Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 18

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT
ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 18

1981

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Schriftleitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion Mathematik

Prof. Dr. Gerhard Maeß, Schriftleiter

Dr. Werner Plischke

Dr. Klaus-Dieter Drews, Lektoren

Dorothea Meyer, Herstellung der Druckvorlage

Sektion Mathematik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 1

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR - 2500 Rostock, Vogelsang 13/14

Fernruf: 369 577

Leiter: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage

Genehmigungs-Nr.:

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz

Inhalt

Rostock. Math. Kolloq. 18, 5 - 14 (1981) 35C05 47B38

Adam Schmidt

Über gewisse lineare partielle Differentialgleichungen für Distributionen

Einleitung:

In Teil II dieser Note wird gezeigt:
Sind $g(p,q)$, $h(p,q)$ teilerfremde Polynome des mit dem Körper K der komplexen Zahlen gebildeten Ringes $K[p,q]$, ist $S_{gh} \in \mathcal{D}'_\Omega$ Distributionenlösung der Gleichung

$$g(Dx,Dy)h(Dx,Dy)S = 0$$

bei offenem, einfach zusammenhängendem, der Einfachheit halber konvex angenommenem Ω, so ist $S_{gh} = S_g + S_h$ mit

$$g(Dx,Dy)S_g = 0, \quad h(Dx,Dy)S_h = 0.$$ [1]

Teil I dient der Vorbereitung. Es wird gezeigt, daß dieser Satz noch Erweiterungen erwarten läßt. Dazu dienen zwei Beispiele. Das erste Beispiel macht eine Aussage über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen

$$g^k(Dx_1,Dx_2,\dots,Dx_n)S = 0 \text{ mit } g(p_1,p_2,\dots,p_n) \in K[p_1,p_2,\dots,p_n]. \tag{1}$$

Beschränkt man sich dabei auf $n = 2$, so läßt sich das Ergebnis mit dem Satz aus Teil II zu einer Aussage über die Lösungen von Gleichungen

$$\prod_{i=1}^{1} g_i^{k_i}(Dx,Dy)S = 0, \quad S \in \mathcal{D}'_\Omega, \tag{2}$$

verbinden bei teilerfremden $g_i(p,q)$. Das zweite Beispiel gibt eine Darstellung für die Lösungen der Gleichungen

---

1 Vgl. |1|, |2|. Partielle Ableitungen werden hier und im folgenden durch den Operator D und die betreffende Variable gekennzeichnet: $Dx = \frac{\partial}{\partial x}$.

$$\prod_{i=1}^{j}(a_{i0}+a_{i1}Dx_1+a_{i2}Dx_2+..+a_{in}Dx_n)^{k_i}S = 0, \quad S \in \mathcal{D}'_{\Omega}. \tag{3}$$

mit offenem, konvexem Ω. Die a_{i0} sind dabei komplex, die $a_{i1}, a_{i2}, .., a_{in}$ reell und

$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in} \\ a_{h0}, a_{h1}, \ldots, a_{hn} \end{pmatrix} = 2 \text{ für } i \neq h.$$

Es wird genügen, den Fall $n = 3$ zu behandeln, da sich für $n > 3$ keine neuen Probleme ergeben.

Teil I.

Es werden einige Sätze aus der Funktionalanalysis gebraucht, die sich aber alle als Aussagen über homomorphe Abbildungen in sich von abelschen Gruppen formulieren lassen und in dieser Form kaum eines Beweises bedürfen. Sei $\mathcal{G}$ eine abelsche Gruppe mit Elementen u,v,...., seien $\Theta_i u/\mathcal{G}$ homomorphe Abbildungen von $\mathcal{G}$ in sich mit Kernen N_{Θ_i} und Bildgruppen $\Theta_i\mathcal{G}$. Sind die Homomorphien kommutativ, so können Produkte $\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}u/\mathcal{G}$ gebildet werden mit Kernen $N_{\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}}$ und Bildern $\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}\mathcal{U}$ von Untergruppen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. Dann ist

$$\Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i} N_{\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}} = N_{\Theta_j} \cap \Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\mathcal{G}. \tag{4}$$

Daß die Gruppe auf der linken Seite von (4) im Durchschnitt auf der rechten Seite enthalten ist, sieht man sofort. Aber auch zu jedem v aus dem Durchschnitt existiert ein $u \in \mathcal{G}$ mit

$v = \ominus_j^{k_j-1} \prod_{i=1}^{j-1} \ominus_i^{k_i} u$ und $u \in N_{\prod_{i=j}^{j} \ominus_i^{k_i}}$. Ist zunächst $j = 1$, so kann auf den Index i verzichtet werden; aus (4) wird $\ominus^{k-1} N_{\ominus^k} = N_{\ominus} \cap \ominus^{k-1} \mathcal{G}$. Existiert zu $\ominus\, u/\mathcal{G}$ eine Rechtsinverse[2], die mit $\check{\ominus}\, v/\ominus \mathcal{G}$ bezeichnet werde, so folgt

$$\ominus^{k-1} N_{\ominus^k} = \ominus^{k-1} \check{\ominus}^{k-1} (N_{\ominus} \cap \ominus^{k-1} \mathcal{G})$$

und

$$N_{\ominus^k} \subseteq \check{\ominus}^{k-1} (N_{\ominus} \cap \ominus^{k-1} \mathcal{G}) \oplus N_{\ominus^{k-1}} \subseteq N_{\ominus^k} .$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses erhält man

$$N_{\ominus^k} = \check{\ominus}^{k-1} (N_{\ominus} \cap \ominus^{k-1} \mathcal{G}) \oplus \check{\ominus}^{k-2} (N_{\ominus} \cap \ominus^{k-2} \mathcal{G}) \oplus \ldots \oplus \check{\ominus} (N_{\ominus} \cap \ominus \mathcal{G}) \oplus N_{\ominus} . \tag{5}$$

Für $j > 0$ muß man außer

$$\ominus_i \ominus_k = \ominus_k \ominus_i \quad \text{für} \quad i \neq k \tag{6}$$

annehmen, daß

$$N_{\ominus_i} = \ominus_k N_{\ominus_i} \quad \text{für} \quad i \neq k \tag{7}$$

und

$$N_{\ominus_i} \subseteq \ominus_i^k \mathcal{G} \quad \text{für} \quad k < k_i \tag{8}$$

gilt. Existieren Rechtsinverse $\check{\ominus}_i\, v/\ominus_i \mathcal{G}$ für alle i, so kann man (4) auswerten.

---

2 Rechtsinverse $\check{\ominus}\, v/\ominus \mathcal{G}$ existieren genau dann, wenn $N_{\ominus}$ direkter Summand von $\mathcal{G}$ ist. Ist $\mathcal{G} = N_{\ominus} \oplus U$, so ergibt die Reduktion von $\ominus u/\mathcal{G}$ auf $\ominus u/U$ eine Isomorphie, deren Inverse eine Rechtsinverse $\check{\ominus}\, v/\ominus \mathcal{G}$ von $\ominus u/\mathcal{G}$ ist. Existiert andererseits $\check{\ominus}\, v/\ominus \mathcal{G}$, so gilt $u - \check{\ominus} \ominus u \in N_{\ominus}$ für alle $u \in \mathcal{G}$. Es ist also $\mathcal{G} = N_{\ominus} + \check{\ominus} \ominus \mathcal{G}$. Zu jedem $v \in N_{\ominus} \cap \check{\ominus} \ominus \mathcal{G}$ gibt es ein u mit $v = \check{\ominus} \ominus u$ und $0 = \ominus v = \ominus u$ so, daß $v = \check{\ominus} \ominus u = 0$ gilt. Damit ist $N_{\ominus} \cap \check{\ominus} \ominus \mathcal{G} = \{0\}$, $\mathcal{G} = N_{\ominus} \oplus \check{\ominus} \mathcal{G}$.

Über

$$\Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\, N_{\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}} = \Big(\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\, N_{\Theta_j}\Big) \cap \Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\,\mathcal{G}$$

$$= \Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\check{\Theta}_j^{k_j-1}\, N_{\Theta_j}$$

findet man

$$N_{\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}} \subseteq \check{\Theta}_j^{k_j-1} N_{\Theta_j} + N_{\Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}} \subseteq N_{\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}}.$$

Wiederholte Anwendung dieser Schlußweise ergibt

$$N_{\prod_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}} = \sum_{i=1}^{j}\left(\check{\Theta}_i^{k_i-1} N_{\Theta_i} + \check{\Theta}_i^{k_i-2} N_{\Theta_i} + \dots + \check{\Theta}_i N_{\Theta_i} + N_{\Theta_i}\right). \tag{9}$$

Man kann (4) auch mit gewissen Lösungsoperatoren auswerten: Ist der Kommutator der Operatoren Θ_i und Λ_i

$$\dot{\Lambda}_i = \Theta_i\Lambda_i - \Lambda_i\Theta_i \tag{10}$$

vertauschbar mit Θ_i, d. h.

$$\Theta_i\dot{\Lambda}_i = \dot{\Lambda}_i\Theta_i, \tag{11}$$

so folgt durch vollständige Induktion

$$\Theta_i^k\Lambda_i = \Lambda_i\Theta_i^k + k\dot{\Lambda}_i\Theta_i^{k-1},$$

denn es gilt

$$\Theta_i^{k+1}\Lambda_i = \Theta_i\Lambda_i\Theta_i^k + k\dot{\Lambda}\Theta_i^k = \Lambda_i\Theta_i^{k+1} + (1+k)\dot{\Lambda}_i\Theta_i^k.$$

Eine weitere vollständige Induktion nach k ergibt

$$\Theta_i^k\Lambda_i^k N_{\Theta_i} = k!\,\dot{\Lambda}_i^{k_i} N_{\Theta_i} \subseteq N_{\Theta_i}. \tag{12}$$

Setzt man nun neben (6) und (7) anstelle von (8) noch voraus, daß nicht nur (12), sondern sogar

$$N_{\Theta_i} = k!\,\dot{\Lambda}_i^{k} N_{\Theta_i} = \Theta_i^k\Lambda_i^k N_{\Theta_i} \tag{13}$$

gilt, so kann man (4) wieder in ähnlicher Weise auswerten und erhält

$$\Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\,N_{\prod\limits_{i=1}^{j}\Theta_i^{k_i}} = \Theta_j^{k_j-1}\prod_{i=1}^{j-1}\Theta_i^{k_i}\Lambda_j^{k_j-1}\,N_{\Theta_j}.$$

Daraus folgt[3]

$$N_{\prod\limits_{j=1}^{j}\Theta_i^{k_i}} = \sum_{i=1}^{j}(\Lambda_i^{k_i-1}N_{\Theta_i}+\Lambda^{k_i-2}N_{\Theta_i}+\dots+\Lambda_i N_{\Theta_i}+N_{\Theta_i}). \quad (14)$$

Für das erste der oben angekündigten Beispiele, die Gleichung (1), ist $\mathcal{G} = \mathcal{D}'_\Omega$ mit den Elementen S,T,... und mit $\Theta = g(Dx_1, Dx_2, \dots, Dx_n)$. Um (5) anwenden zu können, muß die Existenz von $\check{\Theta}T/\Theta\mathcal{D}'_\Omega$ nachgewiesen werden. $\mathcal{D}'_\Omega$ ist divisibel und torsionsfrei. Daher ist N_Θ divisibel und direkter Summand[4] von $\mathcal{D}'_\Omega$, so daß die Rechtsinverse existiert. (5) beschreibt also die Struktur der Lösungen von (1).

Beschränkt man sich auf n = 2 und kombiniert diese Überlegungen mit dem in der Einleitung erwähnten Satz, so erhält man für die Struktur der Lösungen von (2) in leicht verständlicher Schreibweise

---

3 Vgl. /3/. Berg fordert dort ein einziges Λ für alle Θ_i, gibt eine andere Herleitung, und die Voraussetzungen (7) und (13) werden zu einer einzigen zusammengefaßt.

4 Ist $\mathcal{G}$ divisibel und $\Theta\mathcal{G}$ torsionsfrei, so gibt es zu jedem $v \in N_\Theta$ und zu jeder natürlichen Zahl n ein $u \in \mathcal{G}$ mit $nu = v$. Es ist $0 = \Theta v = n\,\Theta u$ und also $u \in N_\Theta$. N_Θ ist somit divisibel und damit direkter Summand von $\mathcal{G}$. Vgl. hierzu /4/, S. 8 - 9. Es sei noch bemerkt, daß im Beispiel 1 $g(p_1, p_2, \dots, p_n)$ auch aus $\mathcal{L}_\Omega^\infty[p_1, p_2, \dots, p_n]$ sein darf.

$$N_{\prod_{i=1}^{1} g_i^{k_i}} = \sum_{i=1}^{1} N_{g_i^{k_i}},$$

$$N_{g_i^{k_i}} = \check{g}_i^{k_i-1}(N_{g_i} \cap g_i^{k_i-1}\mathscr{D}'_\Omega) \oplus \dots \oplus \check{g}_i(N_{g_i} \cap g_i\mathscr{D}'_\Omega) \oplus N_{g_i}.$$

Für das zweite Beispiel, die Gleichung (3), setzt man unter Beschränkung auf $n = 3$

$$\Theta_i = a_{i0} + a_{i1}Dx_1 + a_{i2}Dx_2 + a_{i3}Dx_3.$$

Es erweisen sich Gleichungssysteme

$$x_\nu = a_\nu y_1 + b_\nu y_2 + c_\nu y_3, \quad \nu = 1,2,3, \tag{15}$$

mit der Determinante

$$|a_\nu, b_\nu, c_\nu| = 1 \tag{16}$$

als nützlich. Dabei sind die $a_\nu = a_{i\nu}$ durch die Koeffizienten von Θ_i gegeben und die b_ν, c_ν so zu wählen, daß (16) gilt. Es ist möglich, den b_ν noch zusätzliche Bedingungen aufzuerlegen. Jedenfalls kann $\Lambda_i = y_i$ gesetzt werden. Für den Kommutator der Operatoren Θ_i und Λ_i erhält man dann

$$\begin{aligned}\Lambda_i' &= \Theta_i \Lambda_i - \Lambda_i \Theta_i \\ &= (a_{i0}+a_{i1}Dx_1+a_{i2}Dx_2+a_{i3}Dx_3)\,|x_\nu, b_\nu, c_\nu| \\ &\quad - |x_\nu, b_\nu, c_\nu|\,(a_{i0}+a_{i1}Dx_1+a_{i2}Dx_2+a_{i3}Dx_3) = 1.\end{aligned}$$

Somit gilt (11), und (12) reduziert sich auf $k!N_{\Theta_i} \subseteq N_{\Theta_i}$. (13) ist trivial erfüllt.

Für den Kommutator der Operatoren Θ_i und $\exp(\lambda y_1)$ mit $\lambda \in K$ findet man

$$\Theta_i \exp(\lambda y_1) - \exp(\lambda y_1)\Theta_i = \lambda \exp(\lambda y_1).$$

Das ergibt $(\Theta_i - \lambda)\exp(\lambda y_1)\, N_{\Theta_i} = 0$. Ebenso ist

$\Theta_i \exp(-\lambda y_1) N_{\Theta_i - \lambda} = 0$, also

$$N_{\Theta_i} = \exp(-\lambda y_1) N_{\Theta_i - \lambda}.$$

Im Spezialfall $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \\ a_{k1}, a_{k2}, a_{k3} \end{pmatrix} = 1$ kann man $a_{i\nu} = a_{k\nu}$ für $\nu = 1,2,3$ annehmen. Dann ist $a_{io} - a_{ko} \neq 0$. In diesem Fall ist schon gezeigt:

$$\Theta_k N_{\Theta_i} = \Theta_k \exp((a_{ko}-a_{io})y_1) N_{\Theta_k}$$
$$= (a_{ko}-a_{io})\exp((a_{ko}-a_{io})y_1) N_{\Theta_k} = (a_{ko}-a_{io}) N_{\Theta_i} = N_{\Theta_i}.$$

Um (7) auch im Falle $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \\ a_{k1}, a_{k2}, a_{k3} \end{pmatrix} = 2$ zu erhalten, muß man für die $S \in N_{\Theta_i}$ eine Darstellung finden, die dieser Absicht angepaßt ist. In (15) setzt man dazu wieder $a_\nu = a_{i\nu}$ und jetzt $b_\nu = a_{k\nu}$. Die c_ν bestimmt man dann reell so, daß (16) erfüllt ist. Dann kann man y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} als neue unabhängige Variable einführen, und die Gleichung $(a_{iO} + a_{i1}Dx_1 + a_{i2}Dx_2 + a_{i3}Dx_3)S = 0$ geht über in $(a_{iO} + Dy_{i1})S = 0$ mit der Lösung

$$S = \exp(-a_{iO}y_{i1}) R J_i;$$

dazu wird für die Schwartzschen Testfunktionen

$$J_i \varphi := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, x_3)\, dy_{i1}$$ definiert und $R \in \mathcal{D}'_{w_i}$ mit

$w_i = \{(y_{i2}, y_{i3}) : \exists y_{i1}\ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\}$ gewählt. Für (7) muß zu $S^* \in N_{\Theta_i}$ ein $S \in N_{\Theta_i}$ gesucht werden mit

$S^* = \exp(-a_{iO}y_{i1}) R^* J_i = \Theta_k S$. Es ist

$$\Theta_k S = \Theta_k \exp(-a_{iO}y_{i1}) R J_i = (a_{kO} + Dy_{i2}) \exp(-a_{iO}y_{i1}) R J_i$$
$$= \exp(-a_{iO}y_{i1})((a_{kO} + Dy_{i2})R) J_i.$$

Die Differentialgleichung $(a_{kO} + Dy_{i2})R = R^*$ ist in $\mathcal{D}'_{w_i}$ stets lösbar, denn

$$\mathcal{D}'_{w_i} = \exp(-a_{kO}y_{i2}) \mathcal{D}'_{w_i} = \exp(-a_{kO}y_{i2}) Dy_{i2} \mathcal{D}'_{w_i}$$
$$= (a_{kO} + Dy_{i2}) \exp(-a_{kO}y_{i2}) \mathcal{D}'_{w_i} = (a_{kO} + Dy_{i2}) \mathcal{D}'_{w_i}.$$

Damit ist (7) erfüllt, und das Lösungsverfahren (14) ist anwendbar. Die Lösungen von (3) haben die Gestalt

$$S = \sum_{i=1}^{1} \sum_{h=1}^{k_i} \Lambda_i^{k_i-h} \exp(-a_{i0} y_{i1}) R_{ih} J_i .$$

<u>Teil II.</u>

Es soll nun der in der Einleitung formulierte Satz bewiesen werden. Für offene einfach zusammenhängende Punktmengen Ω gilt nicht nur $Dx\mathcal{D}'_{\Omega} = \mathcal{D}'_{\Omega} = Dy\mathcal{D}'_{\Omega}$, sondern auch $N_{pq} = N_p + N_q$. Letzteres ist, wenn aus $DxS = 0$ nur lokal auf "S unabhängig von x" geschlossen werden kann, anscheinend nur sehr umständlich zu beweisen. Es wird deshalb der Einfachheit halber Ω als konvex angenommen. Dann reichen die z. B. in |1| benützten Methoden schon zum Beweis von $N_{pq} = N_p + N_q$ aus. Für konvexes Ω ist also $N_p = N_p \cap Dy\mathcal{D}'_{\Omega} = Dy\ N_{pq} = Dy\ N_p$. Dabei wurde auch (3) benützt. Für komplexes ϱ_i ist weiter $N_p = \exp(\varrho_i y) N_p$. Daher gilt

$$\begin{aligned} N_p &= \exp(\varrho_1 y)\ N_p = \exp(\varrho_1 y)\ DyN_p = (Dy-\varrho_1)\ \exp(\varrho_1 y)\ N_p \\ &= (Dy-\varrho_1 y)\ N_p = \prod_{i=1}^{1} (Dy-\varrho_i)\ N_p . \end{aligned} \tag{17}$$

Ist $g(p,q)$ aus $K[p,q]$ und ungleich Null für $p = \lambda \in K$, so kann nun $N_g = (Dx-\lambda)\ N_g$ gezeigt werden. Ist T aus N_g, so löst $S = \exp(\lambda x)\ (\check{D}x(\exp(-\lambda x)T)-U)$ für alle U aus N_p die Gleichung $(Dx-\lambda)\ S = T$. Der Operator $\check{D}x\ T/\mathcal{D}'_{\Omega}$ ist dabei eine Rechtsinverse der durch $Dx\ V/\mathcal{D}'_{\Omega}$ gegebenen Homomorphie von $\mathcal{D}'_{\Omega}$ auf sich. Es soll nun U so bestimmt werden, daß S aus N_g ist. Es gilt

$$g(Dx,Dy)S = \exp(\lambda x)\ (g(Dx+\lambda,Dy)\ \check{D}x(\exp(-\lambda x)T)-g(\lambda,Dy)U).$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} Dx\ g(Dx+\lambda,Dy)\ \check{D}x\ (\exp(-\lambda x)T) &= g(Dx+\lambda,Dy)\ \exp(-\lambda x)T \\ &= \exp(-\lambda x) g(Dx,Dy)T = 0. \end{aligned}$$

Es ist also $g(Dx+\lambda,Dy)\,\check{D}x(\exp(-\lambda x)T)$ aus N_p. Es gibt somit wegen (17) ein U aus N_p, so daß $g(\lambda,Dy)U = g(Dx+\lambda,Dy)\check{D}x(\exp(-\lambda x)T)$ ist. D. h., es ist $N_g = (Dx-\lambda)\ N_g$ für $g(\lambda,q)$ ungleich Null.

Damit ist auch gezeigt: $N_g = \prod_{i=1}^{n} (Dx-\lambda_i)\ N_g$ für $g(\lambda_i,q) \neq 0$,

$i = 1,2,\ldots,n$, und also für $r(p) = \prod_{i=1}^{n} (p-\lambda_i)$ mit $g(\lambda_i,q) \neq 0$ auch

$$r(Dx)\ N_{rg} = N_g \cap r(Dx)\mathcal{D}'_{\Omega} = N_g = r(Dx)\ N_g.$$

Daraus folgt

$$N_{rg} \subseteq N_r + N_g \subseteq N_{rg} \tag{18}$$

für teilerfremde $r(p)$ und $g(p,q)$ aus $K[p,q]$.
Sind $g(p,q)$, $h(p,q)$ teilerfremde Polynome aus $K[p,q]$, so gibt es Polynome g_1, h_1, r derart, daß $g_1(p,q)h(p,q) + g(p,q)h_1(p,q) = r(p)$ gilt. Hierbei ist $r(p)$ die Resolvente von g und h, wenn man sie als Polynome in q mit Koeffizienten aus $K[p]$ auffaßt. Haben $g(p,q)$, $h(p,q)$ keine Teiler aus $K[p]$, so ist

$$N_{gh} = r(Dx)N_{gh} = (g_1(Dx,Dy)h(Dx,Dy) + g(Dx,Dy)h_1(Dx,Dy))N_{gh} \tag{19}$$
$$\subseteq N_g + N_h \subseteq N_{gh}.$$

Für paarweise teilerfremde Polynome $g(p,q)$, $h(p,q)$, $r_1(p)$, $r_2(p)$ aus $K[p,q]$ bzw. $K[p]$ gilt wegen (18) und (19), sofern g und h keine Teiler aus $K[p]$ besitzen,

$$N_{r_1 g r_2 h} = N_{r_1 r_2} + N_{gh} = N_{r_1} + N_{r_2} + N_g + N_h = N_{r_1 g} + N_{r_2 h}.$$

Also ist allgemein für zwei teilerfremde Polynome aus $K[p,q]$

$$N_{gh} = N_g + N_h. \tag{20}$$

Literatur

/1/ Fenyö, I., und Schmidt, A.: Über gewisse partielle Differentialgleichungen im Bereich der Distributionen. J. Reine Angew. Math. 232, 215 - 220 (1970)

/2/ Schmidt, A.: Linear differential equations with constant coefficients in two independent variables. In: Farkas, M. (Ed.): Differential Equations. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 15, pp. 365 - 372, Amsterdam 1977

/3/ Berg, L.: Über die Struktur der Lösungen homogener Operatorgleichungen. Math. Nachr. 67, 7 - 11 (1975)

/4/ Kaplansky, I.: Infinite abelian groups. Ann Arbor 1956

eingereicht: 03. 02. 1981

Anschrift des Verfassers:

Prof. em. Dr. Adam Schmidt
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 15 - 32 (1981) 35G15
35D10

Günther Wildenhain

Zum Randverhalten verallgemeinerter Poisson-Integrale

1. Ausgehend von der Greenschen Formel ist in /3/ unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen an das beschränkte Gebiet Ω und die Koeffizienten der betrachteten Operatoren eine Darstellungsformel für die Lösungen allgemeiner linearer elliptischer Randwertprobleme in geeigneten Sobolev-Räumen hergeleitet worden. Diese Darstellungsformeln können einerseits als Verallgemeinerung der klassischen Poisson-Integrale für Kugel oder Halbraum (vgl. /15/, /1/, /4/, /5/), andererseits (im Falle des Dirichlet-Problems) als Präzisierung der sogenannten verallgemeinerten harmonischen Maße (vgl. /14/) angesehen werden. In /5/ (ausführlicher in /11/, /6/, /7/, /8/) wurde das Randverhalten von speziellen Poisson-Integralen der polyharmonischen Gleichung für die Kugel untersucht, wobei insbesondere punktweise radiale, nicht-tangentiale und tangentiale Grenzwerte betrachtet wurden. Vorbild solcher Überlegungen sind die klassischen Resultate (zum Beispiel vom Fatouschen Typ) über Poisson-Integrale bei der Laplace-Gleichung (vgl. /9/, /15/). Entsprechende Fragen über das punktweise Randverhalten kann man auch im Anschluß an die eingangs erwähnte Darstellungsformel formulieren. Ergebnisse liegen jedoch noch nicht vor. In der vorliegenden Arbeit sollen lediglich einige globale Aussagen gemacht werden, die sich im wesentlichen aus den Einbettungssätzen ergeben. Diese Resultate sind in Abschnitt 5 dargelegt. Die Abschnitte 2 bis 4 enthalten notwendige Vorbereitungen.

2. Es sei $\Omega \subset R^n$ ein beschränktes Gebiet mit beliebig oft differenzierbarem Rand. $W_2^s(\Omega)$ ($s \geq 0$, ganz) bezeichne den klassischen Sobolev-Raum. Der duale Raum $W_2^{-s}(\Omega)$ läßt sich dann bekanntlich (vgl. /2/) als Vervollständigung von $L^2(\Omega)$ bezüglich

der Norm

$$\|u\|_{-s} := \sup_{v \in W_2^{s}(\Omega)} \frac{|(u,v)|}{\|v\|_s}$$

charakterisieren,wobei das gewöhnliche L^2-Skalarprodukt (u,v) im Sinne dieser Dualität so für beliebige $u \in W_2^{-s}(\Omega)$, $v \in W_2^{s}(\Omega)$ erweitert werden kann, daß

$$|(u,v)| \leq \|u\|_{-s}\|v\|_s \tag{1}$$

gilt. Mit $W_2^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ bezeichnen wir den Hilbertraum aller Funktionen φ auf $\partial\Omega$, die im Spursinne Randwerte von Funktionen aus $W_2^{s}(\Omega)$ sind, mit der Norm

$$\|\varphi\|_{s-\frac{1}{2}} := \inf_{\substack{u \in W_2^{s}(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi}} \|u\|_s .$$

Den zu $W_2^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dualen Raum erhält man durch Vervollständigung von $C(\partial\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|\psi\|_{-s+\frac{1}{2}} := \sup \frac{|(\psi,\varphi)|}{\|\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}}, \quad (\psi,\varphi) = \int_{\partial\Omega} \psi(y)\overline{\varphi(y)}\,d\sigma(y),$$

wobei das Supremum über alle $\varphi \in W_2^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ zu bilden ist. Im Sinne der Dualität kann auch hier das Skalarprodukt (ψ,φ) für $\varphi \in W_2^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\psi \in W_2^{-s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ definiert werden, so daß

$$|(\psi,\varphi)| \leq \|\psi\|_{-s+\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{s-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

gilt. Es sei jetzt s eine beliebige ganze Zahl. Unter $\tilde{W}_2^{s}(\Omega) \subset W_2^{s}(\Omega)$ verstehen wir dann die Vervollständigung von $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ bezüglich der Norm

$$|||u|||_s^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^{2m} \left\| \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \nu^{j-1}} \right\|_{s-j+\frac{1}{2}}$$

($\nu = \nu(x)$ Außennormale an Ω im Punkte $x \in \partial\Omega$, $m > 0$ ganz).

Die Bedeutung der Räume $\tilde{W}_2^s(\Omega)$, die für $s \geq 2m$ mit $W_2^s(\Omega)$ übereinstimmen, besteht in dem folgenden

Lemma 1: Bezeichnet $L = L(x,D)$ einen Differentialoperator der Ordnung $l \leq 2m$ in Ω mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten, $B = B(y,D)$ einen auf dem Rand $\partial\Omega$ erklärten Differentialausdruck der Ordnung $t \leq 2m-1$, dessen Koeffizienten (bezüglich lokaler Koordinaten) ebenfalls beliebig oft differenzierbar seien, so existieren für ein beliebiges ganzzahliges s Konstanten $C_s > 0$, die nicht von u abhängen, so daß für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ die Ungleichungen

$$\|Lu\|_{s-l} \leq C_s |||u|||_s, \quad \|Bu\|_{s-t-\frac{1}{2}} \leq C_s |||u|||_s$$

gelten.

Zum Beweis vergleiche man /2/. Für $u \in \tilde{W}_2^s(\Omega)$ existieren also im Sinne dieses Lemmas die Randwerte $Bu|_{\partial\Omega}$, wovon wir häufig Gebrauch machen werden. Es sei darauf hingewiesen, daß die Einbettung von $\tilde{W}_2^s(\Omega)$ in $W_2^s(\Omega)$ im allgemeinen nicht eineindeutig ist.

3. Im folgenden sei

$$L(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein in $\overline{\Omega}$ eigentlich elliptischer Differentialoperator mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten.

$$B_j(y,D) = \sum_{|\gamma| \leq m_j} b_{j\gamma}(y) D^\gamma \quad (j=1,\dots,m)$$

sei ein System von Randoperatoren auf $\partial\Omega$, welches den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Die Koeffizienten $b_{j\gamma}$ sind beliebig oft differenzierbar.

(ii) Es gilt $m_j \leq 2m-1$.

(iii) Das System ist normal.

(iv) Das System überdeckt den Operator L auf $\partial\Omega$.

Bezüglich der Definition der verwendeten Begriffe sowie des Beweises der folgenden Aussagen vgl. /12/.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = f \text{ in } \Omega,\ B_j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j \quad (j=1,\dots,m). \tag{3}$$

Damit kann man in folgender Weise eine Greensche Formel in Verbindung bringen. Zunächst existiert ein (nicht eindeutig bestimmtes) normales System $(C_j)_{j=1,2,\dots,m}$ von Randoperatoren mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten und ord $C_j = l_j \leq 2m-1$ derart, daß $(B_1,\dots,B_m, C_1,\dots,C_m)$ auf $\partial\Omega$ ein Dirichlet-System der Ordnung 2m bildet. Das heißt, das System ist normal, und die Ordnungen der Operatoren durchlaufen die Zahlen 0,1,..., 2m-1. Ist $(C_j)_{j=1,\dots,m}$ fixiert, so findet man in eindeutiger Weise weitere 2m Randoperatoren

$$(B_j')_{j=1,\dots,m},\ (C_j')_{j=1,\dots,m}$$

mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten auf $\partial\Omega$, so daß die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) ord $B_j' = m_j' = 2m-1 - l_j$,

ord $C_j' = l_j' = 2m-1 - m_j$.

