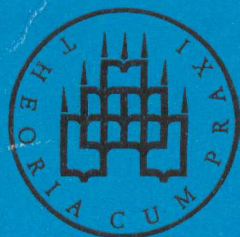


# Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 17



**WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT  
ROSTOCK**



**ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM**

**Heft 17**

**1981**

**Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik**

**Herausgeber:** Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

**Schriftleitung:** Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion  
Mathematik

Prof. Dr. Gerhard Maeß,	Schriftleiter
Dr. Klaus-Dieter Drews,	Lektor
Dorothea Meyer,	Herstellung der Druckvorlage

Sektion Mathematik der  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 1

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR - 2500 Rostock,  
Vogelsang 13/14

Fernruf: 369 577

Leiter: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage

Genehmigungs-Nr.: C 71/81

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz



## Inhalt

	<u>Seite</u>
Schmidt, Eberhard Teilalgebren zweier mehrsortiger Funktionenalgebren (I)	5
Engel, Konrad Optimalitätsaussagen über Tripelsysteme	17
Gronau, Hans-Dietrich O. F.; Reimer, Roland Ober nichtisomorphe elementare block- wiederholungsfreie $2-(8,4,\lambda)$ -Block- pläne II	27
Gronau, Hans-Dietrich O. F.; Reimer, Roland Ober nichtisomorphe elementare block- wiederholungsfreie $2-(8,4,\lambda)$ -Block- pläne III	37
Berg, Lothar Verallgemeinerte Inversen nilpotenter Matrizen	49
Mumm, Harald Das Dirichlet-Problem in Hölder-Räumen	57
Peters, Wolfgang; Schott, Dieter Ober Nullräume, Wertebereiche und Rela- tionen von Operatoren, die bei stationä- ren Iterationsverfahren zur Lösung line- arer Gleichungen auftreten	71
Rasch, Dieter; Herrendörfer, Günter Robustheit statistischer Methoden	87
Berg, Lothar Zur numerischen Instabilität der Gaußschen Transformation	105
Geise, Gerhard Geometrische Aspekte der Nullstellenbe- stimmung durch inverse Interpolation	113
Autorreferate von Dissertationen	
Mumm, Harald Potentialtheoretische Untersuchungen für lineare elliptische Randwert- probleme in Hölder-Räumen	121

<b>Dassow, Jürgen</b>	<b>Ein modifizierter Vollständigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen</b>	<b>123</b>
<b>Lorenzen, Hans-Peter</b>	<b>Semantische Synthese, Codeerzeugung und Speicherverwaltung bei höheren dynamischen Programmiersprachen, dargestellt am Beispiel der universellen Programmiersprache ALGOL 68</b>	<b>125</b>

Eberhard Schmidt

Teilalgebren zweier mehrwertiger Funktionenalgebren (I)

Die von uns im folgenden betrachtete Algebra  $P_{\Sigma_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{0,2\}$ , wurde erstmalig in [2] definiert und untersucht. Sie besteht aus der Menge aller Funktionen  $f^{n,m}(n,m \geq 0)$  der Form

$$f^{n,m} : \{0,1\}^n \times \{\alpha,3\}^m \rightarrow \{0,1\}$$

mit den Operationen des

- i) Umnumerierens der Variablen,
- ii) Identifizierens von Variablen, die Werte aus derselben Menge annehmen,
- iii) Hinzufügens bzw. Weglassens von fiktiven Variablen, und
- iv) des Ersetzens einer Variablen durch eine Funktion, deren Wertebereich im Definitionsbereich der Variablen enthalten ist.

Die Funktionen aus  $P_{\Sigma_\alpha}$  werden mit Hilfe von Formeln (oder Tabellen) über den Variablenalphabeten

$$X = \{x, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \text{ und } Y = \{y, y_1, \dots, y_i, \dots\}$$

beschrieben, wobei die Variablen aus  $X$  mit den Werten 0,1 und die Variablen aus  $Y$  mit den Werten  $\alpha,3$  belegt werden können.

Die nullstelligen Funktionen aus  $P_{\Sigma_\alpha}$  bezeichnen wir mit 0 und 1.

Funktionen, die sich nur durch fiktive Variable unterscheiden, werden von uns nicht unterschieden. Die Bezeichnung  $P_{\Sigma_\alpha}$  wird

von uns sowohl für die Menge der Funktionen wie für die Algebra gebraucht. Die mit Hilfe der genannten Operationen aus Funktionen einer Teilmenge von  $P_{\Sigma_\alpha}$  konstruierten Funktionen heißen Superpositionen über  $A$ . Die Menge aller Superpositionen über

$A \subseteq P_{\Sigma_\alpha}$  (Abschluß von  $A$ ) sei mit  $[A]$  bezeichnet. Ist  $A = [A]$ ,

so wird  $A$  als abgeschlossene Menge bezeichnet. Eine Menge  $A \in P_{\Sigma_\alpha}$  heißt maximal in  $B$  ( $A, B$  abgeschlossene Mengen), wenn

für eine beliebige Funktion  $f \in B \setminus A$  gilt:  $[A \cup \{f\}] = B$ .

Die in  $P_{\Sigma_\alpha}$  maximalen Mengen heißen maximale Klassen. Die Mengen, die in den maximalen Klassen maximal sind, heißen submaximale Klassen. In  $P_{\Sigma_\alpha}$  gibt es kontinuum-viele abgeschlossene

Mengen. Durch die Verwandtschaft zur Algebra  $P_2$  (siehe /1/) ist die Vermutung begründet, daß dennoch eine gewisse Übersicht über die abgeschlossenen Mengen von  $P_{\Sigma_\alpha}$  und eine "Eingrenzung" des Kontinuums erreichbar ist.

Eine andere mögliche Verallgemeinerung von  $P_2$ , die Algebra  $P_{3,2}$ , wurde in /5/ untersucht. Auf Anwendungen automaten-theoretischer Art von  $P_{\Sigma_\alpha}$  wurde in /2/ verwiesen.

In /2/ wurden sämtliche maximalen Klassen von  $P_{\Sigma_\alpha}$  für  $\alpha = 0$

und  $\alpha = 2$  ermittelt. Die in dieser Arbeit in diesem Teil und in Teil II vorgestellten Lemmata und Sätze sollen sowohl Strukturaussagen über den Graphen der abgeschlossenen Mengen von  $P_{\Sigma_\alpha}$  machen, als auch eine Hilfe darstellen bei der Ermittlung der submaximalen Klassen von  $P_{\Sigma_\alpha}$ .

Zunächst geben wir einige Definitionen und Bezeichnungen an. Alle verwendeten Begriffe und Bezeichnungen, die hier nicht definiert werden, sind in den Arbeiten /1/, /2/, /3/ und /4/ enthalten.

Es sei  $\alpha \in \{0, 2\}$ , und im Fall  $\alpha = 2$  werde  $\bar{2} = 3$ ,  $\bar{3} = 2$  gesetzt.

Durch  $\vec{a}^n := (a_1, a_2, \dots, a_n)$  werden Tupel bezeichnet.

Für  $a \in \{\alpha, 3\}$  bezeichne  $e_a$  die durch

$$e_a(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion.

Für  $\vec{a} \in \{\alpha, 3\}^m$  bezeichne  $f_{/\vec{a}} \in P_2$  die zu  $f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha}$  gehörende

und durch  $f_{/\vec{a}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$  definierte Funktion.

Für  $f/(a, \dots, a)$  sei auch die Bezeichnung  $f/a$  möglich.

Weiter ist

$$E_a^m(y_1, \dots, y_m) := \bigwedge_{i=1}^m \odot_a(y_i) \quad (a \in \{\alpha, 3\}),$$

$$E_{\tilde{a}}^m(y_1, \dots, y_m) := \bigwedge_{i=1}^m \odot_{\tilde{a}}(y_i) \quad (\tilde{a} \in \{\alpha, 3\}^m),$$

$$x_{\tilde{a}}^n := \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\tilde{a}_i} \quad (\tilde{a} \in \{0, 1\}^n),$$

$$A_a^{f^{n,m}}(x_1, \dots, y_m) := \bigvee_{\substack{f(\tilde{a}, \tilde{a})=1 \\ \tilde{a} \neq \tilde{a}}} x_{\tilde{a}}^n E_{\tilde{a}}^m(y_1, \dots, y_m),$$

$$A_{\alpha, 3}^{f^{n,m}}(x_1, \dots, y_m) := \bigvee_{\substack{f(\tilde{a}, \tilde{a})=1 \\ \tilde{a} \neq \tilde{a}, \tilde{3}}} x_{\tilde{a}}^n E_{\tilde{a}}^m(y_1, \dots, y_m).$$

Ergibt sich aus dem Zusammenhang die Stellenzahl der Tupel oder Funktionen, so können die oberen Indizes weggelassen werden.

Wir sagen, eine Funktion  $f^{n,m}$  bewahrt eine gewisse Teilmenge  $G \subseteq P_{\Sigma_\alpha}$ , genau dann, wenn für beliebige  $g_1 (i=1, \dots, n+m)$  mit  $g_1 \in G \cup \{y\}$  stets  $f(g_1, \dots, g_{n+m}) \in G$  gilt, falls dieser Ausdruck definiert ist.

Seien  $A, B, C$  abgeschlossene Teilmengen von  $P_2$ ,  $a \in \{\alpha, 3\}$ ,

$\{b, \tilde{a}\} \subseteq \{0, 1\}$  und  $h \in \{0, 1, \odot_\alpha, \odot_3\}$ . Dann sei

$$K_{a,A} := \{f \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f/a \in A\},$$

$$K_{\tilde{a}} := \bigcup_{n,m} \{f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f/a(x_1, \dots, x_n) = (f/3(x_1^{\tilde{a}}, \dots, x_n^{\tilde{a}}))^{\tilde{a}}\},$$

$$K(h) := \{f \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f \text{ bewahrt } \{0, 1, \odot_\alpha, \odot_3\} \setminus \{h\}\},$$

$$K := \{f \in P_{\Sigma_2} \mid \{f/2, f/3\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset \vee \\ (\exists 1 : \{f/2, f/3\} \subseteq \{x_1, \bar{x}_1\})\}.$$

$$K_{a,b} := \{f \in P_{\Sigma_2} \mid f \text{ bewahrt } \{g(x, y) \in P_{\Sigma_2} \mid g/a \in \{0, 1\} \vee \\ (g/a \in \{x, \bar{x}\} \wedge g/\bar{a} \in \{x, b\})\}\}.$$

$$K(A, B, C) := \{f \in P_{\Sigma_\alpha} \mid f/\alpha \in A \wedge f/3 \in B \wedge (\tilde{x} \neq \tilde{a}, \tilde{3} \Rightarrow f/\tilde{x} \in C)\}.$$

Mit  $H_\alpha$  wird folgende Abbildung von  $P_{\Sigma_\alpha}$  auf  $P_2$  bezeichnet:

$$H_\alpha(f^{n,m}) := f^{n,m}/\alpha \text{ f\"ur } f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha};$$

ferner sei

$$H_\alpha(A) := \{H_\alpha(f) \mid f \in A\} \text{ f\"ur } A \subseteq P_{\Sigma_\alpha}.$$

Die Tabellen 1 und 2 geben alle maximalen Klassen von  $P_{\Sigma_0}$  und  $P_{\Sigma_2}$  an, die in /2/ angef\"uhrt wurden, sowie f\"ur jede Klasse eine Basis nach /3/. Die Definition der maximalen Klassen lehnt sich ebenfalls an die in /3/ an.

Tabelle 1:  $P_{\Sigma_0}$

Anzahl	Bezeichnung	Basis	Bezeichnung nach /2/
2	$K_{a,s}$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, \quad x \circ_a(y)$	$M_1^{a,s}$
2	$K_{a,T_1}$	$x_1 \vee x_2, \quad x_1 + x_2 + 1, \quad \circ_a(y)$	$M_2^{1,a}$
1	$K_0$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, \quad \circ_3(y),$ $x(\circ_3(y_1) \vee \circ_0(y_2))$	$M_1^{0,3}$
1	$K_1$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$M_3$
1	$K(0)$	$x(\circ_3(y_1) \vee \circ_0(y_2)), \quad \circ_3(y),$ $x_1 \vee \bar{x}_2, \quad \circ_0(y), \quad h_2(x_1, x_2, x_3)$	$M_6^1$
1	$K_{0,T_0}$	$x_1 x_2, \quad x_1 + x_2, \quad \circ_3(y)$	$M_2^{0,0}$
1	$K_{0,M}$	$x_1 x_2, \quad x_1 \vee x_2, \quad \circ_0(y), \quad \bar{x} \circ_3(y)$	$M_5^0$
1	$K_{0,L}$	$x_1 + x_2, \quad 1, \quad x_1 x_2 \circ_3$	$M_4^0$

$$a \in \{0,3\}$$

Tabelle 2:  $P_{\Sigma_2}$

Anzahl	Bezeichnung	Basis	Bezeichnung nach /2/
2	$K_{a,S}$	$x_1 \bar{x}_2 \vee x_1^1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, x_{e_a}(y)$	$M_1^{a,a}$
4	$K_{a,T_1}$	$x_1 \bigcirc_1 x_2, x_1 + x_2 + 1, (e_a(y))^1$	$M_2^{1,a}$
2	$K_{a,L}$	$x_1 + x_2, 1, x_1 x_2 e_{\bar{a}}(y),$	$M_4^a$
2	$K_{a,M}$	$x_1 x_2, x_1 \vee x_2, e_a(y), \bar{x} e_{\bar{a}}(y)$	$M_5^a$
1	$K_0$	$x_1 \bar{x}_2 \quad x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, e_3(y),$ $x(e_3(y_1) \vee e_2(y_2))$	$M_1^{2,3}$
1	$K_1$	$\overline{x_1 \vee x_2}, e_2(y_1) \vee e_3(y_2)$	$M_3$
2	$K(i)$	$x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, e_2(y), e_3(y),$ $(x_1 \bar{x}_2)^1, (x_1^1 \vee e_3(y_1) e_2(y_2))^1$	$M_6^{\bar{I}}$
2	$K(e_a)$	$x_1 x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x} e_{\bar{a}}(y), \bar{x} \vee e_{\bar{a}}(y)$	$M_7^{\bar{a}}$
1	$K$	$x_1 x_2 e_2(y); x_1 x_2 e_3(y), x \vee x_1 e_2(y_1) e_3(y_2),$ $\bar{x}, x e_2(y_1) \vee \bar{x} e_3(y_2)$	$M_8$
4	$K_{a,1}$	$x_1 \bigcirc_1 x_2, \bar{I} e_a(y) \vee \bar{x} e_{\bar{a}}(y),$ $\bar{x} e_a(y) \vee x e_{\bar{a}}(y)$	$M_9^{a,1}$

$$O_1 = \begin{cases} \wedge & \text{für } i = 0 \\ \vee & \text{für } i = 1 \end{cases}; \quad a \in \{2,3\}, \quad i \in \{0,1\}.$$

Es werden nun einige Lemmata bewiesen, die für die Herstellung einer Beziehung zwischen dem Graphen von  $P_2$  und dem von  $P_{\Sigma_2}$  benötigt werden.

**Lemma 1:** Es existiert eine eindeutige Abbildung, die jeder Funktion  $f^{n,m} \in P_{\Sigma_\alpha}$  ein  $2^m$ -Tupel  $n$ -stelliger Boolescher Funktionen zuordnet.

**Beweis:** Jede Funktion  $f^{n,m}(x_1, \dots, y_m) \in P_{\Sigma_\alpha}$  lässt sich nach der Formel

$$f^{n,m}(x_1, \dots, y_m) = \bigvee_{\tilde{a}^m \in \{\alpha, 3\}^m} f_{\tilde{a}^m}^{n,m}(x_1, \dots, x_n) E_{\tilde{a}^m}^m(y_1, \dots, y_m)$$

durch  $2^m$  der Funktion  $f^{n,m}$  zugeordnete  $n$ -stellige Funktionen aus  $P_2$  beschreiben. Diese Beschreibung ist eindeutig, da jedes Tupel von  $2^m$  Funktionen aus  $P_2^n$  eindeutig eine  $(n,m)$ -stellige Funktion aus  $P_{\Sigma_\alpha}$  bestimmt.

**Folgerung:** Wird eine Funktion  $f^{n,m}$  an Stelle der Variablen  $x_1'$  in die Funktion  $g^{n',m'}$  eingesetzt, so wirkt diese Einsetzung komponentenweise, d. h., wenn

$$h(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_{n'}, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_{m'}) =$$

$g(f^{n,m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), x_2', \dots, x_{n'}, y_1', \dots, y_{m'})$  ist, so gilt

$$h/\tilde{b}\tilde{t} = g/\tilde{t} (f/\tilde{b}(x_1, \dots, x_n), x_2', \dots, x_{n'})$$

für beliebige Tupel  $\tilde{b} \in \{\alpha, 3\}^m$ ,  $\tilde{t} \in \{\alpha, 3\}^{m'}$ .

**Lemma 2:** Die Menge  $A \cup K_{a, [\{x\}]} =: B$  ist ein Erzeugendensystem für  $K_{a, A}$ .

**Beweis:** Sei  $f^{n,m}$  eine beliebige Funktion aus  $K_{a, A}$ . Zu  $B$  gehören die Funktionen  $f/a \in A$  und  $g(x, x_1, \dots, y_m) = x E_a^m \vee A_a^f \in K_{a, [\{x\}]}$ .

Durch Einsetzung von  $f/a$  in  $g$  für die Variable  $x$  ergibt sich die Funktion  $f^{n,m}$ .

**Lemma 3:**  $K_{A, B, C}$  ist eine abgeschlossene Menge, wenn

a)  $A, B, C$  abgeschlossene Mengen in  $P_2$  sind,



b)  $C \supseteq A$ ,  $C \supseteq B$  gilt,

c)  $\{\alpha\} \not\subseteq A$  oder  $\{\alpha\} \not\subseteq B$  oder  $B = C$  erfüllt ist.

Beweis: Jede Funktion  $f^{n,m}$  aus  $K_{A,B,C}$ , die den Voraussetzungen genügt, hat die Form

$$f^{n,m} = \bigvee_{\tilde{\tau} \in \{\alpha, 3\}^m} f_{/\tilde{\tau}} E_{\tilde{\tau}}^m \text{ mit } f_{/2} \in A, f_{/3} \in B \text{ und } f_{/\tilde{\tau}} \in C.$$

Andererseits gehört jede Funktion von dieser Form zu  $K_{A,B,C}$ .

Die Operationen i bis iii ändern nichts an dieser Form. Bei der Operation iv betrachten wir zunächst Einsetzungen an Stelle von x-Variablen. O.B.d.A. werde die Funktion

$$g(x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_m) = g_{/\alpha} E_{\alpha}^m \vee g_{/3} E_3^m \vee \bigvee_{\tilde{\tau}^m \neq \tilde{\alpha}, \tilde{3}} g_{/\tilde{\tau}} E_{\tilde{\tau}}^m$$

in die Variable  $x_1$  von  $f$  eingesetzt; Für die sich ergebende Funktion  $h(x_2, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, y_1, \dots, y'_m)$  ist auf Grund der Voraussetzungen

$$h_{/\alpha} = f_{/\alpha} (g_{/\alpha} (x'_1, \dots, x'_n), x_2, \dots, x_n) \in A,$$

$$h_{/3} = f_{/3} (g_{/3} (x'_1, \dots, x'_n), x_2, \dots, x_n) \in B,$$

$$h_{/\tilde{\tau}} = f_{/\tilde{\tau}} (g_{/\tilde{\tau}} (x'_1, \dots, x'_n), x_2, \dots, x_n) \in C,$$

und damit ist  $h$  in  $K_{A,B,C}$  enthalten.

Nun betrachten wir Einsetzungen an Stelle von y-Variablen. Im Falle  $\alpha = 2$  sind diese nicht möglich. (Wir bemerken, daß c) im Falle  $\alpha = 2$  automatisch erfüllt ist.) Im Falle  $\alpha = 0$  sind derartige Einsetzungen nur möglich, wenn  $0 \in A$  und  $0 \in B$ . Dann ist nach Voraussetzung  $B = C$ . Setzt man o.B.d.A.  $0(y)$  für die Variable  $y_1$  in die Funktion  $f^{n,m} \in P_{\Sigma_0}$  ein,

$$g(x_1, \dots, x_n, y, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n, 0(y), y_2, \dots, y_m),$$

so ergibt sich  $g_{/0} = f_{/0}$ ,  $g_{/3} = f_{/0,3,\dots,3}$ . Wegen  $B = C$  ist auch die Funktion  $g$  in  $K_{A,B,C}$  enthalten, wenn  $f$  der Menge angehört. (Es ist leicht zu überprüfen, daß das letztere unabhängig von der Darstellung der Funktion  $0$  ist.)

**Lemma 4:** 1. Seien  $A, A', B, C$  abgeschlossene Mengen von Funktionen aus  $P_2$ , die die Bedingungen  $A \supseteq [\{x\}]$ ,  $A$  ist maximal in  $A'$ ,  $C \supseteq A'$ ,  $C \supseteq B$  sowie  $\{\alpha\} \not\supseteq A$  oder  $\{\alpha\} \not\supseteq B$  erfüllen. Dann gilt:  $K_{A,B,C}$  ist maximal in  $K_{A',B,C}$

$K_{B,A,C}$  ist maximal in  $K_{B,A',C}$

2. Seien  $A, A', B, B'$  abgeschlossene Mengen von Funktionen aus  $P_2$ , die die Bedingungen  $A, B \supseteq [\{x\}]$ ,  $A$  ist maximal in  $A'$ ,  $B$  ist maximal in  $B'$  sowie  $B \supseteq A' \supseteq \{0\}$  erfüllen.

Dann gilt:  $K_{A',B,B}$  ist maximal in  $K_{A',B',B}$  für  $\alpha = 0$ ,

$K_{A,B,B}$  ist maximal in  $K_{A',B,B}$

**Beweis:** Da die Bedingungen von Lemma 3 erfüllt sind, ist die Abgeschlossenheit der betrachteten Mengen klar. Zum Beweis von 1. sei  $f^{n,m} \in K_{A',B,C} \setminus K_{A,B,C}$ . Dann ist  $f/\alpha \in A' \setminus A$ .

Sei  $g$  eine beliebige Funktion aus  $K_{A',B,C}$ . Für die Erzeugung von  $g/\alpha$  aus  $A$  und  $f/\alpha$  gibt es eine bestimmte Folge von Superpositionen. Eine analoge Folge liefert aus  $f$  und Funktionen aus  $K_{A,B,C}$  eine Funktion  $g'$  mit  $g'/\alpha = g/\alpha$ . Zu  $K_{A,B,C}$  gehört auch die Funktion  $h(x, \dots) = x \in_{\alpha}^{m'} \vee A_3^{g^{n',m'}}$ . Durch Einsetzen der Funktion  $g'$  in  $h$  für die Variable  $x$  erhalten wir die Funktion  $g$ . Damit ist  $g \in [K_{A,B,C} \cup \{f\}]$  und also  $K_{A,B,C}$  maximal in  $K_{A',B,C}$ . Die zweite Behauptung in 1. wird analog bewiesen.

Zum Beweis von 2. sei  $f^{n,m} \in K_{A',B',B} \setminus K_{A',B,B}$ . Dann gibt es ein  $m$ -tupel  $\tilde{f} \neq \tilde{0}$  mit  $f/\tilde{f} \in B' \setminus B$ . Durch Identifizieren von entsprechenden Variablen kann man eine Funktion  $f_1^{n,2}$ , für die  $f_{1/03} \in B' \setminus B$ , oder eine Funktion  $f_2^{n,1}$ , für die  $f_{2/3} \in B' \setminus B$  gilt, gewinnen. Durch Hinzufügen von fiktiven  $y$ -Variablen oder Einsetzen der Null oder beides kann man für ein beliebiges Tupel  $\tilde{0}$  aus Nullen und Dreien,  $\tilde{0} \neq \tilde{0}$ , eine Funktion  $f_{\tilde{0}}$  erzeugen mit  $f_{\tilde{0}}/\tilde{0} \in B' \setminus B$ . Demzufolge liegt für jede  $(n', m')$ -stellige

Funktion  $g$  aus  $K_{A',B',B'}$  in der Menge  $[K_{A',B,B} \cup \{f\}]$  eine solche Funktion  $g_{\tilde{\alpha}_1}$ , für die  $g_{\tilde{\alpha}_1}/\tilde{\alpha}_1 = g/\tilde{\alpha}_1 \in B'$  gilt, wobei  $\tilde{\alpha}_1$  beliebig aus  $\{0,3\}^{m'} \setminus \{\tilde{0}\}$  gewählt ist. Da nach Voraussetzung auch die Funktion  $h(\tilde{x}', \tilde{y}', x_2, \dots, x_{2^{m'}})$  mit

$$h = g/0 \in E_0^{m'} \vee \bigvee_{\tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{0}} x_1 \in E_{\tilde{\alpha}_1}^{m'}$$

in  $K_{A',B,B}$  liegt, aus der durch Einsetzen der Funktionen  $g_{\tilde{\alpha}_1}$  an Stelle der Variablen  $x_1$  die Funktion  $g$  erzeugt wird, ist  $[K_{A',B,B} \cup \{f\}] = K_{A',B',B'}$ , womit die erste Behauptung bewiesen ist. Die zweite Behauptung wird analog zu 1. bewiesen.

Bemerkung: Auf Grund der Folgerung aus Lemma 1 sind nachfolgende Beziehungen klar:

$$H_a([M]) = [H_a(M)] \quad \text{für } M \in P_{\Sigma_2},$$

$$H_0([M]) = [H_0(M)] \quad \text{für } M \in P_{\Sigma_0},$$

$$H_3([M]) = [H_3(M)] \quad \text{für } M \in P_{\Sigma_0} \text{ und } M \neq \{0\}$$

$$\text{oder } M = K_{A,B,B}, B \supseteq A.$$

Diese Beziehungen liegen den Beweisen von Lemma 4,5 und 6 zugrunde.

Lemma 5: Wenn die Teilmenge  $M$  von  $K_{A,B,C}$ , wobei  $A, B, C$  abgeschlossene Mengen in  $P_2$  sind, die  $\{x\}$  enthalten, und für die  $A \subseteq C, B \subseteq C$  sowie im Falle  $\alpha = 0$  auch  $A \cap B \neq \{0\}$  oder  $B = C$  gilt, keine Teilmenge einer der Mengen des Typs  $K_{A,B',C}$ , wobei  $B'$  maximal in  $B$  ist, und keine Teilmenge einer der Mengen des Typs  $K_{A',B,C}$ , wobei  $A'$  maximal in  $A$  ist, darstellt, so liegt in  $[M]$  für beliebige  $f \in A$  und beliebige  $g \in B$  eine Funktion  $f'$  bzw.  $g'$  mit  $f'/\alpha = f$  bzw.  $g'/3 = g$ .

**Beweis:** Durch die Voraussetzungen ist die Existenz, Abgeschlossenheit und Maximalität der betrachteten Mengen gewährleistet. Da  $M$  keine Teilmenge der Klassen  $K_{A',B,C}$  ist, ist  $H_\alpha(M)$  keine Teilmenge der Klassen  $A'$ . Folglich ist  $[H_\alpha(M)] = A$  und also  $H_\alpha([M]) = A$ . Analog erhält man  $H_3([M]) = B$ .

**Lemma 6:** Eine Teilmenge  $M$  von  $K_{A,B,C}$ , wobei für  $A, B, C$  die Voraussetzungen des Lemmas 5 zutreffen, ist in  $K_{A,B,C}$  vollständig, wenn  $M$  die Bedingungen des Lemmas 5 erfüllt und außerdem zum Abschluß von  $M$  die Funktion

$$x_1 e_\alpha(y) \vee x_2 e_3(y) =: x^{(1)}$$

sowie gewisse Funktionen  $\text{Bas}_1^{n,2}(i=1,\dots,p)$ , für die  $[\{\text{Bas}_{1/\alpha 3} | i=1,\dots,p\}] = C$  ist, gehören.

**Beweis:** Die Funktionen  $x^{(m)}(x_1, \dots, x_{2^m}, y_1, \dots, y_m)$  mit

$$x^{(m)} = \bigvee_{i=1}^{2^m} x_i \in \tilde{e}_1^m, \text{ wo } \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2^m}\} = \{\alpha, 3\}^m \text{ ist.}$$

sind für beliebiges  $m$  Superpositionen über der Funktion  $x^{(1)}$ .

Es sei  $\tilde{e}_1 = \tilde{\alpha}$  und  $\tilde{e}_{2^m} = \tilde{3}$ . Für eine beliebige Funktion

$F \in K_{A,B,C}$  existiert in  $[M]$  nach Lemma 5 eine Funktion  $f_\alpha$  mit  $f_{\alpha/\alpha} = F/\alpha$  und eine Funktion  $f_3$  mit  $f_{3/3} = F/3$ . Als Superposition über der Menge der Funktionen  $\text{Bas}_1$  existiert in  $[M]$  für jede Funktion  $F/\tilde{\tau}$  ( $\tilde{\tau} \neq \tilde{\alpha}, \tilde{\tau} \neq \tilde{3}$ ) eine Funktion  $f_{\tilde{\tau}}$ , so daß  $f_{\tilde{\tau}/\tilde{\tau}} = F/\tilde{\tau} \in C$  ist. Durch entsprechende Einsetzungen in die Variablen  $x_i$  der Funktion  $x^{(m)}$  ergibt sich die Funktion  $F$ , die somit in  $[M]$  liegt.

Als Folgerung aus den angeführten Lemmata ergibt sich folgender

**Satz 1:** Für  $\alpha = 2$  bildet die Menge aller Klassen des Typs  $K_{A,B,P_2}$ , wobei  $A, B$  abgeschlossene Mengen Boolescher Funktionen

sind, die  $\{x\}$  enthalten, einen algebraisch vollständigen Verband mit dem kleinsten Element  $K_{\{x\}, \{x\}, P_2}$  und dem größten Element  $K_{P_2, P_2, P_2}$ . Die in diesem Verband vorhandenen Ketten sind nicht weiter verfeinerbar, der Verband  $\mathcal{L}_2$  ist in diesen Verband ordnungseinbettbar.

Für  $\alpha = 0$  bildet die Menge aller Klassen des Typs  $K_{A, B, P_2}$ , wobei  $A, B$  abgeschlossenen Mengen Boolescher Funktionen sind, die  $\{x\}$  enthalten, für jedes feste  $A$  mit  $A \neq \{0\}$  und für jedes feste  $B$  mit  $B \neq \{0\}$  jeweils einen algebraisch vollständigen Verband mit dem kleinsten Element  $K_{A, \{x\}, P_2}$  bzw.  $K_{\{x\}, B, P_2}$  und dem größten Element  $K_{A, P_2, P_2}$  bzw.  $K_{P_2, B, P_2}$ . Die in diesen Verbänden vorhandenen Ketten sind nicht weiter verfeinerbar, der Verband  $\mathcal{L}_2$  ist jedem dieser Verbände isomorph.

## Literatur

- /1/ Jablonskij, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.:  
Boolesche Funktionen und Postsche Klassen.  
Berlin 1970
- /2/ Kudrjavcev, V. B., Burosch, G., und Blochina, G. N.:  
Vollständigkeitsbedingungen für zwei Algebren vom  
Postschen Typ. Math. Balkanica 3, 281 - 296 (1973)
- /3/ Lau, D.: Basen und Ordnungen der maximalen Klassen zweier  
mehrsortiger Funktionenalgebren. Preprint  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 1980
- /4/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Rela-  
tionenalgebren. Berlin 1979
- /5/ Burosch, G., Dassow, J., Harnau, W., und Lau, D.:  
Ober Algebren von Prädikaten. Preprint  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 1980

eingereicht: 22. 12. 1980

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. Eberhard Schmidt  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Konrad Engel

Optimalitätsaussagen über Tripelesysteme1. Einführung

Wir interpretieren ein von Ketone in /5/ gestelltes Problem in der folgenden Weise: Die Anzahl  $f$  ( $f > 0$ ) von ungeordneten, u. U. mehrfach auftretenden Tripeln über einer  $n$ -Menge ( $n \geq 3$ ) sei gegeben. Die Valenz eines ungeordneten Paares von Elementen aus der  $n$ -Menge definieren wir als Anzahl derjenigen Tripel, die dieses Paar enthalten (treten Tripel mehrfach auf, so zählen wir sie hierbei auch entsprechend oft). Man minimiere die maximale Valenz der Paare mit Elementen aus der  $n$ -Menge. Kann man für beliebige  $n$  und  $f$  die  $f$  Tripel so wählen, daß sich die Valenzen höchstens um 2 unterscheiden?

Im folgenden wird dieses Problem vollständig gelöst. Als Folgerung ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes von Henani über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von balancierten unvollständigen Blockplänen mit  $k = 3$  und beliebigem  $\lambda$  (vgl. /3/, 15.4.).

Die Ausgangsmenge sei (bis auf wenige, speziell angemerkte Ausnahmen) stets  $N = \{1, \dots, n\}$ . Ein Paar  $(x, y)$  bzw. ein Tripel  $(x, y, z)$  soll hier durchweg eine Zweiermenge bzw. Dreiermenge aus paarweise verschiedenen Elementen bedeuten. Betrachtet werden Systeme aus solchen Paaren bzw. Tripeln. Ein System kann ein Element mehrfach enthalten. Zwei Systeme heißen gleich, wenn jedes Element in einem System genauso oft wie im anderen System vorkommt. Sind  $U$  und  $T$  zwei Systeme, so sei  $U \cup T$  dasjenige System, welches aus dem einen durch Hinzufügen des anderen entsteht.  $|U|$  bedeute die Anzahl der Elemente von  $U$ , wobei jedes Element entsprechend oft gezählt wird. Alle Variablen, die wir benutzen, mögen die Menge der natürlichen Zahlen als Variabilitätsbereich besitzen.

Es sei  $B_{n, \lambda}$  ein System von Tripeln mit Elementen aus der  $n$ -Menge, so daß die Valenz jedes Paares höchstens  $\lambda$  beträgt.

