed by Showalter and Ben-Israel [5], Kammerer and Nashed [3] and McCormick and Rodrique [4].

Suppose that $Qb \in R(TT^*)$, where Q is the projection of H_2 onto $\overline{R(T)}$. Furthermore, suppose that

$$x_0 - P_N x_0 = P_{N^\perp} x_0 \in R(T^*) .$$

It then follows (since $\rho_n \in R(T^*)$) that $P_{N^\perp} x_n \in R(T^*)$ for all n. Therefore, for each n, there is a unique $z_n \in N(T^*)^\perp$ such that

$$P_{N^\perp} x_n = T^* z_n .$$

Also note that since $\rho_n \in R(T^*) \subseteq N(T)^\perp$ and

$$x_n = x_0 - \omega \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i$$

we have

$$P_{N^\perp} x_0 = P_{N^\perp} x_0 - \omega \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i = x_n - P_N x_0 .$$

Since $Qb \in R(TT^*)$, say $Qb = TT^*z$ where $z \in N^\perp$, it follows that $T^\dagger b = T^*z$. By (4) we then have

$$T^*z_{n+1} = T^*z_n - \omega \rho_n .$$

Let $V = T^*|_{N(T^*)^\perp}$. Then since V is one to one and $\rho_n \in R(T^*)=R(V)$, we have

$$z_{n+1} = z_n - \omega V^{-1} \rho_n .$$

Finally, let $\xi_n = z_n - z$. Then since $z_n - z \in N(T^*)^\perp$ and (by (6))

$$T^*zn - T^*z = P_{N^\perp} x_n - x = x_n - x - P_N x_0 = e_n ,$$

we have

$$T^*\xi_n = e_n \text{ and } \xi_n = V^{-1} e_n .$$

Lemma 3. $||\xi_n||^2 < ||\xi_0||^2$.

Proof: By (7) we have

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \omega V^{-1} \rho_n$$

and therefore

$$\begin{aligned} ||\xi_{n+1}||^2 &= ||\xi_n||^2 - 2\omega(\xi_n, V^{-1}\rho_n) + \omega^2 (V^{-1}\rho_n, V^{-1}\rho_n) \\ &= ||\xi_n||^2 - \omega\{2(\xi_n, V^{-1}\rho_n) - (z_n - z_{n+1}, V^{-1}\rho_n)\} \\ &= ||\xi_n||^2 - \omega(\xi_n + \xi_{n+1}, V^{-1}\rho_n) \\ &= ||\xi_n||^2 - \omega(V^{-1}(e_n + e_{n+1}), V^{-1}\rho_n) . \end{aligned}$$

We claim that $(V^{-1}(e_n+e_{n+1}),\ V^{-1}\rho_n) \geq 0$, which will prove the lemma. If we set $W=T|_{\overline{R(T^*)}}$, then it follows that $V^{-1*} = W^{-1}$ and hence

$$(V^{-1}\ (e_n + e_{n+1}),\ V^{-1}\ \rho_n) = (e_n + e_{n+1},\ W^{-1}\ V^{-1}\ \rho_n).$$

But by (6),

$$\begin{aligned} W^{-1}\ V^{-1}\ r_n &= W^{-1}\ V^{-1}\ (T^*Tx_n - T^*b) \\ &= W^{-1}\ V^{-1}\ (T^*TP_{N\perp}\ x_n - T^*Qb) \\ &= W^{-1}\ V^{-1}\ (T^*T(x_n - P_N x_0) - T^*TT^*z) \\ &= x_n - P_N x_0 - x = e_n\ , \end{aligned}$$

and similarly

$$W^{-1}\ V^{-1}\ \bar{r}_n = \bar{x}_n - P_N x_0 - x = \bar{e}_n\ .$$

Therefore

$$(e_n+e_{n+1},\ W^{-1}V^{-1}\rho_n) = (e_n+e_{n+1},\ \alpha_n e_n + \bar{\alpha}_n \bar{e}_n)$$

$$= (\alpha_n+\bar{\alpha}_n)[\|e_n\|^2 + (e_n,e_{n+1})] - \alpha_n\bar{\alpha}_n[(r_n,e_n) + (r_n,e_{n+1})]$$

$$= (\alpha_n+\bar{\alpha}_n)[2\|e_n\|^2 - \omega(e_n,\rho_n)] + \alpha_n\bar{\alpha}_n[-2(r_n,e_n) + \omega\alpha_n\|r_n\|^2].$$

But, since $0 < \omega < 2$, we have by (v)

$$\omega(e_n,\rho_n) \leq 2\ \|e_n\|\ \|\rho_n\| \leq 2\ \|e_n\|^2.$$

Also, by (iii)

$$\omega\alpha_n\|r_n\|^2 \leq 2\ \alpha_n\ \|r_n\|^2 \leq 2\ (r_n,e_n).$$

Therefore, $(e_n+e_{n+1}, W^{-1}V^{-1}\rho_n) \geq 0$, which completes the proof. #

<u>Theorem</u>. Suppose $b \in H_2$ satisfies $Qb \in R(TT^*)$ and $x_0 \in H_1$ satisfies $P_{N^\perp} x_0 \in R(T^*)$. Then for each ω with $0 < \omega < 2$, the sequence $\{x_n\}$ converges monotonically to $T^\dagger b + P_N x_0$ and $||x_n - T^\dagger b - P_N x_0||^2 = O(1/n)$.

<u>Proof</u>: We saw in Lemma 2 that the sequence

$$||e_n||^2 = ||x_n - T^\dagger b - P_N x_0||^2$$

decreases. Now by (8) and Lemma 3,

$$||e_n||^2 = (e_n, T^*\xi_n) = (Te_n, \xi_n)$$

$$\leq ||Te_n|| \, ||\xi_n|| \leq ||Te_n|| \, ||\xi_0|| .$$

But $||Te_n|| \to 0$, by Lemma 2 and hence $||e_n|| \to 0$. Since $\alpha_n \geq ||T||^{-2}$, we have by the inequality above and that in Lemma 2

$$||e_{n+1}||^2 = ||e_n||^2 - \omega(2-\omega) \, ||e_n||^4/||T||^2 \, ||\xi_0||^2 .$$

One may now use an elementary result of Showalter and Ben-Israel on difference inequalities (see e.g. [2, pg. 140]) to obtain the estimate $||e_n||^2 = O(1/n)$. #

We note that if $R(T)$ is closed and $b \in D(T^\dagger)$, then $Qb \in R(TT^*)$. Also $N^\perp = R(T^*)$ and therefore the method will converge in this case to $T^\dagger b + P_N x_0$. However, it is well known that if $R(T)$ is closed then

$$(T^*Ty, y) \geq m \, ||y||^2$$

for all $y \in N^\perp$ where $m = ||T^\dagger||^{-2}$ (see e.g.[2, p. 56]). In this case we have as in the proof of Lemma 2,

$$
\begin{aligned}
||e_{n+1}||^2 &\leq ||e_n||^2 - \omega(2-\omega)\ \alpha_n\ (e_n,\ T^*T\ e_n) \\
&\leq ||e_n||^2 - \omega(2-\omega)\ \alpha_n\ m\ ||e_n||^2 \\
&\leq (1 - \omega(2-\omega)/\kappa^2) \cdot ||e_n||^2 ,
\end{aligned}
$$

where $\kappa = ||T^\dagger||\ ||T|| \geq 1$. Therefore, for operators with closed range, the rate of convergence of the method is at least geometric.

3. An Example

As a simple numerical illustration we consider the finite dimensional problem of computing $T^\dagger b$ where

$$
T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T^\dagger b = \frac{1}{102} \cdot \begin{bmatrix} -33 \\ 21 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Using $x_0=0$ one obtains the following values for the error in the n th approximation (the numbers in parentheses indicate multiplication by the corresponding power of ten).

$\omega \backslash n$	4	8	12	16
.25	1.99(-01)	9.86(-02)	4.88(-02)	2.42(-02)
.50	8.48(-02)	1.79(-02)	3.77(-03)	7.95(-04)
.75	2.86(-02)	2.04(-03)	1.49(-04)	1.03(-05)
1.00	6.41(-03)	1.02(-04)	1.63(-06)	2.59(-08)
1.25	5.71(-04)	8.10(-05)	1.15(-09)	1.63(-12)
1.50	4.71(-07)	5.51(-13)	2.87(-16)	2.72(-16)
1.75	1.09(-04)	2.95(-08)	7.99(-12)	2.14(-15)

References

[1] Faddejew, D. K., und Faddejewa, W. N.: Numerische Methoden der Linearen Algebra. München 1964

[2] Groetsch, C. W.: Generalized Inverses of Linear Operators: Representation and Approximation. New York 1977

[3] Kammerer, W. J., and Nashed, M. Z.: Steepest descent for singular linear operator equations. Appl. Anal. 1, 143 - 159 (1971)

[4] Mc Cormick, S. F., and Rodrigue, G. H.: A unified approach to gradient methods for linear operator equations. J. Math. Anal. Appl. 49, 275 - 285 (1975)

[5] Showalter, D., and Ben-Israel, A.: Representation and computation of the generalized inverse of a bounded linear operator between two Hilbert spaces. Accad. Naz. dei Lincei 48, 184 - 194 (1970)

[6] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N. J., 1962

received: March 01, 1980

Author's address:

Prof. Dr. C. W. Groetsch
Department of Mathematical Sciences
University of Cincinnati
Cincinnati, Ohio 45221
U. S. A.

Rostock. Math. Kolloq. 15, 55 - 59 (1980)

Klaus Beyer

Über "gemischte" Approximationen quadratischer Variationsprobleme

Bei der Lösung von Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen ist im Rahmen der Hilbertraumtheorie die Projektion einer Funktion (bzw. Funktionals) auf einen Teilraum V_0 des zugrundeliegenden Hilbertraums zu bestimmen. Der numerischen Konstruktion der Lösung steht in vielen Fällen (z. B. Stokessche Gleichungen, Trefftzsches Verfahren für Gleichungen mit variablen Koeffizienten) der Umstand entgegen, daß über ein ausreichendes System von Koordinatenfunktionen $u_0 \in V_0$ nicht verfügt wird. Einen Ausweg aus dieser Situation bieten die sogenannten gemischten Verfahren, bei denen die ursprüngliche Approximation mit einer Approximation der Projektion verbunden wird. Wir betrachten in dieser Note eine Modifikation des Projektionssatzes in Hilberträumen und skizzieren seine Anwendung auf gemischte Approximationen quadratischer Variationsprobleme.
Im folgenden seien V, H zwei reelle Hilberträume und $D: V \to H$ eine stetige lineare Abbildung mit dem Wertevorrat H und dem Nullraum N(D). Wir betrachten die orthogonale Summe

$$V = V_0 + W, \quad V_0 = N(D). \tag{1}$$

Identifizieren wir H mit seinem Dual, so ist die Adjungierte D' von D als Abbildung von H in den zu V dualen Raum V' aufzufassen. Wir bezeichnen schließlich die Rießsche Abbildung $V' \to V$ mit R:

$$(R\,f,u)_V = \langle f,u\rangle \text{ für } f \in V'.$$

Wegen $W = N(D)^{\perp}$ = Wertevorrat von RD' findet man gemäß (1)

$$u = u_0 + RD'\mathfrak{T}, \quad u_0 \in V_0, \ \mathfrak{T} \in H \tag{2}$$

für jedes $u \in V$; in (2) sind u_0 und $\mathfrak{T}$ durch u eindeutig bestimmt. V^h und H^k seien nun zwei endlichdimensionale Teilräume von V bzw. H, ferner sei $V_0^k = \{u \in V \mid Du \perp H^k\}$.

Neben (1) wird die Zerlegung

$$V = (V_0^k \cap V^h) + W^{h,k}, \quad W^{h,k} = (V_0^k \cap V^h)^{\perp}$$

betrachtet. Sind P_0, $P_0^{h,k}$, P^h die orthogonalen Projektoren von V auf V_0, $V_0^k \cap V^h$ bzw. V^h, so gilt der

<u>Satz:</u> Ist $ß_{h,k}$ der kleinste positive Eigenwert der quadratischen Form $\|P^h RD'\pi\|_V^2$ über H^k, so gilt für alle $u \in V_0$

$$\|(I-P_0^{h,k})u\|_V \leq (1+ß_{h,k}^{-1}\|D\|^2)^{1/2}\|(I-P^h)u\|_V. \tag{3}$$

<u>Bemerkung:</u> (3) trifft insbesondere bei

$$\|P^h RD'\pi\|_V^2 \geq ß_{h,k}\|\pi\|_H^2 \qquad (ß_{h,k} > 0) \tag{4}$$

für alle $\pi \in H^k$ zu. Im übrigen gilt

$$\|P^h RD'\pi\|_V = \sup_{v \in V} \frac{|(P^h RD'\pi, v)_V|}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V^h} \frac{|(RD'\pi, v)_V|}{\|v\|_V}$$

$$= \sup_{v \in V^h} \frac{|\langle D'\pi, v\rangle|}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V^h} \frac{(\pi, Dv)_H}{\|v\|_V}.$$

<u>Beweis:</u> Ist $\pi_1, \ldots, \pi_n$ eine Basis von H^k, so läßt sich die Projektion $P_0^{h,k}u$ durch das Variationsproblem

$$\|v - u\|_V^2 \to \operatorname*{Min}_{v \in V^h}$$

unter den Nebenbedingungen $(Dv, \pi_1)_H = \ldots = (Dv, \pi_n)_H = 0$ charakterisieren. Demzufolge existieren Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so daß

$$(P_0^{h,k}u-u, v)_V + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (Dv, \pi_j)_H = 0$$

gilt für alle $v \in V^h$.

Setzt man $\pi^{h,k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \pi_j \in H^k$, so folgt hieraus

$$0 = (P_o^{h,k}u-u,v)_V + (Dv,\pi^{h,k})_H = (P_o^{h,k}u-(u-RD'\pi^{h,k}),v)_V$$

für alle $v \in V^h$, d. h.

$$P_o^{h,k}u = P^h(u-RD'\pi^{h,k}).$$

Somit wird

$$\|(I-P_o^{h,k})u\|_V^2 = \|(I-P^h)u\|_V^2 + \|P^hRD'\pi^{h,k}\|_V^2, \tag{5}$$

und zum Beweis von (3) ist nur noch der zweite Summand von (5) abzuschätzen.
Der Multiplikator $\pi^{h,k}$ ist aus der Orthogonalitätsbedingung

$$0 = (DP_o^{h,k}u, \varphi)_H = (DP^hu, \varphi)_H - (DP^hRD'\pi^{h,k}, \varphi)_H \tag{6}$$

bzw.

$$(DP^hRD'\pi^{h,k}, \varphi)_H = (DP^hu, \varphi)_H \text{ für alle } \varphi \in H^k \tag{7}$$

zu ermitteln. Bezüglich der Basis $\pi_1, \ldots, \pi_n$ stellt (7) ein - evtl. nicht eindeutig - lösbares lineares Gleichungssystem für die Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dar, dessen Koeffizientenmatrix wegen

$$(DP^hRD'\pi,\pi)_H = \langle D'\pi,P^hRD'\pi\rangle = (RD'\pi,P^hRD'\pi)_V = \|P^hRD'\pi\|_V^2 \tag{8}$$

symmetrisch ist. Bei unseren weiteren Überlegungen dürfen wir $\pi^{h,k}$ durch die normkleinste Lösung $\pi_o^{h,k}$ des Systems (7) ersetzen; für sie gilt

$$\|\pi_o^{h,k}\|_H \le \beta_{h,k}^{-1} \|DP^hu\|_H. \tag{9}$$

(9) impliziert in Verbindung mit (7) und (8)

$$\begin{aligned}\|P^hRD'\pi_o^{h,k}\|_V^2 &= (DP^hu,\pi_o^{h,k})_H \le \|DP^hu\|_H \|\pi_o^{h,k}\|_H \\ &\le \beta_{h,k}^{-1} \|DP^hu\|_H^2 \le \beta_{h,k}^{-1} \|D(P^hu-u)\|_H^2 \le \beta_{h,k}^{-1} \|D\|^2 \|P^hu-u\|_V^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Aus (10) und (5) folgt nun die Behauptung des Satzes.
Man bemerke, daß (4) die eindeutige Auflösbarkeit von (7) sichert.

Zusatz: Bezeichnet man den orthogonalen Projektor von H auf H^k mit Q^k, so gilt für $w = RD'\pi \in W$ (vgl. (2))

$$\|P_o^{h,k}w\|_V \leq \|D\| \|(I-Q^k)\pi\|_H. \tag{11}$$

Beweis: Nach (6) gilt $DP_o^{h,k}w = (I-Q^k)DP_o^{h,k}w$. Demzufolge wird

$$\|P_o^{h,k}w\|_V^2 = (w, P_o^{h,k}w)_V = (RD'\pi, P_o^{h,k}w)_V = (DP_o^{h,k}w, \pi)_H$$

$$= ((I-Q^k)DP_o^{h,k}w, \pi)_H = (DP_o^{h,k}w, (I-Q^k)\pi)_H$$

$$\leq \|D\| \|P_o^{h,k}w\|_V \|(I-Q^k)\pi\|_H,$$

woraus (11) folgt.

Anwendungen: 1. Wir betrachten das Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \|u\|_V^2 - \langle f,u\rangle \rightarrow \text{Min} \tag{12}$$

unter der Nebenbedingung $Du = 0$ und seine Approximation

$$\frac{1}{2} \|u\|_V^2 - \langle f,u\rangle \rightarrow \text{Min},\ u \in V_o^k \cap V^h \tag{13}$$

(s. auch /1/). Bezeichnen wir die Lösungen von (12) bzw. (13) mit u^* bzw. $u^{h,k}$, so gilt offenbar

$$u^* = P_oRf,\ u^{h,k} = P_o^{h,k} Rf.$$

Nach (3) und (11) gilt demzufolge für den Fehler $\|u^* - u^{h,k}\|_V$ dieses Verfahrens die Abschätzung

$$\|u^* - u^{h,k}\|_V = \|(P_o-P_o^{h,k})Rf\|_V \leq \|(I-P_o^{h,k})P_oRf\|_V$$

$$+ \|P_o^{h,k}(P_o-I)Rf\|_V \leq (1+\beta_{h,k}^{-1} \|D\|^2)^{1/2} \|(I-P^h)u^*\|_V$$

$$+ \|D\| \|(I-Q^k)D'^{-1}(R^{-1}u^*-f)\|_H.$$

Unter der Voraussetzung (4) wurde eine ähnliche Abschätzung auf anderem Wege in /2/ bewiesen.