(ii) Das System $(B_1',\dots,B_m', C_1',\dots,C_m')$ ist ein Dirichlet-System der Ordnung 2m auf $\partial\Omega$, und für $u,v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gilt die Greensche Formel

$$\int_\Omega Lu\,\overline{v}\,dx - \int_\Omega u\,\overline{L^* v}\,dx = \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} C_j u\,\overline{B_j' v}\,d\sigma - \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} B_j u\,\overline{C_j' v}\,d\sigma.$$

Dabei bezeichnet

$$L^*(x,D)\,v = \sum_{|\alpha|\le 2m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(\bar{a}_{\alpha} v)$$

den zu $L(x,D)$ adjungierten Differentialausdruck, mit dem man das zu (3) adjungierte Randwertproblem

$$L^* v = g \text{ in } \Omega,\ B_j' v|_{\partial\Omega} = \psi_j \quad (j=1,\dots,m) \tag{4}$$

formuliert.
Die Greensche Formel läßt sich wie folgt verallgemeinern (vgl. /3/). Im Sinne der Dualität bezüglich des L^2-Skalarproduktes in $L^2(\Omega)$ bzw. $L^2(\partial\Omega)$ (vgl. Abschnitt 2) gilt für beliebige ganzzahlige s und $u \in \tilde{W}_2^{\,s}(\Omega)$, $v \in \tilde{W}_2^{\,2m-s}(\Omega)$ die Formel

$$(u, L^* v) - (Lu, v) = \sum_{j=1}^{m} (B_j u, C_j' v) - \sum_{j=1}^{m} (C_j u, B_j' v).$$

Die Anwendung der Randoperatoren B_j, B_j', C_j, C_j' ist dabei im Sinne von Lemma 1 zu verstehen.
Wir betrachten jetzt das Randwertproblem (3) für $f \in W_2^s(\Omega)$, $\varphi_j \in W_2^{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (s ganz) und setzen

$$K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})} = W_2^s(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W_2^{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Der Operator $\mathcal{A}_s = (L, B_1, \dots, B_m)$ definiert dann für $s \geq 0$ eine Abbildung von $W_2^{2m+s}(\Omega)$ in $K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})}$. Entsprechend bildet $\mathcal{A}_s^* = (L^*, B_1', \dots, B_m')$ den Raum $W_2^{2m+s}(\Omega)$ in $K_{(s,2m+s-m_j'-\frac{1}{2})}$ ab. Die zugehörigen Nullräume N bzw. N^* sind endlichdimensional und auf Grund der von uns gemachten Annahmen in $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ enthalten.
Für $F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})}$,

$G = (g, \psi_1, \dots, \psi_m) \in K_{(s,2m+s-m_j'-\frac{1}{2})}$, $u \in N$, $v \in N^*$

setzen wir zur Abkürzung

$$[F, C'v] := (f,v) + \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, C_j'v), \tag{5}$$

$$[G, Cu] := (g,u) + \sum_{j=1}^{m} (\psi_j, C_j u). \tag{6}$$

Es läßt sich zeigen, daß jedes Element

$$F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})}$$

derart in die direkte Summe $F = F' + F''$ zerlegt werden kann, daß $F' = (v', 0, \dots, 0)$ $(v' \in N^*)$ gilt und für F'' die Bedingung $[F, C'v] = 0$ erfüllt ist. Die zugehörigen, durch $Q_{N^*}F := F'$, $Q_{K^*}F := F''$ definierten Projektionsoperatoren sind in $K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})}$ bezüglich der Produktnorm stetig. Ganz analog erklärt man über die Bedingung $[G, Cu] = 0$ die Projektoren Q_N, Q_K im Raume $K_{(s,2m+s-m_j'-\frac{1}{2})}$.

Es sei $K_s = Q_K K_{(s,2m+s-m_j'-\frac{1}{2})}$, $K_s^* = Q_{K^*} K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})}$. Da die Räume $K_{(0,2m-m_j'-\frac{1}{2})}$ bzw. $K_{(0,2m-m_j-\frac{1}{2})}$ für $s < 0$ in $K_{(s,2m+s-m_j'-\frac{1}{2})}$ bzw. $K_{(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2})}$ dicht liegen, kann man die Projektoren Q_K bzw. Q_{K^*} und damit K_s, K_s^* auch für $s < 0$ erklären. Betrachten wir nun für ein beliebiges ganzes s

$$\tilde{H}_s := \tilde{W}_2^s(\Omega) \ominus N, \quad \tilde{H}_s^* := \tilde{W}_2^s(\Omega) \ominus N^*,$$

so gilt der folgende, auf J. A. Rojtberg zurückgehende Homöomorphiesatz, der die grundlegenden Lösbarkeitsaussagen bezüglich der Probleme (3) und (4) zusammenfaßt.

<u>Satz 1:</u> Für beliebige ganzzahlige s existiert ein Homöomorphismus Λ_s von $\tilde{H}_{2m+s}$ auf K_s^*. Für $s \geq 0$ ist Λ_s durch die Einschränkung von $\mathcal{A}_s$ auf $\tilde{H}_{s+2m}$ gegeben. Für $s < 0$ erhält man Λ_s durch stetige Fortsetzung des Operators $\mathcal{A}_0$, wenn man diesen

als Abbildung von $\tilde{H}_{2m+s}$ in K_s^* auffaßt. Entsprechend existiert ein Homöomorphismus $\mathcal{A}_s^*$ von H_{2m+s}^* auf K_s, der sich für $s \geq 0$ durch die Einschränkung von $\mathcal{A}_s^*$ auf $\tilde{H}_{2m+s}^*$ und für $s < 0$ durch stetige Fortsetzung von $\mathcal{A}_o^*$ (aufgefaßt als Abbildung von $\tilde{H}_{2m+s}^*$ in K_s) ergibt. Insbesondere gilt also für die Lösung $u \in \tilde{H}_{2m+s}$ von (3)

$$C_1 |||u|||_{2m+s}^2 \leq \|f\|_s^2 + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} \leq C_2 |||u|||_{2m+s}^2 \tag{7}$$

und für die Lösung $v \in \tilde{H}_{2m+s}^*$ von (4)

$$C_3 |||v|||_{2m+s}^2 \leq \|g\|_s^2 + \sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|_{2m+s-m_j^{\prime}-\frac{1}{2}}^2 \leq C_4 |||v|||_{2m+s}^2 \tag{8}$$

mit Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4, die nicht von u,v abhängen.

4. In /3/ wurde auf der Basis von Satz 1 sowie der oben angegebenen Verallgemeinerung der Greenschen Formel der folgende Darstellungssatz bewiesen.

<u>Satz 2:</u> Außer den bisherigen Annahmen über Ω, L und $(B_j)_{j=1,\dots,m}$ gelte $N = N^* = \{0\}$. Ferner sei $q > \frac{n}{2}$ eine ganze Zahl, $\alpha \geq 0$ ein fixierter Multiindex und

$$(f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in W_2^{q+|\alpha|-2m}(\Omega) \times \sum_{j=1}^{m} W_2^{q+|\alpha|-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$ Dann

existieren für $x \in \Omega$ Funktionen $\Gamma_{x,\alpha}^{(B)} \in \tilde{W}_2^{2m-q-|\alpha|}(\Omega)$ derart, daß die Ableitung $D^\alpha u$ der (nach Satz 1 existierenden und eindeutigen) Lösung $u \in W_2^{q+|\alpha|}(\Omega)$ der Randwertaufgabe (3) die Darstellung

$$(-1)^{|\alpha|} D^\alpha u(x) = (f, \Gamma_{x,\alpha}^{(B)}) + \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, C_j^{\prime} \Gamma_{x,\alpha}^{(B)}) \tag{9}$$

besitzt.

Es sei jetzt für beliebige ganzzahlige s

$$\overset{\circ}{\tilde{W}}{}_2^{2m-s}(\Omega) = \left\{ v \in \tilde{W}_2^{2m-s}(\Omega) : \left.\frac{\partial^{j-1} v}{\partial \nu^{j-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \ (j=1,2,\ldots 2m) \right\}$$

sowie $u \in W_2^{s}(\Omega)$, $f \in W_2^{s-2m}(\Omega)$.

Wir nennen dann u_o in Ω schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$, falls für alle $v \in \overset{\circ}{\tilde{W}}{}_2^{2m-s}(\Omega)$ die Identität

$$(u_0, L^{*}v) = (f,v)$$

besteht. Unter Heranziehung weiterer Resultate von J. A. Rojtberg /13/ läßt sich der Satz 2 wie folgt modifizieren.

Satz 3: Es sei $s > \frac{n}{2}$, $f \in W_2^{s-2m}(\Omega)$ und $u \in W_2^{s}(\Omega)$ schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$. $(B_j)_{j=1,\ldots,m}$ sei ein beliebig gewähltes System von Randbedingungen, welches den im vorangehenden formulierten Bedingungen genügt. Dann existieren Randfunktionen

$(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \in \prod_{j=1}^{m} W_2^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ derart, daß die Darstellung

$$u(x) = (f, \Gamma_x^{(B)}) + \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, C_j' \Gamma_x^{(B)}) \tag{10}$$

gilt. ($\Gamma_x^{(B)}$ ist die Funktion aus Satz 2, die zu $\alpha = 0$ und zu dem $(B_j)_{j=1,\ldots,m}$ entsprechenden Randwertproblem (3) gehört.)

Genauer: Unter den angegebenen Voraussetzungen folgt $u \in \tilde{W}_2^{s}(\Omega)$ und $B_j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j$ $(j=1,\ldots,m)$, wobei die Randwertannahme im Sinne von Lemma 1 zu verstehen ist. Wir halten also fest, daß sich für $s > \frac{n}{2}$, $f \in W_2^{s}(\Omega)$ jede schwache Lösung von $Lu = f$ (insbesondere also von $Lu = 0$) und ihre Ableitungen, falls sie in $W_2^{s}(\Omega)$ enthalten sind, in der Gestalt (9) darstellen lassen. Dabei bestehen Freiheiten in der Wahl der "Kerne" $\Gamma_x^{(B)}$, $C_j' \Gamma_x^{(B)}$ sowie (in Abhängigkeit davon) der Randfunktionen. Unter Heranziehung der Darstellungsformel (9), der Ungleichungen (1) und (2), des Lemmas 1, der Sobolevschen Einbettungssätze und der Ungleichung (8) beweist man den folgenden Satz (vgl. /16/).

Satz 4: Unter den in Satz 2 gemachten Voraussetzungen gilt für die Lösung u des Problems (3) für $x \in \bar{\Omega}$ die punktweise Abschätzung

$$|D^{\alpha}u(x)| \leq C\left\{\|f\|_{q+|\alpha|-2m} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{q+|\alpha|-m_j-\frac{1}{2}}\right\}$$

mit einer von x und u unabhängigen Konstanten. Die Funktion $\Gamma_x^{(B)}$ wird als Greensche Funktion des Randwertproblems (3) bezeichnet.

Zum Beweis der folgenden Aussage verweisen wir auf /3/.

Satz 5: Es seien die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Die Greensche Funktion $\Gamma_x^{(B)}(y) =: \Gamma^{(B)}(x,y)$ ist dann für $x \neq y$ eine (bezüglich y) beliebig oft differenzierbare Funktion. Ferner existiert für beliebige α die Ableitung $D_x^{\alpha}\Gamma_x^{(B)}(y)$ bezüglich x, und es gilt

$$D_x^{\alpha}\Gamma_x^{(B)}(y) = \Gamma_{x,\alpha}^{(B)}(y) =: \Gamma_{\alpha}^{(B)}(x,y).$$

Die Abbildung $x \to \Gamma_{x,\alpha}^{(B)}(y)$ ist eine stetige Abbildung auf $\bar{\Omega}$ mit Werten in $\tilde{W}_2^{2m-q-|\alpha|}(\Omega)$.

5. Man kann nun die Frage nach dem punktweisen Randverhalten der durch (10) definierten Funktionen in Abhängigkeit von den Eigenschaften der vorgegebenen Funktionen f und φ_j stellen. Im folgenden wollen wir uns auf die homogene Gleichung (f = 0) beschränken und einige grobe globale Aussagen machen. Dabei betrachten wir zunächst nur Lösungen $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$. Es sei $q=\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Wir fixieren ein System $(B_j)_{j=1,\dots,m}$ von Randbedingungen, das unseren bisherigen Voraussetzungen genügt. Für beliebige α und

$B_j u|_{\partial\Omega} =: \varphi_j$ $(j=1,\dots,m)$ gilt dann offenbar

$$(\varphi_1,\dots,\varphi_m) \in \prod_{j=1}^{m} W_2^{q+|\alpha|-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Nach Satz 2 ist daher u nebst allen Ableitungen für $x \in \Omega$ in der Gestalt

$$D^{\alpha}u(x) = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, (-1)^{|\alpha|} C_j' \Gamma_{x,\alpha}^{(B)}) \tag{11}$$

darstellbar. Wegen der Glattheitseigenschaften von $\Gamma_{x,\alpha}^{(B)}(y)$ für $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ (Satz 5), der Glattheit von φ_j und der Koeffizienten der Randoperatoren C_j' handelt es sich bei (11) um gewöhnliche Oberflächenintegrale, d. h.

$$D^{\alpha}u(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\, \overline{C_j' \Gamma_{\alpha}^{(B)}(x,y)}\, d\sigma(y). \tag{12}$$

Für $\alpha = 0$ wollen wir vorübergehend die Abkürzung

$$\Lambda_j(x,y) := \overline{C_j' \Gamma^{(B)}(x,y)}$$

einführen.

<u>Bemerkung:</u> Das Tupel glatter Dichten

$$(\Lambda_1(x,y), \dots, \Lambda_m(x,y)) \in \prod_{j=1}^{m} C^{\infty}(\partial\Omega)$$

(für festes $x \in \Omega$ als Funktion von y betrachtet) ist durch die Eigenschaft, daß jede Lösung $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ in der Gestalt

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y) \Lambda_j(x,y)\, d\sigma(y)$$

dargestellt wird, eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u> Nehmen wir an, die Darstellung sei auf zweierlei Weisen möglich, sowohl durch

$$(\Lambda_1^{(1)}(x,y),\ \ldots,\Lambda_m^{(1)}(x,y)) \in \prod_{j=1}^{m} C^{\infty}(\partial\Omega)$$

als auch durch

$$(\Lambda_1^{(2)}(x,y),\ \ldots,\Lambda_m^{(2)}(x,y)) \in \prod_{j=1}^{m} C^{\infty}(\partial\Omega).$$

Mit $\Theta_j(x,y) := \Lambda_j^{(1)}(x,y) - \Lambda_j^{(2)}(x,y)$ folgt daraus

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\, \Theta_j(x,y) d\sigma(y) = 0.$$

In diese Gleichung können wir $\varphi_j(y) = \overline{\Theta_j(x,y)}$ $(j=1,\ldots,m)$ einsetzen, da für festes $x \in \Omega$ die Funktionen $\Theta_j(x,y)$ bezüglich $y \in \partial\Omega$ in $C^{\infty}(\partial\Omega)$ enthalten sind. Wir erhalten

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} |\Theta_j(x,y)|^2 d\sigma(y) = 0,$$

d. h. $\Theta_j(x,y) \equiv 0$ für $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$.

Im Anschluß an die klassischen Poisson-Integrale für harmonische oder polyharmonische Funktionen in einer Kugel (vgl. /9/, /4/, /14/) wollen wir die Kerne $\Lambda_j(x,y)$ $(j=1,\ldots,m)$ auch im allgemeinen Fall als Poisson-Kerne bezeichnen.
Durch Vergleich mit den Betrachtungen in /14/ (insbesondere Kap. VIII, Abschnitt 2.2, Formel (5)) ist ersichtlich, daß die voranstehenden Überlegungen im Fall des Dirichlet-Problems als Konkretisierung der verallgemeinerten harmonischen Maße interpretiert werden können. Letztere sind dadurch charakterisiert, daß für alle Lösungen $u \in C^{m-1}(\overline{\Omega}) \cap C^{2m}(\Omega)$ der Gleichung $L(x,D)u = 0$ für $x \in \overline{\Omega}$, $|\alpha| \leq m-1$ die Darstellung

$$D^{\alpha}u(x) = \sum_{|\beta| \leq m-1} \int_{\partial\Omega} h_{\beta}(y)\ d\mu^{\beta}_{x,\alpha}(y) \tag{13}$$

gilt.

Dabei ist $h_\beta = D^\beta u$, und $\mu^\beta_{x,\alpha}$ sind Maße mit dem Träger supp $\mu^\beta_{x,\alpha}$ auf $\partial\Omega$. Die genaue analytische Darstellung der harmonischen Maße in (13) erhalten wir, indem wir die Randfunktionen

$$\varphi_j = B_j u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \nu^{j-1}}\Big|_{\partial\Omega}$$

auf die partiellen Ableitungen $D^\alpha u|_{\partial\Omega}$ $(|\alpha| \le m-1)$ umrechnen und (12) entsprechend umschreiben.

Da für Lösungen $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ offenbar $D^\alpha u(x) \to D^\alpha u|_{\partial\Omega}(y)$ für $x \to y \in \partial\Omega$ und $|\alpha| \le m-1$ gilt, liest man aus der Darstellung (13) ab, daß die durch

$$\mu_{x,\alpha} = (\mu^\beta_{x,\alpha})_{|\beta| \le m-1}$$

definierten Distributionen (der Ordnung m-1) für $x \to y$ schwach gegen $\delta_{x,\alpha}$ konvergieren. Dabei bezeichnet $\delta_{x,\alpha}$ das Vektormaß $\lambda = (\lambda^\beta)_{|\beta| \le m-1}$ mit den Komponenten $\lambda^\beta = \begin{cases} 0 \text{ für } \beta \ne \alpha, \\ \delta_x \text{ für } \beta = \alpha. \end{cases}$

Falls der Operator L^* eine globale Fundamentallösung $E(x,y)$ besitzt, d. h. eine Lösung der Gleichung $L^*E(x,\cdot) = \delta_x$ im ganzen Raum (vgl. /14/), so lassen sich die Funktionen $\Gamma^{(B)}_x(y)$ wie folgt beschreiben: Man bestimmt zu fixiertem $x \in \Omega$ eine Lösung $u_x(y)$ der homogenen Gleichung $L^*u = 0$ derart, daß

$$v(y) := E(x,y) + u_x(y)$$

die Bedingungen

$$B'_j v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (j=1,\dots,m)$$

erfüllt. Dazu hat man $u_x(y)$ aus den Randbedingungen

$$B'_j u_x|_{\partial\Omega} = - B'_j E(x,\cdot)|_{\partial\Omega}$$

zu ermitteln. Da $E(x,y)$ für $x \ne y$ beliebig glatt ist, existiert eine solche Lösung. Somit erhält man

$$\Gamma^{(B)}_x(y) = E(x,y) + u_x(y),$$

und die Poisson-Kerne entstehen durch Anwendung von C'_j auf diese Funktionen.

Wir haben zu Beginn dieses Abschnitts festgestellt, daß jede Lösung der Gleichung $Lu = 0$ mit $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ nebst allen Ableitungen in der Form (12) durch ihre Randwerte

$$B_j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j \in C^{\infty}(\partial\Omega)$$

darstellbar ist. Das folgende Lemma beinhaltet eine gewisse Umkehrung dieses Sachverhaltes.

<u>Lemma 2:</u> Ist ein System von Randfunktionen

$(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \prod_{j=1}^{m} C^{\infty}(\partial\Omega)$ gegeben, so gilt

(i) $\quad u(x) := \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y) \overline{c_j^{\cdot} \Gamma^{(B)}(x,y)} d\sigma(y) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$,

(ii) $\quad D^{\alpha}u(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y) \overline{c_j^{\cdot} \Gamma_{\alpha}^{(B)}(x,y) d\sigma(y)}$

für beliebige $\alpha \geq 0$.

(iii) $Lu = 0$ in Ω.

(iv) $\quad B_j u|_{\partial\Omega}(y) = \varphi_j(y) \quad (j=1,\dots,m)$.

<u>Beweis:</u> Wegen $\varphi_j \in W_2^{q+|\alpha|-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (q=\left[\frac{n}{2}\right]+1)$ für beliebige $\alpha \geq 0$ gilt für die Lösung u des zugehörigen Randwertproblems (3) nach Satz 1 $u \in \widetilde{W}_2^{q+|\alpha|}(\Omega)$ und damit $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Nach Satz 2 und unter Berücksichtigung von Satz 5 ist u mit der in (i) definierten Funktion identisch, und es gelten die entsprechenden Formeln (ii) für die Ableitungen $D^{\alpha}u$. Aus Satz 1 folgt (iii). Daher läßt sich u nach Satz 3 andererseits in der Gestalt

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} B_j u|_{\partial\Omega}(y) \overline{c_j^{\cdot} \Gamma^{(B)}(x,y)} d\sigma(y)$$

schreiben. Mit $\psi_j(y) := \varphi_j(y) - B_j u|_{\partial\Omega}(y)$ gilt also

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \psi_j(y)\, \overline{c_j' \Gamma^{(B)}(x,y)}\, d\sigma(y)$$

für alle $x \in \Omega$. Wegen (7) folgt daraus $\psi_j \equiv 0$ für $j = 1,\ldots,m$, d. h. (iv).

Wir geben jetzt allgemeinere Randwerte

$(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \in \prod_{j=1}^{m} W_2^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ vor und fragen nach dem punktweisen Randverhalten der Funktion

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, c_j' \Gamma_x^{(B)})$$

und ihrer Ableitungen.

<u>Satz 6:</u> Es sei $\varphi_j \in W_2^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ $(j=1,\ldots,m)$ und $s = q + k$ $(q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ k \geq 0$ ganz). Dann gilt

$$u(x) := \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j,\ c_j' \Gamma_x^{(B)}) \in C^k(\overline{\Omega})$$

und

$$B_j u\big|_{\partial\Omega}(y) = \varphi_j(y)$$

für alle $y \in \partial\Omega$ und alle j mit $m_j \leq k$.

<u>Beweis:</u> Wir wählen Folgen $(\varphi_j^{(n)})$ $(j=1,\ldots,m;\ n=1,2,\ldots)$ aus $C^\infty(\Gamma)$ mit

$$\|\varphi_j - \varphi_j^{(n)}\|_{s-m_j-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$. Aus der Definition der Spurräume ist ersichtlich, daß man für beliebige $\varphi \in W_2^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ und zu beliebig fixiertem $C > 1$ stets eine Funktion $u \in W_2^{s-m_j}(\Omega)$ finden kann, für die $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ und

$$C^{-1}\|u\|_{s-m_j} \leq \|\varphi\|_{s-m_j-\frac{1}{2}} \leq C\|u\|_{s-m_j} \quad \text{gilt.}$$

Daraus folgt, daß die Funktionen $\varphi_j^{(n)}$ als Randeinschränkungen $\varphi_j^{(n)} = v_j^{(n)}|_{\partial\Omega}$ von Funktionen $v_j^{(n)} \in W_2^{s-m_j}(\Omega)$ gewählt werden können, die ihrerseits in $W_2^{s-m_j}(\Omega)$ Cauchyfolgen bilden. Für $m_j \leq k$ handelt es sich wegen $s-m_j = q+k-m_j \geq q > \frac{n}{2}$ sogar um Cauchyfolgen in $C(\bar{\Omega})$. Ferner gilt wegen $W_2^{q+k-m_j}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ für $m_j \leq k$ offenbar $W_2^{q+k-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset C(\partial\Omega)$, d. h. $\varphi_j \in C(\partial\Omega)$. Für $m_j \leq k$ können wir also

$$\varphi_j^{(n)} \xrightarrow{\text{glm}} \varphi_j \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{14}$$

annehmen. Wir bilden jetzt

$$u^{(n)}(x) := \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j^{(n)}, C_j' \Gamma_x^{(B)}).$$

Dann gilt nach Lemma 2 die Gleichung $Lu^{(n)} = 0$,

$$D^{\alpha}u^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\partial\Omega} \varphi_j^{(n)}(y)\, \overline{C_j' \Gamma_{\alpha}^{(B)}(x,y)}\, d\sigma(y)$$

für $\alpha \geq 0$ und

$$B_j u^{(n)}|_{\partial\Omega} = \varphi_j^{(n)} \quad (j=1,\dots,m). \tag{15}$$

Für

$$u(x) - u^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j - \varphi_j^{(n)}, C_j' \Gamma_x^{(B)})$$

und $|\alpha| \leq k$ folgt nach Satz 4

$$|D^{\alpha}(u(x) - u^{(n)}(x))| \leq C \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j - \varphi_j^{(n)}\|_{s-m_j-\frac{1}{2}} \to 0 \tag{16}$$

für $n \to \infty$ unabhängig von $x \in \bar{\Omega}$, d. h. $u \in C^k(\bar{\Omega})$.
Als nächstes zeigen wir

$$\left| B_j u|_{\partial\Omega}(y) - B_j u^{(n)}|_{\partial\Omega}(y) \right| \to 0 \tag{17}$$

für $n \to \infty$, $m_j \leq k$ und $y \in \partial\Omega$. Dazu denken wir uns die Koeffizienten der Randoperatoren stetig in das Innere des Gebietes Ω fortgesetzt. Wegen $u \in C^k(\overline{\Omega})$ und (16) gilt für $m_j \leq k$

$$B_j u^{(n)}(x) \xrightarrow{glm} B_j u(x) \text{ auf } \overline{\Omega}, \text{ d. h.}$$

$$|B_j u(x) - B_j u^{(n)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n > n_0(\varepsilon) \text{ und alle } x \in \Omega$$

sowie

$$|B_j u(x) - B_j u(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } x \in \Omega \text{ mit } |x - y| < \delta(\varepsilon).$$

Für $n > n_0(\varepsilon)$ finden wir ferner ein $x \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ und

$$|B_j u^{(n)}(x) - B_j u^{(n)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Insgesamt ergibt sich daraus

$$|B_j u(y) - B_j u^{(n)}(y)| \leq |B_j u(y) - B_j u(x)|$$

$$+ |B_j u(x) - B_j u^{(n)}(x)| + |B_j u^{(n)}(x) - B_j u^{(n)}(y)| < \varepsilon$$

für $n > n_0(\varepsilon)$ und $m_j \leq k$.

Schließlich folgt für diese j weiter

$$|B_j u(y) - \varphi_j(y)| \leq |B_j u(y) - B_j u^{(n)}(y)|$$

$$+ |B_j u^{(n)}(y) - \varphi_j^{(n)}(y)| + |\varphi_j^{(n)}(y) - \varphi_j(y)|.$$

Die rechte Seite strebt wegen (14), (15) und (17) für $n \to \infty$ gegen Null. Das bedeutet aber

$$B_j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j \text{ für alle } j \text{ mit } m_j \leq k.$$

Literatur

/1/ Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. Comm. Pure Appl. Math. 12, 623 - 727 (1959)

/2/ Березанский, Ю. М.: Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев 1965

/3/ Березанский, Ю. М., и Ройтберг, Я. А.: Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач. Укр. матем. ж. <u>19</u>, 3 - 32 (1967)

/4/ Edenhofer, J.: Eine Integraldarstellung der Lösung der Dirichletschen Aufgabe bei der Polypotentialgleichung im Falle einer Hyperkugel. Math. Nachr. <u>69</u>, 149 - 162 (1975)

/5/ Gonzâles, L., Keller, E., und Wildenhain, G.: Über das Randverhalten des Poisson-Integrals der polyharmonischen Gleichung. Math. Nachr. <u>95</u>, 157 - 164 (1980)

/6/ Gonzâles, L., y Wildenhain, G.: Sobre el limite radial de Funciones Poliarmónicas en una bola en R^n. Revista Sociedad Cubana de Matematicos, Habana, Cuba (en publicación)

/7/ Gonzâles, L. y Wildenhain, G.: Sobre el limite no tangencial de Funciones Poliarmónicos en una bola y el Teorema de Fatou. Revista Sociedad Cubana de Matematicos, Habana, Cuba (en publicación)

/8/ Gonzâles, L. y Wildenhain, G.: Sobre el comportamiento en la frontera de Funciones Poliarmónicos. Limite tangencial. Revista Sociedad Cubana de Matematicos, Habana, Cuba (en publicación)

/9/ Helms, L. L.: Introduction to potential theory. New York - London - Sydney - Toronto 1969

/10/ John, F.: Plane waves and spherical means. New York 1955

/11/ Keller, E.: Über das Randverhalten von Poisson-Integralen bei elliptischen Differentialgleichungen. Diss. (A), Wilhelm-Pieck-Universität, Rostock 1978

/12/ Lions, J. L., et Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogenes et applications, Vol. I. Paris 1968

/13/ Ройтберг, Я. А.: О граничных значениях обобщенных решений эллиптических уравнений. Матам. сб. 86 (I28), 248 - 276 (I97I)

/14/ Schulze, B. W., und Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin 1977, Basel und Stuttgart 1977

/15/ Stein, E. M.: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton, New Jersey 1970

/16/ Wildenhain, G.: Über punktweise Abschätzungen von Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Rostock. Math. Kolloq. 16, 45 - 57 (1981)

eingegangen: 12. 05. 1981

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Günther Wildenhain
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 33 - 46 (1981) 31B35
35G05

Uwe Hamann

Hebbarkeit von Singularitäten bezüglich gewichteter Sobolev-Räume

In der vorliegenden Note wird auf folgende Probleme eingegangen:
In welchen gewichteten Sobolev-Räumen können Potentiale liegen, die mit der Fundamentallösung eines elliptischen Differentialoperators und mit einem auf einer kompakten Menge $K \subset R^n$ der Dimension d konzentrierten Maß gebildet werden?
Weiterhin wird die Frage der Hebbarkeit sowie der verallgemeinerten Hebbarkeit von Singularitäten bezüglich gewichteter Sobolev-Räume für beliebige Differentialoperatoren, deren Koeffizienten sich auf einer kompakten Menge $K \subset \Omega$ auch singulär verhalten dürfen, untersucht.

0. Bezeichnungen

Es bezeichne R^n den reellen n-dimensionalen euklidischen Raum, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ Punkte des R^n, $|x-y|$ den euklidischen Abstand der Punkte x und y sowie $d(x,B)$ den euklidischen Abstand von x zu einer Punktmenge $B \subset R^n$. Für $\varepsilon > 0$ sei $B_\varepsilon = \{x \in R^n : d(x,B) < \varepsilon\}$ eine ε-Umgebung von B. Für einen n-dimensionalen Multiindex $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ($\alpha_i \geq 0$, ganz) sei

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \text{ und } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Mit Ω bezeichnen wir stets eine offene Menge im R^n.
$H_d(B)$ sei das d-dimensionale Hausdorff-Maß der Punktmenge $B \subset R^n$ (vgl. z. B. /5/ S. 332).
Ist λ das n-dimensionale Lebesgue-Maß, so bezeichnet man mit $M^d(B) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{d-n}\lambda(B_\varepsilon)$ den oberen d-dimensionalen Minkowski-Inhalt. Auf kompakten Teilmengen K glatter d-dimensionaler Flä-

chen gilt $M^d(K) = c_d H_d(K)$ mit einer nur von d abhängigen Konstanten c_d. Im allgemeinen ist jedoch $c_d H_d(B) \leq M^d(B)$ (vgl. /3/). $\mathfrak{M}_0$ sei die Menge aller Radon-Maße (kurz: Maße) im R^n mit kompaktem Träger und $\mathfrak{M}^+(K)$ die Menge der nichtnegativen Maße, deren Träger in der kompakten Menge K enthalten sind.

Für eine relativ abgeschlossene Teilmenge $A \subset \Omega$ betrachten wir die gewichteten Sobolev-Räume

$$W^l_{p,loc}(\Omega, A, r_\alpha) \qquad (1 < p < \infty,\ l \geq 0 \text{ ganz},\ r_\alpha \text{ reell}).$$

Es sei $u \in W^l_{p,loc}(\Omega, A, r_\alpha)$, falls für alle offenen Mengen $\omega \subset\subset \Omega$

$$\|u\|_{W^l_p(\omega, A, r_\alpha)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_\omega |D^\alpha u(x)|^p d(x,A)^{r_\alpha} dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ gilt.}$$

Die Gewichte sind also Potenzen der Abstandsfunktion d(x,A).

Es gilt: Aus $s_\alpha \leq r_\alpha$ $(|\alpha| \leq l)$ folgt

$W^l_{p,loc}(\Omega, A, s_\alpha) \subseteq W^l_{p,loc}(\Omega, A, r_\alpha)$ (vgl. /4/, S. 47).

1. Potentiale aus $W^l_{p,loc}(R^n, K, r_\alpha)$

Es sei $L(x;D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ $(a_\alpha \in C^\infty(R^n))$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung m. Sowohl L(x,D) als auch der formal adjungierte Operator $L^*(x,D)$ sollen die Eindeutigkeitseigenschaft im Kleinen besitzen (vgl. /5/, S. 169). Es existiert dann eine lokal integrierbare bireguläre Fundamentallösung E(x,y). Bei Differentialoperatoren mit konstantanten Koeffizienten L(D) bezeichnet F(x) die Fundamentallösung und F(x-y) spielt dann die Rolle von E(x,y). E(x,y) ist für $x \neq y$ nach beiden Variablen beliebig oft differenzierbar. Über die Singularität bei x = y läßt sich die folgende Aussage machen (s. /5/, S. 228):

<u>Lemma 1:</u> Zu jeder kompakten Menge $Q \subset R^n$ und allen Multiindizes α und β existiert eine Konstante $C = C(Q,\alpha,\beta) < \infty$, so daß die

Ungleichung

$$|D_x^\alpha D_y^\beta E(x,y)| \leq C\,|x-y|^{m-n-|\alpha|-|\beta|} \cdot (1+|\ln|x-y||)$$

für alle $x,y \in Q$ gilt. Der logarithmische Term kann weggelassen werden, wenn n ungerade oder n gerade und $m-n-|\alpha|-|\beta| < 0$ ist.

Mit den Funktionen $D_x^\alpha D_y^\beta E(x,y)$ und einem Maß $\mu \in \mathfrak{M}_o$ bilden wir die Potentiale

$$E_\alpha^\beta \mu(x) = \int D_x^\alpha D_y^\beta E(x,y)\,d\mu(y),\quad E^\beta \mu(x) = \int D_y^\beta E(x,y)\,d\mu(y) \text{ und}$$

$$E\mu(x) = \int E(x,y)\,d\mu(y).$$

Die folgenden Lemmata sind in /1/ bewiesen worden.