Wir nennen  $B_{n,\lambda}$  in Anlehnung an Spencer (/8/)  $\lambda$ -konsistent. Die Menge aller solcher Systeme bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}_{n,\lambda}$ . Weiter sei  $V(B_{n,\lambda})$  das System der Paare, die man noch zu den durch die Tripel von  $B_{n,\lambda}$  ausgeschöpften Paaren hinzufügen müßte, damit jedes Paar von Elementen aus  $N$  genau  $\lambda$ -mal auftritt. Unter  $B_{n,0}$  und  $V(B_{n,0})$  wollen wir die leere Menge verstehen. Wir definieren

$$b_{n,\lambda}^* := \max_{B_{n,\lambda} \in \mathcal{B}_{n,\lambda}} |B_{n,\lambda}|. \quad (1)$$

Systeme mit  $|B_{n,\lambda}| = b_{n,\lambda}^*$  nennen wir maximal  $\lambda$ -konsistent. Wir kennzeichnen diese durch einen Stern ( $B_{n,\lambda}^*$ ), wenn wir darauf hinweisen wollen, daß sie maximal  $\lambda$ -konsistent sind. Die Lösung der Aufgabe erfolgt in zwei Schritten. Zuerst ermitteln wir  $b_{n,\lambda}^*$  und nach einer Methode des "Hinzufügens" wenigstens ein  $B_{n,\lambda}^*$ . Im Anschluß daran zeigen wir, daß die in der Aufgabe gesuchte kleinste maximale Valenz der Paare eines Tripelsystems aus  $f$  Tripeln ( $f$ -Tripelsystem) gleich einem gewissen  $b_{n,\lambda}^*$  ist. Außerdem benutzen wir die von uns konstruierten maximal  $\lambda$ -konsistenten Systeme, um zu beweisen, daß es immer  $f$ -Tripelsysteme gibt, bei denen sich die Valenzen der Paare höchstens um 2 unterscheiden.

## 2. Formulierung und Beweis eines vorbereitenden Satzes

Da man aus  $N$  genau  $\frac{n}{2}(n-1)$  Paare bilden kann und jedes Tripel genau 3 Paare ausschöpft, gilt

$$3 |B_{n,\lambda}| + |V(B_{n,\lambda})| = \lambda \frac{n}{2}(n-1). \quad (2)$$

Es sei  $b_{n,\lambda}^1$  bzw.  $v_{n,\lambda}^1$  die Zahl der Tripel bzw. Paare aus  $B_{n,\lambda}$  bzw.  $V(B_{n,\lambda})$  (mit Berücksichtigung der Vielfachheit), welche das Element 1 enthalten ( $1 \in N$ ). Da man aus  $N$  genau  $n-1$  Paare bilden kann, die 1 enthalten, und jedes Tripel genau zwei 1 enthaltende Paare ausschöpft, gilt

$$2 b_{n,\lambda}^1 + v_{n,\lambda}^1 = \lambda(n-1). \quad (3)$$



Daher ist  $b_{n,\lambda}^1 \leq \left\lfloor \frac{\lambda(n-1)}{2} \right\rfloor$ .

Zählen wir in zweierlei Weise das Auftreten von Elementen der  $n$ -Menge in den Tripeln ab, so erhalten wir

$$3|B_{n,\lambda}| = \sum_{i=1}^n b_{n,\lambda}^i \leq n \left\lfloor \frac{\lambda(n-1)}{2} \right\rfloor. \text{ Folglich gilt}$$

$$|B_{n,\lambda}| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{\lambda}{2} (n-1) \right\rfloor \right\rfloor, \text{ und wir setzen}$$

$$\mu_{n,\lambda} := \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{\lambda}{2} (n-1) \right\rfloor \right\rfloor.$$

Satz 1: Es ist

$$b_{n,\lambda}^* = \begin{cases} \mu_{n,\lambda} - 1, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{6}, \lambda \equiv 4 \pmod{6} \text{ oder} \\ & n \equiv 5 \pmod{6}, \lambda \equiv 1 \pmod{6}, \\ \mu_{n,\lambda} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Wir haben  $b_{n,\lambda}^* \leq \mu_{n,\lambda}$  schon gezeigt. Angenommen, in den beiden Ausnahmefällen gäbe es Systeme mit  $|B_{n,\lambda}| = \mu_{n,\lambda}$ . Aus (2) folgt  $|V(B_{n,\lambda})| = \lambda \frac{n}{2} (n-1) - 3\mu_{n,\lambda} = 1$ , wie man leicht nachrechnet. Das System  $V(B_{n,\lambda})$  besteht also aus genau einem Paar, und es sei  $V(B_{n,\lambda}) := \{(1, j)\}$  ( $1, j \in N$ ). Nun gilt  $v_{n,\lambda}^1 = 1$ . Das widerspricht jedoch (3), denn die linke Seite von (3) ist ungerade und die rechte gerade. Folglich ist in den Ausnahmefällen  $b_{n,\lambda}^* \leq \mu_{n,\lambda} - 1$ .

Für den Beweis genügt es nun,  $\lambda$ -konsistente Tripelsysteme  $B_{n,\lambda}$  anzugeben, für die  $|B_{n,\lambda}|$  die geforderte Größe hat. Es handelt sich dann um maximal  $\lambda$ -konsistente Systeme  $B_{n,\lambda}^*$ . Im folgenden werden wir solche Systeme  $B_{n,\lambda}^*$  mit kleinem  $\lambda$  rekursiv bez.  $\lambda$  konstruieren. Wir führen dies immer nur bis zu einem solchen  $\lambda_0(n)$  aus, für das  $V(B_{n,\lambda_0(n)}^*) = \emptyset$  gilt. Wie die Konstruktion

bei größeren  $\lambda$  zu erfolgen hat, zeigen wir im Anschluß an das Folgende.

Der Fall  $\lambda = 1$  wurde in /8/ behandelt. Bevor wir die rekursive Konstruktion im einzelnen angeben, wollen wir die Methode erläutern. Ist ein  $B_{n,\lambda}^*$  gegeben, so bilden wir ein  $B_{n,\lambda+1}^*$  durch

Hinzufügen eines von Fall zu Fall verschiedenen Systems  $U$  zu  $B_{n,\lambda}^*$ . Dieses hat i. allg. die Form  $U = B_{n',1}^* \cup T$ , wobei  $n' = n$  oder  $n' = n - 1$  und  $T$  ein weiteres Tripelsystem ist. Wir müssen uns davon überzeugen, daß  $B_{n,\lambda}^* \cup B_{n',1}^* \cup T$  ein  $(\lambda+1)$ -konsistentes System, d. h. in  $\mathcal{S}_{n,\lambda+1}$  enthalten ist. Offenbar gilt  $B_{n,\lambda}^* \cup B_{n',1}^* \in \mathcal{S}_{n,\lambda+1}$ . Wir setzen  $B_{n,\lambda+1} := B_{n,\lambda}^* \cup B_{n',1}^*$ . Bildet man das System  $T$  dann so, daß  $T$  nur Paare ausschöpft, die in  $V(B_{n,\lambda+1})$  enthalten sind, so ist sicher  $B_{n,\lambda+1} := B_{n,\lambda+1} \cup T \in \mathcal{S}_{n,\lambda+1}$ . Zuletzt ist zu prüfen, ob

$$|V(B_{n,\lambda+1}^*)| = \begin{cases} \lambda \frac{n}{2}(n-1) - 3(\mu_{n,\lambda} - 1), & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{6}, \lambda \equiv 4 \pmod{6} \\ & \text{oder } n \equiv 5 \pmod{6}, \lambda \equiv 1 \pmod{6}, \\ \lambda \frac{n}{2}(n-1) - 3\mu_{n,\lambda} & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Dies kann man in jedem Fall leicht durch Ausrechnen verifizieren. Wegen (2) ist dann gezeigt, daß  $|B_{n,\lambda+1}^*|$  wirklich die geforderte Größe besitzt. Die Existenz der bei der Konstruktion verwendeten  $B_{n',1}^*$  folgt immer aus /8/, Theorem 3. Wir weisen nicht jedes Mal erneut darauf hin. Weiter verwenden wir bei der Bildung von  $B_{n,\lambda+1}^*$  dasjenige  $B_{n,\lambda}^*$ , welches wir vorher konstruiert hatten.

## 2.1. Die Fälle $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$

Nach /8/ existieren schon für  $\lambda = 1$  Systeme mit  $V(B_{n,1}^*) = \emptyset$ . Es handelt sich um Steinertripelsysteme.

## 2.2. Der Fall $n \equiv 0 \pmod{6}$

Es existieren Systeme  $B_{n,1}^*$  mit  $V(B_{n,1}^*) = \{(1,3), (2,4), (5,6), (7,8), \dots, (n-1,n)\}$  und  $B_{n-1,1}^*$  mit  $V(B_{n-1,1}^*) = \{(1,2), (2,3), (3,n-1), (n-1,1)\}$ .

Für  $B_{n,2} := B_{n,1}^* \cup B_{n-1,1}^*$  gilt  $V(B_{n,2}) = \{(1,3), (2,4), (5,6), (7,8), \dots, (n-1,n), (1,2), (2,3), (3,n-1), (n-1,1), (1,n), (2,n), \dots, (n-1,n)\}$ . Mit  $T := \{(1,2,3), (1,n-1,n), (3,n-1,n), (2,4,n), (5,6,n), (7,8,n), \dots, (n-3,n-2,n)\}$  gilt  $B_{n,2}^* := B_{n,2} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,2}^*) = \emptyset$  ist.

### 2.3. Der Fall $n \equiv 2 \pmod{6}$

2.3.1.  $\lambda = 2$ : Wir wählen  $B_{n,1}^*$  so, daß  $V(B_{n,1}^*) = \{(1,2), (3,4), \dots, (n-1,n)\}$  ist. Des weiteren existiert ein Steinertripelsystem  $B_{n-1,1}^*$ . Für  $B_{n,2} := B_{n,1}^* \cup B_{n-1,1}^*$  gilt  $V(B_{n,2}) = \{(1,2), (3,4), \dots, (n-1,n), (1,n), (2,n), \dots, (n-1,n)\}$ . Mit  $T := \{(1,2,n), (3,4,n), \dots, (n-3,n-2,n)\}$  erhalten wir

$B_{n,2}^* := B_{n,2} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,2}^*) = \{(n-1,n), (n-1,n)\}$  ist.

2.3.2.  $\lambda = 3$ : Wir wählen  $B_{n,1}^*$  so, daß  $V(B_{n,1}^*) = \{(1,n), (2,n-1), (3,4), (5,6), \dots, (n-3,n-2)\}$  ist. Für  $B_{n,3} := B_{n,2}^* \cup B_{n,1}^*$  gilt dann  $V(B_{n,3}) = \{(n-1,n), (n-1,n), (1,n), (2,n-1), \dots, (n-3,n-2)\}$ .

Es ist schon  $B_{n,3} = B_{n,3}^*$  wegen  $|V(B_{n,3})| = \frac{n}{2} + 2$ .

2.3.3.  $\lambda = 4$ : Wir wählen ein Steinertripelsystem  $B_{n-1,1}^*$  über der  $(n-1)$ -Menge  $\{2, \dots, n\}$ . Für  $B_{n,4} := B_{n,3}^* \cup B_{n-1,1}^*$  gilt  $V(B_{n,4}) = \{(n-1,n), (n-1,n), (1,n), (2,n-1), (3,4), (5,6), \dots, (n-3,n-2), (1,2), (1,3), \dots, (1,n)\}$ . Mit  $T := \{(1,2,n-1), (1,3,4), (1,5,6), \dots, (1,n-3,n-2)\}$  erhalten wir

$B_{n,4}^* := B_{n,4} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,4}^*) = \{(1,n), (1,n), (n-1,n), (n-1,n)\}$  ist.

2.3.4.  $\lambda = 5$ : Wir wählen  $B_{n,1}^*$  so, daß  $V(B_{n,1}^*) = \{(1,n-1), (2,n), (3,4), (5,6), \dots, (n-3,n-2)\}$  ist. Für  $B_{n,5} := B_{n,4}^* \cup B_{n,1}^*$  gilt  $V(B_{n,5}) = \{(1,n), (1,n), (n-1,n), (n-1,n), (1,n-1), (2,n), (3,4), \dots, (n-3,n-2)\}$ . Mit  $T := \{(1,n-1,n)\}$  erhalten wir  $B_{n,5}^* = B_{n,5} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,5}^*) = \{(n-1,n), (1,n), (2,n), (3,4), (5,6), \dots, (n-3,n-2)\}$ , d. h.  $|V(B_{n,5}^*)| = \frac{n}{2} + 1$  ist.

2.3.5.  $\lambda = 6$ : Wir wählen ein Steinertripelsystem  $B_{n-1,1}^*$  über der  $(n-1)$ -Menge  $\{2, \dots, n\}$ . Für  $B_{n,6} := B_{n,5}^* \cup B_{n-1,1}^*$  gilt

$V(B_{n,6}) = \{(n-1,n), (1,n), (2,n), (3,4), (5,6), \dots, (n-3,n-2), (1,2), (1,3), \dots, (1,n)\}$ . Mit  $T := \{(1,n-1,n), (1,2,n), (1,3,4), (1,5,6), \dots, (1,n-3,n-2)\}$  erhalten wir  
 $B_{n,6}^* := B_{n,6} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,6}^*) = \emptyset$  ist.

#### 2.4. Der Fall $n \equiv 4 \pmod{6}$

Wir wählen  $B_{n,1}^*$  so, daß  $V(B_{n,1}^*) = \{(1,2), (2,3), (2,4), (5,6), (7,8), \dots, (n-1,n)\}$  ist. Des weiteren sei  $B_{n-1,1}^*$  ein Steinertripelsystem über der  $(n-1)$ -Menge  $\{2, \dots, n\}$ . Für  $B_{n,2} := B_{n,1}^* \cup B_{n-1,1}^*$  gilt  $V(B_{n,2}) = \{(1,2), (2,3), (2,4), (5,6), (7,8), \dots, (n-1,n), (1,2), (1,3), \dots, (1,n)\}$ . Mit  $T := \{(1,2,3), (1,2,4), (1,5,6), (1,7,8), \dots, (1,n-1,n)\}$  erhalten wir  
 $B_{n,2}^* := B_{n,2} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,2}^*) = \emptyset$  ist.

#### 2.5. Der Fall $n \equiv 5 \pmod{6}$

2.5.1.  $\lambda = 2$ : Wir wählen zwei Systeme  $B_{n,1}^{*'}$  und  $B_{n,1}^{*''}$  so, daß  $V(B_{n,1}^{*'}) = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$  und  $V(B_{n,1}^{*''}) = \{(1,3), (3,2), (2,4), (4,1)\}$  ist. Mit  $T := \{(1,2,3), (2,3,4)\}$  erhalten wir  $B_{n,2}^* := B_{n,1}^{*'} \cup B_{n,1}^{*''} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,2}^*) = \{(1,4), (1,4)\}$  ist.

2.5.2.  $\lambda = 3$ : Wir wählen  $B_{n,1}^*$  so, daß  $V(B_{n,1}^*) = \{(1,2), (2,4), (4,3), (3,1)\}$  ist. Für  $B_{n,3} := B_{n,2}^* \cup B_{n,1}^*$  gilt  $V(B_{n,3}) = \{(1,4), (1,4), (1,2), (2,4), (4,3), (3,1)\}$ . Mit  $T := \{(1,2,4), (1,3,4)\}$  erhalten wir  
 $B_{n,3}^* := B_{n,3} \cup T$ , wobei  $V(B_{n,3}^*) = \emptyset$  ist.

Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen.

Wir erinnern daran, daß  $\lambda_0(n)$  die kleinste positive, ganze Zahl war, für die  $V(B_{n,\lambda_0(n)}^*) = \emptyset$  ist. Wie wir eben ermittelt haben, gilt

$$\lambda_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv 1, 3 \pmod{6}, \\ 2 & \text{für } n \equiv 0, 4 \pmod{6}, \\ 3 & \text{für } n \equiv 5 \pmod{6}, \\ 6 & \text{für } n \equiv 2 \pmod{6}. \end{cases} \quad (4)$$

Um jetzt allgemein  $B_{n,\lambda}^*$  mit  $\lambda > \lambda_0(n)$  zu konstruieren, zerlegen wir  $\lambda$  in  $\lambda = q\lambda_0(n) + r$  ( $0 \leq r < \lambda_0(n)$ ). Ein maximal  $\lambda$ -konsistentes System ist

$$B_{n,\lambda}^* := \underbrace{B_{n,\lambda_0(n)}^* \uplus \dots \uplus B_{n,\lambda_0(n)}^*}_{q\text{-mal}} \uplus B_{n,r}^*, \text{ wobei} \quad (5)$$

$V(B_{n,\lambda}^*) = V(B_{n,r}^*)$  gilt. Damit ist Satz 1 bewiesen.

### 3. Bemerkungen

3.1. Ein bekannter Satz von Hanani (vgl. /3/, S. 337) lautet: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines balancierten unvollständigen Blockplanes mit  $k = 3$  und beliebigem  $\lambda$  ist, daß  $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{2}$  und  $\lambda n(n-1) \equiv 0 \pmod{6}$  gilt. Beachtet man, daß es sich hierbei um Tripelsysteme  $B_{n,\lambda}$  mit  $V(B_{n,\lambda}) = \emptyset$  handelt, so ergibt sich der Beweis des Satzes sofort aus (2) bis (5). Die Arbeit /8/ basiert nicht auf dem Satz von Hanani. In der Einfachheit der praktischen Konstruktion von balancierten unvollständigen Blockplänen scheint unser Verfahren eine Zwischenstellung zwischen Hananis ursprünglicher Methode und der direkten Methode von Hwang und Lin /4/ einzunehmen.

3.2. Unabhängig von /8/ gibt es noch weitere Methoden, maximal 1-konsistente Systeme  $B_{n,1}^*$  zu konstruieren. Schon 1847 löste Kirkman /6/ dieses Problem. Jedoch beging er in den Fällen  $n \equiv 4, 5 \pmod{6}$  einen Fehler, der 1895 von Brunel /1/ bemerkt wurde. Aber auch diese beiden Fälle können mit einer entsprechend modifizierten Kirkman-Methode behandelt werden.

3.3. Für alle positiven ganzen Zahlen  $n$  und  $\lambda$  lassen sich Systeme  $B_{n,\lambda+1}^*$  und  $B_{n,\lambda}^*$  mit  $B_{n,\lambda+1}^* = B_{n,\lambda}^* \uplus U$  angeben. Hierbei ist  $U$  wieder ein Tripelsystem. Für  $\lambda = 0$  ist dies trivial und

für  $0 < \lambda < \lambda_0(n)$  können wir  $B_{n,\lambda}^*$ ,  $B_{n,\lambda+1}^*$  und  $U$  aus unserer rekursiven Konstruktionsmethode entnehmen.

Ist  $\lambda = q\lambda_0(n) + r$  ( $q \geq 1$ ,  $0 \leq r < \lambda_0(n)$ ), so finden wir  $B_{n,r+1}^*$  und  $B_{n,r}^*$  mit  $B_{n,r+1}^* = B_{n,r}^* \cup U$ , wie wir eben gesehen haben.

Mit  $B_{n,\lambda}^* := \underbrace{B_{n,\lambda_0(n)}^* \cup \dots \cup B_{n,\lambda_0(n)}^*}_{q\text{-mal}} \cup B_{n,r}^*$  und

$B_{n,\lambda+1}^* := \underbrace{B_{n,\lambda_0(n)}^* \cup \dots \cup B_{n,\lambda_0(n)}^*}_{q\text{-mal}} \cup B_{n,r+1}^*$  gilt

$$B_{n,\lambda+1}^* = B_{n,\lambda}^* \cup U.$$

#### 4. Lösung des Problems

Wir kehren nun zur ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Seien  $\underline{v}$  bzw.  $\bar{v}$  die größte bzw. kleinste Valenz der Paare eines  $f$ -Tripelsystems. Wir bezeichnen mit  $\nu^*$  das Minimum von  $\bar{v}$  und mit  $d^*$  das Minimum von  $\bar{v} - \underline{v}$  bez. aller  $f$ -Tripelsysteme. Schließlich sei

$$\tau := \min \{ \lambda : b^*(n, \lambda) \geq f \}. \quad (6)$$

Satz 2: Es gilt  $\nu^* = \tau$  und  $d^* \leq 2$ .

Beweis: Angenommen, es wäre  $\nu^* < \tau$ . Dann gilt wegen (6)  $b_{n,\nu^*}^* < f$ .

Aus der Definition von  $\nu^*$  folgt, daß es ein Tripelsystem mit  $f$  Tripeln gibt, in dem die maximale Valenz der Paare  $\nu^*$  ist; mit anderen Worten, es existiert ein  $\nu^*$ -konsistentes  $f$ -Tripelsystem.

Aus (1) folgt aber  $b_{n,\nu^*}^* \geq f$ , und so erhalten wir einen Widerspruch. Es reicht also für den ersten Teil des Satzes aus zu zeigen, daß es  $f$ -Tripelsysteme mit  $\bar{v} = \tau$ , d. h.  $\tau$ -konsistente

$f$ -Tripelsysteme gibt. Hierzu wählen wir  $B_{n,\tau-1}^*$  und  $B_{n,\tau}^*$  so, daß  $B_{n,\tau}^* = B_{n,\tau-1}^* \cup U$  gilt. Dies möge so geschehen, wie es in Bemerkung 3.3. formuliert ist. Wir fassen in  $W$  beliebige

$f - b_{n,\tau-1}^*$  Tripel von  $U$  zusammen. Das ist wegen  $b_{n,\tau-1}^* < f \leq b_{n,\tau}^*$

(Beziehung (6)) möglich.

Nun ist  $B_{n,\tau} := B_{n,\tau-1}^* \cup W$  ein  $\tau$ -konsistentes  $f$ -Tripelsystem.

Um die Aussage bez.  $d^*$  zu beweisen, benutzen wir das eben konstruierte System  $B_{n,\tau}$ . Ist  $n \equiv 1,3 \pmod{6}$ , so gilt  $\underline{v} \geq \tau-1$  und  $\bar{v} \leq \tau$ , also  $d^* \leq 1$ . Abgesehen von den Fällen  $n \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $\tau \equiv 3,4,5 \pmod{6}$  und  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $\tau \equiv 0 \pmod{3}$  gilt offensichtlich  $\underline{v} \geq \tau-2$  und  $\bar{v} \leq \tau$  (man betrachte  $V(B_{n,\tau-1}^*)$ ), also ist  $d^* \leq 2$ .

Fassen wir wie oben in  $W$  beliebige  $(f - b_{n,\tau-1}^*)$  Tripel von  $U$  zusammen, so können wir in den restlichen Fällen nur aussagen, daß  $\underline{v} \geq \tau-3$  ist. Enthält nun aber  $W$  auch noch dasjenige Tripel von  $U$ , welches das Paar ausschöpft, das zweimal in  $V(B_{n,\tau-1}^*)$  vorkommt, so gilt auch für diese Fälle  $\underline{v} \geq \tau-2$  und damit  $d^* \leq 2$ . Im Fall  $n \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $\tau \equiv 5 \pmod{6}$  gibt es zwar sogar zwei Paare, die zweimal in  $V(B_{n,\tau-1}^*)$  enthalten sind, nämlich  $(1,n)$  und  $(n-1,n)$ , aber es liegt  $(1,n-1,n)$  in  $U$ . Damit ist Satz 2 bewiesen.

## 5. Offene Probleme

5.1. Man entwickle eine direkte Konstruktionsmethode für  $B_{n,\lambda}^*$ .

5.2. Man behandle die anfangs gestellte Aufgabe unter der Zusatzbedingung, daß die Tripel im  $f$ -Tripelsystem höchstens einmal vorkommen. Offenbar muß dann  $f \leq \binom{n}{3}$  sein.

## Literatur

- /1/ Brunel, G.: Sur les triades formées avec  $6n-1$  et  $6n-2$  éléments. Procès-verbaux Soc. Sci. Phys. Nat. Bordeaux, 40 - 43 (1895 - 1896)
- /2/ Doyan, J., and Rosa, A.: An extended bibliography and survey of Steiner systems. In: Proc. seventh manitoba conference on numerical math. and computing. S. 297 - 361, Winnipeg 1977

- /3/ Hall, M.: Kombinatorika. Moskva 1977
- /4/ Hwang, F. K., and Lin, S.: A direct method to construct triple systems. J. Combin. Theory 17, 84 - 94 (1974)
- /5/ Katona, G. O. H.: Search using sets with small intersection. Preprint
- /6/ Kirkman, T. P.: On a problem in combinations. Cambridge and Dublin Math. J. 2, 191 - 204 (1847)
- /7/ Reiss, M.: Über eine Steinersche kombinatorische Aufgabe, welche im 45sten Band dieses Journals, Seite 181, gestellt worden ist. J. Reine Angew. Math. 56, 326 - 344 (1859)
- /8/ Spencer, J.: Maximal consistent families of triples. J. Combin. Theory 5, 1 - 8 (1968)

Ich danke Herrn A. Rosa für den Hinweis auf die Arbeit /8/.

eingegangen: 12. 01. 1981

Anschrift des Verfassers:

stud. math. Konrad Engel  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock



Hans-Dietrich O. F. Gronau  
Roland Reimer

Ober nichtisomorphe elementere blockwiederholungsfreie  
2-(8,4, $\lambda$ )-Blockpläne II

---

1. Einleitung und Resultate

In /3/ wurde gezeigt, daß blockwiederholungsfreie 2-(8,4, $\lambda$ )-Blockpläne nur für  $\lambda = 3, 6, 9, 12$  und  $15$  existieren können. Für  $\lambda \in \{3, 12, 15\}$  wurde jeweils die Anzahl der paarweise nichtisomorphen sowie der nichtisomorphen elementeren Blockpläne bestimmt<sup>1</sup>.

In dieser Arbeit wird die Anzahl der paarweise nichtisomorphen blockwiederholungsfreien Blockpläne für  $\lambda = 6$  und  $\lambda = 9$  bestimmt. In dem anschließenden dritten Teil wird schließlich die Anzahl der nichtisomorphen elementeren blockwiederholungsfreien Blockpläne ermittelt. Dabei ist das Ziel nicht nur die Bestimmung der Anzahl, sondern es wird auch, wie in /3/, aus jeder Klasse isomorpher Blockpläne ein Vertreter ermittelt. Zwar reicht die Kenntnis der elementeren Blockpläne aus, um alle paarweise nichtisomorphen Blockpläne zu erzeugen, doch ist das schon bei den hier behandelten Parametern mit außerordentlich großem Aufwand verbunden. Wir sehen deshalb diese Ergebnisse nicht nur als Hilferesultate für die Bestimmung der elementeren Blockpläne an, sondern messen ihnen, auch im Interesse von Anwendern, selbständige Bedeutung bei. Unsere Resultate wurden mittels eines Prozeßrechners PRS 4000 erzielt. Die dabei gemachten Erfahrungen zeigen, daß eine Bearbeitung "per Hand" praktisch unmöglich ist. Wir erzielten folgende Hauptresultate.

---

<sup>1</sup> Definitionen aller Begriffe findet man in /3/. Da wir uns auch sonst mehrfach auf /3/ beziehen werden, ist die Kenntnis von /3/ zweckmäßig.

Satz 1: Es gibt genau 164 paarweise nichtisomorphe blockwiederholungsfreie 2-(8,4,6)-Blockpläne.

Eine Liste von Vertretern der 164 Klassen isomorpher Blockpläne liegt den Autoren vor.

Wegen der eindeutigen Abbildung  $B' = B^*(8,4) - B''$  zwischen den 2-(8,4,6)-Blockplänen  $B'$  und den 2-(8,4,9)-Blockplänen  $B''$  folgt aus Satz 1 sofort:

Satz 2: Es gibt genau 164 paarweise nichtisomorphe blockwiederholungsfreie 2-(8,4,9)-Blockpläne.

Wir werden im folgenden unsere Methode zum Beweis von Satz 1 erläutern und die Zwischenresultate mitteilen.

## 2. Charakteristiken der Blockpläne

Für 2-(8,4,6)-Blockpläne ergeben sich als Parameter  $b = 28$  und  $r = 14$ .

Ähnlich wie in /3/ werden auch hier Blockpläne vorkommen, bei denen die  $\binom{8}{3}$  Tripel mit verschiedenen Häufigkeiten auftreten. Wir ordnen jedem Blockplan  $B$  den charakteristischen 5er-Vektor  $(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$  zu, wobei  $w_i$  ( $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$ ) die Anzahl der Tripel bezeichne, die in  $B$  genau  $i$ -mal auftreten. Wir erwähnen, daß ein 5er-Vektor  $(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$  stets die Gleichungen

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \binom{8}{3} = 56 \quad (1)$$

und

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 = 28 \cdot \binom{4}{3} = 112 \quad (2)$$

erfüllt, wegen

Lemma 1: Kein 2-(8,4,6)-Blockplan enthält ein Tripel mehr als viermal.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Ein 2-(8,4,6)-Blockplan  $B$  enthalte ein Tripel, o. B. d. A. das Tripel 123, 5fach. Dann gibt es je einen Block mit 12, 13 und 23 und jeweils genau 7 Blocks mit 1, 2, 3. Da diese Blocks alle paarweise verschieden sind, müßte  $B$  mindestens 29 Blocks enthalten, was aber  $b = 28$  widerspricht. Analog führt man den Fall, daß ein Tripel 6mal vorkommt, zum Widerspruch.

Weiterhin werden wir die 3fach auftretenden Tripel von jedem Blockplan untersuchen und die Vektoren  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$  und  $(v_0, v_1, \dots, v_7)$  bilden. Dabei bedeute  $a_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ ) die Anzahl der Ziffer 1 in den 3fach auftretenden Tripeln, und es sei

$$v_j = |\{i : a_i = j\}|, \quad j \in \{0, 1, \dots, 7\}.$$

Der Vektor  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$  wird a-Vektor und der Vektor  $(v_0, v_1, \dots, v_7)$  charakteristischer 8er-Vektor genannt.

Wie sich gezeigt hat, kommt  $a_1 \geq 8$  für keinen Blockplan und kein 1 vor. Auch hier seien die Beziehungen

$$\sum_{i=0}^7 v_i = 8 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^7 i \cdot v_i = 3 \cdot w_3$$

erwähnt.

Für den Nachweis der Nichtisomorphie von Blockplänen sind die folgenden beiden Lemmata, die sofort einzusehen sind, äußerst wichtig.

Lemma 2: Zwei 2-(8,4,6)-Blockpläne mit verschiedenen 8er-Vektoren sind nichtisomorph.

Lemma 3: Zwei 2-(8,4,6)-Blockpläne mit verschiedenen 8er-Vektoren sind nichtisomorph.

### 3. Hauptfalldiskussion

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt sofort für jeden 2-(8,4,6)-Blockplan  $w_2 + w_3 + w_4 > 0$ . Damit ergeben sich 3 Hauptfälle:

Fall 1:  $w_2 > 0, w_3 = w_4 = 0$ . Dann ergibt sich für den 8er-Vektor sofort  $(0, 0, 56, 0, 0)$ . Also ist der 2-(8,4,6)-Blockplan sogar ein 3-(8,4,2)-Blockplan. Nach /2/, Satz 4 und /1/, Lemma 3 folgt, daß es bis auf Isomorphie genau einen Blockplan von diesem Typ gibt.

Fall 2:  $w_3 > 0$ . Dieser Fall ist der entscheidende. Ihn werden wir in den nächsten Paragraphen behandeln.

Fall 3:  $w_4 > 0$ . Auch dieser Fall wurde, teils mit Computer und teils "per Hand" vollständig behandelt. Dabei zeigte sich, daß kein Blockplan mit  $w_3 = 0$  auftrat. Folglich ist der Fall 3 vollständig im Fall 2 enthalten. Dennoch konnten alle Ergebnisse mit den entsprechenden im Fall 2 verglichen werden. Diese Kontrolle ergab stets volle Übereinstimmung.

#### 4. Erzeugung der 2-(8,4,6)-Blockpläne mit $w_3 > 0$

Wir nehmen o. B. d. A. an, daß das Tripel 123 genau dreimal auftritt. Dann hat B (o.B.d.A.) den folgenden Aufbau:

$$B = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 111 & 111 & 111 & 222 & 11111 & 22222 & 33333 & \\ 222 & 222 & 333 & 333 & & & & \\ 333 & a & b & c & x & y & z & t \\ 456 & & & & & & & \end{array} \right),$$

wobei

$$t = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{Fall 1}) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{Fall 2}) \quad \text{ist.}$$

Bezeichnet  $a_1, b_1, c_1, x_1, y_1, z_1$  bzw.  $t_1$  ( $i \in \{4,5,6,7,8\}$ )

jeweils die Anzahl der Ziffer 1 in der Matrix

$a, b, c, x, y, z$  bzw.  $t$ , so folgt wegen  $\lambda = 6$  speziell für die Paare mit einer 1, 2, 3 und  $r = 14$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + b_1 + x_1 = 5 \\ a_1 + c_1 + y_1 = 5 \\ b_1 + c_1 + z_1 = 5 \\ a_1 + b_1 + c_1 + x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = 13 \end{array} \right\} \quad i \in \{4,5,6\}$$

bzw.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + b_1 + x_1 = 6 \\ a_1 + c_1 + y_1 = 6 \\ b_1 + c_1 + z_1 = 6 \\ a_1 + b_1 + c_1 + x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = 14 \end{array} \right\} \quad i \in \{7,8\}.$$

Weiterhin können wir o. B. d. A. annehmen, daß  $a_7 \geq b_7 \geq c_7$  und für  $a_7 = b_7$  bzw.  $b_7 = c_7$  auch  $a_8 \geq b_8$  bzw.  $b_8 \geq c_8$  ist. Da wegen der Blockwiederholungsfreiheit  $a_7 + a_8 \leq 4$  und  $b_7 + b_8 \leq 4$  ist, ergeben sich folgende Unterfälle:

Fall	1														2									
Unterfall	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_7$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2
$b_7$	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2
$c_7$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
$a_8$	1	1	1	0	0	1	1	0	0	2	2	2	1	1	1	1	0	1	1	0	2	2	2	1
$b_8$	2	1	0	2	1	3	2	3	2	2	1	0	1	0	2	1	2	3	2	3	2	1	0	1
$c_8$	1	2	3	2	3	0	1	1	2	0	1	2	2	3	2	3	3	1	2	2	1	2	3	3

Die Fälle 2.6, 2.9 bzw. 2.10 lassen sich mittels der Permutationen (123)(78), (132)(78) bzw. (132)(78) auf die Fälle 2.2, 2.1 bzw. 2.5 zurückführen. Ferner sei erwähnt, daß in den Fällen 1.3 und 1.5 keine Blockpläne existieren, was sich aus  $x_8 = 5$  schnell ergibt. Also sind tatsächlich genau 19 Unterfälle zu diskutieren.