2. Der folgende spezielle Fall

$$H = W,\ D = I - P_o,\ H^k \subset V^h \tag{14}$$

führt auf besonders einfache Verhältnisse. Wegen $RD' = R(I-P_o)' = I$ gilt jetzt $P^h RD'w = P^h w = w$ für alle $w \in H^k$, folglich trifft (4) hier stets mit $\beta_{h,k} = 1$ zu.
Man erhält dann nach (4), (11)

$$\|P_o^{h,k}u - P_o u\|_V \leq \|(P_o^{h,k}-I)P_o u\|_V + \|P_o^{h,k}(I-P_o)u\|_V$$

$$\leq \sqrt{2}\,\|(I-P^h)P_o u\|_V + \|(I-Q^k)(I-P_o)u\|_V.$$

Der Fall (14) kann als eine gemischte Approximation vom "Trefftzschen Typ" angesehen werden.

Literatur

/1/ Beyer, K.: Eine Bemerkung zum Ritzschen Verfahren für die Stokesschen Gleichungen. Beiträge Numer. Math. 8, 39 - 41 (1980)

/2/ Brezzi, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationelle Sér. Rouge Anal. Numér. 8, 129 - 151 (1974)

eingegangen: 11. 04. 1980

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. nat. Klaus Beyer
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 61 - 70 (1980)

Wolfgang Peters

Ein modifiziertes SPA-Verfahren

Das in /3/, /6/, /7/ untersuchte mehrdimensionale Spaltenapproximationsverfahren ("SPA") eignet sich zur Lösung linearer Gleichungssysteme

$$A\,\underline{x} = \underline{b}\ , \quad A: m \times n \tag{1}$$

mit quadratischen oder rechteckigen Koeffizientenmatrizen von beliebigem Rang; bei widersprüchlichen Systemen berechnet es in Abhängigkeit von der Ausgangsnäherung Vektoren, die den Restvektor $\underline{r} = \underline{b} - A\,\underline{x}$ in der Euklidischen Norm minimieren ("Kleinste-Quadrate-Lösungen"). Das Verfahren ist für alle Koeffizientenmatrizen anwendbar, die keine Nullspalten enthalten, wenn man sichert, daß die zu ein- und derselben Indexmenge gehörenden Spalten von A linear unabhängig sind. Die im folgenden beschriebene Modifikation des Verfahrens verzichtet auf diese Forderung, die in praktischen Fällen schwer zu realisieren ist, und stellt somit ein universelles Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit beliebigen Koeffizientenmatrizen dar.

In jedem Schritt des SPA-Verfahrens muß ein "kleines" lineares Gleichungssystem gelöst werden, dessen Koeffizientenmatrix G eine Gramsche Matrix vom Format d × d ist, die aus den Skalarprodukten der zur jeweils aktuellen Indexmenge gehörenden Spalten von A besteht.

Elfving bewies in /2/, daß das SPA-Verfahren auch dann konvergiert, wenn man anstelle von G^{-1} eine verallgemeinerte Inverse zur Lösung dieser Systeme verwendet. Er gab jedoch kein Verfahren zur effektiven Berechnung solcher verallgemeinerten Inversen an. Es scheint bisher nicht beachtet worden zu sein, daß sich das Cholesky-Verfahren, Standardmethode für positiv-definite Matrizen, auch im Fall positiver Semidefinitheit anwenden läßt und zur Berechnung der Moore-Penrose-Inversen nutzbar ist:

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich jede positiv-semidefinite $d \times d$ - Matrix G als Produkt

$$G = L\,L^T \tag{2}$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix L darstellen läßt. Ausgehend von einer positiv-definiten Matrix G_{d-2} der Ordnung d-2 wollen wir alle wichtigen Fälle diskutieren, die bei der Erhöhung der Dimension der Matrix auftreten können. Da G_{d-2} positiv-definit ist, läßt sich nach dem Cholesky-Verfahren eindeutig eine nichtsinguläre untere Dreiecksmatrix L_{d-2} bestimmen, so daß

$$G_{d-2} = L_{d-2}\,L_{d-2}^T \tag{3}$$

ist (vgl. /11/, S. 146 ff.). Wir betrachten nun die Matrix

$$G_{d-1} = \begin{bmatrix} G_{d-2} & \underline{g} \\ \underline{g}^T & g_{d-1,d-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

der Dimension $(d-1) \times (d-1)$ und setzen voraus, daß sie positiv-semidefinit sei. Falls G_{d-1} sogar positiv definit ist, findet man die gewünschte Dreieckszerlegung wieder nach dem gewöhnlichen Cholesky-Verfahren. Ist G_{d-1} jedoch singulär, so läßt sich ihre letzte Spalte als Linearkombination der ersten d-2 Spalten darstellen, so daß

$$g_{d-1,d-1} = \underline{g}^T\,G_{d-2}^{-1}\,\underline{g} \tag{5}$$

sein muß.

Machen wir nun für die gesuchte Dreiecksmatrix L_{d-1} den Ansatz

$$L_{d-1} = \begin{bmatrix} L_{d-2} & 0 \\ \underline{e}^T & \alpha \end{bmatrix} \tag{6}$$

mit der Matrix L_{d-2} aus (3), so muß α wegen

$d-2 = \text{rang}\,(G_{d-1}) = \text{rang}\,(L_{d-1}\,L_{d-1}^T) = \text{rang}\,(L_{d-1})$

und $\text{rang}\,(L_{d-2}) = d-2$ verschwinden. Mit $\alpha = 0$ kann man dann aus

$$L_{d-1}L_{d-1}^T = \begin{bmatrix} L_{d-2}\ L_{d-2}^T & L_{d-2}\underline{e} \\ (L_{d-2}\underline{e})^T & \underline{e}^T\underline{e} \end{bmatrix} = G_{d-1} \tag{7}$$

den Vektor $\underline{e}$ eindeutig als

$$\underline{e} = L_{d-2}^{-1}\,\underline{g} \tag{8}$$

bestimmen, und wegen (5) ist auch die Beziehung $\underline{e}^T\underline{e} = g_{d-1,d-1}$ erfüllt.

Es soll noch die $d \times d$ - Matrix

$$G_d = \begin{bmatrix} G_{d-1} & \underline{h}_1 \\ \underline{h}_1^T & g_{d,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{d-2} & \underline{g} & \underline{h} \\ \underline{g}^T & g_{d-1,d-1} & g_{d-1,d} \\ \underline{h}^T & g_{d-1,d} & g_{d,d} \end{bmatrix} \tag{9}$$

betrachtet werden. Im Fall rang (G_d) = rang (G_{d-2}) gilt

$$g_{d-1,d} = \underline{g}^T\ G_{d-2}^{-1}\ \underline{h}, \tag{10}$$

$$g_{d,d} = \underline{h}^T\ G_{d-2}^{-1}\ \underline{h}, \tag{11}$$

und man muß im Ansatz

$$L_d = \begin{bmatrix} L_{d-2} & & \\ \underline{e}^T & 0 & \\ \underline{f}^T & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{12}$$

$\beta = 0$ setzen, damit die geforderten Rangbeziehungen erfüllt sind. Hier sollen L_{d-2} und $\underline{e}$ wie in (3) bzw. (8) gewählt werden.

Aus der Gleichung

$$L_d L_d^T = \begin{bmatrix} L_{d-2}\, L_{d-2}^T & L_{d-2}\underline{e} & L_{d-2}\underline{f} \\ (L_{d-2}\underline{e})^T & \underline{e}^T\underline{e} & \underline{e}^T\underline{f} \\ (L_{d-2}\underline{f})^T & \underline{f}^T\underline{e} & \underline{f}^T\underline{f} \end{bmatrix} = G_d \tag{13}$$

erhält man dann $\underline{f} = L_{d-2}^{-1}\, \underline{h}$, und wegen (10) und (11) gelten auch die Gleichungen $\underline{e}^T\underline{f} = g_{d-1,d}$, $\underline{f}^T\underline{f} = g_{d,d}$.

Der Fall rang (G_{d-2}) = rang (G_{d-1}) = rang $(G_d) - 1$ ist dadurch charakterisiert, daß $g_{d,d} > \underline{h}^T\, G_{d-2}^{-1}\, \underline{h}$ ist. Man findet die gesuchte Dreiecksmatrix wieder mit Hilfe des Ansatzes (12), wobei β aus $\beta = \sqrt{g_{d,d} - \underline{f}^T\underline{f}}$ berechnet wird.

Jede von der Nullmatrix verschiedene positiv-semidefinite Matrix läßt sich durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen so transformieren, daß ihre aus den ersten r Zeilen und Spalten bestehende Teilmatrix regulär ist. Induktiv kann dann nach obigem Vorbild stets eine LL^T-Zerlegung der Matrix konstruiert werden. Für eine vorgegebene positiv-semidefinite $d \times d$ - Matrix $G = (g_{ik})$ bestimmt man eine entsprechende Dreiecksmatrix $L = (m_{ik})$ wie folgt:

<u>Modifiziertes Cholesky-Verfahren</u>

$k = 1, 2, \ldots, d$ Schrittnummer.

Berechne

$$m_{kk} = g_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{kp}^2.$$

Im Fall $m_{kk}^2 < \varepsilon$ (ε Maschinengenauigkeit) setze

$m_{ik} = 0$ für $i = k, k+1, \ldots, d$.

Andernfalls berechne m_{kk} und

$$m_{ik} = (g_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{ip}\, m_{kp}) \,/\, m_{kk}, \quad i = k+1, \ldots, d.$$

Die Empfindlichkeit des modifizierten Cholesky-Verfahrens gegenüber Störungen der Matrix wurde am Beispiel

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta^2 & 0 & \delta \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 2+\delta^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & \delta & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{1+\delta^2} \end{bmatrix}$$

für verschiedene Werte δ und ε in ALGOL auf dem R 300 getestet. Wird ε zu groß gewählt, so errechnet das Cholesky-Verfahren nicht den exakten Rang 3, sondern 2 (unterer Teil der Tabelle). Um die Genauigkeit der LL^T-Zerlegung zu überprüfen, werden in der folgenden Tabelle die absolut größten Elemente der Matrix $G - LL^T$ angegeben. Man erkennt, daß bei hinreichend kleinem δ gute Resultate erzielt werden.

$\delta \backslash \varepsilon$	10^{-16}	10^{-15}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}
10^{0}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}
10^{-1}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}
10^{-2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10^{-3}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10^{-4}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10^{-5}	0	0	0	0	0	0	0	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
10^{-6}	0	0	0	0	0	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
10^{-7}	0	0	0	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}
10^{-8}	0	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}

Nun soll die Moore-Penrose-Inverse G^+ von G mit Hilfe der LL^T-Zerlegung berechnet werden. Es sei D^T eine Matrix, die aus allen d-dimensionalen Einheitsvektoren besteht, deren Indizes den nicht verschwindenden Diagonalelementen m_{kk} von L entsprechen.

Wenn G den Rang r hat, so ist das Format von D: $r \times d$, und weil die Zeilen von D orthogonal sind, gilt

$$D^+ = D^T \tag{14}$$

sowie

$$D\, D^+ = I_r. \tag{15}$$

Die Matrix

$$F = L\, D^T \tag{16}$$

besitzt vollen Spaltenrang; sie enthält gerade die linear unabhängigen Spalten der Matrix L. Weil der Nullraum von D mit dem Nullraum von L übereinstimmt, folgt aus (14) - (16):

$$F\, D = L\, D^T D = L\, D^+ D = L\, (I_r - P_{N(D)}) = L. \tag{17}$$

F D ist eine Vollrangzerlegung von L, und wegen
$G = L\, L^T = FDD^T F^T = F\, F^T$
steht mit

$$G = F\, F^T \tag{18}$$

auch eine Vollrangzerlegung von G zur Verfügung. Ihre Moore-Penrose-Inverse kann ma[illegible]it

$$F^+ = (F^T F)^{-1}\, F^T \tag{19}$$

nach der Formel

$$G^+ = (F^+)^T\, F^+ = F\, (F^T F)^{-2}\, F^T \tag{20}$$

berechnen.

Auch G^+ ist symmetrisch und positiv-semidefinit (vgl. /5/). Zur numerischen Berechnung von F^+ empfiehlt sich eine der folgenden Methoden (/1/, /10/).

Cholesky-Zerlegung:
Die positiv-definite Matrix $F^T F$ wird in ein Produkt $K\, K^T$ zerlegt, wo K eine untere Dreiecksmatrix ist. Man bildet $(F^T F)^{-1} = (K^{-1})^T K^{-1}$ und berechnet F^+ aus (19).

Householder-Transformation:

Die Anwendung dieser Methode entspricht der Multiplikation von F mit einer orthogonalen Matrix P,

$$P\,F = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R \text{ obere Dreiecksmatrix.}$$

Ist P_r die aus den ersten r Zeilen gebildete Teilmatrix von P, so gilt $F = P_r^T R$ und $F^+ = R^{-1}\,P_r$.

Modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren:

Mit dieser (numerisch stabilen) Variante des bekannten Orthogonalisierungsverfahrens wird F in der Form $F = N\,R$ zerlegt, wobei die Spalten von N orthonormiert sind und R wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. Man erhält $F^+ = R^{-1}\,N^T$.

Als Beispiel soll die Moore-Penrose-Inverse der positiv-semidefiniten Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

berechnet werden. Man zerlegt diese Matrix nach dem modifizierten Cholesky-Verfahren in ein Produkt LL^T mit

$$L = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D}.$$

Dann gilt $G = F\,F^T$, und aus

$$F^+ = (F^TF)^{-1}F^T = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 0 \\ -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 6\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

bekommt man die Moore-Penrose-Inverse

$$G^+ = (F^+)^T F^+ = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & -3 & 18 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Modifikation des Cholesky-Verfahrens bekommt man ein

Universelles SPA-Verfahren

$k = 1, 2, \ldots$ Schrittnummer,

$\underline{x}^{(0)}$ Startvektor,

$1 \leq d < n$, d vorzugebende Dimension der Unterräume von Spaltenvektoren,

$K^{(k)} = \left\{ l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots, l_d^{(k)} \right\}$ zyklische Indexmengen.

Berechne $\underline{u} = (u_j^{(k)})$, $j \in K^{(k)}$ aus dem System $G\,\underline{u} = \underline{c}$, wobei

$G = (\underline{s}_i, \underline{s}_j)$, $i,j \in K^{(k)}$ und $\underline{c} = ((\underline{r}^{(k)}, \underline{s}_i))$, $i \in K^{(k)}$ ist;

man erhält

$\underline{u} = G^+ \underline{c}$.

Bestimme den neuen Näherungsvektor:

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^{(k)} + u_i^{(k)} & i \in K^{(k)} \\ x_i^{(k)} & i \notin K^{(k)}. \end{cases}$$

Ebenso wie das SPA-Verfahren, kann das in /9/ beschriebene PSH-Verfahren zu einem universellen Verfahren verallgemeinert werden.

Die Berechnung der Moore-Penróse-Inversen einer symmetrischen und positiv-semidefiniten Matrix mit Hilfe des modifizierten Cholesky-Verfahrens ist auch als selbständige Methode anwendbar.

Literatur

/1/ Ben-Israel, A., and Greville, T. N. E.: Generalized Inverses: Theory and Applications. London - Sydney - Toronto 1974

/2/ Elfving, T.: Group-Iterative Methode for Consistent and Inconsistent Linear Equations. Report LITH-MAT-R-1977-11, Linköping 1977

/3/ Kiesewetter, H., und Maeß, G.: Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Berlin 1974

/4/ Kuhnert, F.: Pseudoinverse Matrizen. Leipzig 1974

/5/ Lewis, T. O., and Newman, T. G.: Pseudoinverses of Positive Semidefinit Matrices. SIAM J. Appl. Math. 16, 701 - 703 (1968)

/6/ Maeß, G.: Lösung linearer Gleichungssysteme durch Spaltenapproximation, Wiss. Z. Univ. Rostock Math.-Natur. Reihe, 23, 759 - 761 (1974)

/7/ Maeß, G., und Peters, W.: Lösung inkonsistenter linearer Gleichungssysteme und Bestimmung einer Pseudoinversen für rechteckige Matrizen durch Spaltenapproximation. Z. Angew. Math. Mech. 58, 233 - 237 (1978)

/8/ Penrose, R.: A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51, 406 - 413 (1955)

/9/ Peters, W.: Lösung linearer Gleichungssysteme durch Projektion auf Schnitträume von Hyperebenen und Berechnung der verallgemeinerten Inversen. Beiträge zur Numer. Math. 5, 129 - 146 (1976)

/10/ Shinozaki, N., Sibuya, M., and Tanabe, K.:
Numerical algorithms for the Moore-Penrose inverse of a matrix: direct methods. Ann. Inst. Statist. Math., 24, 193 - 203 (1972)

/11/ Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Berlin - Heidelberg - New York (1976)

eingegangen: 10. 10. 1979

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Wolfgang Peters
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 71 - 76 (1980)

Hermann Friedrich

Zur Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedenen Wurzeln von algebraischen Gleichungen

Bei der Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen ist es oftmals notwendig oder wünschenswert, vor dem Start des Lösungsalgorithmus (s. Stoer /4/) einige Informationen über die Art der gesuchten Wurzeln zu erhalten. Im folgenden wird ein Algorithmus mit einem entsprechenden Rechenprogramm zur Bestimmung der Anzahlen der voneinander verschiedenen reellen und komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen angegeben.
Die algebraische Gleichung n-ten Grades habe die Form

$$P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0 \tag{1}$$

mit vorerst reellen Koeffizienten c_j und $c_n \neq 0$. Werden mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln von (1) bezeichnet, so sind die Potenzsummen s_h der Wurzeln durch

$$\begin{aligned} s_0 &= n \\ s_h &= \alpha_1^h + \alpha_2^h + \dots + \alpha_n^h \quad \text{für} \quad h = 1,2,\dots \end{aligned} \tag{2}$$

erklärt. Mittels der Newtonschen Formeln lassen sich diese Potenzsummen s_h rekursiv aus den Koeffizienten c_j der algebraischen Gleichung (1) berechnen:

$$h \cdot s_{n-h} + \sum_{k=1}^{h} c_{n-h+k} s_k = 0 \quad \text{für} \quad h = 1,2,\dots \tag{3}$$

mit

$$s_0 = n \quad \text{und} \quad c_l = 0 \quad \text{für} \quad l < 0.$$

Bilden wir mit den Potenzsummen s_h die symmetrische Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

dann gelten nach Obreschkoff /1/ und Gantmacher /2/ folgende Aussagen:

<u>Satz 1:</u> Die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln der algebraischen Gleichung n-ten Grades (1) ist gleich dem Rang ϱ der Matrix A.