<u>Lemma 2:</u> Für jedes $\mu \in \mathfrak{M}_o$ und für $|\alpha|+|\beta| \leq m-1$ gilt im distributionentheoretischen Sinne $D^\alpha E^\beta \mu = E_\alpha^\beta \mu$.

<u>Lemma 3:</u> Ist $\mu \in \mathfrak{M}_o$ ein beliebiges Maß und ß ein Multiindex mit $|\beta| \leq m-1$, dann gilt im distributionentheoretischen Sinne $L(x,D)E^\beta \mu = (-1)^{|\beta|} \cdot D^\beta \mu$.

Ist E(x,y) die Fundamentallösung eines Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten, dann gelten beide Lemmata auch ohne die Einschränkung $|\alpha|+|\beta| \leq m-1$ bzw. $|\beta| \leq m-1$.

<u>Lemma 4:</u> Es sei $0 \leq d < n$ eine reelle Zahl, $K \subset R^n$ eine kompakte Menge mit $H_d(K) > 0$ und $s > d$ eine reelle Zahl. Dann existiert ein nichttriviales Maß $\mu \in \mathfrak{M}^+(K)$ und eine nur von s und d abhängige Konstante C, so daß für alle $x \in R^n$

$$\int |x-y|^{-s}\,d\mu(y) \leq C d(x,K)^{d-s} \text{ gilt.}$$

Der Beweis des folgenden Lemmas ist im Beweis von Theorem 2.5 aus /3/ enthalten.

<u>Lemma 5:</u> Es sei $K \subset R^n$ eine kompakte Menge mit $M^d(K) < \infty$ ($0 \leq d < n$, reell) und $r > d-n$ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$\int_{K_\varepsilon} d(x,K)^r\,dx \leq C \cdot \varepsilon^{n-d+r}$$

mit einer von $\varepsilon > 0$ unabhängigen Konstanten C.

Es seien im folgenden p und q reelle Zahlen mit $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Satz 1: Es sei $K \subset R^n$ eine kompakte Menge mit $H_d(K) > 0$ und $M^d(K) < \infty$ ($0 \leq d < n$, reell). Weiterhin sei $|\beta| \leq m-1-l$. Dann existiert ein nichttriviales Maß $\mu \in \mathfrak{M}^+(K)$ mit $E^\beta \mu \in W^l_{p,loc}(R^n, K, r_\alpha)$, sofern

$$r_\alpha > (n-d)\frac{p}{q} + (|\alpha| + |\beta| - m)p \text{ im Falle } |\alpha| > m-n+d-|\beta| \text{ und}$$

$$r_\alpha > d-n \qquad \text{im Falle } |\alpha| \leq m-n+d-|\beta| \text{ gilt.}$$

Bei Fundamentallösungen von Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten ist die Einschränkung $|\beta| \leq m-1-l$ nicht notwendig.

Beweis: 1. Wir zeigen zunächst $E^\beta_\alpha \mu \in L_{p,loc}(R^n, K, r_\alpha)$. Dazu reicht es aus zu beweisen, daß $\int_{K_1} |E^\beta_\alpha \mu(x)|^p d(x,K)^{r_\alpha} dx$ existiert, da $E^\beta_\alpha \mu$ außerhalb von K beliebig oft differenzierbar ist. Die Existenz dieses Integrals wird gezeigt, indem wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{K_\varepsilon} |E^\beta_\alpha \mu(x)|^p d(x,K)^{r_\alpha} dx = 0 \text{ beweisen.}$$

2. Es sei $|\alpha| > m-n+d-|\beta|$.
Aus $H_d(K) > 0$ folgt die Existenz eines nichttrivialen Maßes $\mu \in \mathfrak{M}^+(K)$ mit

$$|E^\beta_\alpha \mu(x)| \leq C \cdot \int |x-y|^{m-n-|\alpha|-|\beta|} d\mu(y) \leq C \cdot d(x,K)^{m-n-|\alpha|-|\beta|+d}$$

für $x \in K_1$ (die erste Ungleichung erhält man aus Lemma 1, die zweite aus Lemma 4). Aus $M^d(K) < \infty$ ergibt sich für $0 < \varepsilon \leq 1$ (s. Lemma 5)

$$\int_{K_\varepsilon} |E^\beta_\alpha \mu(x)|^p d(x,K)^{r_\alpha} dx \leq C \cdot \int_{K_\varepsilon} d(x,K)^{(m-n-|\alpha|-|\beta|+d)p+r_\alpha} dx \leq$$

$$\leq C \cdot \varepsilon^{(m-n+d-|\alpha|-|\beta|)p+r_\alpha+n-d}.$$

Für $(m-n+d-|\alpha|-|\beta|)p+r_\alpha+n-d>0$ gilt also

$E_\alpha^\beta \mu(x) \in L_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$, falls $|\alpha|>m-n+d-|\beta|$ ist.

3. Es sei $|\alpha|<m-n+d-|\beta|$.

$a>0$ sei die Zahl, für welche $|\alpha|=m-n+d-|\beta|-2a$ gilt. Aus Lemma 1 folgt $|D_x^\alpha D_y^\beta E(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d-a}}$

(ausgenutzt wurde $|\ln|x-y|| \leq \frac{C}{|x-y|^a}$). Aus $H_d(K)>0$ ergibt sich $E_\alpha^\beta \mu \in C(R^n)$ (s. /1/, Satz 1), d. h. insbesondere $|E_\alpha^\beta \mu(x)| \leq C$ für $x \in K_1$. Man erhält

$\int_{K_\varepsilon} |E_\alpha^\beta \mu(x)|^p d(x,K)^{r_\alpha} dx \leq C^p \cdot \varepsilon^{r_\alpha+n-d}$. Für $r_\alpha > d-n$ ist also

$E_\alpha^\beta \mu(x) \in L_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$.

4. Es sei $|\alpha|=m-n+d-|\beta|$.

Dann gilt $|D_x^\alpha D_y^\beta E(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{d+a}}$ für jedes reelle $a>0$.

Daraus ergibt sich $|E_\alpha^\beta \mu(x)| \leq C \cdot d(x,K)^{-a}$. Weiter erhält man aus Lemma 5

$$\int_{K_\varepsilon} |E_\alpha^\beta \mu(x)|^p d(x,K)^{r_\alpha} dx \leq C \cdot \varepsilon^{-ap+r_\alpha+n-d}.$$

Für $r_\alpha > d-n+ap$ strebt das Integral gegen Null. Da $a>0$ beliebig klein sein kann, ergibt sich die Bedingung $r_\alpha > d-n$.

5. Es gilt also $E_\alpha^\beta \mu \in L_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$ für $|\alpha| \leq 1$ mit den entsprechenden r_α. Aus Lemma 2 erhält man schließlich
$E^\beta \mu \in W^1_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$.

Es stellt sich nun die Frage, ob die r_α eventuell noch etwas kleiner sein dürfen. Unter anderem gehen wir jetzt darauf ein.

2. Hebbarkeit von Singularitäten

Es sei $P = P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(x) D^\alpha$ ein beliebiger linearer Differentialoperator und A eine relativ abgeschlossene Teilmenge von Ω. u gehöre einer bestimmten Funktionenklasse an, und es gelte $Pu = 0$ in $\Omega \setminus A$. Wenn daraus $Pu \equiv 0$ in ganz Ω folgt, so sagt man, daß A für diese Funktionenklasse eine hebbare Singularität ist.

Über P(x,D) setzen wir folgendes voraus:

Die Koeffizienten b_α seien aus $C^\infty(\Omega \setminus A)$. Für $0 \leq l \leq m-1$ (l ganz) sei P(x,D) folgendermaßen zerlegt:

$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq l} Q_\alpha(x,D) D^\alpha$. Die Ordnung der Differentialoperatoren $Q_\alpha(x,D)$ bezeichnen wir mit o_α. Es kann offenbar $o_\alpha \leq m-1$

für alle α angenommen werden. $Q^*_\alpha(x,D) = \sum_{|\beta| \leq o_\alpha} c^*_{\alpha,\beta}(x) D^\beta$ seien

die zu $Q_\alpha(x,D)$ formal adjungierten Operatoren. Die Koeffizienten $c^*_{\alpha,\beta}$ sollen der folgenden Bedingung genügen:

Zu jeder kompakten Menge $Q \subset \Omega$ existiere eine Konstante $C = C(Q)$, so daß

$$|c^*_{\alpha,\beta}(x)| \leq C\, d(x,A)^{s_{\alpha,\beta}}$$

für alle $x \in Q$ gilt ($s_{\alpha,\beta}$ reell).

Es ist also zugelassen, daß die Koeffizienten $b_\alpha(x)$ sich auf A singulär verhalten oder verschwinden können.

<u>Lemma 6:</u> Es sei $K \subset R^n$ eine kompakte Menge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(R^n)$ mit supp $\varphi_\varepsilon \subset K_\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ in $K_{\frac{\varepsilon}{6}}$ und $|D^\alpha \varphi_\varepsilon(x)| \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$ für alle $x \in R^n$, wobei C_α eine von ε unabhängige Konstante ist.

Den Beweis findet man in /3/.

<u>Satz 2:</u> Es sei $u \in W^1_{p,loc}(\Omega, A, r_\alpha)$ eine Funktion mit $Pu = 0$ in $\Omega \setminus A$.

Weiter gelte $M^d(K) < \infty$ $(0 \leq d < n)$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq A$. Ist für $|\alpha| \leq 1$ und $0 \neq |\beta| \leq o_\alpha$

$$s_{\alpha,\beta} - |\beta| - \frac{1}{p} r_\alpha + \frac{n-d}{q} \geq 0$$

und für $|\alpha| \leq 1$ und $|\beta| = 0$

$$s_{\alpha,\beta} - \frac{1}{p} r_\alpha + \frac{n-d}{q} > 0,$$

so gilt $Pu = 0$ in ganz Ω.

<u>Beweis:</u> 1. Wir zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen $(Pu, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist. Da dieses im Falle $\operatorname{supp} \varphi \cap A = \emptyset$ trivialerweise gilt, sei im folgenden $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Funktion mit $\operatorname{supp} \varphi \cap A = K \neq \emptyset$. Zur Abkürzung setzen wir $\operatorname{supp} \varphi = S$. φ_ε sei die im Lemma 6 für K angegebene Funktion. Es gilt dann $(Pu, \varphi) = (Pu, \varphi \cdot \varphi_\varepsilon)$ und wir zeigen

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (Pu, \varphi \cdot \varphi_\varepsilon) = 0.$$

2. Es sei $r > 0$ eine reelle Zahl mit $r < d(K, \partial\Omega)$. Setzen wir $\tilde{K} = \overline{K}_r \cap A$, so läßt sich zeigen, daß $d(x, \tilde{K}) = d(x, A)$ für $x \in K_{\frac{r}{2}}$ gilt.

3. Es gilt

$$|(Pu, \varphi)| = |(Pu, \varphi \cdot \varphi_\varepsilon)| \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} |(Q_\alpha D^\alpha u, \varphi \cdot \varphi_\varepsilon)|$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq 1} |(D^\alpha u, Q_\alpha^*(\varphi \cdot \varphi_\varepsilon))|$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{|\beta| \leq o_\alpha} \left| \int_{S \cap K_\varepsilon} D^\alpha u(x) \cdot c_{\alpha,\beta}^*(x) \cdot D^\beta(\varphi \cdot \varphi_\varepsilon)(x) dx \right|$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{|\beta| \leq o_\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left| \int_{S \cap K_\varepsilon} D^\alpha u(x) \cdot d(x,A)^{\frac{r_\alpha}{p}} \cdot c_{\alpha,\beta}^*(x) \cdot D^\gamma \varphi(x) D^{\beta-\gamma} \varphi_\varepsilon(x) \right.$$

$$\left. \cdot\, d(x,A)^{-\frac{r_\alpha}{p}} dx \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{|\beta| \leq o_\alpha} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left(\int_{S \cap K_\varepsilon} |D^\alpha u(x)|^p d(x,A)^{r_\alpha} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\Big(\int\limits_{S\cap K_\varepsilon} |c^*_{\alpha,\beta}(x)|^q\cdot|D^\gamma\varphi(x)|^q\cdot|D^{\beta-\gamma}\varphi_\varepsilon(x)|^q\cdot d(x,A)^{-\frac{q}{p}\cdot r_\alpha}dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

4. Aus $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{d-n}\cdot\lambda(K_\varepsilon) = M^d(K) < \infty$ und $d < n$ folgt

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \lambda(K_\varepsilon) = 0$ und damit $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{S\cap K_\varepsilon} |D^\alpha u(x)|^p\cdot d(x,A)^{r_\alpha}\,dx = 0$

für $|\alpha| \leq 1$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Terme

$$\int\limits_{S\cap K_\varepsilon} |c^*_{\alpha,\beta}(x)|^q\,|D^\gamma\varphi(x)|^q\,|D^{\beta-\gamma}\varphi_\varepsilon(x)|^q\, d(x,A)^{-\frac{q}{p}r_\alpha}\,dx \qquad (1)$$

für $\varepsilon\to 0$ und $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq o_\alpha$ und $\gamma \leq \beta$ beschränkt bleiben.

5. Für $0 < \varepsilon \leq \min(1,\frac{r}{2})$ gilt

$$\int\limits_{S\cap K_\varepsilon} |c^*_{\alpha,\beta}(x)|^q\cdot|D^\gamma\varphi(x)|^q\cdot|D^{\beta-\gamma}\varphi_\varepsilon(x)|^q\cdot d(x,A)^{-\frac{q}{p}r_\alpha}\,dx$$

$$\leq C\cdot\int\limits_{K_\varepsilon} d(x,A)^{qs_{\alpha,\beta}-\frac{q}{p}\cdot r_\alpha}\cdot\varepsilon^{(|\gamma|-|\beta|)q}\,dx$$

$$\leq C\cdot\varepsilon^{-|\beta|q}\int\limits_{K_\varepsilon} d(x,\tilde{K})^{qs_{\alpha,\beta}-\frac{q}{p}r_\alpha}\,dx\ .$$

$$\leq C\cdot\varepsilon^{-|\beta|q}\int\limits_{\tilde{K}_\varepsilon} d(x,\tilde{K})^{qs_{\alpha,\beta}-\frac{q}{p}\cdot r_\alpha}\,dx \leq C\cdot\varepsilon^{-|\beta|q}\cdot\varepsilon^{qs_{\alpha,\beta}-\frac{q}{p}\cdot r_\alpha+n-d}.$$

Das letzte Ungleichheitszeichen folgt aus Lemma 5 und es gilt, wenn $qs_{\alpha,\beta} - \frac{q}{p}r_\alpha + n-d > 0$ ist. Die Terme (1) bleiben also beschränkt, wenn für $|\alpha| \leq 1$ und $0 \neq |\beta| \leq o_\alpha$

$$q(s_{\alpha,\beta} - |\beta| - \tfrac{1}{p}r_\alpha + \tfrac{n-d}{q}) \geq 0$$

sowie für $|\alpha| \leq 1$ und $|\beta| = 0$

$$q(s_{\alpha,\beta} - \tfrac{1}{p}r_\alpha + \tfrac{n-d}{q}) > 0 \text{ ist.}$$

6. Es gilt also $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} |(Pu, \varphi \cdot \varphi_\varepsilon)| = 0$, woraus $(Pu, \varphi) = 0$ folgt.

Wir betrachten jetzt speziell solche Differentialoperatoren $P(x,D)$, für die die Koeffizienten b_α aus $C^\infty(\Omega)$ sind. Dann ist $s_{\alpha,\beta} = 0$ für $|\alpha| \le 1$ und $|\beta| \le o_\alpha$. Aus Satz 2 ergibt sich, daß Hebbarkeit vorliegt, wenn $-o_\alpha - \frac{1}{p}r_\alpha + \frac{n-d}{q} \ge 0$ für solche α mit $o_\alpha > 0$ und $-\frac{1}{p}r_\alpha + \frac{n-d}{q} > 0$ für jene α mit $o_\alpha = 0$ gilt. Jeder Differentialoperator $P(x,D)$ läßt sich beispielsweise so zerlegen, daß

$o_\alpha \le m-1-(1-|\alpha|) = m-2l+|\alpha|$ für $m-2l+|\alpha| > 0$

und

$o_\alpha = 0$ für $m-2l+|\alpha| \le 0$ gilt.

Aus Satz 2 erhält man dann die

<u>Folgerung:</u> Es gelte $M^d(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq A$. Dann ist A für Differentialoperatoren $P(x,D)$ mit Koeffizienten aus $C^\infty(\Omega)$ bezüglich $W^l_{p,loc}(\Omega, A, r_\alpha)$ eine hebbare Singularität, wenn

$r_\alpha \le (n-d)\frac{p}{q} - (m-2l+|\alpha|)p$ für $|\alpha| > 2l-m$

und

$r_\alpha < (n-d)\frac{p}{q}$ für $|\alpha| \le 2l-m$ gilt.

Für $|\alpha| = 1$ muß also insbesondere $r_\alpha \le (n-d)\frac{p}{q} - (m-1)p$ gelten. Ist aber $r_\alpha > (n-d)\frac{p}{q} - (m-1)p$ für $|\alpha| = 1$ und weiterhin $l > m-n+d$, so braucht keine Hebbarkeit vorzuliegen. Es existiert dann nämlich nach Satz 1 für elliptische Differentialoperatoren $L(x,D)$ ein Potential $E\mu \in W^l_{p,loc}(R^n, K, r_\alpha)$ mit $\operatorname{supp}\mu \subseteq K$, für das $LE\mu = 0$ in $R^n \setminus K$, aber $LE\mu = \mu \ne 0$ im ganzen R^n gilt. (Vorausgesetzt werden muß natürlich, daß für die anderen r_α die Bedingungen aus Satz 1 gelten.)

Umgekehrt braucht es auch keine Potentiale $E\mu$ aus $W^l_{p,loc}(R^n, K, r_\alpha)$ zu geben, wenn $r_\alpha \le (n-d)\frac{p}{q} + (l-m)$ für $|\alpha| \le 1$ ist. Gelten nämlich für die anderen r_α die Einschränkungen aus der Folgerung zum Satz 2, so würde sich aus $E\mu \in W^1_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$ wegen $LE\mu = 0$ in $R^n \setminus K$ nach eben dieser Folgerung und Lemma 3 $LE\mu = \mu = 0$ ergeben.

3. Verallgemeinerte Hebbarkeit von Singularitäten

Gehört u einer bestimmten Funktionenklasse an, gilt $Pu = 0$ in $\Omega \setminus A$ und ist A keine hebbare Singularität für diese Funktionenklasse, so ist Pu eine auf A konzentrierte Distribution. In solch einem Fall wollen wir das Verhalten von Pu auf A näher charakterisieren.

Definition: 1. $C_k(A,\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega): D^\alpha\varphi|_A = 0 \text{ für } |\alpha| \leq k\}$
2. $N_k(A,\Omega) = \{f \in D'(\Omega): (f,\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_k(A,\Omega)\}$.

Unser Anliegen besteht nun darin, im Falle der Nichthebbarkeit der Singularität eine möglichst kleine ganze Zahl k derart anzugeben, daß $Pu \in N_k(A,\Omega)$ gefolgert werden kann. Wenn also $(Pu,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_k(A,\Omega)$ mit einem gewissen k gilt, wollen wir sagen, daß dann A eine verallgemeinerte hebbare Singularität der Ordnung k ist.

In Spezialfällen ist ohne Schwierigkeiten eine befriedigende Charakterisierung der Elemente von $N_k(A,\Omega)$ möglich. Es gilt beispiesweise im Fall $A = \{z_o\}$ $(z_o \in \Omega)$

$$N_k(\{z_o\},\Omega) = \{f: f = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha \delta_{z_o},\ c_\alpha \in R^1\}.$$

Weiter kann man folgendes zeigen:
Ist $1 \leq s \leq n-1$ eine ganze Zahl, $\beta = (0,\dots,0,\beta_{s+1},\dots,\beta_n)$ ein Multiindex mit $|\beta| \geq 1$, $0 \neq \mu \in \mathfrak{M}(K)$ ein Maß sowie $K \subset R^s \times \{0\}$, dann gilt

$$D^\beta\mu \notin N_{|\beta|-1}(K,R^n). \tag{2}$$

Lemma 7: (s. /2/) Es sei $K \subseteq A$ eine beliebige kompakte Menge. Dann existiert zu jedem $\varphi \in C_k(A,\Omega)$ eine von $x \in R^n$ unabhängige Konstante C, so daß

$|D^{\beta}\varphi(x)| \leq C\cdot d(x,K)^{k+1-|\beta|}$ für alle $x \in K_1$ gilt.

<u>Satz 3:</u> Es sei $u \in W^{1}_{p,loc}(\Omega, A, r_{\alpha})$ eine Funktion mit $Pu = 0$ in $\Omega \setminus A$ und für alle kompakten Mengen $K \subseteq A$ gelte $M^{d}(K) < \infty$. Ist für $|\alpha| \leq 1$ und $|\beta| \leq k+1$

$$s_{\alpha,\beta} + k+1-|\beta| - \frac{1}{p}r_{\alpha} + \frac{n-d}{q} > 0$$

sowie für $|\alpha| \leq 1$ und $|\beta| > k+1$

$$s_{\alpha,\beta} + k+1-|\beta| - \frac{1}{p}r_{\alpha} + \frac{n-d}{q} \geq 0,$$

dann gilt $Pu \in N_k(A,\Omega)$.

<u>Beweis:</u> 1. Es ist $(Pu,\varphi) = 0$ für jedes $\varphi \in C_k(A,\Omega)$ zu beweisen. Der erste Teil des Beweises verläuft genauso wie die Punkte 2., 3. und 4. des Beweises von Satz 2. Es ist noch zu zeigen, daß die Terme (1) unter den gemachten Voraussetzungen für $\varepsilon \longrightarrow 0+$ beschränkt bleiben.

2. Es sei zunächst $|\beta| \leq k+1$. Aus Lemma 7 ergibt sich

$$|D^{\gamma}\varphi(x)| \leq C\cdot d(x,K)^{k+1-|\gamma|}.$$

Man erhält dann für $0 < \varepsilon \leq \min(1,\frac{r}{2})$

$$\int\limits_{S\cap K_{\varepsilon}} |c^{*}_{\alpha,\beta}(x)|^{q}\cdot |D^{\gamma}\varphi(x)|^{q}\cdot |D^{\beta-\gamma}\varphi_{\varepsilon}(x)|^{q}\cdot d(x,A)^{-\frac{q}{p}r_{\alpha}}dx$$

$$\leq C\int\limits_{\tilde{K}_{\varepsilon}} d(x,\tilde{K})^{q(s_{\alpha,\beta}+k+1-|\gamma|)}\cdot \varepsilon^{(|\gamma|-|\beta|)q} d(x,\tilde{K})^{-\frac{q}{p}r_{\alpha}}dx$$

$$\leq C\varepsilon^{(|\gamma|-|\beta|)q}\cdot \varepsilon^{q(s_{\alpha,\beta}+k+1-|\gamma|-\frac{1}{p}r_{\alpha})+n-d}.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus Lemma 5 und gilt für $q(s_{\alpha,\beta}+k+1-|\gamma|-\frac{1}{p}r_{\alpha}) + n-d > 0$. Die Ungleichung muß für alle γ mit $\gamma \leq \beta$ gelten. Man erhält also die Bedingung $q(s_{\alpha,\beta}+k+1-|\beta|-\frac{1}{p}r_{\alpha}) + n-d > 0$.

3. Es sei jetzt $|\beta| > k+1$. Aus Lemma 7 kann man $|D^{\gamma}\varphi(x)| \leq C\cdot\varepsilon^{k+1-|\gamma|}$ folgern. Man erhält für $0 < \varepsilon \leq \min(1,\frac{r}{2})$

$$\int\limits_{S\cap K_\varepsilon} |c^*_{\alpha,\beta}(x)|^q \cdot |D^\gamma \varphi(x)|^q \cdot |D^{\beta-\gamma}\varphi_\varepsilon(x)|^q \cdot d(x,A)^{-\frac{q}{p}r_\alpha}\,dx$$

$$\leq C\cdot\varepsilon^{(k+1-|\gamma|)\cdot q}\cdot\varepsilon^{(|\gamma|-|\beta|)q}\int\limits_{\tilde{K}_\varepsilon} d(x,\tilde{K})^{q(s_{\alpha,\beta}-\frac{1}{p}\cdot r_\alpha)}\,dx$$

$$\leq C\cdot\varepsilon^{q(k+1-|\beta|)}\cdot\varepsilon^{q(s_{\alpha,\beta}-\frac{1}{p}r_\alpha)+n-d} \quad \text{für } q(s_{\alpha,\beta}-\tfrac{1}{p}r_\alpha)+n-d > 0.$$

Somit erhalten wir die Bedingung

$$q(s_{\alpha,\beta}+k+1-|\beta|-\tfrac{1}{p}r_\alpha)+n-d \geq 0.$$

Betrachten wir jetzt wieder Differentialoperatoren $P(x,D)$ mit Koeffizienten aus $C^\infty(\Omega)$, die zerlegt sind wie im Anschluß an den Beweis von Satz 2, so erhält man die

<u>Folgerung:</u> Es gelte $M^d(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq A$. Dann ist A für Differentialoperatoren $P(x,D)$ mit Koeffizienten aus $C^\infty(\Omega)$ bezüglich $W^1_{p,loc}(\Omega,A,r_\alpha)$ eine verallgemeinerte Singularität der Ordnung k, wenn

$$r_\alpha \leq (n-d)\frac{p}{q} + p(k+1-m+2l-|\alpha|) \quad \text{für} \quad |\alpha| > k+1-m+2l, \tag{3}$$

$$r_\alpha < (n-d)\frac{p}{q} + p(k+1-m+2l-|\alpha|) \quad \text{für} \quad 2l-m < |\alpha| \leq k+1-m+2l, \tag{4}$$

$$r_\alpha < (n-d)\frac{p}{q} + p(k+1) \quad \text{für} \quad 2l-m \geq |\alpha| \tag{5}$$

gilt.

Für $|\alpha| = 1$ muß also insbesondere $r_\alpha \leq (n-d)\frac{p}{q} + (k+1-m+l)p$ (für $k+1 < m-l$) bzw. $r_\alpha < (n-d)\frac{p}{q} + (k+1-m+l)p$ (für $k+1 \geq m-l$) gelten. Ist aber $r_\alpha > (n-d)\frac{p}{q} + (k+1-m+l)p$ für $|\alpha| = 1$ und weiterhin $l > m-n+d-(k+1)$, so braucht keine verallgemeinerte Singularität der Ordnung k vorzuliegen. Dieses ergibt sich wie folgt aus Satz 1:

Es sei $K \subset R^s \times \{0\}$ $(1 \leq s \leq n-1)$ eine kompakte Menge mit $H_d(K) > 0$ und $M^d(K) < \infty$. β sei ein Multiindex mit $|\beta| = k+1$ und

$\beta = (0,\dots,0, \beta_{s+1},\dots,\beta_n)$. Für elliptische Differentialoperatoren $L(x,D)$ existiert dann ein Potential $E^\beta\mu \in W^1_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$ mit $\mathrm{supp}\,\mu \subseteq K$. Es gilt $LE^\beta\mu = 0$ in $R^n \setminus K$, aber nach Lemma 3 und (2) $LE^\beta\mu = (-1)^{|\beta|} D^\beta\mu \notin N_k(K,R^n)$. (Bei Differentialoperatoren mit variablen Koeffizienten ist dabei $|\beta| \leq k+1 \leq m-1$, d. h. $k \leq m-2$ vorauszusetzen. Weiterhin sind natürlich für die anderen r_α die Bedingungen aus Satz 1 zu fordern.)

Umgekehrt braucht es keine Potentiale $E^\beta\mu$ aus $W^1_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$ zu geben, wenn $r_\alpha \leq (n-d)\frac{p}{q} + p(1-m+k+1)$ für $|\alpha| = 1$ ist. Für die anderen r_α sollen die Bedingungen (3), (4) und (5) gelten. Wir nehmen an, daß ein $0 \neq \mu \in \mathfrak{M}(K)$ $(K \subset R^s \times \{0\})$ mit $E^\beta\mu \in W^1_{p,loc}(R^n,K,r_\alpha)$ $(|\beta| = k+1,\ \beta = (0,\dots,0, \beta_{s+1},\dots,\beta_n))$ existiert. Es gilt $LE^\beta\mu = 0$ in $R^n \setminus K$. Aus der Folgerung zu Satz 3 ergibt sich $LE^\beta\mu \in N_k(K,R^n)$. Andererseits gilt $LE^\beta\mu = (-1)^{|\beta|} \cdot D^\beta\mu \notin N_k(K,R^n)$. Aus diesem Widerspruch folgt die Nichtexistenz derartiger Potentiale.

Literatur

/1/ Hamann, U.: Eigenschaften von Potentialen bezüglich elliptischer Differentialoperatoren. Math. Nachr. 96, 7 - 15 (1980)

/2/ Hamann, U.: Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Hebbarkeit von Singularitäten. Math. Nachr. (erscheint demnächst)

/3/ Harvey, R., and Polking, J. C.: Removable singularities of linear partial differential equations. Acta Math. 125, 39 - 56 (1970)

/4/ Kufner, A.: Weigthed Sobolev Spaces. Teubner-Texte zur Mathematik, Band 31, Leipzig 1980

/5/ Schulze, B.-W.; Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin 1977

eingegangen: 01. 07. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat Uwe Hamann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 47 - 50 (1981) 39B40
47B38

Lothar Berg

Lösung von Funktionalgleichungen mit Hilfe innerer Inversen

In seiner Arbeit /2/ gibt I. Fenyö im Zusammenhang mit gewissen Approximationssätzen von D. H. Hyers für Funktionaloperatoren mit zwei unabhängigen Variablen innere Inversen an, ohne auf ihre Konstruktion einzugehen. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß diese inneren Inversen Spezialfälle der in /1/ konstruierten verallgemeinerten Inversen sind. Dadurch erhält man die Möglichkeit, weitere Funktionalgleichungen in analoger Weise zu lösen. Wir beschränken uns dabei auf die formale Seite der Konstruktion, ohne auf Konvergenzfragen einzugehen, die sich anschließend an Hand der expliziten Darstellungen der inneren Inversen leicht klären lassen. Lösungen linearer Funktionalgleichungen mit einer unabhängigen Variablen mit Hilfe von Rechtsinversen findet man bei U. Schmit /4/.

1. Die Beispiele von I. Fenyö

In /2/ werden in abgeänderter Bezeichnungsweise die beiden durch

$$A_1x(s) = x(s) + x(t) - x(s+t), \quad A_2x(s) = x(s) - 2x(s+t) + x(s+2t)$$

definierten Funktionaloperatoren A_1, A_2 betrachtet, wobei s,t Elemente eines Moduls sind und die Funktion $s \to x(s)$ diesen Modul in einen Banachraum abbildet. Von den durch

$$X_1f(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1}f(2^is,2^is), \quad X_2f(s,t) = -\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1}f(o,2^is)$$

definierten Operatoren X_k, k = 1, 2, wird dort gezeigt, daß sie innere Inversen der zugehörigen Operatoren A_k sind, d. h., die Eigenschaft $A_kX_kA_k = A_k$ besitzen. Dies bedeutet (vgl. etwa /1/), daß die Gleichung $A_kx(s) = f(s,t)$ unter einer leicht angebbaren Lösbarkeitsbedingung die spezielle Lösung $x(s) = X_kf(s,t)$ besitzt, und die allgemeine Lösung ist auch sofort angebbar.

Die zugehörigen Projektoren X_kA_k lauten nach /2/ bei Anwendung auf $x(s)$

$$X_1A_1x(s) = \sum_{i=o}^{\infty} 2^{-i} \left(x(2^i s) - \tfrac{1}{2}x(2^{i+1}s)\right),$$

$$X_2A_2x(s) = -x(o) + X_1A_1x(s).$$

Bei Einschränkung auf beschränkte Funktionen $x(s)$ ist X_1A_1 der identische Operator I und daher X_1 sogar eine Linksinverse von A_1. Ist aber beispielsweise die identische Funktion $x(s) = s$ zugelassen, so ist $X_kA_ks = 0$ für $k = 1,2$, und die inneren Inversen X_k sind keine Linksinversen.

2. Konstruktion innerer Inversen

In /1/ wurden im Anschluß an G. Maeß /3/, wo der Fall der Matrizen behandelt wird, für Operatoren zwischen allgemeinen Limesräumen, die speziell auch Banachräume sein können, verallgemeinerte Inversen durch explizite Reihenentwicklungen konstruiert. Weitergehende Untersuchungen dazu findet man bei D. Schott und W. Peters /5/. Bei Weglassung der genauen Voraussetzungen hat man dabei folgendermaßen vorzugehen:
Man multipliziere eine gegebene Operatorgleichung

$$Ax = f$$

mit einem geeignet zu wählenden Operator $B \neq 0$, so daß nach Einführung der Bezeichnung

$$T = I - BA$$

die Gleichung

$$x = Tx + Bf$$

entsteht, und betrachte das zugehörige Iterationsverfahren

$$x_n = Tx_{n-1} + Bf$$

für $n = 1, 2, \ldots$, das nach Wahl eines Startelementes x_o

$$x_n = T^n x_o + \sum_{i=o}^{n-1} T^i Bf$$

liefert. Unter gewissen Voraussetzungen existiert dann der Grenzwert

$$X = \sum_{i=o}^{\infty} T^i B$$

und ist eine innere Inverse von A. Der zugehörige Projektor XA lautet

$$XA = I - T^{\infty}$$

mit $T^{\infty} = \lim_{n \to \infty} T^n$.