Für a, b und c kommen jeweils solche  $2 \times 3$ -Matrizen in Frage, deren Spalten aus paarweise verschiedenen Paaren aus verschiedenen Zahlen von  $\{4,5,6,7,8\}$  bestehen und die Anzahl von Sieben und Achten entsprechend den Unterfällen enthalten. Für jede dieser Kombinationen werden alle Kombinationen betrachtet, bei denen für x, y und z  $3 \times 5$ -Matrizen eingesetzt werden, die aus paarweise verschiedenen Tripeln verschiedener Zahlen aus  $\{4,5,6,7,8\}$  gebildet werden können. Da hier Matrizen, die sich nur durch die Reihenfolge der Spalten oder der Elemente in den Spalten unterscheiden, als gleich anzusehen sind, gibt es für

a, b, und c jeweils  $\binom{5}{2} = 120$  und für x, y und z  $\binom{5}{3} = 120$  paarweise verschiedene Matrizen. Hierbei sind insgesamt 828 511 400 Möglichkeiten zu betrachten. In jedem Fall wird getestet, ob jedes Element genau ( $r=$ ) 14mal und jedes Paar ( $\lambda=$ ) 6mal auftritt, d. h., ob wir tatsächlich einen Blockplan erhalten haben.

Es ergeben sich genau 9868 Blockpläne. Dabei ist klar, daß in dieser Menge von Blockplänen aus jeder Klasse isomorpher Blockpläne mindestens ein Vertreter vorhanden ist. Die Aufgabe besteht jetzt darin, alle isomorphen Blockpläne zu finden und diese bis auf einen zu streichen.

## 5. Isomorphie-Betrachtungen

Beim Studium der 19 Fälle läßt sich erkennen, daß in einigen Fällen mit einem Blockplan auch alle, durch Anwendung gewisser Permutationen erhaltenen, Blockpläne enthalten sind; z. B. im Fall 1.1 bez. der Permutationen über  $\{4,5,6\}$ . Nach Eliminierung von isomorphen Blockplänen bez. dieser Permutationen ergeben sich insgesamt genau 1680 Blockpläne. Als nächster Schritt wurde jedem Blockplan sein 5er- und 8er-Vektor (s. § 2) zugeordnet und entsprechend dieser neuen Klasseneinteilung sortiert. Es ergeben sich genau 77 Klassen (s. Tabelle). Isomorphie-Betrachtungen sind jetzt nur innerhalb dieser Klassen durchzuführen. Alle Blockpläne werden auf Normalform gebracht, d. h., der a-Vektor  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$  hat die Form  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_8$ . Durch Anwendung gewisser Permutationen ist das natürlich stets möglich. Die 5er- und 8er-Vektoren ändern sich dabei nicht. Sind zwei Blockpläne B und B' isomorph, so gehören sie derselben Klasse an; ihre a-Vektoren können jedoch verschieden sein. Die a-Vektoren der Normalformen dagegen sind gleich. Beispielsweise hat ein Blockplan vom Fall 1 (s. Tabelle) mit dem 8er-Vektor 1 0 4 2 1 0 0 0 in Normalform den a-Vektor (4,3,3,2,2,2,2,0). Sind nun zwei Blockpläne in diesem Fall isomorph, so sind sie sicher durch eine Permutation ineinander überführbar, bei der nur Zahlen gleicher Häufigkeit permutiert werden, d. h. in unserem Fall durch eine Permutation vom Typ  $\tau_1 \cdot \tau_2$ , wobei  $\tau_1$  eine Permutation über  $\{2,3\}$  und  $\tau_2$  eine Permutation über  $\{4,5,6,7\}$  ist.

Folglich sind bei Nichtisomorphie genau  $\prod_{i=0}^7 v_i!$  Permutationen anzuwenden und zu testen, im Fall 1 also jeweils nur 48. Für alle Fälle mit  $\max v_i \leq 5$  wurden diese Untersuchungen voll-

ständig mit dem Computer durchgeführt. Die Fälle mit  $\max v_i \geq 6$  (d. h., eine große Anzahl von Permutationen ist ggf. zu betrachten) wurden mittels verfeinerter Methoden "per Hand" erledigt. Das Endergebnis, die Klasseneinteilung und die Anzahl der nichtisomorphen Blockpläne, wird in der folgenden Tabelle angegeben.

Nr.	5er-Vektor	8er-Vektor	Anzahl	Summe
1	0 6 44 6 0	1 0 4 2 1 0 0 0	1	5
2		2 0 0 6 0 0 0 0	1	
3		1 0 3 4 0 0 0 0	1	
4		0 0 6 2 0 0 0 0	2	
5	0 8 40 8 0	0 0 4 1 2 1 0 0	1	
6		0 0 4 2 0 2 0 0	1	18
7		0 0 3 3 1 1 0 0	2	
8		0 0 3 2 3 0 0 0	2	
9		0 0 2 4 2 0 0 0	6	
10		0 0 1 6 1 0 0 0	2	
11		0 0 0 8 0 0 0 0	4	15
12	0 9 38 9 0	0 0 1 4 2 1 0 0	6	
13		1 0 0 3 2 2 0 0	1	
14		0 0 2 1 5 0 0 0	2	
15		0 0 2 3 1 2 0 0	2	
16		1 0 0 1 6 0 0 0	1	38
17		0 0 0 5 3 0 0 0	3	
18	0 11 34 11 0	0 0 1 2 1 3 1 0	6	
19		0 0 0 2 3 3 0 0	12	
20		0 0 1 0 5 1 1 0	6	
21		0 0 1 1 2 4 0 0	8	20
22		0 0 0 3 2 2 1 0	4	
23		0 0 0 1 6 0 1 0	2	
24	0 12 32 12 0	0 0 2 0 0 4 2 0	1	
25		0 0 1 0 2 4 1 0	1	
26		0 0 0 2 1 4 1 0	4	6
27		1 0 0 0 1 4 2 0	1	
28		0 0 0 1 2 5 0 0	1	
29		0 0 0 1 3 3 1 0	2	
30		0 0 0 1 4 1 2 0	1	8
31		0 0 0 0 5 2 1 0	2	
32		0 0 0 2 0 6 0 0	4	
33		0 0 0 2 2 2 2 0	1	
34		0 0 0 1 4 2 0 1	2	
35	0 14 28 14 0	0 0 0 0 2 3 2 1	4	6
36		0 0 0 0 0 7 0 1	2	
37	0 10 37 8 1	0 0 3 3 1 1 0 0	1	
38		0 0 2 5 0 1 0 0	1	
39		0 0 2 4 2 0 0 0	4	8
40		0 0 1 6 1 0 0 0	1	
41		0 0 3 2 3 0 0 0	1	
42	0 11 35 9 1	0 0 3 1 2 2 0 0	1	
43		0 0 2 2 3 1 0 0	3	
44		0 0 1 4 2 1 0 0	1	

Nr.	5er-Vektor	8er-Vektor	Anzahl	Summe
45		0 0 1 3 4 0 0 0	1	6
46	0 13 31 11 1	0 0 1 1 2 4 0 0	2	
47		0 0 1 2 1 3 1 0	1	
48		0 0 0 2 4 1 1 0	3	
49		0 0 0 1 5 2 0 0	1	
50		0 0 0 3 1 4 0 0	1	8
51	0 10 38 6 2	0 1 4 3 0 0 0 0	1	1
52	0 12 34 8 2	0 0 3 3 1 1 0 0	1	1
53	1 8 37 10 0	0 0 0 3 4 1 0 0	3	
54		0 0 1 2 4 0 1 0	1	
55		0 0 0 4 2 2 0 0	1	
56		0 0 1 3 1 3 0 0	1	
57		0 0 1 2 3 2 0 0	1	
58		0 0 1 3 2 1 1 0	1	8
59	1 9 35 11 0	0 0 1 1 3 2 1 0	2	
60		0 0 0 2 3 3 0 0	1	
61		0 0 1 0 4 3 0 0	2	
62		0 0 2 1 1 2 2 0	1	6
63	1 11 31 13 0	0 0 1 0 1 4 1 1	1	
64		0 0 0 1 2 2 3 0	3	
65		0 0 0 1 1 5 0 1	1	
66		0 0 0 1 3 1 2 1	1	
67		0 0 1 0 0 5 2 0	1	
68		0 0 0 1 1 4 2 0	1	8
69	2 6 38 10 0	0 0 0 3 4 1 0 0	1	1
70	2 8 34 12 0	0 0 0 1 3 3 1 0	1	1
71	1 8 38 8 1	0 0 1 6 1 0 0 0	5	
72		0 0 4 0 4 0 0 0	1	
73		0 0 3 2 3 0 0 0	1	7
74	1 10 34 10 1	0 0 1 3 1 3 0 0	1	
75		0 0 1 1 5 1 0 0	3	4
76	1 9 37 7 2	0 0 4 3 1 0 0 0	1	1
77	2 7 37 9 1	0 0 1 3 4 0 0 0	1	1
				<u>163</u>
				***

### Literatur

- /1/ Gronau, H.-D.: Einige Bemerkungen zur Arbeit "Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten  $(v,k)$ -Familien" von D. Rasch und G. Herrendörfer.  
Rostock, Math. Kolloq. 9, 27 - 34 (1978)
- /2/ Gronau, H.-D. O. F.: Über  $(2p-1)-(4p,2p,\lambda)$ -Blockpläne.  
Rostock, Math. Kolloq. 11, 67 - 74 (1979)
- /3/ Gronau, H.-D. O. F.: Über nichtisomorphe elementare blockwiederholungsfreie  $2-(8,4,\lambda)$ -Blockpläne I.  
Rostock, Math. Kolloq. 11, 59 - 66 (1979)



eingegangen: 25. 08. 1980

Anschriften der Verfasser:

Dr. rer. nat. Hans-Dietrich O. F. Gronau  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Dr. rer. nat. Roland Reimer  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Elektronik  
Bereich Neustrelitz  
Kalkhorstweg  
DDR-2080 Neustrelitz 5



Hans-Dietrich O. F. Gronau

Roland Reimer

# Ober nichtisomorphe elementare blockwiederholungsfreie 2-(8,4, $\lambda$ )-Blockpläne III

## 1. Einleitung und Resultate

Mit dieser Arbeit schließen wir unsere Untersuchungen der blockwiederholungsfreien 2-(8,4, $\lambda$ )-Blockplänen ab.<sup>1</sup> Blockpläne mit  $\lambda = 3, 12$  und  $15$  wurden in /1/ studiert. In /2/ wurde die Anzahl der nichtisomorphen Blockpläne mit  $\lambda = 6$  und  $\lambda = 9$  bestimmt und aus jeder Klasse isomorpher Blockpläne ein Vertreter ermittelt. Hier werden wir schließlich unter Benutzung der Resultate von /2/ die Anzahl paarweise nichtisomorpher elementarer blockwiederholungsfreier Blockpläne für  $\lambda = 6$  und  $\lambda = 9$  bestimmen. Wir erzielten folgende Hauptresultate.

Satz 1: Es gibt genau 128 paarweise nichtisomorphe elementare blockwiederholungsfreie 2-(8,4,6)-Blockpläne.

Satz 2: Es gibt bis auf Isomorphie genau einen elementaren blockwiederholungsfreien 2-(8,4,9)-Blockplan.

Listen mit Vertretern von entsprechenden Blockplänen werden in Abschnitt 3 gegeben.

## 2. Die Beweismethode

Ist ein 2-(8,4,6)-Blockplan nicht elementar, so ist er aus zwei disjunkten 2-(8,4,3)-Blockplänen zusammengesetzt. Ein 2-(8,4,9)-Blockplan ist genau dann nicht elementar, wenn er aus einem 2-(8,4,6)- und einem disjunkten 2-(8,4,3)-Blockplan oder drei paarweise disjunkten 2-(8,4,3)-Blockplänen zusammengesetzt ist. Wegen der eindeutigen Abbildung  $\bar{B} = B^*(8,4) \setminus \bar{B}$  zwischen den 2-(8,4,9)-Blockplänen  $\bar{B}$  und den 2-(8,4,6)-Blockplänen  $\bar{B}$  (ins-

<sup>1</sup> Alle hier benutzten Begriffe sind in /1/ definiert.

besondere sind zwei  $\bar{B}$ 's genau dann isomorph, wenn die entsprechenden  $B$ 's isomorph sind) ist ein  $2-(8,4,9)$ -Blockplan  $\bar{B}$  genau dann zusammengesetzt, wenn der entsprechende Blockplan  $B$  zu einem  $2-(8,4,3)$ -Blockplan disjunkt ist.

Wir erinnern daran, daß genau 4 paarweise nichtisomorphe  $2-(8,4,3)$ -Blockpläne existieren (s. /1/).

Zusammenfassend ergibt sich, daß folgender Algorithmus genau die elementaren Blockpläne liefert.

1.1. Zunächst werden alle 164 paarweise nichtisomorphen blockwiederholungsfreien  $2-(8,4,6)$ -Blockpläne (s. /2/) mit zwei Markierungen "o" versehen.

1.2. Stellt sich heraus, daß ein Blockplan dieser Liste einen  $2-(8,4,3)$ -Blockplan enthält, d. h., er ist nicht elementar, so ändern wir die erste Markierung und geben die Nummer des  $2-(8,4,3)$ -Blockplans und die angewandte Permutation an.

1.3. Stellt sich heraus, daß ein Blockplan der Liste disjunkt zu einem  $2-(8,4,3)$ -Blockplan ist, d. h., der zugehörige  $2-(8,4,9)$ -Blockplan ist nicht elementar, so ändern wir die zweite Markierung und geben die Nummer des  $2-(8,4,3)$ -Blockplans und die angewandte Permutation an.

2. Es werden nacheinander die  $8!$  Permutationen der Zahlen  $\{1,2,\dots,8\}$  betrachtet, und jede dieser Permutationen wird auf die 4 paarweise nichtisomorphen  $2-(8,4,3)$ -Blockpläne (s. /1/) angewandt. Jeder derart erhaltene Blockplan wird

1. mit jedem der 164 Blockpläne mit erster Markierung "o" auf Enthaltensein und

2. mit jedem der 164 Blockpläne mit zweiter Markierung "o" auf Disjunktheit getestet.

Im positiven Fall wird die entsprechende Markierung gemäß 1.2. und 1.3. geändert. Im negativen Fall bleibt die Markierung "o" erhalten.

3. Nach voller Abarbeitung des Algorithmus ergeben sich alle der 164 Blockpläne mit erster Markierung "o" als elementare  $2-(8,4,6)$ -Blockpläne und alle der 164 Blockpläne mit zweiter Markierung "o" als Komplement der elementaren  $2-(8,4,9)$ -Blockpläne.

Von den zusammengesetzten 2-(8,4,6)- und 2-(8,4,9)-Blockplänen kennen wir auch jeweils einen Teilblockplan.

### 3. Die elementaren Blockpläne

Im folgenden geben wir die 128 elementaren 2-(8,4,6)-Blockpläne und den einen elementaren 2-(8,4,9)-Blockplan an. Die 2-(8,4,6)-Blockpläne sind numeriert, und es ist in Klammern die jeweilige Klasse entsprechend der Liste in /2/ vermerkt.

#### Die elementaren 2-(8,4,6)-Blockpläne:

1(6)

111111111111122222222333445  
22222333334443333455444566  
3445675556755644566567567677  
467678678887885877888678788

3(9)

111111111111122222222333445  
222223333344533333444456556  
3455674445667644557566567677  
6567885788788767788878688788

5(9)

111111111111122222222333444  
222223333345533333456445556  
3444574456656644566577577667  
5678687877887856878788688788

7(11)

111111111111122222222333334  
222223334445633344456444555  
3334574565566745655667567677  
456788786878878868878678788

9(11)

111111111111122222222333334  
222223334445633344455444565  
3334574575566745656766556677  
4567886786887887867878787888

11(12)

111111111111122222222333334  
2222233344456333444556444555  
3334454665577744566677557666  
578586786788867878788788788

2(9)

111111111111122222222333445  
222223333344533333444455566  
3455674446657644567556567677  
5667885787888767878788688788

4(9)

111111111111122222222333444  
222223333344533333456455556  
3445664456756744457567566677  
5588786778867867868778878888

6(9)

111111111111122222222333444  
222223333344633333456455555  
3445564455756744456767667667  
8567886767887857867878888788

8(11)

111111111111122222222333334  
222223334445533344456444565  
3334574575666645755667556677  
4567888786787866878878787888

10(12)

111111111111122222222333445  
222223333344533333455444566  
3444664556757644567567556677  
5568787688878768778788687888

12(12)

111111111111122222222333445  
222223333344533333455444566  
3444664556757644567567556677  
5568787678888767878788688788

13(12)

1111111111111122222222333334  
2222223334445633344556444555  
3334454675566744567667556677  
5675877886878868878788678788

15(14)

1111111111111122222222333335  
2222223334444533344445444566  
3336674555567645655567567677  
4567888786778878767888688788

17(15)

1111111111111122222222333334  
2222223334445533344556444556  
3334464675556744557667566677  
5676877886788858878788678788

19(18)

1111111111111122222222333345  
2222223333344433333444456556  
3555664456655744557667577667  
4678786877878857688788688788

21(18)

1111111111111122222222333334  
2222223334444633344556445555  
3334574565566744455667676677  
5687885776878867867788887888

23(18)

1111111111111122222222333335  
2222223334445633344455444446  
3334465665557755756766556677  
4576887786788868877878687888

25(19)

1111111111111122222222333344  
2222223333344633333445455556  
3455574456656744567566567677  
4767885887867867688887778888

27(19)

1111111111111122222222333344  
2222223333355633333445445556  
3444554445667745667666557677  
7578686786878858788787678888

29(19)

1111111111111122222222333334  
2222223334445633344556444455  
3334455675556745566677566776  
4677886886787856878788778888

14(14)

1111111111111122222222333334  
2222223334455533344455444466  
3334474565666755656667555777  
4675888786778868777888678888

16(15)

1111111111111122222222333344  
2222223333344533333455456556  
3446674455756644455567667677  
6587885778867867868778878888

18(17)

1111111111111122222222333344  
22222233333446333334556445555  
3344574556556744456667676767  
6757888678678856887788787888

20(18)

1111111111111122222222333335  
2222223334444433344455444566  
3335665555566744755766566777  
4687786787878857868878678888

22(18)

1111111111111122222222333335  
2222223334445633344444444556  
3335574455676766755566556677  
4567887866788878867878788788

24(18)

1111111111111122222222333344  
2222223333355533333445446556  
3444674445566745566567577667  
7568886786778856878778888788

26(19)

1111111111111122222222333344  
2222223333344633333446455555  
3455574456656744556567767667  
4767885887867867678888878788

28(19)

1111111111111122222222333334  
2222223334445533344556444456  
3334455675676645656677555677  
4685776788887887867888678788

30(19)

1111111111111122222222333334  
22222233344455633344455444465  
3334474555666756655667556777  
4576888687778877868788678888

31(19)

111111111111122222222333444  
2222223333344633333456445555  
3445574556656744556667577667  
45768876778888687887786888788

33(19)

111111111111122222222333334  
2222223334444533344556444556  
3334565675556744556677567667  
4788686786787856777888888788

35(20)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344556444455  
3334455575667746655677556766  
4587866786788867878788787888

37(20)

111111111111122222222333444  
2222223333344563333445445556  
3445574455666745667556567677  
4687885867877876788678878888

39(20)

111111111111122222222333334  
2222223334444533344556444565  
3334555575667644656677556677  
4677786886788858868788787788

41(21)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344445445556  
33355447566674566677556677  
4686785787788887767888687888

43(21)

111111111111122222222333445  
222222333334443333445456556  
3455574455666744467566567677  
6667885778878857878887688788

45(21)

111111111111122222222333335  
2222223334444433344455444556  
3335576675556644666766557677  
4567887886787857878878688788

47(21)

111111111111122222222333335  
2222223334444533344455444566  
3334564565667744756766556677  
5785676887788867888776678788

32(19)

111111111111122222222333444  
2222223333344633333455445556  
3445574556656744567666557677  
4576887677888868788778688788

34(19)

111111111111122222222333334  
2222223334444533344555444566  
3334565565567744756667556677  
4787676886788856888788787788

36(20)

111111111111122222222333334  
22222233344455633344445445555  
3334574446667746655676576676  
5785685687878867878788787888

38(20)

111111111111122222222333334  
2222223334444533344445445566  
3335674465566745555676566777  
4676785887878887867888677888

40(20)

111111111111122222222333445  
2222223333344633333444455556  
3455664445756744567557666677  
5868785687877867878678878888

42(21)

111111111111122222222333334  
22222233344445633344445445565  
3335544656676745656677556776  
4786785687788886767888787888

44(21)

111111111111122222222333445  
22222233333444333334445456556  
3455574455666744466576577667  
7667885768878856878887788788

46(21)

111111111111122222222333335  
2222223334444433344456444566  
3335556675566744556677555677  
4686786787878878767888678888

48(21)

111111111111122222222333344  
2222223333455533334446444556  
3344564467566755665577556767  
45687778886788867888677888

49(22)

111111111111122222222333335  
2222223334444433344455444566  
3335665575556644556767567677  
4678787886787858678878678888

51(22)

111111111111122222222333444  
222222333334563333445455556  
3445564445676744667557567667  
5786775678888868788688778788

53(23)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344556444455  
3334455665567745757667556766  
4567888786778867868788788878

55(24)

111111111111122222222333444  
222222333334463333445555556  
3455664445657744467557567667  
5678785786878867878688788788

57(26)

111111111111122222222333345  
2222223333445533334444445656  
3346674445566745565557676767  
5767885687878876886788887878

59(26)

111111111111122222222333444  
2222223333344633333455445556  
3445564555657744667567567667  
4786778678868856788888778788

61(29)

111111111111122222222333334  
2222223334444533344556445565  
3334674555567644455677676676  
5686786787888757867888787888

63(30)

111111111111122222222333344  
2222223333444633334556444555  
334455567566744567677556667  
4858677878678867678888788878

65(31)

111111111111122222222333334  
2222223334445533344556444456  
3334455675676745656677555667  
4785666887788878788788678878

50(22)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344456445555  
3334574465556744556667676677  
5678786886787857867888787888

52(22)

111111111111122222222333445  
222222333334563333445444556  
3444564455576745667567566677  
856767786788857788888678788

54(23)

111111111111122222222333334  
2222223334445533344556444465  
3334465565676745655677556776  
4586786878787887767888678888

56(25)

111111111111122222222333445  
222222333334443333456445556  
3445674566755644455667576677  
5587786878867867868788787888

58(26)

111111111111122222222333444  
2222223333344633333455446555  
3445564555756744566767567667  
4786887678867856778878888788

60(28)

111111111111122222222333334  
2222223334455633344555444456  
3334444575666745657667556767  
6785685788778868778788678888

62(29)

111111111111122222222333334  
2222223334455633344556444455  
3334444556767746755667556766  
5685676788878887878788677888

64(31)

111111111111122222222333445  
2222223333345533333445444456  
3444664456776645567567566677  
5567785788887886778888678788

66(32)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344455444455  
3334554665676745766766556677  
4785675788788868878878678788



67(32)

1111111111111122222222333344  
2222223333455533334455444656  
3344474456566745665667557767  
5767886878678856788788788878

69(32)

1111111111111122222222333334  
22222233334445633344555444465  
3334455575666745667667555677  
4785676888787876888788678788

71(34)

1111111111111122222222333334  
22222233334445633344556444455  
333446556576745556677566776  
4785776886887866788888778887

73(35)

1111111111111122222222333345  
2222223333444433334455445656  
334567455656744455667676767  
6867885677788857886778788888

75(35)

1111111111111122222222333444  
222222333335563333445445556  
3444674445566745566556677677  
7578885676878867878687888788

77(36)

1111111111111122222222333334  
22222233334445533344556444465  
3334455665666745756677555776  
4567878788787876868888678887

79(37)

11111111111111222222223333445  
222222333334453333344455556  
345566446755644556567766777  
8778785678868756787688878888

81(39)

1111111111111122222222333445  
222222333334453333344544556  
3445564466756644566567557777  
5787875878867878678688678888

83(39)

1111111111111122222222333345  
22222233333445633334445444556  
3344554456676745665667556777  
7858675867788878786788678888

68(32)

1111111111111122222222333334  
22222233334444633344455445555  
3335554665566744766766576077  
4786785787878856878878687888

70(33)

1111111111111122222222333445  
2222223333344433333456444556  
3445565566755744556677567667  
4786886778867856787788888788

72(34)

1111111111111122222222333445  
2222223333344633333444455556  
345674445656744556566767677  
8578785676788878678678888788

74(35)

1111111111111122222222333344  
22222233333455633334446444555  
3344554457666755665677556767  
4757686888778867788888678878

76(35)

1111111111111122222222333334  
22222233334444533344556445565  
3334554675566744467677556676  
5676687887878857888788687887

78(36)

1111111111111122222222333444  
222222333334453333344464455556  
3455564456756644567567567677  
4867887867887756788778688888

80(39)

1111111111111122222222333334  
222222333334445633344456444555  
3334554675566745656767556677  
4576787886788886887878687788

82(39)

1111111111111122222222333444  
22222233333445533334445445556  
3445664456756745566576676677  
4788785678867857878687788888

84(42)

1111111111111122222222333445  
2222223333344553333444444556  
3445674455666755667555567677  
4678885867778867788678888788

85(43)

1111111111111122222222333445  
22222333334453333444456556  
3455664445767644567557567667  
5678785687878868678788788788

87(44)

1111111111111122222222333444  
22222333334453333444455556  
3445674456656745566676576677  
4568887877867857878787688888

89(46)

1111111111111122222222333335  
2222233334445533344445444566  
3334574465566745656676557677  
5687786876788858767888788788

91(47)

1111111111111122222222333345  
22222333344553333444445656  
3346674445576645575556676767  
5677885678887867886788887878

93(48)

1111111111111122222222333444  
22222333334453333445555556  
3455674446756744456676667667  
6568785678878857887887788788

95(49)

1111111111111122222222333334  
2222233334455533344456444465  
3334474665566755556767556776  
4586786787878867868878787888

97(51)

1111111111111122222222333444  
222223333344533333455455556  
3445674456656744456667667677  
8576785787868857867888878788

99(53)

1111111111111122222222333334  
222223333444533345556444566  
3334455575567644456677556677  
6786876886778856787888788788

101(53)

1111111111111122222222333344  
22222333344553334556444556  
334446456755674455677667667  
6867875788687857678888788878

44

86(43)

1111111111111122222222333335  
222223334445633344445444556  
3334574465566745656676557677  
5675886787887878867887688788

88(45)

1111111111111122222222333334  
222223334445533344446445565  
3335564465676745655677556776  
4586786877887878768788678888

90(46)

1111111111111122222222333345  
222223333444433334456445556  
3345564667555744456767576667  
5867876788678856877888787888

92(48)

1111111111111122222222333444  
222223333344533333456456555  
3445574456657744456667567667  
5686886777868857878778888788

94(48)

1111111111111122222222333344  
222223333444633334445455655  
3355564457566744575676566767  
4867885678778867688787878888

96(50)

1111111111111122222222333334  
2222233334455533344455444456  
3334464675666755756766556677  
4675885887778867887878687888

98(52)

1111111111111122222222333334  
222223334445533344445445565  
3335674455666745755666676776  
4677885868787856878788788887

100(53)

1111111111111122222222333334  
222223334445533345556444466  
3334445575676644556677555677  
6785676887887868787888678788

102(57)

1111111111111122222222333345  
222223333445533334446444456  
3344554667566755566677555767  
4857686788787867877888678888

103(58)

111111111111122222222334444  
222222333333553333346455556  
4445574445666644556657776677  
6787885687787857687868887888

105(60)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344446445555  
33355445667674665567576677  
4786785687887877867888687888

107(61)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344555444456  
333445556667746657667555767  
4785867876788867878788678888

109(63)

111111111111122222222333334  
2222223334455633344445444565  
333467445556675555666667777  
4788785667878867867788788888

111(64)

111111111111122222222333444  
2222223333344533333455446556  
3446674555755644556567667677  
4677888678867858677888788788

113(65)

111111111111122222222333334  
2222223334445533344555444466  
3334475565566745656667556777  
4677886786887858867788787888

115(67)

111111111111122222222333334  
2222223334455633344445444556  
3334564465567755755676566677  
4677685887878878868788678788

117(69)

111111111111122222222333334  
2222223334445633345556444456  
3334445575566744556677566767  
6786786886787856787888778888

119(71)

111111111111122222222333334  
2222223334445633344455444565  
3334574565566745756666557776  
45637868878778786887867878888

104(59)

111111111111122222222334444  
222222333333563333345455556  
4445574445566744566766576677  
5786886786787856778878887888

106(61)

111111111111122222222333334  
2222223334455633344455444556  
3334454475566745666767556677  
6785776886878856878888787788

108(62)

111111111111122222222333445  
2222223333344433333455444566  
3446675556655544557566667777  
4787886787867856788678788888

110(64)

111111111111122222222333345  
222222333444533334556444456  
3344455566667744675667555677  
5856786778788878786788678888

112(64)

111111111111122222222333344  
2222223333555633334446444555  
3344454446667755675667557667  
5756886787788867887788688878

114(66)

111111111111122222222334445  
2222223333344333333564445556  
44455645556676744675667566677  
5786886678787856778878887888

116(68)

111111111111122222222333334  
2222223334455633344455444455  
3334464675566755766767556667  
4585687787878867878878687888

118(70)

111111111111122222222333334  
2222223334455533344456444456  
3334454576666756655777555676  
4586768787878867878888678788

120(71)

111111111111122222222333334  
2222223334445533344456444555  
3334564566676746755777556666  
45856878778878678678887887888

121(71)

1111111111111122222222333444  
 222222333334453333455455556  
 3445674456756644456766766677  
 8567785677888856788878878788

123(74)

1111111111111122222222333335  
 2222223334444633344556444466  
 333445555566744555677556777  
 6787876786878868667888787888

125(75)

1111111111111122222222333334  
 2222223334445533344445445556  
 3335664465576745556677666677  
 4786785786887857867888787888

127(76)

1111111111111122222222333444  
 2222223333344533333456456555  
 3445564455666744466677577667  
 5786787868778857878688688788

122(73)

1111111111111122222222334445  
 22222233333334633333344465566  
 4455674445555744556655576777  
 6868786786787878787867688888

124(75)

1111111111111122222222333334  
 22222233344445633344456444555  
 3334674555566745655567667677  
 4578887686787868767878788888

126(75)

1111111111111122222222333334  
 2222223334445633344556444455  
 3334455575677746655677556666  
 4586866786788877878788787888

128(77)

1111111111111122222222333334  
 2222223334555633344456444455  
 3334444456667756755777556666  
 5685687877788867867888787888

#### Der elementare 2-(8,4,9)-Blockplan:

11111111111111111111222222222233333445  
 22222222223333334444563333344445644445556  
 333445557445566556767445567556667566767677  
 468676788577878688878586778787888678888788

#### 4. Zusammenfassung

Abschließend geben wir eine Zusammenfassung der Ergebnisse unserer drei Arbeiten zu 2-(8,4, $\lambda$ )-Blockplänen.

Anzahl der	$\lambda$	3	6	9	12	15
paarw. nichtisomorphen Blockpläne		4	164	164	4	1
paarw. nichtisomorphen elementaren Blockpläne		4	128	1	0	0

## Literatur

- /1/ Gronau, H.-D. O. F.: Über nichtisomorphe elementare blockwiederholungsfreie  $2-(8,4,\lambda)$ -Blockpläne I.  
Rostock. Math. Kolloq. 11, 59 - 66 (1979)
- /2/ Gronau, H.-D. O. F., und Reimer, R.: Über nichtisomorphe elementare blockwiederholungsfreie  $2-(8,4,\lambda)$ -Blockpläne II.  
Rostock. Math. Kolloq. 17, 27 - 35 (1981)

eingegangen: 08. 12. 1980

### Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. Hans-Dietrich O. F. Gronau  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Dr. rer. nat. Roland Reimer  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Elektronik  
Bereich Neustrelitz  
Kalkhorstweg  
DDR-2080 Neustrelitz



Lothar Berg

Verallgemeinerte Inverseen nilpotenter Matrizen

Für einguläre quadratische Matrizen  $A$  hat I. Erdélyi /3/ die Lösungen  $R$  der Gleichungen

$$A = ARA, R = RAR, A^n R = RA^n, R^n A = AR^n \quad (1)$$

mit irgendeiner natürlichen Zahl  $n$  als quasisvertauschbare Inverseen eingeführt. Sie existieren stets, wenn  $n$  nicht kleiner als die Vielfachheit des Eigenwertes 0 im Minimalpolynom von  $A$  ist, sind aber für  $n \geq 2$  nicht eindeutig bestimmt. Weiter unten werden wir uns mit der eindeutigen Festlegung von  $R$  befassen.

In /2/ wurde unter einer Zusatzvoraussetzung eine Übersicht über alle nur möglichen quasisvertauschbaren Inverseen angegeben. Es gibt jedoch keine weiteren, da die erwähnte Zusatzvoraussetzung überflüssig ist, wie aus folgendem Satz hervorgeht.

Satz 1: Für eine Matrix  $A$  mit

$$A^n = 0 \quad (2)$$

besitzt auch jede Lösung  $R$  von (1) die Eigenschaft  $R^n = 0$ .

Beweis: Nach Lemma 2 von /1/ folgt aus (1) die Gleichung  $R^n = R^n A^n R^n$ , so daß (2) die Behauptung  $R^n = 0$  nach sich zieht. In Spezialfällen kann die Moore-Penrose-Inverse einer Matrix (vgl. etwa /4/) zugleich quasisvertauschbare Inverse sein.

Satz 2: Geht eine Matrix  $A$  aus ihrer Jordanschen Normalform durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer unitären Matrix hervor, oder erfüllt  $A$  die Gleichung (2) mit  $n = 2$ , so gibt es genau eine Matrix  $R$  mit (1) und den Moore-Penrose-Bedingungen

$$AR = R^* A^*, RA = A^* R^*. \quad (3)$$

Beweis: 1°. Ist  $A = X^* J X$  mit  $X^* X = I$  und der Jordanschen Normalform  $J$  von  $A$ , so erfüllt  $R = X^* J^+ X$ , wobei  $J^+$  die eindeutig bestimmte Moore-Penrose-Inverse von  $J$  bezeichnet, für hinreichend große  $n$  die Bedingungen (1) und (3).