<u>Satz 2:</u> Die Anzahl der voneinander verschiedenen reellen Wurzeln der algebraischen Gleichung n-ten Grades (1) ist gleich der Signatur σ der Matrix A.

Die beiden Sätze sind Grundlage für den Aufbau eines Algorithmus zur Berechnung der Anzahlen der voneinander verschiedenen Wurzeln von algebraischen Gleichungen. Dabei wird die symmetrische Matrix A mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus und unter Anwendung gleichstelliger Umordnungen (s. Zurmühl /3/, Stoer /4/) in eine Dreiecksmatrix B transformiert, die den gleichen Rang ϱ und dieselbe Signatur σ besitzt. Nach einer derartigen Transformation seien in der Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} \bar{s}_{0,0} & \bar{s}_{0,1} & \dots & \bar{s}_{0,n-1} \\ 0 & \bar{s}_{1,1} & \dots & \bar{s}_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{s}_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

die Hauptdiagonalelemente $\bar{s}_{0,0},\dots,\bar{s}_{\varrho-1,\varrho-1}$ ungleich Null und die Elemente der nachfolgenden $(n-1-\varrho)$ Zeilen gleich Null. Bezeichnen wir mit m die Anzahl der Minuszeichen in der Folge der Hauptdiagonalelemente $\bar{s}_{j,j}$ $(j=0,1,\ldots\varrho-1)$ der Matrix B,

g die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln von (1),

r die Anzahl der voneinander verschiedenen reellen Wurzeln von (1), (6)

d die Anzahl der voneinander verschiedenen Paare konjugiert komplexer Wurzeln von (1),

so ergibt sich bei Beachtung der Sätze 1 und 2:

$$g = \varrho; \; r = \sigma = \varrho - 2m; \; d = m. \tag{7}$$

Hat die vorgelegte algebraische Gleichung n-ten Grades (1) komplexe Koeffizienten c_j $(j=0,1,\ldots,n)$, dann ergibt sich unter Beachtung von (2) und (3) eine Matrix A^*, deren Elemente gleichfalls komplex sind. In diesem Falle werde mit einem bekannten Verfahren (s. Ralston-Wilf /6/) der Rang l dieser komplexen Matrix A^* bestimmt. Bezeichnen wir zusätzlich zu (6) mit

k die Anzahl der voneinander verschiedenen komplexen Wurzeln (außer den Paaren konjugiert komplexer Wurzeln)

einer vorgelegten algebraischen Gleichung n-ten Grades, so gilt (s. Gantmacher /2/)

$$r + k + 2d = l. \tag{8}$$

Im weiteren wird das Polynom $P_n(x)$ mit den komplexen Koeffizienten c_j $(j=0,1,\ldots,n;\; c_n \neq 0)$ mit dem Polynom $\bar{P}_n(x)$, dessen Koeffizienten $\bar{c}_j$ die konjugiert komplexen Größen zu den entsprechenden c_j sind, multipliziert. Wir erhalten ein Polynom 2n-ten Grades mit reellen Koeffizienten d_i:

$$Q_{2n}(x) = P_n(x) \cdot \bar{P}_n(x) = d_{2n}x^{2n} + \ldots + d_1x + d_o. \tag{9}$$

Für die algebraische Gleichung 2n-ten Grades $Q_{2n}(x) = 0$ kann mit Hilfe des oben angeführten Algorithmus der Rang ϱ der zugehörigen Matrix A und die Anzahl m der Vorzeichenwechsel der Hauptdiagonalelemente in der transformierten Matrix B bestimmt werden. Da $\bar{P}_n(x) = 0$ die Konjugierten der Wurzeln von $P_n(x) = 0$

(Fortsetzung auf Seite 75)

Tabelle 1: Beispiele

	Algebraische Gleichungen mit reellen Koeffizienten	Wurzeln	g	r	d
1.	$x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 7 = 0$ (s. Zurmühl /5/)	$x_{1,2} = 1{,}7161 \pm 1{,}8554i$ $x_{3,4} = -0{,}2161 \pm 1{,}0243i$	4	0	2
2.	$3x^5 - 2x^4 + x^2 - 7x - 4 = 0$ (s. Zurmühl /5/)	$x_1 = 1{,}4908$; $x_2 = -0{,}9038$; $x_3 = -0{,}5855$; $x_{4,5} = 0{,}3326 \pm 1{,}2568i$	5	3	1
3.	$x^7 - 28x^6 + 322x^5 - 1960x^4 + 6769x^3 - 13133x^2 + 13068x - 5040 = 0$ (s. Conte-de Boor /7/)	$x_1 = 1{,}0014$; $x_2 = 1{,}9689$; $x_3 = 3{,}3183$; $x_4 = 3{,}5051$; $x_5 = 7{,}0599$; $x_{6,7} = 5{,}5732 \pm 0{,}2641i$	7	5	1
4.	$x^8 - 170x^6 + 7392x^4 - 39712x^2 + 51200 = 0$ (s. Conte-de Boor /7/)	$x_{1,2} = \pm 10$; $x_{3,4} = \pm 8$; $x_{5,6} = \pm 2$; $x_{7,8} = \pm\sqrt{2}$	8	8	0
5.	$x^{10} - 6x^9 + 17x^8 - 24x^7 + 8x^6 + 32x^5 - 56x^4 + 32x^3 + 16x^2 - 32x + 16 = 0$	$x_{1,2,3,4} = 1 + i$ $x_{5,6,7,8} = 1 - i$ $x_{9,10} = 1$	3	1	1

Tabelle 2: Beispiele

	Algebraische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten	Wurzeln	g	r	k	d
1.	$x^3 - 8x^2 + (23-4i)x - (20-10i) = 0$	$x_{1,2} = 2 - i;\ x_3 = 4 + 2i$	2	0	2	0
2.	$x^5 + (-8+5i)x^4 + (18-37i)x^3 +$ $(10+99i)x^2 + (-87-109i)x$ $+ (90+30i) = 0$	$x_1 = 3;\ x_{2,3} = 2 \pm i;$ $x_4 = -2i;\ x_5 = 1 - 3i$	5	1	2	1
3.	$x^3 - 6ix^2 - 12x + 8i = 0$	$x_{1,2,3} = 2i$	1	0	1	0
4.	$x^6 - (2+7i)x^5 + (-18+15i)x^4$ $+ (40+27i)^3 + (31-55i)x^2$ $- (60+24i)x + (-36+36i) = 0$	$x_1 = -1;\ x_{2,3} = 2;$ $x_4 = -1 + i;\ x_{5,6} = 3i$	4	2	2	0

als Nullstellen hat, treten bei $Q_{2n}(x) = 0$ die reellen Wurzeln von $P_n(x) = 0$ als reelle Doppelwurzeln und die komplexen Wurzeln von $P_n(x) = 0$ als Paare konjugiert komplexer Wurzeln auf. Hat $P_n(x) = 0$ ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln, so tritt bei $Q_{2n}(x) = 0$ ein entsprechendes konjugiert komplexes Doppelwurzelpaar auf. Damit ergibt sich

$$r + 2k + 2d = \varrho; \quad k + d = m \tag{10}$$

und schließlich

$$g = 1; \; r = \varrho - 2m; \; k = \varrho - 1; \; d = m + 1 - \varrho. \tag{11}$$

Für die beschriebenen Algorithmen sind FORTRAN-Programme erarbeitet worden, mit denen zahlreiche Testbeispiele auf einer BESM 6 durchgerechnet wurden. Einige Beispiele sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

Literatur

/1/ Obreschkoff, N.: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome. Berlin 1963

/2/ Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung. Teil I und II. Berlin 1965 und 1966

/3/ Zurmühl, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1964

/4/ Stoer, J.: Einführung in die numerische Mathematik I. Berlin - Heidelberg - New York 1976

/5/ Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin - Heidelberg - New York 1965

/6/ Ralston, A., und Wilf, H. S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner I. München - Wien 1972

/7/ Conte, S.D., and de Boor, C.: Elementary numerical analysis. New York - St. Louis 1972

eingegangen: 01. 03. 1980

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. H. Friedrich
Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik
Akademie der Wissenschaften der DDR
Mohrenstraße 39
DDR-1080 Berlin

Rostock. Math. Kolloq. 15, 77 - 80 (1980)

Hans-Dietrich O. F. Gronau

The 2-(11,5,2) and 3-(12,6,2) Designs

A t-(v,k,λ) design is a system of distinct k-element subsets (called blocks) of a v-element set K such that every t-element subset of K occurs exactly λ times in the blocks. Two t-(v,k,λ) designs M_1 and M_2 are called isomorphic if and only if there is a permutation of the elements of K which have the property that every block B_i of M_1 is mapped into some block B_j of M_2.
In this paper we present the following results.

Theorem 1: There is exactly one nonisomorphic 2-(11,5,2) design.

Theorem 2: There is exactly one nonisomorphic 3-(12,6,2) design.

We will use the following set K:

$$K = \begin{cases} \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,+\} & \text{if } v = 11, \\ \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,+,-\} & \text{if } v = 12. \end{cases}$$

Let b and r denote the number of blocks and the number of blocks containing a fixed element. If $v = 12$ let λ_2 denote the number of blocks containing a fixed pair of elements of K. By the usual formulas we obtain

$$\begin{aligned} &2\text{-}(11,5,2) : \quad b = 11,\ r = 5, \quad \text{and} \\ &3\text{-}(12,6,2) : \quad b = 22,\ r = 11,\ \lambda_2 = 5. \end{aligned}$$

We always will give the designs in terms of $k \times b$-matrices. First we give an example of a design of these types.

2-(11,5,2):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&2&2&2&3&3&4 \\ 2&2&3&4&5&3&4&5&4&5&5 \\ 3&6&7&8&6&8&6&7&6&6&7 \\ 4&7&0&9&9&9&0&9&7&8&8 \\ 5&8&+&0&+&+&+&0&9&0&+ \end{pmatrix},$$

3-(12,6,2):

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&2&2&2&2&2&2&3&3&3&4&7 \\ 2&2&2&2&2&3&3&3&4&4&5&3&3&3&4&4&5&4&4&5&5&8 \\ 3&3&4&5&6&4&5&6&5&6&6&4&5&6&5&6&6&5&6&6&6&9 \\ 4&7&8&9&7&9&7&8&7&7&8&7&8&9&7&8&7&8&7&7&0&0 \\ 5&8&+&0&0&0&+&0&8&9&9&0&0&+&9&9&8&9&8&9&+&+ \\ 6&9&-&+&-&-&-&+&0&+&-&+&-&-&-&0&+&+&-&0&-&- \end{pmatrix}.$$

<u>Proof of Theorem 1</u>: For a particular block of a 2-(11,5,2) design M let n_i, $0 \le i \le 5$, be the number of blocks that intersect it in exactly i elements. Then $n_5 = 1$ and

$$\sum_{i=j}^{4} \binom{i}{j} n_i = \binom{5}{j}(\lambda_j - 1), \quad j = 0,1,2,$$

where $\lambda_o = b$ and $\lambda_1 = r$. These equations have an unique solution in integers: $n_o = n_1 = n_3 = n_4 = 0$ and $n_2 = 10$.

Without loss of generality we may assume that 12345 is one of the blocks of M. Since $\lambda = 2$ it follows that M has the following structure:

$$M = \left(\begin{array}{c|c|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ \cline{2-11} 3 & & & & & & & & & & \\ 4 & A & & B & & & C & & & D & \\ 5 & & & & & & & & & & \end{array}\right)$$

(A,B,C,D) is a 2-(6,3,2) design. Rasch and Herrendörfer /1/ showed that the only nonisomorphic 2-(6,3,2) design is the following one:

$$\begin{pmatrix} 6&6&6&6&6&7&7&7&8&8 \\ 7&7&8&9&0&8&9&0&9&9 \\ 8&9&0&+&+&+&0&+&0&+ \end{pmatrix}.$$

Without loss of generality let

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Also the block 12678 has the same intersection numbers. Hence, the blocks of (B,C) have each exactly one element with A in common, while the blocks of D have each exactly two elements with A in common. Using a suitable permutation of $\{3,4,5\}$, we may assume without loss of generality that

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 8 \\ 9 & 0 & + \end{pmatrix} .$$

Furthermore, we may assume that the block 69+ occurs in B; using (12) if necessary. Then 60+ appears in C and the blocks 790 and 70+ (890 and 89+) occur in different matrices of $\{B,C\}$. Simple counting of the frequency of pairs yields that B consists (in any order) of the blocks 69+, 70+, 890 and C consists of the blocks 60+, 790, 89+. By the same argument the order of the blocks in B and C follows uniquely. So we get M_1.

<u>Proof of Theorem 2:</u> In analogy to the proof of Theorem 1 we obtain the intersection numbers:
$n_0 = 1$, $n_1 = n_2 = n_4 = n_5 = 0$, $n_3 = 20$.
$n_0 = 1$ implies that the design contains with any block also its complement with respect to K. Furthermore,
$M(1) = \{X: X \cup \{1\} \in M,\ 1 \notin X\}$ is a 2-(11,5,2) design. Noting Theorem 1, the blocks of M containing the element 1 are unique (with respect to isomorphism). Since all other blocks of M are complements of those ones containing 1, M is determined completely; see M_2.

Reference

/1/ Rasch, D., und Herrendörfer, G.: Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten (v,k)-Familien. Rostock. Math. Kolloq. 8, 71 - 82 (1978)

received: May 23, 1980

Author's address:

Dr. rer. nat. Hans-Dietrich O. F. Gronau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 81 - 90 (1980)

Dietlinde Lau

Basen und Ordnungen der maximalen Klassen zweier mehrsortiger Funktionenalgebren

1. Sei $\alpha \in \{0, 2\}$. Mit P_{Σ_α} bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f^{n,m}$ ($n, m \geq 0$) der Form

$$f^{n,m}: \{0, 1\}^n \times \{\alpha , 3\}^m \longrightarrow \{0, 1\}.$$

Die Funktionen aus P_{Σ_α} werden von uns mit Hilfe von Formeln über den Variablenalphabeten $X = \{x, x_1, x_2, \ldots\}$ und $Y = \{y, y_1, \ldots\}$ beschrieben, wobei die Variablen aus X mit Werten 0, 1 und die aus Y mit Werten α, 3 belegt werden können. Die nullstelligen Funktionen aus P_{Σ_α} bezeichnen wir mit 0 bzw. 1. Funktionen, die sich nur durch fiktive Variablen unterscheiden, werden von uns nicht unterschieden.
Als Operationen über Funktionen aus P_{Σ_α} sind das Umnumerieren von Variablen, das Identifizieren von Variablen, welche Werte aus ein und derselben Menge annehmen, das Hinzufügen bzw. Weglassen von fiktiven Variablen und das Ersetzen einer Variablen durch eine Funktion, deren Wertebereich im Wertebereich der Variablen enthalten ist, zugelassen. Die mit Hilfe der eben genannten Operationen aus Funktionen der Teilmenge A von P_{Σ_α} konstruierbaren Funktionen heißen Superpositionen über A. Die Menge aller Superpositionen über $A \subseteq P_{\Sigma_\alpha}$ sei mit $[A]$ bezeichnet. Die Menge P_{Σ_α} mit den oben genannten Operationen bildet eine Algebra, die wir ebenfalls mit P_{Σ_α} bezeichnen. Definiert und erstmalig untersucht wurde diese Algebra in /2/.

Insbesondere findet man in /2/ sämtliche maximalen (fast-vollständigen) Klassen von P_{Σ_α} beschrieben, für die wir im folgenden Basen und Ordnungen bestimmen wollen. Alle dabei verwendeten Begriffe und Bezeichnungen, die hier nicht definiert werden, entnehme man den Arbeiten /1/, /2/ und /3/. Insbesondere verwenden wir bei der Definition von Funktionen aus P_{Σ_α} die Symbole $\vee$, $\wedge$, $+$, $\cdot$, $\bar{\ }$, die in /1/ bei der Beschreibung Boolescher Funktionen Verwendung fanden. Außerdem setzen wir im folgenden die Kenntnis der Basen und der Ordnungen der abgeschlossenen Mengen Boolescher Funktionen (der Postschen Klassen) voraus.

2. Wir kommen nun zur Beschreibung der maximalen Klassen von P_{Σ_α}, die wir etwas abgewandelt aus /2/ übernehmen. Dabei bezeichne für $a \in \{\alpha, 3\}$ e_a die durch

$$e_a(y) = \begin{cases} 1 \text{ für } y = a \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

und $f_{/a}$ $(\in P_2)$ die zu $f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha}$ gehörende und durch

$$f_{/a}(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n,a,\ldots,a)$$

definierte Funktion.