3. Anwendung auf Funktionalgleichungen

Die Ausführungen aus Abschnitt 2 sollen jetzt auf die Operatoren $A = A_k$ aus Abschnitt 1 angewendet werden. Für die Operatoren $B = B_k$ wählen wir

$$B_1 f(s,t) = \tfrac{1}{2} f(s,s), \quad B_2 f(s,t) = \tfrac{1}{2}(f(o,o) - f(o,s)).$$

Dann lauten die zugehörigen Operatoren $T = T_k$,

$$T_1 x(s) = \tfrac{1}{2} x(2s), \quad T_2 x(s) = \tfrac{1}{2}(x(o) + x(2s))$$

und ihre Potenzen

$$T_1^i x(s) = \frac{1}{2^i} x(2^i s), \quad T_2^i x(s) = x(o) + \frac{1}{2^i}(x(2^i s) - x(o)),$$

so daß wir aus

$$X_k = \sum_{i=o}^{\infty} T_k^i B_k$$

im Fall $k = 1$ sofort die vorhergehende Darstellung für X_1 und im Fall $k = 2$

$$X_2 f(s,t) = f(o,o) - \sum_{i=o}^{\infty} 2^{-i-1} f(o, 2^i s)$$

erhalten. Bis auf die konstante Funktion $f(o,o)$, die im Nullraum des Operators A_2 liegt und daher auch weggelassen werden kann, ohne die Eigenschaft von X_2, innere Inverse von A_2 zu sein, zu verletzen, ist auch dies wieder das weiter oben angeführte Ergebnis aus /2/.

Bei allgemeinen linearen Funktionalgleichungen mit Operatoren der Form

$$Ax(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i x(b_i s + c_i t),$$

wobei c_i und t Vektoren

$$c_i = (c_{i1}, \ldots, c_{im}), \quad t = (t_1, \ldots, t_m)^T$$

und die a_i, b_i und c_{ij} konstante Koeffizienten sein mögen, kann man analog vorgehen, indem man für B den Ansatz

$$Bf(s,t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \; f(\beta_i s, \gamma_i s)$$

mit $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{im})^T$ macht und die Konstanten α_i, β_i und γ_{ij} bei möglichst kleinem k in nicht trivialer Weise so bestimmt, daß die Folge $T^n B$ gegen den annullierenden Operator strebt.

Literatur

/1/ Berg, L.: General iteration methods for the evaluation of linear equations. Numer. Funct. Anal. Optim. 1, 365 - 381 (1979)

/2/ Fenyö, I.: Osservazioni su alcuni teoremi di D. H. Hyers. Università degli Studi di Milano, Istituto mathematico "F. Enriques", Preprint Nr. 49/S, Milano 1980

/3/ Maeß, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Nova Acta Leopoldina, Neue Folge Nr. 238, Band 52, Halle 1979

/4/ Schmit, U.: Eine Anwendung der Operatorenrechnung auf Funktionalgleichungen. Dissertation (A), Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1975

/5/ Schott, D., und Peters, W.: Über Nullräume, Wertebereiche und Relationen von Operatoren, die bei instationären Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen auftreten. (eingereicht bei Zeitschr. für Analysis und ihre Anwendungen)

eingegangen: 02. 07. 1981

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Lothar Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 51 - 67 (1981) 46B10 47A05

Dieter Schott

Annulatoren und Dualitätssätze

Zusammenfassung

In der Funktionalanalysis spielt der Annulatorbegriff eine wichtige Rolle (siehe etwa /6/, /3/ /1/). Im ersten Teil der Arbeit werden Annulatoren von Durchschnitts- und Vereinigungsmengen in linearen Räumen, in Banach- und in Hilbert-Räumen bestimmt. Von besonderem Interesse ist dabei der Spezialfall, daß die Mengen aus Nullräumen oder Wertebereichen von Operatoren gebildet werden.

Im zweiten Teil der Arbeit werden diese Ergebnisse zur Aufstellung von Dualitätssätzen benutzt. Insbesondere kann man Aussagen aus /5/, die bei der Konvergenzuntersuchung von Iterationsverfahren von Bedeutung sind, durch Dualitätsbetrachtungen gewinnen.

1. Annulatoren von Durchschnitts- und Vereinigungsmengen

Die Untersuchungen lassen sich für lineare Räume und Banach-Räume parallel führen, wenn man die Bezeichnungen jeweils geeignet interpretiert.

Es sei X ein linearer Raum (ein Banach-Raum) und X' sein algebraischer Dualraum (topologischer Dualraum, versehen mit der starken' oder der schwachen' Topologie). Unter einem Teilraum von X bzw. X' verstehen wir eine lineare (lineare und abgeschlossene) Teilmenge. Für die lineare (abgeschlossene lineare) Hülle einer Teilmenge M von X bzw. X' verwenden wir die Abkürzung $\mathcal{L}(M)$. Dabei vereinbaren wir $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$.

Definition 1.1: Es sei $E \subseteq X$. Dann heißt die Menge

$$^{o}E := \{f \in X' \mid \forall x \in E: \langle f,x \rangle = 0\} \quad (^{o}\emptyset := X')$$

algebraischer (topologischer) Annulator von E in X'.

Es sei $F \subseteq X'$. Dann heißt die Menge

$F^o := \{x \in X \mid \forall f \in F: \langle f,x\rangle = 0\}$ ($\emptyset^o := X$)
algebraischer (topologischer) Annulator von F in X
(siehe z. B. /6: S. 48 - 49, S. 224 - 225/, /3: S. 108 - 109/, /1: S. 101/).

Die folgenden Aussagen sind im wesentlichen bekannt bzw. leicht einzusehen (vgl. etwa /6: S. 48 - 50, S. 224 - 225/).

Lemma 1.2: Es seien E, E_1, E_2 Teilmengen von X. Dann gilt

a) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow {}^oE_2 \subseteq {}^oE_1$,

b) ${}^oE = {}^o\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}({}^oE)$,

c) $({}^oE)^o = \mathcal{L}(E)$.

Es seien F, F_1, F_2 Teilmengen von X'. Dann gilt

d) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2{}^o \subseteq F_1{}^o$,

e) $F^o = \mathcal{L}(F)^o = \mathcal{L}(F^o) = ({}^o(F^o))^o$,

f) ${}^o(F^o) \supseteq \mathcal{L}(F)$, ${}^o(F^o) = \mathcal{L}(F) \Leftrightarrow \mathcal{L}(F)$ Annulator in X'.

Bemerkung 1.3: Wir betrachten die Gleichung

$${}^o(F^o) = \mathcal{L}(F) \quad (F \subseteq X'). \tag{1.1}$$

a) Für bestimmte Räume X,X' genügen nicht alle Mengen F der Beziehung (1.1) (siehe /6: S. 51 - 52, S. 225/).
b) Für algebraisch (topologisch) reflexive Räume X ist (1.1) stets erfüllt (siehe /6: S. 45, S. 51, S. 227/).
c) Für Banach-Räume X fällt ${}^o(F^o)$ mit der schwach' abgeschlossenen linearen Hülle von F zusammen (siehe /3: S. 109/). Daher gilt (1.1) stets, falls man X' mit der schwachen' Topologie versieht.

Wir bezeichnen die Menge ${}^o(F^o) \subseteq X'$ künftig mit $\mathcal{L}'(F)$. Es zeigt sich, daß die Operation $\mathcal{L}'$ ähnliche Eigenschaften besitzt wie die Operation $\mathcal{L}$. Zum Beispiel findet man

$$F^o = \mathcal{L}'(F)^o, \quad \mathcal{L}'(\mathcal{L}'(F)) = \mathcal{L}'(F), \quad {}^oE = \mathcal{L}'({}^oE).$$

Später werden weitere Analogien angegeben. Außerdem ist

$$\mathcal{L}'(\mathcal{L}(F)) = \mathcal{L}(\mathcal{L}'(F)) = \mathcal{L}'(F).$$

Wir kommen nun zum zentralen Satz dieses Abschnitts.

Satz 1.4: Es sei (E_n) eine Folge von (nichtleeren) Teilmengen aus X. Dann bestehen die Relationen

a) $^{\circ}\bigcap\limits_n E_n \supseteq {}^{\circ}\bigcap\limits_n \mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}'(\bigcup\limits_n {}^{\circ}E_n)$,

$$^{\circ}\bigcap\limits_n E_n = \mathcal{L}'(\bigcup\limits_n {}^{\circ}E_n) \Leftrightarrow \bigcap\limits_n \mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}(\bigcap\limits_n E_n).$$

b) $^{\circ}\bigcup\limits_n E_n = {}^{\circ}\bigcup\limits_n \mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}'(\bigcap\limits_n {}^{\circ}E_n) = \bigcap\limits_n {}^{\circ}E_n$.

Es sei (F_n) eine Folge von (nichtleeren) Teilmengen aus X'. Dann bestehen die Relationen

c) $(\bigcap\limits_n F_n)^{\circ} \supseteq (\bigcap\limits_n \mathcal{L}'(F_n))^{\circ} = \mathcal{L}(\bigcup\limits_n F_n^{\circ})$,

$$(\bigcap\limits_n F_n)^{\circ} = \mathcal{L}(\bigcup\limits_n F_n^{\circ}) \Leftrightarrow \bigcap\limits_n \mathcal{L}'(F_n) = \mathcal{L}'(\bigcap\limits_n F_n).$$

d) $(\bigcup\limits_n F_n)^{\circ} = (\bigcup\limits_n \mathcal{L}'(F_n))^{\circ} = \mathcal{L}(\bigcap\limits_n F_n^{\circ}) = \bigcap\limits_n F_n^{\circ}$.

Beweis: Wir leiten zunächst eine Reihe von wichtigen Beziehungen her, deren Kombination dann unmittelbar alle Behauptungen des Satzes liefert.

1) Ein beliebiges Funktional f aus lin $\bigcup\limits_n {}^{\circ}E_n$ besitzt die Gestalt

$$f = \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \quad (\beta_i \text{ Skalare, } f_i \in {}^{\circ}E_{n_i},\ n_i \text{ natürlich}).$$

Daher erhält man für jedes $x \in \bigcap\limits_n E_n \subseteq E_{n_i}$ $(i=0,1,\dots,m)$

$$\langle f,x\rangle = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \ \langle f_i,x\rangle = 0.$$

Somit stammt f aus $^{\circ}\bigcap\limits_n E_n$, und es gilt

$$\text{lin} \bigcup\limits_n {}^{\circ}E_n \subseteq {}^{\circ}\bigcap\limits_n E_n.$$

Aufgrund von $\mathcal{L}'({}^{\circ}\bigcap\limits_n E_n) = {}^{\circ}\bigcap\limits_n E_n$ (siehe Lemma 1,2) entsteht daraus

$$\mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}E_n) \subseteq {}^{o}\bigcap_n E_n, \tag{1.2}$$

$$(\bigcup_n {}^{o}E_n)^{o} = (\mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}E_n))^{o} \supseteq ({}^{o}\bigcap_n E_n)^{o} \supseteq \mathcal{L}(\bigcap_n E_n). \tag{1.3}$$

Setzt man in (1.3) speziell $E_n = F_n{}^{o}$, so gewinnt man unter Beachtung von Lemma 1.2

$$(\bigcup_n F_n)^{o} \supseteq (\bigcup_n \mathcal{L}'(F_n))^{o} \supseteq \mathcal{L}(\bigcap_n F_n{}^{o}) = \bigcap_n F_n{}^{o}. \tag{1.4}$$

Ähnlich wie (1.2) und (1.3) zeigt man

$$\mathcal{L}(\bigcup_n F_n{}^{o}) \subseteq (\bigcap_n F_n)^{o}, \tag{1.2'}$$

$${}^{o}(\bigcup_n F_n{}^{o}) \supseteq \mathcal{L}'(\bigcap_n F_n). \tag{1.3'}$$

Mit $F_n = {}^{o}E_n$ ergibt sich aus (1.3') und Lemma 1.2

$${}^{o}\bigcup_n E_n \supseteq {}^{o}\bigcup_n \mathcal{L}(E_n) \supseteq \mathcal{L}'(\bigcap_n {}^{o}E_n) \supseteq \bigcap_n {}^{o}E_n. \tag{1.4'}$$

2) Sei f ein beliebiges Funktional aus ${}^{o}\bigcup_n E_n$. Dann folgt für jedes n

$\langle f, x_n \rangle = 0 \quad (\forall x_n \in E_n)$.

Das bedeutet aber $f \in {}^{o}E_n$ $(\forall n)$ bzw. $f \in \bigcap_n {}^{o}E_n$. Daher ist

$${}^{o}\bigcup_n E_n \subseteq \bigcap_n {}^{o}E_n. \tag{1.5}$$

Entsprechend beweist man auch

$$(\bigcup_n F_n)^{o} \subseteq \bigcap_n F_n{}^{o}. \tag{1.5'}$$

Für $E_n = F_n{}^{o}$ erhält man aus (1.5)

$${}^{o}(\bigcup_n F_n{}^{o}) \subseteq \bigcap_n \mathcal{L}'(F_n). \tag{1.6}$$

Für $F_n = {}^{o}E_n$ nimmt (1.5') die folgende Gestalt an:

$$(\bigcup_n {}^{o}E_n)^o \subseteq \bigcap_n ({}^{o}E_n)^o = \bigcap_n \mathcal{L}(E_n). \tag{1.6'}$$

3) Durch Zusammenfassung von (1.4) und (1.5') sowie von (1.4") und (1.5) gelangt man zu den Behauptungen d) und b).
Setzt man in (1.2) für E_n speziell $\mathcal{L}(E_n)$ ein, entsteht

$$^{o}\bigcap_n \mathcal{L}(E_n) \supseteq \mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}\mathcal{L}(E_n)) = \mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}E_n).$$

Aus (1.6') gewinnt man andererseits

$$\mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}E_n) \supseteq {}^{o}\bigcap_n \mathcal{L}(E_n).$$

In Verbindung mit (1.2) ergibt sich daraus der erste Teil von a). Die Gleichung ${}^{o}\bigcap_n E_n = \mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}E_n)$ zieht sofort die Gleichung $\mathcal{L}(\bigcap_n E_n) = (\bigcup_n {}^{o}E_n)^o$ nach sich. Mit Hilfe von d) bekommt man schließlich $(\bigcup_n {}^{o}E_n)^o = \bigcap_n \mathcal{L}(E_n)$.

Da wegen (1.3) und (1.6')

$$\mathcal{L}(\bigcap_n E_n) \subseteq (\bigcup_n {}^{o}E_n)^o \subseteq \bigcap_n \mathcal{L}(E_n)$$

gilt, führt die Beziehung $\mathcal{L}(\bigcap_n E_n) = \bigcap_n \mathcal{L}(E_n)$ auf

$(\bigcup_n {}^{o}E_n)^o = \mathcal{L}(\bigcap_n E_n)$. Das bedeutet aber auch

$$\mathcal{L}'(\bigcap_n {}^{o}E_n) = {}^{o}\mathcal{L}(\bigcap_n E_n) = {}^{o}\bigcap_n E_n.$$

Analog zeigt man die Behauptung c) unter Verwendung der Beziehungen (1.2'), (1.6), (1.3') und b).

Bemerkungen: Wie man schon an einfachen Beispielen sieht, sind die Bedingungen $\bigcap_n \mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}(\bigcap_n E_n)$ und $\bigcap_n \mathcal{L}'(F_n) = \mathcal{L}'(\bigcap_n F_n)$ nicht automatisch erfüllt. Damit lassen sich die Enthaltenseins-Relationen in a) und c) nicht durch die Gleichheits-Relationen verschärfen.

Die Operation $\mathcal{L}'$ spielt in X' die gleiche Rolle wie die Operation $\mathcal{L}$ in X. Für reflexive Räume X oder auch bei Benutzung der schwachen' Topologie für X' kann man $\mathcal{L}'$ durch $\mathcal{L}$ ersetzen.

Zwischen beiden Operationen gibt es schließlich eine Reihe weiterer Gemeinsamkeiten. Zum Beispiel gilt offenbar

$$\mathcal{L}(\bigcap_n F_n) \subseteq \mathcal{L}(\bigcap_n \mathcal{L}(F_n)) = \bigcap_n \mathcal{L}(F_n),$$

$$\mathcal{L}(F_n) = F_n (\forall n) \Rightarrow \mathcal{L}(\bigcap_n F_n) = \bigcap_n \mathcal{L}(F_n) = \bigcap_n F_n,$$

$$\mathcal{L}(\bigcup_n F_n) = \mathcal{L}(\bigcup_n \mathcal{L}(F_n)) \supseteq \bigcup_n \mathcal{L}(F_n).$$

Diese Relationen bleiben richtig, wenn man $\mathcal{L}'$ anstelle von $\mathcal{L}$ wählt.

<u>Folgerung 1.5:</u> Für eine Folge (F_n) von (nichtleeren) Teilmengen aus X' ist

a) $\mathcal{L}'(\bigcap_n F_n) \subseteq \mathcal{L}'(\bigcap_n \mathcal{L}'(F_n)) = \bigcap_n \mathcal{L}'(F_n),$

$$\mathcal{L}'(F_n) = F_n (\forall n) \Rightarrow \mathcal{L}'(\bigcap_n F_n) = \bigcap_n \mathcal{L}'(F_n) = \bigcap_n F_n,$$

b) $\mathcal{L}'(\bigcup_n F_n) = \mathcal{L}'(\bigcup_n \mathcal{L}'(F_n)) \supseteq \bigcup_n \mathcal{L}'(F_n).$

<u>Beweis:</u> Aus Satz 1.4c) bekommt man

$$\mathcal{L}'(\bigcap_n F_n) \subseteq \mathcal{L}'(\bigcap_n \mathcal{L}'(F_n)).$$

Mit $E_n = F_n{}^o$ entnimmt man Satz 1.4b)

$$\mathcal{L}'(\bigcap_n \mathcal{L}'(F_n)) = \bigcap_n \mathcal{L}'(F_n).$$

Daraus resultiert die Behauptung a). Satz 1.4d) und Lemma 1.2 liefern unmittelbar die Behauptung b).

Wir betrachten nun zwei lineare Räume (Banach-Räume) X,Y mit dem gleichen Skalarkörper. Die Menge L(X,Y) bezeichne den Raum der linearen (linearen und stetigen) Operatoren von X in Y. Der Operator $A' \in L(Y',X')$ sei der zu $A \in L(X,Y)$ algebraisch (topologisch) duale Operator. Das folgende Lemma enthält bekannte Zusammenhänge zwischen Wertebereichen und Nullräumen von A und A' (siehe etwa /6: S. 52 - 53, S. 226/, /3: S. 112/, /1: S. 15/).

<u>Lemma 1.6:</u> Es gilt

a) ${}^oR(A) = N(A')$, b) ${}^oN(A) = \mathcal{L}'(R(A'))$,

c) $R(A')^o = N(A)$, d) $N(A')^o = \mathcal{L}(R(A))$.

Bemerkungen: Es ist offenbar für lineare Räume $\mathcal{L}(R(A)) = R(A)$, für Banach-Räume $\mathcal{L}(R(A)) = \overline{R(A)}$. Weiterhin gewinnt man aus dem Lemma sofort $\mathcal{L}'(N(A')) = N(A')$. Für Banach-Räume ergibt sich außerdem

$$\mathcal{L}'(R(A')) = R(A') \Leftrightarrow \mathcal{L}(R(A')) = R(A') \Leftrightarrow \mathcal{L}(R(A)) = R(A)$$

(siehe /3: S. 115/).

Jetzt kann man Satz 1.4 auf den Fall anwenden, daß die Folgen (E_n) und (F_n) aus Nullräumen oder Wertebereichen von Operatoren bestehen.

Folgerung 1.7: Es sei (A_n) eine Folge von Operatoren aus $L(X,Y)$. Dann gilt

a) $^{o}\bigcap_n N(A_n) = \mathcal{L}'(\bigcup_n R(A_n'))$,

b) $^{o}\bigcap_n R(A_n) \supseteq {}^{o}\bigcap_n \mathcal{L}(R(A_n)) = \mathcal{L}'(\bigcup_n N(A_n'))$,

c) $^{o}\bigcup_n N(A_n) = {}^{o}\mathcal{L}(\bigcup_n N(A_n)) = \bigcap_n \mathcal{L}'(R(A_n'))$,

d) $^{o}\bigcup_n R(A_n) = {}^{o}\mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n)) = \bigcap_n N(A_n')$,

e) $(\bigcap_n N(A_n'))^{o} = \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n))$,

f) $(\bigcap_n R(A_n'))^{o} \supseteq (\bigcap_n \mathcal{L}'(R(A_n')))^{o} = \mathcal{L}(\bigcup_n N(A_n))$,

g) $(\bigcup_n N(A_n'))^{o} = (\mathcal{L}'(\bigcup_n N(A_n')))^{o} = \bigcap_n \mathcal{L}(R(A_n))$,

h) $(\bigcup_n R(A_n'))^{o} = (\mathcal{L}'(\bigcup_n R(A_n')))^{o} = \bigcap_n N(A_n)$.

Beweis: Mit Hilfe von Satz 1.4a), Folgerung 1.5 und Lemma 1.6 gewinnt man

$$^{o}\bigcap_n N(A_n) = {}^{o}\bigcap_n \mathcal{L}(N(A_n)) = \mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}N(A_n)) = \mathcal{L}'(\bigcup_n \mathcal{L}'(R(A_n')))$$
$$= \mathcal{L}'(\bigcup_n R(A_n')),$$

$$^{o}\bigcap_n R(A_n) \supseteq {}^{o}\bigcap_n \mathcal{L}(R(A_n)) = \mathcal{L}'(\bigcup_n {}^{o}R(A_n)) = \mathcal{L}'(\bigcup_n N(A_n')).$$

Unter Beachtung von Satz 1.4b) und Lemma 1.6 ergibt sich

$$^{o}\bigcup_n N(A_n) = {}^{o}\mathcal{L}(\bigcup_n N(A_n)) = \bigcap_n {}^{o}N(A_n) = \bigcap_n \mathcal{L}'(R(A_n')).$$

$$^{o}\bigcup_n R(A_n) = {}^{o}\mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n)) = \bigcap_n {}^{o}R(A_n) = \bigcap_n N(A_n').$$

Die restlichen Behauptungen lassen sich entweder unter Verwendung von Satz 1.4c), d) und Lemma 1.6 oder direkt aus a), b), c), d) unter Berücksichtigung von Lemma 1.2c) herleiten.

Bemerkungen: Nach Satz 1.4 steht in b) genau dann überall das Gleichheitszeichen, wenn die Bedingung $\bigcap_n \mathcal{L}(R(A_n)) = \mathcal{L}(\bigcap_n R(A_n))$ vorliegt. Für lineare Räume ist diese Bedingung stets erfüllt, für Banach-Räume zumindest dann, wenn sämtliche Wertebereiche $R(A_n)$ abgeschlossen sind.
In f) steht zum Beispiel überall das Gleichheitszeichen, wenn die Wertebereiche $R(A_n')$ Annulatoren in X' sind.

Wir gehen nun kurz auf den Fall ein, daß X und Y Hilbert-Räume sind. Bekanntlich ist jeder Hilbert-Raum X isomorph und isometrisch zu seinem Dualraum X'. Insbesondere ist X daher reflexiv, so daß die Operation $\mathcal{L}'$ durch die Operation $\mathcal{L}$ ersetzt werden kann. Bettet man X' auf natürliche Weise in X ein, so fallen für Mengen $E \subseteq X$ die Annulatoren ${}^{o}E$ und E^{o} zusammen, wobei Funktionalwerte $\langle f,x\rangle$ in entsprechende Skalarprodukte übergehen. An die Stelle der Annulatoren tritt das orthogonale Komplement

$$E^{\perp} := \{y \in X \mid \forall x \in E: (y,x) = 0\},$$

für das speziell

$$X = \mathcal{L}(E) \oplus E^{\perp}, \quad (E^{\perp})^{\perp} = \mathcal{L}(E)$$

gilt. Der Satz 1.4 geht damit in folgenden Satz über, der für eine Folge (E_n) von Teilräumen schon in /4/ bewiesen wurde.

Satz 1.8: Es sei (E_n) eine Folge von (nichtleeren) Teilmengen aus X. Dann bestehen die Relationen

a) $(\bigcap_n E_n)^{\perp} \supseteq (\bigcap_n \mathcal{L}(E_n))^{\perp} = \mathcal{L}(\bigcup_n E_n^{\perp})$.

b) $(\bigcup_n E_n)^{\perp} = \bigcap_n E_n^{\perp}$.

Für zwei Hilbert-Räume X,Y ist der duale Operator $A' \in L(Y',X')$ unitär äquivalent zum adjungierten Operator $A^* \in L(Y,X)$. Daher ergibt sich aus Lemma 1.6

$$R(A)^{\perp} = N(A^*), \quad N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)},$$

$$R(A^*)^{\perp} = N(A), \quad N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$$

(vgl. auch /6: S. 250/).
Weiterhin bleiben die Aussagen von Folgerung 1.7 richtig, wenn man die dualen Operatoren durch die adjungierten Operatoren ersetzt.

2. Dualitätssätze für Zusammenhänge zwischen Operatorgleichungen und Mengenrelationen

Gegeben seien zwei lineare Räume (Banach-Räume) X,Y mit dem gleichen Skalarkörper. Wir betrachten nun bestimmte Aussagemengen für Zusammenhänge zwischen Operatorgleichungen und Mengenrelationen.

Definition 2.1: Es sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Aussagen, die nachstehende Bestandteile enthalten:

a) Relationen $E_1 = E_2$, $E_1 \subseteq E_2$ zwischen Teilräumen E_1, E_2 von X bzw. Y,
b) Operatorgleichungen $A = B$ für Operatoren A,B aus $L(X,Y)$,
c) logische Ausdrucksmittel.

Es sei $\mathcal{Z}'$ die Menge aller Aussagen, die nachstehende Bestandteile enthalten:

d) Relationen $F_1 = F_2$, $F_1 \subseteq F_2$ zwischen Teilräumen F_1, F_2 von X' bzw. Y', die Annulatoren sind ($F_1 = \mathcal{L}'(F_1)$, $F_2 = \mathcal{L}'(F_2)$),
e) Operatorgleichungen $A' = B'$ für duale Operatoren A', B' aus $L(Y',X')$,
f) logische Ausdrucksmittel.

Den Aussagen $z \in \mathcal{Z}$ werden auf natürliche Weise Aussagen $z' \in \mathcal{Z}'$ zugeordnet und umgekehrt.

Definition 2.2: Eine Aussage $z' \in \mathcal{Z}'$ heißt dual zu einer Aussage $z \in \mathcal{Z}$, wenn sie aus z durch die Ersetzungen

$$E_1 = E_2 \rightarrow {}^{o}E_1 = {}^{o}E_2, \; E_1 \subseteq E_2 \rightarrow {}^{o}E_2 \subseteq {}^{o}E_1, \; A = B \rightarrow A' = B'$$

entsteht.

Eine Aussage $z \in \mathfrak{Z}$ heißt dual zu einer Aussage $z' \in \mathfrak{Z}'$, wenn sie aus z' durch die Ersetzungen

$$F_1 = F_2 \rightarrow F_1^{o} = F_2^{o},\ F_1 \subseteq F_2 \rightarrow F_2^{o} \subseteq F_1^{o},\ A' = B' \rightarrow A = B$$

entsteht.

Wegen $E = \mathcal{L}(E)$ und $F = \mathcal{L}'(F)$ ergibt die Dualaussage einer Dualaussage stets wieder die ursprüngliche Aussage, so daß die Dualitätsbeziehung symmetrisch ist.

Aufgrund von Lemma 1.2 erhält man unmittelbar

Lemma 2.3: Es seien E_1, E_2 Teilräume von X oder Y. Dann gilt

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow {}^{o}E_1 = {}^{o}E_2,\ E_1 \subseteq E_2 \Leftrightarrow {}^{o}E_2 \subseteq {}^{o}E_1.$$

Es seien F_1, F_2 Teilräume von X' oder Y' mit $F_1 = \mathcal{L}'(F_1)$, $F_2 = \mathcal{L}'(F_2)$. Dann gilt

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow F_1^{o} = F_2^{o},\ F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow F_2^{o} \subseteq F_1^{o}.$$

In Verbindung mit Lemma 1.6 und Folgerung 1.7 entsteht daraus

Folgerung 2.4: Für Operatoren $P \in L(X,X)$, $Q \in L(Y,Y)$ und eine Folge (A_n) von Operatoren aus $L(X,Y)$ ergibt sich

a) $\mathcal{L}(R(P)) \subseteq \bigcap_n N(A_n) \Leftrightarrow N(P') \supseteq \mathcal{L}'(\bigcup_n R(A_n'))$,

b) $\mathcal{L}(R(P)) \supseteq \bigcap_n N(A_n) \Leftrightarrow N(P') \subseteq \mathcal{L}'(\bigcup_n R(A_n'))$,

c) $N(Q) \subseteq \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n)) \Leftrightarrow \mathcal{L}'(R(Q')) \supseteq \bigcap_n N(A_n')$,

d) $N(Q) \supseteq \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n)) \Leftrightarrow \mathcal{L}'(R(Q')) \subseteq \bigcap_n N(A_n')$.

Bemerkungen: Wegen $\mathcal{L}(\bigcap_n N(A_n)) = \bigcap_n N(A_n)$ und $\mathcal{L}'(N(P')) = N(P')$ ist

$$\mathcal{L}(R(P)) \subseteq \bigcap_n N(A_n) \Leftrightarrow R(P) \subseteq \bigcap_n N(A_n),$$

$$N(P') \supseteq \mathcal{L}'(\bigcup_n R(A_n')) \Leftrightarrow N(P') \supseteq \bigcup_n R(A_n').$$

Aufgrund von $\mathcal{L}(N(Q)) = N(Q)$ und $\mathcal{L}'(\bigcap_n N(A_n')) = \bigcap_n N(A_n')$ bekommt man

$$N(Q) \supseteq \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n)) \Leftrightarrow N(Q) \supseteq \bigcup_n R(A_n).$$

$$\mathcal{L}'(R(Q')) \subseteq \bigcap_n N(A_n') \Leftrightarrow R(Q') \subseteq \bigcap_n N(A_n').$$

Leicht einzusehen ist auch

Lemma 2.5: Es seien A,B zwei Operatoren aus $L(X,Y)$. Dann gilt
$A = B \Leftrightarrow A' = B'$.

Die Lemmata 2.3 und 2.5 führen offenbar zu

Satz 2.6: Eine Aussage $z \in \mathcal{Z}$ ist genau dann wahr, wenn ihre Dualaussage $z' \in \mathcal{Z}'$ wahr ist.

Mit Hilfe von Lemma 1.6 und Folgerung 1.7 kann man daraus eine ganze Reihe von speziellen Äquivalenzaussagen gewinnen.
Wir wenden uns jetzt noch einer bestimmten Teilmenge von $\mathcal{Z}$ zu.

Definition 2.7: Es sei $\mathcal{Z}_o(T)$ die Menge aller Aussagen aus $\mathcal{Z}$ mit den nachstehenden Eigenschaften:

(B1) Die Operatorgleichungen haben die Produktform
$A_{1n}A_{2n}\cdots A_{l_n n} = A_{l_n+1,n}A_{l_n+2,n}\cdots A_{m_n n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

(B2) Die Teilräume werden in Abhängigkeit von den Operatoren A_{in} $(i=1,2,\ldots,m_n;\ n=0,1,2,\ldots)$ gebildet.

(B3) Es ist eine Transformation T erklärt, die den Operatoren A_{in} duale Operatoren B_{in}' derart zuordnet, daß die Produkte $B_{1n}'B_{2n}'\cdots B_{l_n n}'$, $B_{l_n+1,n}'B_{l_n+2,n}'\cdots B_{m_n n}'$ einen Sinn haben (Verknüpfbarkeit) und zu $L(Y',X')$ gehören.

(B4) Ersetzt man bei der Teilraumbildung die Operatoren A_{in} durch die Operatoren B_{in}', so liegen die Teilräume im Dualraum X' bzw. Y' und sind Annulatoren.

(B5) Ersetzt man in den Aussagen die Operatoren A_{in} durch die Operatoren B_{in}', so gehen wahre Aussagen wieder in wahre Aussagen über.

Bemerkung: Die Produktdarstellung der Operatorgleichungen ist im allgemeinen nicht eindeutig. Für eine konkrete Aussage $z \in \mathcal{Z}$

kommt es darauf an, nach einer geeigneten Produktdarstellung und einer geeigneten Transformation T zu suchen, so daß $z \in \mathcal{Z}_o(T)$ gilt.