2°. Für die Moore-Penrose-Inverse  $R$  von  $A$  gilt

$$R = A^* R^* R = R R^* A^*,$$

woraus im Fall (2) mit  $n = 2$  sofort  $R^2 = R R^* (A^2)^* R^* R = 0$  folgt.

Von jetzt an möge  $J$  die Blockstruktur

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & & & & & \\ & J_0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_0 & & \\ & & & & J_0 & \\ & & & & & J_0 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

mit einheitlichen Diagonalblöcken  $J_0$  vom Format  $n \times n$  und  $n \geq 2$  besitzen. Unser Hauptergebnis lautet:

**Satz 3:** Ist  $A$  eine Matrix mit der Jordanschen Normalform (4), so gibt es zu jeder der beiden Bedingungen (3) genau eine quasivertauschbare Inverse  $R$ , die diese Bedingung erfüllt.

**Beweis:** In Anlehnung an /2/ betrachten wir die Blockmatrix

$$T = I - U, \quad U = (U_{ij}) \quad (5)$$

vom gleichen Format wie  $A$  mit den Toeplitz-Blöcken

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & u_{ij2} & u_{ij3} & u_{ij4} & \dots & u_{ijn} \\ & 0 & u_{ij2} & u_{ij3} & \ddots & \vdots \\ & & 0 & u_{ij2} & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & u_{ij4} \\ & & & & & u_{ij3} \\ & & & & & u_{ij2} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

vom Format  $n \times n$ . Diese haben die Eigenschaften  $U_{ij} J_0 = J_0 U_{ij}$ ,

$U_{ij}^n = 0$ , so daß auch

$$UJ = JU, \quad U^n = 0 \quad (7)$$

gilt sowie mit einer zu  $U$  analog gebauten Matrix  $V$

$$T^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} U^k = I - V. \quad (8)$$

Die zu  $J$  gehörenden Projektoren  $JJ^T$ ,  $J^T J$  besitzen die Matrizen





und diese Gleichung ist erfüllt, wenn PU die Form

$$PU = -PZPY^*YJ^TJ \quad (13)$$

mit  $Z^* = Z$  besitzt. Mit diesem Ansatz nimmt (12) die Form

$$RA = YJ^TJX - YPZPY^*YJ^TJX$$

an bzw., wenn  $J^TJ$  nach (10) durch P ausgedrückt wird,

$$RA = I - YPX - YPZPY^* + YPZPY^*YPX. \quad (14)$$

Offenbar ist RA hermitesch, wenn Z sich aus der Gleichung

$$PZPY^*YP = P \quad (15)$$

hermitesch bestimmen läßt. Dies ist aber der Fall, da  $Y^*Y$  als positiv definite Matrix nur positive Hauptminoren besitzt, so daß die durch den Projektor P aus  $Z = PZP$  herausgehobene Teilmatrix gerade die Inverse der entsprechenden Teilmatrix von  $PY^*YP$  ist. Der Projektor (14) lautet mit der so festgelegten Matrix Z

$$RA = I - ZY^*$$

und erfüllt wie verlangt die zweite der Gleichungen (3).

2°. Ganz entsprechend läßt sich V, d. h. VQ, so bestimmen, daß AR hermitesch ist, wenn man von

$$AR = YJJ^TX + YVQX \quad (16)$$

ausgeht, analog zu (13) den Ansatz

$$VQ = -JJ^TXX^*QZQ \quad (17)$$

macht und Z unter den Nebenbedingungen  $Z = Z^* = QZQ$  aus

$$QXX^*QZQ = Q \quad (18)$$

ermittelt. Dabei entsteht als Ergebnis

$$AR = I - X^*ZX.$$

Um schließlich die Eindeutigkeit zu beweisen, bezeichnen wir die soeben gefundene Matrix V aus (17) mit  $V_0$ , machen den Ansatz  $V = V_0 + W$ , wobei W sich wie V aus Blöcken vom Typ (6) zusammensetzt, und setzen diesen Ansatz in (16) ein, so daß

$$AR = I - X^*ZX + YWQX$$

entsteht. Damit AR hermitesch ist, muß

$$YWQX = X^*QW^*Y^*$$

sein. Wegen  $(I-Q)Y^*YQ = 0$  folgt durch passende Multiplikationen

$$(I-Q)Y^*Y(I-Q)WQ = 0,$$

da wie in (11) auch  $QW = 0$  gilt. Die durch den Projektor  $I-Q$  aus der hermiteschen Matrix  $Y^*Y$  herausgehobene Teilmatrix hat wie zuvor eine positive Determinante, so daß wir  $(I-Q)WQ = 0$  und damit auch  $WQ = 0$  sowie  $W = 0$  erhalten.

Es bleibt noch der Einfluß von  $X$  auf die Eindeutigkeit von  $R$  zu untersuchen. Zwei Transformationen  $X$  von  $A$  auf die Jordansche Normalform (4) können sich aber, wie man leicht sieht, bis auf einen trivialen skalaren Faktor nur durch einen linksseitigen Faktor von derselben Bauart wie  $T$  in (5) unterscheiden, der, wie wir bereits wissen, keine Mehrdeutigkeit verursacht.

Da sich die Eindeutigkeit von  $U$  im ersten Fall ganz entsprechend zeigen läßt, ist der Satz vollständig bewiesen.

Bemerkungen: Mit einigen Zusatzbetrachtungen kann man aus dem Beweis von Satz 3 in dem dort betrachteten Spezialfall noch einmal die Aussagen von Satz 2 ablesen sowie erkennen, daß sie sich nicht wesentlich verschärfen lassen.

1°. Ist  $Y = X^*$  eine unitäre Matrix und bezeichnen wir die Matrix  $Z$  aus (15) mit  $Z_1$  sowie die aus (18) mit  $Z_2$ , so lauten diese Gleichungen

$$Z_1 = P, Z_2 = Q,$$

so daß aus (13) bzw. (17) wegen (10) die Beziehungen

$$PU = -P(I - P) = 0, VQ = -(I - Q)Q = 0,$$

d. h.  $U = V = 0$ , folgen. Damit erhalten wir in den beiden Fällen von Satz 3 wegen (5) die Matrix  $T = 0$ , so daß  $S = J^T$  wird und  $R = A^*$  die Moore-Penrose-Inverse von  $A$  ist.

2°. Im Fall  $n = 2$  ist  $I = P + Q$  und  $U = PU = UQ, V = PV = VQ$ , so daß die Gleichungen (13) mit  $Z = Z_1$  und (17) mit  $Z = Z_2$

$$U = -Z_1 Y^* Y Q, V = -P X X^* Z_2 \quad (19)$$

und die Gleichungen (15) und (18)

$$P = Z_1 Y^* Y P, Q = Q X X^* Z_2 \quad (20)$$

lauten. Wir denken uns jetzt alle Zeilen und Spalten so vertauscht, daß  $P$  und  $Q$  die isomorphe Blockstruktur

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

erhalten, wobei wir der Einfachheit halber auf den linken Seiten die alten Bezeichnungen beibehalten. Führen wir auch für die übrigen Matrizen entsprechende Umformungen und Blockzerlegungen durch und verwenden wir dabei die Bezeichnungen

$$Y^*Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad XX^* = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

so finden wir aus (20)

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Y_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

und aus (19)

$$U = - \begin{bmatrix} 0 & Y_{11}^{-1}Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = - \begin{bmatrix} 0 & X_{12}X_{22}^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da die Matrizen (21) zueinander invers sind, gilt  $Y_{11}X_{12} +$

$Y_{12}X_{22} = 0$ , und dies bedeutet  $U = -V$ . Ein Vergleich mit (8) zeigt, daß für  $n = 2$  in den beiden Fällen von Satz 3 dieselbe Matrix  $T$  und damit auch dieselbe Matrix  $R$  entsteht, so daß letztere die beiden Gleichungen (3) erfüllt und damit wieder die Moore-Penrose-Inverse von  $A$  ist.

3°. Im Fall  $n = 3$  erhalten wir ganz entsprechend die isomorphen Darstellungen

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

und mit den zu (21) analogen Bezeichnungen

$$Y^*Y = (Y_{ij}), \quad XX^* = (X_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

finden wir aus (15) bzw. (18) wegen (10)

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Y_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

und aus (13) bzw. (17) unter Beachtung der Struktur (6)

$$U = - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{11}^{-1} \gamma_{12} & \gamma_{11}^{-1} \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{11}^{-1} \gamma_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = - \begin{pmatrix} 0 & x_{23} x_{33}^{-1} & x_{13} x_{33}^{-1} \\ 0 & 0 & x_{23} x_{33}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Würden U und V wie im Fall  $n = 2$  durch (8) zusammenhängen, also  $(I - U)(I - V) = I$  erfüllen, so müßte

$$x_{13} x_{33}^{-1} + \gamma_{11}^{-1} \gamma_{12} x_{23} x_{33}^{-1} + \gamma_{11}^{-1} \gamma_{13} = 0$$

gelten, was auch tatsächlich der Fall ist, sowie

$$x_{23} x_{33}^{-1} + \gamma_{11}^{-1} \gamma_{12} = 0,$$

was aber im allgemeinen nicht zutrifft.

Damit erkennen wir im Fall  $n = 3$  und erst recht auch im Fall  $n \geq 3$ , daß die beiden durch Satz 3 bestimmten quasivertauschbaren Inversen im allgemeinen voneinander und damit auch von der Moore-Penrose-Inversen verschieden sind.

4°. Ist bei den Jordanblöcken  $J_0$  in (4) ein unterschiedliches Format und speziell  $n = 1$  zugelassen, so gibt es in (6) rechteckige Blöcke  $U_{ij}$  vom Format  $n_i \times n_j$  der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & u_2 & u_3 & \dots & u_{n_1} \\ 0 & \dots & 0 & u_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_2 & . & . \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & u_2 & u_3 & \dots & u_{n_j} \\ 0 & 0 & u_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & u_3 \\ . & . & . & . & u_2 \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Je nachdem ob  $n_i < n_j$  oder  $n_i > n_j$  ist. Bestimmt man U aus (13), bzw. V aus (17), so wird man bei den Blöcken mit  $n_i < n_j$  im ersten bzw. bei den Blöcken mit  $n_i > n_j$  im zweiten Fall die erforderlichen Nullen im allgemeinen nicht erhalten. Damit gibt es dann auch keine Lösungen von (1), die eine der Bedingungen (3) erfüllen.

Entsprechend gibt es im allgemeinen auch keine solchen Lösungen, wenn wir auf die Bedingung (2) verzichten und zu den Jordanblöcken  $J_0$  in (4) von einheitlichem oder auch unterschiedlichem Format noch mindestens einen invertierbaren Jordanblock hinzunehmen.

### Literatur

- /1/ Berg, L.: Solution of degenerate linear initial value problems, Z. Angew. Math. Mech. 57, 65 - 73 (1977)
- /2/ Berg, L.: Über quassivertauschbare Matrixinversen, Rostock, Math. Kolloq. 15, 5 - 10 (1980)
- /3/ Erdélyi, I.: The quasi-commuting inverses for a square matrix, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 42, 626 - 633 (1967)
- /4/ Zielke, G.: Motivation und Darstellung von verallgemeinerten Matrixinversen, Beiträge Numer. Math. 7, 177 - 218 (1979)

eingegangen: 19. 01. 1981

### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Lothar Berg  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Harald Mumm

## Das Dirichlet-Problem in Hölder-Räumen

### 1. Einleitung

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist die von B.-W. Schulze und G. Wildenhain /10/ dargestellte Theorie zur Lösung des Dirichlet-Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Die Theorie basiert auf punktweisen a-priori-Abschätzungen in Räumen m-mal stetig differenzierbarer Funktionen, die von C. Miranda /6/ und S. Agmon /1/ für glatte Ränder bewiesen wurden. Das Ziel dieser Arbeit ist es, analoge Untersuchungen für das Dirichlet-Problem auf der Basis der von S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg /2/ und Ju. P. Krečkovskij /4/ bewiesenen sogenannten Schauder-Abschätzungen in Räumen  $C^{m+\alpha}$  durchzuführen. ( $C^{m+\alpha}$  - Raum aller m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen der Ordnung m einer Hölder-Bedingung genügen.)

Die funktionalanalytischen Grundlagen für unsere Untersuchungen sind bereits von G. Wildenhain /11/ sowie H. Mumm und G. Wildenhain /7/ bereitgestellt worden (in /7/ und /4/ schon für allgemeine elliptische Randwertprobleme). Wir wollen im nächsten Abschnitt kurz die wichtigsten Ergebnisse aus diesen Arbeiten an Hand des Dirichlet-Problems darlegen.

### 2. Funktionalanalytische Grundlagen

Wir beschäftigen uns mit folgender Problemstellung: In einem offenen und beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  wird eine Lösung der elliptischen Differentialgleichung  $Lu = 0$  gesucht, die auf dem Rand  $\partial\Omega$  den Bedingungen

$$B_j u = \left( -\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^{j-1} = g_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (1)$$

genügt.

$L$  sei ein linearer eigentlich elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  und  $n$  Normalenvektor an  $\partial\Omega$ .

$C^{m-1+s}(\overline{\Omega})$ ,  $s \in (0,1)$ , bezeichne den Vektorraum aller im abgeschlossenen Gebiet  $\overline{\Omega}$   $(m-1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen der Ordnung  $m-1$  mit einer festen Konstanten die Ungleichung

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(x')| \leq C|x - x'|^s \quad (2)$$

für beliebige Punkte  $x, x' \in \overline{\Omega}$  und Multiindizes  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  mit  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m-1$  erfüllen. Mit der Norm

$$\|u\|_{C^{m-1+s}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha| = m-1} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^s} \quad (D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}})$$

wird  $C^{m-1+s}(\overline{\Omega})$  ein Banachraum.  $C^{m-1+s}(\partial\Omega)$  kann analog in lokalen Koordinaten auf dem Rand erklärt werden, falls

$\partial\Omega \in C^{m-1+s}$  ist. (Vgl. O. A. Ladyzhenskaya /5/, S. 7.)

Als grundlegende Annahme für das Folgende benötigen wir die

Bedingung I: Die im Raum  $C^{m-1+s}(\overline{\Omega})$  enthaltenen Lösungen des Problems (1) genügen Abschätzungen der Gestalt

$$\|u\|_{C^{m-1+s}(\overline{\Omega})} \leq C \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{C^{m-1-j+s}(\partial\Omega)}.$$

Ju. P. Krasovskij bewies in /4/ für Lösungen  $u \in C^{2m+s}(\Omega)$ , daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn vorausgesetzt wird:

- 1) Die Lösung ist eindeutig;
- 2)  $\partial\Omega \in C^{6m}$ ;
- 3) die Koeffizienten von  $L$  sind Elemente des Raumes  $C^{4m}$ .

Um eine von der Glattheit des Randes  $\partial\Omega$  unabhängige Formulierung des Problems (1) angeben zu können, benutzen wir analog zu /10/ sogenannte Whitney-Taylorfelder (siehe /7/).



In modifizierter Form lautet das Problem (1):

Gegeben ist ein Taylorfeld  $f = (f_\alpha)_{|\alpha| \leq m-1} \in W^{m-1+s}(\partial\Omega)$ .

$(W^{m-1+s}(\partial\Omega))$  bezeichnet den Raum aller auf  $\partial\Omega$  definierten Whitney-Taylorfelder, deren Norm definiert ist durch

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{m-1+s}(\partial\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sup_{x \in \partial\Omega} |f_\alpha(x)| \\ &+ \sum_{|\alpha| = m-1} \sup_{\substack{x, y \in \partial\Omega \\ x \neq y}} \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x-y|^s}. \end{aligned} \quad (3)$$

Gesucht ist eine Funktion  $u \in C^{m-1+s}(\bar{\Omega})$ , die in  $\Omega$  der Differentialgleichung  $Lu = 0$  genügt und für  $y \in \partial\Omega$  die Randwerte

$$D^\alpha u = f_\alpha \quad (|\alpha| \leq m-1) \quad (1')$$

stetig annimmt.

Der Bedingung I entspricht dann die

Bedingung I': Die in  $C^{m-1+s}(\bar{\Omega})$  enthaltenen Lösungen der Gleichung  $Lu = 0$  genügen Abschätzungen der Art

$$\|u\|_{C^{m-1+s}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{W^{m-1+s}(\partial\Omega)}.$$

Für glatte Ränder folgt aus dem Erfülltsein der Bedingung I das Erfülltsein der Bedingung I'. Das kann man durch direkte Ab-

schätzung des Ausdrucks  $\sum_{j=1}^m \|(\frac{\partial u}{\partial n})^{j-1}\|_{C^{m-1-j+s}(\partial\Omega)}$  leicht nachprüfen.

Es sei  $D(s, \bar{\Omega})$  ein Teilraum der Menge

$\{f = (f_\alpha)_{|\alpha| \leq m-1} = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1} : u \in C^{m-1+s}(\bar{\Omega}), Lu = 0 \text{ in } \Omega\}$ ,

und  $D(s, \partial\Omega) = r_{\partial\Omega} D(s, \bar{\Omega})$  sei die Menge aller Einschränkungen von  $u \in D(s, \bar{\Omega})$  auf den Rand ( $r_{\partial\Omega}$  Einschränkungoperator).

Bedingung II:  $D(s, \partial\Omega)$  sei bez. (3) dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$ .

Wir zitieren nun zwei Sätze aus /7/ in der hier benötigten Form.

**Satz 1:** Die Bedingung I sei erfüllt und  $\partial\Omega$  sei  $(m-1+s)$ -regulär. (Das bedeutet,  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  ist bez. (3) vollständig.) Zu beliebigem  $x \in \Omega$  und  $|\alpha| \leq m-1$  existieren Maßtupel

$\mu_{x,\alpha} = (\mu_{x,\alpha}^B)_{|\beta| \leq m-1}$  und  $\lambda_{x,\alpha} = (\lambda_{x,\alpha}^B)_{|\beta| \leq m-1}$  mit  $\text{supp } \mu_{x,\alpha}^B \subset \partial\Omega$  und  $\text{supp } \lambda_{x,\alpha}^B \subset \partial\Omega \times \partial\Omega$ , so daß

$$D^\alpha u(x) = \sum_{|\beta| \leq m-1} \left( D^\beta u(y) d\mu_{x,\alpha}^B(y) + \sum_{|\beta| \leq m-1} \int \frac{D^\beta u(y) - D^\beta u(z)}{|y-z|^s} d\lambda_{x,\alpha}^B(y,z) \right) \quad (4)$$

für alle  $u \in D(s, \overline{\Omega})$  gilt.

**Satz 2:** Die Bedingungen I und II seien erfüllt und  $\partial\Omega$  sei  $(m-1+s)$ -regulär. Dann ist das Problem (1') eindeutig lösbar, und die Lösung  $u$  sowie die Ableitungen  $D^\alpha u$  besitzen für  $x \in \Omega$  die Darstellung

$$D^\alpha u(x) = \sum_{|\beta| \leq m-1} \left( f_\beta(y) d\mu_{x,\alpha}^B(y) + \sum_{|\beta| \leq m-1} \int \frac{f_\beta(y) - f_\beta(z)}{|y-z|^s} d\lambda_{x,\alpha}^B(y,z) \right).$$

Das Paar  $(\mu_{x,\alpha}, \lambda_{x,\alpha})$  mit  $\mu_{x,\alpha} = (\mu_{x,\alpha}^B)_{|\beta| \leq m-1}$  und  $\lambda_{x,\alpha} = (\lambda_{x,\alpha}^B)_{|\beta| \leq m-1}$  ( $\text{supp } \mu_{x,\alpha}^B \subset \partial\Omega$  und  $\text{supp } \lambda_{x,\alpha}^B \subset \partial\Omega \times \partial\Omega$ ) ist hierbei das eindeutig bestimmte, sogenannte harmonische Maß.

Im Falle eines glatten Randes  $\partial\Omega$  gilt die verallgemeinerte Greensche Formel, und man kann analog zu /10/, S. 262 nachweisen, daß dann (wegen der Eindeutigkeit)

$$\lambda_{x,\alpha} = 0$$

gelten muß und die Maße  $\mu_{x,\alpha}^B$  durch stetige Dichten auf  $\partial\Omega$  darstellbar sind. (Vgl. auch H. Mumm /9/.)

### 3. Potentialtheoretische Interpretation

Die konkrete Natur des Raumes  $D(s, \overline{\Omega})$  ist für den Satz 2 nicht entscheidend. Wir wollen in diesem Abschnitt einen konkreten Teilraum (von gewissen Potentialen)  $S(s, \overline{\Omega})$  angeben.

Kann dann nachgewiesen werden, daß unter bestimmten Voraussetzungen

$$S(s, \partial\Omega) := r_{\partial\Omega} S(s, \overline{\Omega}) \text{ dicht in } W^{m-1+s}(\partial\Omega)$$

ist, so gilt unter Berücksichtigung von Satz 1, Satz 2 und der Tatsache, daß der gleichmäßige Limes von Lösungen der Gleichung  $Lu = 0$  wieder Lösung ist,

$$(\mu_{x,\alpha}, \lambda_{x,\alpha})(f) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mu_{x,\alpha}, \lambda_{x,\alpha})(\tilde{\Phi} \eta^{(i)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\tilde{\Phi} \eta)^{(i)}(x) = D^\alpha u(x).$$

(Potentiale werden wir später mit  $\tilde{\Phi} \eta$  bezeichnen, per def. sind sie Lösungen von  $Lu = 0$  in  $\Omega$ . Bezeichnungen siehe S. 63 und 66.) Die Lösung des Problems (1') ist somit darstellbar als Grenzwert von Elementen aus  $S(s, \overline{\Omega})$ . Die Annahme der vorgegebenen Randwerte ist gesichert, da  $S(s, \partial\Omega)$  dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  liegt.

Als Potentiale wollen wir zuerst Integrale der Art

$$\int \tilde{\Phi}_\alpha^B(x, z) d\mu(z)$$

bezeichnen. Hierbei sei  $x, z \in R^n$ ,  $\mu$  ein Maß mit kompaktem Träger  $\text{supp } \mu \subset R^n$  und

$$\tilde{\Phi}_\alpha^B(x, z) = \begin{cases} D_x^\alpha D_z^B E(x, z) & \text{für } x \neq z, \\ 0 & \text{für } x = z. \end{cases}$$

$D_x^\alpha$  bezeichnet die partielle Ableitung bez.  $x$  mit dem Multiindex  $\alpha$  und  $D_z^B$  die partielle Ableitung bez.  $z$  mit dem Multiindex  $B$ . Die Potentiale werden immer im Hinblick auf bestimmte Operatoren  $L$  betrachtet, denn  $E(x, z)$  sei die Fundamentallösung des in der Problemstellung (1') zugrunde gelegten Operators  $L$ . Unter einer Fundamentallösung von  $L$  wird eine für  $x \neq z$  unendlich oft differenzierbare, lokal integrierbare Funktion  $E(x, z)$  verstanden, für die gilt:

$$\varphi(x) = \int E(x, z) L \varphi(z) dz \text{ und } \varphi(z) = \int E(x, z) L^* \varphi(x) dx$$

für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $\varphi$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ . ( $L^*$  - formal adjungierter Operator zu  $L$ .) Es sei  $\mu$  ein positives Maß mit kompaktem Träger. Man sagt,

$\mu$  erfüllt die Höldersche Bedingung für Maße, wenn eine Konstante  $C$  unabhängig von  $r$  und  $x$  ( $r > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ) existiert, so daß

$$\mu(r, x) \leq C r^{n-2+s} \quad (5)$$

für beliebige Punkte  $x$  und beliebige Werte  $r$  ist

$$(\mu(r, x) := \mu \{ y \in \mathbb{R}^n : |y-x| \leq r \}).$$

Definition 1:  $\tilde{\mathcal{F}}_1^+(s) := \{ \mu \geq 0 : \text{supp } \mu \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt, } \mu \text{ erfüllt Ungleichung (5)} \}.$

Satz 3: Die Funktion  $P(x, z)$  sei beschränkt, und für beliebige Punkte  $x, x', z \in \mathbb{R}^n$  gelte

$$|P(x, z) - P(x', z)| \leq \text{const.} \frac{|x-x'|}{|x-z|}.$$

Dann sind Integrale der Gestalt  $\int \frac{P(x, z)}{|x-z|^{n-2}} d\mu(z)$  Hölder-stetig in  $\mathbb{R}^n$ , falls  $\mu \in \tilde{\mathcal{F}}_1^+$  (siehe auch J. Kral /3/). (Hölder-stetig heißt, daß (2) mit  $|\alpha| = 0$  gilt.) Zum Beweis siehe H. Mumm /8/.

Definition 2: a) Die Menge aller Maße  $\mu$  mit kompaktem Träger, die sich als Differenz zweier Maße aus  $\tilde{\mathcal{F}}_1^+(s)$  darstellen lassen, wollen wir mit  $\tilde{\mathcal{F}}_1(s)$  bezeichnen. Ferner sei

$$b) \tilde{\mathcal{F}}(s) := \bigcup_{|\gamma| \leq m-1} \tilde{\mathcal{F}}_1(s), \quad \gamma\text{-Multiindex, und}$$

$$c) I(s) := \bigcup_{\xi \in \tilde{\mathcal{F}}_1^+(s)} I_\xi, \quad \text{wobei } I_\xi := \{ A \subset \mathbb{R}^n : \xi(A) = 0 \} \text{ ist.}$$

Die Elemente aus  $I(s)$  heißen Mengen der Kapazität Null. Gilt eine Eigenschaft überall bis auf eine Menge der Kapazität Null, so sagen wir, daß sie  $I(s)$ -fast überall gilt.

$\tilde{\mathcal{F}}(s, m)$  und  $I(s, M)$  seien Teilmengen der obigen Mengen, für die die Maße ihre Träger in  $M$  haben. Die Elemente aus  $\tilde{\mathcal{F}}(s)$  sind Maßstapel, die wir aber auch kurz Maße nennen.

Definition 3: a) Ein beliebiges vektorwertiges Maß

$\mu = (\mu^\gamma)_{|\gamma| \leq g}$  ( $\gamma$ -Multiindex,  $g \geq 0$  ganzzahlig) heiße  $I(s)$ -absolutstetig, falls  $I(s) \subset I_\mu$  gilt, wobei  $I_\mu = \bigcap_{|\gamma| \leq g} I_{\mu^\gamma}$  gesetzt wird.

b) Ein beliebiges vektorwertiges Maß  $\lambda = (\lambda^\sigma)_{|\sigma|=d}$  ( $\sigma$  - Multiindex,  $d \geq 0$  ganzzahlig) mit  $\text{supp } \lambda^\sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  heiße  $I(s)$ -absolutstetig, falls  $I(s) \times I(s) \subset I_\lambda$  gilt, wobei  $I_\lambda = \bigcap_{|\sigma|=d} I_{\lambda^\sigma}$  ist und  $I_{\lambda^\sigma} := \{D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \lambda^\sigma(D) = 0\}$  definiert wird.

Wenn wir uns im folgenden auf solche Operatoren  $L$  beschränken, deren Ableitungskerne  $\Phi_\alpha^B(x, z) = D_x^\alpha D_z^B E(x, z)$  für  $|\alpha| + |B| = 2m-2$  die Gestalt  $\frac{P(x, z)}{|x-z|^{n-2}}$  besitzen und für die  $P(x, z)$  die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, dann gilt das nachfolgende Lemma. Zuvor wollen wir aber noch den Begriff des Potentials endgültig definieren (siehe /10/).

Definition 4: a) Es sei  $\eta = (\eta^B)_{|B| \leq m-1}$  ein Maß mit kompaktem Träger. Als Potential bezeichnen wir von jetzt ab die vektorwertige Funktion

$$\Phi \eta(x) := [(\Phi \eta)_\alpha(x)]_{|\alpha| \leq m-1} \text{ mit den Komponenten}$$

$$(\Phi \eta)_\alpha(x) := \sum_{|B| \leq m-1} \int \Phi_\alpha^B(x, z) d\eta^B(z).$$

b) Es sei  $\lambda = (\lambda^\alpha)_{|\alpha| \leq m-1}$  ein Maß mit kompaktem Träger. Als adjungiertes Potential wird die vektorwertige Funktion

$$\Phi^* \lambda(z) := [(\Phi^* \lambda)_B(z)]_{|B| \leq m-1} \text{ mit den Komponenten}$$

$$(\Phi^* \lambda)_B(z) := \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \Phi_\alpha^B(x, z) d\lambda^\alpha(x) \text{ bezeichnet.}$$

Lemma 1: Aus  $\eta \in \tilde{\mathcal{F}}(s, C(\Omega))$  folgt  $\Phi \eta(x)|_{\bar{\Omega}} \in C^{m-1+s}(\Omega)$  und  $L(\Phi \eta)_0(x) = 0$ .

Beweis: Die Tatsache, daß die erste Komponente von  $\Phi \eta$  der Gleichung  $Lu = 0$  genügt, wurde bereits in /10/, S. 227, bewiesen. Aus der Hölder-Stetigkeit der Ableitungskerne für  $|\alpha| + |B| = 2m-2$  folgt auch die Hölder-Stetigkeit der Kerne für  $|\alpha| + |B| < 2m-2$ .

Lemma 2: Die Menge  $\tilde{F}_1^+(s)$  ist erblich, d. h., aus  $\lambda \in \tilde{F}_1^+(s)$  folgt auch

$\mu \in \tilde{F}_1^+(s)$ , wenn nur  $0 \leq \mu \leq \lambda$  gilt.

(Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition von  $\tilde{F}_1^+(s)$ .)

Lemma 3: Für eine beliebige abgeschlossene Menge  $M$  und eine beliebige Vektorfunktion  $v(z) = [v^B(z)]_{|B| \leq m-1}$  gilt

$$\eta(v) := \sum_{|B| \leq m-1} \int v^B(z) d\eta^B(z) = 0$$

für alle  $\eta \in \tilde{F}(s, M)$  genau dann, wenn  $v = 0$  I(s)-f.ü. auf  $M$  ist. (Im Beweis wird wesentlich Lemma 2 benutzt; vgl. /9/.)

Zum Beweis verschiedener Aussagen über die Eigenschaften der in Definition 4 eingeführten Potentiale benötigen wir das

Lemma 4: Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $\mu \in \tilde{F}_1^+(s)$ . Dann ist für beliebige Punkte  $x, y \in K$

$$\int \frac{\frac{P(x,z)}{|x-z|^{n-2}} - \frac{P(y,z)}{|y-z|^{n-2}}}{|x-y|^s} d\mu(z) \leq \text{const.}$$

( $P(\cdot, z)$  erfülle die Voraussetzungen von Satz 3.)

Beweis: Es besteht die Identität  $\frac{P(x,z)}{|x-z|^{n-2}} - \frac{P(y,z)}{|y-z|^{n-2}}$

$$= P(x,z) \left( \frac{1}{|x-z|^{n-2}} - \frac{1}{|y-z|^{n-2}} \right) + \frac{1}{|y-z|^{n-2}} (P(x,z) - P(y,z))$$

$$= I_1 + I_2.$$

Die Voraussetzungen bez.  $P$  erlauben die Abschätzung

$$\int \frac{|I_2|}{|x-y|^s} d\mu(z) \leq C \int \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z| |y-z|^{n-2}} d\mu(z).$$

Durch einfache Umformungen erhält man außerdem

$$\frac{|I_1|}{|x-y|^s} = C \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z|^{n-2} |y-z|} + \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z|^{n-3} |y-z|^2} + \dots + \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z| |y-z|^{n-2}},$$

denn es ist

$$\left| \frac{|y-z|^{n-2} - |x-z|^{n-2}}{|x-z|^{n-2} |y-z|^{n-2}} \right| = \frac{||y-z| - |x-z|| (|y-z|^{n-3} + \dots + |x-z|^{n-3})}{|x-z|^{n-2} |y-z|^{n-2}}$$

und  $||y-z| - |x-z|| \leq |x-y|$ . Es genügt also, Integrale der Art

$$\int \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z|^a |y-z|^b} d\mu(z) \quad (a+b=n-1, a, b > 0)$$

abzuschätzen. Im Falle  $d\mu(z) = f(z)dz$  ( $dz$  - Lebesgue-Maß im  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(z)$  - beschränkte, positive Dichtefunktion mit kompaktem Träger) ergibt die Substitution  $z' = z/|x-y|$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{|x-z|^a |y-z|^b} f(z) dz &= \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \int \left| \frac{x-y}{x-z} \right|^a \left| \frac{x-y}{y-z} \right|^b f(z) dz \\ &\leq C \frac{|x-y|^n}{|x-y|^{n-1}} \int |x'-z'|^{-a} |y'-z'|^{-b} dz' = C|x-y|, \end{aligned}$$

da  $\int |x'-z'|^{-a} |y'-z'|^{-b} dz'$  nur vom Abstand zwischen  $x'$  und  $y'$  abhängt und  $|x'-y'| = 1$  ist. Daraus folgt für alle  $x, y \in K$

$$\int \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z|^a |y-z|^b} d\mu(z) \leq C|x-y|^{2-s} \leq \text{const.}$$

Wäre die beschränkte Dichtefunktion  $f(z)$  nur auf einer  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit konzentriert (auch dann ist  $\mu \in \tilde{\mathcal{F}}_1^+(s)$ ), ergäbe sich

$$\int \frac{|x-y|^{1-s}}{|x-z|^a |y-z|^b} d\mu(z) \leq C|x-y|^{1-s} \leq \text{const.}$$

Bei allgemeinen Maßen führt die Substitution  $z' = z/|x-y|$  auf

$$\int \frac{d\mu(z)}{|x-z|^a |y-z|^b} = \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \int |x'-z'|^{-a} |y'-z'|^{-b} d\hat{\mu}(z'),$$

wobei  $\hat{\mu}(r', z') = \mu(r, z) \leq C r^{n-2+s} = C |x-y|^{n-2+s} (r')^{n-2+s}$

gilt. Das Integral  $\int |x'-z'|^{-a} |y'-z'|^{-b} d\hat{\mu}(z')$  kann nun unter Ausnutzung dieser Eigenschaft durch  $C|x-y|^{n-2+s}$  nach oben abgeschätzt werden (vgl. /8/), so daß

$$\int \frac{d\mu(z)}{|x-z|^a |y-z|^b} \leq C \frac{|x-y|^{n-2+s}}{|x-y|^{n-1}} = C|x-y|^{s-1}$$

wird und damit  $\int \frac{|x-y|^{1-s} d\mu(z)}{|x-z|^s |y-z|^s} \leq \text{const.}$  ist.