Wir sagen, eine Funktion $f^{n,m}$ bewahrt eine gewisse Teilmenge G von $\{g(x,y) \mid g \in P_{\Sigma_\alpha}\}$ genau dann, wenn für beliebige $g_1, g_2, \ldots, g_{n+m} \in G \cup \{y\}$ stets $f(g_1,g_2,\ldots,g_{n+m}) \in G$ gilt.

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von P_2, $a \in \{\alpha, 3\}$, $\{b,\sigma\} \subseteq \{0,1\}$ und $h \in \{0, 1, e_\alpha, e_3\}$. Dann gelte:

$$K_{a,A} := \{f \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f_{/a} \in A\},$$

$$K_\sigma := \bigcup_{n,m \geq 0} \{f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f_{/2}(x_1,\ldots,x_n) = (f_{/3}(x_1^\sigma,\ldots,x_n^\sigma))^\sigma\},$$

$$K(h) := \{f \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f \text{ bewahrt } \{0, 1, e_\alpha, e_3\} \setminus \{h\}\},$$

$$K := \{f \in P_{\Sigma_\alpha} \; \{f_{/2}, f_{/3}\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$$

$$\vee (\exists\, i: \{f_{/2}, f_{/3}\} \subseteq \{x_i, \bar{x}_i\})\},$$

$$K(a,b) := \{f \in P_{\Sigma_2} \mid f \text{ bewahrt } \{g(x,y) \in P_{\Sigma_2} \mid g_{/a} \in \{0, 1\}$$

$$\vee ((g_{/a} \in \{x, \bar{x}\} \wedge 1 \neq a) \Rightarrow g_{/1} \in \{x, b\})\}\}.$$

In /2/ wurde der folgende Satz bewiesen:

<u>Satz 1:</u> In P_{Σ_α} gibt es für $\alpha = 0$ genau 10[*)] und für $\alpha = 2$ genau 21 maximale Klassen. Diese sind

a) für $\alpha = 0$:

$K_{0,A}$ ($A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$), $K_{3,B}$ ($B \in \{S, T_1\}$),

K_0, $K(1)$ und P_2;

b) für $\alpha = 2$:

$K_{a,A}$ ($a \in \{2,3\}$, $A \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$), $K_6(\sigma \in \{0,1\})$,

$K(h)$ ($h \in \{0, 1, e_2, e_3\}$), K, $K(a,b)$ ($a \in \{2,3\}$, $b \in \{0,1\}$).

3. Bei der folgenden Herleitung von Erzeugendensystemen für die maximalen Klassen von P_{Σ_α} verwenden wir in diesem Abschnitt einige Abkürzungen:

$\tilde{c}^n := (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ($c \in \{x, y, a, b, \ldots\}$),

$E_a^m := e_a(y_1) \cdot e_a(y_2) \cdot \ldots \cdot e_a(y_m)$ ($a \in \{\alpha, 3\}$),

---

*) In /2/ sind noch 2 Klassen mehr angegeben, die jedoch beim Vollständigkeitsbeweis keine Verwendung fanden. Man kann zeigen, daß es sich bei $K(e_0)$ und $K(e_3)$ um echte Teilmengen der maximalen Klasse $K_{0,M}$ handelt.

$E^m_{\tilde{\tau}} := e_{\tau_1}(y_1) \cdot e_{\tau_2}(y_2) \cdot \ldots \cdot e_{\tau_m}(y_m)$ $(\tilde{\tau} \in \{\alpha, 3\}^m)$,

$X^n_{\tilde{\sigma}} := x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$ $(\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^n)$,

$$A_a^{f^{n,m}} := \bigvee_{\substack{\tilde{\sigma},\tilde{\tau} \\ f(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})=1 \\ \exists i:\tau_i=a}} X^n_{\tilde{\sigma}} \cdot E^m_{\tilde{\tau}}, \quad A^{f^{n,m}}_{\alpha,3} := \bigvee_{\substack{\tilde{\sigma},\tilde{\tau} \\ f(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})=1 \\ \exists i,j:\tau_i=\alpha\wedge\tau_j=3}} X^n_{\tilde{\sigma}} \cdot E^m_{\tilde{\tau}}.$$

Ergibt sich aus dem Zusammenhang die Stellenzahl der Tupel bzw. der Funktionen, so lassen wir die oberen Indizes weg.

<u>Lemma 1:</u> Sei $x \in A = [A] \subseteq P_2$ und $a \in \{\alpha, 3\}$. Dann ist $A \cup \{x \vee x_1x_2\bar{e}_a,\ x \vee \bar{x}_1\bar{e}_a,\ xe_a\}$ ein Erzeugendensystem für $K_{a,A}$.

<u>Beweis:</u> O.B.d.A. sei $a = 2 = \alpha$. Eine beliebige Funktion $f^{n,m}$ aus P_{Σ_α} gehört genau dann zu $K_{2,A}$, wenn es eine n-stellige Funktion g aus A mit $f(\tilde{x},\tilde{y}) = g(\tilde{x}) \cdot E_2^m \vee A_3^f$ gibt, d. h., f ist eine Superposition über g, xE_2^m $(\in [\{xe_2\}])$ und

$x \vee A_3^f$ $(\in [\{H \mid H(x,\tilde{x},y) = x \vee h(\tilde{x})e_3(y),\ h \in P_2\} \cup \{xe_2\}] =: B)$.

Für beliebige $H^{n_i,1} \in B$, $i = 1, 2$, gilt stets

$$H_1(x, H_2(x,\tilde{x}^{n_2}), x_{n_2+1}, \ldots, x_{n_1+n_2-1}, y)$$
$$= x \vee h_1(h_2(\tilde{x}^{n_2}), x_{n_2+1}, \ldots, x_{n_1+n_2-1}) \cdot e_3(y).$$

Hieraus und aus $[\{x_1x_2, \bar{x}_1\}] = P_2$ folgt $B \subseteq [\{x \vee x_1x_2e_3,\ x \vee \bar{x}_1e_3,\ xe_2\}]$. Also ist $A \cup \{x \vee x_1x_2e_3,\ x \vee \bar{x}_1e_3,\ xe_2\}$ ein Erzeugendensystem für $K_{2,A}$. $\square$

<u>Satz 2:</u> Sei $a \in \{\alpha, 3\}$. Dann gilt

(1) $K_{a,T_0} = [\{x_1x_2,\ x_1+x_2,\ \bar{e}_a\}]$,

(2) $K_{a,T_1} = [\{x_1 \vee x_2,\ x_1+x_2+1,\ e_a\}]$,

(3) $K_{a,M} = [\{x_1x_2,\ x_1 \vee x_2,\ e_a,\ \bar{x} \cdot \bar{e}_a\}]$,

(4) $K_{a,S} = [\{x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,\ xe_a\}]$,

(5) $K_{a,L} = [\{x_1+x_2,\ 1,\ x_1x_2\bar{e}_a\}]$.

<u>Beweis:</u> (1) ergibt sich aus $T_0 = [\{x_1x_2,\ x_1+x_2\}]$,

$x_1 \vee x_2 \in T_0, x_1\bar{x}_2 \in T_0,\ \{x \vee x_1x_2\bar{e}_a,\ x \vee \bar{x}_1\bar{e}_a\}$

$$\subset [\{x_1 \vee x_2,\ x_1x_2,\ x_1\bar{x}_2,\ \bar{e}_a\}]$$

und Lemma 1.

(2) folgt unmittelbar unter Verwendung des Dualitätsprinzips aus (1).

(3) erhält man aus $M = [\{x_1x_2,\ x_1 \vee x_2,\ 0,\ 1\}]$, $(\bar{x}e_a) \cdot \bar{e}_a = 0$,

$\bar{0} \cdot \bar{e}_a = \bar{e}_a,\ e_a \vee \bar{e}_a = 1,\ \{x \vee x_1x_2\bar{e}_a,\ x \vee x_1\bar{e}_a\}$

$$\subset [\{x_1x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \bar{e}_a,\ \bar{x} \cdot \bar{e}_a\}]$$

und Lemma 1.

(4) ergibt sich aus $S = [\{x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\}]$, $\bar{x} \in S$,

$h(x_1,x_2,x_3) := x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \in S$,

$x \vee x_1x_2\bar{e}_a = h(x, \overline{x \cdot \bar{e}_a \cdot e_a}, h(x_1,x_2,x \cdot e_a)) = g(x,x_1,x_2,y)$,

$g(x,\bar{x}_1,\bar{x}_2,y) = x \vee \bar{x}_1 \cdot e_a$ und Lemma 1.

(5) folgt aus $L = [\{x_1+x_2,\ 1\}]$, $\bar{x} \in L$,

$x \vee x_1x_2\bar{e}_a = x + x_1x_2\bar{e}_a + xx_1x_2\bar{e}_a \in [\{x_1+x_2,\ x_1x_2\bar{e}_a\}]$,

$x \vee \bar{x}_1\bar{x}_1\bar{e}_a = x \vee \bar{x}_1e_a,\ \overline{\bar{x} \vee 1 \cdot 1 \cdot \bar{e}_a} = xe_a$ und Lemma 1. □

<u>Satz 3:</u> (1) $K_0 = [\{x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,\ e_3,\ x(e_\alpha(y_1) \vee e_3(y_2))\}]$,

(2) $K_1 = [\{\overline{x_1 \vee x}_2,\ e_2(y_1) \vee e_3(y_2)\}]$.

<u>Beweis:</u> Aus der Definition der Klasse K_σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, folgt leicht, daß eine Funktion $f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha}$ genau dann zu K_σ gehört,

wenn es eine (n+1)-stellige Funktion g aus S für $\sigma = 0$ bzw. eine n-stellige Funktion h aus P_2 für $\sigma = 1$ mit der Eigenschaft

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) := \begin{cases} g(\tilde{x}, e_3(y_1))(E_\alpha^m \vee E_3^m) \vee A^f_{\alpha,3} & \text{für } \sigma = 0 \\ h(\tilde{x})\cdot(E_2^m \vee E_3^m) \vee A^f_{2,3} & \text{für } \sigma = 1 \end{cases}$$

gibt. Die Funktion f ist also eine Superposition über $g(\tilde{x}, e_3)$ $(\in [S \cup \{e_3\}] = [\{x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3, e_3\}])$ bzw. h $(\in P_2 = [\{\overline{x_1 \vee x_2}\}])$,

$x\cdot(E_\alpha^m \vee E_3^m) = x\cdot(E_\alpha^{m-1} \vee E_3^{m-1})\cdot(e_\alpha(y_{m-1}) \vee e_3(y_m))\cdot(e_\alpha(y_m) \vee e_3(y_{m-1}))$

$(\in [\{x\cdot(e_\alpha(y_1) \vee e_3(y_2))\}])$ und $x \vee A^f_{\alpha,3}$ $(\in [\{x \vee x_1x_2e_\alpha(y_1)e_3(y_2),$
$\bar{x}, e_\alpha, e_3\}])$.

Hieraus ergibt sich die Behauptung (2) unmittelbar. (1) folgt dann unter Berücksichtigung von

$x \vee x_1x_2e_\alpha(y_1)e_3(y_2) = h(x, \overline{\bar{x}\cdot(e_\alpha(y_2) \vee e_3(y_1))}, h(x,x_1,x_2))$, wobei $h(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \in S$. □

<u>Satz 4:</u> (1) $K(1) = [\{x\cdot(e_\alpha(y_1) \vee e_3(y_2)), e_\alpha, e_3, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3,$
$x_1 \vee \bar{x}_2\}]$,

(2) $K(0) = [\{x \vee e_2(y_1)e_3(y_2), e_2, e_3, x_1\bar{x}_2, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}]$.

<u>Beweis:</u> O.B.d.A. sei $\alpha = 2$. Eine Funktion $f^{n,m}$ aus P_{Σ_2} gehört offensichtlich genau dann zu K(1), wenn es eine (n+1)-stellige Funktion $g \in F_4^2 = [\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee \bar{x}_2\}]$ mit

$f(\tilde{x},\tilde{y}) = g(\tilde{x}, e_2(y_1))(E_2^m \vee E_3^m) \vee A^f_{2,3}$ gibt. Sicher ist

$g(\tilde{x}, e_2) \in [\{e_2\} \cup F_4^2]$ und $x(E_2^m \vee E_3^m) \in [\{x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2))\}]$.

Außerdem kann man sich überlegen, daß

$x \vee A^f_{2,3} \in [\{x \vee x_1x_2, x \vee \bar{x}_1, e_2, e_3\}]$ gilt. Die Funktionen

$x \vee x_1x_2$, $x \vee \bar{x}_1$ gehören zu F_4^2. Folglich ist f eine Superposition über den oben angegebenen Funktionen. Die Aussage (2) erhält man durch Anwendung des Dualitätsprinzips aus (1). □

<u>Satz 5:</u> Für $a \in \{2,3\}$ gilt $K(e_a) = [\{x_1x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \bar{x}e_a,\ \bar{x} \vee e_a\}]$.

<u>Beweis:</u> O.B.d.A. sei $a = 3$. Sei $f^{n,m} \in K(e_3)$. Dann folgt für beliebiges $\tilde{c} \in \{0,1\}^n$ aus $f_{/2}(\tilde{c}) = 1$ stets $f_{/3}(\tilde{c}') = 1$ für alle $\tilde{c}' \geq \tilde{c}$ ($\geq$ sei hier wie in /1/ definiert). Umgekehrt gehört jede Funktion mit dieser Eigenschaft zu $K(e_3)$. Also ist $f^{n,m}$ genau dann eine Funktion aus $K(e_3)$, wenn eine n-stellige Funktion g aus M und n-stellige Funktionen p und q aus P_2 mit

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = g(\tilde{x})(p(\tilde{x})\cdot E_2^m \vee E_3^m) \vee q(\tilde{x})\cdot E_3^m \vee A_{2,3}^f \qquad (*)$$

existieren. Offensichtlich sind $0,\ e_3,\ 1,\ e_2(y_1) \vee e_3(y_2)$ und $x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2))$ Superpositionen über $\{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}e_a, \bar{x} \vee e_a\}$. Außerdem gilt:

$$E_2^m \vee E_3^m \in [\{x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2)),\ 1\}],$$
$$x(E_2^m \vee E_3^m) \vee E_3^m = xE_2^m \vee E_3^m \in [\{E_2^m \vee E_3^m,\ x_1 \vee x_2,\ x_1x_2,\ e_3\}],$$
$$pE_2^m \vee E_3^m \in [\{xE_2^m \vee E_3^m,\ x_1 \vee x_2,\ x_1x_2,\ \bar{x} \vee e_3\}],$$
$$g \in M = [\{x_1 \vee x_2,\ x_1x_2,\ 0,\ 1\}],$$
$$qE_3^m \in [\{x_1 \vee x_2,\ x_1x_2,\ \bar{x}e_3\}] \quad \text{und}$$
$$A_{2,3}^f \in [\{x_1x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \bar{x}e_3,\ e_3\}].$$

Hieraus folgt, daß (*) eine Superposition über den oben angegebenen Funktionen ist. □

<u>Satz 6:</u> $K = [\{\bar{x},\ x_1x_2e_3,\ x_1x_2e_2,\ xe_2 \vee \bar{x}e_3,\ x \vee x_1e_2(y_1)e_3(y_2)\}]$.

<u>Beweis:</u> Eine Funktion $f^{n,m}$ gehört genau dann zu K, wenn sie entweder von der Bauart

$f(\tilde{x},\tilde{y}) = c\cdot E_a^m \vee g(\tilde{x})E_b^m \vee A_{2,3}^f (g \in P_2, \{a,b\} = \{2,3\})$ oder

$f(\tilde{x},\tilde{y}) = x_i^{\sigma}\cdot E_2^m \vee x_i^{\tau}\cdot E_3^m \vee A_{2,3}^f\ (\{\sigma,\tau\} \subseteq \{0,1\},\ 1 \leq i \leq n)$ ist.

Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die Funktionen $0,\ 1,\ e_2,\ e_3,\ x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2)),\ (x_1 \vee x_2)e_a,$ $xe_a \vee \bar{e}_a$ $(a \in \{2,3\})$ Superpositionen über den im Satz genannten

Funktionen sind. Weiter gilt für $\{a,b\} = \{2,3\}$:

$$E_a^m \vee xE_b^m = (E_a^{m-1} \vee (xe_b(y_m))\cdot E_b^{m-1})\cdot(e_a(y_m) \vee e_b(y_{m-1}))$$
$$\in \left[\{e_a \vee xe_b,\ x(e_a(y_1) \vee e_b(y_2)),\ xe_b\}\right],$$

$$g\cdot E_b^m \in \left[\{x_1x_2e_b,\ (x_1 \vee x_2)e_b,\ \bar{x}\}\right],$$

$$\bar{x}E_a^m \vee xE_b^m =: p_m(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$= p_{m-1}(\overline{\bar{x}(e_a(y_m) \vee e_b(y_{m-1}))}\cdot(e_a(y_{m-1}) \vee e_b(y_m)),y)$$
$$\in \left[\{\bar{x},\ x(e_a(y_1) \vee e_b(y_2)),\ \bar{x}e_a \vee xe_b\}\right],$$

$$x(E_2^m \vee E_3^m) \in \left[\{x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2))\}\right] \text{ und}$$

$$x \vee A^f_{2,3} \in \left[\{x \vee x_1e_2(y_1)e_3(y_2),\ x_1x_2e_2,\ x_1x_2e_3,\ e_2,\ e_3,\ \bar{x}\}\right].$$

Folglich ist unsere Behauptung richtig. □

<u>Satz 7:</u> Für $a \in \{2,3\}$ gilt

(1) $K(a,0) = \left[\{x_1x_2,\ e_a \vee \bar{x}\cdot\bar{e}_a,\ \bar{x}e_a \vee x\bar{e}_a\}\right]$,

(2) $K(a,1) = \left[\{x_1 \vee x_2,\ \bar{x}\cdot\bar{e}_a,\ \bar{x}e_a \vee x\bar{e}_a\}\right]$.