Satz 2.8: Die Aussage

a) $A_{1n}A_{2n}\cdots A_{l_n n} = A_{l_n+1,n}A_{l_n+2,n}\cdots A_{m_n n}\ (\forall n) \Leftrightarrow$

$E_1(A_{1o},\ldots,A_{in},\ldots) = E_2(A_{1o},\ldots,A_{in},\ldots)$

aus $\mathcal{Z}_o(T)$ zieht die Aussage

b) $B_{l_n n}\cdots B_{2n}B_{1n} = B_{m_n n}\cdots B_{l_n+2,n}B_{l_n+1,n}\ (\forall n) \Leftrightarrow$

$E_1(B'_{1o},\ldots,B'_{in},\ldots)^o = E_2(B'_{1o},\ldots,B'_{in},\ldots)^o$

nach sich.

Beweis: Aus a) folgt nach Voraussetzung

$B'_{1n}B'_{2n}\cdots B'_{l_n n} = B'_{l_n+1,n}B'_{l_n+2,n}\cdots B'_{m_n n}\ (\forall n) \Leftrightarrow$

$E_1(B'_{1o},\ldots,B'_{in},\ldots) = E_2(B'_{1o},\ldots,B'_{in},\ldots).$

Das ist wegen $B'_{1n}B'_{2n}\cdots B'_{l_n n} = (B_{l_n n}\cdots B_{2n}B_{1n})'$ und

$B'_{l_n+1,n}B'_{l_n+2,n}\cdots B'_{m_n n} = (B_{m_n n}\cdots B_{l_n+2,n}B_{l_n+1,n})'$ eine Aussage aus $\mathcal{Z}'$. Die dazu duale Aussage hat die Gestalt b). Aus Satz 2.6 ergibt sich die Behauptung.

Wir betrachten nun speziell Operatorgleichungen der Form $A_nP = 0$ bzw. $QA_n = 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ mit $P \in L(X,X)$, $Q \in L(Y,Y)$ und $A_n \in L(X,Y)$. Die auf ihrer Grundlage gebildeten Teilräume seien $\mathcal{L}(R(P))$, $\bigcap_n N(A_n)$ bzw. $N(Q)$, $\mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n))$. Die Transformation T laute jeweils

$$T_1(P) = Q',\ T_1(A_n) = A'_n\ (\forall n), \tag{2.1}$$

$$T_2(Q) = P',\ T_2(A_n) = A'_n\ (\forall n). \tag{2.2}$$

Aus Satz 2.8, Lemma 1.6 und Folgerung 1.7 gewinnt man

Folgerung 2.9: Gegeben seien die beiden Aussagen

a) $A_nP = 0\ (\forall n) \Leftrightarrow \mathcal{L}(R(P)) = \bigcap_n N(A_n)$,

b) $QA_n = 0\ (\forall n) \Leftrightarrow N(Q) = \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n))$.

Gehört a) zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$, so zieht a) auch b) nach sich.
Gehört b) zu $\mathcal{Z}_o(T_2)$, so zieht b) auch a) nach sich.

Bemerkung: Die Aussage a) erfüllt mit (2.1) offenbar die Bedingungen (B1), (B2), (B3) der Definiton 2.7. Ersetzt man in der Gleichung $\mathcal{L}(R(P)) = \bigcap_n N(A_n)$ nun P durch Q' und A_n durch A_n', so stehen auf beiden Seiten der transformierten Gleichung Annulatoren in Y', da $\bigcap_n N(A_n')$ Annulator in Y' ist. Also ist auch die Bedingung (B4) erfüllt. Folglich gehört die Aussage a) genau dann zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$, wenn sie der Bedingung (B5) genügt, d. h., wenn mit a) auch

$$A_n'Q' = 0 \ (\forall n) \Leftrightarrow \mathcal{L}(R(Q')) = \bigcap_n N(A_n')$$

gilt. Entsprechendes ergibt sich bezüglich der Aussage b).

Sind X und Y Hilbert-Räume und werden die Dualräume X' und Y' mit den Ausgangsräumen identifiziert, so bekommt man zum Beispiel Resultate wie

Folgerung 2.10: Gegeben seien die beiden Aussagen:

a) Gilt $A_nP = 0$ ($\forall n$), so ist $P = P^* \Leftrightarrow N(P) = \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n^*))$.

b) Gilt $QA_n = 0$ ($\forall n$), so ist $Q = Q^* \Leftrightarrow \mathcal{L}(R(Q)) = \bigcap_n N(A_n^*)$.

Gehört a) zu $\mathcal{Z}_o(\tilde{T}_1)$ mit

$$\tilde{T}_1(P) = Q^*,\ \tilde{T}_1(P^*) = Q,\ \tilde{T}_1(A_n) = A_n^*,\ \tilde{T}_1(A_n^*) = A_n, \tag{2.1'}$$

so zieht a) auch b) nach sich. Gehört b) zu $\mathcal{Z}_o(\tilde{T}_2)$ mit

$$\tilde{T}_2(Q) = P^*,\ \tilde{T}_2(Q^*) = P,\ \tilde{T}_2(A_n) = A_n^*,\ \tilde{T}_2(A_n^*) = A_n, \tag{2.2'}$$

so zieht b) auch a) nach sich.

Bemerkung: Die Aussagen a) und b) stammen genau dann aus $\mathcal{Z}_o(\tilde{T}_1)$ bzw. $\mathcal{Z}_o(\tilde{T}_2)$, wenn sie die Bedingung (B5) aus Definition 2.7 erfüllen.

Wir wollen die Ergebnisse jetzt auf Aussagen der Arbeit /5/ anwenden.

Dabei geht es um die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Operatorgleichungen und bestimmten Nullräumen bzw. Wertebereichen von Operatoren in Banach-Räumen X und Y, die bei instationären Iterationsverfahren der Form

$$x_{n+1} := T_n x_n + D_n b \quad (D_n \in L(Y,X),\ T_n := I - D_n A) \tag{2.3}$$

zur Lösung linearer Gleichungen

$$Ax = b \quad (A \in L(X,Y),\ b \in Y) \tag{2.4}$$

auftreten. Die Reste $r_n := b - Ax_n$ genügen der Iterationsvorschrift

$$r_{n+1} = S_n r_n \quad (S_n := I - AD_n). \tag{2.5}$$

Besitzt die Gleichung (2.4) bezüglich der Folge (D_n) verallgemeinerte Lösungen (siehe /2: S. 32/), d. h, gibt es Elemente $\tilde{x} \in X$ mit $D_n A\tilde{x} = D_n b \quad (\forall n)$, so nimmt (2.3) nach der Transformation $u_n := x_n - \tilde{x}$ die Gestalt

$$u_{n+1} = T_n u_n \tag{2.6}$$

an. Die Iterierten u_{n+1} und r_{n+1} kann man explizit auch durch die Formeln

$$u_{n+1} = P_n u_o,\ r_{n+1} = Q_n r_o \quad (P_n := T_n T_{n-1} \cdots T_o,\ Q_n := S_n S_{n-1} \cdots S_o)$$

angeben. Wir setzen nun die Existenz der Grenzoperatoren $P_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ und $Q_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} Q_n$ im Sinne der punktweisen Operatortopologie voraus.

Satz 2.11: Die Aussage

a) $D_n A P_\infty = O \ (\forall n) \Leftrightarrow R(P_\infty) = \bigcap\limits_n N(D_n A)$

ist wahr. Wählt man $A_n = D_n A$ und $P = Q = P_\infty$, so gehört sie zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$ (siehe (2.1)). Damit ist auch die Aussage

b) $P_\infty D_n A = O \ (\forall n) \Leftrightarrow N(P_\infty) = \mathcal{L}(\bigcup\limits_n R(D_n A))$

wahr.

Beweis: Zunächst gilt mit $A_n = D_n A$

$$P_\infty = I - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=o}^{n} T_n T_{n-1} \cdots T_{i+1} A_i = I - \sum_{i=o}^{\infty} A_i T_{i-1} T_{i-2} \cdots T_o$$

und daher

$$P'_\infty = I - \sum_{i=o}^{\infty} T'_o \dots T'_{i-2} T'_{i-1} A'_i .$$

Das bedeutet

$$R(P_\infty) \supseteq \bigcap_n N(A_n), \; R(P'_\infty) \supseteq \bigcap_n N(A'_n).$$

Andererseits erhält man

$$A_n P_\infty = O \; (\forall n) \Leftrightarrow R(P_\infty) \subseteq \bigcap_n N(A_n),$$

$$A'_n P'_\infty = O \; (\forall n) \Leftrightarrow R(P'_\infty) \subseteq \bigcap_n N(A'_n).$$

Also ist die Aussage a) wahr und gehört zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$. Außerdem kann man offenbar in a) die Menge $R(P_\infty)$ durch $\mathcal{L}(R(P_\infty))$ und in ihrer T_1-Transformation die Menge $R(P'_\infty)$ durch $\mathcal{L}(R(P'_\infty))$ ersetzen. Nach Folgerung 2.9 ergibt sich daraus die Wahrheit der Aussage b).

Entsprechend zeigt man

Satz 2.11': Die Aussage

a) $AD_n Q_\infty = O \; (\forall n) \Leftrightarrow R(Q_\infty) = \bigcap_n N(AD_n)$

ist wahr. Wählt man $A_n = AD_n$ und $P = Q = Q_\infty$, so gehört sie zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$. Damit ist auch die Aussage

b) $Q_\infty AD_n = O \; (\forall n) \Leftrightarrow N(Q_\infty) = \mathcal{L}(\bigcup_n R(AD_n))$

wahr.

Satz 2.12: Die Aussage

a) $D_n Q_\infty = O \; (\forall n) \Leftrightarrow R(Q_\infty) = \bigcap_n N(D_n)$

ist wahr. Wählt man $A_n = D_n$, $P = Q_\infty$ und $Q = P_\infty$, so gehört sie zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$ (siehe (2.1)). Damit ist auch die Aussage

b) $P_\infty D_n = O \; (\forall n) \Leftrightarrow N(P_\infty) = \mathcal{L}(\bigcup_n R(D_n))$

wahr.

Beweis: Es sei $D_n Q_\infty = 0 \ (\forall n)$ bzw. $D_n' P_\infty' = 0 \ (\forall n)$ erfüllt.

Dann ergibt sich jeweils

$$R(Q_\infty) \subseteq \bigcap_n N(D_n) \subseteq \bigcap_n N(AD_n), \quad R(P_\infty') \subseteq \bigcap_n N(D_n') \subseteq \bigcap_n N(A'D_n').$$

Außerdem folgt

$$AD_n Q_\infty = 0 \ (\forall n), \quad A'D_n' P_\infty' = (D_n A)' P_\infty' = 0 \ (\forall n)$$

und nach Satz 2.11 bzw. Satz 2.11'

$$R(Q_\infty) = \bigcap_n N(AD_n), \quad R(P_\infty') = \bigcap_n N((D_n A)') = \bigcap_n N(A'D_n').$$

Daher entsteht

$$R(Q_\infty) = \bigcap_n N(D_n), \quad R(P_\infty') = \bigcap_n N(D_n').$$

Umgekehrt gewinnt man daraus unmittelbar

$$D_n Q_\infty = 0 \ (\forall n), \quad D_n' P_\infty' = 0 \ (\forall n).$$

Also ist die Aussage a) wahr und gehört zu $\mathcal{Z}_o(T_1)$. Nach Folgerung 2.9 ist damit auch die Aussage b) wahr. Denn man kann in a) die Menge $R(Q_\infty)$ durch $\mathcal{L}(R(Q_\infty))$ und in ihrer T_1-Transformation die Menge $R(P_\infty')$ durch $\mathcal{L}(R(P_\infty'))$ ersetzen.

Es sei jetzt X ein Hilbert-Raum.

Satz 2.13: Die folgende Aussage ist wahr:

a) Gilt $D_n A P_\infty = 0 \ (\forall n)$, so ist

$$P_\infty = P_\infty^* \Leftrightarrow N(P_\infty) = \mathcal{L}(\bigcup_n R(A^* D_n^*)).$$

Wählt man $A_n = D_n A$ und $P = Q = P_\infty$, dann gehört a) zu $\mathcal{Z}_o(\tilde{T}_1)$ (siehe (2.1')). Damit ist auch die Aussage wahr:

b) Gilt $P_\infty D_n A = 0 \ (\forall n)$, so ist $P_\infty = P_\infty^* \Leftrightarrow R(P_\infty) = \bigcap_n N(A^* D_n^*)$.

Beweis: Es sei $A_n = D_n A \ (\forall n)$. Außerdem gelte

$$A_n P_\infty = (I-T_n) P_\infty = 0 \ (\forall n) \text{ bzw. } A_n^* P_\infty^* = (I-T_n^*) P_\infty = 0 \ (\forall n).$$

Nach Satz 2.11 bekommt man jeweils

$$R(P_\infty) = \bigcap_n N(A_n), \quad R(P_\infty^*) = \bigcap_n N(A_n^*).$$

Das bedeutet in Verbindung mit Folgerung 1.7

$$R(P_\infty)^\perp = \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n^*)), \quad R(P_\infty^*)^\perp = \mathcal{L}(\bigcup_n R(A_n)).$$

Da P_∞ und P_∞^* unter den gegebenen Voraussetzungen offenbar Projektoren sind, ist $P_\infty = P_\infty^*$ äquivalent zu $R(P_\infty)^\perp = N(P_\infty)$ bzw. $R(P_\infty^*)^\perp = N(P_\infty^*)$. Unter Berücksichtigung von Folgerung 2.9 erhält man daraus die Behauptungen.

Bemerkung: Zu den Sätzen 2.11 bis 2.13 lassen sich entsprechende Sätze formulieren, die von den Aussagen b) ausgehen und deren Zugehörigkeit zu einer gewissen Menge $\mathfrak{Z}_0(T_2)$ bzw. $\mathfrak{Z}_0(\tilde{T}_2)$ behaupten.

Literatur

/1/ Крейн, С. Г. : Линейные уравнения в банаховом пространстве. Москва I97I

/2/ Maeß, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Nova Acta Leopoldina, Neue Folge Nr. 238, Band 52, Halle 1979

/3/ Рудин, У. : Функциональный анализ. Москва I975 (Übersetzung aus dem Englischen).

/4/ Schott, D.: Projektionskerne einer Operatorfolge. Beiträge Anal. (erscheint demnächst)

/5/ Schott, D., und Peters, W.: Über Nullräume, Wertebereiche und Relationen von Operatoren, die bei instationären Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen auftreten. (Eingereicht bei Zeitschr. für Analysis und ihre Anwendungen)

/6/ Taylor, A. E.: Introduction to Functional Analysis. New York 1958

eingegangen: 01. 07. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Dieter Schott
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 69 - 77 (1981) 47H10

Brian Fisher

Common fixed points of mappings and set-valued mappings

In the following (X,d) is a complete metric space and $B(X)$ is the set of all nonempty, bounded subsets of X. The function $\delta(A,B)$ with A and B in $B(X)$ is defined by

$$\delta(A,B) = \sup\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

If A consists of a single point a we write

$$\delta(A,B) = \delta(a,B)$$

and if B also consists of a single point b we write

$$\delta(A,B) = \delta(a,b) = d(a,b).$$

It follows easily from the definition that

$$\delta(A,B) = \delta(B,A) \geq 0,$$

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

for all A,B and C in $B(X)$.

Now let $\{A_n : n = 1,2, \ldots\}$ be a sequence of nonempty subsets of X. We say that the sequence $\{A_n\}$ converges to the subset A of X if:

(i) each point a in A is the limit of a convergent sequence $\{a_n\}$, where a_n is in A_n for $n = 1,2, \ldots$,

(ii) for arbitrary $\epsilon > 0$, there exists an integer N such that $A_n \subseteq A_\epsilon$ for $n > N$, where A_ϵ denotes the set of all points x in X for which there exists a point a in A, depending on x, such that $d(x,a) < \epsilon$.

A is then said to be the limit of the sequence $\{A_n\}$.

It follows easily from the definition that if A is the limit of a sequence $\{A_n\}$ then A is closed.

Lemma: If $\{A_n\}$ and $\{B_n\}$ are sequences of bounded, nonempty subsets of a complete metric space (X,d) which converge to the bounded subsets A and B respectively, then the sequence $\{\delta(A_n,B_n)\}$ converges to $\delta(A,B)$.

__Proof:__ For arbitrary $\epsilon > 0$ there exists an integer N such that

$$\delta(A_n,B_n) \leq \delta(A_\epsilon,B_\epsilon) = \sup\{d(a',b') : a' \in A_\epsilon,\ b' \in B_\epsilon\},$$

for $n > N$. Now for each a' in A_ϵ and b' in B_ϵ we can find a in A and b in B with $d(a',a) < \epsilon$, $d(b',b) < \epsilon$ and so $d(a',b') < d(a,b) + 2\epsilon$. It follows that

$$\delta(A_n,B_n) < \sup\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\} + 2\epsilon = \delta(A,B) + 2\epsilon, \qquad (1)$$

for $n > N$.
Further, there exists an integer N' such that for each a in A and b in B we can find a_n in A_n and b_n in B_n with

$$d(a,a_n) < \epsilon,\ d(b,b_n) < \epsilon$$

for $n > N'$ and so

$$d(a,b) \leq d(a_n,b_n) + 2\epsilon.$$

It follows that

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \sup\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}\\ &\leq \sup\{d(a_n,b_n) : a_n \in A_n,\ b_n \in B_n\} + 2\epsilon \qquad (2)\\ &= \delta(A_n,B_n) + 2\epsilon\end{aligned}$$

for $n > N'$. The result of the lemma follows from inequalities (1) and (2).

Now let F be a mapping of a complete metric space (X,d) into $B(X)$. We say that the mapping F is __continuous__ at the point x in X if whenever $\{x_n\}$ is a sequence of points in X converging to x, the sequence $\{Fx_n\}$ in $B(X)$ converges to Fx in $B(X)$.
We say that F is a __continuous mapping__ of X into $B(X)$ if F is continuous at each point x in X. We say that a point z in X is a __fixed point__ of F if z is in Fz, see Kaulgud and Pai /3/.
We now prove the following theorem.

__Theorem 1:__ Let F be a continuous mapping of a complete metric space (X,d) into $B(X)$ and let I be a mapping of X into itself satisfying the inequality

$$\delta(Fx,Fy) \leq c.\max\{d(Ix,Iy),\ \delta(Ix,Fx),\ \delta(Iy,Fy),\ \delta(Ix,Fy),\ \delta(Iy,Fx)\} \qquad (3)$$

for all x, y in X, where $0 \leq c < 1$. If F and I commute and the range of I contains the range of F, then F and I have a unique common fixed point z and further $Fz = \{z\}$.

Proof: We let x_0 be an arbitrary point in X and define the sequence $\{x_n\}$ inductively. Having defined the point x_{n-1}, we choose a point y_n in the set Fx_{n-1}. Since the range of I contains the range of F we can now choose a point x_n with $Ix_n = y_n$.

Let us now assume that the sequence of real numbers $\{\delta(Fx_n, Fx_1)\}$ is unbounded. Then there exists an integer n such that

$$(1-c)\,\delta(Fx_n, Fx_1) > c\,\delta(Fx_1, Fx_0)$$

and

$$\delta(Fx_n, Fx_1) > \max\,\{\delta(Fx_r, Fx_1) : 0 \leq r < n\}. \tag{4}$$

These inequalities imply that

$$c\,\delta(Fx_r, Fx_0) \leq c\,[\delta(Fx_r, Fx_1) + \delta(Fx_1, Fx_0)] < \delta(Fx_n, Fx_1)$$

for $r = 0, 1, \ldots, n$ and so

$$\delta(Fx_n, Fx_1) > c.\max\,\{\delta(Fx_r, Fx_0) : 0 \leq r \leq n\}. \tag{5}$$

We will now prove by induction that

$$\delta(Fx_n, Fx_1) \leq c^k.\max\,\{\delta(Fx_r, Fx_s) : 1 \leq r, s \leq n\} \tag{6}$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$. This inequality is trivially true when $k=0$. Let us therefore assume that it holds for some k. Then using inequality (3) we have

$$\begin{aligned}\delta(Fx_n, Fx_1) &\leq c^k.\max\,\{\delta(Fx_r, Fx_s) : 1 \leq r, s \leq n\} \\ &\leq c^{k+1}.\max\,\{\delta(Fx_{r-1}, Fx_{s-1}),\ \delta(Fx_{r-1}, Fx_r), \\ &\qquad\qquad \delta(Fx_{s-1}, Fx_s),\ \delta(Fx_{r-1}, Fx_s), \\ &\qquad\qquad \delta(Fx_{s-1}, Fx_r) : 1 \leq r, s \leq n\} \\ &\leq c^{k+1}.\max\,\{\delta(Fx_r, Fx_s) : 0 \leq r, s \leq n\}.\end{aligned}$$

Using inequality (5), this inequality reduces to

$$\delta(Fx_n, Fx_1) \leq c^{k+1}.\max\,\{\delta(Fx_r, Fx_s) : 1 \leq r, s \leq n\}$$

and inequality (6) follows by induction.
Letting k tend to infinity in inequality (6) it follows that $\delta(Fx_n, Fx_1) = 0$, contradicting inequality (4). Our assumption that the sequence $\{\delta(Fx_n, Fx_1)\}$ is unbounded is therefore false. It follows that

$$M = \sup\{\delta(Fx_r, Fx_s) : r, s = 0, 1, 2, \ldots\}$$

is finite.
Now for arbitrary $\epsilon > 0$ choose an integer N such that $c^N M < \epsilon$. Using inequality (3) with $m, n > N$ we have

$$\begin{aligned}
\delta(Fx_m, Fx_n) &\leq c.\max\{\delta(Fx_{m-1}, Fx_{n-1}),\ \delta(Fx_{m-1}, Fx_m),\ \delta(Fx_{n-1}, Fx_n), \\
&\qquad\qquad \delta(Fx_{m-1}, Fx_n),\ \delta(Fx_{n-1}, Fx_m)\} \\
&\leq c.\max\{\delta(Fx_r, Fx_s),\ \delta(Fx_r, Fx_{r'}),\ \delta(Fx_s, Fx_{s'}) : \\
&\qquad\qquad m - 1 \leq r, r' \leq m;\ n - 1 \leq s, s' \leq n\} \\
&\leq c^N.\max\{\delta(Fx_r, Fx_s),\ \delta(Fx_r, Fx_{r'}),\ \delta(Fx_s, Fx_{s'}) : \\
&\qquad\qquad m - N \leq r, r' \leq m;\ n - N \leq s, s' \leq n\} \\
&\leq c^N M < \epsilon.
\end{aligned}$$

Thus if z_n is an arbitrary point in Fx_n for $n = 1, 2, \ldots$ we have

$$d(z_m, z_n) \leq \delta(Fx_m, Fx_n) < \epsilon$$

for $m, n > N$. It follows that the sequence $\{z_n\}$ is a Cauchy sequence in the complete metric space X and so has a limit z in X, the point z being independent of the particular choice of each z_n. In particular, the sequence $\{Ix_n\}$ will converge to z and further, the sequence of sets $\{Fx_n\}$ will converge to the set $\{z\}$.

The continuity of the mapping F implies that the sequence $\{FIx_n\}$ converges to Fz and on using inequality (3) we have

$$\begin{aligned}
\delta(FIx_n, Fx_n) &\leq c.\max\{d(I^2x_n, Ix_n),\ \delta(I^2x_n, FIx_n),\ \delta(Ix_n, Fx_n), \\
&\qquad\qquad \delta(I^2x_n, Fx_n),\ \delta(Ix_n, FIx_n)\} \\
&\leq c.\max\{\delta(FIx_{n-1}, Ix_n),\ \delta(FIx_{n-1}, FIx_n),\ \delta(Ix_n, Fx_n), \\
&\qquad\qquad \delta(FIx_{n-1}, Fx_n),\ \delta(Ix_n, FIx_n)\},
\end{aligned}$$

since Ix_n is in Fx_{n-1} and so I^2x_n is in $IFx_{n-1} = FIx_{n-1}$.

Letting n tend to infinity in this inequality and using the lemma we get

$$\delta(Fz,z) \leq c.\max\{\delta(Fz,z),\ \delta(Fz,Fz)\} = c\ \delta(Fz,Fz).$$

Again on using inequality (3) we have

$$\delta(FIx_n,FIx_n) \leq c.\max\{d(I^2x_n,I^2x_n),\ \delta(I^2x_n,FIx_n)\}$$
$$\leq c\ \delta(FIx_{n-1},FIx_n)$$

and on letting n tend to infinity we get

$$\delta(Fz,Fz) \leq c\ \delta(Fz,Fz).$$

It follows that $\delta(Fz,Fz) = 0$ and then from what we have just proved that $\delta(Fz,z) = 0$. The set Fz must therefore consist of the single point z and so

$$Fz = \{z\}.$$

There must now exist a point w such that $Iw = z$ since the range of I contains the range of F. Using inequality (3) we have

$$\delta(Fx_n,Fw) \leq c.\max\{d(Ix_n,Iw),\ \delta(Ix_nFx_n),\ \delta(Iw,Fw),\ \delta(Ix_n,Fw),\ \delta(Iw,Fx_n)\}$$

and on letting n tend to infinity we get

$$\delta(z,Fw) \leq c\ \delta(z,Fw).$$

It follows that $Fw = \{z\}$ and so $\{z\} = Fz = FIw = IFw = \{Iz\}$. Thus z is also a fixed point of I.

Now suppose that F and I have a second common fixed point z'. Then

$$\delta(z',Fz') \leq \delta(Fz',Fz') \leq c.\max\{d(Iz',Iz'),\ \delta(Iz',Fz')\}$$
$$= c\ \delta(z',Fz')$$

so that $\delta(z',Fz') = 0$. It follows that $Fz' = \{z'\}$ and so

$$d(z,z') = \delta(Fz,Fz') \leq cd(z,z').$$

The uniqueness of z follows. This completes the proof ot the theorem.

<u>Corollary 1</u>: Let T be a continuous mapping and let I be a mapping of a complete metric space (X,d) into itself satisfying the inequality

$$\delta(Tx,Ty) \leq c.\max\{d(Ix,Iy),\ d(Ix,Tx),\ d(Iy,Ty),\ d(Ix,Ty),\ d(Iy,Tx)\}$$

for all x, y in X, where $0 \leq c < 1$. If T and I commute and the range of I contains the range of T, then T and I have a unique common fixed point z.

Proof: Define a mapping F of X into $B(X)$ by putting

$$Fx = \{Tx\}$$

for all x in X. The conditions of the theorem are satisfied for F and I and so they have a unique common fixed point z. The point z is then of course a common fixed point of T and I.

Corollary 2: Let I be a mapping of a complete metric space (X,d) onto itself satisfying the inequality

$$d(x,y) \leq c.\max\{d(Ix,Iy),\ d(Ix,x),\ d(Iy,y),\ d(Ix,y), d(Iy,x)\}$$

for all x, y in X, where $0 \leq c < 1$. Then I has a unique fixed point z.

Proof: Let T be the identity mapping in corollary 1. Since I maps X onto X, the range of I contains the range of T. The result follows immediately.

The results of these two corollaries for bounded metric spaces were given in /1/.
We finally prove a theorem for compact metric spaces.

Theorem 2: Let F be a continuous mapping of a compact metric space (X,d) into $B(X)$ and let I be a continuous mapping of X into itself satisfying the inequality

$$\delta(Fx,Fy) < \max\{d(Ix,Iy),\ \delta(Ix,Fx),\ \delta(Iy,Fy),\ \delta(Ix,Fy),\ \delta(Iy,Fx)\}$$

for all x, y in X for which the right-hand side of the inequality is positive. If F and I commute and the range of I contains the range of F, then F and I have a unique common fixed point z and further $Fz = \{z\}$.

Proof: Suppose first of all that there exists $c < 1$ for which F and I satisfy inequality (3) for all x, y in X for which the right-hand side of the inequality is positive. Then when the right-hand side of the inequality is zero we must have

$$Fx = Fy = \{Ix\} = \{Iy\}$$

which implies that the left-hand side of the inequality must also be zero. Inequality (3) will therefore be satisfied for

all x, y in X and the result follows from theorem 1.
Now suppose that no such $c < 1$ exists. Then if $\{c_n\}$ is a monotonically increasing sequence of real numbers which converges to one, we can find sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ in X such that

$$\delta(Fx_n,Fy_n) > c_n.\max\{d(Ix_n,Iy_n),\ \delta(Ix_n,Fx_n),\ \delta(Iy_n,Fy_n),\ \delta(Ix_n,Fy_n),\ \delta(Iy_n,Fx_n)\} \tag{7}$$

for $n = 1,2, \ldots$. Since X is compact we may assume, by taking subsequences if necessary, that the sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge to x and y respectively. Thus on letting n tend to infinity in inequality (7) we have, since F and I are continuous

$$\delta(Fx,Fy) \geq \max\{d(Ix,Iy),\delta(Ix,Fx),\delta(Iy,Fy),\delta(Ix,Fy),\delta(Iy,Fx)\}.$$

This is possible only if

$$Fx = Fy = \{Ix\} = \{Iy\}$$

and so

$$F^2x = FIx = IFx = \{I^2x\}.$$

Now suppose that $FIx \neq Fx$. Then

$$\delta(FIx,Fx) < \max\{d(I^2x,Ix),\ \delta(I^2x,FIx),\ \delta(Ix,Fx),\ \delta(I^2x,Fx),\ \delta(Ix,FIx)\} = \delta(FIx,Fx),$$

giving a contradiction. It follows that $Ix = z$ is a fixed point of F and $Fz = \{z\}$. Further

$$\{Iz\} = \{I^2x\} = FIx = Fz = \{z\}$$

and so z is also a fixed point of I.

Finally suppose that F and I have a second distinct common fixed point z'. Then if $Fz' \neq \{z'\}$

$$\delta(Fz',Fz') < \max\{d(Iz',Iz'),\ \delta(Iz',Fz')\} = \delta(z',Fz') \leq \delta(Fz',Fz')$$

since z' is in Fz'. This gives a contradiction and so $Fz' = \{z'\}$. Thus

$$\begin{aligned} d(z,z') &= \delta(Fz,Fz') \\ &< \max\{d(Iz,Iz'),\delta(Iz,Fz),\delta(Iz',Fz'),\delta(Iz,Fz'),\delta(Iz',Fz)\} = d(z,z'), \end{aligned}$$

giving a contradiction. The common fixed point z must therefore be unique. This completes the proof of the theorem. The following corollaries follow easily.

<u>Corollary 1:</u> Let F be a continuous mapping of a compact metric space (X,d) into $B(X)$ satisfying the inequality

$$\delta(Fx,Fy) < \max\{d(x,y),\ \delta(x,Fx),\ \delta(y,Fy),\ \delta(x,Fy),\ \delta(y,Fx)\}$$

for all x, y in X for which the right-hand side of the inequality is positive. Then F has a unique fixed point z and further $Fz = \{z\}$.

<u>Corollary 2:</u> Let T and I be continuous mappings of a compact metric space (X,d) into itself satisfying the inequality

$$d(Tx,Ty) < \max\{d(Ix,Iy),d(Ix,Tx),d(Iy,Ty),d(Ix,Ty),d(Iy,Tx)\}$$

for all x, y in X for which the right-hand side of the inequality is positive. If T and I commute and the range of I contains the range of T, then T and I have a unique common fixed point z.

<u>Corollary 3:</u> Let I be a continuous mapping of a compact metric space (X,d) onto itself satisfying the inequality

$$d(x,y) < \max\{d(Ix,Iy),d(Ix,x),d(Iy,y),d(Ix,y),d(Iy,x)\}$$

for all x, y in X for which the right-hand side of the inequality is positive. Then I has a unique fixed point z.

The results of corollaries 2 and 3 were also given in /1/. For a related result, see /2/.

<u>References</u>

/1/ Fisher, B.: Common fixed points of commuting mappings. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica (to appear)

/2/ Fisher, B.: Fixed points of mappings and set-values mappings. (submitted for publication)

/3/ Kaulgud, N. N., and Pai, D. V.: Fixed point theorems for setvalued mappings. Nieuw Arch. Wisk. <u>23</u>, 49 - 66 (1975)

received: April 28, 1981

Author's address:

Brian Fisher
Department of Mathematics
The University
Leicester
LE1 7RH
England

Rostock. Math. Kolloq. 18, 79 - 87 (1981) 65H05

Wolfgang Gerlach

Modifikation eines Verfahrens zur simultanen Berechnung von zwei Nullstellen einer Funktion einer reellen Veränderlichen

1. Einführung

In /1/ wurde ein Verfahren zur simultanen Bestimmung von zwei Nullstellen einer Funktion einer reellen Veränderlichen beschrieben. Der Grundgedanke des Verfahrens ist die Abspaltung eines quadratischen Faktors, dessen Nullstellen gleichzeitig Nullstellen der betrachteten Funktion sind. Das Verfahren besitzt im Fall einfacher Nullstellen die Konvergenzgeschwindigkeit 2.

Eine Modifiaktion des Verfahrens, die auch für mehrfache Nullstellen die Konvergenzgeschwindigkeit 2 besitzt, wurde in /2/ beschrieben.