Mit diesen Vorbereitungen (Lemma 3 und Lemma 4) können wir nun in die Beziehung (4) des Satzes 1 Potentiale  $\tilde{\Phi} \eta(x)$  mit  $\eta \in \tilde{F}(s)$  einsetzen. Wir erhalten dann für  $x_0 \in \Omega, |\alpha|_0 \leq m-1$

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi} \eta)_{\alpha_0}(x_0) &= \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int (\tilde{\Phi} \eta)_{\alpha}(x) d\mu_{x_0, \alpha_0}^{\alpha}(x) \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \frac{(\tilde{\Phi} \eta)_{\alpha}(x) - (\tilde{\Phi} \eta)_{\alpha}(y)}{|x-y|^s} d\lambda_{x_0, \alpha_0}^{\alpha}(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Der Satz von Fubini erlaubt unter Berücksichtigung von Lemma 4 die Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite der Gleichung (6), und auf Grund von Lemma 3 gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\alpha_0}^B(x_0, z) &= \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \tilde{\Phi}_{\alpha}^B(x, z) d\mu_{x_0, \alpha_0}^{\alpha}(x) \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \frac{\tilde{\Phi}_{\alpha}^B(x, z) - \tilde{\Phi}_{\alpha}^B(y, z)}{|x-y|^s} d\lambda_{x_0, \alpha_0}^{\alpha}(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

für I(s)-f.a.  $z \in C\Omega$  ( $x_0 \in \Omega, |\alpha| \leq m-1, C\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ).

**Lemma 5:** Es seien  $\omega = (\omega^B)_{|B| \leq m-1}, \mu = (\mu^{\alpha})_{|\alpha| \leq m-1}, \lambda = (\lambda^{\alpha})_{|\alpha| \leq m-1}$  Maße mit  $\text{supp } \omega \subset \partial\Omega, \text{supp } \mu \subset \partial\Omega, \text{supp } \lambda \subset \partial\Omega \times \partial\Omega$ , so daß

$$\begin{aligned} \omega(|\tilde{\Phi}|_{\lambda}^{\mu}) &:= \sum_{|B| \leq m-1} \int \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int |\tilde{\Phi}_{\alpha}^B(x, z)| d\mu^{\alpha}(z) \right. \\ &\left. + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \frac{|\tilde{\Phi}_{\alpha}^B(x, z) - \tilde{\Phi}_{\alpha}^B(x, y)|}{|z-y|^s} d\lambda^{\alpha}(z, y) \right\} d\omega^B(x) \end{aligned}$$

endlich ist. Dann gilt  $\omega(|\tilde{\Phi}|_{\lambda}^{\mu}) = (\mu, \lambda)(\tilde{\Phi} \omega)$ , d. h. ausführlich



$$\begin{aligned}
& \sum_{|B| \leq m-1} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \Phi_{\alpha}^B(x, z) d\mu^{\alpha}(z) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \frac{\Phi_{\alpha}^B(x, z) - \Phi_{\alpha}^B(x, y)}{|z - y|^s} d\lambda^{\alpha}(z, y) \right\} d\omega^B(x) \\
& = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \left( (\Phi\omega)_{\alpha}(x) d\mu^{\alpha}(x) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int \frac{(\Phi\omega)_{\alpha}(x) - (\Phi\omega)_{\alpha}(y)}{|x - y|^s} d\lambda^{\alpha}(x, y) \right).
\end{aligned}$$

Die Aussage dieses Lemmas folgt auf Grund der getroffenen Voraussetzungen unmittelbar aus dem Satz von Fubini.

**Definition 5:**  $\mathcal{H} = \{ \omega = (\omega^B)_{|B| \leq m-1}, \text{supp } \omega \subset \partial\Omega : \omega(g) :=$

$$\sum_{|B| \leq m-1} \int D^B g(x) d\omega^B(x) = 0 \text{ für alle } g \in C^{m-1+s}(R^n) \}.$$

**Definition 6:** a)  $S(s, \bar{\Omega}) := \{ \Phi \eta(x) |_{\bar{\Omega}} : \eta \in \tilde{F}(s, C\Omega) \},$

b)  $S(s, \partial\Omega) := r_{\partial\Omega} S(s, \bar{\Omega}),$

c)  $S^*(s, \bar{\Omega}) := \{ \Phi^* \lambda(z) |_{\bar{\Omega}} : \lambda \in \tilde{F}(s, C\Omega) \},$

d)  $S^*(s, \partial\Omega) := r_{\partial\Omega} S^*(s, \bar{\Omega}).$

Das zu Beginn dieses Abschnitts abgesteckte Ziel haben wir mit dem folgenden Satz erreicht.

**Satz 4:** Es sei  $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$ . Wenn auf  $\partial\Omega$  harmonische Maße  $(\mu_{x_0, \alpha_0}, \lambda_{x_0, \alpha_0})$  existieren, deren Komponenten  $\mu_{x_0, \alpha_0}$  und  $\lambda_{x_0, \alpha_0}$   $I(s)$ -absolutstetig sind, die Voraussetzungen von Lemma 5 erfüllen und für alle  $z \in C\Omega$  der Identität (7) genügen, dann ist  $S^*(s, C\Omega)$  dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$ .

**Beweis:** 1. Im ersten Schritt zeigen wir, daß für ein beliebiges Maß  $\omega = (\omega^B)_{|B| \leq m-1}$  mit  $\text{supp } \omega \subset \partial\Omega$  aus

$$\Phi \omega(x) = 0 \quad I(s)\text{-f.ü. im } R^n \tag{8}$$

$\omega \in \mathcal{H}$  folgt.

Aus (8) ergibt sich nämlich unter Benutzung des Satzes von Fubini

$$\eta(\bar{\Phi}\omega) = \omega(\bar{\Phi}^*\eta) = 0 \text{ für alle } \eta \in \tilde{F}(s). \quad (9)$$

Das spezielle Maß  $\eta_\varphi = (L^*\varphi(x)dx, 0, \dots, 0)$  ( $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ), in (9) eingesetzt, ergibt

$$\omega(\bar{\Phi}^*\eta) = \omega(\varphi) = 0 \text{ für beliebige } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Auf Grund der Dichtheit von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  in  $C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$  gilt dann aber auch  $\omega(g) = 0$  für alle  $g \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ . Wegen  $C^{m-1+s}(\mathbb{R}^n) \subset C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$  liegt  $\omega$  schließlich in  $\mathcal{H}$ .

2. Im zweiten Schritt weisen wir nach, daß die Aussage

$S^*(s, \partial\Omega)$  ist dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  äquivalent damit ist, daß aus  $\text{supp } \omega \subset \partial\Omega$ ,  $\bar{\Phi}\omega(x) = 0$  I(s)-f.ü. auf  $C\Omega$  stets  $\omega \in \mathcal{H}$  folgt.

Dazu nehmen wir zuerst  $S^*(s, \partial\Omega)$  dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  und  $\bar{\Phi}\omega(x) = 0$  I(s)-f.ü. auf  $C\Omega$  an. Ein beliebiges Element

$f \in W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  läßt sich dann durch eine Folge

$\bar{\Phi}^*\lambda^{(i)} \in S^*(s, \partial\Omega)$  (für  $i \rightarrow \infty$ ) approximieren, und es gilt

$$\omega(f) = \lim_{i \rightarrow \infty} \omega(\bar{\Phi}^*\lambda^{(i)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda^{(i)}(\bar{\Phi}\omega) = 0.$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist wieder durch den Satz von Fubini erlaubt. Wegen  $C^{m-1+s}(\mathbb{R}^n)|_{\partial\Omega} \subset W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  ist demzufolge  $\omega \in \mathcal{H}$ .

Andererseits folge jetzt aus  $\bar{\Phi}\omega(x) = 0$  I(s)-f.ü. auf  $C\Omega$ ,

daß  $\omega \in \mathcal{H}$  ist. Wäre dann  $S^*(s, \partial\Omega)$  nicht dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$ ,

so müßten ein Element  $f \in W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  und ein Maß  $\omega$  existieren mit  $\bar{\Phi}\omega(x) = 0$  I(s)-f.ü. auf  $C\Omega$  und  $\omega(f) \neq 0$ . Per def. existiert aber eine Funktion  $g \in C^{m-1+s}(\mathbb{R}^n)$  mit  $f_\alpha = D^\alpha g(x)$  für alle  $x \in \partial\Omega$ . Also ist auch  $\omega(g) \neq 0$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung  $\omega \in \mathcal{H}$ .

3. Im dritten Schritt sei  $\omega$  ein Vektor von Maßen auf  $\partial\Omega$  mit  $\bar{\Phi}\omega(x) = 0$  I(s)-f.ü. auf  $C\Omega$ .

Aus (7) folgt

$$\omega(\Phi_{a_0}^B(x_0, z)) = \omega(\Phi_{\lambda_{x_0, a_0}}^{\mu_{x_0, a_0}}),$$

und aus der Definition 4a) sowie Lemma 5 ergibt sich

$$(\Phi \omega)_{a_0}(x_0) = (\mu_{x_0, a_0}, \lambda_{x_0, a_0})(\Phi \omega).$$

Wegen der vorausgesetzten  $I(s)$ -Absolutstetigkeit des harmonischen Maßes  $(\mu_{x_0, a_0}, \lambda_{x_0, a_0})$  ist auch  $\Phi \omega(x) = 0$  auf  $\Omega$  und

somit im gesamten  $R^n$ , d. h. aber nach 2.

$S^*(s, \partial\Omega)$  ist dicht in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$ .

Analog zu Satz 4 kann man auch eine Aussage über die Dichtheit von  $S(s, \partial\Omega)$  in  $W^{m-1+s}(\partial\Omega)$  herleiten. Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind im Falle eines glatten Randes  $\partial\Omega$  erfüllt, da dann  $\lambda_{x, \alpha} = 0$  ist und  $\mu_{x, \alpha}$  durch stetige Dichten auf  $\partial\Omega$  darstellbar ist.

## Literatur

- /1/ Agmon, S.: Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations. Bull. Amer. Math. Soc. 66, 77 - 80 (1960)
- /2/ Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math. 12, 623 - 727 (1959)
- /3/ Kral, J.: Removable singularities of solutions of semieliptic equations. Rend. Mat. (6), 6, 763 - 783 (1973)
- /4/ Krasovskij, Ju. P.: Abschätzungen der Ableitungen von Lösungen homogener elliptischer Gleichungen in der Nähe des Randes. (Russ.) Dokl. Akad. Nauk. SSSR 184, 270 - 273 - (1969)

- /5/ Ladyzhenskaya, O. A., and Uraltseva, N. N.: Linear and quasilinear elliptic equations. New York 1968
- /6/ Miranda, C.: Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicita per il problema di Dirichlet relative alle equazioni ellittiche in due variabili. Ann. Mat. Pura Appl. 46, 265 - 311 (1948)
- /7/ Mumm, H., und Wildenhain, G.: Zur Darstellung der Lösung allgemeiner elliptischer Randwertprobleme. Rostock. Math. Kolloq. 8, 31 - 45 (1978)
- /8/ Mumm, H.: Vergleich zweier Nullmengensysteme. In: Elliptische Differentialgleichungen. Vorträge der Tagung in Rostock 10. - 16. 10. 1977, S. 191 - 198, Rostock 1978
- /9/ Mumm, H.: Potentialtheoretische Untersuchungen für lineare elliptische Randwertprobleme in Hölder-Räumen. Dissertation A, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1980
- /10/ Schulze, B.-W., und Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin 1977
- /11/ Wildenhain, G.: Der Raum der  $H$ -stetig differenzierbaren Funktionen. Math. Nachr. 50, 217 - 228 (1971)

eingegangen: 30. 07. 1980

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Harald Mumm  
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
 Sektion Mathematik  
 Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Wolfgang Peters

Dieter Schott

Ober Nullräume, Wertebereiche und Relationen von Operatoren, die bei stationären Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen auftreten

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei (nichttriviale) Banachräume,  $L(X,Y)$  die Menge der linearen und stetigen Operatoren von  $X$  in  $Y$  und  $I$  der Einheitsoperator auf  $X$  bzw.  $Y$ . Weiterhin bezeichne  $\mathcal{R}(T)$  den Wertebereich und  $\mathcal{N}(T)$  den Nullraum eines Operators  $T$ . Die Abschließung einer Menge  $M$  werde durch  $\overline{M}$  dargestellt.

Zur Bestimmung von Lösungen bzw. verallgemeinerten Lösungen einer Gleichung

$$Ax = b, A \in L(X,Y), b \in Y, \quad (1)$$

eignen sich stationäre Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = Tx_n + Db = T^{n+1}x_0 + B_n b, T = I - DA \in L(X), \quad (2)$$

mit einem Operator  $D \in L(Y,X)$  und einem Startelement  $x_0 \in X$ . Der Fall, daß (1) ein lineares algebraisches Gleichungssystem mit rechteckiger Koeffizientenmatrix ist, wurde von Tanabe in /16/ und von Maß /3/ - /7/) eingehend untersucht. Berg verallgemeinerte in /2/ einige dieser Ergebnisse auf lineare Operatorgleichungen in Limesräumen. Verwandte Aussagen in linearen topologischen Räumen findet man bei Schulz (/14/).

Es erwies sich als günstig, parallel zu der nach (2) erzeugten Folge von Näherungen  $x_n$  auch die Iteration der zugehörigen Reste  $r_n = b - Ax_n$  zu betrachten:

$$r_{n+1} = Sr_n = S^{n+1}r_0, S = I - AD \in L(Y). \quad (3)$$

Die Operatoren  $S$  und  $T$  sind miteinander durch die Relationen

$$AT^n = S^n A, T^n D = DS^n \quad (4)$$

verknüpft, und der Operator  $B_n$  besitzt die Darstellung

$$B_n = \sum_{i=0}^n T^i D = \sum_{i=0}^n D S^i. \quad (5)$$

Mit seiner Hilfe lassen sich die Potenzen von  $T$  und  $S$  folgendermaßen ausdrücken:

$$T^{n+1} = I - B_n A, \quad S^{n+1} = I - A B_n. \quad (6)$$

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines der Grenzwerte

$$T^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n, \quad S^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n, \quad B_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

anzugeben, wenn einer der beiden anderen existiert. Ein einfacher Zusammenhang besteht darin, daß die Existenz von  $B_\infty$  schon die Existenz von  $T^\infty$  und  $S^\infty$  zur Folge hat. Man erhält dann nämlich aus (6)

$$T^\infty = I - B_\infty A, \quad S^\infty = I - A B_\infty. \quad (7)$$

Außerdem existieren in diesem Fall die Grenzwerte

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad r_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$$

für beliebige Elemente  $b$  und  $x_0$ , wobei nach (2) und (3) gilt

$$x_\infty = T^\infty x_0 + B_\infty b, \quad (8)$$

$$r_\infty = S^\infty r_0. \quad (9)$$

Schließlich stellt  $B_\infty$  eine verallgemeinerte Inverse von  $A$  dar (/1/, /9/), deren Eigenschaften bedeutsam für das Grenzelement  $x_\infty$  der Iteration (2) sind.

Insbesondere erlauben es unsere Äquivalenzsätze, auf Existenz und Eigenschaften von  $B_\infty$  schließen zu können, indem man nur den 1. allg. einfacheren Nachweis führt, daß der Operator  $T^\infty$  bzw.  $S^\infty$  existiert und daß gewisse Beziehungen zwischen Wertebereichen und Nullräumen von Operatoren erfüllt sind.

Setzt man die Existenz der Operatoren  $T^\infty$  und  $S^\infty$  voraus, so

sind diese stets mit  $T$  bzw.  $S$  vertauschbare Projektionsoperatoren, deren Wertebereiche und Nullräume leicht angegeben werden können.

**Satz 1** (Maeß /3/, /4/; Tanabe /16/):

Existiert  $T^{\infty}$ , so gilt

$$T^{\infty} = T^{\infty}T = TT^{\infty} = (T^{\infty})^2,$$

$$R(T^{\infty}) = IN(DA) = IN(I - T) = IN(I - T^{\infty}),$$

$$N(T^{\infty}) = \overline{R(DA)} = \overline{R(I - T)} = \overline{R(I - T^{\infty})}.$$

Existiert  $S^{\infty}$ , so gilt

$$S^{\infty} = S^{\infty}S = SS^{\infty} = (S^{\infty})^2,$$

$$R(S^{\infty}) = IN(AD) = IN(I - S) = IN(I - S^{\infty}),$$

$$N(S^{\infty}) = \overline{R(AD)} = \overline{R(I - S)} = \overline{R(I - S^{\infty})}.$$

**Beweis:** Der Nachweis dieser Behauptungen läßt sich wie bei Maeß (/3/) führen, wobei zu beachten ist, daß der Wertebereich eines linearen und stetigen Operators bei Banachräumen im Gegensatz zu endlichdimensionalen Räumen nicht notwendig abgeschlossen ist.

Die folgenden zwei Lemmata enthalten nützliche Äquivalenzen von Operatorgleichungen und Raumbeziehungen.

**Lemma 1:** Es existiere  $T^{\infty}$ . Dann gilt

$$T^{\infty}D = 0 \iff IN(T^{\infty}) = \overline{R(D)} \iff \overline{R(DA)} = \overline{R(D)},$$

und aus jeder dieser Beziehungen folgt

$$IN(AD) = IN(D).$$

Es existiere  $S^{\infty}$ . Dann gilt

$$DS^{\infty} = 0 \iff R(S^{\infty}) = IN(D) \iff IN(AD) = IN(D),$$

und aus jeder dieser Beziehungen folgt

$$\overline{R(DA)} = \overline{R(D)}.$$

**Beweis:** Es existiere  $T^{\infty}$ . Aus  $T^{\infty}D = 0$  erhält man unter Beachtung von Satz 1 sofort  $\overline{R(D)} \subseteq IN(T^{\infty}) = \overline{R(DA)}$ , und wegen  $\overline{R(DA)} \subseteq \overline{R(D)}$  ergibt sich  $IN(T^{\infty}) = \overline{R(D)}$ . Die Umkehrung

ist offensichtlich. Andererseits erhält man aus  $T^{\infty}D = 0$  wegen (6) die Gleichung  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n AD = D$ , und es folgt  $IN(D) \subseteq IN(AD) \subseteq IN(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n AD) = IN(D)$ , also  $IN(AD) = IN(D)$ .

Es existiere  $S^{\infty}$ . Gilt  $DS^{\infty} = 0$ , so ist unter Beachtung von Satz 1 offenbar  $IR(S^{\infty}) \subseteq IN(D) \subseteq IN(AD) = IR(S^{\infty})$ , d. h.  $IR(S^{\infty}) = IN(D)$ . Die Umkehrung folgt wieder sofort. Aus  $DS^{\infty} = 0$  ergibt sich mit (6) die Gleichung  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} DAB_n$ , woraus

$IR(D) = IR(\lim_{n \rightarrow \infty} DAB_n) \subseteq IR(DA) \subseteq IR(D)$ , also  $IR(DA) = IR(D)$ , folgt.

Lemma 2: Existiert  $T^{\infty}$ , so gilt

$$AT^{\infty} = 0 \Leftrightarrow IR(T^{\infty}) = IN(A) \Leftrightarrow IN(DA) = IN(A).$$

Existiert  $S^{\infty}$ , so gilt

$$S^{\infty}A = 0 \Leftrightarrow IN(S^{\infty}) = IR(A) \Leftrightarrow IR(AD) = IR(A).$$

Beweis: Existiert  $T^{\infty}$ , dann erhält man nach Satz 1

$IR(T^{\infty}) = IN(DA)$ . Ist  $AT^{\infty} = 0$ , so folgt demnach

$IR(T^{\infty}) = IN(DA) \subseteq IN(A) \subseteq IN(DA)$ . Die Umkehrung ist trivial.

Existiert  $S^{\infty}$ , so ist nach Satz 1  $IN(S^{\infty}) = IR(AD)$ , und aus

$S^{\infty}A = 0$  ergibt sich  $IR(A) \subseteq IN(S^{\infty}) = IR(AD) \subseteq IR(A)$ .

Die umgekehrte Beweisrichtung folgt sofort.

Existiert der Operator  $B_{\infty}$ , so gilt der nachstehende Satz.

Satz 2 (Maß): Aus der Existenz von  $B_{\infty}$  folgt die Existenz von  $T^{\infty}$  und  $S^{\infty}$  und die Gültigkeit der Beziehungen

$$T^{\infty}D = 0, \quad DS^{\infty} = 0,$$

$$B_{\infty}AD = D, \quad B_{\infty}S^{\infty} = 0,$$

$$T^{\infty}B_{\infty} = 0, \quad B_{\infty}S^{\infty} = 0, \quad B_{\infty}AB_{\infty} = B_{\infty}.$$

Weiterhin existiert das Grenzelement  $x_{\infty}$  der Iteration (2) für beliebige  $x_0, b$  und stellt eine bezüglich  $D$  verallgemeinerte Lösung von (1) dar, d. h., es gilt  $D(b - Ax_{\infty}) = 0$ .



Beweis: Die Behauptungen ergeben sich explizit aus den Aussagen von Theorem 1 in /7/ bzw. implizit aus dem entsprechenden Beweis.

Nun kann ein erster Äquivalenzsatz formuliert werden (vgl. auch Schulz (/14/)).

Satz 3: Sind die Operatoren DA und AD normal auflösbar, gilt also

$$\overline{R(DA)} = R(DA), \quad \overline{R(AD)} = R(AD),$$

so sind folgende drei Aussagen äquivalent:

- a) Es existiert  $B_{\infty}$ .
- b) Es existiert  $T^{\infty}$ , und es gilt  $R(DA) = R(D)$ .
- c) Es existiert  $S^{\infty}$ , und es gilt  $N(AD) = N(D)$ .

Beweis: Wir führen den Beweis in vier Schritten.

a)  $\Rightarrow$  b): Aus der Existenz von  $B_{\infty}$  folgt nach Satz 2, daß auch  $T^{\infty}$  existiert und daß  $DAB_{\infty} = D$  ist. Somit erhält man  $R(D) = R(DAB_{\infty}) \subseteq R(DA) \subseteq R(D)$ .

a)  $\Rightarrow$  c): Existiert  $B_{\infty}$ , so existiert nach Satz 2 ebenfalls  $S^{\infty}$ , und es gilt  $B_{\infty}AD = D$ , also  $N(D) \subseteq N(AD) \subseteq N(B_{\infty}AD) = N(D)$ .

b)  $\Rightarrow$  a): Für jedes  $x$  existiert ein  $y$  mit  $Dx = DAY$ , so daß auf Grund von (5) und (6)

$$B_n x = \sum_{i=0}^n T^i D x = \sum_{i=0}^n T^i D A y = B_n A y = (I - T^{n+1}) y$$

ist. Der Grenzwert rechts existiert für  $n \rightarrow \infty$ , so daß auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n x$  für alle  $x$  existiert.

c)  $\Rightarrow$  a): Wegen Lemma 1 ist  $DS^{\infty} = 0$ . Da  $S^{\infty}$  ein Projektionsoperator ist, gilt für jedes  $x \in R(S^{\infty})$  die Gleichung  $x = S^{\infty} x$  und damit

$$B_n x = \sum_{i=0}^n DS^i x = \sum_{i=0}^n DS^i S^{\infty} x = \sum_{i=0}^n DS^{\infty} x = 0 \quad (x \in R(S^{\infty})).$$

Jedes  $x \in N(S^{\infty}) = \overline{R(I - S)} = \overline{R(AD)} = R(AD) = R(I - S)$

kann in der Form  $x = (I - S)z$  dargestellt werden, und es folgt

$$B_n x = \sum_{i=0}^n DS^i x = \sum_{i=0}^n DS^i (I - S)z = (D - DS^{n+1})z \quad (x \in \text{IN}(S^\infty)).$$

In beiden Gleichungen existiert für  $n \rightarrow \infty$  der Grenzwert auf der rechten Seite, folglich auch auf der linken, so daß schließlich  $B_\infty$  auf ganz  $Y$  existiert.

Falls der Operator  $DA$  eine lineare innere Inverse  $(DA)^-$  besitzt  $(DA(DA)^-DA = DA)$ , so ist  $DA(DA)^-$  ein Projektionsoperator auf  $\text{IR}(DA)$  (/9/), und wenn eine lineare innere Inverse  $(AD)^-$  von  $AD$  existiert  $(AD(AD)^-AD = AD)$ , so stellt  $I - (AD)^-AD$  einen Projektionsoperator auf  $\text{IN}(AD)$  dar (/9/). Es gilt das folgende Lemma.

**Lemma 3:** Besitzt  $DA$  eine lineare innere Inverse  $(DA)^-$ , so gilt

$$\text{IR}(DA) = \text{IR}(D) \iff DA(DA)^-D = D \iff \exists D' \in L(Y, X): DAD' = D.$$

Gibt es eine lineare innere Inverse  $(AD)^-$  von  $AD$ , so ist

$$\text{IN}(AD) = \text{IN}(D) \iff D(AD)^-AD = D \iff \exists D'' \in L(Y, X): D''AD = D.$$

**Beweis:** Gilt  $\text{IR}(DA) = \text{IR}(D)$ , so läßt der Projektionsoperator  $DA(DA)^-$  jedes Element aus  $\text{IR}(D)$  unverändert, d. h., es gilt  $DA(DA)^-D = D$  bzw.  $DAD' = D$  mit  $D' = (DA)^-D$ . Umgekehrt erhält man aus  $DAD' = D$  sofort  $\text{IR}(D) = \text{IR}(DAD') \subseteq \text{IR}(DA) \subseteq \text{IR}(D)$ , also  $\text{IR}(DA) = \text{IR}(D)$ .

Weil  $I - (AD)^-AD$  ein Projektor auf  $\text{IN}(AD)$  ist, folgt aus  $\text{IN}(AD) = \text{IN}(D)$  die Beziehung  $D(I - (AD)^-AD) = 0$ , also  $D''AD = D$  mit  $D'' = D(AD)^-$ . Aus  $D''AD = D$  ergibt sich andererseits  $\text{IN}(D) \subseteq \text{IN}(AD) \subseteq \text{IN}(D''AD) = \text{IN}(D)$ .

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3 entsprechen die Äquivalenz der Aussagen b) und c) und die Folgerung b) oder c) impliziert a) von Satz 3 der Aussage des Theorems 3 von Berg in /2/. Das folgende Lemma enthält äquivalente Bedingungen dafür, daß  $B_\infty$  eine innere Inverse von  $A$  ist.

**Lemma 4:** Existiert  $B_\infty$ , so gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} AB_\infty A = A &\iff AT^\infty = 0 \iff \text{IR}(T^\infty) = \text{IN}(A) \iff \text{IN}(DA) = \text{IN}(A) \\ &\iff S^\infty A = 0 \iff \text{IN}(S^\infty) = \overline{\text{IR}(A)} \iff \overline{\text{IR}(AD)} = \overline{\text{IR}(A)}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Da die Existenz von  $B_{\infty}$  die Existenz von  $T^{\infty}$  und  $S^{\infty}$  impliziert, ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2 und aus (7).

Mit diesem Lemma erhält man aus Satz 3 die nachstehende Aussage.

**Satz 4:** Für normal auflösbare Operatoren  $DA$  und  $AD$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es existiert  $B_{\infty}$ , und es gilt  $AB_{\infty}A = A$ .
- b) Es existiert  $T^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{R}(DA) = \mathcal{R}(D)$ ,  $\mathcal{N}(DA) = \mathcal{N}(A)$ .
- c) Es existiert  $S^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{N}(AD) = \mathcal{N}(D)$ ,  $\mathcal{R}(AD) = \mathcal{R}(A)$ .

**Beweis:** Zunächst sind nach Satz 3 und Lemma 4 die Aussagen

a) und

c') es existiert  $S^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{N}(AD) = \mathcal{N}(D)$ ,  $\overline{\mathcal{R}(AD)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$  äquivalent. Wegen  $\overline{\mathcal{R}(AD)} = \mathcal{R}(AD) \subseteq \mathcal{R}(A) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$  folgt aber aus c') sofort c). Umgekehrt zieht c) unmittelbar c') nach sich. Entsprechendes gilt für die Äquivalenz von a) und b).

Sind  $X$  und  $Y$  Hilberträume, so kann man auch die drei folgenden Sätze formulieren.

**Satz 5:** Für normal auflösbare Operatoren  $AD$  und  $DA$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es existiert  $B_{\infty}$ , und es gilt  $AB_{\infty}A = A$ ,  $B_{\infty}A = (B_{\infty}A)^*$ .
- b) Es existiert  $T^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{R}(DA) = \mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(A^*)$ ,  $\mathcal{N}(DA) = \mathcal{N}(A)$ .
- c) Es existiert  $S^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{N}(AD) = \mathcal{N}(D)$ ,  $\mathcal{R}(AD) = \mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(A^*)$ .

Ist eine der Bedingungen a), b) oder c) erfüllt, so gilt außerdem

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*D^*), \quad \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*D^*) = \mathcal{N}(D^*).$$

**Beweis:** Der Beweis folgt aus Satz 4, denn der Projektor  $B_{\infty}A$  bzw. der Projektor  $T^{\infty}$  ist genau dann selbstadjungiert (bzw. orthogonal), wenn

$$\begin{aligned} \text{IR}(T^{\infty}) &= \text{IN}(A) = \text{IN}(T^{\infty})^{\perp} = \text{IR}(DA)^{\perp} = \text{IN}(A^*D^*) \\ &= \text{IR}(D)^{\perp} = \text{IN}(D^*) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{IN}(T^{\infty}) &= \text{R}(D) = \text{R}(T^{\infty})^{\perp} = \text{IN}(DA)^{\perp} = \overline{\text{IR}(A^*D^*)} = \overline{\text{IR}(A^*D^*)} \\ &= \text{IN}(A)^{\perp} = \overline{\text{IR}(A^*)} = \text{R}(A^*) \end{aligned}$$

gilt. Hierbei ist zu beachten, daß mit  $DA$  auch  $(DA)^*$  normal auflösbar ist und daß aus  $\overline{\text{IR}(A^*D^*)} = \text{IR}(A^*D^*) \subseteq \text{IR}(A^*) \subseteq \overline{\text{IR}(A^*)}$  die Äquivalenz von  $\text{IR}(A^*D^*) = \text{IR}(A^*)$  und  $\text{IR}(A^*D^*) = \text{IR}(A^*)$  folgt.

**Satz 6:** Für normal auflösbare Operatoren  $AD$  und  $DA$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es existiert  $B_{\infty}$ , und es gilt  $AB_{\infty}A = A$ ,  $AB_{\infty} = (AB_{\infty})^*$ .
- b) Es existiert  $T^{\infty}$ , und es gilt  $\text{IR}(DA) = \text{IR}(D)$ ,  $\text{IN}(DA) = \text{IN}(A)$ ,  $\text{IN}(D) = \text{IN}(A^*)$ .
- c) Es existiert  $S^{\infty}$ , und es gilt  $\text{IN}(AD) = \text{IN}(D) = \text{IN}(A^*)$ ,  $\text{R}(AD) = \text{R}(A)$ .

Ist eine der Bedingungen a), b) oder c) erfüllt, so gilt außerdem

$$\text{R}(D^*) = \text{R}(D^*A^*) = \text{R}(A), \quad \text{IN}(D) = \text{IN}(D^*A^*).$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus Satz 4, indem man notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hinzufügt, daß  $S^{\infty} = (S^{\infty})^*$  ist:

$$\begin{aligned} \text{IR}(S^{\infty}) &= \text{IN}(AD) = \text{IN}(D) = \text{IN}(S^{\infty})^{\perp} = \text{R}(AD)^{\perp} = \text{IN}(D^*A^*) \\ &= \text{IR}(A)^{\perp} = \text{IN}(A^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IN}(S^{\infty}) &= \text{R}(AD) = \text{R}(A) = \text{R}(S^{\infty})^{\perp} = \text{IN}(AD)^{\perp} = \overline{\text{IR}(D^*A^*)} = \overline{\text{IR}(D^*A^*)} \\ &= \text{IN}(D)^{\perp} = \overline{\text{IR}(D^*)} = \text{R}(D^*). \end{aligned}$$

Hier besitzt mit  $AD$  auch  $(AD)^*$  einen abgeschlossenen Wertebereich, und wegen  $\overline{\text{IR}(D^*A^*)} = \text{R}(D^*A^*) \subseteq \text{IR}(D^*) \subseteq \overline{\text{IR}(D^*)}$  ist die Aussage  $\text{R}(D^*A^*) = \text{R}(D^*)$  äquivalent zu  $\text{R}(D^*A^*) = \text{R}(D^*)$ .

Aus den letzten beiden Sätzen ergeben sich unter Beachtung von Satz 2 folgende gleichwertige Aussagen dafür, daß  $B_{\infty}$  existiert und die Moore-Penrose-Inverse  $(/1/)$  von  $A$  darstellt.

**Satz 7:** Für normal auflösbare Operatoren AD und DA sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es existiert  $B_{\infty}$ , und es gilt  $AB_{\infty}A = A$ ,  $AB_{\infty} = (AB_{\infty})^*$ ,  
 $B_{\infty}A = (B_{\infty}A)^*$ . (Zusätzlich ist  $B_{\infty}AB_{\infty} = B_{\infty}$ .)
- b) Es existiert  $T^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{R}(DA) = \mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(A^*)$ ,  
 $\mathcal{N}(DA) = \mathcal{N}(A)$ ,  $\mathcal{N}(D) = \mathcal{N}(A^*)$ .
- c) Es existiert  $S^{\infty}$ , und es gilt  $\mathcal{N}(AD) = \mathcal{N}(D) = \mathcal{N}(A^*)$ ,  
 $\mathcal{R}(AD) = \mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(A^*)$ .

Für Anwendungen obiger Sätze auf Projektionsverfahren zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme ist das folgende Lemma von Nutzen.

**Lemma 5:** Ist P ein Produkt endlich vieler Orthoprojektionsmatrizen  $P_1, P_2, \dots, P_k$  mit  $\mathcal{R}(P_i) = L_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ), so existiert  $P^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  und ist der Orthoprojektor auf  $\bigcap_{i=1}^k L_i$ .