<u>Beweis:</u> O.B.d.A. sei $a = 2$. Wegen des Dualitätsprinzips genügt es, (2) zu beweisen. Eine Funktion $f^{n,m}$ gehört genau dann zu $K(2,1)$, wenn entweder $f_{/2}$ konstant ist oder aus der Existenz einer wesentlichen Variablen x_i der Funktion $f_{/2}$ stets $f_{/3}(\tilde{c}) = 1$ für alle $\tilde{c} \in \{0,1\}^n$ mit $c_i = 1$ folgt.
Also läßt sich die Funktion f entweder durch

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = c\cdot E_2^m \vee g(\tilde{x})\cdot E_3^m \vee A^f_{2,3} \text{ oder durch}$$

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = p(x_{i_1},\dots,x_{i_r})E_2^m \vee (x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_r} \vee q(\tilde{x}))E_3^m \vee A^f_{2,3}$$

beschreiben, wobei $\{g,p,q\} \subset P_2$ und $\{i_1,\dots,i_r\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß xe_2, $\bar{x}e_3 \vee e_2$, e_3, 0, 1, e_3, $xe_3 \vee e_2$, $e_3 \vee xe_2$, $e_3 \vee \bar{x}e_2$, $x_1x_2e_3$, $x \vee e_2(y_1)e_3(y_2)$ sowie $xe_2(y_1)e_3(y_2)$ Superpositionen über

$x_1 \vee x_2$, $\bar{x}e_3$, $\bar{x}e_2 \vee xe_3$ sind. Folglich trifft dies auch auf

$q(\tilde{x})E_3^m$, $g(\tilde{x})E_3^m \in [\{x_1 \vee x_2, x_1x_2e_3, \bar{x}e_3\}]$ und

$A_{2,3}^f \in [\{x_1 \vee x_2, x_1x_2e_3, \bar{x}e_3, e_2\}]$ zu.

Für $t(x,y) = \bar{x}e_2(y) \vee xe_3(y)$ gilt

$$x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2)) = t(t(x \vee e_2(y_1)e_3(y_2) \vee e_2(y_2)e_3(y_1), y_2), y_1)$$

$\in [\{\bar{x}e_2 \vee xe_3, x \vee e_2e_3, x_1 \vee x_2\}]$, d. h.,

$x(E_2^m \vee E_3^m) \in [\{x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2))\}]$ und $E_2^m = e_2(y_1)(E_2^m \vee E_3^m)$ $\in [\{x(e_2(y_1) \vee e_3(y_2)), e_2\}]$ sind Superpositionen über dem angegebenen Funktionensystem.

Außerdem erhalten wir wegen

$$t\left(\bigvee_{i=1}^{r}(x_i^{a_i} \cdot e_2 \vee x_i e_3), y\right) = X_{\tilde{a}}^r e_2 \vee (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_r)e_3, \text{ daß}$$

$$p(\tilde{x}^r)E_2^m \vee (x_1 \vee \ldots \vee x_r)E_3^m = \left(\bigvee_{\substack{\tilde{a} \\ p(\tilde{a})=1}} X_{\tilde{a}}^r \cdot e_2(y_1) \vee (x_1 \vee \ldots \vee x_r)e_3(y_1)\right) \cdot$$

$$\cdot(E_2^m \vee E_3^m) \text{ eine Superposition über } \{x_1 \vee x_2, \bar{x}e_3, \bar{x}e_2 \vee xe_3\}$$

ist. Folglich ist auch $f^{n,m}$ eine Superposition über $\{x_1 \vee x_2, \bar{x}e_3, \bar{x}e_2 \vee xe_3\}$. □

4. Unter Verwendung der Resultate aus /1/ über Postsche Klassen erhält man leicht als Folgerung aus den Sätzen 2 - 7 noch

Satz 8: Die in den Sätzen 2 - 7 angegebenen Erzeugendensysteme für die maximalen Klassen von $P_{\sum\alpha}$ sind Basen. Die Klassen K_0, $K_{a,A}$ ($a \in \{2,3\}$, $A \in \{S,L\}$) und $K(b)$ ($b \in \{0,1\}$) haben die Ordnung 3. K ist die einzige maximale Klasse von $P_{\sum\alpha}$ der Ordnung 4. Alle übrigen maximalen Klassen besitzen die Ordnung 2.

Literatur

/1/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970

/2/ Kudrjavcev, V. B., Burosch, G., und Blochina, G. N.: Vollständigkeitsbedingungen für zwei Algebren vom Postschen Typ. Math. Balkanica 3, 281 - 296 (1973)

/3/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979

eingegangen: 01. 04. 1980

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Dietlinde Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 91 - 102 (1980)

Andreas Kossow

Parallelarbeitende Sortieralgorithmen

1. Einleitung

Es seien M_1, M_2, ..., M_n endliche paarweise disjunkte nichtleere Mengen (n natürliche Zahl). Mit m_i soll die Mächtigkeit von M_i bezeichnet werden ($i=1,2,\ldots,n$). Die Relation O sei eine irreflexive totale Ordnung in der Menge $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. In der Menge M_i ($i=1,2,\ldots,n$) erzeuge O die irreflexive totale Ordnung O_i. Nachstehend werden die irreflexiven totalen Ordnungen auch kurz Ordnungen genannt.

Ein Element $\beta_1 \in M$ heißt bez. O kleiner als das Element $\beta_2 \in M$ (geschrieben $\beta_1 <_o \beta_2$), wenn $(\beta_1,\beta_2) \in O$ ist. Mit $e(X,1)$ sei das bez. O größte Element jeder beliebigen nichtleeren Teilmenge X von M bezeichnet und $e(X,t+1)$ sei das Element $e(X \setminus \{e(X,1)\},t)$. Das Element $e(X,t)$ ($t=1,2,\ldots,|X|$) ist folglich das t-te Element der Menge X in fallender Reihenfolge der Elemente.

Es seien t_1, t_2 natürliche Zahlen mit $t_1 + 1 < t_2 \leq |M|$. Als Intervall $I(t_1, t_2)$ von M bez. O möge die Menge $\{e(M,t_1+1), e(M,t_1+2), \ldots, e(M,t_2-1)\}$ bezeichnet werden. Es seien α,β zwei voneinander verschiedene Elemente der Menge M. Dann sei als Intervall $I'(\alpha,\beta)$ von M bez. O die folgende Menge bezeichnet:

$\{\gamma \in M | \alpha <_o \gamma <_o \beta\}$, falls $\alpha <_o \beta$ ist,

$\{\gamma \in M | \beta <_o \gamma <_o \alpha\}$, falls $\beta <_o \alpha$ ist.

Folgende Probleme sollen in dieser Arbeit untersucht werden: Die Ordnung O sei feststehend aber unbekannt, und ihre Projektionen O_1, O_2, ..., O_n seien bekannt.

(P1) Gesucht ist das Element $e(M,t)$, $t \in \{1,2,\ldots,|M|\}$ beliebig.

(P2) Zu vorgegebenen natürlichen Zahlen t_1, $t_2 \in \{1,2,\ldots,|M|\}$ mit $t_1+1 < t_2$ ist das Intervall $I(t_1,t_2)$ zu bestimmen.

(P3) Zu vorgegebenen Elementen $\alpha,\beta \in M$ mit $\alpha \neq \beta$ ist das Intervall $I'(\alpha,\beta)$ zu bestimmen.

(P4) Gesucht ist die Ordnung O in M.

Bemerkung 1: 1.) Es sei darauf hingewiesen, daß bei den Problemstellungen (P2) und (P3) nur die Mengen $I(t_1,t_2)$ und $I'(\alpha,\beta)$ gesucht sind, nicht aber die Ordnung in $I(t_1,t_2)$ und $I'(\alpha,\beta)$.
2.) Das Problem (P1) ist ein Spezialfall von (P2); es ist $t_1 = t - 1$ und $t_2 = t + 1$ zu wählen.
Da die Ordnungen O_1, O_2, ..., O_n die Ordnung O (und damit auch das Element e(M,t) und die Intervalle $I(t_1,t_2)$, $I'(\alpha,\beta)$) nicht eindeutig bestimmen, werden in allen vier Fällen weitere Informationen über die Ordnung O benötigt, die durch geeignete Sortieralgorithmen beschafft werden sollen. Diese Sortieralgorithmen werden q-Algorithmen genannt (q ist eine fest gewählte natürliche Zahl), und ihnen sind zwei verschiedene Algorithmenmodelle zugrunde gelegt:
(M1) das Schichtmodell,
(M2) das Modell des paarweisen Vergleichs.

2. q-Algorithmen

Zunächst soll das Schichtmodell betrachtet werden: Es sei q eine feste natürliche Zahl und vereinbart, daß im k-ten Schritt ($k \geq 1$) eines q-Algorithmus A folgende Dinge frei gewählt werden können. (In der Festlegung ihrer Wahl wird gerade die Fixierung eines gewissen Algorithmus zur Lösung der Aufgabe bestehen.)
1. Eine Teilmenge $M_i' \subseteq M_i$ mit $|M_i'| \leq q$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Eine Schichtung $(S_1, S_2, \dots, S_q)$, d. h. eine Auswahl von Teilmengen $S_1, S_2, \dots, S_q$ aus $\bigcup_{i=1}^{n} M_i'$ mit

2.1. $\forall_{1 \leq i \leq n} i \quad \forall_{1 \leq j \leq q} j \quad |S_j \cap M_i| \leq 1$,

2.2. $\forall i \, \forall j \quad (i \neq j \rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset)$,

2.3. Die Schicht S_j wurde in keinem vorhergehenden Schritt des Algorithmus A ausgewählt $(j=1,2,\dots,q)$.

Die Abb. 1 zeigt für den Fall $n = 3$ einige Schichten.

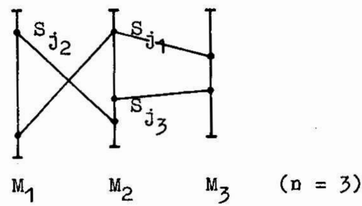


Abb. 1

Die Arbeit des Algorithmus besteht dann in folgendem:

1. Auswahl der Teilmengen $M_i' \subseteq M_i$ mit $|M_i'| \leq q \quad (i=1,2,\dots,n)$.

2. Auswahl einer Schichtung in der Menge $\bigcup_{i=1}^{n} M_i'$.

3. Berechnung der Information

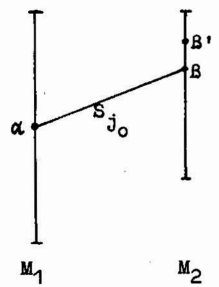
   $I_k := O \cap \bigcup_{j=1}^{q} (S_j \times S_j)$, d. h., es wird die von O in S_j $(j=1,2,\dots,q)$ erzeugte Ordnung bestimmt.

Die Information

$$I_k^* := \left[\bigcup_{i=1}^{n} O_i \cup I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k \right]_{\text{T. A.}}$$

ist die Information über O, die der Algorithmus in den ersten k Schritten geliefert hat. Diese Information enthält die gegebenen Ordnungen O_i $(i=1,2,\dots,n)$ und die im 1. Schritt, 2. Schritt, ..., k-ten Schritt bestimmten Informationen. Auf Grund der Transitivitätseigenschaft der Relation O können implizit weitere Informationen über O bestimmt werden, wenn man die Informationen $O_1, O_2, \ldots, O_n$ und $I_1, I_2, \ldots, I_k$ miteinander kombiniert. Deshalb ist der transitive Abschluß T. A. der Relation $\bigcup_{i=1}^{n} O_i \cup I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$ zu bilden.

<u>Beispiel</u> für eine implizit ermittelte Information über die Ordnung O:
Es soll der Fall $n = 2$ betrachtet werden. Dazu sei $\alpha \in M_1$ und $\beta \in M_2$, wobei $\beta \neq e(M_2,1)$ gelten möge. Dann gibt es ein Element $\beta' \in M_2$ mit der Eigenschaft $\beta <_o \beta'$. Im k-ten Schritt eines q-Algorithmus A soll u. a. die Schicht $S_{j_o} := \{\alpha, \beta\}$ ausgewählt werden. (Vgl. Abb. 2.)



<u>Abb. 2</u>

Die Information I_k enthält die Einschränkung der Ordnung O auf die Schicht S_{j_o}. Es sei $\alpha <_o \beta$. Nach dieser explizit ermittelter Information ergibt sich jedoch auch implizit $\alpha <_o \beta'$.

<u>Bemerkung 2:</u> Wegen der Bedingung 2.3. haben alle q-Algorithmen eine endliche Schrittzahl.

$A^*_{S,q}$ sei die Menge aller q-Algorithmen, denen das Schichtmodell zugrunde liegt.

$A^*_{S,q}(P1)$ sei die Menge aller q-Algorithmen aus $A^*_{S,q}$, die das Problem (P1) lösen.

Analog dazu seien die Mengen $A^*_{S,q}(P2)$, $A^*_{S,q}(P3)$ und $A^*_{S,q}(P4)$ definiert.

O^* sei die Menge aller Ordnungen O in M mit $O \cap (M_i \times M_i) = O_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Für eine Ordnung O aus O^* gilt mithin:
Die Einschränkung von O auf die Menge M_i ist gleich der vorgegebenen Ordnung O_i $(i=1,2,\ldots,n)$.

Einem beliebigen Algorithmus $A \in A^*_{S,q}(P1)$ und $O \in O^*$ wird zugeordnet

$$\lambda_t(A,O) := \min_{s \in \mathbb{N}} s \,\Big|\, I^*_s \text{ bestimmt eindeutig das Element } e(M,t).$$

Einem beliebigen Algorithmus $A \in A^*_{S,q}(P2)$ und $O \in O^*$ wird zugeordnet

$$\lambda_{t_1,t_2}(A,O) := \min_{s \in \mathbb{N}} s \,\Big|\, \begin{array}{l} I^*_s \text{ bestimmt eindeutig das Intervall} \\ I(t_1,t_2). \end{array}$$

Einem beliebigen Algorithmus $A \in A^*_{S,q}(P3)$ und $O \in O^*$ wird zugeordnet

$$\lambda_{\alpha,\beta}(A,O) := \min_{s \in \mathbb{N}} s \,\Big|\, \begin{array}{l} I^*_s \text{ bestimmt eindeutig das Intervall} \\ I'(\alpha,\beta). \end{array}$$

Einem beliebigen Algorithmus $A \in A^*_{S,q}(P4)$ und $O \in O^*$ wird zugeordnet

$$\lambda_O(A,O) := \min_{s \in \mathbb{N}} s \,\Big|\, I^*_s = O.$$

Die Zahl $\lambda_t(A,O)$ ist die <u>Schrittzahl</u>, die der q-Algorithmus A zur Bestimmung des Elements $e(M,t)$ benötigt, wenn in M die Ordnung O vorliegt. Folglich ist $\lambda_t(A,O)$ die Schrittzahl, die der q-Algorithmus A zur Lösung des Problems (P1) benötigt, wenn in M die Ordnung O besteht. Analog dazu ist $\lambda_{t_1,t_2}(A,O)$ bzw. $\lambda_{\alpha,\beta}(A,O)$ bzw. $\lambda_O(A,O)$ die Schrittzahl, die der q-Algorithmus A benötigt, um das Problem (P2) bzw. (P3) bzw. (P4) zu lösen, wenn in M die Ordnung O vorliegt.
Es sollen die folgenden Funktionen bestimmt bzw. Schranken für diese Funktionen angegeben werden:

$$\mu_t(q;\ t;\ m_1,\ m_2,\ldots,m_n) := \min_{A \in A^*_{S,q}(P1)} \ \max_{O \in O^*} \ \lambda_t(A,O),$$

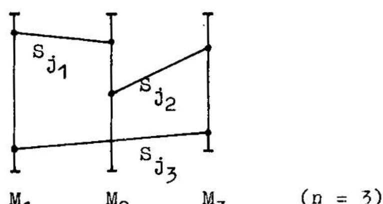
$$\mu_I(q;\ m_1,\ m_2,\ldots,m_n) := \min_{A \in A^*_{S,q}(P2)} \ \max_{\substack{O \in O^* \\ t_1,t_2 \in \mathbb{N} \\ t_1+1<t_2}} \ \lambda_{t_1,t_2}(A,O),$$

$$\mu_{I'}(q;\, m_1,\, m_2,\dots,m_n) := \min_{A \in A^*_{S,q}(P3)} \ \max_{\substack{O \in O^* \\ \alpha,\beta \in M}} \lambda_{\alpha,\beta}(A,O),$$

$$\mu_O(q;\, m_1,\, m_2,\dots,m_n) := \min_{A \in A^*_{S,q}(P4)} \ \max_{O \in O^*} \lambda_O(A,O).$$

Dem Algorithmus A aus $A^*_{S,q}$(Pl) (l=1,2,3,4) wird als <u>Kompliziertheit</u> die Schrittzahl zugeordnet, die A zur Lösung des Problems (Pl) bei "ungünstigster" Ordnung O in M benötigt. Im Falle der Problemstellungen (P2) und (P3) wird nicht nur die "ungünstigste" Ordnung zur Bestimmung der Kompliziertheit eines q-Algorithmus herangezogen, sondern auch das "ungünstigste" Intervall. Die Funktionen μ_t bzw. μ_I bzw. $\mu_{I'}$ bzw. μ_O geben die Kompliziertheit des (in diesem Sinne) "besten" Algorithmus aus $A^*_{S,q}$(P1) bzw. $A^*_{S,q}$(P2) bzw. $A^*_{S,q}$(P3) bzw. $A^*_{S,q}$(P4) an.