Im Folgenden wird ähnlich wie in/2/ in das Verfahren ein freier Parameter eingeführt. Durch geeignete Bestimmung dieses Parameters in jedem Iterationsschritt erreicht man eine Erweiterung des Konvergenzbereiches und vermeidet einen unkontrollierten vorzeitigen Abbruch. Es wird eine Reihe von Abbruchmöglichkeiten diskutiert, die eine Anwendung des Algorithmus für spezielle Aufgabenstellungen möglich machen.

2. Beschreibung des Verfahrens

Es sei $f: R^1 \to R^1$, einmal stetig differenzierbar.

Nach dem folgenden Schema wird ein Iterationsverfahren organisiert:

1. Schritt: Zu $x_1, x_2 \in R^1$ mit $x_1 \neq x_2$ berechne man

$f_i = f(x_i)$ und $f_i' = f'(x_i)$ für $i = 1,2$.

2. Schritt: Mit geeignet gewähltem $w \in (o,1]$ berechne man p,q als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(x_1f_1' - wf_1)p + f_1'q = 2wx_1f_1 - (x_1)^2f_1',$$
$$(x_2f_2' - wf_2)p + f_2'q = 2wx_2f_2 - (x_2)^2f_2'. \tag{1}$$

<u>3. Schritt:</u> Man bestimme $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ als Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

Dieses Schema liefert für $w=1$ das in /1/ angegebene und für $w = m_{1,2}$ das in /2/ angegebene Iterationsverfahren.

Die Determinante der Koeffizientenmatrix des Systems (1) ist

$$\det(w) = f_1'f_2'(x_1-x_2) - w(f_1f_2'-f_2f_1'). \tag{3}$$

Daraus erhält man unmittelbar

<u>Aussage 1:</u> Seien $x_1 \neq x_2$ und $f_1'f_2' \neq 0$. Dann ist für hinreichend kleines $w > 0$ das System zur Bestimmung von p,q regulär, d. h. $\det(w) \neq 0$.

<u>Aussage 2:</u> Falls x_1^*, x_2^* $(x_1^* \neq x_2^*)$ einfache Nullstellen von f sind, dann ist für hinreichend gute Näherungen $x_1 \neq x_2$ $\det(1) \neq 0$.

Es seien $f_1'f_2' \neq 0$ und $\det(w) \neq 0$. Dann erhält man mit

$$s(x) := f(x)/f'(x) \text{ und } g_N(x,w) := x - ws(x)$$

als Lösung des Systems (1) mit $n := g_N(x_1,w) - g_N(x_2,w)$

$$\begin{aligned} p(w) &= -(g_N(x_1,w) + g_N(x_2,w)) - w^2(s^2(x_1) - s^2(x_2))/n \\ q(w) &= g_N(x_1,w)g_N(x_2,w) \\ &\quad - w^2(s^2(x_1)g_N(x_2,w) - s^2(x_2)g_N(x_1,w))/n. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Resolvente der quadratischen Gleichung (2)

$$\text{res}(w) := p^2(w) - 4q(w) = (g_N(x_1,w) - g_N(x_2,w))^2 + O(w^2)$$

ist in der Umgebung von $w = 0$ stetig, und es gilt

$$\text{res}(0) = (x_1-x_2)^2.$$

Damit ergibt sich

Aussage 3: Falls $x_1 \neq x_2$ und $f_1'f_2' \neq 0$, dann ist für hinreichend kleines $w > 0$ stets $res(w) > 0$, und die Lösungen der quadratischen Gleichung (2) sind reell und verschieden.

Aussage 4: Falls x_1^*, x_2^* $(x_1^* \neq x_2^*)$ einfache Nullstellen von f sind, dann ist für hinreichend gute Näherungen $x_1 \neq x_2$

$$res(1) > 0,$$

und die Lösungen der quadratischen Gleichung (2) sind reell und verschieden.

Mit dem Ansatz

$$\overline{x}_i = g_N(x_i,w) + dx_i \quad \text{für } i = 1,2$$

erhält man aus

$$(x-\overline{x}_1)(x-\overline{x}_2) = x^2 + px + q$$

durch Koeffizientenvergleich und unter Beachtung von (4) zur Bestimmung von dx_1, dx_2 die Beziehungen

$$dx_1 + dx_2 = w^2(s^2(x_1) - s^2(x_2))/(g_N(x_1,w) - g_N(x_2,w))$$

$$dx_1 dx_2 + g_N(x_2,w)dx_1 + g_N(x_1,w)dx_2 =$$
$$- w^2(s^2(x_1)g_N(x_2,w) - s^2(x_2)g_N(x_1,w))/$$
$$(g_N(x_1,w) - g_N(x_2,w)).$$

Daraus folgt unmittelbar

Aussage 5: Falls $x_1 \neq x_2$ und $f_1'f_2' \neq 0$, dann gilt für $w \to 0$

$$\overline{x}_i = g_N(x_i,w) + O(w^2) \quad \text{für } i = 1,2.$$

Für die zugehörigen f-Werte gilt für $w \to 0$

$$f(\overline{x}_i) = f(x_i - ws(x_i) + O(w^2))$$

$$= f(x_i) + f'(x_i)(-ws(x_i)) + O(w^2) = (1-w)f(x_i) + O(w^2).$$

Daraus erhält man

Aussage 6: Falls $x_1 \neq x_2$ und $f_1'f_2' \neq 0$ und $f(x_i) \neq 0$, dann gilt für hinreichend kleines $w > 0$ stets

$$abs(f(\overline{x}_i)) < abs(f(x_i)).$$

Die Aussagen 1, 3, 6 kann man zu folgendem Satz zusammenfassen.

Satz 1: Seien $x_1 \neq x_2$, $f_1'f_2' \neq 0$ und $f(x_i) \neq 0$ für $i = 1$ und/ oder 2. Dann gilt für hinreichend kleines $w \in (0,1]$

a) das System zur Bestimmung von p,q ist regulär,

b) die Lösungen $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ der quadratischen Gleichung

$x^2 + px + q = 0$ sind reell und verschieden,

c) die Abstiegsbedingung $abs(f(\overline{x}_1)) < abs(f(x_1))$ ist erfüllt.

3. Abbruch der Iteration und Konvergenzeigenschaften

In /1/ wurde gezeigt, daß in dem Fall, daß x_1^*, x_2^* einfache Nullstellen von f sind, das Verfahren quadratisch konvergiert. Die Einführung von w erweitert den Konvergenzbereich. Außerdem ergeben sich verschiedene zusätzliche Abbruchmöglichkeiten.

A1) Es sei $x_1 \neq x_2$, und für alle $w \in (0,1]$ gelte

$\overline{x}_1 = x_1$ und $\overline{x}_2 = x_2$.

In diesem Fall ist $p = -(x_1+x_2)$ und $q = x_1x_2$, und wegen (1) gilt daher

$wf_1(x_2-x_1) = 0$ und $wf_2(x_1-x_2) = 0$,

also $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$.

1. Abbruchgrund: Es ist $x_1 \neq x_2$ und $abs(f(x_1)) + abs(f(x_2)) = 0$.

Im folgenden sei $x_1 \neq x_2$ und $abs(f_1) + abs(f_2) > 0$.

A2) Abbruch des Verfahrens, da für alle $w \in (0,1]$ gilt

$det(w) = 0$.

Wegen (3) gilt dann $f_1'f_2' = 0$ und $f_1f_2' - f_2f_1' = 0$.

2. Abbruchgrund: Es ist $f_1' = 0$ und $f_2' = 0$.

3. Abbruchgrund: Es ist $f_1' = 0$ und $f_1 = 0$
oder $f_2' = 0$ und $f_2 = 0$.

Im folgenden sei $x_1 \neq x_2$, $abs(f_1) + abs(f_2) > 0$ und $abs(f_1'f_2') + abs(f_1f_2' - f_2f_1') > 0$.

A3) Abbruch des Verfahrens, da $res(w) \leq 0$ für alle $w \in (0,1]$ gilt.

a) Sei $f_1'f_2' \neq 0$. Dann ist nach Aussage 3 für hinreichend kleines $w > 0$ stets $res(w) > 0$, also bricht das Verfahren nicht ab.

b) Sei o.B.d.A. $f_1' = 0$ und $f_1f_2' - f_2f_1' \neq 0$.

Nun ist für $f_1' = 0$ wegen der ersten Gleichung von (1)

$$-wf_1p = 2wx_1f_1, \text{ d. h. } p = -2x_1 = -(\overline{x}_1+\overline{x}_2),$$

also

$$\overline{x}_1 = 2x_1 - \overline{x}_2.$$

Daraus folgt

$$q = \overline{x}_1\overline{x}_2 = (2x_1-\overline{x}_2)\overline{x}_2$$

und

$$res(w) = p^2 - 4q = 4(x_1-\overline{x}_2)^2.$$

Also gilt stets $res(w) \geq 0$ und $res(w) = 0$ genau dann, wenn $\overline{x}_2 = x_1$ ist, d. h. aber, wenn $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = x_1$ gilt.

Dies ist aber wegen der zweiten Gleichung von (1) nur möglich, falls

$$f_2' = 0 \text{ und } f_2 = 0$$

gilt, im Widerspruch zu $f_1f_2' - f_2f_1' \neq 0$.

A4) Abbruch des Verfahrens, da für alle $w \in (0,1]$ gilt

$$abs\ f(\overline{x}_1) \geq abs(f_1) \text{ und } abs(f(\overline{x}_2)) \geq abs(f_2).$$

Aus Aussage 6 folgt, daß das Verfahren nicht abbrechen kann, sofern $f_1'f_2' \neq 0$ und $abs(f_1) + abs(f_2) > 0$ ist.

Wegen Abbruchgrund 1, 2, 3 kann höchtens dann noch ein zusätzlicher Abbruch erfolgen, wenn gilt:

$$abs(f_1') + abs(f_2) = 0 \text{ oder } abs(f_1) + abs(f_2') = 0.$$

Sei $f_1' = 0$ und $f_2 = 0$. Dann gilt nach (1)

$$-wf_1p = 2wx_1f_1 \text{ und } x_2f_2'p + f_2'q = -(x_2)^2f_2',$$

woraus folgt

$$p = -2x_1 \text{ und } q = x_2(2x_1-x_2).$$

Die quadratische Gleichung (2) hat dann die von w unabhängigen

Lösungen

$$\bar{x}_1 = 2x_1 - x_2 \text{ und } \bar{x}_2 = x_2,$$

so daß der betrachtete Fall tatsächlib zum Abbruch führen kann. Zusammenfassend erhält man den folgenden Satz.

Satz 2: Falls die Iteration in x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) abbricht, dann sind wenigstens zwei der Größen f_1, f_2, f_1', f_2' gleich Null.

4. Numerische Beispiele

Mit einem ALGOL-Programm für den R-300 (Gleitkommarechnung, 8 Mantissenstellen) wurde eine Reihe von Testbeispielen gerechnet. Die Dämpfung wurde durch eine einfache Verkleinerungsstrategie ($w \to w/10$ bzw. $w \to w/2$) realisiert. Sie wurde teilweise zu Beginn der Iteration benötigt (Erweiterung des Konvergenzbereiches) und generell am Ende der Iteration, wenn für die Grenzwerte gilt

$$x_1^* \neq x_2^* \text{ und } \mathrm{abs}(f(x_1^*)) + \mathrm{abs}(f(x_2^*)) \neq 0.$$

Beispiel 1: $f(x) = \sin(x)$
Startwerte: $x_1 = 1.5$, $x_2 = 4.5$
Dieses Beispiel konnte in /1/ nicht behandelt werden.

i	w	$x^i_{1,2}$	$f^i_{1,2}$
0	----	1.5 4.5	.99 # 0 -.97 # 0
1	.25	.51609105 # 0 .28648250 # 1	.49 # 0 .27 # 0
2	1.00	.50128900 #-1 .31228436 # 1	.50 #-1 .18 #-1
3	1.00	.75920000 #-3 .31414828 # 1	.75 #-3 .10 #-3
4	1.00	.20000000 #-6 .31415926 # 1	.19 #-6 .53 #-7
5	1.00	0 .31415926 # 1	0 .53 #-7

Beispiel 2: $f(x) = 100(x^2-1)^2 + (x-1)^2 - 10$

Diese Funktion besitzt vier reelle Nullstellen.

a) Startwerte: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$

i	w	$x^i_{1,2}$	$f^i_{1,2}$
0	----	0	.91# 2
		.5	.46# 2
1	1.00	-.75994810# 0	.10# 2
		.74746380# 0	.95# 1
2	1.00	-.84296915# 0	.17# 1
		.81635925# 0	.11# 1
3	1.00	-.86162945# 0	.10# 0
		.82690475# 0	.30# -1
4	1.00	-.86281800# 0	.42# -3
		.82719070# 0	.20# -4
5	1.00	-.86282300# 0	.17# -5
		.82719090# 0	-.17# -5

b) Startwerte: $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.0$

i	w	$x^i_{1,2}$	$f^i_{1,2}$
0	----	1.5	.14# 3
		2.0	.89# 3
1	.50	.14319952# 1	.10# 3
		.17246048# 1	.38# 3
:	Dämpfung in jedem Schritt		
21	.03125	.13201435# 1	.45# 2
		.18235051# 1	.46# 2
22	1.00	.10748543# 1	-.75# 1
		.11028811# 1	-.53# 1
:	ohne Dämpfung		
27	1.00	.82719085# 0	.40# -5
		.11471209# 1	-.22# -4

<u>Beispiel 3:</u> $f(x) = 100(x^2-1)^2 + (x-1)^2 - 1$

Diese Funktion besitzt zwei reelle Nullstellen.

a) Startwerte: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$

i	w	$x^i_{1,2}$	$f^i_{1,2}$
0	----	0 .5	.10# 3 .55# 2
1	1.00	-.79906035# 0 .78649125# 0	.15# 2 .13# 2
⋮	ohne Dämpfung		
7	1.00	-.10175316# 1 .94875255# 0	.31# 1 0
8	.10	-.10000399# 1 .94875255# 0	.30# 1 0
⋮	Dämpfung in jedem Schritt		
13	.10# -4	-.99485930# 0 .94875255# 0	.29# 1 0

b) Startwerte: $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$

i	w	$x^i_{1,2}$	$f^i_{1,2}$
0	----	.5 1.0	.55 # 2 -.10 # 1
1	.50	.74265750 # 0 1.0	.19 # 2 -.10 # 1
2	.50	.82876345 # 0 1.0	.88 # 1 -.10 # 1
3	1.00	.98360105 # 0 .10163990 # 1	-.89 # 0 -.89 # 0
4	1.00	.94971270 # 0 .10495866 # 1	-.36 # -1 .35 # -1
5	1.00	.94875430 # 0 .10487518 # 1	-.66 # -4 -.15 # -4

Literatur

/1/ Berg, L.: On the Simultaneous Calculation of Two Zeros. Computing 24, 87 - 91 (1980)

/2/ Stade, C.: Ein Verfahren mit quadratischer Konvergenzgeschwindigkeit zur simultanen Berechnung zweier Nullstellen beliebiger Ordnung. Rostock. Math. Kolloq. 16, 95 - 101 (1981)

eingegangen: 20. 05. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. Wolfgang Gerlach
Bergakademie Freiberg
Sektion Mathematik
Bernhard-v.-Cotta-Str. 2
DDR-9200 Freiberg

Rostock. Math. Kolloq. 18, 89 - 96 (1981)   65H05

Gerhard Maeß

Simultane Polynomaufspaltung in Quadratfaktoren[1]

Die Idee, Polynome in Linearfaktoren aufzuspalten, indem man das Newton-Verfahren auf das nichtlineare Gleichungssystem der Vietaschen Wurzelsätze anwendet, geht auf Weierstraß zurück (vgl. Kerner /1/). In ähnlicher Weise kann man auch eine Aufspaltung in Quadratfaktoren herleiten (vgl. Filippi /2/ und die dort angegebene Literatur sowie Albrand /3/).
Nach einer elementaren Herleitung des Aufspaltungsalgorithmus wird im ersten Teil dieser Arbeit gezeigt, daß die Rechnung bei reellen Polynomkoeffizienten auch für komplexe Nullstellenpaare vollständig in reeller Arithmetik durchgeführt werden kann und damit für programmierbare Tisch- und Taschenrechner geeignet ist. (Andere Nullstellenverfahren, u. a. das von L. Berg /4/ vorgeschlagene, benötigen dagegen komplexe Arithmetik.) Der Algorithmus arbeitet ohne Fallunterscheidung zwischen reellen und komplexen Wurzelpaaren und schließt im Gegensatz zu /3/ reelle Doppelwurzeln nicht aus. Testrechnungen, die u. a. die komplexen Einheitswurzeln als Startwerte benutzen, zeigen, daß an die Anfangsnäherungen keine hohen Ansprüche gestellt zu werden brauchen. Albrand vermutet sogar, daß das Verfahren global konvergent ist.
Im zweiten Teil der Arbeit wird ein modifizierter Algorithmus hergeleitet, der mit einem geringeren Rechenaufwand pro Iterationsschritt auskommt aber genauere Startwerte benötigt.

Algorithmus 1

Das Ausgangspolynom sei gegeben in der Gestalt

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten a_k und geradem n.

---

1 Vortrag, gehalten auf der Tagung "Numerische Behandlung von nichtlinearen Problemen" (27. - 30. 04. 1981, Weißig, Sächs. Schweiz; Leiter: Prof. Dr. J. W. Schmidt, Technische Universität Dresden).

(Ist n ungerade, so fügt man die Nullstelle $x = 0$ hinzu, geht also zu einem Polynom $\tilde{P}(x) = x\,P(x)$ über.)
Gesucht ist die multiplikative Darstellung

$$P(x) = a_o \prod_{k=1}^{m} (x^2 + p_k^* x + q_k^*); \quad m = \frac{n}{2}. \tag{2}$$

Mit vorgegebenen Näherungen p_k, q_k bilden wir die Quadratfaktoren

$$Q_k(x) = x^2 + p_k x + q_k, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

und das Näherungspolynom

$$Q(x) = a_o \prod_{k=1}^{m} Q_k(x). \tag{4}$$

Gesucht sind Korrekturen

$$\delta Q_k(x) := x\,\delta p_k + \delta q_k, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{5}$$

die die Bedingung

$$a_o \prod_{k=1}^{m} \left[Q_k(x) + \delta Q_k(x)\right] = P(x) \tag{6}$$

identisch in x erfüllen. Seien

$$x_{1,2}^{(k)} = u_k \pm i v_k \tag{7}$$

mit

$$u_k := -\frac{1}{2} p_k; \quad v_k = \sqrt{q_k - u_k^2} \tag{8}$$

die beiden Wurzeln des Quadratfaktors $Q_k(x)$. Setzt man in (6) $x = u_j + iv_j$, $j = 1,2,\ldots,m$, und vernachlässigt die in den Fehlergrößen nichtlinearen Terme, so ergibt sich in linearer Näherung für jedes j

$$\delta Q_j(u_j + iv_j)\; a_o \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} Q_k(u_j + iv_j) = P(u_j + iv_j) \tag{9}$$

oder nach Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} R(u\,\delta p + \delta q) - v^2 T\,\delta p &= b_{n-1}\,u + b_n \\ R\,\delta p + T(u\,\delta p + \delta q) &= b_{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Der Index j ist hier der Einfachheit halber weggelassen, und die Abkürzungen R,T sind durch

$$R + ivT .= a_o \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} Q_k(u+iv) \tag{11}$$

definiert. Sie können rekursiv aus den Größen

$$\begin{aligned} T_k &.= p_k - p, \\ R_k &.= q_k - q + uT_k, \quad k = 1,2,\dots,m; \quad k \neq j, \end{aligned} \tag{12}$$

berechnet werden:

$R. = a_o;\ T .= 0$

$$\left[\begin{array}{l} k = 1,2,\dots,m;\ k \neq j, \\ R. = RR_k - v^2TT_k, \\ T. = RT_k + TR_k. \end{array}\right. \tag{13}$$

Der Wert des Polynoms $P(x)$ an der Stelle $x = u + iv$ ergibt sich in üblicher Weise aus

$$P(u+iv) = (u+iv)b_{n-1} + b_n, \tag{14}$$

wo die Koeffizienten b_{n-1} und b_n mit Hilfe des doppelzeiligen Hornerschemas

$b_{-1} = 0;\ b_o .= a_o$

$$\left[\begin{array}{l} r = 1,2,\dots,n-1 \\ b_r .= a_r - p\, b_{r-1} - q\, b_{r-2} \end{array}\right. \tag{15}$$

$b_n .= a_n - q\, b_{n-2}$

berechnet werden. Aus (10) erhält man durch leichte Umformung für jedes j ein 2 × 2-Gleichungssystem der Form

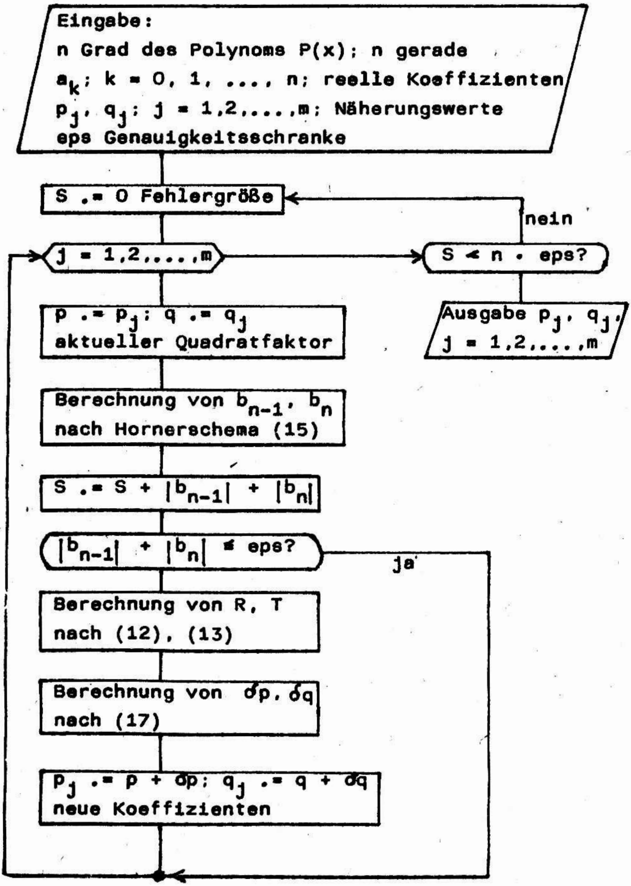
$$\begin{aligned} (R + Tu)\,\delta p + T\,\delta q &= b_{n-1}, \\ -\,qT\,\delta p + (R - Tu)\,\delta q &= b_n \end{aligned} \tag{16}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} D. &= R^2 + v^2T^2 \\ \delta p &= [(R-Tu)b_{n-1} - Tb_n]/D \\ \delta q &= [(R+Tu)b_n + Tqb_{n-1}]/D. \end{aligned} \tag{17}$$

Für die eindeutige Auflösbarkeit muß vorausgesetzt werden, daß verschiedene Quadratfaktoren $Q_k(x)$, $Q_l(x)$, $k \neq l$, des Näherungspolynoms $Q(x)$ voneinander verschiedene Wurzeln besitzen. (Das bedeutet nicht, daß $P(x)$ keine Mehrfachwurzeln besitzen darf). Insgesamt ergeben sich die im Ablaufplan 1 angegebenen Rechenschritte.

<u>Ablaufplan 1</u>



Algorithmus 2

Wenn die Absolutglieder b_{n-1}, b_n der Gleichungssysteme (16) im Verlauf der Iteration betragsmäßig wesentlich kleiner als die Polynomkoeffizienten geworden sind und wegen der Auslöschung gültiger Ziffern durch das Hornerschema nicht mehr auf volle Mantissenlänge berechnet werden können, kann man die Iteration wie folgt fortsetzen: Man läßt die Quadratfaktoren $Q_k(x)$, und damit auch ihre Wurzeln und die zugehörigen Werte b_{n-1}, b_n fest, berücksichtigt aber jetzt im Gegensatz zu (9) auch die in den Fehlergrößen δp_j, δq_j nichtlinearen Terme. Man bekommt dann ein nichtlineares Iterationsverfahren für die Korrekturen, das für hinreichend kleine $|\delta p_k|$, $|\delta q_k|$ konvergiert. Gegenüber dem Algorithmus 1 wird mehr Speicherplatz benötigt, da die Größen R, T, b_{n-1}, b_n in einer Anlaufrechnung für alle $j = 1,2,\ldots,m$ bestimmt und abgespeichert werden müssen. Die Rechenschritte sind im Ablaufplan 2 zusammengestellt.

Rechenaufwand und Speicherbedarf

Der Gesamtaufwand läßt sich nicht allgemein angeben, da die Anzahl der Iterationen vom Polynom und von den Startwerten abhängt. In der folgenden Tabelle sind der Speicherbedarf und die pro Teilschritt benötigten Rechenoperationen der Algorithmen 1 und 2 den entsprechenden Größen des Bairstowverfahrens gegenübergestellt

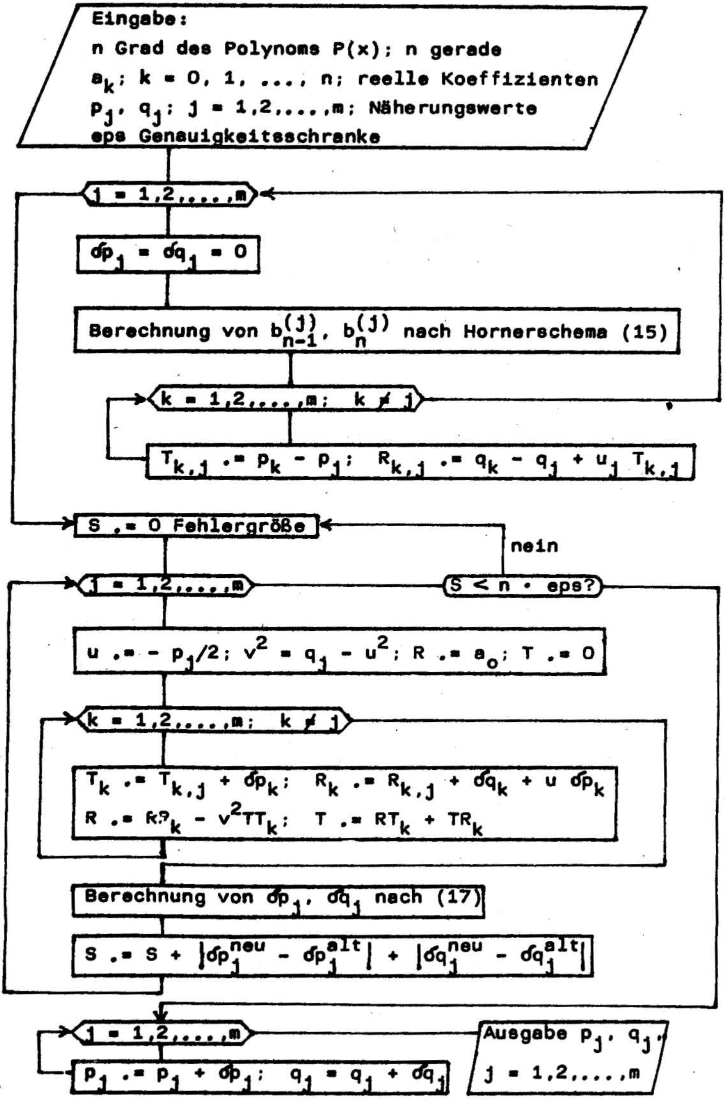
	Multipl.	Divis.	Speicher
Bairstow	$4n - 4$	2	$n + 11$
Alg. 1	$5n + 2$	3	$2n + 17$
Alg. 2, Anlaufrechnung	$\frac{5}{2}n - 3$	1	$\frac{n^2}{2} + 3 + 20$
Alg. 2, Iteration	$3n + 4$	3	

In Testrechnungen mit dem Tischrechner K 1002 von Robotron wurden u. a. die Quadratfaktoren folgender Polynome bestimmt

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 17x - 4$$

ein reelles und ein komplexes Wurzelpaar,
gut konditioniert;

Ablaufplan 2



$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (nx)^k, \quad n = 2,3,\ldots,10,$$

höchstens ein reelles, sonst komplexe Wurzelpaare, gut konditioniert;

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-k); \quad n = 3,4,5,6,$$

Wilkinsonpolynome, nur reelle Wurzeln, schlecht konditioniert;

$$P(x) = (x-1)^3(x-2)^3,$$

reelle Mehrfachwurzeln.

Daraus ergeben sich, stark vereinfacht, die folgenden Schlußfolgerungen

	Bairstow	Algorithmus 1	Algorithmus 2
Rechenaufwand	mittel	hoch	niedrig
Speicherplatz	niedrig	mittel	hoch
Startwertempfindlichkeit	mittel	niedrig	hoch

Bemerkung: Die Algorithmen 1 und 2 können als Einzel- und als Gesamtschrittverfahren gerechnet werden. Beim Algorithmus 1 kann man - insbesondere bei schlechten Startwerten - mit Erfolg einen Dämpfungsfaktor benutzen.

Literatur

/1/ Kerner, I. O.: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. Numer. Math. 8, 290 - 294 (1966)

/2/ Filippi, S.: Ein verallgemeinertes Bairstow-Verfahren zur gleichzeitigen Ermittlung aller Nullstellen eines Polynoms. Beiträge Numer. Math. 4, 83 - 93 (1975)

/3/ Albrand, H.-J.: Ein allgemeiner Faktorisierungsalgorithmus und seine Anwendung auf die Ermittlung algebraischer Kurven. In: IX. Internat. Kogreß über Anwendungen der Math. in den Ingenieurwissenschaften. Berichte, Heft 5, S. 74 - 75, Weimar 1981

/4/ Berg, L.: On the simultaneous calculation of two zeros. Computing 24, 87 - 91 (1980)

eingegangen: 01. 07. 1981

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Gerhard Maeß
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 97 - 98 (1981) 05B05
62K10

Hans-Dietrich O. F. Gronau

Nonexistence of 3-(11,5,2) and 4-(12,6,2) designs

A t-(v,k,λ) design is a system of (not necessarily distinct) k-element subsets (called blocks) of a v-element set K such that every t-element subset of K occurs exactly λ times in the blocks. The existence of a t-(v,k,λ) design implies that

$$\lambda_i = \lambda\binom{v-i}{t-i} / \binom{k-i}{t-i} \tag{1}$$

is an integer for every $i = 0,1,\dots,t-1$. Then λ_i denotes the number of blocks containing an arbitrary i-element subset of K $(i = 1,2,\dots,t-1)$ and λ_0 denotes the number of blocks.

This note continues the investigations of the number of t-(v,k,λ) designs for given (small) parameters v,k and t and the smallest λ satisfying (1). The smallest possible λ according to (1) is 2 for $v = 11$, $k = 5$, $t = 3$ as well as $v = 12$, $k = 6$, $t = 4$. We present the following results.

Theorem 1: There is no 3-(11,5,2) design.
Theorem 2: There is no 4-(12,6,2) design.

Proof: For a particular block B of a 3-(11,5,2) design let n_i, $0 \le i \le 5$, be the number of blocks that intersect it in exactly i elements. Then

$$\sum_{i=j}^{5} \binom{i}{j} n_i = \binom{5}{j}\lambda_j,$$

$j = 0,1,2,3$. This system of equations has an unique solution in nonnegative integers with $n_5 \ge 1$:

$$n_5 = 1,\ n_4 = 0,\ n_3 = 10,\ n_2 = 20,\ n_1 = 0,\ n_0 = 2. \tag{2}$$

Let B_1, B_2 be the blocks disjoint to B. Since B_1, B_2 are 5-element subsets of a 6-element set, the intersection numbers according to B_1 have $n_5 \geq 2$ or $n_5 \geq 1$ as well as $n_4 \geq 1$, which contradicts (2). For 4-(12,6,2) designs we obtain in analogy for the intersection numbers

$$\sum_{i=j}^{6} \binom{i}{j} n_i = \binom{6}{j} \lambda_i, \tag{3}$$

$j = 0,1,2,3,4$. It can be checked easily that (3) has no solution in nonnegative integers with $n_6 \geq 1$.

received: March 23, 1981

Author's address:

Dr. rer. nat. Hans-Dietrich O. F. Gronau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 18, 99 - 111 (1981) 68D30
94C05

Bernhard Thalheim

Über ein Vollständigkeitskriterium für eine Klasse von Automaten (einstellige Approximationsautomaten)

In dar strukturellan Automatentheorie spielt das Vollständigkeitsproblem eine besondere Rolle. Allgemein bekannt ist /1,3,4,5/, daß das Vollständigkeitsproblem und auch das Problem der Approximationsvollständigkait in einer ganzen Reihe von Fällen für Automatenklassen algorithmisch unlösbar ist. In der Klassa aller endlichen Automaten existieren überabzählbar viele prävollständige Klassen. Unter einer prävollständigen Klasse K in einer Klasse K^* versteht man eine Automatenklasse, die abgeschlossen ist bezüglich der Kompositionsoperationen und durch die alle Automaten aus K^* mittels Komposition erzeugt werden können, wenn man einen beliebigen Automaten aus $K^* \setminus K$ hinzunimmt.
In der Arbeit soll eine Automatenklasse untersucht werden, die engen Bezug zur Lösung des Vollständigkeitsproblems hat (Satz 1) und im algebraischen Sinne relativ einfach ist (Satz 2). Für diese Klasse wird das Vollständigkeitsproblem gelöst (Satz 4). Eine Untersuchung über die Länge einer Basis in dieser Klasse schließt sich an. Anschließend wird nachgewiesen, daß ein approximationsvollständiges System in der Menge aller einstelligen binären Automaten existiert, das nicht endlich erzeugbar ist.