**Beweis:** Im Fall  $P = P^*$  wurde der Beweis von Pyle (/12/) mit Hilfe der dann existierenden Spektralzerlegung von P geführt (vgl. /1/). Den Beweis für den nichthermiteschen Fall führt man mit Hilfe der von Tanabe in /15/ benutzten Methode. Schließlich ist Lemma 5 ein Spezialfall eines in /13/ bewiesenen Satzes.

Als Anwendungen betrachten wir nun einige Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}, \quad A: M \times N, \quad \underline{b}: M \times 1. \quad (10)$$

Die Wertebereiche sind bei Matrizen stets abgeschlossen, so daß sämtliche Matrizen normal auflösbar sind.

### 1. Richardson-Verfahren

Beim Iterationsverfahren

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \alpha A^*(\underline{b} - A\underline{x}_n), \quad 0 < \alpha < \frac{2}{g(A^*A)}, \quad (11)$$

wobei  $g(A^*A)$  den Spektralradius von  $A^*A$  bezeichnet, wird die Konvergenz der Iterationsmatrix  $T = (I - DA) = (I - \alpha A^*A)$

durch die Wahl von  $\alpha$  gewährleistet, und da  $\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)$ ,  $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$  ist (vgl. z. B. /1/), ergibt sich unmittelbar aus Satz 7, daß die Näherungsvektoren gegen

$$\underline{x}_\infty = (I - A^*A)\underline{x}_0 + A^*\underline{b} \quad (12)$$

konvergieren, wobei  $A^+$  die Moore-Penrose-Inverse von  $A$  ist. Außerdem ist (12) eine bezüglich  $A^*$  verallgemeinerte Lösung von (10) (siehe Satz 2).

## 2. Verfahren von Plemmons

Das "proper-splitting"-Verfahren

$$\underline{x}_{n+1} = B^+C\underline{x}_n + B^*\underline{b}, \quad A = B - C, \quad (13)$$

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B), \quad \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B) \quad (14)$$

konvergiert, wenn  $B^+C$  eine konvergente Matrix ist. Da wegen (13) jedes  $\underline{x}_n$  in  $\mathcal{R}(B^+)$  liegt, gilt  $B^+B\underline{x}_n = \underline{x}_n$  für alle  $n$ , und (13) kann in der Form (2) mit  $D = B^+$  geschrieben werden:

$$\underline{x}_{n+1} = B^+B\underline{x}_n + B^*(\underline{b} - A\underline{x}_n) = (I - B^+A)\underline{x}_n + B^*\underline{b}. \quad (15)$$

Unmittelbar aus (14) folgt

$$\mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(B^+) = \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(A^*), \quad (16)$$

$$\mathcal{N}(D) = \mathcal{N}(B^+) = \mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(A^*), \quad (17)$$

und da  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$  gilt, ist auch  $AA^+ = BB^+$ . Damit wird  $A = AA^+A = BB^+A$ , und es gilt  $\mathcal{N}(B^+A) \subseteq \mathcal{N}(A)$ . Da auch stets  $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B^+A)$  ist, erhält man die Beziehung

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B^+A) = \mathcal{N}(DA). \quad (18)$$

Schließlich folgt aus  $B^+ = B^+BB^+ = B^+AA^+$  die Relation  $\mathcal{R}(B^+) \subseteq \mathcal{R}(B^+A)$ , so daß mit  $\mathcal{R}(B^+A) \subseteq \mathcal{R}(B^+)$  auch

$$\mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(B^+) = \mathcal{R}(B^+A) = \mathcal{R}(DA) \quad (19)$$

gültig ist. Mit (16) bis (19) folgt aus Satz 7, daß auch das

Verfahren (13) gegen die Lösung (12) konvergiert. Dabei ist (12) eine bezüglich  $B^+$  verallgemeinerte Lösung von (10) (siehe Satz 2) und wegen  $\text{IN}(B^+) = \text{IN}(B^*)$  schließlich eine bezüglich  $B^*$  verallgemeinerte Lösung von (10).

### 3. PSH-Verfahren (/10/, /11/)

Ein Schritt des (zyklischen) Projektionsverfahrens auf Schnitteräume von Hyperebenen ("PSH-Verfahren") kann als instationäres Verfahren

$$\underline{x}_{n+1} = T_n \underline{x}_n + D_n \underline{b} \quad (20)$$

mit der Orthoprojektionsmatrix

$$T_n = I - D_n A, \quad D_n = A^* E_n (E_n^* A A^* E_n)^{-1} E_n^* \quad (21)$$

geschrieben werden, wobei die Matrix  $E_n$  aus gewissen Spalten der Einheitsmatrix  $M$ -ter Ordnung besteht. Faßt man jeweils  $k$  Schritte des Verfahrens zu einem Zyklus zusammen, so wird aus dem ursprünglich instationären Verfahren (20) ein stationäres der Gestalt (2) mit

$$T = T_{k-1} T_{k-2} \dots T_1 T_0, \quad D = \sum_{j=0}^{k-1} T_{k-1} T_{k-2} \dots T_{j+1} D_j.$$

Nach Lemma 5 ist die Iterationsmatrix  $T$  als Produkt von Orthoprojektoren konvergent. Ein Zyklus wird so gewählt, daß

$$\text{IN}(DA) = \text{IN}(I - T) = \bigcap_{i=0}^{k-1} \text{IR}(T_i) = \text{IN}(A) \quad (22)$$

und somit

$$C^N = \text{IR}(I - T) \overset{1}{\oplus} \text{IN}(I - T) = \text{IR}(DA) \overset{1}{\oplus} \text{IN}(A)$$

ist, so daß

$$\text{IR}(DA) = \text{IN}(A)^\perp = \text{IR}(A^*) \quad (23)$$

gilt. Für jedes  $\underline{x} \in \text{IN}(A)$  ergibt sich wegen  $T_n^* \underline{x} = T_n \underline{x} = \underline{x}$  ( $n=0,1,\dots,k-1$ )

$$D^* \underline{x} = \sum_{j=0}^{k-1} E_j (E_j^* A A^* E_j)^{-1} E_j^* A \underline{x} = \underline{0}$$

und damit  $\text{IN}(D^*)^\perp = \text{IR}(D) \subseteq \text{IN}(A)^\perp = \text{IR}(A^*)$ . Weil außerdem  $\text{IR}(DA) \subseteq \text{IR}(D)$  ist, folgt aus (23)

$$\text{IR}(DA) = \text{IR}(D). \quad (24)$$

Unter Beachtung von (22) bis (24) folgt aus Satz 5, daß das zyklische PSH-Verfahren gegen

$$\underline{x}_\infty = (I - B_{\infty}A)\underline{x}_0 + B_{\infty}\underline{b} \quad (25)$$

konvergiert, wobei die bezüglich A verallgemeinerte Inverse  $B_{\infty}$  die Gleichungen

$$AB_{\infty}A = A, \quad B_{\infty}AB_{\infty} = B_{\infty}, \quad B_{\infty}A = (B_{\infty}A)^* \quad (26)$$

erfüllt. Bei einem lösbaren Ausgangssystem (10) stellt  $B_{\infty}\underline{b}$  deshalb eine Minimum-Norm-Lösung dar (vgl. /1/).

#### 4. SPA-Verfahren (/8/)

Setzt man in Formel (20)

$$D_n = E_n(E_n^*A^*AE_n)^{-1}E_n^*A^*, \quad (27)$$

so erhält man die Darstellung eines Schrittes des (zyklischen) Spaltenapproximationsverfahrens ("SPA-Verfahren"). Dabei besteht  $E_n$  aus gewissen Spalten der Einheitsmatrix der Ordnung N. Da die Matrizen  $T_n = I - D_nA$  hier keine Orthoprojektoren sind, betrachtet man die zugehörige Restiteration

$$\underline{r}_{n+1} = S_n \underline{r}_n, \quad S_n = I - AD_n, \quad (28)$$

wobei nun  $S_n$  der Orthoprojektor auf  $\text{IR}(AE_n)$  ist. Faßt man wieder jeweils k Schritte des Verfahrens zu einem Zyklus zusammen, so ergibt sich ein stationäres Verfahren der Form (2) mit

$$T = T_{k-1}T_{k-2}\dots T_1T_0, \quad S = S_{k-1}S_{k-2}\dots S_1S_0,$$

$$D = \sum_{i=0}^{k-1} T_{k-1}T_{k-2}\dots T_{i+1}D_1 = \sum_{i=0}^{k-1} D_1S_{i-1}S_{i-2}\dots S_0. \quad (29)$$

S ist als Produkt von Orthoprojektoren konvergent. Wenn ein



Zyklus so gewählt wurde, daß in ihm jede Spalte von A mindestens einmal berücksichtigt wurde, so gilt

$$R(S^{oo}) = IN(I - S) = IN(AD) = IN(A^*), \quad (30)$$

$$R(A) = R(AD) = R(I - S). \quad (31)$$

Trivialerweise ist  $IN(D) \in IN(AD)$ , und andererseits zieht  $ADz = \underline{0}$  wegen (30) die Gleichung  $A^*z = \underline{0}$  nach sich, so daß aus (29) und (27)  $Dz = \underline{0}$  und somit  $IN(AD) \in IN(D)$  folgt. Deshalb gilt auch

$$IN(AD) = IN(D). \quad (32)$$

Wegen (30) bis (32) ergibt sich aus Satz (6): Das zyklische SPA-Verfahren konvergiert für jeden Startvektor  $\underline{x}_0$  gegen

$$\underline{x}_{oo} = (I - B_{oo}A)\underline{x}_0 + B_{oo}\underline{b} \quad (33)$$

mit einer verallgemeinerten Inversen  $B_{oo}$  von A, welche die Gleichungen

$$AB_{oo}A = A, \quad B_{oo}AB_{oo} = B_{oo}, \quad AB_{oo} = (AB_{oo})^* \quad (34)$$

erfüllt. Ist das Ausgangssystem widersprüchlich, so stellt somit jeder Vektor (33) eine Kleinste-Quadrate-Lösung von (10) dar (vgl. /1/). Andernfalls ist (33) eine Lösung von (10).

## Literatur

- /1/ Ben-Israel, A., and Greville, T. N. E.: Generalized Inverses: Theory and Applications. New York 1974
- /2/ Berg, L.: General Iteration Methods for the Evaluation of Linear Equations. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1, 365 - 381 (1979)
- /3/ Maeß, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Dissertation, Rostock 1976
- /4/ Maeß, G.: Iterative Lösung rechteckiger linearer Gleichungssysteme und verallgemeinerte Matrixinverse. Colloquia Mathematica Jo. Ietatis Janos Bolvai. 22. Numerical Methods, Keszthely (Hungary). 431 - 447 (1977)

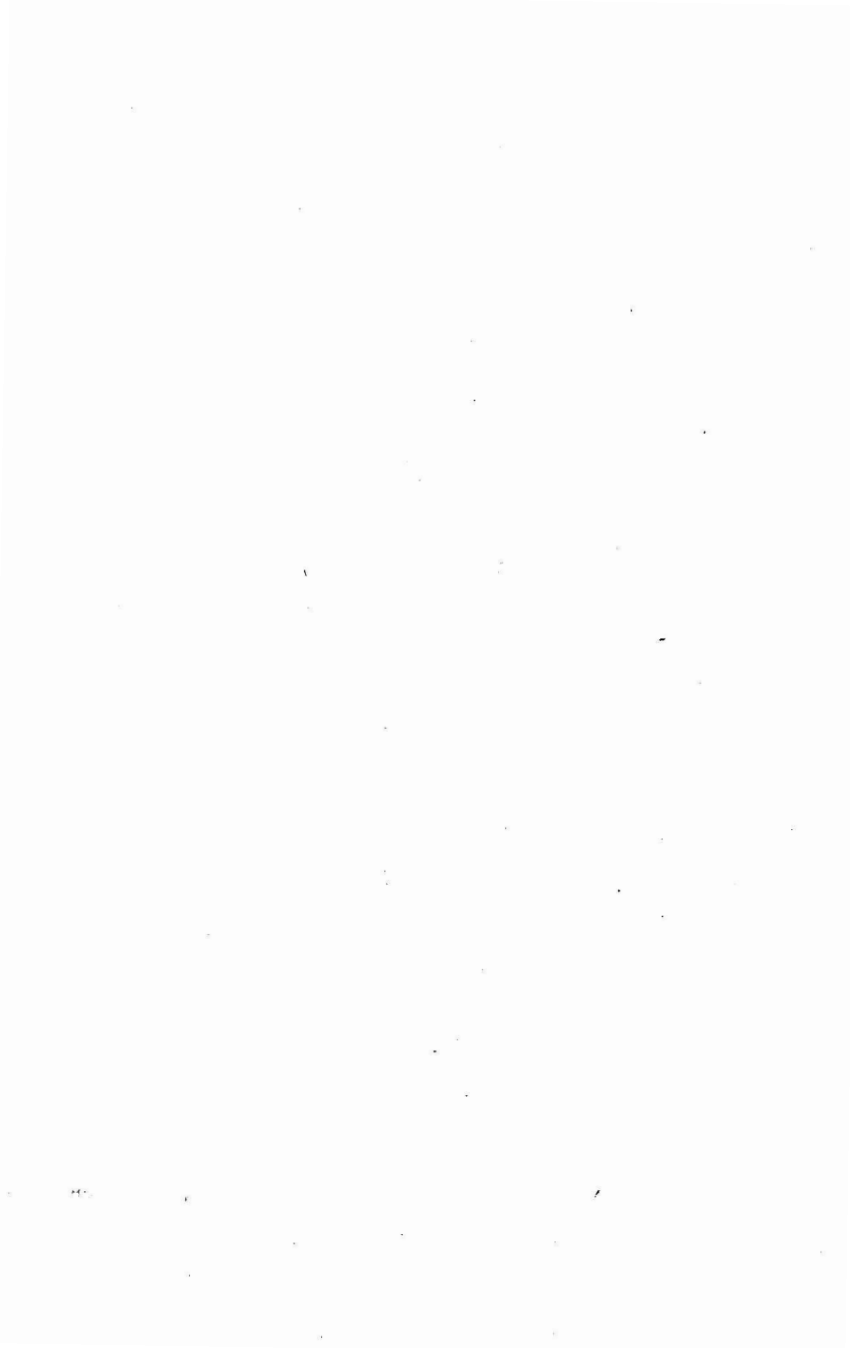
- /5/ Maeß, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Nova Acta Leopoldina, Neue Folge Nr. 238, Bd. 52, 1979
- /6/ Maeß, G.: Iterationsverfahren für großdimensionierte überbestimmte lineare Gleichungssysteme. In: Auflösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, Wissenschaftliche Informationen, Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik 9, 1 - 21 (1979)
- /7/ Maeß, G.: Iterative solution of rectangular systems of linear algebraic equations (erscheint in den Banach-Center-Publications)
- /8/ Maeß, G., und Peters, W.: Lösung inkonsistenter linearer Gleichungssysteme und Bestimmung einer Pseudoinversen für rechteckige Matrizen durch Spaltenapproximation. Z. Angew. Math. Mech. 58, 233 - 237 (1978)
- /9/ Nashed, M. Z., and Votruba, G. F.: A Unified Operator Theory of Generalized Inverses. In: Nashed, M. Z. (Ed.): Generalized Inverses and Applications. New York 1976
- /10/ Peters, W.: Lösung linearer Gleichungssysteme durch Projektion auf Schnitträume von Hyperebenen und Berechnung der verallgemeinerten Inversen. Beiträge Numer. Math. 5, 129 - 146 (1976)
- /11/ Peters, W.: Eigenschaften einer nach dem Projektionsverfahren auf Schnitträume von Hyperebenen berechneten verallgemeinerten Matrixinversen. Beiträge Numer. Math. 6, 127 - 132 (1977)
- /12/ Pyle, L. D.: A Generalized Inverse  $\epsilon$ -Algorithm for Constructing Intersection Projection Matrices, with Applications. Numer. Math. 10, 86 - 102 (1967)
- /13/ Schott, D.: Zur Konvergenz von Operatorfolgen im Zusammenhang mit Iterationsverfahren. (eingereicht bei Math. Nachr.)

- /14/ Schulz, J.: Über die Konvergenz der Neumannschen Reihe in linearen topologischen Räumen. Beiträge Anal. 12, 177 - 183 (1978)
- /15/ Tanabe, K.: Projection Method for Solving a Singular System of Linear Equations and its Applications. Numer. Math. 17, 203 - 214 (1971)
- /16/ Tanabe, K.: Characterization of Linear Stationary Iterative Processes for Solving a Singular System of Linear Equations. Numer. Math. 22, 249 - 359 (1974)

eingegangen: 09. 01. 1981

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. Wolfgang Peters  
Dr. rer. nat. Dieter Schott  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock



Dieter Rasch

Günter Herrendörfer

Robustheit statistischer Methoden

## I. Begriffsbildung und Entwicklung

1. Einleitung

In den letzten Jahrzehnten haben die Mathematische Statistik und ihre Anwendung eine stürmische Entwicklung genommen. Neben parametrischen Verfahren für spezielle Verteilungen wurden in zunehmendem Maße parameterfreie Verfahren und sogenannte "robuste" Verfahren vorgeschlagen, die auch parametrisch sein können. In der Praxis werden jedoch überwiegend klassische parametrische Verfahren angewendet. Diese Verfahren besitzen zwar bei Gültigkeit der Voraussetzungen wünschenswerte Eigenschaften, sie werden aber zunehmend einer Kritik gerade hinsichtlich ihrer Anwendung unterzogen, da diese starken Voraussetzungen im Einzelfall nicht erfüllt sind. Der t-Test im Einstichprobenproblem ist z. B. unter Voraussetzung der Normalverteilung für die Komponenten einer Zufallsstichprobe in der Klasse aller  $\alpha$ -Teste der gleichmäßig trennschärfste Test. Doch wie verhält sich dieser Test, wenn z. B. das betrachtete Merkmal nicht normalverteilt ist? Ist der t-Test denn überhaupt noch ein  $\alpha$ -Test? Man kann wohl sagen, daß die meisten untersuchten Merkmale nicht durch Normalverteilungen modelliert werden können (auch nicht annähernd). Trotzdem wird hier der t-Test durchgeführt, besitzt aber dann möglicherweise nicht mehr die oben beschriebene Eigenschaft. Das führte zur Entwicklung parameterfreier Verfahren, die z. B. lediglich voraussetzen, daß die Komponenten der Zufallsstichprobe alle einer (der gleichen) stetigen Verteilung folgen. Es ist klar, daß ein solches Verfahren nicht die speziellen Eigenschaften einer Verteilung ausnutzen kann und deshalb für eine spezielle Verteilung (z. B. Normalverteilung) schlechter als das entsprechende parametrische Verfahren ist. Welches Verfahren soll nun im Einzelfall angewendet werden?

Zur Beantwortung dieser Frage braucht man Entscheidungsregeln, die jedoch zur Zeit noch nicht vorhanden sind bzw. nur schlecht begründet wurden. Der Mathematiker hat also bei der Anwendung der Verfahren stets einen Kompromiß zu schließen, bei dem ihm nur wenig brauchbare Information vorliegt. Er wird sich in den meisten Fällen für ein klassisches parametrisches Verfahren entscheiden, da Grenzwertsätze und die "guten Eigenschaften" für diese sprechen. Nur im Falle "kleiner" Stichproben und extremer Abweichungen wird er zu robusten, nichtparametrischen Verfahren oder anderen greifen.

Bei der Erarbeitung der Verfahrensbibliothek /29/, die die wichtigsten statistischen Verfahren enthält, waren die Autoren in den oben genannten Schwierigkeiten. Unter dem Punkt "Bemerkungen" sind einige Ergebnisse aus der Literatur zu Fragen der Robustheit der parametrischen Verfahren zusammengetragen. Es zeigte sich jedoch, daß die vorhandenen Ergebnisse nicht ausreichen, um Anwendungsbereiche für die parametrischen Verfahren anzugeben, daher wurde auf heuristisch begründete Regeln ausgewichen. Dieser Zustand ist jedoch unbefriedigend. Es ergab sich die Notwendigkeit, zu Fragen der Robustheit der wichtigsten statistischen Verfahren eine größere Untersuchung anzustellen, um die verwendeten Regeln zu überprüfen. Das Ziel dieser und folgender Arbeiten besteht zunächst darin, den Begriff Robustheit qualitativ und quantitativ zu erfassen. Ferner sollen die wichtigsten statistischen Verfahren untersucht und Regeln für deren Anwendung aufgestellt werden. Die ersten Untersuchungen zu dieser Frage zeigen schon, daß der u-Test, t-Test und  $\chi^2$ -Test bzw. entsprechende Konfidenzschätzungen nicht so robust gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung sind, wie beispielsweise aus den Arbeiten /4/, /25/, /27/, /28/, /35/, und vielen anderen erwartet werden könnte bzw. daß das minimale  $n$  für einen robusten Test größer als erwartet ist.

## 2. Definition der Robustheit

Ähnlich wie in der Umgangssprache bedeutet Robustheit in der Mathematik eine gewisse Widerstandsfähigkeit bzw. Unempfindlichkeit. Ein mathematisches Verfahren heißt z. B. robust,

wenn es auch dann noch in guter Näherung anwendbar ist, wenn die Voraussetzungen des Verfahrens mehr oder weniger verletzt sind. Eine andere Auffassung von Robustheit liegt vor, wenn das Verfahren in möglichst vielen in der objektiven Realität auftretenden Situationen sinnvoll anwendbar ist. Vor allem in der Mathematischen Statistik hat sich dieser Begriff seit 1953, als er durch einen Artikel von Box /4/ eingeführt wurde, eingebürgert. Box untersuchte in dieser Arbeit, wie sich Abweichungen von der vorausgesetzten Normalverteilung auf Tests zum Vergleich von Varianzen auswirken. Obwohl ähnliche Untersuchungen für Mittelwerte schon viel früher bekannt waren, taucht in dieser Arbeit erstmals der Begriff Robustheit auf. Es heißt nämlich: "It would appear, however, that this remarkable property of 'robustness' to non-normality which these tests for comparing means possess, and without which they would be much less appropriate to the needs of the experimenter, is not necessarily shared by other statistical tests, and in particular is not shared by the tests for equality of variances, mentioned above."

Abweichungen von den Voraussetzungen für statistische Verfahren liegen z. B. dann vor, wenn in einer "Zufallsstichprobe" einige Komponenten nicht die vorausgesetzte identische Verteilung haben. Solche Komponenten heißen Ausreißer, und mit ihnen hat sich schon im 19. Jahrhundert Legendre /22/ beschäftigt. Er schlug vor, solche Ausreißer aus den Berechnungen auszuschließen. Heute gibt es vor allem im Anschluß an Huber /18/ eine umfangreiche Theorie der robusten Schätzungen in linearen Modellen. Die Geschichte der praktischen robusten Schätzungen bis 1920 wurde in /36/ beschrieben. Obwohl die Suche nach robusten Verfahren schon eine lange Tradition hat und der Begriff selbst seit Box /4/ benutzt wird, wurden Robustheitsdefinitionen erst relativ spät vorgeschlagen. Zunächst überwogen verbale Definitionen wie z. B. die von Box und Anderson /5/: "Procedures are required which are 'robust' (insensitive to changes in extraneous factors not under test)."

Huber /19/ wies darauf hin, daß es mehrere Möglichkeiten zur Definition der Robustheit gibt, es heißt dort: "But if one wants to choose in a rational fashion between different robust competitors to a classical procedure, one has to make precise

the goals one wants to achieve. Unfortunately, a consensus has not been reached: although the goals rarely are stated in an explicit fashion, one can discern at least five or six conflicting ones, and I do not think that all of them should be called by the same name 'robust'."

Bedenkt man aber, daß sich die von Huber erwähnten miteinander konkurrierenden Definitionen der Robustheit im wesentlichen auf die (asymptotische) Effizienz von Schätzungen beziehen, wobei auch unerwartet viele grobe Fehler die Schätzung nur bedingt beeinflussen sollen, und eine Minorität von Daten keinen dominierenden Einfluß auf die Schätzung erlangen soll (Hampel /14/), wird das Bedürfnis nach einer Definition der Robustheit deutlich. Huber /18/, /19/, /20/, Hampel /13/ und weitere Schüler von Huber definieren Robustheit als Eigenschaft von Folgen von Schätzfunktionen, z. B. nennt Huber eine Folge von Schätzfunktionen, die in einer Klasse (z. B. in der Klasse der linearen erwartungstreuen Schätzfunktionen) die maximale Varianz minimiert, robust. Damit ist die Hubersche Robustheit vergleichbar mit anderen Eigenschaften von Schätzfunktionen, wie (asymptotische) Effizienz oder Konsistenz. Die Definitionen von Box und Huber gehören zu zwei Klassen von Robustheitsbegriffen, die eingangs bereits angedeutet wurden. Außerdem bezieht sich die Boxsche Robustheit auf statistische Entscheidungen allgemein, die Hubersche im wesentlichen auf Schätzungen. Wir betrachten beispielsweise das Einstichprobenproblem. Als Modell für die Beobachtungen  $(y_1, \dots, y_n)$  setzen wir den Vektor  $(y_1, \dots, y_n)$  an und setzen voraus, daß es sich um eine Zufallsstichprobe handelt, d. h., daß

- die  $y_i$  die gleiche Verteilung besitzen, deren Typ bekannt ist,
- die  $y_i$  voneinander unabhängig sind.

Es sind folgende Abweichungen von diesem Modell möglich

- die  $y_i$  sind abhängig,
- die  $y_i$  folgen einer anderen als der vorausgesetzten Verteilung (z. B. /4/),
- die  $y_i$  folgen nicht alle der gleichen Verteilung (z. B. Ausreißer oder allgemeiner bei Huber /18/).



In Mehrstichprobenproblemen kommen noch weitere Möglichkeiten hinzu (z. B. Inhomogenitäten zwischen den Stichproben). Wir wollen uns in unseren Untersuchungen vor allem auf Modellabweichungen unter dem zweiten, aber auch unter dem ersten Stabstrich beziehen.

Der Begriff Robustheit wird in der Literatur in dem oben beschriebenen Sinne vorwiegend auf das statistische Auswertungsverfahren bezogen. Dabei wird die Versuchsplanung weitestgehend außer acht gelassen.

Box und Tiao /6/ führten die Begriffe "criterion robustness" und "inference robustness" ein. "Criterion robustness" bezieht sich auf ein statistisches Verfahren. Es wird die Verteilung der Statistik bei Abweichungen von den Voraussetzungen untersucht. Dagegen bezieht sich "inference robustness" auf eine ganze Klasse von Statistiken. Die Statistik wird in Abhängigkeit von der Abweichung von der Voraussetzung entsprechend variiert. Es werden die Verteilungen der sich so ergebenden Statistiken untersucht. Im folgenden wollen wir uns lediglich mit der "criterion robustness" befassen und kurz von Robustheit sprechen.

Beispiel 1: Wir betrachten eine Zufallsstichprobe  $(y_1, \dots, y_n)$  von noch festzulegendem Umfang  $n$ , deren Komponenten  $y_i$  nach  $N(\mu; \sigma^2)$  verteilt sind. Es soll der Erwartungswert  $\mu$  geschätzt werden. Wir betrachten die Klasse der erwartungstreuen Schätzfunktionen und erhalten  $\bar{y}$  als beste Punktschätzung für  $\mu$ , wenn man als Kriterium die Varianz der Schätzfunktion verwendet.

Es ist bekannt, daß bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$  der t-Test im Einstichprobenproblem unter den angegebenen Voraussetzungen in der Klasse aller  $\alpha$ -Tests der trennschärfste Test ist. Eine daraus abgeleitete wünschenswerte Eigenschaft besitzt auch das entsprechende Konfidenzintervall. Es ist das kürzeste  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ .

$$I = \left\langle \bar{y} - \frac{s}{\sqrt{n}} t(n-1; 1 - \frac{\alpha}{2}); \bar{y} + \frac{s}{\sqrt{n}} t(n-1; 1 - \frac{\alpha}{2}) \right\rangle \quad (1)$$

stellt für jedes  $n \geq 2$  ein  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall dar.

wenn die üblichen Voraussetzungen gelten, wobei  $1-\alpha$  als realer Konfidenzkoeffizient bezeichnet wird, wenn das Intervall (1) mit Wahrscheinlichkeit  $1-\alpha$  den Parameter  $\mu$  überdeckt. Da man im Anwendungsfall aber nicht weiß, ob die Voraussetzungen erfüllt sind, kann man (1) eigentlich nicht anwenden und behaupten, daß  $1-\alpha$  die tatsächliche Überdeckungswahrscheinlichkeit ist,  $1-\alpha$  ist nur die nominelle Überdeckungswahrscheinlichkeit. Der reale Konfidenzkoeffizient wird von der Verteilung  $g(y)$  und  $n$  abhängen. Den realen Konfidenzkoeffizienten wollen wir deshalb mit  $1-\alpha(n,g)$  bezeichnen. Wenn dieser reale Konfidenzkoeffizient um nicht mehr als eine vorgegebene Größe  $\epsilon$  vom nominellen Wert  $1-\alpha$  abweicht, soll (1) für diese Verteilung und den Stichprobenumfang  $\epsilon$ -robust heißen. Diese Eigenschaft kann von  $n$ ,  $g(y)$  und  $\sigma^2$  abhängen.

Als Kriterium für die Robustheit wurde hier eine Grenze  $\epsilon$  für den Absolutbetrag der Abweichung verwendet:

$$|\alpha(n,g) - \alpha| \leq \epsilon. \quad (2)$$

Es ist leicht einzusehen, daß das Verfahren (1) nicht für jedes  $n$  bei vorgegebenem vernünftigen  $\epsilon < \alpha$  ( $\epsilon$  kann beispielsweise mit  $\epsilon = 0,005$  vorgegeben werden, wenn  $\alpha = 0,05$  ist) und für jede Verteilung bezüglich des Kriteriums  $\epsilon$ -robust ist. Man wird also nur erwarten können, daß ein Verfahren für eine vorgegebene Klasse von Verteilungen, möglicherweise in Abhängigkeit von gewissen Parametern und dem Versuchsplan als robust bezeichnet werden kann. Es konnte für spezielle diskrete Verteilungen gezeigt werden, daß  $|\alpha(n,g) - \alpha|$  keine monoton fallende Funktion von  $n$  ist. Damit kann eine derartige Eigenschaft auch nicht generell für stetige Verteilungen vorausgesetzt werden, d. h., aus der  $\epsilon$ -Robustheit von (1) für eine spezielle Verteilung  $g(y)$  und ein spezielles  $n^*$  kann nicht geschlossen werden, daß (1) für diese Verteilung und alle  $n \geq n^*$   $\epsilon$ -robust ist. Es ist aber zu vermuten, daß es ein  $n_0$  derart gibt, so daß das Verfahren (1) für alle  $n \geq n_0$  und für eine spezielle Verteilung  $\epsilon$ -robust ist. Wir beziehen uns auf Robustheitsbegriffe, die von (2) oder analogen Forderungen abgeleitet wurden. Es soll untersucht werden, in welchem Maße die wichtigsten parametrischen Verfahren (z. B. u-Test, t-Test, F-Test,  $\chi^2$ -Test und daraus abgeleitete

Intervalle) von ihren Voraussetzungen abhängen. Dazu wollen wir den Begriff der Robustheit noch etwas allgemeiner fassen. Zunächst soll definiert werden, was unter einer robusten Intervallschätzung verstanden werden kann. Es sei  $d_\alpha$  die zu untersuchende Intervallschätzung. Für die Klasse  $G_1$  von Verteilungen sei  $1-\alpha$  der reale Konfidenzkoeffizient für  $d_\alpha$ . Gegeben sei weiterhin eine Klasse  $G_2 \supset G_1$  von Verteilungen, auf die  $d_\alpha$  angewendet werden soll. Für eine Verteilung  $g$  aus  $G_2$  wird  $\alpha$  von  $g$ , und damit auch von  $(S_k, \mathcal{N}_k)$  abhängen. Mit  $g$  wird die Verteilung der Stichprobe bezeichnet,  $S_k$  ist das Spektrum des Versuchs und  $\mathcal{N}_k$  dessen Belegung (siehe zur genaueren Definition Rasch und Herrendörfer /30/, /31/).

**Definition 1:** Eine Intervallschätzung  $d_\alpha$  zum vorgegebenen nominalen Konfidenzkoeffizienten  $1-\alpha$ , die für die Klasse  $G_1$  von Verteilungen auch den realen Konfidenzkoeffizienten  $1-\alpha$  besitzt, heißt auf der Klasse  $G_2 \supset G_1$  genau dann  $\varepsilon$ -robust, falls

$$\max_{g \in G_2} |\alpha(S_k, \mathcal{N}_k, g) - \alpha| \leq \varepsilon \quad (3)$$

gilt, und einseitig  $\varepsilon$ -robust, falls

$$\max_{g \in G_2} \alpha(S_k, \mathcal{N}_k, g) - \alpha \leq \varepsilon$$

gilt.

Mit den obigen Bezeichnungen kann man auch die Robustheit (im Sinne des Risikos 1. Art) für ein Testverfahren  $d_\alpha$  definieren.

**Definition 2:** Ein Test  $d_\alpha$  zum vorgegebenen nominellen Risiko

1. Art  $\alpha$ , der für die Klasse  $G_1$  von Verteilungen auch ein reales Risiko erster Art  $\alpha$  besitzt, heißt auf der Klasse  $G_2 \supset G_1$  genau dann  $\varepsilon$ -robust bezüglich  $\alpha$ , falls

$$\max_{g \in G_2} |\alpha(S_k, \mathcal{N}_k, g) - \alpha| \leq \varepsilon \quad (4)$$

gilt.

Bei Tests ist eine einseitige  $\varepsilon$ -Robustheit nicht sinnvoll. Die Aussage, daß ein statistisches Verfahren  $\varepsilon$ -robust ist, hängt natürlich auch vom Wert von  $\alpha$  ab.

Ein Test wird durch das Risiko erster Art  $\alpha$  nicht vollständig beschrieben, wohl aber durch die Gütefunktion  $\mathcal{P}(g)$ . Es ist also notwendig, die Gütefunktionen des betrachteten Tests zu vergleichen. Wir beschränken uns auf Tests zur Prüfung von Hypothesen über den Erwartungswert  $\mu \in \mathbb{R}^1$  einer Verteilung  $g \in G_2$  mit endlicher Varianz  $\sigma^2$ . Es soll  $H_0: \mu = \mu_0$  gegen  $H_A: \mu \neq \mu_0$  geprüft werden. Die Gütefunktion kann stets in Abhängigkeit von  $n$ ,  $T = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}$  und  $g$  dargestellt werden. Bezeichnet man mit

$$\max_{T \in \mathbb{R}^1} |\beta(T, n) - \beta(T, n, g)| = M^*(n, g) \quad (5)$$

die maximale Abweichung der Gütefunktion für eine feste Verteilung  $g$ , so kann die folgende Definition verwendet werden.