Für q-Algorithmen, denen das Schichtmodell zugrunde liegt, gilt in jedem Schritt: $|S_j| \leq n$ für j = 1, 2, ..., q. Fordert man zusätzlich zu den Eigenschaften 2.1., 2.2. und 2.3. in der Definition der Schichten S_1, S_2, ..., S_q, daß für alle S_j entweder $|S_j| = 0$ oder $|S_j| = 2$ gilt, so schränkt man die Klasse der q-Algorithmen ein. (Vgl. dazu Abb. 3.)



<u>Abb. 3:</u> Diese drei Typen von Schichten können dann im Fall n = 3 ausgewählt werden.

In jedem Schritt werden Elemente aus M nur paarweise miteinander verglichen. Das durch diese Einschränkung der Klasse der q-Algorithmen charakterisierte Algorithmenmodell heißt Modell des paarweisen Vergleichs.

$A^*_{P,q}$ sei die Menge aller q-Algorithmen, denen das Modell des paarweisen Vergleichs zugrunde liegt. Die Algorithmenklassen $A^*_{P,q}(P1)$, $A^*_{P,q}(P2)$, $A^*_{P,q}(P3)$, $A^*_{P,q}(P4)$, die Schrittzahlen $\lambda_t(A,O)$, $\lambda_{t_1,t_2}(A,O)$, $\lambda_{\alpha,\beta}(A,O)$, $\lambda_O(A,O)$ und die Funktionen μ_t, μ_I, $\mu_{I'}$, μ_O werden wie im Falle des Schichtmodells definiert.

Bemerkung 3: Für den Fall $n = 2$ ist $A^*_{S,q} = A^*_{P,q}$ und folglich auch $A^*_{S,q}(Pl) = A^*_{P,q}(Pl)$ $(l=1,2,3,4)$.

Wie im Falle des Schichtmodells sollen auch für q-Algorithmen aus $A^*_{P,q}$ die Funktionen μ_t, μ_I, $\mu_{I'}$, μ_O bestimmt bzw. Schranken für diese Funktionen angegeben werden.

3. Resultate

Die Probleme (P1), (P2), (P3), (P4) sollen zunächst nur für Algorithmen aus $A^*_{S,q}$ untersucht werden.

Das Problem (P1)

Satz 1: Für alle natürlichen Zahlen m_1, m_2, t mit $m_1 + m_2 \geq t + 1$ gilt $\mu_t(t;\ t;\ m_1,\ m_2) = 2$.

Es soll hier nur die Beziehung $\mu_t(t;\ t;\ m_1,\ m_2) \leq 2$ durch Konstruktion eines Algorithmus $A_1 \in A^*_{S,t}(P1)$ bewiesen werden, für den $\max\limits_{O \in O^*} \lambda_t(A_1,O) = 2$ ist.

Ist $m_i > t$ $(i \in \{1,2\})$, so sind die Elemente $e(M_i,\ t+1)$, $e(M_i,\ t+2)$, ..., $e(M_i,m_i)$ alle kleiner als das Element $e(M,t)$. Deshalb brauchen diese Elemente nicht weiter berücksichtigt zu werden. Folglich kann o. B. d. A. $m_i \leq t$ für $i = 1, 2$ vorausgesetzt werden.

Der Algorithmus $A_1 \in A^*_{S,t}(P1)$ arbeitet folgendermaßen:

1. Schritt: Es sei r diejenige natürliche Zahl mit $m_1 + r = t + 1$. Wegen $t + 1 \leq m_1 + m_2$ und $m_1 \leq t$ ist $1 \leq r \leq m_2$. Die Schichtung im 1. Schritt wird folgendermaßen ausgewählt:

$S_1 := \{e(M_1,m_1),\ e(M_2,r)\}$,

$S_2 := \{e(M_1,m_1-1),\ e(M_2,r+1)\}$,

.

.

.

$S_{m_2-r+1} := \{e(M_1,m_1-m_2+r),\ e(M_2,m_2)\}$ (s. Abb. 4).

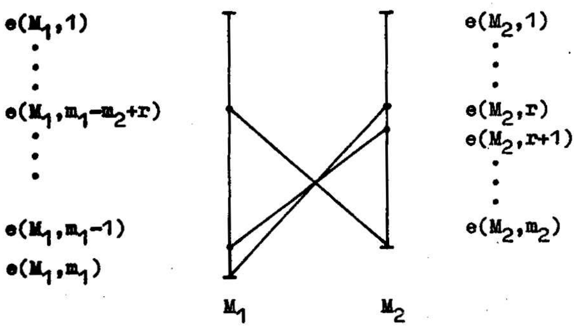


Abb. 4

Resultat: Das kleinste Element auf der Schicht S_j ($j=1,2,\ldots, m_2-r+1$) ist mit Sicherheit kleiner als das Element $e(M,t)$ und braucht deshalb nicht weiter berücksichtigt zu werden. Auf diese Weise fallen $m_2 - r + 1$ Elemente fort. Es bleiben deshalb $m_1 + m_2 - (m_2-r+1) = m_1 + r - 1 = t$ Elemente übrig, die ihrerseits die geordneten Mengen M_1^R, M_2^R bilden, $M_1^R \leq M_1$ und $M_2^R \leq M_2$ (s. Abb. 5).

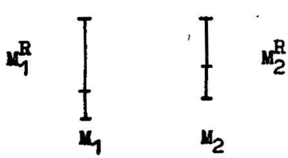


Abb. 5

2. Schritt: Das Element $e(M,t)$ ist das kleinste Element der Menge $M_1^R \cup M_2^R$, d. h., es ist das kleinere der Elemente $e(M_1^R, |M_1^R|)$ und $e(M_2^R, |M_2^R|)$. Mithin werden diese beiden Elemente in eine Schicht genommen.

Resultat: Das Element $e(M,t)$ ist gefunden.

Bemerkung 4: 1.) Für $t = m_1 + m_2$ ist die Problemstellung (P1) trivial. In diesem Fall ist das kleinste Element der Menge M zu bestimmen. Das erfordert genau einen Schritt. (Vgl. dazu den 2. Schritt des Algorithmus A_1.)

2.) Für $t > m_1 + m_2$ ist die Problemstellung (P1) nicht sinnvoll.

3.) Der Algorithmus A_1 bestimmt im 1. Schritt Teilmengen T_1, T_2 von M mit

$$T_1 := M_1^R \cup M_2^R = \{e(M,1), e(M,2), \ldots, e(M,t)\},$$

$$T_2 := \{e(M,t+1), e(M, t+2), \ldots, e(M, m_1+m_2)\}.$$

Diese Möglichkeit der Zerlegung der Menge M konnte bei der Konstruktion weiterer Sortieralgorithmen häufig benutzt werden.

Satz 2: Es gibt einen Algorithmus $A_2 \in A^*_{S,t}(P1)$, für den

$\max\limits_{0 \in 0^*} \lambda_t(A_2, 0) = (]\log n[-1) \cdot]\log t[+]\log n[+1$ ist.

Bemerkung 5: Der Algorithmus A_2 ist eine Synthese von A_1 und einem geeigneten Sortieralgorithmus.

Das Problem (P2)

Satz 3: Für beliebige natürliche Zahlen m_1, m_2 mit $m_1 + m_2 \geq 3$ gilt $\mu_I(\min(m_1,m_2); m_1,m_2) = 2$.

Bemerkung 6: 1.) Die Beziehung $\mu_I(\min(m_1,m_2); m_1,m_2) \leq 2$ erhält man durch Konstruktion eines Algorithmus A_3 aus der Klasse $A^*_{S,\min(m_1,m_2)}(P2)$ mit $\max\limits_{\substack{0 \in 0^* \\ t_1,t_2 \in \mathbb{N} \\ t_1+1 < t_2}} \lambda_{t_1,t_2}(A_3, 0) = 2.$

Dieser Algorithmus A_3 wird folgendermaßen gewählt.

<u>1. Schritt von A_3:</u> Der 1. Schritt von A_1 wird mit $t = t_1$ durchgeführt. Man erhält die Mengen M_1^R, M_2^R.

<u>2. Schritt von A_3:</u> Der 1. Schritt von A_1 wird mit $t = t_2 - 1$ durchgeführt. Man erhält die Mengen $M_{1,neu}^R$, $M_{2,neu}^R$.
Das gesuchte Intervall $I(t_1,t_2)$ ist die Menge
$(M_{1,neu}^R \setminus M_1^R) \cup (M_{2,neu}^R \setminus M_2^R)$.
2.) Da das Problem (P1) ein Spezialfall des Problems (P2) ist, folgt mittels Satz 1 schließlich der Satz 3.

<u>Das Problem (P3)</u>

<u>Satz 4:</u> Für alle natürlichen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ mit $m_n \leq m_{n-1} \leq \ldots \leq m_1$ gilt
$]\log(m_1+2)[\leq \mu_{I},(2;\ m_1,m_2,\ldots,m_n) \leq\ ]\log(m_1+2)[+1.$

<u>Das Problem (P4)</u>
Ein allgemein bekanntes Resultat ist:

<u>Lemma 1:</u> Für jede beliebige natürliche Zahl m_1 gilt
$\mu_0(1;\ m_1,1) =\ ]\log(m_1+1)[.$

Der folgende Satz 5 wurde von Collatz (1975) bewiesen /1/.

<u>Satz 5:</u> Für alle natürlichen Zahlen m_1, m_2 mit $m_2 \leq m_1 \leq 2^{p-1}$ gilt $\mu_0(m_2;\ m_1,m_2) \leq p$.

Dieses Resultat wurde von Burosch (1976) verbessert /1/.

<u>Satz 6:</u> Für alle natürlichen Zahlen m_1, m_2 gilt
$\mu_0(\min(m_1,m_2);\ m_1,m_2) =\ ]\log(m_1+m_2)[.$

Für den Fall $n = 3$ wurden vom Autor folgende Resultate erzielt.

<u>Satz 7:</u> Für alle natürlichen Zahlen m_1, m_2 mit $m_1 + m_2 \geq 3$ gilt $\mu_0(\min(m_1,m_2)+1;\ m_1,m_2,1) \leq\ ]\log(m_1+m_2)[\ +1.$

<u>Satz 8:</u> Es ist $\mu_0(3;\ 2^p-2,2,1) = p + 1$ für $p \geq 3$.

Bemerkung 7: Für abzählbar unendlich viele Mengentripel M_1, M_2 M_3 wird folglich die Abschätzung, die im Satz 7 angegeben ist, scharf.

Satz 9: Für alle natürlichen Zahlen m_1, m_2, m_3 mit $m_3 \leq m_2 \leq m_1$ gilt

$$]\log (m_1+m_2)[\; \leq \mu_0(m_2+m_3;\, m_1,m_2,m_3) \leq \,]\tfrac{1}{2} \cdot \log (m_2+m_3)[\; + \;]\log (m_1+m_2)[.$$

Nun werden die Algorithmen aus $A^*_{P,q}$ betrachtet.

Das Problem (P1)

Satz 10: Sei $n = 2^p$. Es gibt einen Algorithmus $A_4 \in A^*_{P,t}(P1)$, für den $\max\limits_{O \in O^*} \lambda_t(A_4,O) = n + \frac{n-2}{2} \cdot]\log t[$ ist.

Satz 11: Sei $t = 2^w$ und $n = 2^p$. Es gibt einen Algorithmus $A_5 \in A^*_{P,t}(P1)$, für den gilt

$$\max_{O \in O^*} \lambda_t(A_5,O) = \begin{cases} \tau(t) & \text{für } n \leq t, \\ \tau(t) + \frac{1}{2} \cdot (\log t+1)(\log t+2) & \text{für } n = 2t, \\ \tau(t) + (\log t+1)(\log t+2) + 1 & \text{für } n = 4t, \\ \tau(t) + \frac{n}{4t}(\log t)^2 + (\frac{n}{t} - 1)(\log t+1) & \text{für } n \geq 8t. \end{cases}$$

Dabei ist $\tau(t) = \frac{1}{2} \cdot \log n \cdot (\log t+1)(\log t+2)$.

Bemerkung 8: 1.) Die Voraussetzungen $n = 2^p$ und $t = 2^w$ sind rein technischer Art. Die Ergebnisse können leicht verallgemeinert werden.

2.) Für $n < 32$ ist der Algorithmus A_4 schneller als der Algorithmus A_5.

Für $t \leq n$ ist A_5 genau dann schneller als A_4, wenn $t \geq 32$ ist.

Für $t > n$ liefert eine Diskussion der Resultate von Satz 10 und Satz 11 beispielsweise: A_5 ist besser als A_4, wenn $n = 64$ und $t = 128, 256, 512$ bzw. $n = 128$ und $t = 256, 512, \ldots, 2^{16}$ bzw. $n = 256$ und $t = 512, 1024, \ldots, 2^{30}$ ist, usw.

Das Problem (P4)

Satz 12: Sei $n = 3$, und m_1, m_2, m_3 seien natürliche Zahlen mit $m_2 \leq m_1$ und $m_3 = 1$. Es gibt einen Algorithmus $A_6 \in A^*_{P,m_2+1}(P4)$ mit $\max\limits_{O \in O^*} \lambda_O(A_6,O) \leq \left]\log(m_1+m_2)\right[+ \left[\sqrt{2\cdot\left]\log(m_1+m_2)\right[}\right] + 6.$

Bemerkung 9: Eine triviale obere Schranke für $\mu_O(m_2+1;\ m_1,m_2,1)$ ist $\left]\log(m_1+m_2+1)\right[+ \left]\log(m_2+1)\right[$. Diese obere Schranke wurde durch das Resultat im Satz 12 für abzählbar unendlich viele Mengentripel M_1, M_2, M_3 verbessert. Insbesondere für die Sortieraufgaben (P4) mit $m_1 = m_2$.

Die Problemstellungen (P2) und (P3) wurden vom Autor für den Fall der q-Algorithmen aus $A^*_{P,q}$ noch nicht untersucht.

Literatur

/1/ Burosch, G.: Über eine Shannonfunktion der Erkennung linear geordneter endlicher Mengen. Manuskript, 1976

eingegangen: 20. 11. 1978

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. Andreas Kossow
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 103 - 110 (1980)

Jürgen Dassow

On Parikh-Languages of L Systems without Interaction

With any grammar G we can associate the sets
- L(G) of words derivable from the axioms,
- $p(G) = \{p(w) : w \in L(G)\}$ where p(w) is the Parikh-vector of w whose i-th coordinate equals the number of occurrences of the i-th letter of the alphabet in w,
- $LS(G) = \{|w| : w \in L(G)\}$ where $|w|$ denotes the length of w,

and with any family F of grammars we can associate the families
- L(F) of languages which are generated by grammars of F,
- P(F) of Parikh-languages,
- LS(F) of length-sets.

The hierarchy of language families is one of the most investigated fields in formal language theory. Concerning the various types of L systems, results can be found in /6/ and /3/. The hierarchy of length-set families of L systems is determined in /4/. In this paper we shall study the relations between the families of Parikh-languages of L systems without interaction.

For sake of completeness. we shall recall some standard definitions of L system theory. For detailed information and examples we refer to /3/.

A tabled L system without interaction and with a set of axioms (FTOL system) is a construct $G = (V, \mathcal{P}, F)$ where
i) V is a finite nonempty set,
ii) $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$, and each P_i, $1 \leq i \leq r$, is a finite subset of $V \times V^*$ such that the projection on the first coordinate equals V (the elements of $V \times V^*$ are written as $x \to w$),
iii) F is a finite subset of V^+.

The derivation process is defined in the following way:
$x \in V^+$ directly derives $y \in V^*$ (written as $x \Longrightarrow y$) iff

i) $x = x_1x_2\ldots x_n$, $x_i \in V$ for $i = 1,2,\ldots,n$,

ii) $y = y_1y_2\ldots y_n$,

iii) there exists a table $P \in \mathcal{P}$ such that $x_i \to y_i \in P$ for $i = 1,2,\ldots,n$.

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ denotes the reflexive and transitive closure of $\Longrightarrow$.
The language $L(G)$ generated by the system $G = (V, \mathcal{P}, F)$ is defined by

$L(G) = \{x : w \overset{*}{\Longrightarrow} x \text{ for some } w \in F\}$.

We consider some special types of FTOL systems. If $|\mathcal{P}| = 1$, we omit the letter T (and the word tabled); if $|F| = 1$, we omit the letter F. If no table $P \in \mathcal{P}$ contains a production of the form $a \to \lambda$ (λ denotes the empty word), we say that the system is propagating (abbreviated by the letter P). If for every letter $a \in V$ and every table $P \in \mathcal{P}$ there is exactly one production with the left side a in P, we call the system deterministic (abbreviated by the letter D). Thus we obtain the following types of L systems without interaction:

PDOL, POL, DOL, OL, PDTOL, PTOL, DTOL, TOL,
FPDOL, FPOL, FDOL, FOL, FPDTOL, FPTOL, FDTOL, FTOL.

$L \subseteq V^*$ is called an XOL language iff $L = L(G)$ for some XOL system G. L(XOL) denotes the family of all XOL languages.
Let $V = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $x \in V^*$. The Parikh-vector $p(x)$ is the n-dimensional row-vector whose i-th coordinate is the number of occurrences of x_i in x. Let $L \subseteq V^*$. The Parikh-language $p(L)$ is defined by

$p(L) = \{p(x) : x \in L\}$.

The length-set of L is given by $LS(L) = \{|w| : w \in L\}$.
We define

$P(XOL) = \{p(L) : L \in L(XOL)\}$

and

$LS(XOL) = \{LS(L) : L \in L(XOL)\}$.

We assume that the reader is familiar with the concepts of regular, context free and context sensitive grammars (see /8/). The associated families are denoted by L(REG), L(CF), L(CS), P(REG), P(CF), P(CS), LS(REG), LS(CF), and LS(CS).

Theorem: Diagram 1 holds.