Die Klasse K_m^1 der einstelligen Approximationsautometen

Unter einem endlichen initialen Automaten $\mathfrak{A}$ verstehen wir dae System (X,S,Y,f,g,s_0), wobei X, S, Y endliche Mengen (Eingabealphabet, Zustandsmenge, Ausgabealphabet), f und g Funktionen ($f\colon S \times X \to Y$ Ausgabefunktion, $g\colon S \times X \to S$ Überführungsfunktion) sind und s_0, $s_0 \in S$, ein ausgezeichneter Anfangszustand ist.

Unter Z^* verstehen wir die freie Halbgruppe mit Einselement über Z.

Wie üblich wird die verallgemeinerte Überführungsfunktion $\hat{g}$ für Wörter aus X^* eingeführt: Für beliebige Zustände s gelte $\hat{g}(s,e) = s$, $\hat{g}(s,x_1...x_n) = g(\hat{g}(s,x_1...x_{n-1}), x_n)$ für $n \geq 1$, $x_1...x_n \in X^*$.

Jeder Automat $\mathfrak{A}$ realisiert eine Abbildung der Menge X^* in die Menge Y^* auf folgende Art und Weise: $\mathfrak{A}(e) = e$,

$$\mathfrak{A}(p) = f(s_0,x_1)f(\hat{g}(s_0,x_1), x_2)...f(\hat{g}(s_0,x_1...x_{n-1}), x_n) \text{ für}$$

$$p = x_1...x_n \in X^*.$$

Ein endlicher binärcodierter Automat $\mathfrak{A}$ ist ein Automat, für den natürliche Zahlen n und m existieren, so daß $X = \{0,1\}^n$ und $Y = \{0,1\}^m$ gilt. Für einen einstelligen Automaten $\mathfrak{A} = (X,S,Y,f,g,s_0)$ gelte $X = Y = \{0,1\}$, und P^1 sei die Menge aller einstelligen Automaten.

Für zwei Automaten $\mathfrak{A}_1 = (X,S_1,Y,f_1,g_1,s_{01})$ und $\mathfrak{A}_2 = (X,S_2,Y,f_2,g_2,s_{02})$ schreiben wir $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, wenn für alle Wörter p aus X^* die Beziehung $\mathfrak{A}_1(p) = \mathfrak{A}_2(p)$ gilt. Es ist klar, daß die Relation "=" eine Äquivalenzrelation auf P^1 ist.

Wie in /1/ bemerkt wurde, kann man anstelle der Kompositionsoperationen in der Klasse aller einstelligen Automaten nur die Superposition betrachten. Unter der Superposition der einstelligen Automaten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ verstehen wir einen Automaten $\mathfrak{C}$, für den gilt: Für alle Worte p, $p \in X^*$, ist $\mathfrak{C}(p) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(p))$ (Bezeichnung: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$).

Unter dem Abschluß $[K]$ einer Menge K verstehen wir die von K mittels Superposition erzeugte Menge $\{\mathfrak{A}_1 \circ ... \circ \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{A}_i \in K, n \geq 1\}$. Eine Menge K von Automaten heißt abgeschlossen, wenn $[K] = K$ ist.

Eine Menge K von Automaten heißt vollständig in einer abgeschlossenen Klasse K^* von Automaten, wenn $K^* = [K]$ gilt.

Eine abgeschlossene Klasse K von Automaten heißt prävollständig (maximal) in K^*, wenn

1) $K \subsetneq K^*$ und

2) für jeden Automaten $\mathfrak{A}$ aus $K^* \setminus K$ die Beziehung $K^* = [K \cup \{\mathfrak{A}\}]$ gilt.

Das Vollständigkeitsproblem besteht in der Frage nach Kriterien, die für eine beliebige Menge von Automaten einer Automatenklasse zu entscheiden erlauben, ob diese Menge vollständig ist.

Unter einem m-Approximationsautomaten verstehen wir einen einstelligen Automaten $\mathfrak{A} = (X,S,X,f,g,s_0)$, dessen verallgemeinerte Überführungsfunktion folgende Eigenschaft hat: Für beliebige Wörter p, $p \in X^*$, der Länge m, m+1, ... und beliebige Buchstaben x, $x \in X$, gilt $\hat{g}(s_0,p) = \hat{g}(s_0,px)$. Es sei K_m^1 die Menge aller m-Approximationsautomaten. Ein Automat $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K_m^1$, heißt kanonisch, wenn $\mathfrak{A}$ das folgende System ist:
$(X,S_m,X,f,g_m,\underbrace{0\ldots01}_{m+1})$, wobei

$$S_m = \{\alpha_0\ldots\alpha_m \mid \alpha_i \in \{0,1\}\} \setminus \{\underbrace{0\ldots0}_{m+1}\},$$

$$g_m(\alpha_0\ldots\alpha_m,x) = \begin{cases} \alpha_0\ldots\alpha_m, & \text{wenn } \alpha_0 = 1, \\ \alpha_1\ldots\alpha_m x, & \text{wenn } \alpha_0 = 0. \end{cases}$$

Es sei $\overline{K}_m^1$ die Menge aller kanonischen Automaten aus K_m^1. Es ist offensichtlich, daß zu jedem Automaten $\mathfrak{A}$ aus K_m^1 genau ein kanonischer Automat $\mathfrak{A}'$ existiert mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Es sei $\mathfrak{A}$ aus P^1. Dann heißt der Automat $\mathfrak{A}_{\langle m\rangle}$ aus $\overline{K}_m^1$ der zu $\mathfrak{A}$ m-konjugierte Automat, wenn für ein beliebiges p,

$$p \in \bigcup_{i=0}^{m} X^i, \quad \mathfrak{A}_{\langle m\rangle}(p) = \mathfrak{A}(p) \text{ gilt.}$$

Weiterhin sei für K, $K \subseteq P^1$, $K|_m = \{\mathfrak{A}_{\langle m\rangle} \mid \mathfrak{A} \in K\}$.

In /4/ wurde die Approximationsvollständigkeit von Automatensystemen untersucht. Ein System K von Automaten heißt approximationsvollständig in einer Klasse K', wenn für alle Automaten $\mathfrak{A} = (X,S,Y,f,g,s_0)$ und alle natürlichen Zahlen m ein Automat $\mathfrak{A}' = (X,S',Y,f',g',s_0')$ in [K] existiert, so daß für alle Worte p über X der Länge m die Beziehung $\mathfrak{A}(p) = \mathfrak{A}'(p)$ gilt.

Es interessiert nun der Zusammenhang von Vollständigkeit, Approximationsvollständigkeit und den Klassen K_m^1.

Dabei heißt eine Klasse K m-vollständig in P^1, wenn es zu jedem Automaten $\mathfrak{A}$ aus P^1 einen Automaten $\mathfrak{B}$ in $[K]$ gibt, so daß $\mathfrak{B}$ ein zu $\mathfrak{A}$ m-konjugierter Automat ist. Sehr leicht einzusehen ist dann

Satz 1: Für jedes System K von Automaten aus P^1 ist die m-Vollständigkeit von K hinreichend und notwendig dafür, daß die Gleichung $[K|_m] = K_m^1$ gilt.

Unter einer Basis $B = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots\}$ in einer Klasse K verstehen wir eine in K vollständige Menge von Automaten, die durch Weglassen eines beliebigen Automaten $\mathfrak{A}_i$ aus B unvollständig wird.

Bemerkung: Nach /3/ existiert in P^1 keine endliche Basis. Daraus folgt, daß jede endliche Menge unvollständig ist. Denn wäre angenommen $K = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ vollständig, dann wäre für jeden Automaten $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_i \in K$, einer der beiden Fälle wahr:

(1) $\mathfrak{A}_i \notin [\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n\}]$,

(2) $\mathfrak{A}_i \in [\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n\}]$.

Im Falle (2) ist dann auch $K \setminus \{\mathfrak{A}_i\}$ vollständig. Aus K ließe sich also eine Basis konstruieren.

Aus Satz 1 folgt, daß jedes endliche System K von Automaten aus P^1 entweder approximationsvollständig ist, oder es existiert eine natürliche Zahl m, so daß $[K|_m] \neq K_m^1$ gilt.

Die Klassen in K_m^1 sind relativ einfach aufgebaut. Wenn wir mit G_m die Menge aller Automaten $\mathfrak{A} = (X, S, X, f, g, s_0)$ aus K_m^1 mit der Einschränkung $f(s,x) \in \{x, \bar{x}\}$ für beliebige Zustände s, $s \in S$, und mit $\bar{G}_m$ die Menge $\bar{K}_m^1 \cap G_m$ bezeichnen, dann gilt

Satz 2: Die Klassen $\bar{K}_m^1$ bzw. $\bar{G}_m$ bilden bezüglich Superposition eine Halbgruppe bzw. eine Gruppe.

Folgerung 1: Es gilt $|\bar{K}_m^1| = 2^{2^{m+2}-2}$, $|\bar{G}_m| = 2^{2^{m+1}-1}$.

Folgerung 2: In jeder abgeschlossenen Teilklasse von K_m^1 existiert eine endliche Basis.

Damit erhalten wir

Satz 3: Eine Menge K von Automaten aus K_m^1 ist genau dann in K_m^1 vollständig, wenn K in keiner prävollständigen Menge von K_m^1 enthalten ist.

Das Vollständigkeitsproblem ist also zurückführbar auf die Beschreibung aller prävollständigen Klassen in K_m^1.

Ein Vollständigkeitskriterium für die Klasse K_m^1

Wir werden in diesem Abschnitt annehmen, daß $\mathfrak{A}$ ein kanonischer Automat ist. Da zu jedem Automaten $\mathfrak{A}$ ein kanonischer Automat $\mathfrak{A}'$ leicht konstruierbar ist, bedeutet das keine Einschränkung.

Es sei $\mathfrak{A} = (X, S^m, X, f_{\mathfrak{A}}, g, o\ldots o1)$ ein Automat aus K_m^1.

Wir führen folgende Prädikate ein:

Es sei $s \in S^m$, $S \subseteq S^m$.

1) $P_0(s, \mathfrak{A})$ genau dann, wenn $f_{\mathfrak{A}}(s,x) = x$.

2) $$P_1(\mathfrak{A}, S) = \begin{cases} \sum_{s \in S} P_0(s, \mathfrak{A}) + 1, & \text{für } \mathfrak{A} \in G_m, \\ 1 & \text{, für } \mathfrak{A} \notin G_m, \end{cases}$$

wobei $\sum$ die Summe modulo 2 bedeutet.

Mit $\mathfrak{L}(\{i_1, \ldots, i_p\})$ bezeichnen wir die Menge

$$\bigcup_{i \in \{i_1, \ldots, i_p\}} \{\alpha_o \ldots \alpha_m \in S^m \mid \alpha_o \ldots \alpha_m = 0 \ldots 01\alpha_{m-i+1} \ldots \alpha_m\}.$$

3) Weiterhin sei i aus $\{0, \ldots, m\}$. Das Prädikat $P_2(\mathfrak{A}, S)$ für $S = \mathfrak{L}([i])$ sei wie folgt definiert:

$$P_2(\mathfrak{A}, S) = \begin{cases} 0, & \text{wenn ein } s,\ s \in S, \text{ existiert mit} \\ & f_{\mathfrak{A}}(s,x) = \text{const. und für alle } s' \in S^m \setminus \{s\} \\ & \text{gilt } f_{\mathfrak{A}}(s,x) \in \{x, \bar{x}\}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Prädikate P_0, P_1, P_2 lassen sich leicht auch für nichtkanonische Automaten definieren, indem man diese Prädikate auf die entsprechenden kanonischen Automaten $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$ anwendet.
Es sei nun $p \geq 1$, $\{i_1,\ldots,i_p\} \subseteq \{0,\ldots,m\}$, $i \in \{0,\ldots,m\}$.
Dann betrachten wir folgende Klassen:

$$K_{(i_1,\ldots,i_p)} = \{\mathfrak{A} \in K_m^1 \mid P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}(\{i_1,\ldots,i_p\})) = 1\},$$
$$K_{[i]} = \{\mathfrak{A} \in K_m^1 \mid P_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}(\{i\})) = 1\}.$$

Beim algebraischen Zugang zum Vollständigkeitsproblem spielt der Begriff des Kriterialsystems eine besondere Rolle. Nach /1/ heißt ein System $\sum$ abgeschlossener Klassen in einer Automatenklasse K Kriterialsystem, wenn eine beliebige Menge von Automaten aus K genau dann vollständig ist, wenn keine Teilmenge einer der Klassen aus $\sum$ ist. Ein Kriterialsystem $\sum$ heißt minimal, wenn kein echtes Teilsystem von $\sum$ ein Kriterialsystem ist. In der Klasse K_m^1 existiert ein Kriterialsystem. Das System $\{K \subseteq K_m^1 \mid [K] = K\}$ ist ein Beispiel. Wenn für Klassen K, K' aus einem Kriterialsystem $\sum$ gilt $K \subseteq K'$, dann ist auch $\sum \setminus \{K\}$ ein Kriterialsystem. Damit erhält man nach Satz 3, daß die Menge aller prävollständigen Klassen in K_m^1 ein minimales Kriterialsystem ist.

<u>Lemma 1:</u> Die Klasse K ist genau dann prävollständig in K_m^1, wenn

$$K \in \sum = \{K_{(i_1,\ldots,i_p)},\ K_{[i]}\quad p \geq 1,\ 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m,\quad 0 \leq i \leq m\}$$

gilt. Das System $\sum$ ist ein minimales Kriterialsystem.

<u>Beweis:</u> 1) Wir zeigen, daß die Klassen $K_{(i_1,\ldots,i_p)}$, $K_{[i]}$ prävollständig sind.
Wir bemerken, daß $\overline{G}_{(i_1,\ldots,i_p)} = \overline{G}_m \cap K_{(i_1,\ldots,i_p)}$ eine Untergruppe von $\overline{G}_m$ vom Index 2 ist und daß gilt

$$K_m^1 \supseteq K_{(i_1,\ldots,i_p)} = (K_m^1 \setminus G_m) \cup (G_m \cap K_{(i_1,\ldots,i_p)}).$$

Daraus folgt jedoch, daß $G_{(i_1,\ldots,i_p)}$ prävollständig in G_m ist und jedes Element $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \overline{G}_m \setminus \overline{G}_{(i_1,\ldots,i_p)}$, mit $\overline{K}_{(i_1,\ldots,i_p)}$ ein Erzeugendensystem von K_m^1 bildet. Also ist $K_{(i_1,\ldots,i_p)}$ in K_m^1 prävollständig.

Es gilt per Definition, daß $G_m \subseteq K_{[i]}$. Die Klasse $K_{[i]}$ ist abgeschlossen. Wenn man die Sprache der Automatenbäume nutzt, kann man ohne Schwierigkeiten zeigen, daß für zwei Automaten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ aus $K_m^1 \setminus K_{[i]}$ zwei Automaten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2 \in G_m$ existieren, so daß $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ gilt. Daraus folgt, daß für einen beliebigen Automaten $\mathfrak{A}$ aus $K_m^1 \setminus K_{[i]}$ die Menge $K_{[i]} \cup \{\mathfrak{A}\}$ vollständig ist. Also ist $K_{[i]}$ prävollständig.

2) Es ist weiterhin zu zeigen, daß alle Klassen von $\sum$ paarweise verschieden sind. Da $G_m \subseteq K_{[i]}$ und $K_m^1 \setminus G_m \subseteq K_{(i_1,\ldots,i_p)}$ für beliebige $p, i, i_1, \ldots, i_p$ ($p \geq 1$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$) ist, gilt auch $K_{[i]} \neq K_{(i_1,\ldots,i_p)}$.

Die Klassen $K_{[i]}$ sind paarweise verschieden. Es sei

$$K^1 = \left\{ \mathfrak{A}_i \in \overline{K}_m^1 \;\middle|\; 0 \leq i \leq m,\ \mathfrak{A}_i = (X, S^m, X, f_i, g, 0\ldots01), \right.$$

$$f_i(s,x) = \begin{cases} 0, & \text{für } s = 0\ldots01\underbrace{0\ldots0}_{i}, \\ x, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Für $K_{[i]}$ gilt dann $K^1 \setminus \{\mathfrak{A}_i\} \subseteq K_{[i]}$ und $\mathfrak{A}_i \notin K_{[i]}$.

Die Klassen $K_{(i_1,\ldots,i_p)}$ sind ebenfalls paarweise verschieden.

Es sei

$$K^2 = \left\{ \mathfrak{A}_j \in \overline{K}_m^1 \;\middle|\; 0 \leq j \leq m,\ \mathfrak{A}_j = (X, S^m, X, f_j, g, 0\ldots01), \right.$$

$$f_j(s,x) = \begin{cases} \overline{x}, & \text{für } s = 0\ldots01\underbrace{0\ldots0}_{j}, \\ x, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Für $K_{(i_1,\ldots,i_p)}$, $K_{(j_1,\ldots,j_r)}$ und $\mathfrak{A}_j$ aus K^2 gilt:

2.1) $\mathfrak{A}_j \circ \mathfrak{A}_j \in K_{(i_1,\dots,i_p)} \cap K_{(j_1,\dots,j_r)}$,

2.2) $\mathfrak{A}_j \in K_{(i_1,\dots,i_p)} \setminus K_{(j_1,\dots,j_r)}$ für $j \in \{j_1,\dots,j_r\}$ und $j \notin \{i_1,\dots,i_p\}$.

2.3) $\mathfrak{A}_j \in K_{(j_1,\dots,j_r)} \setminus K_{(i_1,\dots,i_p)}$ für $j \in \{i_1,\dots,i_p\}$ und $j \notin \{j_1,\dots,j_p\}$.

3) Wir nehmen an, daß eine weitere prävollständige Klasse K^* in K_m^1 mit $K^* \cap G_m \neq G_m$ existiert. Dann existieren in K^* Automaten $\mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)}$ mit $\mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)} \notin K_{(i_1,\dots,i_p)}$. Offensichtlich gilt dann $\mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)} \in G_m$. Wir zeigen, daß $\left[\{\mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)} \mid p \geq 1,\ 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m\}\right] = G_m$ ist.

Es ist leicht einzusehen, daß $\overline{G}_m$ eine endliche nilpotente Gruppe ist, $G_m^* = \bigcap_{\{i_1,\dots,i_p\} \subseteq \{0,\dots,m\}} (\overline{G}_m \cap K_{(i_1,\dots,i_p)})$ die Kommutatorgruppe von G_m und $G_m^* = \{\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \overline{G}_m\}$ ist. Nun gilt nach /2/, daß eine endliche Gruppe G genau dann nilpotent ist, wenn jede Menge M, die zusammen mit der Kommutatorgruppe die Gruppe G erzeugt, selbst schon Erzeugendensystem von G ist.

Es sei

$$K = G_m^* \cup \{\mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)} \mid p \geq 1,\ 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m\}.$$

Dann haben wir $K^2 \subseteq [K]$, weil zu jedem $\mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)}$ Automaten

$\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1, \dots, \mathfrak{A}^m$ aus G_m^* existieren, so daß für

$\mathfrak{B}_{(i_1,\dots,i_p)} = \mathfrak{A}_{(i_1,\dots,i_p)} \circ \mathfrak{A}^0 \circ \mathfrak{A}^1 \circ \dots \circ \mathfrak{A}^m$ gilt:

3.1) $\mathfrak{B}_{(i_1,\dots,i_p)} \notin K_{(j)}$ besteht genau dann, wenn

$\mathfrak{A}(i_1,\dots,i_p) \notin K_{(j)}$ ist.

3.2) Es existieren $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_m$ aus $K^2 \cup \{\mathfrak{A}_e\}$, wobei

$\mathfrak{A}_e$ das Einselement von $\overline{G}_m$ bezeichnet, so daß

$\mathcal{L}_{(i_1,\ldots,i_p)} = \mathcal{L}_0 \circ \ldots \circ \mathcal{L}_m$ ist. Das System

$\{\mathcal{L}_{(i_1,\ldots,i_p)} \mid p > 0,\ 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m\}$ ist aber andererseits ein Erzeugendensystem von K^2. Damit haben wir erhalten, daß $K^* \supseteq G_m$ gilt im Widerspruch zur Voraussetzung. Es existiert also keine prävollständige Klasse K^* in K_m^1 mit $K^* \cap G_m \neq G_m$.

4) Nun nehmen wir an, es gibt eine in K_m^1 prävollständige Klasse $\tilde{K}$ mit $\tilde{K} \supseteq G_m$.

Angenommen, es existiert ein Automat $\mathfrak{A}_i$ mit $\mathfrak{A}_i \notin K_{[i]} \cup \tilde{K}$ für ein i, $0 \leq i \leq m$. Wir erhalten dann $\tilde{K} \subseteq K_{[i]}$, was aber nicht sein kann.

Angenommen, es gilt für alle i, $0 \leq i \leq m$, $K_{[i]} \cup \tilde{K} = K_m^1$. Dann enthält $\tilde{K}$ für jedes i einen Automaten $\mathfrak{A}_i^*$ mit $\mathfrak{A}_i^* \notin K_{[i]}$. Es existieren daher Automaten $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_m$ in G_m, so daß für $\mathfrak{A}_i$ aus K^1 $\quad \mathfrak{A}_i = \mathcal{L}_0 \circ \ldots \circ \mathcal{L}_m \circ \mathfrak{A}_i^*$ gilt.

Da aber $[K^1 \cup G_m] = K_m^1$ ist, erhalten wir im Widerspruch zur Voraussetzung die Gleichung $\tilde{K} = K_m^1$.

Damit ist die Behauptung von Lemma 1 gezeigt.

Der 3. Teil des Beweises läßt sich einfacher ausführen, wenn man den Zusammenhang von Kranzprodukt und p-Gruppen nutzt, um zu zeigen, daß G_m nicht mehr als 2^{m+1} maximale Gruppen haben kann.

Aus Lemma 1 erhalten wir

Folgerung 3: Es existieren genau $2^{m+1} + m$ prävollständige Klassen in K_m^1.

Aus Satz 3 und Lemma 1 folgt die Gültigkeit von

Satz 4: Eine Menge von Automaten aus K_m^1 ist genau dann vollständig in K_m^1, wenn sie in keiner der Mengen $K_{(i_1,\ldots,i_p)}$, $K_{[i]}$ für $p \geq 1$, $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$, $0 \leq i \leq m$ enthalten ist.

Ein vollständiges System, bestehend aus $2m + 2$ Automaten, wurde bereits im Beweis von Lemma 1 konstruiert.

Das Basisproblem in K_m^1

Aus Satz 4 folgt, daß in K_m^1 eine Basis existiert. Offen ist noch, wieviel Elemente eine derartige Basis hat. Wir zeigen zuerst

Lemma 2: Wenn K, $K \subseteq G_m$, eine Basis in G_m ist, dann gilt $|K| = m+1$.

Beweis: Zu jeder prävollständigen Klasse $G_{(i_1,\ldots,i_p)}$ in G_m läßt sich eine lineare Funktion $g_{(i_1,\ldots,i_p)}(x_0,\ldots,x_m) = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_p}$ definieren. Für einen Automaten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \bar{G}_m$, kann man die Bedeutungen der Variablen $x_0^{\mathfrak{A}}, \ldots, x_m^{\mathfrak{A}}$ auf die folgende Art bestimmen: $x_i^{\mathfrak{A}} = 0$ genau dann, wenn $\sum_{s \in \mathfrak{A}(\{i\})} P_0(s, \mathfrak{A}) = 0 \pmod 2$. Man erkennt leicht, daß $\mathfrak{A}$ in $G_{(i_1,\ldots,i_p)}$ genau dann liegt, wenn $g_{(i_1,\ldots,i_p)}(x_0,\ldots,x_m) = 0$ gilt. Für jedes Tupel $(\sigma_0,\ldots,\sigma_m)$ existieren in G_m Automaten $\mathfrak{A}$ mit $(\sigma_0,\ldots,\sigma_m) = (x_0^{\mathfrak{A}},\ldots,x_m^{\mathfrak{A}})$. Es sei nun $K = \{\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_l\}$ eine Basis in G_m. Dann sind die Tupel $(x_0^{\mathfrak{A}_1},\ldots,x_m^{\mathfrak{A}_1}),\ \ldots,\ (x_0^{\mathfrak{A}_l},\ldots,x_m^{\mathfrak{A}_l})$ linear unabhängig. Angenommen, das gilt nicht. Dann existieren für ein $\mathfrak{A}_i$ Automaten $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_s}$ in K, so daß

$$(x_0^{\mathfrak{A}_i},\ldots,x_m^{\mathfrak{A}_i}) = \sum_{k \in \{j_1,\ldots,j_s\}} (x_0^{\mathfrak{A}_k},\ldots,x_m^{\mathfrak{A}_k}). \qquad (*)$$

Da K eine Basis ist, existieren solche $i_1, \ldots, i_p$, daß

$g_{(i_1,\dots,i_p)}(x_0^{\alpha_1},\dots,x_m^{\alpha_1}) = 1$ und für alle $\alpha \in K \setminus \{\alpha_1\}$

$g_{(i_1,\dots,i_p)}(x_0^{\alpha},\dots,x_m^{\alpha}) = 0$ gilt. Das ist jedoch ein Widerspruch zu ($*$).
Im (m+1)-dimensionalen existieren höchstems m+1 linear unabhängige Tupel, d. h. $l \leq m+1$. Da aber K genau dann eine Basis in G_m ist, wenn $(x_0^{\alpha_1},\dots,x_m^{\alpha_1}), \dots, (x_0^{\alpha_l},\dots,x_m^{\alpha_l})$ ein Erzeugendensystem ist, gilt $l = m+1$.

<u>Lemma 3:</u> Wenn K eine Basis in K_m^1 ist, dann gilt $|K \setminus G_m| = m+1$.

<u>Beweis:</u> Aus Lemma 1 und Folgerung 3 folgt, daß $|K \setminus G_m| \leq m+1$ gilt. Da aber für beliebige i, j, $0 \leq i < j \leq m$, die Mengen $K_m^1 \setminus K_{[i]}$ und $K_m^1 \setminus K_{[j]}$ disjunkt sind, gilt $|K \setminus G_m| = m+1$.

Aus Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3 erhält man ohne Schwierigkeiten

<u>Satz 5:</u> Wenn K, $K \subseteq K_m^1$, eine Basis in K_m^1 ist, dann gilt
$|K| = 2m + 2$.
Damit wächst die Länge der Basis von K_m^1 linear. Es gibt allerdings auch Klassen in K_m^1, deren Basen $2^{2^{m+2}-c}$ $(c \geq 5)$ Elemente haben /6/.

Für Basissysteme von Automaten interessieren natürlich auch andere Kompliziertheitsmaße, so z. B. für
$K = \{\alpha_i = (X,S_i,X,f_i,g_i,s_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$
die Anzahl der benötigten Zustände $L(K) = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$.

<u>Folgerung 4:</u> Für jede Basis K von K_m^1 gilt

$$m^2 + 5m + 4 \leq L(K) \leq (m+1)(2^{m+2}-2).$$

Für jede Zahl n mit $m^2 + 5m + 4 \leq n \leq (m+1)(2^{m+2}-2)$ existiert eine Basis K von K_m^1 mit $L(K) = n$.

Die angegebene obere Grenze verändert sich nur unwesentlich, wenn man voraussetzt, daß jeder Automat $\mathfrak{A}$ von K minimal im Sinne von /1/ ist.

Approximationsautomaten und Approximationsvollständigkeit

In /3/ wurde gezeigt, daß für die Menge P^1 keine Basis existiert. Interessant ist diese Fragestellung auch für die Approximationsvollständigkeit. Es entstehen folgende Probleme:

1) Existiert ein approximationsvollständiges System von Automaten, das nicht endlich erzeugbar ist?

2) Existiert ein approximationsvollständiges System von Automaten, dessen echte Teilmengen nicht approximationsvollständig sind?

Diese Fragen sollen im folgenden beantwortet werden. Wir erkennen dabei, daß sich die Antworten für die Approximationsvollständigkeit wesentlich von denen für die Vollständigkeit unterscheiden.

Offensichtlich ist folgendes

Lemma 4: Die Klasse $\tilde{K}^1 = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m^1$ ist approximationsvollständig.

Damit erhalten wir

Folgerung 5: Es sei $K \subseteq \tilde{K}^1$. Dann ist K genau dann vollständig in $\tilde{K}^1$, wenn K approximationsvollständig in P^1 ist.

Nach Satz 4 ist die Menge $K = \{\mathfrak{A}_{(i)}, \mathfrak{A}_{[j]} \mid i,j \geq 0\}$ (analog konstruiert zum zweiten Beweisschritt von Lemma 1) eine vollständige Menge in K_m^1. Keine endliche Teilmenge von K ist nach Satz 5 vollständig. Nach Satz 4 ist eine echte Teilmenge von K unvollständig. Damit gilt

Satz 6: Es existiert ein approximationsvollständiges System von Automaten in P^1, das nicht endlich erzeugbar ist und dessen echte Teilmengen nicht approximationsvollständig in P^1 sind.

Zum Schluß sei ein offenes Problem angegeben: Existiert ein endliches approximationsvollständiges System in P^1?[1]

Literatur

/1/ Кудрявцев, В. Б., Алёшин, С. В., и Подколзин, А. С.: Элементы теории автоматов. Москва 1978

/2/ Kurosch, A. G.: Gruppentheorie II. Berlin 1972

/3/ Алёшин, С. В.: Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов. Проблемы кибернетики 22, 67 - 74 (1970)

/4/ Буевич, В. А.: О некоторых задачах, связанных с полнотой автоматов. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 11, 10 - 12, 614 - 617 (1975)

/5/ Dassow, J.: Einige Bemerkungen zu einem modifizierten Vollständigkeitsbegriff für Automatenabbildungen. Rostock. Math. Kolloq. 3, 69 - 84 (1977)

/6/ Тальхайм, Б.: О решетках замкнутых классов стабильных автоматов. В: А. М. Погомолов (ред.): Методы и системы технической диагностики. Вып. I, 116 - 146. Саратов 1980

eingegangen: 16. 02. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. Bernhard Thalheim
Technische Universität Dresden
Sektion Mathematik
Zellescher Weg 12/14
DDR-8027 Dresden

---

1 Wie inzwischen Herr Dr. Dassow bewiesen hat, ist die Antwort negativ.

Rostock. Math. Kolloq. 18, 113 - 122 (1981) 68E10 05C20

Fred Sobik
Erdmute Sommerfeld

Untersuchungen zur Klassifikation strukturierter Objekte auf der Grundlage des Enthaltenseins bestimmter Untergraphen

Auf der Tagung "Diskrete Mathematik" 1978 in Rostock wurde ein Ansatz zur Klassifikation strukturierter Objekte auf der Grundlage der Isomorphie von Untergraphen vorgestellt (vgl. Sobik, Sommerfeld /7/). Im folgenden soll auf Beziehungen zur Graphentheorie eingegangen werden. Außerdem werden Resultate der Anwendung des daraus entwickelten Algorithmus CALG auf eine Reihe praktischer Problemstellungen dargestellt.

Strukturierte Objekte sind durch eine Menge von Elementarobjekten und eine Menge von Relationen über diesen Elementarobjekten charakterisiert. Damit hat man die Struktur einer relationalen Algebra. Wir beschränken uns hier auf den Fall ein- bzw. zweistelliger Relationen, d. h. auf den Fall knoten- und kanteninterpratierter gerichteter Graphen.

Definition: $G = [V, E, f, g, W_V, W_E]$ heißt (endlicher, gerichteter, interpretierter) Graph, wann V eine endliche Menge und $E \subseteq V \times V$ ist, W_V und W_E endliche, nichtleare Mengen und $f: V \to W_V$ und $g: E \to W_E$ Funktionen von V bzw. E in W_V bzw. W_E sind.

V ist dann die Knotenmenge, E die Kantenmenge des Graphen G, W_V und W_E sind Mengen möglicher Knoten- bzw. Kanteninterpretationen, und f und g ordnen den Knoten und Kanten die entsprechenden Iterpretationen zu.

Definition: Seien $G = [V, E, f, g, W_V, W_E]$ und $H = [V', E', f', g', W_V, W_E]$ Graphen. H heißt Teilgraph von G, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$ ist und die Funktionen f' und g' Einschränkungen von f und g auf V' bzw. E' sind. Gilt $E' = E \cap (V' \times V')$, dann heißt H induzierter Untergraph von G.