Definition 3: Der t-Test zum Vergleich eines Mittelwertes mit einer Konstanten heißt  $\varepsilon$ -robust bezüglich  $1 - \beta$  für alle diejenigen  $n$  und  $g$ , für die

$$M^*(n, g) \leq \varepsilon$$

gilt.

Versuche, die Robustheit der multiplen t-Prozedur allgemein zu definieren, stoßen auf größere Schwierigkeiten, da jeder einzelne t-Test der multiplen t-Prozedur eine andere Gütefunktion besitzen wird. Darauf soll hier aber nicht eingegangen werden. Nahezu unmöglich erscheint es deshalb, die  $\varepsilon$ -Robustheit von statistischen Verfahren allgemein zu definieren.<sup>1</sup>

### 3. Robustheitsuntersuchungen durch Simulation

Auch in der Mathematik ist es üblich, dort, wo man exakte oder approximative analytische Lösungen nicht erhalten kann, "experimentell" vorzugehen. Hierbei wird häufig mit Hilfe der Simulation gearbeitet. Man erzeugt Zufallsstichproben, die in etwa aus einer bestimmten Verteilung stammen und kann die Risiken

entsprechender statistischer Entscheidungsverfahren durch relative Häufigkeiten abschätzen. Schnelle Rechner begünstigen den Einsatz dieser Methode, da es jetzt möglich wird, die Umfänge von Simulationsexperimenten (d. h. die Anzahl von erzeugten Stichproben) so groß zu wählen, daß die Ergebnisse hinreichend genau sind. Bei der Untersuchung der Robustheit statistischer Verfahren geht es im Prinzip stets um die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten oder um die Prüfung von Hypothesen über Wahrscheinlichkeiten. Es sei  $p = P(A)$  die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$ . Soll ein Konfidenzintervall zum Koeffizienten  $1-\alpha^*$  für  $p$  so konstruiert werden, daß die halbe erwartete Breite den Wert  $d$  nicht übersteigt, so sind

$$N_E \approx \frac{u_{1-\frac{\alpha^*}{2}}^2 p(1-p)}{d^2}. \quad (6)$$

Versuche durchzuführen ( $u_p$  ist das  $P$ -Quantil der standardisierten Normalverteilung).

Soll andererseits die Hypothese

$$H_0 : p = p_0 \quad (\text{o. B. d. A. } p_0 < \frac{1}{2})$$

gegen die Alternative

$$H_A : p \neq p_0$$

geprüft werden, so sind

$$N_T \approx \frac{\left[ u_{1-\beta_0^*} \sqrt{(p_0+d)(1-p_0-d)} + u_{1-\frac{\alpha^*}{2}} \sqrt{p_0(1-p_0)} \right]^2}{d^2}. \quad (7)$$

Versuche durchzuführen, wenn die Genauigkeitsforderungen für den Test durch die Risiken  $\alpha^*$  und  $\beta_0^*$  und die praktisch interessierende Minstdifferenz  $d^*$  vorgegeben sind (d. h., für  $|p-p_0| \geq d$  soll  $\beta^* \leq \beta_0^*$  sein). Zur Begründung dieser Formel siehe /29/.

Wir demonstrieren das allgemeine Vorgehen im folgenden am Beispiel des Erwartungswertes  $\mu$  einer kontinuierlichen Verteilung. Wir wollen prüfen, ob das für die Normalverteilung abgeleitete

"beste" Konfidenzintervall (1) auch im Falle anderer Verteilungen brauchbar ist. Falls tatsächlich Normalverteilung vorliegt, gilt

$$P(\mu \in \underline{I}) = 1 - \alpha,$$

für eine andere Verteilung  $g$  gilt dann

$$P(\mu \in \underline{I}) = 1 - \alpha(n, g),$$

und nach Definition 1 kann die Robustheit überprüft werden. Hier geht es also um die Schätzung einer Wahrscheinlichkeit. Für kontinuierliche Verteilungen kann  $\alpha(n, g)$  nur in sehr wenigen Fällen berechnet werden, diese Fälle sind außerdem für die praktische Anwendung kaum von Interesse (z. B. Gleichverteilung und  $n = 2$ ), deshalb ist der Einsatz des Simulationsexperiments zur Zeit notwendig. Die Genauigkeit der Schätzung von  $\alpha(n, g)$  wollen wir durch die halbe erwartete Breite  $d$  und den Konfidenzkoeffizienten  $1 - \alpha^*$  eines Konfidenzintervalls für  $\alpha(n, g)$  vorgeben. Die Anzahl  $N_E^*$  von Stichproben vom Umfang  $n$  entspricht dem Umfang des Simulationsexperiments und wird aus (6) mit  $p = \alpha(n, g)$  berechnet. Nun ist aber  $\alpha(n, g)$  unbekannt. Deshalb vergrößern wir  $N_E^*$  auf  $N_E$ , indem für  $\alpha(n, g) < \frac{1}{2}$  der für  $\epsilon$ -robuste Verfahren ungünstigste Fall  $\alpha + \epsilon = p$  in (6) verwendet wird. Damit stellt  $N_E$  eine obere Schranke für den benötigten Stichprobenumfang dar, wenn wir die Genauigkeitsforderung nur auf "robuste" Fälle ( $\alpha(n, g)$  hängt von  $n$  und der Verteilung ab) beziehen wollen. Sollte diese Einschränkung nicht erwünscht sein, so kann selbstverständlich auch ein anderer  $p$ -Wert (möglicherweise  $p = 2\alpha$ , falls  $2\alpha \leq \frac{1}{2}$  gilt) oder auch  $p = \frac{1}{2}$  als schlechter Fall verwendet werden. Der Fall  $p = \frac{1}{2}$  würde aber den Stichprobenumfang  $N_E$  sehr stark vergrößern und ist kaum zu empfehlen, falls die üblichen  $\alpha$ -Werte (0,1; 0,05; 0,01) untersucht werden sollen. Zu beachten ist hier allerdings, daß  $N_E$  den Umfang einer Zufallsstichprobe von Zufallsstichproben vom Umfang  $n$  darstellt. Für jede Zufallsstichprobe vom Umfang  $n$  wird geprüft, ob die Realisation von  $\underline{I}$  den bekannten Wert  $\mu$  enthält oder nicht. Es sei  $r$  die Anzahl der Fälle, in denen  $\mu$  nicht

von I überdeckt wird, dann gilt

$$\hat{\alpha}(n, g) = \frac{r}{N_E} \quad (8)$$

mit  $\hat{\alpha}(n, g)$  als Schätzwert für  $\alpha(n, g)$ . Die entsprechende Schätzfunktion ist erwartungstreu und besitzt die gewünschte Genauigkeit. Kann  $\alpha(n, g)$  nicht berechnet werden, so kann auch die Definition nicht einfach angewendet werden. Wir wollen von einer geschätzten  $\varepsilon$ -Robustheit sprechen, wenn  $\alpha(n, g)$  geschätzt wurde. Um einen Eindruck über den erforderlichen Umfang eines Simulationsexperimentes zur Schätzung der  $\varepsilon$ -Robustheit von (1) für eine spezielle Verteilung  $g$  zu erhalten, wurden in Tabelle 1 für einige Varianten die Werte von  $N_E$  angegeben. Wie aus (6) ersichtlich, hängt  $N_E$  nicht von  $n$  und  $g$ , sondern nur von  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $d$  und  $\alpha^*$  ab.

**Tabelle 1:** Umfang  $N_E$  eines Simulationsexperiments, das die Überprüfung der  $\varepsilon$ -Robustheit mit der Genauigkeit  $\{d; \alpha^* = 0,05\}$  für eine beliebige stetige Verteilung  $g$  und ein beliebiges  $n$  bei  $\alpha = 0,05$  gestattet

$\varepsilon$	$d$						
	0,001	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,010
0,010	216667	24075	13542	8667	6019	4422	2167
0,005	199668	22186	12480	7987	5547	4075	1997

Bei der Wahl von  $\varepsilon$  und  $d$  sollte man  $d \leq \frac{\varepsilon}{2}$  wählen. Damit wird erreicht, daß in den Fällen, in denen  $|\alpha - \alpha(n, g)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ist, mit ziemlicher Sicherheit  $|\alpha - \hat{\alpha}(n, g)| \leq \varepsilon$  gilt. Außerdem ist in den Fällen, in denen  $|\alpha - \alpha(n, g)| > \varepsilon$  ist, die Wahrscheinlichkeit dafür sehr gering, daß  $|\alpha - \hat{\alpha}(n, g)| \leq \varepsilon - d$  ist. Wir werden für die von uns geplanten Simulationsexperimente  $\varepsilon = 0,01$  und  $d = 0,005$  wählen. Würden wir die Robustheit von (1) nur für eine Alternativverteilung und ein  $n$  untersuchen, so wären nach Tabelle 1 mindestens 8667 Stichproben vom Umfang  $n$  aus dieser Verteilung notwendig. Will man wissen, von welchem  $n$  ab  $\varepsilon$ -Robustheit vorliegt, so müssen für mehrere  $n$  Simulationen durchgeführt wer-

den. Zum Beispiel kann man  $N_E$  Stichproben vom Umfang  $120 = n$  nehmen und hat gleichzeitig, falls  $n_1 f_1 = 120$  ( $n_1, f_1$  ganz) ist,  $f_1 N_E$  Stichproben vom Umfang  $n_1$ . Möchte man  $\alpha(n, g)$  als Regressionsfunktion aus unabhängigen Stichproben mit unterschiedlichen Umfängen  $N_{Ei}$  für jedes  $n_i$  schätzen, so kann man  $N_{Ei} < N_E$  wählen.

Analog kann man bei der Planung von Simulationsexperimenten für andere statistische Verfahren vorgehen.

In Tabelle 2 findet man die Stichprobenumfänge  $N_E$  zur Untersuchung der Robustheit der wichtigsten statistischen Verfahren, wie sie in der Literatur angegeben wurden. Auf dieser und weiteren Arbeiten beruhen die Aussagen über die "Robustheit" der beschriebenen wichtigsten parametrischen statistischen Verfahren.

Tabelle 2: Stichprobenumfänge  $N_E$  aus einigen wichtigen Arbeiten zur Robustheit

Autor	Verfahren	$N_E$	Verteilung
Everitt, S. B. /10/	Hotellings $T^2$ (Ein- und Zweistichprobenproblem)	2000 - 3000	Gleichverteilung Exponentialverteilg. log. Normalverteilg.
Posten, H. O. /27/, /28/	t-Test, Ein- und Zweistichprobenproblem, $n = 5(5)30$	100000	Pearsonkurven $\beta_1, \beta_2$ als Parameter $\beta_1 = 0(0,4)2,0$ $\beta_2 = 1,4(0,4)7,8$
Dunnett, C. W. /8/	Tukey-Test, multiple Mittelwertvergleiche	10000	ungleiche Stichprobenumfänge
Bernhardson, C. S. /2/	t-Test nach F-Test für Mittelwertvergleiche	1000	Normalverteilung $\alpha$ für Testkombination
Box, G. E. P. /4/	F-Test zum Vergleich zweier Varianzen	1000	$\chi^2_2 \neq 0$
Keselman, M. J., and Rogan, C. /21/	multiple Mittelwertvergleiche	5000 (geplant)	Abweichungen von der Normalverteilung, Varianzhomogenität und Balanciertheit



Autor	Verfahren	$N_E$	Verteilung
Lemmer, H. H. /23/	Test für Varianzen	4000 (geplant)	Güte verschiedener Tests simuliert
Tamhane, A. C. /37/	multiple Mittelwertvergleiche	1000 - 2000	Varianzhomogenität
Boardman, T. J. /3/	Schätzung von Varianzkomponenten, 11 Methoden	1000	Vergleich der Methoden für balancierte Pläne
Brown, M. B., and Forsythe, A. B. /7/	Vergleich von Varianzen, verschiedene Methoden	1000	Normalverteilung $\chi^2(4)$ $\ln(n_1 \cdot n_2)$ , $n_i$ Gleichverteilg.
Einot, J., and Gabriel, K. R. /9/	multiple Mittelwertvergleiche	1000	Methodenvergleich
Gabriel, K. R. /11/	multiple Mittelwertvergleiche, neues Verfahren $\alpha$ geschätzt	10000	unbalanciert
Green, J. R., and Hegazy, Y. A. S. /12/	Anpassungstests, Vergleich der Güte	1000	Gleichverteilung, Normalverteilung
Huang, C. J., and Bolch, B. W. /17/	Regression: Prüfung der Verteilung der Residuen auf Normalverteilung, 6 Verfahren	1000	Gleichverteilung, Normalverteilung
McKinlay, S. M. /24/	Vergleich der Güte dreier approximativer $\chi^2$ -Maßzahlen für $2 \times 2$ Tafeln	200	Methodenvergleich
Policello, G. E., and Hettmansperger, T. P. /26/	Konfidenzintervalle mit Hilfe von Rangzahlen für $\mu$	1000	Normalverteilung u. a.
Smith, V. K. /33/	Anpassungstests auf Normalverteilung, 5 Verfahren	500	Methodenvergleich

Autor	Verfahren	$N_E$	Verteilung
Spurrier, J. D., and Howett, J. E. /34/	Zweistichproben- problem beim Mittelwertver- gleich	5000	Normalverteilung u. a.
Sansing, R. C., and Owen, D. B. /32/	t-Statistik, Ein- stichprobenpro- blem	2000	stetige Verteilungen

Tabelle 2 gibt nur einen kleinen, aber repräsentativen Auschnitt aus der vorhandenen Literatur zur Anwendung der Simulation in der Statistik wieder. Stichprobenumfänge von  $N_E = 200$  bis  $N_E = 100000$  wurden angetroffen. In Tabelle 2 wurden hauptsächlich Arbeiten aus dem letzten Jahrzehnt berücksichtigt. In nur zwei der 20 angegebenen Arbeiten wurde eine Aussage zur Planung von  $N_E$  gemacht. Setzt man eine noch einigermaßen vertretbare Genauigkeit voraus, so dürfe  $N_E \geq 5000$  zu wählen sein. Nach diesem Kriterium ist  $N_E$  in 14 der 20 Arbeiten zu klein! Nur in 6 der 20 Arbeiten wurde mit einem ausreichenden Stichprobenumfang gearbeitet. Nur diese Arbeiten tragen effektiv etwas zur Robustheit bzw. zu anderen Eigenschaften statistischer Verfahren bei.

Auf die Notwendigkeit der Planung von Simulationsexperimenten wies bereits Hey /16/ hin. Keselman und Rogen /21/ planten ihr Simulationsexperiment, indem sie die Varianz  $6_p^2$  beschränkten (Binomialverteilung).

In einer folgenden Arbeit sollen weitere Methoden zur Robustheitsuntersuchung beschrieben werden. (Herrendörfer und Rasch /15/).

### Literatur

- /1/ Autorenkollektiv: Robustheit I. Probleme der angewandten Statistik, 4, 1 - 206 (1980). Forschungszentrum für Tierproduktion der Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR

- /2/ Bernhardson, C. S.: Type I error rates when multiple comparison procedures follow a significant F-Test of ANOVA. *Biometrics* 31, 229 - 232 (1975)
- /3/ Boardman, T. J.: Confidence intervals for variance components - a comparative Monte-Carlo-study. *Biometrics* 30, 251 - 262 (1974)
- /4/ Box, G. E. P.: Non-normality and tests on variances. *Biometrika* 40, 318 - 335 (1953)
- /5/ Box, G. E. P., and Anderson, S. L.: Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumptions. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 17, 1 - 34 (1955)
- /6/ Box, G. E. P., and Tiao, G. C.: A note on criterion robustness and inference robustness. *Biometrika* 51, 169 - 173 (1964)
- /7/ Brown, M. B., and Forsythe, A. B.: Robust tests for the equality of variances. *J. Amer. Statist. Assoc.* 69, 364 - 367 (1974)
- /8/ Dunnett, C. W.: Pairwise multiple comparisons in the homogeneous variance, unequal sample size case. Preprint 1979 (Submitted to *J. Amer. Statist. Assoc.*)
- /9/ Einot, L., and Gabriel, K. R.: A study of the powers of several methods of multiple comparisons. *J. Amer. Statist. Assoc.* 70, 574 - 583 (1975)
- /10/ Everitt, S. G.: A Monte Carlo investigation of the robustness of Hotellings one- and two-sample  $T^2$  test. *J. Amer. Statist. Assoc.* 74, 48 - 51 (1979)
- /11/ Gabriel, K. R.: A simple method of multiple comparisons of means. *J. Amer. Statist. Assoc.* 73, 724 - 729 (1978)
- /12/ Green, J. R., and Hegazy, Y. A. S.: Powerful modified-EDF goodness-of-fit tests. *J. Amer. Statist. Assoc.* 71, 204 - 209 (1976)
- /13/ Hampel, F.: A general qualitative definition of robustness. *Ann. Math. Statist.* 42, 1887 - 1896 (1971)

- /14/ Hampel, F.: Robuste Schätzungen: Ein Anwendungsorientierter Überblick. Biometrical J. 22, 3 - 21 (1980)
- /15/ Herrendörfer, G., and Rasch, D.: Robustness of statistical methods, II. Methods in the one-sample problem. Biometrical J. (im Druck)
- /16/ Hey, G. B.: A new method of experimental sampling illustrated on certain non-normal populations. Biometrika 30, 68 - 80 (1938)
- /17/ Huang, C. J., and Bolch, B. W.: On the testing of regression disturbances for normality. J. Amer. Statist. Assoc. 69, 330 - 335 (1974)
- /18/ Huber, P. J.: Robust estimation of a location parameter. Ann. Math. Statist. 35, 73 - 101 (1964)
- /19/ Huber, P. J.: The 1972 Wald lecture Robust statistics: A review. Ann. Math. Statist. 43, 1041 - 1067 (1972)
- /20/ Huber, P. J.: Robust regression: Asymptotics, conjectures and Monte Carlo. Ann. Math. Statist. 1, 799 - 821 (1973)
- /21/ Keselman, H. J., and Rogan, J. C.: A comparison of the modified Tukey and Scheffe methods of multiple comparisons of pairwise contrasts. J. Amer. Statist. Assoc. 73, 47 - 52 (1978)
- /22/ Legendre, A. M.: On the Method of Least Squares (translated from the French). In: Smith, D. E. (Ed.): A Source Book in Mathematics. S. 576 - 579, New York 1959
- /23/ Lemmer, H. H.: A robust test for dispersion. J. Amer. Statist. Assoc. 73, 419 - 421 (1978)
- /24/ McKinlay, S. M.: A note on the chi-square test for pair-matched samples. Biometrics 31, 731 - 735 (1975)
- /25/ Pearson, E. S., and Please, N. W.: Relation between the shape of population distribution and the robustness of four simple test statistics. Biometrika 62, 223 - 241 (1975)

- /26/ Policello, G. E., and Hettmansperger, T. P.: Adaptive robust procedures for the one-sample location problem. J. Amer. Statist. Assoc. 71, 624 - 633 (1976)
- /27/ Posten, H. O.: The robustness of the two-sample t-test over the Pearson system. J. Statist. Comput. Simulation 6, 295 - 311 (1978)
- /28/ Posten, H. O.: The robustness of the one-sample t-test over the Pearson system. J. Statist. Comput. Simulation 9, 133 - 149 (1979)
- /29/ Rasch, D., Herrendörfer, G., Bock, J., und Busch, K.: Verfahrensbibliothek Versuchsplanung und -auswertung. Band I, II, Berlin 1978, Band III, Berlin 1981
- /30/ Rasch, D., and Herrendörfer, G.: Experimental design and optimal decision. I, General remarks. Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist. 11, 115 - 123 (1980)
- /31/ Rasch, D., und Herrendörfer, G.: Statistische Versuchsplanung. Berlin 1981
- /32/ Sansing, R. C., and Owen, D. B.: The density of the t-statistic for non-normal distributions. Comm. Statist. 3, 139 - 155 (1974)
- /33/ Smith, V. K.: A simulation analysis of the power of several tests for detecting heavy-tailed distributions. J. Amer. Statist. Assoc. 70, 662 - 665 (1975)
- /34/ Spurrier, J. D., and Hewett, J. E.: Two-stage Wilcoxon tests of hypothesis. J. Amer. Statist. Assoc. 71, 982 - 987 (1976)
- /35/ Srivastava, A. B. L.: Effect of non-normality on the power function of t-test. Biometrika 45, 421 - 430 (1958)
- /36/ Stigler, S. M.: Simon Newcomb, Percy Daniell and the history of robust estimation 1885 - 1920. J. Amer. Statist. Assoc. 68, 872 - 879 (1973)
- /37/ Tamhane, A. C.: Multiple comparisons in model I one-way ANOVA with unequal variances. Comm. Statist. A - Theory Methods 6, 15 - 32 (1977)

eingegangen: 19. 12. 1980

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. Dieter Rasch; Dr. sc. Günter Herrendörfer  
Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR  
Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf-Rostock  
DDR-2551 Dummerstorf



notwendig und hinreichend ist. Der Beweis für dieses Stabilitätskriterium läßt sich wie in /1/ führen, wenn man dort die Bemerkungen zum Beispiel 1 sowie die Äquivalenz der jeweils benutzten Stabilitätsdefinitionen beachtet.

Bei Anwendung der Gaußschen Transformation entsteht aus (1) die symmetrische Matrix  $A^T A = (b_{ik})$  mit den Elementen

$$b_{ik} = \sum_j a_{i-j} a_{k-j}, \quad (4)$$

wobei über alle  $j$  mit  $\max(1, i-p, k-p) \leq j \leq \min(N, i+q, k+q)$  zu summieren ist, so daß insbesondere  $b_{ik} = 0$  ist für  $|k-i| > p+q$ .

Die zugehörige Matrix  $C = (c_{k-1})$  mit  $c_{k-1} = b_{ik}$  für

$p < i, k \leq N-q$  ist genau dann stabil, wenn

$$|\lambda_n| \neq 1 \quad (5)$$

ist für alle  $n$ , da die Nullstellen der zu  $C$  gehörenden Gleichung (2) gerade die Nullstellen  $\lambda_n$  der ursprünglichen Gleichung (2) sowie die dazu reziproken Werte sind.

Für die von  $C$  nur wenig verschiedene Matrix  $A^T A$  gilt dagegen der

Satz: Unter der Voraussetzung (5) ist die Matrix  $A^T A$  genau dann stabil, wenn  $A$  stabil ist.

Da der hinreichende Teil dieses Satzes klar ist, brauchen wir nur den notwendigen Teil zu beweisen, was am Ende dieser Arbeit geschehen soll. Zunächst betrachten wir hierzu das folgende

### Beispiel

Wir wählen in (1)  $p = q = 1, a_{-1} = 1, a_0 = -6, a_1 = 8$ , dann gilt  $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 1/2$ , und (5) ist erfüllt, aber nicht (3).

Die Matrix  $C$  besitzt die von Null verschiedenen Elemente

$$c_{-2} = c_2 = 8, c_{-1} = c_1 = -54, c_0 = 101.$$

Wählen wir  $N = 6$ , so finden wir gerundet



$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 29.7 & 22.2 & 12.9 & 6.78 & 3.25 & 1.21 \\ 22.2 & 16.7 & 9.68 & 5.09 & 2.44 & 0.91 \\ 12.9 & 9.68 & 5.63 & 2.96 & 1.42 & 0.53 \\ 6.78 & 5.09 & 2.96 & 1.58 & 0.76 & 0.28 \\ 3.25 & 2.44 & 1.42 & 0.76 & 0.38 & 0.14 \\ 1.21 & 0.91 & 0.53 & 0.28 & 0.14 & 0.07 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1.56-2 & 1.17-2 & 6.79-3 & 3.56-3 & 1.70-3 & 6.28-4 \\ 1.17-2 & 2.43-2 & 1.67-2 & 9.31-3 & 4.57-3 & 1.70-3 \\ 6.79-3 & 1.67-2 & 2.71-2 & 1.79-2 & 9.31-3 & 3.56-3 \\ 3.56-3 & 9.31-3 & 1.79-2 & 2.71-2 & 1.67-2 & 6.79-3 \\ 1.70-3 & 4.57-3 & 9.31-3 & 1.67-2 & 2.43-2 & 1.17-2 \\ 6.28-4 & 1.70-3 & 3.56-3 & 6.79-3 & 1.17-2 & 1.56-2 \end{pmatrix}$$

wobei  $a \cdot 10^{-b}$  hier  $a \cdot 10^{-b}$  bedeutet. Die bei  $A^T A$  vorhandene Instabilität kommt im vorliegenden Fall dadurch zum Ausdruck, daß die ersten Elemente der ersten Matrix bereits um einen Faktor der Größenordnung 1900 größer sind als die entsprechenden Elemente der zweiten Matrix, obwohl  $A^T A$  sich von  $C$  nur durch die beiden Elemente  $b_{11} = 37$  und  $b_{66} = 100$  an Stelle von  $c_0 = 101$  unterscheidet und  $N = 6$  ja noch keine besonders große Zahl ist.

### Matrixinvertierung

Um zwischen den beiden vorhergehenden Matrizen einen Zusammenhang herstellen zu können, benötigen wir eine Formel, aus der man die Änderung der inversen Matrix bei Änderung einzelner Elemente der Ausgangsmatrix ablesen kann. Es sei daher  $C$  unabhängig von den vorhergehenden Bezeichnungen eine beliebige invertierbare Matrix vom Format  $N \times N$ , und  $U$ ,  $V$  seien gewisse Matrizen vom Format  $N \times M$  bzw.  $M \times N$  mit  $M < N$ . Dann gilt bekanntlich (im Fall  $M = 1$  vgl. etwa /3/)

$$(C - UV)^{-1} = C^{-1} + C^{-1}U(I - VC^{-1}U)^{-1}VC^{-1}, \quad (6)$$

sofern die Matrix vom Format  $M \times M$  in den Klammern auf der rechten Seite invertierbar ist.

Bei Anwendung auf den uns hier interessierenden Fall wählen wir  $C - UV = A^T A$  mit (1) und wie zuvor  $C = (c_{k-1})$ , so daß

[illegible]

und  $U = V^T$  zu setzen ist und damit  $M = p + q$ . Ist (5) erfüllt und somit C stabil, aber (3) nicht erfüllt, so ist die Instabilität von  $A^T A$  durch die Formel (6) im Sinne von /2/ in  $I - VC^{-1}U$  lokalisiert. Wünscht man eine regularisierte Inverse von  $C - UV$ , so ist es mit Hilfe von (6) möglich, die Regularisierungsmaßnahmen auf die Invertierung von  $I - VC^{-1}U$  zu beschränken, wodurch der Rechenaufwand reduziert werden kann.

## Nullösungen

Im folgenden benötigen wir weiterhin gewisse Lösungen  $y_n$  der homogenen Differenzengleichung

$$\sum_{k=1-p-q}^{1+p+q} b_{1k} y_k = 0 \quad (7)$$

für  $-p-q < n \leq 0$ , wobei  $b_{ik}$  für  $k > 0$  durch (4) und für  $k \leq 0 < i$  durch

$$b_{1k} = \sum_{j=1-p}^{k+q} a_{1-j} a_{k-j} \quad (8)$$

festgelegt ist. Dabei soll

$$y_k = \lambda^k \quad (9)$$

sein für  $0 < k \ll N$  und  $\lambda$  eine Nullstelle von (2). Da (4) für  $1 > p$  mit (8) übereinstimmt, gilt (9) wegen (2) sogar für  $k > -q$ . Hierbei vereinbaren wir  $a_1 = 0$  für  $1 < -q$  sowie für  $1 > p$ . Für  $-p-q \leq k \leq -q$  werden wir jetzt die Rekursionsformel

$$y_k - \lambda^k = \frac{1}{a_{-q}} \left( \sum_{l=1}^{p+k+q} a_{1-q-k} \lambda^l - \sum_{l=k+1}^{-q} a_{1-q-k} (y_l - \lambda^l) \right) \quad (10)$$

beweisen. Zu diesem Zweck ziehen wir von (7) die aus (2) folgende Gleichung

$$\sum_{k=1-p-q}^{1+p+q} \sum_{j=1-p}^{k+q} a_{1-j} a_{k-j} \lambda^k = 0 \quad (11)$$

ab. Dann erhalten wir für  $1 = n+p+q$  wegen (9) mit  $k > -q$

$$\sum_{k=n}^{-q} \sum_{j=n+q}^{k+q} a_{n+p+q-j} a_{k-j} (y_k - \lambda^k) = \sum_{k=1}^{p+n+q} \sum_{j=n+q}^0 a_{n+p+q-j} a_{k-j} \lambda^k. \quad (12)$$

Für  $n = -q$  stimmt diese Gleichung mit der Behauptung (10) für  $k = -q$  überein. Wir nehmen jetzt an, daß (10) bereits für  $-p-q < n < k \leq q$  bewiesen ist. Dann erhalten wir aus den Summanden auf der linken Seite von (12) mit  $k \neq n$  und  $j = k+q$  durch Einsetzen von (10)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{-q} a_{n+p-k} a_{-q} (y_k - \lambda^k) &= \sum_{k=n+1}^{-q} a_{n+p-k} \sum_{l=1}^{p+k+q} a_{1-q-k} \lambda^l \\ &- \sum_{k=n+1}^{-q} a_{n+p-k} \sum_{l=k+1}^{-q} a_{1-q-k} (y_l - \lambda^l), \end{aligned}$$

und die erste Summe auf der rechten Seite ist gleich den Summanden auf der rechten Seite von (12) mit  $j \neq n+q$ . Die zweite Summe auf der rechten Seite ist bis auf das Vorzeichen gleich den Summanden auf der linken Seite von (12) mit  $n+q < j < k+q$  und  $k \geq n+2$ . Somit reduziert sich (12) auf

$$\sum_{k=n}^{-q} a_p a_{k-q-n} (y_k - \lambda^k) = \sum_{k=1}^{p+n+q} a_p a_{k-q-n} \lambda^k,$$

und (10) ist bewiesen.

### Determinanten

Von  $p+q$  linear unabhängigen Lösungen  $y_k^{(1)}$  von (7) benötigen wir weiterhin die Determinante

$$\Delta = |y_k^{(1)}| \quad (13)$$

mit  $i = 1, \dots, p+q$  und  $k = 0, -1, \dots, 1-p-q$ . Für den Fall, daß  $y_k^{(1)}$  durch (9) mit  $\lambda = \lambda_1$  bestimmt ist, lauten die Elemente der  $i$ -ten Zeile von  $\Delta$

$$1, \lambda^{-1}, \dots, \lambda^{1-q}, y_{-q}, \dots, y_{1-p-q}.$$

Addieren wir zur  $k$ -ten Spalte von  $\Delta$  mit  $-q > k > -p-q$  geeignete Linearkombinationen der  $-q-k$  vorhergehenden Spalten, so können wir wegen (10) erreichen, daß das Element in der  $k$ -ten Spalte mit  $-q \geq k > -p-q$

$$\lambda^k + \frac{1}{a_{-q}} \left( \sum_{l=k+1}^{-q} a_{l-q-k} \lambda^l + \sum_{l=1}^{p+k+q} a_{l-q-k} \lambda^l \right)$$

lautet. Addieren wir zur  $k$ -ten Spalte anschließend die Linearkombination

$$\frac{1}{a_{-q}} \sum_{l=1-q}^0 a_{l-q-k} \lambda^l$$

der ersten  $q$  Spalten, so verschwindet das betrachtete Element von  $\Delta$  wegen (2).

Damit erhalten wir folgendes Zwischenergebnis: Enthält die Determinante (13)  $r$  Lösungen  $y_k^{(i)}$  mit (9) für  $r$  verschiedene Nullstellen  $\lambda = \lambda_i$  von (2), dann läßt sie sich so umformen, daß sie eine Nullmatrix vom Format  $r \times p$  enthält. Im Fall  $r > q$  bedeutet dies, daß

$$\Delta = 0 \quad (14)$$

sein muß.

Das Ergebnis (14) läßt sich auch auf den Fall  $s$ -facher Nullstellen mit  $s > 1$  übertragen, sofern man die  $s$  zugehörigen Lösungen  $y_k^{(i)}$  an Stelle von (9) durch

$$y_k^{(i)} = i! \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \quad (15)$$

für  $i = 0, 1, \dots, s-1$  festlegt. Dieser Fall läßt sich als Grenzfall von  $s$  verschiedenen etwa äquidistanten Nullstellen

$$\lambda_i = \lambda + ih$$

auffassen, wenn man zu den Linearkombinationen

$$\tilde{y}_k^{(i)} = h^{-i} \sum_{j=0}^1 \binom{i}{j} (-1)^j y_k^{(i-j)}$$

übergeht und den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  durchführt, da dann für  $\tilde{y}_k^{(i)}$  gerade die Anfangswerte (15) entstehen. War die Gleichung (14) vor dem Grenzübergang erfüllt, so ist sie es auch nach dem Grenzübergang, und entsprechendes gilt, wenn nicht nur eine, sondern sogar mehrere mehrfache Nullstellen auftreten.

### Beweis des Satzes

Wir kommen jetzt zum Beweis des notwendigen Teils des oben angeführten Satzes. Wir nehmen dabei an, daß  $A$  instabil ist, und haben zu zeigen, daß  $A^T A$  dann ebenfalls instabil ist. Unter unserer Annahme ist die Bedingung (3) verletzt, wobei unter Beachtung von (5) zwei Fälle zu unterscheiden sind.

Im Fall  $|\lambda_{q+1}| < 1$  gilt für die Determinante (13), wenn wir sie aus denjenigen Lösungen von (7) bilden, die nach (9) bzw. (15) zu den Nullstellen  $\lambda$  von (11) mit  $|\lambda| < 1$  gehören, die Gleichung (14). Somit gibt es eine Linearkombination  $y$  dieser Lösungen mit der Maximumnorm  $\|y\| = 1$ , deren Komponenten  $y_k$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null streben. Da der Vektor  $A^T A y$  höchstens in den letzten  $p+q$  Komponenten nicht verschwindet und diese für  $N \rightarrow \infty$  ebenfalls gegen Null streben, folgt aus

$$\|(A^T A)^{-1}\| \geq \frac{\|y\|}{\|A^T A y\|}$$

die Instabilität von  $A^T A$ .