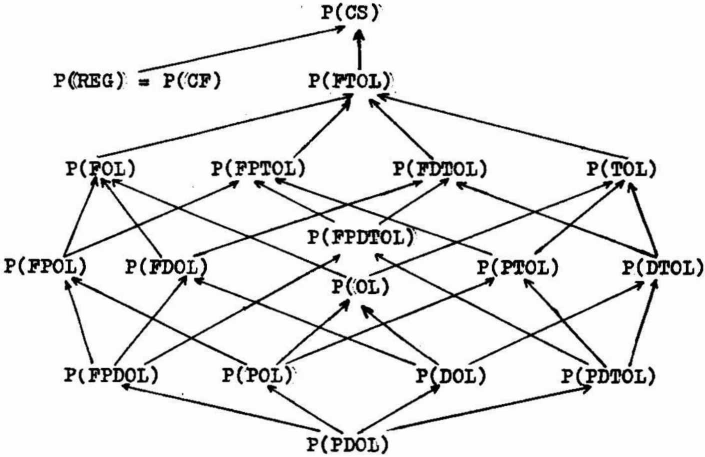


Diagram 1: If X and Y are connected by an arrow directed from X to Y, then $X \subseteq Y$, $X \neq Y$. If X and Y are not connected, then X and Y are incomparable.

Proof: If $L(XOL) \subseteq L(YOL)$, then $P(XOL) \subseteq P(YOL)$. Therefore all inclusions follow by definition. In order to prove the incomparability assertions and that the inclusions are proper we consider the following examples.

i) $Q_1 = \{(n): n \geq 1\} \in P(POL)$, $Q_1 \notin P(FDTOL)$.

In the case of a one-letter alphabet we can identify the Parikh-language with the language. Now $Q_1 \in P(POL)$ is obvious, and $Q_1 \notin P(FDTOL)$ follows by /6/, lemma 3.4.

ii) $Q_2 = \{(2^{n+1}, 2^n+1, 1): n \geq 0\} \in P(DOL)$, $Q_2 \notin P(FPTOL)$.

Q_2 is generated by the DOL system

$G = (\{a,b,c\}, \{a \to aba,\ b \to \lambda,\ c \to bc\}, ababc)$

(we obtain $L(G) = \{(aba)^{2^n}bc : n \geq 0\}$).

Now assume $Q_2 \in P(FPTOL)$ and $Q_2 = p(L(G'))$ for a certain FPTOL system $G' = (\{a,b,c\}, \mathcal{P}, F)$. Let $\{a \to w_a,\ b \to w_b,\ c \to w_c\} \subseteq P \in \mathcal{P}$

and $p(w_x) = (x_1, x_2, x_3)$ for $x \in \{a, b, c\}$. Because we are interested only in the Parikh-language we shall write $p(x) \Rightarrow p(y)$ iff $x \Rightarrow y$. Then we conclude that

$$(2^{n+1},\ 2^n+1,\ 1) \Rightarrow (2^{n+1}a_1+2^n b_1+b_1+c_1,\ 2^{n+1}a_2+2^n b_2+b_2+c_2,\ 2^{n+1}a_3+2^n b_3+b_3+c_3).$$

Since the third coordinate has to be equal to 1 we have $a_3 = b_3 = 0$. Further there exists a l such that.

$$2^{n+1}a_1 + 2^n b_1 + b_1 + c_1 = 2^{l+1}.$$

Therefore

$$0 \leq b_1 + c_1 = 2^n(2^{l+1-n} - 2a_1 - b_1).$$

Case 1: $2^{l+1-n} - 2a_1 - b_1 = 0$ for some n. Then we obtain $b_1 = c_1 = 0$.

Case 2: $1 > 2^{l+1-n} - 2a_1 - b_1 \geq 0$ for some n. Then we have $a_1 = b_1 = 0$.

Case 3: $2^{l+1-n} - 2a_1 - b_1 \geq 1$ for all n. Then it follows that $b_1 + c_1 \geq 2^n$ for all $n \geq 1$. This is impossible.

Therefore we have proved that $b_1 = 0$.

Further we have

$$2^{n+1}a_2 + 2^n b_2 + b_2 + c_2 = 2^l + 1$$

and thus

$$b_2 + c_2 - 1 = 2^n(2^{l-n} - 2a_2 - b_2).$$

Because $b_1 = 0$, $b_3 = 0$, and G' is propagating, we have to have $b_2 > 0$. This implies $2^{l-n} - 2a_2 - b_2 \geq 0$.

Case 1: $2^{l-n} - 2a_2 - b_2 = 0$ for some n. Then $b_2 = 1$, $c_2 = 0$, $a_2 = \frac{2^{l-n} - 1}{2}$. Hence $a_2 = 0$.

Case 2: $1 > 2^{l-n} - 2a_2 - b_2 > 0$ for some n. Then $a_2 = b_2 = 0$.

Case 3: $2^{l-n} - 2a_2 - b_2 \geq 1$ for all n. As above, this case is impossible.

Since G' is propagating the only possible productions in P satisfy $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = 1$, $a_2 = c_2 = 0$. Thus we can derive only words with at most m occurrences of the letter b, where m is the maximal number of b's occurring in the words of F. Hence $p(L(G)) \neq Q_2$.

iii) $Q_3 = \{(2), (4)\} \in P(FPDOL)$, $Q_3 \notin P(TOL)$.

$Q_3 \in P(FPDOL)$ is obvious, and $Q_3 \notin P(TOL)$ follows by /7/,(IV.1), p. 363.

iv) $Q_4 = \{(2^n 3^m): n,m \geq 0\} \in P(PDTOL)$, $Q_4 \notin P(FOL)$.

The statements follow by /4/, theorem 10 and theorem 9. Finally, we have to prove the relations to the families of the Chomsky hierarchy. The equality $P(CF) = P(REG)$ is proved in /8/,Satz 7.2, and it is known that

$$Q_5 = \{(2^n): n \geq 0\} \in P(PDOL),\ Q_5 \notin P(CF).$$

We prove

v) $Q_6 = \{(2)\} \cup \{(2n+1): n \geq 1\} \in P(CF)$, $Q_6 \notin P(FTOL)$.

Again, the first statement is obvious. We assume $Q_6 = p(L(G))$ for a FTOL system $G = (\{a\}, \mathcal{P}, F)$. If $P \in \mathcal{P}$ contains a production $a \to a^i$, where $i \geq 2$, then $(2) \Rightarrow (2i) \notin p(L(G))$. Therefore each $P \in \mathcal{P}$ has one of the following forms:
$\{a \to a\}$, $\{a \to \lambda\}$, $\{a \to a,\ a \to \lambda\}$. Thus G generates a finite language contradicting $p(L(G)) = Q_6$.

Since $F(FTOL) \subseteq F(CS)$, we obtain $P(FTOL) \subseteq P(CS)$, too.

We define XT_iOL (F_iYOL) by the restriction $|\mathcal{P}| \leq i$ ($|F| \leq i$). We remark $XOL = XT_1OL = F_1XOL$. It is known that we get two infinite hierarchies of language families in this way. Concerning the length-set families, we have

$$LS(XOL) \subsetneq LS(XT_2OL) \subsetneq LS(XT_3OL) \subsetneq \ldots \subsetneq LS(XTOL) \quad \text{for } X \in \{P,D,F\}^* \text{ by /7/, theorem 9}$$

$$LS(YOL) \subsetneq LS(F_2YOL) \subsetneq LS(F_3YOL) \subsetneq \ldots \subsetneq LS(FYOL) \quad \text{for } Y \in \{PD,D\} \text{ by /1/, theorem 5.4,}$$

and

$$LS(ZOL) = LS(F_2ZOL) = LS(F_3ZOL) = \ldots = LS(FZOL) \quad \text{for } Z \notin \{PD,D\} \text{ by the results of /4/.}$$

The following lemma describes the situation with respect to Parikh-languages.

Lemma: Let $p_1, p_2, \dots, p_{i+j-1}$ be the first i+j-1 prime numbers. Let $V = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ and

$$Q_7 = \left\{(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}, 0, 0, \dots, 0) : k_1, k_2, \dots, k_i \geq 1\right\}$$

$$\cup \bigcup_{t=1}^{j-1} \{(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{t \text{ times}}, p_{i+t}^{k}, 0, 0, \dots, 0) : k \geq 1\}.$$

Then $Q_7 \in P(F_j PDT_i OL)$, $Q_7 \notin P(F_{j-1} TOL)$, $Q_7 \notin P(FT_{i-1} OL)$.

Proof: i) $Q_7 \in P(F_j PDT_i OL)$. We consider the $F_j PDT_i OL$ system $G = (V, \mathcal{P}, F)$ where

$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_i\}$,

$$P_s = \{x_1 \to x_1^{p_s}\} \cup \bigcup_{t=2}^{j} \{x_t \to x_t^{p_{i+t-1}}\} \qquad \text{for } 1 \leq s \leq i,$$

$$F = \{x_1^{p_1 p_2 \dots p_i}, x_2^{p_{i+1}}, x_3^{p_{i+2}}, \dots, x_j^{p_{i+j-1}}\}.$$

It is easy to see that

$$L = L(G) = \left\{x_1^{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}} : k_1, k_2, \dots, k_i \geq 1\right\}$$

$$\cup \bigcup_{t=2}^{j} \{x_t^{p_{i+t-1}^{k}} : k \geq 1\}$$

and hence

$$Q_7 = p(L(G)).$$

ii) $Q_7 \notin P(F_{j-1} TOL)$. Let $Q_7 = p(L(G'))$ for a FTOL system $G' = (V, \mathcal{P}', F')$. It is obvious that G' has to generate the language L of i). At first we prove that any production $x_t \to w$, $1 \leq t \leq j$, of any table $P \in \mathcal{P}'$ satisfies $w \in x_t^*$. Indeed, if w contains at least two different letters, then $x_t^u \in L$ generates a word v with at least two different letters. This contradicts $v \in L$. If $w = x_q^m$ for some integer $m \geq 1$ and some letter $x_q \neq x_t$, then $x_t^{p_{i+t-1}}$ generates $x_q^{p_{i+t-1} \cdot m}$. Again,

this contradicts the structure of L.
If $w \in F$ is contained in x_t^{+}, we can derive only words of x_t^{*} from w. Thus we have to have at least j axioms in F.
iii) $Q_7 \notin P(FT_{i-1}OL)$. We show that G' of ii) has at least i tables. At first we prove that there is only one production with left side x_1 in any $P \in \mathcal{R}'$ (moreover, we can prove analogously that G' is deterministic). Assume that there is a table $P \in \mathcal{R}'$ with at least two rules $x_1 \to x_1^u$, $x_1 \to x_1^v$, $u > v$.
Case 1: $u = 1$ and there are only two productions with left side x_1 in P. Then we can derive all words of $M = \{x_1^l : l < p_1p_2\ldots p_i\}$ from $x_1^{p_1p_2\ldots p_i}$. But $M \cap L = \emptyset$.
Case 2: $u \geq 2$ or there are at least three productions with left side x_1 in P. Then we can generate an infinite language M' by iterated applications of P to $x_1^{p_1p_2\ldots p_i}$. By the results of /2/, M' is regular. This contradicts /5/, theorem 1 (see also its proof in /5/).
Now let $z = \max\{|w| : w \in F\}$. Then, for

$$u = p_1p_2\ldots p_{s-1}p_s^{l_s}p_{s+1}p_{s+2}\ldots p_i > z, \text{ we obtain}$$

$$x_1^{p_1p_2\ldots p_{s-1}p_s^{l'_s}p_{s+1}p_{s+2}\ldots p_i} \Longrightarrow x_1^u$$

by the application of a certain $P \in \mathcal{R}'$. Because P is deterministic with respect to x_1, we conclude that $x_1 \to x_1^{p_s^l} \in P$ for some l. Using this argument for every $s \in \{1,2,\ldots,i\}$ and taking into the consideration the determinism of the tables, we have at least i tables in $\mathcal{R}'$.

<u>Corollary:</u> Let $X \in \{P,D,F\}^{*}$, $Y \in \{P,D,T\}^{*}$. Then

$$P(XOL) \subsetneq P(XT_2OL) \subsetneq P(XT_3OL) \subsetneq \ldots \subsetneq P(XTOL)$$

and

$$P(YOL) \subsetneq P(F_2YOL) \subsetneq P(F_3YOL) \subsetneq \ldots \subsetneq P(FYOL).$$

By the lemma, some incomparability results follow, too.

Literature

/1/ Ehrenfeucht, A., Karhumäki, J., and Rozenberg, G.: A note on DOL length sets. Discrete Mathematics 6, 235-247 (1978)

/2/ Herman, G. T., Lee, K. P., van Leeuwen, J., and Rozenberg, G.: Characterization of unary developmental languages. Discrete Mathematics 6, 235- 247 (1973)

/3/ Herman, G. T., and Rozenberg, G.: Developmental Systems and Languages. Amsterdam 1975

/4/ Karhumäki, J.: On length sets of informationless L systems. In: Lindenmayer, A., and Rozenberg, G. (Eds.): Automata, Languages, Development. 227 - 242. Amsterdam 1976

/5/ Latteux, M.: Sur les TOL systemes unaire. RAIRO Informatique theorique 9, 51-62 (1975)

/6/ Nielsen, M., Rozenberg, G., Salomaa, A., and Skyum, S.: Nonterminals, homomorphisms and codings in different variations of OL systems, Part I and II. Acta Informatica 4, 87-106 (1974) and 3, 357-364 (1974)

/7/ Rozenberg, G.: TOL systems and languages. Inform. and Control 23, 357-381 (1973)

/8/ Salomaa, A.: Formale Sprachen. Berlin 1978

received: April 16, 1980

Author's address:

Dr. sc. nat. Jürgen Dassow
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Mathematik und Physik
Boleslaw-Bierut-Platz 5
DDR-3010 Magdeburg

Rostock. Math. Kolloq. 15, 111 - 112 (1980)

Dieter Neßelmann

Zur Charakterisierung lokaler Ringe

Autorreferat der Dissertation

V sei eine algebraische Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0, P ein Punkt auf V und $\mathcal{O}_{V,P}$ der lokale Ring von P auf V. V sei lokal bei P reduziert, in eine singularitätenfreie Mannigfaltigkeit einbettbar und von der Dimension $d \geq 1$.
In der Arbeit wird ein Verfahren beschrieben, wie man $\mathcal{O}_{V,P}$ für $d = 2$ charakterisieren kann. Da die Struktur von P vollständig durch $\mathcal{O}_{V,P}$ gegeben ist, ist dieses eine mögliche Klassifikation singulärer Punkte auf "Flächen" in dem Sinn, daß man für $P, P' \in V$ entscheiden kann, ob sie äquivalente Singularitäten sind oder nicht. Als numerischer Charakter eignet sich die Hilbert-Samuel-Funktion $H^{(1)}_{V,P}$. Es ist $H^{(1)}_{V,P}(n) = \binom{n+d}{d}$ $(n=1,2,\ldots)$ genau dann, wenn P einfach auf V ist.
Ausgangspunkt ist die Charakterisierung 1-dimensionaler lokaler Ringe durch Nachbarpunktschemata von D. G. Northcott. Im Fall der algebroiden Hyperfläche führte O. Zariski den fundamentalen Begriff der "Äquisingularität vom Dimensionstyp 1" ein, der auf beliebige algebraische Mannigfaltigkeiten übertragen wird. Ist hierzu W lokal bei P eine irreduzible Untermannigfaltigkeit von V der Kodimension $\operatorname{codim}_V W = 1$, d. h. $\dim W = \dim V - 1$, und V in P "äquisingulär entlang W", dann hat P auf V dieselbe Struktur wie der (1-dimensionale) lokale Ring des allgemeinen Punktes von W auf V. Es gilt

Satz 1: Ist $W \subset V$ und $\operatorname{codim}_V W = 1$, dann liegen alle Punkte $Q \in V$, für die V nicht äquisingulär in Q entlang W ist, auf einer Untermannigfaltigkeit der Dimension $\leq d-2$.

Die Singularität $P \in V$ wird für $d = 2$ wie folgt charakterisiert: Gibt es lokal bei P genau eine "Kurve" C, so daß P einfach auf C und V normal flach entlang C ist, oder genau zwei derartige

Kurven C_1 und C_2, die sich bei P transversal schneiden, dann wird C bzw. $C_1 \cup C_2$ als Zentrum für eine Aufblasung $f: V' \to V$ genommen. Das eigentliche Urbild $f^{-1}(P) \subset V'$ besteht aus endlich vielen Punkten $P_1', \ldots, P_n'$. Andernfalls ist P das Zentrum der Aufblasung f und $f^{-1}(P)$ eine Untermannigfaltigkeit von V' der Dimension 1. Nach Satz 1 gibt es jedoch nur endlich viele Punkte $Q_1', \ldots, Q_m' \in f^{-1}(P)$, für die V' in Q_i' nicht äquisingulär entlang $f^{-1}(P)$ ist. Danach wird genauso mit den Punkten P_i' bzw. Q_i' verfahren; nach endlich vielen Schritten treten nur noch einfache Punkte auf. Ordnet man P und jedem der so ausgewählten Punkte vom Typ P_i' bzw. Q_i' in einer "Nachbarschaft" von P die Hilbert-Samuel-Funktion seines lokalen Ringes zu, dann ergibt sich ein Schema, das die Struktur von P bestimmt. Mit dieser Charakterisierung 2-dimensionaler lokaler Ringe wird der Begriff "Äquisingularität vom Dimensionstyp 2" definiert. Es gilt

Satz 2: Sei $\dim V \geq 3$, W der singuläre Ort von V und U ($U \subset W \subset V$) die Menge aller Punkte $P \in W$, für die V in P nicht äquisingulär entlang W vom Dimensionstyp 1 ist, sofern $\operatorname{codim}_V W = 1$. Wenn $\operatorname{codim}_V U = 2$ ist, liegen die Punkte $Q \in U$, für die V in Q nicht äquisingulär vom Dimensionstyp 2 entlang U ist, auf einer Untermannigfaltigkeit der Dimension $\leq d-3$.

eingereicht: 24. 08. 1977 verteidigt: 07. 09. 1979

Gutachter: Prof. Dr. W. Engel (Rostock),
Prof. Dr. W. Vogel (Halle),
Prof. Dr. G. Eisenreich (Leipzig),
Prof. Dr. H. Kurke (Berlin)

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. Dieter Neßelmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 113 - 114 (1980)

Uwe Hamann

Hebbarkeit von Singularitäten und ein Dirichlet-Problem für elliptische Differentialgleichungen

Autorreferat der Dissertation

Es sei L ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2m mit Koeffizienten aus $C^{\infty}(R^n)$. Weiter sei $\Omega \subset R^n$ ein Gebiet mit einem glatten (n-1)-dimensionalen Rand $\partial\Omega$ und $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge mit leerem Innern. Gesucht werden Funktionen mit $Lu = 0$ in $\Omega\setminus K$. Es stellt sich die Frage, ob und in welcher Weise Dirichletsche Randbedingungen auf $\partial\Omega$ noch durch zusätzliche Randbedingungen auf K ergänzt werden können, um die Lösbarkeit der entstehenden Randwertaufgabe (RWA) in einem Raum $F(\Omega) \subset D'(\Omega)$ zu sichern. RWA mit inneren Randpunkten sind in der Literatur mit Hilfe der Sobolev-Räume (d. h. $F(\Omega) = W_2^m(\Omega)$) in einiger Allgemeinheit untersucht worden. Die Randwertannahme erfolgt dort im Sinne der Einbettungssätze. Dagegen wird in der Dissertation die punktweise stetige Randwertannahme ins Auge gefaßt (d. h. $F(\Omega) = C^r(\Omega)$). Um für diese RWA Aussagen zu gewinnen, wurden die folgenden drei Problemkreise untersucht:

1. Glattheitseigenschaften von Potentialen,
2. Hebbarkeit von Singularitäten,
3. Verallgemeinerung des Begriffs der Hebbarkeit von Singularitäten.