__Definition:__ Seien $G = [V, E, f, g, W_V, W_E]$ und $H = [V', E', f', g', W_V, W_E]$ zwei Graphen. G und H heißen isomorph ($G \cong H$), wenn eine eineindeutige Abbildung $\varkappa$ von $V \cup E$ auf $V' \cup E'$ existiert mit $\varkappa(v) \in V'$ für alle $v \in V$, $\varkappa(e) \in E'$ für alle $e \in E$, $\varkappa((v_1, v_2)) = (\varkappa(v_1), \varkappa(v_2))$ für alle $v_1, v_2 \in V$, $(v_1, v_2) \in E$, $f(v) = f'(\varkappa(v))$ für alle $v \in V$ und $g(e) = g'(\varkappa(e))$ für alle $e \in E$.

Allgemein besteht ein Klassifizierungsproblem darin, für eine Menge gegebener Objekte, die Elemente bestimmter Klassen sind, eine Entscheidungsstruktur zur richtigen Klassifizierung der Ausgangsmenge zu konstruieren.

__Definition:__ Sei $\mathfrak{G}$ eine Menge von Graphen und $\mathfrak{K}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, daß isomorphe Graphen stets Elemente der gleichen Klasse von $\mathfrak{K}$ sind. Dann bezeichnen wir $[\mathfrak{G}, \mathfrak{K}]$ als K l a s s i f i z i e r u n g s p r o b l e m .

Für die Unterscheidung von Klassen strukturierter Objekte spielt offensichtlich das Vorhandensein bzw. Fehlen bestimmter Teilstrukturen eine wesentliche Rolle. Dementsprechend verwenden wir das Vorhandensein bzw. Fehlen bestimmter induzierter Untergraphen als unterscheidendes Merkmal für die Charakterisierung der Klassen. Solche Charakterisierungen sind in der Graphentheorie üblich (z. B. Konzept der "verbotenen Untergraphen"). Ein Beispiel dafür sind die Kantengraphen.

Sei $G = [V, E, f, g, W_V, W_E]$ ein uninterpretierter, ungerichteter, schlichter Graph (d. h., W_V und W_E sind Einermengen und mit $(v_1, v_2) \in E$ ist auch $(v_2, v_1) \in E$). Wir schreiben dann kurz $G = [V, E]$. Der Kantengraph $L(G)$ von G ist der uninterpretierte, ungerichtete, schlichte Graph mit der Kantenmenge E von G als Knotenmenge. Zwei dieser Knoten sind in $L(G)$ durch eine Kante genau dann miteinander verbunden, wenn die entsprechenden Kanten in G einen Knoten gemeinsam haben. Ein Graph H ist genau dann ein Kantengraph, wenn es einen Graphen G mit $H \cong L(G)$ gibt. Die Kantengraphen sind dadurch charakterisiert, daß sie genau die Graphen sind, die keinen uer in Abb. 1 dargestellten Graphen als induzierten Untergraphen enthalten (Beineke /1/).

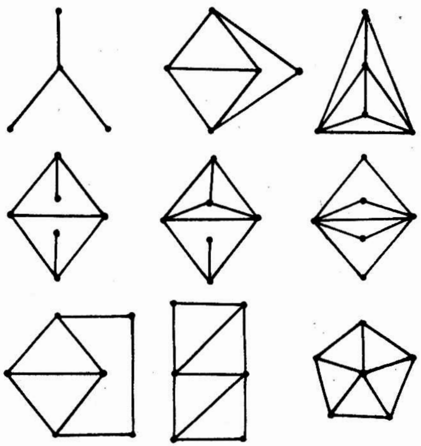


Abb. 1

Das Konzept der Charakterisierung von Graphklassen durch das Vorhandensein bzw. Fehlen von induzierten Untergraphen wird auf die Klassifikation strukturierter Objekte übertragen.

<u>Definition:</u> Sei $S = \{G_1, \ldots, G_m\}$ eine Menge von Graphen. Zwei Graphen G und H heißen (stark) S-äquivalent ($\overset{S}{\sim}$), wenn für $i = 1, \ldots, m$ gilt: G enthält genau dann einen zu G_i isomorphen induzierten Untergraphen, wenn H einen zu G_i isomorphen induzierten Untergraphen enthält.

<u>Definition:</u> Sei ein Klassifizierungsproblem $[\mathfrak{G}, \mathfrak{K}]$ gegeben. Eine Menge S von Graphen heißt (stark) k l a s s i f i z i e r u n g s r e l e v a n t bezüglich dieses Klassifizierungsproblems, wenn keine Elemente verschiedener Klassen aus $\mathfrak{K}$ (stark) S-äquivalent sind.

Ziel des Klassifizierungsverfahrens ist es, eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen zu bestimmen und damit das Klassifizierungsproblem zu lösen.

Sei ein Klassifizierungsproblem $[\mathfrak{G}, \mathfrak{K}]$ gegeben. Dann kann mit Hilfe des folgenden Algorithmus stets eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen konstruiert werden (vgl. auch Sobik, Sommerfeld /7/).

<u>Algorithmus:</u> 1) Anfangsschritt: Sei $S_o = \emptyset$.

2) (i+1)-ter Schritt ($i \geq 0$): Sei S_i die im i-ten Schritt konstruierte Menge von Graphen. Wir betrachten nun die durch die Äquivalenzrelation $\overset{S_i}{\sim}$ definierte Zerlegung Z_i von $\mathfrak{G}$.

a) Die Zerlegung Z_i ist eine Verfeinerung der Zerlegung $\mathfrak{K}$. Dann ist $S = S_i$ eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen.

b) Es gibt Graphen $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \overset{S_i}{\sim} H$, die Elemente verschiedener Klassen von $\mathfrak{K}$ sind. Sei G_o ein Graph der kleinsten möglichen Ordnung, der induzierter Untergraph genau eines der beiden Graphen G oder H ist. (Ein solcher Graph existiert immer. Im Extremfall ist es einer der beiden Graphen selbst.) Dann sei $S_{i+1} = S_i \cup \{G_o\}$.

Da die Menge $\mathfrak{G}$ endlich ist und in jedem Schritt des Algorithmus Z_{i+1} eine echte Verfeinerung von Z_i ist, bricht der Algorithmus stets ab.

Für jedes Klassifizierungsproblem $[\mathfrak{G}, \mathfrak{K}]$ gibt es $|\mathfrak{G}| - 1$ Graphen aus $\mathfrak{G}$, die eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge bilden. Eine solche Lösung ist natürlich uninteressant. Es gibt jedoch Klassifizierungsprobleme, die nur diese triviale Lösung besitzen.

Es ist schwierig, allgemeine Aussagen zur Existenz (stark) klassifizierungsrelevanter Mengen von Graphen mit bestimmten Eigenschaften zu gewinnen. Das wird auch durch die folgenden Beziehungen zum Rekonstruktionsproblem für Graphen dokumentiert. Betrachten wir hier einmal den Fall uninterpretierter, umgerichteter, schlichter Graphen. Dann besagt die (allgemein nicht bewiesene) Mengen-Rekonstruktionsvermutung (Harary /3/, Manvel /6/): Jeder uninterpretierte, ungerichtete, schlichte Graph der Ordnung n ≥ 4 ist (bis auf Isomorphie) eindeutig durch die Menge der Isomorphieklassen seiner induzierten Untergraphen der Ordnung n - 1 bestimmt. Es gilt der

Satz: Für jede Menge $\mathcal{G}$ von uninterpretierten, ungerichteten, schlichten Graphen der Ordnung n ≥ 4 und die Zerlegung $\mathfrak{K}_o$ von $\mathcal{G}$ in Isomorphieklassen existiert genau dann eine für das Klassifizierungsproblem $[\mathcal{G}, \mathfrak{K}_o]$ (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen der Ordnung n - 1, wenn die Mengen-Rekonstruktionsvermutung gilt.

Damit ist z. B. für separable Graphen ohne Endknoten oder für Bäume die Existenz nichttrivialer Lösungen gesichert. Für praktische Realisierungen spielen natürlich Aufwandsfragen eine große Rolle. Wesentlich ist, wieviel Graphen eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen enthält und welche Ordnung diese Graphen haben. Bezüglich des angegebenen Algorithmus gilt der

Satz: Sei S die durch den angegebenen Algorithmus bestimmte (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen für ein gegebenes Klassifizierungsproblem. Sei m die größte Ordnung der Graphen aus S. Dann gibt es für dieses Klassifizierungsproblem keine (stark) klassifizierungsrelevante Menge S' von Graphen, die nur Graphen von höchstens der Ordnung m - 1 enthält.

Um den Bereich der real verarbeitbaren Strukturen zu erweitern, ist es sinnvoll, die Objektgraphen durch geeignete Graphtransformationen auf leichter zu verarbeitende Strukturen abzubilden und dann das so erhaltene transformierte Klassifizierungsproblem zu betrachten. Entscheidend ist hierbei, daß Grapheigenschaften, die für die Klassifikation relevant sind, erhalten bleiben. Dies führt zu der folgenden Begriffsbildung.

Definition: Seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ Mengen von Graphen, $\Phi: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ eine eindeutige Abbildung von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{G}'$ und $[\mathcal{G}, \mathfrak{K}]$ ein gegebenes Klassifizierungsproblem. Die Graphentransformation Φ heißt (bezüglich $[\mathcal{G}, \mathfrak{K}]$) klassifizierungsstabil, wenn für alle Graphen G, H $\in \mathcal{G}$, die Elemente verschiedener Klassen von $\mathfrak{K}$ sind, $\Phi(G) \not\cong \Phi(H)$ gilt.

Die Bestimmung geeigneter klassifizierungsstabiler Graphtransformationen ist schwierig und hängt stark vom betrachteten Klassifizierungsproblem ab. Wir wollen hier als Beispiel die Kantengraphbildung betrachten. Dazu beschränken wir uns wieder auf den Fall uninterpretierter, ungerichteter, schlichter Graphen. Wir können dann auf den bekannten Satz von Whitney (vgl. Harary /4/) zurückgreifen:

Satz: Sind G und H zusammenhängende, uninterpretierte, ungerichtete, schlichte Graphen, so gilt die Aussage, daß genau dann $G \cong H$, wenn $L(G) \cong L(H)$ ist, dann und nur dann, wenn $\{G,H\} \neq \{K_3, K_{1,3}\}$ gilt.

Damit erhalten wir den

Satz: Sei $\mathcal{G}$ eine Menge zusammenhängender, uninterpretierter, ungerichteter, schlichter Graphen, $[\mathcal{G}, \mathfrak{K}]$ ein Klassifizierungsproblem, und K_3 und $K_{1,3}$ mögen in derselben Klasse von $\mathfrak{K}$ liegen, wenn $\{K_3, K_{1,3}\} \subseteq \mathcal{G}$ ist. Dann ist die Kantengraphbildung bezüglich $[\mathcal{G}, \mathfrak{K}]$ klassifizierungsstabil.

Die Transformation auf Kantengraphen kann z. B. dann sinnvoll sein, wenn Graphklassen durch Enthaltensein bzw. Fehlen von Teilgraphen charakterisiert sind. Den Teilgraphen der Ausgangsgraphen entsprechen induzierte Untergraphen der Kantengraphen. Es gibt zwar für diese Probleme auch stets eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge von Graphen, doch kann diese wesentlich umfangreicher als die charakterisierende Menge von Teilgraphen und die aus ihnen gebildete Menge von Kantengraphen sein. Dafür haben die Kantengraphen den Nachteil, daß sie im allgemeinen von größerer Ordnung als die ursprünglichen Graphen sind. Als Beispiel sei hier die Charakterisierung planarer Graphen genannt. Ein Graph heißt genau dann homöomorph irreduzibel, wenn er keine Knoten vom Grad 2 enthält. Wir haben dann den

Satz (Kuratowski /5/): Ein homöomorph irreduzibler Graph ist genau dann planar, wenn er weder den K_5 noch den $K_{3,3}$ als Teilgraphen enthält (s. Abb. 2).

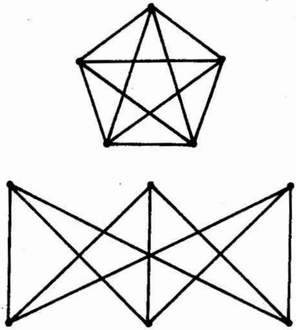


Abb.2

Sei $\mathcal{G}$ die Menge der homöomorph irreduziblen uninterpretierten, ungerichteten, schlichten Graphen. $\mathcal{A}$ sei die Zerlegung von $\mathcal{G}$ in planare und nichtplanare Graphen. Dann ist die in Abb. 3 dargestellte Menge von Graphen für das Klassifizierungsproblem $[\mathcal{G}, \mathcal{A}]$ (stark) klassifizierungsrelevant.

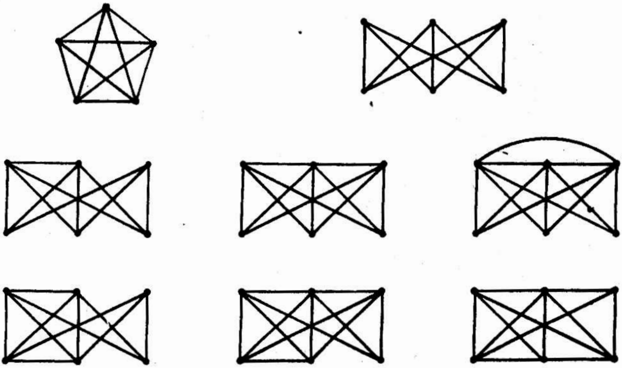


Abb.3

Für das durch Kantengraphbildung transformierte Problem bilden die beiden in Abb. 4 dargestellten Graphen eine (stark) klassifizierungsrelevante Menge.

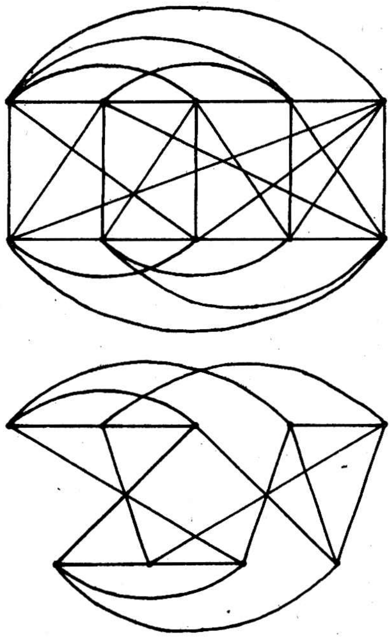


Abb.4

Die Fülle der sich ergebenden theoretischen Probleme bedarf noch ausführlicher Untersuchungen. Dabei spielen vor allem Fragen der Existenz von (stark) klassifizierungsrelevanten Mengen mit bestimmten Eigenschaften und Untersuchungen klassifizierungsstabiler Graphtransformationen eine Rolle.

Der Algorithmus wurde durch ein Programm auf der BESM-6 realisiert und die Anwendbarkeit des Prinzips auf praktische Problemstellungen an Hand mehrerer Datensätze überprüft. Das Programm ist eine Testversion und nicht optimiert. Im folgenden werden einige gerechnete Klassifizierungsprobleme mit einer kurzen Charakrerisierung der Ergebnisse genannt.

1. Soziale Gruppenstrukturen aus der Gruppenpsychotherapie: ca. 20 Graphen der Ordnung 12, 3 Klassen, Rechenzeit ca. 5 min.

2. Kommunikationsbeziehungen beim Gruppen-Problemlösen: 2 Varianten mit 61 bzw. 62 Graphen jeweils der Ordnung 8, 4 Klassen, Rechenzeit jeweils unter 30 min.
   Die Resultate wurden in einen Vortrag auf dem XXII. Internationalen Kongreß für Psychologie 1980 in Leipzig (Gundlach, Schulz /2/) einbezogen.

3. Strukturen aus der Verkehrssteuerung: 20 Graphen der Ordnung 8, 2 Klassen, Rechenzeit 2 bis 3 min.
   Zwei ursprünglich nicht zur Datenmenge gehörende Objekte konnten an Hand der gefundenen Merkmale den richtigen Klassen zugeordnet werden.

4. Chemische Strukturen: 85 Graphen der Ordnung 4 bis 12, 4 Klassen, Rechenzeit 30 bis 40 min.
   Die erhaltene Entscheidungsstruktur stand in Übereinstimmung mit bekannten Eigenschaften der Strukturen.

Literatur

/1/ Beineke, L. W.: On derived graphs and digraphs. In: Sachs, H., Voß, H.-J., und Walther, H. (Eds.): Beiträge zur Graphentheorie, S. 17 - 23, Leipzig 1968

/2/ Gundlach, W., and Schulz, G.: The influence of communication sequences on cognitive processes. XXII. Internat. Kongreß für Psychologie, Leipzig 1980

/3/ Harary, F.: On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs. In: Fiedler, M. (Ed.): Theory of Graphs and its Applications. S. 47 - 52, Prague 1964

/4/ Harary, F.: Graphentheorie. München 1974

/5/ Kuratowski, K.: Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. 15, 271 - 283 (1930)

/6/ Manvel, B.: On reconstructing graphs from their sets of subgraphs. J. Combin. Theory Ser. B 21, 156 - 165 (1976)

/7/ Sobik, F., und Sommerfeld, E.: Klassifikation strukturierter Objekte auf der Grundlage der **Isomorphie von Untergraphen**. Rostock. Math. Kolloq. 10, 97 - 102 (1978)

eingegangen: 30. 03. 1981

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Math. Fred Sobik
Dr. rer. nat. Erdmute Sommerfeld
Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für Kybernetik und
Informationsprozesse
Kurstraße 30/34
DDR-1080 Berlin

Rostock. Math. Kolloq. 18, 123 - 128 (1981)

03D15
68C99

Hans-Dietrich Hecker

Zur Kompliziertheit der Beschreibung von Enumerationen rekursiv aufzählbarer Mengen

Im folgenden werden wir Ergebnisse über die Beschreibungskomplexität von Enumerationen rekursiv-aufzählbarer Mengen darstellen. Wir verwenden dabei gebräuchliche Bezeichnungen. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen. $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P}^n$), $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}^n$) bezeichnen die Menge der rekursiv-aufzählbaren Mengen natürlicher Zahlen, die Menge der partiell-rekursiven (bzw. n-stelligen partiell-rekursiven) arithmetischen Funktionen bzw. die Menge der allgemein-rekursiven (n-stelligen allgemein-rekursiven) Funktionen. Enumerationen wurden erstmals von P. Young (/6/) für ganz $\mathbb{R}$ betrachtet. Wir haben in /4/, /5/ Enumerationen in speziellen Standardklassen studiert. In dieser Arbeit betrachten wir zunächst Enumerationen von $\mathbb{R}$. Dazu sei ν_0 eine feste kanonische Numerierung aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Eine Enumeration ist eine Funktion $E \in \mathbb{A}^2$, für die gilt:

$\forall i \, \forall n \;\; \nu_0(E(i,n)) \subseteq \nu_0(E(i,n+1))$.

Wir sprechen von einer Enumeration von $\mathbb{R}$, wenn zusätzlich gilt,

daß $\nu(i) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \nu_0(E(i,n))$ eine Numerierung von ganz $\mathbb{R}$ ist.

Eine solche Enumeration nennen wir Gödelenumeration (von $\mathbb{R}$), wenn die so definierte Funktion ν eine Gödelnumerierung von $\mathbb{R}$ ist (d. h., das s-m-n-Theorem gilt für die berechenbare Numerierung ν).

1. Minimale Indizes

In diesem Abschnitt sei E eine beliebige Gödelenumeration von $\mathbb{R}$. Sei (φ, ϕ) unabhängig davon ein Blumsches Zeitmaß (/1/) für $\mathbb{P}^1$. Es seien also $\varphi, \phi \in \mathbb{P}^2$, ferner sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi_n(x) = \varphi(n,x)$ Gödelnumerierung von $\mathbb{P}^1$, und es gelte für alle $n, x \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(x){\downarrow} \Leftrightarrow \phi_n(x){\downarrow}$.

Weiter sei ξ ein Beschreibungskomplexitätsmaß, d. h., es gelte a) $\xi \in A^1$ und b) $\exists k \in A^1 \forall n,m \in \mathbb{N}\ (\xi(n) = m \Rightarrow n \leq k(m))$.
Man kann sich etwa vorstellen, daß $\nu_o(E(i,n))$ die Menge der Zahlen ist, die eine Mehrbandturingmaschine mit Ausgabeband, gefüttert mit dem i-ten Programm in einer effektiven Liste aller Programme, nach n Arbeitstakten ausgibt (bezüglich einer geeigneten Codierung). Dann ist also $\nu(i)$ die Menge der Ausgaben der Maschine mit dem Programm i bei unbegrenzter Rechenzeit. Die Zahl i bzw. der Wert $\xi(i)$ ist ein Maß für die Komplexität des Programms i. Wir interessieren uns zunächst für die minimale Beschreibungsmöglichkeit von vorgegebenen Mengen M natürlicher Zahlen. Sei dazu

$$S^E(M) := \begin{cases} \min\{\xi(i) \mid \nu(i) = M\}, & \text{falls existent} \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt die

<u>Aussage 1.1:</u> $S^E(M)\downarrow \Leftrightarrow$ M ist rekursiv aufzählbar.

Ist $M_\nu := \{i \mid \forall j(\nu(j) = \nu(i) \Rightarrow \xi(j) \geq \xi(i))\}$ die Menge der ξ-minimalen Indizes, so gelten die folgenden Aussagen.

<u>Aussage 1.2:</u> Ist M rekursiv aufzählbar, so ist $S^E(M) \in M_\nu$.

<u>Aussage 1.3:</u> M_ν ist eine immune Menge.

Man könnte nun vermuten, daß man sich bei der Untersuchung der Menge der minimalen Indizes auf die Betrachtung einer Gödelnumerierung beschränken kann. Das ist aber nicht so.

<u>Aussage 1.4:</u> Für verschiedene Gödelenumerationen E und E' müssen die dazugehörigen Mengen M_ν und $M_{\nu'}$ nicht notwendig isomorph sein.

<u>Beweis:</u> Wir verwenden wie schon in der Arbeit /4/ Blummaße, um geeignete Enumerationen zu definieren. Sei (φ, Φ) unser Blummaß und für $i,n \in \mathbb{N}$ sei $\nu_o(E(i,n)) = \{\varphi_i(x) \mid x \leq n \ \&\ \Phi_i(x) \leq n\}$ und $\nu_o(E'(i,n)) = \{[\frac{\varphi_i(x)}{2}] \mid x \leq n \ \&\ \Phi_i(x) \leq n\}$. Dann ist $\nu(i) = Wb(\varphi_i)$ (Wertebereich) und $\nu'(i) = \{[x/2] \mid x \in Wb(\varphi_i)\}$.

Offenbar sind ν und ν' Gödelnumerierungen. Man zeigt nun unter

Ausnutzung der Eigenschaften des Maßes ξ, daß notwendigerweise $M_{\nu'} \subset M_\nu$ gilt. $M_{\nu'} \subseteq M_\nu$ ist trivial. Seien $i, \varrho \in M_\nu$ so, daß $\nu(i) = \{x \mid x \text{ gerade}\}$ und $\nu(\varrho) = \{x \mid x \text{ ungerade}\} \cup M$ ist, wobei M eine geeignete Menge gerader Zahlen sei. Es ist $\nu'(i) = \nu'(\varrho) = \mathbb{N}$. Da es unendlich viele Möglichkeiten für M gibt, existieren unter den minimalen $\varrho = \varrho(M)$ solche, für die wegen Axiom b) an ξ gilt: $\xi(\varrho) > \xi(i)$. Sei M so gewählt. Man beweist, daß dann ϱ zu $M_\nu \setminus M_{\nu'}$ gehört. Damit ist $M_{\nu'} \subset M_\nu$, und mithin (M_ν ist immun!) ist $M_{\nu'}$ nicht zu M_ν isomorph.

2. Optimale und schnelle Enumerationen

In diesem Abschnitt betrachten wir beliebige Enumerationen E. Sei ξ ein strenges Beschreibungskomplexitätsmaß (vgl. /3/, wir benutzen die dort für strenge Maße bewiesenen Sätze). Wir nennen eine Enumeration E optimal (bez. ξ), wenn für alle Enumerationen E_1 ein c_{E_1} existiert, so daß für alle rekursiv aufzählbaren Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ die Beziehung $S^E(M) \leq S^{E_1}(M) + c_{E_1}$ gilt.

Wir nennen eine Enumeration E schnell, wenn für alle Enumerationen E_1 ein $d_{E_1} \in \mathbb{A}^1$ existiert, so daß für alle i, für die

$\nu_1(i) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \nu_0(E_1(i,n))$ unendlich ist, ein i' existiert, so daß gilt: $\nu(i') = \nu_1(i)$ und $\forall_j^{\infty} \nu_0(E_1(i,j)) \subseteq \nu_0(E(i', d_{E_1}(j)))$.

Wir zeigen das Hauptresultat unserer Arbeit:

Theorem 2.1: Es existiert eine schnelle optimale Gödelenumeration.

Beweis: Sei (φ, Φ) unser Blummaß und $(\varphi_i^2, \Phi_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ eine dazugehörige Gödelnumerierung von P^2 mit Zeitmaß Φ_i^2, so daß für eine Cantor-Paarnumerierung $\langle , \rangle$ die Beziehungen $\varphi_i(\langle a,x \rangle) = \varphi_i^2(a,x)$ und $\Phi_i^2(a,x) = \Phi_i(\langle a,x \rangle)$ für alle $i,a,x \in \mathbb{N}$ gelten.

Damit definieren wir $\nu_o(E^{§}(i,t)) := \{\varphi_a^2(n,x) \mid \Phi_a^2(n,x) \leq t\}$, falls $i = \langle a,n \rangle$ ist. Dann gilt $\nu^{§}(\langle a,i \rangle) = Wb(\lambda n \varphi_a^2(i,n))$. Offenbar ist $E^{§}$ eine Gödelenumeration. Sei nun E' eine beliebige Enumeration. Ferner sei M eine rekursiv-aufzählbare Menge, und für i_o gelte $\xi(i_o) = S^{E'}(M)$ sowie $\nu(i_o) = M$. Da $E' \in \mathbb{A}_2$ ist, existiert eine Zahl a', für die $\lambda i,n\, E'(i,n)$ $= \lambda i,n\, \varphi_{a'}^2(i,n)$ gilt. Es folgt

$$\nu'(i_o) = M = \bigcup_n \nu_o(E'(i_o,n)) = \bigcup_n \nu_o(\varphi_{a'}^2(i_o,n)).$$

Wir definieren jetzt die gewünschte Enumeration:

$$\nu_o(E((i,t)) := \bigcup_{j \in \nu_o(E^{§}(i,t))} \nu_o(j).$$

Offenbar ist E monoton und ν berechenbare Numerierung von $\mathbb{R}$. Wir behaupten, daß ν Gödelnumerierung ist. Dazu zeigen wir, daß $\nu' \leq \nu$ gilt (da ν' beliebig war, erhält man daraus die Behauptung). Wir beweisen folgende Hilfssätze 1 - 5. (Auf die Wiedergabe der Beweise der Hilfssätze 1,2 verzichten wir hier, es handelt sich dabei um routinemäßige Rechnungen.)

<u>Hilfssatz 1:</u> $\nu'(i_o) = \nu(\langle a',i_o \rangle)$.

<u>Hilfssatz 2:</u> Für alle i gilt: $\nu'(i) = \nu(\langle a',i \rangle)$.
Mit $f(i) := \langle a',i \rangle$ folgt $\nu' = \nu f$, und damit ist ν Gödelnumerierung und E Gödelenumeration.

<u>Hilfssatz 3:</u> E ist optimal.

<u>Beweis:</u> Es gilt für unsere beliebig gewählte rekursiv-aufzählbare Menge M die Beziehung $S_\nu(M) \leq \xi(\langle a',i_o \rangle) \leq \xi(i_o) + c(a')$ mit einer geeigneten Funktion c, die zu unserem strengen Beschreibungskomplexitätsmaß gehört (/3/). Wir setzen $c_{E'} = c(a')$ und erhalten die Behauptung.

<u>Hilfssatz 4:</u> E ist schnell.

<u>Beweis:</u> Wir setzen $d_{E'}(n) := \max_{k \leq n} \Phi_{a'}(k,n)$. Dann gilt $d_{E'} \in \mathbb{A}^1$, denn es ist $\lambda i,n\, E'(i,n) = \varphi_{a'}^2(i,n) \in \mathbb{A}^2$.

Hilfssatz 5: Zu $i \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $i' \in \mathbb{N}$, so daß, falls $\nu'(i)$ unendlich ist, für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:
$\nu_o(E'(i,t)) \subseteq \nu_o(E(i',d_{E'}(t))$.

Aus Hilfssatz 5 folgt der Hilfssatz 4.

Beweis des Hilfssatzes 5: Es gilt

$$\nu_o(E'(i,t)) = \nu_o(\varphi^2_{a'}(i,t)) \subseteq \bigcup\{\nu_o(\varphi^2_{a'}(i,j)) \mid \Phi^2_{a'}(i,j) \leq \Phi^2_{a'}(i,t)\} = \bigcup_{q \in \{\varphi^2_{a'}(i,j) \mid \Phi^2_{a'}(i,j) \leq \Phi^2_{a'}(i,t)\}} \nu_o(q)$$

$$= \bigcup_{q \in \nu_o(E^{\S}(\langle a',i\rangle, \Phi^2_{a'}(i,t))} \nu_o(q) = \nu_o(E(\langle a',i\rangle, \Phi^2_{a'}(i,t)).$$

Sei nun $t \geq i$. Dann ist $\nu_o(E(\langle a',i\rangle, \Phi^2_{a'}(i,t))$

$$\subseteq \nu_o(E(\langle a',i\rangle, \max_{k \leq t} \Phi^2_{a'}(k,t)) = \nu_o(E(\langle a',i\rangle, d_{E'}(t)).$$

Also erhält man für $i' = \langle a',i\rangle$ die gewünschte Beziehung $\nu_o(E'(i,t)) \subseteq \nu_o(E(i',d_{E'}(t))$. Damit folgt Hilfssatz 5 und unser Theorem 2.1.

3. Der Oberhalbverband der Simulierbarkeit

Gegeben seien zwei ganz beliebige Enumerationen E und E', die insbesondere auch keine Enumerationen von $\mathbb{R}$ sein müssen. Wir sagen, daß E durch E' real simuliert werden kann, und schreiben $E \preceq E'$, wenn gilt:

$$\exists f \in A^1\, \forall i\, (|\nu_E(i)| = \infty \Rightarrow \exists i'\, \nu(i) = \nu'(i')\ \&$$

$$\forall^{\infty}_t \bigcup_{t' \leq t} \nu_o(E(i,t')) \subseteq \bigcup_{t' \leq f(t)} \nu_o(E'(i',t')))$$

(d. h. $\forall^{\infty}_t\, \nu_o(E(i,t)) \subseteq \nu_o(E'(i',f(t))))$).

Aussage 3.1: $\preceq$ ist reflexiv und transitiv.

Definition 3.2: $E \simeq E' :\Leftrightarrow E \preceq E'\ \&\ E' \preceq E$.

Aussage 3.3: $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 3.4: V sei die Menge der Äquivalenzklassen der Enumerationen. Es sei $[E] \leq [E'] :\Leftrightarrow E \preceq E'$.

Satz 3.5: (V,≤) ist ein Oberhalbverband mit Nullelement und Einselement.
Sei E unsere schnelle Enumeration von Abschnitt 2, so ist [E] das Einselement. Das Supremum EsupE' von E und E' kann man so definieren: EsupE'(2i+1,t) := E'(i,t); EsupE'(2i,t) := E(i,t).
Wir vermuten, daß (V,≤) kein Verband ist. Eine analoge Betrachtung liefert einen Verband, wenn man sich nur auf Enumerationen beschränkt, die die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung ausgeben. Eine solche Betrachtung führt aber bekanntlich zu einer wesentlichen Einschränkung.

Literatur

/1/ Blum, M.: A machine independent theory of the complexity of recursive functions. J. Assoc. Comput. Mach. 14, 332 - 336 (1967)

/2/ Chaitin, G. J.: On the Simplicity and Speed of Programms. J. Assoc. Comput. Mach. 16, 407 - 422 (1969)

/3/ Hecker, H.-D.: Zur Programmkomplexität rekursiv-aufzählbarer Mengen. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 22, 239 - 244 (1976)

/4/ Hecker, H.-D.: Enumerationen in speziellen Standardklassen rekursiv-aufzählbarer Mengen. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 26, 165 - 180 (1980)

/5/ Hecker, H.-D.: Komplexitätsklassen für Enumerationen von rekursiv-aufzählbaren Mengen, Preprint 3 Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald 1979

/6/ Young, P.: Toward a theory of enumerations. J. Assoc. Comput. Mach. 16, 328 - 341 (1969)

/7/ Meyer, A. R.: Programm size in restricted programming languages. Inform. and Control 21, 382 - 394 (1972)

eingegangen: 30. 03. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. Hans-Dietrich Hecker
Ernst Moritz-Arndt-Universität
Sektion Mathematik
Jahnstraße 15 a
DDR-2200 Greifswald

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq./ Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. ä. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparentpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

/8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Priceton 1958

/9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)

/10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichard, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

S. 31/32
S. 67
S. 111

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

ODR W II/3 II 1514 C 114/81 2220