Der Fall  $|\lambda_q| > 1$  läßt sich durch den Übergang von  $A^T A$  zu  $AA^T$  auf den vorhergehenden Fall zurückführen, da hierbei  $p$  und  $q$  vertauscht werden und die Nullstellen der zu  $A^T$  gehörenden Gleichung (2) die reziproken Werte der entsprechenden zu  $A$  gehörenden Nullstellen sind. Hierbei ergibt sich dann zunächst die Instabilität von  $AA^T$ .

Kennzeichnen wir die Spiegelung einer  $N \times N$ -Matrix an der Nebendiagonalen  $i+k = N+1$  durch einen Strich, so ergibt sich für (1) wegen  $A' = A$ ,  $(AA^T)' = A^T A$  und der Symmetrie von  $A^T A$ , daß

$$\|(AA^T)^{-1}\| = \|((AA^T)')^{-1}\| = \|(A^T A)^{-1}\|$$

gilt und folglich auch  $A^T A$  instabil ist. Damit ist der Satz bewiesen.

### Schlußbemerkungen

Aus den vorhergehenden Betrachtungen geht hervor, daß die Gaußsche Transformation gar keine Instabilität verursacht, sondern lediglich eine bereits bei  $A$  vorhandene Instabilität vererbt. Als Hauptursache für diese Vererbung ist bei Matrizen vom Typ (1) die Gleichung (14) anzusehen, zumal das Gegenteil von (14), nämlich die Ungleichung  $\Delta \neq 0$ , eine wichtige Voraussetzung in

den Stabilitätssätzen von /1/ ist, die sich nicht nur auf Matrizen vom Typ (1) beziehen.

Ersetzt man  $A^T A$  durch die im Anschluß an (4) angegebene Matrix  $C = (c_{k-1})$ , so erhält man unter der Voraussetzung (5) eine stabile Näherung, bei der die Differenz zwischen den zugehörigen Inversen durch (6) erfaßt wird. Ein entsprechendes Vorgehen ist auch bei Bandmatrizen mit beliebigen Elementen möglich und dürfte dort ebenfalls erfolgversprechend sein. Dabei kann man die Matrix  $V$  aus (6), wenn sich nichts anderes anbietet, einfach aus den ersten  $p$  und den letzten  $q$  Zeilen der Einheitsmatrix zusammensetzen.

### Literatur

- /1/ Berg, L.: Zur numerischen Stabilität des Gaußschen Algorithmus. Beiträge Numer. Math. 5, 19 - 25 (1976)
- /2/ Berg, L.: Zur stabilen Auflösung großer linearer Gleichungssysteme. Rostock, Math. Kolloq. 12, 49 - 58 (1979)
- /3/ Faddejew, D. K., und Faddejewa, W. N.:  
Numerische Methoden der linearen Algebra  
(Obers. a. d. Russ.). Berlin 1978

eingegangen: 10. 10. 1980

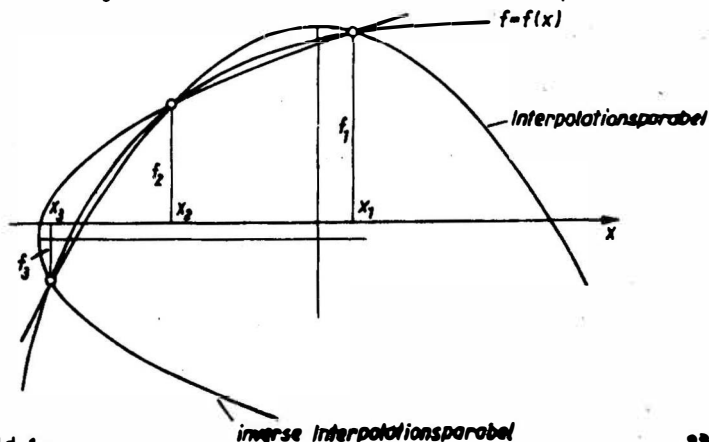
### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Lothar Berg  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Gerhard Geise

Geometrische Aspekte der Nullstellenbestimmung durch inverse Interpolation1. Anregungen

Herrn Lothar Berg und der von ihm verfaßten Arbeit /1/ verdanke ich die Anregung zu diesem Aufsatz. In /1/ wird eine ableitungsfreie iterative Nullstellenbestimmung dargelegt, die die Güte des Newton-Verfahrens besitzt, obwohl sie nur auf einer einfachen Kreistangentenkonstruktion beruht. Zu dem Grundenliegen, aus drei vorhergehenden Näherungen eine neue Iterierte zu berechnen, wird einleitend u. a. bemerkt: "Es ist naheliegend, durch die drei zugehörigen Punkte der Funktion wie bei R. Zurmühl /5/ eine quadratische Interpolationsparabel zu legen," wobei freilich "im allgemeinen nur eine einzige der beiden Nullstellen der Parabel eine verbesserte Näherung an die gesuchte Nullstelle" ist. Das Aussondern der ungünstigen Parabel-Nullstelle erscheint unbequem genug, um folgende Idee auf Brauchbarkeit zu prüfen: Die drei Punkte nicht durch die Parabel, deren Achse zur x-Achse senkrecht steht, verbinden, sondern durch jene Parabel, deren Achse zur x-Achse parallel ist.

Bild 1:

Bei nicht sehr gründlicher Suche nach dem Vorkommen dieser Vorgehensweise in einschlägigen Lehrbüchern und Monographien wurde folgendes gefunden: Bei Schwetlick /3/, S. 81, der Hinweis, daß dies als einfachster Fall dem als 'inverse Interpolation' bezeichneten Verfahren, das ebenfalls zur Nullstellenbestimmung verwendet werden könne, zuzuordnen ist. Bei Traub /4/ gibt es eine verschiedene Gesichtspunkte berücksichtigende Darstellung der inversen Interpolation (Abschnitte 4.21, 10.22, 11.2 und A.21), die auch die zu prüfende Idee umfaßt: Sie steckt hinter der von Berg /1/ als Beispiel 6-2 aus /4/ zitierten Iterationsvorschrift (/4/, S. 107 und S. 213 f.). Trotzdem soll in der folgenden Nr. 2 die inverse quadratische Interpolation mit einigen kleinen Zusätzen dargestellt werden, da sie auf eine geometrisch motivierte Übertragung für höhere Dimensionen führt, welche sich der allgemeinen inversen Interpolation sowohl einordnen als auch zur Seite stellen läßt. Diese Übertragung wird in Nr. 3 mitgeteilt, aber keiner genaueren Untersuchung unterzogen.

## 2. Die inverse quadratische Interpolation für Dimension 1

Die inverse Interpolationsparabel: Durch die Funktion  $f(x)$  werden in der  $x, f$ -Ebene zu den Argumenten (Nullstelle-Näherungen)  $x_1, x_2, x_3$  (alias  $x_{1-2}, x_{1-1}, x_1$ ) mit  $f(x_j) =: f_j$  ( $j=1,2,3$ ) die Punkte  $(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$  definiert. Liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden, was genau dann der Fall ist, wenn

$$D := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f_1 \\ 1 & x_2 & f_2 \\ 1 & x_3 & f_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

und liegen keine zwei auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse, was genau dann zutrifft, wenn

$$B := \begin{vmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 \\ 1 & f_2 & f_2^2 \\ 1 & f_3 & f_3^2 \end{vmatrix} = (f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1) \neq 0,$$



dann legen sie eindeutig eine (nicht zerfallende) Parabel

$$0 = p(x, f) := a + bx + cf + f^2 \quad (1)$$

fest, deren Achse zur x-Achse parallel liegt und in deren Gleichung  $b \neq 0$  ist. Diese inverse Interpolationsparabel hat genau einen, stets reellen, im Endlichen gelegenen Schnittpunkt mit der x-Achse, der durch  $x_4$  (alias  $x_{1+1}$ ),  $x_4 = -a/b = -A/B$ , mit oben eingeführtem B und

$$A := \begin{vmatrix} x_1 & f_1 & f_1^2 \\ x_2 & f_2 & f_2^2 \\ x_3 & f_3 & f_3^2 \end{vmatrix}$$

festgelegt ist; der andere Schnittpunkt ist der uneigentliche Punkt der x-Achse und interessiert daher nicht. Die neue Iterierte  $x_4$  läßt sich in verschiedener Weise darstellen, beispielsweise so:

$$x_4 = x_1 \cdot \frac{f_2}{f_2 - f_1} \cdot \frac{f_3}{f_3 - f_1} + x_2 \cdot \frac{f_3}{f_3 - f_2} \cdot \frac{f_1}{f_1 - f_2} + x_3 \cdot \frac{f_1}{f_1 - f_3} \cdot \frac{f_2}{f_2 - f_3} \quad (2)$$

$$= x_3 - \frac{f_2 \cdot \frac{x_3 - x_1}{f_3 - f_1} - f_1 \cdot \frac{x_3 - x_2}{f_3 - f_2}}{f_2 - f_1} \cdot f_3 \quad (3)$$

$$= x_3 - \frac{f_3}{f[x_3, x_2]} + \frac{f_3 \cdot f_2}{f_3 - f_1} \left( \frac{1}{f[x_3, x_2]} - \frac{1}{f[x_2, x_1]} \right), \quad (4)$$

wobei  $f[x, y] := (f(x) - f(y))/(x - y)$  (und (4) aus /4/ stammt, wie eingangs erwähnt). In (3) kommt eine 'gewichtete dividierte Differenz' vor, die mit einer Teilverhältnis-Bildung verwandt ist und dem baryzentrischen Kalkül angehören könnte.

Bei  $B \neq 0$  ist der Punkt  $(x_4, 0)$  auch dann noch eindeutig bestimmt, wenn  $D = 0$  ist (Parabel zerfällt in Gerade, die zur x-Achse nicht parallel ist, und uneigentliche Gerade); in den Fällen 'mehrfache Nullstelle', 'eng benachbarte Nullstellen' ist  $B = 0$  in Betracht zu ziehen. Die Iteration kann wie bei Berg /1/ geschildert durchgeführt werden.

Konvergenzgüte: Unter Voraussetzung einer einfachen Nullstelle  $x^*$  ergeben die Taylor-Entwicklungen an dieser Stelle mit

$$d_1 := x_1 - x^* \quad (i=1,2,3):$$

$$f_1 = d_1 f' + \frac{1}{2} d_1^2 f'' + O(d_1^3),$$

woraus nach einiger Rechnung die Konvergenzordnung

$$p = \text{"reelle Wurzel von } p^3 - p^2 - p - 1 = 0" = 1.839...$$

(wie bei Traub /4/, S. 107) und der Konvergenzfaktor

$$q = \left( \frac{3f''^2 - f' f'''}{6f'^2} \right)^{1/(p^2-1)}$$

resultieren. Der Konvergenzfaktor hängt interessanterweise mit der Affinnormalen der Kurve  $f = f(x)$  im Punkte  $(x^*, 0)$  zusammen, deren Anstieg gleich

$$m_{\text{aff}} = (f' f''' - 3f''^2) / f'^3$$

ist (Geise /2/, S. 302, (19)). Für eine Parabel ist die Affinnormale in einem Punkt die Parallele zur Parabelachse durch diesen Punkt. Stimmt die Affinnormale von  $f = f(x)$  im Punkte  $(x^*, 0)$  'gut' mit der x-Achse überein, dann ist einzusehen, daß die Kurve in einer Umgebung von  $(x^*, 0)$  auch 'gut' durch ein Stück einer Parabel, deren Achse zur x-Achse parallel ist, approximiert werden kann, so daß eine gute Konvergenz des Iterationsverfahrens erwartet werden darf.

### 3. Inverse Interpolation für Dimension $\geq 2$

Allgemeines Verfahren: Der Sinn von Iterationsverfahren zum Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen besteht bekanntlich darin, das Originalproblem durch eine Folge aus linearen Gleichungssystemen zu ersetzen. Die inverse Interpolation leistet dies für eine nichtlineare Gleichung  $f(x) = 0$  in einer Unbekannten sehr bequem, indem sie die geläufigen Interpolationspolynome verwendet, um die Punkte  $(x_1, f_1), \dots, (x_k, f_k)$

(Näherungen für  $(x^*, 0)$ ) zu verbinden; die Lagrange-Interpolation verdeutlicht schon diese Vorgehensweise:

$$x = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{f - f_j}{f_i - f_j} =: p(f; x_1, \dots, x_k) \quad (5)$$

ist solch ein (überdies eindeutig bestimmtes) inverses Interpolationspolynom, aus dem durch Setzen von  $f = 0$  die neue Iterierte

$$x_{k+1} := \sum_{i=1}^k x_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{f_j}{f_j - f_1} = p(0; x_1, \dots, x_k) =: P(x_1, \dots, x_k) \quad (5')$$

hervorgeht bzw. die Iterationsvorschrift  $P$  definiert wird; für  $k = 3$  erhält man (2).

Für nichtlineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten gibt es allem Anschein nach nur eine Methode 'inverse Interpolation', die eine Übertragung des 1-dimensionalen Falls (5) (bzw. der allgemeinen Vorgehensweise, wie sie Traub /4/, S. 61 ff., und Schwetlick /3/, S. 81, angeben) ist: Bei Traub /4/, S. 218 ff., wird unter geläufigen Voraussetzungen die Inverse  $\underline{F}$  der Funktion  $\underline{f} = \underline{f}(\underline{x})$  auf einer Umgebung  $U$  einer Nullstelle  $\underline{a}$  von  $\underline{f}(\underline{x})$  gebildet:  $\underline{x} = \underline{F}(\underline{f})$ , und an der Stelle  $\underline{f}_1 := \underline{f}(\underline{x}_1)$  (nahe  $\underline{a}$ ) unter Ausnutzung des Zusammenhanges zwischen den Jacobi-Matrizen  $\underline{F}_{\underline{f}}$  und  $\underline{f}_{\underline{x}}$  nach Taylor entwickelt:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{F}(\underline{f}_1) + \underline{F}_{\underline{f}}(\underline{f}_1)(\underline{f} - \underline{f}_1) + \dots \\ &= \underline{x}_1 + \underline{f}_{\underline{x}}^{-1}(\underline{x}_1)(\underline{f} - \underline{f}_1) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Bei Abbruch nach dem linearen Term wird die 'inverse lineare Interpolation'

$$\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{f}_{\underline{x}}^{-1}(\underline{x}_1)(\underline{f} - \underline{f}_1) =: p(\underline{f}; \underline{x}_1)$$

erhalten, die für  $\underline{f} = \underline{a}$  die Newton-Iterationsvorschrift

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1 - \underline{f}_{\underline{x}}^{-1}(\underline{x}_1)\underline{f}(\underline{x}_1) = p(\underline{a}; \underline{x}_1)$$

ergibt. Bei Hinzunahme weiterer Terme aus (6) und jeweils durch Diskretisierung erhält man entsprechend bekannte Vorschriften.

Ein spezielles Verfahren: Die inverse quadratische Interpolation läßt noch einen anderen, an (1) anschließenden Weg der

Verallgemeinerung zu. Er soll hier für zwei nichtlineare Gleichungen in zwei Unbekannten

$$f_1(x,y) = f_1 = 0, \quad f_2(x,y) = f_2 = 0$$

und mit Blick auf ableitungsfreie Verfahren (dem Anliegen von Berg /1/) dargelegt werden.

Von einem gemeinsamen Punkt  $\underline{x}^* = (x^*, y^*, 0)$  der Flächen  $f = f_1(x,y)$  und  $f = f_2(x,y)$  in der Ebene  $f = 0$  des  $x,y,f$ -Raumes seien Näherungspunkte

$$\underline{x}_{1i} := (x_i, y_i, f_{1i}) \quad (i=1, \dots, k; f_{1i} := f_1(x_i, y_i)) \text{ bzw.}$$

$$\underline{x}_{2i} := (x_i, y_i, f_{2i}) \quad (i=1, \dots, k; f_{2i} := f_2(x_i, y_i))$$

in geeigneter Anzahl  $k$  und Lage gegeben. Man denke sich durch sie je eine Fläche

$$0 = p_1 := p_1(x,y,f; \underline{x}_{11}, \dots, \underline{x}_{1k}) \text{ bzw.}$$

$$0 = p_2 := p_2(x,y,f; \underline{x}_{21}, \dots, \underline{x}_{2k})$$

gelegt, die die Eigenschaft hat, die  $x,y$ -Ebene  $f = 0$  in genau einer im Endlichen gelegenen Geraden zu schneiden (Interpolationsfläche, die freilich nicht gut 'inverse Interpolationsfläche' genannt werden kann). Sind  $g_1$  und  $g_2$  diese Geraden und sind sie nicht parallel zueinander, dann definiere ihr Schnittpunkt eine neue Iterierte  $\underline{x}_{k+1} := (x_{k+1}, y_{k+1}, 0)$  von  $\underline{x}^*$ ; es ist  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  offenbar Lösung eines linearen Gleichungssystems. Auf irgendeine Weise, z. B. ' $\underline{x}_1$  vergessen', kann eine Wiederholung des Verfahrens vorbereitet werden.

Die Flächen  $p_1 = 0$  und  $p_2 = 0$  wird man zunächst durch Polynome in  $x, y$  und  $f$  definieren. Sie sind, um der angegebenen Schnittbedingung mit der  $x,y$ -Ebene zu genügen, in der Form

$$p_j =: a_{j0} + 2a_{j1}x + 2a_{j2}y + 2a_{j3}f + f \cdot q_j(x,y,f) \quad (j=1,2)$$

anzusetzen, wobei  $q_1, q_2$  irgendwelche Polynome in  $x, y, f$  bedeuten (und wenn man nicht Polynome verwenden will, durch geeignet beliebige Funktionen in  $x, y, f$  ersetzt werden können). Es sollen hier nur die einfachsten Formen für  $q_1$  und  $q_2$  berücksichtigt werden.

Sind  $q_1$  und  $q_2$  gleich 0, dann sind  $p_1 = 0$  und  $p_2 = 0$  zwei

Ebenen; es ist  $k = 3$  zu wählen (einfachheitshalber wird man  $2a_{j3} = 1$  setzen), und die  $\underline{x}_{j1}$ ,  $\underline{x}_{j2}$ ,  $\underline{x}_{j3}$  müssen unabhängige Punkte sein. Man erhält sichtlich eine 'regula falsi'-Version.

Der nächste einfache Fall ist, für  $q_1$  und  $q_2$  Linearformen zu wählen:

$$q_j = 2a_{j5}x + 2a_{j6}y + f \quad (j=1,2).$$

Dann ist (Index  $j$  unterdrückt)

$$0 = p = [1 \ x \ y \ f] \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ f \end{bmatrix} \quad (7)$$

eine Quadrik, und zwar im Falle  $a_1a_5 - a_2a_4 =: d \neq 0$  ein hyperbolisches Paraboloid (mit der  $x,y$ -Ebene als einer Richtebene) und bei  $d = 0$  (Nichtzerfall vorausgesetzt) ein parabolischer Zylinder (durch die uneigentliche Gerade der  $x,y$ -Ebene). Schreibt man (1) in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + 2a_1x + 2a_2f + f^2 \\ &= [1 \ x \ f] \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7')$$

so wird man (7) schon dann als unmittelbare Übertragung der inversen quadratischen Interpolation (1) ansehen können, wenn  $a_4$  und  $a_5$  gleich 0 (hinreichend für  $d = 0$ ) gesetzt werden. In diesem Fall ist für die Bestimmung der  $a_{j1}$  die Anzahl  $k = 4$  (im allgemeinen Fall (7) ist  $k = 6$ ) zu wählen; die Punkte  $\underline{x}_{j1}$ ,  $\underline{x}_{j2}$ ,  $\underline{x}_{j3}$ ,  $\underline{x}_{j4}$  müssen unabhängig liegen. Man hat zwei lineare Gleichungssysteme aus vier Gleichungen für vier Unbekannte, von denen nur drei interessieren, sowie zwei Gleichungen für zwei Unbekannte zur Festlegung der neuen Iterierten zu lösen.

Die Übertragung auf beliebige Dimensionen liegt auf der Hand (auch für  $(a_4, a_5) \neq (0,0)$ ); die Bedingungen, unter denen brauchbare numerische Verfahren resultieren, müssen noch nachgeliefert werden, vielleicht wird man auch bekannte Verfahren wiederfinden.

Bemerkung: Die Anzahl  $k = 4$  führt nun wieder zur Arbeit Berg /1/ zurück: Bei der zu fordernden allgemeinen Lage der Punkte jedes Viertupels legen sie je eine Kugel im  $x, y, f$ -Raum fest, an die man im 'letzten' Punkt (Punkt mit der Nr. 4) die Tangentialebene legen und durch den Schnittpunkt der Schnittgeraden beider Tangentialebenen mit der  $x, y$ -Ebene die neue Iterierte festlegen wird. Dies ist offensichtlich eine genaue Übertragung des Bergschen Verfahrens aus /1/ von der Dimension 1 auf die Dimension 2, die beliebig weitergetrieben werden kann. Da bei der Dimension 1 das Bergsche Verfahren eine bessere Konvergenzordnung als die inverse quadratische Interpolation hat, wird dies auch bei höheren Dimensionen zu erwarten sein. Es könnte vielleicht (bei Dimension  $> 1$ ) eine einfachere Organisation der Rechnung (vgl. oben (2) oder (3) mit (2) aus Berg /1/) für das hier vorgestellte Verfahren sprechen.

### Literatur

- /1/ Berg, L.: Ein ableitungsfreies Dreistufenverfahren mit quadratischer Konvergenz zur Berechnung von Nullstellen. Rostock, Math. Kolloq. 13, 119 - 122 (1980)
- /2/ Geise, G.: Über berührende Kegelschnitte einer ebenen Kurve. Z. Angew. Math. Mech. 42, 7/8, 297 - 304 (1962)
- /3/ Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen. Berlin 1979
- /4/ Traub, J. F.: Iterative methods for the solution of equations, Englewood Cliffs, N. J., 1964
- /5/ Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin 1965

eingegangen: 28. 11. 1980

### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Gerhard Geise  
Technische Universität Dresden  
Sektion Mathematik  
Mommsenstraße 13  
DDR-8027 Dresden

Harald Mumm

# Potentialtheoretische Untersuchungen für lineare elliptische Randwertprobleme in Hölder-Räumen

## Autorreferat der Dissertation A

B. W. Schulze und G. Wildenhain haben in "Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung", Berlin 1977, eine Theorie zur Lösung des Dirichlet-Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen auf der Grundlage von a-priori-Abschätzungen in Räumen stetig differenzierbarer Funktionen angegeben. Die von S. Agmon, A. Douglis und L. Nirenberg sowie von Ju. P. Krasovskij verallgemeinerten Schauder-Abschätzungen (a-priori-Abschätzungen in Räumen Hölder-stetig differenzierbarer Funktionen) werden nun benutzt, um eine analoge Theorie für allgemeine elliptische Randwertprobleme zu entwickeln.

Dazu werden die in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  betrachteten Randwertprobleme unabhängig von der Struktur des Randes  $\partial\Omega$  mit Hilfe von Räumen  $W_B(s, \partial\Omega)$  angepaßter Whitney-Taylorfelder formuliert.

Für die Lösung der elliptischen Differentialgleichung  $Lu = 0$  gilt, falls die Randwerte durch ein beliebiges Element  $Bf \in W_B(s, \partial\Omega)$  vorgegeben sind, für  $|\alpha| \leq s$ :

$$D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{|\beta| \leq s} \int \varphi_{j,\beta}(y) d\mu_{x,\alpha,j}^\beta(y) + \sum_{|\beta| \leq s} \int \frac{\varphi_{j,\beta}(y) - \varphi_{j,\beta}(z)}{|y-z|^s} d\lambda_{x,\alpha,j}^\beta(y,z) \right\}$$

und für  $|\alpha| = s$ :

$$\frac{D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)}{|x-y|^s} = \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{|\beta| \leq s} \int \varphi_{j,\beta}(z) d\mu_{x,y,\alpha,j}^\beta(z) + \sum_{|\beta| \leq s} \int \frac{\varphi_{j,\beta}(z) - \varphi_{j,\beta}(t)}{|z-t|^s} d\lambda_{x,y,\alpha,j}^\beta(z,t) \right\}.$$

$\varphi_{j,8}$  sind Komponenten des Taylorfeldes  $B_f$  und  $\mu_{x,\alpha,j}, \lambda_{x,\alpha,j}$  bzw.  $\mu_{x,\gamma\alpha,j}, \lambda_{x,\gamma,\alpha,j}$  Bestandteile der harmonischen Maße  $ML_{x,\alpha} = (M_{x,\alpha}, L_{x,\alpha})$  bzw.  $ML_{x,\gamma} = (M_{x,\gamma,\alpha}, L_{x,\gamma,\alpha})$  mit  $M_{x,\alpha} = (\mu_{x,\alpha,1}, \dots, \mu_{x,\alpha,m})$ ,  $M_{x,\gamma,\alpha} = (\mu_{x,\gamma,\alpha,1}, \dots, \mu_{x,\gamma,\alpha,m})$  usw.

Die harmonischen Maße sind unter einer gewissen Bedingung (Bedingung II) eindeutig bestimmt.

Betrachtet man Lösungen in Form Hölder-stetig differenzierbarer Potentiale, deren Existenz an die sogenannte Höldersche Bedingung für die zugrundegelegten Maße geknüpft ist, so können im Falle des Dirichlet-Problems Forderungen an die harmonischen Maße angegeben werden, unter denen die Bedingung II erfüllt ist.

Für hinreichend glatte Ränder besitzen die harmonischen Maße die geforderten Eigenschaften.

eingereicht: 06. 10. 1979

verteidigt: 09. 05. 1980

Gutachter: Prof. Dr. G. Wildenhain (Rostock),  
Prof. Dr. G. Anger (Halle),  
Dr. G. Albinus (Berlin).

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat Harald Mumm  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock



Jürgen Dassow

# Ein modifizierter Vollständigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen

---

Autorreferat der Dissertation B

Die strukturelle Automatentheorie befaßt sich mit der Art und Weise, in der gewisse Elementarautomaten verknüpft werden müssen, um einen komplizierten Automaten zu erhalten, der vorgegebene Eigenschaften besitzt. Wesentlich ist dabei das Vollständigkeitsproblem, das in folgendem besteht: Gegeben ist eine Menge von Elementarautomaten und eine Menge  $P$  von Eingabe-Ausgabe-Verhalten. Es soll entschieden werden, ob es zu jedem  $F \in P$  eine Schaltung von Elementarautomaten gibt, die das Eingabe-Ausgabe-Verhalten  $F$  besitzt.

In der Arbeit betrachten wir die Menge  $P_k$  der Automatenabbildungen  $(E_k^n)^* \rightarrow E_k$ ,  $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , mit den Verchaltungsoperationen Identifikation von Eingängen, Verbinden von einem Ausgang eines Elementes mit dem Eingang eines anderen Elementes und Rückkopplung. Diese Algebra hat eine komplizierte Struktur (Kudrjavcev, 1965), und in ihr ist das Vollständigkeitsproblem algorithmisch unentscheidbar (Kratko, 1964). Daher wurden Zusatzforderungen an die auf Vollständigkeit zu untersuchende Menge gestellt (Kudrjavcev, 1973; Alešin, 1977) bzw. modifizierte Vollständigkeitsbegriffe untersucht (Kratko, 1964; Buevič, 1972; Thalheim, 1979).

Gegenstand dieser Arbeit ist die Kleene-Vollständigkeit. Eine Menge  $M$  von sequentiellen Funktionen aus  $P_k$  heißt Kleene-vollständig, wenn es zu jeder von Elementen aus  $P_k$  akzeptierbaren Wortmenge  $S$  eine aus den Elementen von  $M$  erzeugte Funktion  $F$  derart gibt, daß  $S$  von  $F$  akzeptiert wird.

Folgende Hauptergebnisse werden bewiesen:

Satz 1: Es ist algorithmisch unentscheidbar, ob eine endliche Menge in  $P_k$ ,  $k \geq 2$ , Kleene-vollständig ist oder nicht.

Satz 2: 1) In  $P_2$  gibt es genau drei Kleene-Mengen, von denen genau zwei minimal sind.

ii) In  $P_k$ ,  $k \geq 3$ , gibt es überabzählbar viele Kleene-Mengen.

iii) Die Anzahl der minimalen Kleene-Mengen in  $P_k$ ,  $k \geq 3$ , ist abzählbar unendlich.

Satz 3: 1) Für jede Kleene-Menge  $M$  in  $P_2$  und jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt es eine Basis für  $M$ , die genau  $n$  Elemente enthält.

ii) In  $P_k$ ,  $k \geq 3$ , gibt es endlich erzeugte Kleene-Mengen, Kleene-Mengen, die keine endliche aber eine unendliche Basis besitzen, und Kleene-Mengen, die überhaupt keine Basis haben.

iii) Alle minimalen Kleene-Mengen sind endlich erzeugt.

Analoge Aussagen werden auch für die Algebra der sequentiellen Funktionen, die über mehreren Grundmengen definiert sind, bewiesen. Weiterhin wird der Fall der (gewöhnlichen) Funktionen über  $E_2$  mit Verzögerung diskutiert, für den sich algorithmische Entscheidbarkeit der (modifizierten) Kleene-Vollständigkeit ergibt.

eingereicht: 18. 02. 1978

verteidigt: 11. Oktober 1978

Gutachter: Prof. Dr. G. Burosch (Rostock),

Doz. Dr. V. B. Kudrjavcev (Moskau),

Prof. Dr. G. Asser (Greifswald).

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. Jürgen Dassow

Technische Hochschule Otto von Guericke

Sektion Mathematik und Physik

Boleslaw-Bierut-Platz 5 PSF 124

DDR-3010 Magdeburg

Hans-Peter Lorenzen

**Semantische Synthese, Codeerzeugung und Speicherverwaltung bei höheren dynamischen Programmiersprachen, dargestellt am Beispiel der universellen Programmiersprache ALGOL 68**

---

**Autorreferat der Dissertation A**

Im Auftrag der IFIP erarbeitete die internationale Arbeitsgruppe WG 2.1, in der auch Wissenschaftler aus sozialistischen Ländern tätig sind, in den Jahren nach 1963 eine Nachfolgeprache für ALGOL 60. Der definierende Bericht dieser Sprache, genannt ALGOL 68, erschien 1968 und später auch als deutsche Übersetzung. Diese universelle Programmiersprache enthält viele Hilfsmittel für die Programmierung moderner Datenverarbeitungsanlagen. In der Dissertation werden Lösungsvorschläge für die Realisierung der dynamischen Semantik vorgestellt.

Im Kapitel 2 wird der Aufbau der Werte für ESER-Anlagen beschrieben. Der Laufzeitspeicher wurde in Programmspeicher (Befehlsfolgen) und Arbeitsspeicher (Daten) unterteilt.

Im Kapitel 3 erfolgt die Beschreibung der Codeerzeugung und des Objektprogramms. Das Objektprogramm läßt sich mit Hilfe von ALGOL 68 als ein zweistufiges Objektprogramm beschreiben. Erst durch die Abarbeitung des Objektprogramms der ersten Stufe (Makroprogramm) erhält man das entgültige Objektprogramm. Die Beschreibung der Codeerzeugung wird mit Hilfe von Prozeduren vorgenommen. Außerdem ist der Aufbau und die Beschreibung des Erzeugungsbaumes und der Modustabelle angegeben.

Im Kapitel 4 erfolgt schließlich die Beschreibung ausgewählter Konstruktionen von ALGOL 68. Der lokale Kellerbereich eines Zugriffsbereiches (range) wird in Definitionsspeicher und Deklarationspeicher unterteilt. Wegen der dynamischen Verwaltung des Deklarationspeichers ist es nicht notwendig, die Stellung der lokalen Generatoren (local generators) im Programm einzuschränken. Das Blockscheme wird im Gegensatz zu anderen Imple-

mentationen dynamischer Sprachen abgeändert und erweitert. Nach der Abarbeitung eines Zugriffsbereiches werden die Verbindungsdaten im Keller aufgelöst. Liefert der Zugriffsbereich einen Ergebniswert, der kein Name (Adresse) ist, bleibt der lokale Kellerbereich im Gegensatz zu anderen Implementationen erhalten. Erst in Abhängigkeit vom Kontext des Zugriffsbereiches wird dieser Speicherbereich freigegeben, und zwar von einer übergeordneten Konstruktion. Die Zuweisung von Werten wurde optimiert. So kann man bei der Zuweisung von mehrfachen Werten auf eine Anwendung der Speicherabbildungsfunktion verzichten, wenn die Elemente der beiden mehrfachen Werte im Speicher unmittelbar hintereinanderstehen. Bei der Zuweisung von Strukturen ist für die Felder der Strukturen nur dann eine schrittweise Zuweisung notwendig, wenn diese mehrfache Werte sind oder aber solche enthalten. Ansonsten kann die Struktur als Ganzes umgespeichert werden. Um eine günstige Programmspeicherverwaltung zu erreichen, die es auch gestattet, mit umfangreichen Programmsystemen zu arbeiten, ist ein prozedurgesteuertes Modularisierungsverfahren angewendet worden. Dynamische externe Prozeduren (Module) können entweder dynamisch geladen oder aber dynamisch überlagert werden. Der Aufruf und das Laden bzw. die Überlagerung erfolgen automatisch, im Programm erscheinen keine Ladebefehle. Die Verwendung eines Prozedursteuerprogramms und eine entsprechende Klassifikation der Module und Programme gewährleisten die Steuerung dieses Verfahrens. Über dieses Prozedursteuerprogramm sind alle Prozeduren und Module einheitlich aufrufbar.

eingereicht: 12. 07. 1977

verteidigt: 29. 09. 1978

Gutachter: Prof. Dr. I. O. Kerner (Dresden),  
Prof. Dr. G. Stiller (Dresden),  
Dr. W. Issel (Berlin).

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Hans-Peter Lorenzen  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Zentrum für Rechentechnik  
Rudower Chaussee 5  
DDR-1199 Berlin-Adlershof

## Anmerkungen

## Anmerkungen

## Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq./ Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. ä. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGI-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

### Beispiele:

- /8/ Zariaki, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra.  
Princeton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 132, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von G. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichard, H. (Ed.): G. F. Gauß, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers: Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort. Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen.