Die Untersuchungen zu diesen Problemen sind auch unabhängig von unserer RWA von Interesse und machen den Hauptteil der Dissertation aus. Es folgen einige Bemerkungen zu den Resultaten.

Zu 1. Ist $E(x,y)$ die Fundamentallösung von L und $\mu \in \mathfrak{M}(K)$ ein Maß, dann sei $E^{\beta}\mu(x) = \int D_y^{\beta} E(x,y)\,d\mu(y)$. d-cap(K) bezeichne die Rieszsche Kapazität, $b_{l,q}(K)$ die Bessel-Kapazität und $H_d(K)$ das d-dimensionale Hausdorff-Maß von K. Dann gilt z. B.:

$$\text{d-cap}(K) > 0 \Rightarrow \exists \mu \in \mathfrak{M}(K) : E^{\beta}\mu \in C^{2m-n+d-|\beta|}(R^n)$$

$$b_{l,q}(K) > 0 \Rightarrow \exists \mu \in \mathfrak{M}(K) : E^{\beta}\mu \in W^{2m-l-|\beta|}_{p,loc}(R^n)$$

$$H_{d+a}(K) > 0 \Rightarrow \exists \mu \in \mathfrak{M}(K) : E^{\beta}\mu \in C_a^{2m-n+d-|\beta|}(R^n).$$

Zu 2. Mit Hilfe der Ergebnisse von 1. wird gezeigt, daß die Bedingungen einiger aus der Literatur bekannter Sätze über hebbare Singularitäten für alle elliptischen Operatoren auch notwendig sind.

Zu 3. Es sei P ein beliebiger linearer Differentialoperator mit Koeffizienten aus $C^{\infty}(\Omega)$ und u eine Funktion aus einer vorgegebenen Funktionenklasse mit $Pu = 0$ in $\Omega \setminus K$. Mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Begriffs der Hebbarkeit von Singularitäten wird im Falle der Nichthebbarkeit der Singularität K das singuläre Verhalten der Distribution Pu auf K näher charakterisiert.

Unter Verwendung dieser Ergebnisse lassen sich einige Aspekte der obigen RWA klären; so kann man z. B. aussagen: Hat K die Dimension d, dann können auf K nur Ableitungen bis zur Ordnung (2m-n+d-1) vorgegeben werden. Weiterhin wird es durch Ausnutzung der erzielten Resultate möglich, für diese RWA Lösungsansätze in der Gestalt von Greenschen Potentialen zu konstruieren. Wichtige Fragen bleiben allerdings offen, so daß die vorliegenden Untersuchungen nur als erste Schritte zur Bearbeitung dieser RWA anzusehen sind.

eingereicht: 02. 02. 1979 verteidigt: 07. 09. 1979

Gutachter: Prof. Dr. habil. G. Wildenhain (Rostock),
Prof. Dr. sc. K. Beyer (Rostock),
Dr. habil. G. Albinus (Berlin)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Uwe Hamann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 115 - 116 (1980)

Friedmar Stopp

Lösung linearer Differential-Differenzen-Gleichungen mit konstanten Koeffizienten mittels Operatorenrechnung und Anwendung

Autorreferat der Dissertation

Bei der mathematischen Modellierung physikalischer, technischer und ökonomischer Probleme treten gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und Differential-Differenzen-Gleichungen sowie Systeme solcher Gleichungen mit gegebenen Anfangswerten besonders häufig auf. Im Gegensatz zu den Differentialgleichungen beschränkt sich die Literatur über die Anwendung der Operatorenrechnung auf Differential-Differenzen-Gleichungen bisher auf Beispiele und Sonderfälle.

Folgende Abkürzungen werden benötigt:

G = Integritätsbereich der für $0 \leq t < \infty$ definierten und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen mit der üblichen Addition und dem Duhamel-Integral als Multiplikation;

Q = Mikusińskischer Operatorenkörper, Quotientenkörper von G;

C = Menge der für $0 \leq t < \infty$ stetigen Funktionen.

Für eine Einzelgleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, x^{(j)}(t-w_i) = f(t), \tag{1}$$

$0 = w_0 < w_1 < \ldots < w_m$, $t \geq 0$, $x(t) \equiv 0$ für $t < 0$, gilt folgendes Hauptergebnis: Für $a_{on} \neq 0$ ist die Gleichung (1) für beliebige Anfangswerte und jede Funktion $f(t) \in G$ eindeutig lösbar mit $x^{(n-1)}(t) \in G \cap C$. Die Lösung läßt sich stets durch Rechnung in Q finden und explizit (als unendliche Reihe) angeben, die Unstetigkeitsstellen von $x^{(n)}(t)$ lassen sich aufzählen.

Für den Entartungsfall $a_{on} = 0$ werden folgende Aussagen getroffen:

- Die sich aus (1) ergebenden Bedingungen für die Anfangswerte sind für die Lösbarkeit nicht hinreichend,
- für die homogene Gleichung (1) lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems angeben; für $f(t) \in C^{\infty}$, $f^{(v)}(0) = 0$ für $v = 0, 1, \ldots$, ebenfalls,

- hinreichende Sätze für andere Störfunktionen f(t) existieren.

Der Fall, daß für $x(t)$, $x'(t)$, ..., $x^{(n-1)}(t)$ Anfangswerte bei $t = 0$ und außerdem Sprunghöhen bei $t = \tau_v$ vorgegeben sind und Lösungen gesucht werden, die bis zur n-ten Ableitung außerhalb der Werte $t = \tau_v$ stetig sind, läßt sich ebenfalls explizit behandeln.

Für Systeme mit gegebenen Anfangswerten der Form

$$\sum_{i=0}^{m} \underline{B}_i \, \underline{x}'(t-w_i) \quad \sum_{i=0}^{m} \underline{A}_i \, \underline{x}(t-w_i) = \underline{f}(t), \; \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \tag{2}$$

$x(t) \equiv 0$ für $t < 0$, werden folgende Aussagen gemacht:

- Es muß in normale Systeme ($|\underline{B}_0| \neq 0$), wenig entartete Systeme ($|\underline{B}_0| = 0$, $|\underline{B}_i| \neq 0$ für wenigstens ein i) und stark entartete Systeme ($|\underline{B}_i| = 0$ für alle i) unterschieden werden,
- im ersten Fall gilt ein zu $a_{on} \neq 0$ analoges Ergebnis,
- im zweiten Fall ist jede Lösung $\underline{x} = (x_k)$ aus Q mit $x_k \in G \cap C$ zugleich Lösung des Anfangswertproblems (2); es gibt lösbare und unlösbare Probleme;
- im dritten Fall muß nicht jede Lösung $\underline{x}$ aus Q mit $x_k \in G \cap C$ zugleich Lösung von (2) sein, dies gibt Anlaß zur Einführung verallgemeinerter Lösungen.

Als Anwendung werden mathematische Modelle in der Bodenrheologie eingeführt und untersucht. Dieses Vorgehen hat ähnliche Vorteile wie der Einsatz der Operatorenrechnung bzw. der Laplace-Transformation in der Elektronik.

eingereicht: 23. 08. 1979 **verteidigt:** 28. 03. 1980

Gutachter: Prof. Dr. L. Berg (Rostock),
Prof. Dr. H.-J. Glaeske (Jena),
Prof. Dr. F. Rühs (Freiberg),
Prof. Dr. W. Förster (Freiberg).

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr. Friedmar Stopp
Technische Hochschule Leipzig
Sektion Mathematik
Karl-Liebknecht-Str. 132
DDR-7010 Leipzig

Rostock. Math. Kolloq. 15, 117 - 118 (1980)

Magdalena Brinckmann

Lösbarkeitsuntersuchungen von gewissen Klassen nichtlinearer Gleichungen

Autorreferat der Dissertation

Gegenstand der Untersuchungen sind nichtlineare Gleichungen. Es werden Aussagen über die Hammersteinsche Integralgleichung

$$u(x) + \int_G k(x,y)f(y,u(y))dy = 0, \qquad (1)$$

die in analoger Weise bezeichnete Hammersteinsche nichtlineare Operatorgleichung

$$u + KF(u) = 0 \qquad (2)$$

und über die allgemeine nichtlineare Operatorgleichung

$$A(u) = 0 \qquad (3)$$

gemacht.
Mit Hilfe der von F. E. Browder und G. J. Minty entwickelten Theorie der monotonen Operatoren gelingt es unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, Existenz und Eindeutigkeitssätze für die Lösung solcher nichtlinearer Gleichungen zu beweisen, die den mittels Variationsmethoden gewonnenen Aussagen gleichen, jedoch nicht die Existenz eines Potentials des nichtlinearen Operators voraussetzen. Aufbauend auf einem Satz von F. E. Browder und G. J. Minty beweist H. Amann, daß die Hammersteinsche Operatorgleichung (2) in einem Banachraum X, der die Einbettungseigenschaft besitzt, genau eine Lösung hat, falls der lineare Operator $K:X \rightarrow X^*$ winkelbeschränkt und der nichtlineare Operator $F:X^* \rightarrow X$ monoton und hemistetig ist.
Neben Sätzen über die Winkelbeschränktheit von Summen bzw. Differenzen von winkelbeschränkten Operatoren wird in der vorliegenden Arbeit bewiesen, daß die aus bestimmten Kernen gebildeten linearen Integraloperatoren winkelbeschränkt sind.
Im Fall der nichtlinearen Operatorgleichung (3) im Hilbertraum

ist die Monotonievoraussetzung i. allg. nicht erfüllt. Durch Übergang zu einer zu (3) äquivalenten Operatorgleichung

$$(BA)u = 0 \tag{3'}$$

kann man Monotonie erreichen, wenn der nichtlineare Operator A lipschitzstetig ist und wenn der lineare beschränkte Operator B einen inversen Operator besitzt. Unter den gleichen Voraussetzungen ist der Operator T, der durch

$$Tu := u - eBA(u)$$

definiert wird, ein Kontraktionsoperator, und die eindeutig bestimmte Lösung u^* der Gleichung (3) ist der Grenzwert des Iterationsprozesses

$$u_o = 0,$$
$$u_{i+1} = T(u_i), \qquad i = 0, 1, \dots .$$

Beispielsweise monotonisiert der Operator B den Operator A, wenn eine stetige, symmetrische und nach beiden Seiten beschränkte Ableitung des Operators BA existiert.
Im reellen Banachraum wird durch den stark monotonen und lipschitzstetigen Operator A und durch den stark monotonen, beschränkten und selbstadjungierten Operator B mit

$$u_o = 0,$$
$$u_{i+1} = u_i - tBA(u_i), \qquad i = 0, 1, \dots$$

ein konvergentes Iterationsverfahren beschrieben, falls genau eine Lösung der nichtlinearen Operatorgleichung (3) existiert.

eingereicht: 13. 12. 1977 verteidigt: 15. 09. 1978

Gutachter: Prof. Dr. H.-W. Stolle (Rostock),
Prof. Dr. G. Porath (Güstrow),
Doz. Dr. G. Maeß (Rostock)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Magdalena Brinckmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Biologie
Universitätsplatz 2
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 15, 119 - 120 (1980)
Joachim Storm

Über Verhalten von endlichen Automaten in determinierten Umgebungen

Autorreferat der Dissertation

In der Arbeit, die sich mit dem Verhalten von endlichen Automaten und Kollektiven endlicher Automaten in determinierten Umgebungen beschäftigt, verstehen wir unter einem Automaten A einen endlichen initialen Moore-Automaten $A = (X,Y,S,\varphi,\lambda,\bar{S},s_0)$. Hierbei bezeichnet X das Eingabealphabet, Y das Ausgabealphabet, S die Menge aller Zustände, φ die Überführungsfunktion, λ die Ausgabefunktion, $\bar{S}$ eine nichtleere Teilmenge von S und s_0 den Initialzustand. Wir nennen $\bar{S}$ die ausgezeichnete Zustandsmenge des Automaten. Als Umgebungen U werden endliche initiale Moore-Automaten $U = (Y,X,Z,\psi,\mu,z_0)$ betrachtet.

Im ersten Teil der Arbeit wird die Wechselwirkung zwischen Automat und Umgebung untersucht. Wir nehmen an, daß Automat und Umgebung unendlich lange in Wechselwirkung stehen. Dann nennen wir eine unendliche Folge von Paaren $xy \in X \times Y$ ein Verhalten des Automaten A in der Umgebung U. Besitzt dieses Verhalten eine noch näher zu bestimmende Eigenschaft $\mathcal{T}$, so sagen wir, der Automat A zeigt $\mathcal{T}$-adaptives Verhalten (kurz $\mathcal{T}$-Verhalten) in der Umgebung U. Bezüglich der ausgezeichneten Zustandsmenge eines Automaten definieren wir drei natürliche Typen adaptiven Verhaltens:

1. Ein Automat A zeigt in einer Umgebung U c_1-Verhalten, wenn er im Verlauf der Wechselwirkung mit der Umgebung wenigstens einmal in einem Zustand s der ausgezeichneten Zustandsmenge $\bar{S}$ war.
2. Ein Automat A zeigt in einer Umgebung U c_2-Verhalten, wenn es einen Zeitpunkt $t_0 \geq 0$ derert gibt, daß sich der Automat A in jedem Moment $t \geq t_0$ in einem Zustand $s \in \bar{S}$ befindet.
3. Sei δ_0 eine beliebige rationale Zahl aus $[0,1]$. Für $t \in \{0,1,2,\dots\}$ gebe $F_{\langle A,U\rangle}(t)$ an, wie oft sich der Automat A während der Zeit t in Zuständen $s \in \bar{S}$ befand. Dann besitzt der Automat A in der Umgebung U δ_0-asymptotisches Verhalten, wenn $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi_{\langle A,U\rangle}(t) = \delta_0$ ist, wobei $\Phi_{\langle A,U\rangle} = \frac{F_{\langle A,U\rangle}(t)}{t}$.

Für einen Automaten A bezeichne $\mathfrak{U}_A^{\tau}$ die Menge aller der Umgebungen U, in denen A τ-Verhalten besitzt, wobei τ einen beliebigen der oben beschriebenen Typen adaptiven Verhaltens bezeichnet. Die Umgebungsmenge $\mathfrak{U}_A^{\tau}$ charakterisiert die Adaptionsfähigkeit des Automaten A bez. des τ-Verhaltens. Seien A_1 und A_2 Automaten und $\mathfrak{U}_{A_1}^{\tau}$, $\mathfrak{U}_{A_2}^{\tau}$ deren entsprechende Umgebungsmengen. Dann sagen wir, daß der Automat A_2 adaptionsfähiger ("stärker") als der Automat A_1 bez. des τ-Verhaltens ist, wenn $\mathfrak{U}_{A_1}^{\tau} \subseteq \mathfrak{U}_{A_2}^{\tau}$ ist, was wir mit $A_1 \overset{\tau}{\leqq} A_2$ bezeichnen.
Im ersten Teil der Arbeit wird der folgende Hauptsatz bewiesen.
Hauptsatz: Seien A, A_1 und A_2 Automaten. Dann kann bez. des τ-Verhaltens
1) effektiv entschieden werden, ob der Automat A potentielles τ-Verhalten besitzt, d. h., ob es eine Umgebung U gibt, in der er τ-Verhalten zeigt;
2) die Umgebungsmenge $\mathfrak{U}_A^{\tau}$ effektiv beschrieben werden;
3) für die Automaten A_1 und A_2 effektiv entschieden werden, ob sie hinsichtlich der $\overset{\tau}{\leqq}$ -Relation vergleichbar sind.
Im zweiten Teil der Arbeit werden die im ersten Teil erhaltenen Resultate auf den Fall des adaptiven Verhaltens eines Kollektivs endlicher Automaten in einer determinierten Umgebung verallgemeinert.

eingereicht: 06. 03. 1978 verteidigt: 08. 09. 1978

Gutachter: Prof. G. Burosch (Rostock),
Prof. Ju. I. Žuravlëv (Moskau),
Prof. W. B. Kudrjavcev (Moskau).

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Joachim Storm
Besselplatz 22
DDR-8036 Dresden

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq./ Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. ä. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparentpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele:

/8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1958

/9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)

/10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichard, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers:/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen.