

# Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 21



**WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT  
ROSTOCK**



**ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM**

**Heft 21**

**Vorträge der Tagung**

**Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen in  
der Mathematischen Kybernetik**

**veranstaltet von der  
Mathematischen Gesellschaft der DDR**

**und der  
Sektion Mathematik der  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock**

**vom 30. 03. bis 03. 04. 1981**

**Teil 3**

**1982**

**Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik**

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Schriftleitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion  
Mathematik

Prof. Dr. Gerhard Maeß, Schriftleiter

Dr. Werner Plischke, Lektor

Dorothea Meyer, Herstellung der

Ursula Kunzendorf, Druckvorlage

Sektion Mathematik der

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,

DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 1

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR - 2500 Rostock,  
Vogelsang 13/14

Fernruf: 369 577

Leiter: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage

Genehmigungs-Nr.: C 130/82

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz



## Inhalt

## Seite

|                                              |                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Катериночкина, Наталья Николаевна            | Поиск максимального верхнего нуля дискретной монотонной функции                                              | 5   |
| Engel, Konrad                                | An asymptotic formula for maximal $h$ -families in ranked product orders                                     | 11  |
| Gronau, Hans-Dietrich O. F.; Prestin, Jürgen | Some results on designs with repeated blocks                                                                 | 15  |
| Havel, Ivan                                  | Embedding the directed dichotomic tree into the $n$ -cube                                                    | 39  |
| Pötschke, Dieter                             | Die topologische Entropie als Isomorphie-invariante endlicher Graphen                                        | 47  |
| Kusjurin, Nikolai Nikolajewič                | One limit theorem about $(n, k, l)$ -coverings                                                               | 59  |
| Leborde, Jean-Marie                          | Charakterisierungen des Hyperwürfels                                                                         | 63  |
| Zelinka, Bohdan                              | Domatische Zahlen der Graphen                                                                                | 69  |
| Topp, Jerzy                                  | Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs                                      | 73  |
| Weber, Karl                                  | Random graphs - a survey                                                                                     | 83  |
| Dassow, Jürgen                               | Weitere Bemerkungen zu einem modifizierten Vollständigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen | 99  |
| Fischer, Thomas                              | Zur Kompliziertheit von assoziativen Suchprozessen in mehrdimensionalen binären Suchbäumen                   | 111 |



Наталья Николаевна Катериноччина

## Поиск максимального верхнего нуля дискретной монотонной функции

### 1. Введение

В дискретной математике имеется большое число экстремальных задач, которые сводятся к задачам, связанным с расшифровкой дискретных монотонных функций, а именно: к полной расшифровке такой функции либо к поиску её максимального верхнего нуля. Эти две задачи являются в некотором смысле универсальными. Причём, к первой из указанных задач - полной расшифровке дискретной монотонной функции - сводятся такие задачи, в которых требуется перечислить все локальные экстремумы некоторого функционала, а ко второй - поиску максимального верхнего нуля - такие, где нужно отыскать глобальный экстремум.

В качестве примеров задач, сводящихся к указанным, можно называть следующие: выделение всех совместных подсистем и максимальной совместной подсистемы системы линейных неравенств, нахождение всех покрытий и минимального покрытия множества конечной системой подмножеств, построение всех тестов и минимального теста бинарной таблицы и другие.

Из сказанного следует, что важно уметь оценивать сложность решения названных задач, так как при этом оценивается сложность решения целого ряда дискретных экстремальных задач. Этим вопросам посвящён ряд работ. Задача полной расшифровки монотонной булевой функции в шенноновской постановке впервые рассматривалась и решалась В. К. Коробковым /1/. Позднее она была окончательно решена Х. Анселем /2/. Та же задача для монотонных многозначных функций рассматривалась в работах В. К. Коробкова /3/ и В. Б. Алексеева /4/. Автор занимался вопросами сложности поиска максимального верхнего нуля дискретной монотонной функции. Эта задача решена в шенноновской постановке для класса всех монотонных булевых функций, для класса функций  $k$ -значной логики, монотонных относительно естественного порядка и принимающих два значения, а также для некоторых подклассов монотонных булевых функций.

## 2. Постановка задачи для класса монотонных булевых функций и формулировка результата

Обозначим через  $E^n$  множество всех двоичных наборов длины  $n$ . В множестве  $E^n$  введём следующий частичный порядок.

Определение 1: Пусть  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^n$ . Будем говорить, что  $\tilde{\alpha}$  не превосходит  $\tilde{\beta}$  (и писать  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ ) тогда и только тогда, когда  $\alpha_i \leq \beta_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$  и  $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta}$ , то будем писать  $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ .

Определение 2: Булеву функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  назовём монотонной, если для любых двух наборов  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^n$  из того, что  $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ , следует  $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ . Через  $M_n$  обозначим множество всех монотонных булевых функций от  $n$  переменных.

Определение 3: Набор  $\tilde{\alpha} \in E^n$  назовём верхним нулём функции  $f \in M_n$ , если  $f(\tilde{\alpha}) = 0$  и для любого набора  $\tilde{\beta}$  такого, что  $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ ,  $f(\tilde{\beta}) = 1$ .

Определение 4: Норму набора  $\tilde{\alpha}$  определим формулой  $\|\tilde{\alpha}\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

Определение 5: Максимальным верхним нулём функции  $f$  будем называть её верхний нуль с максимальной нормой.

Пусть произвольная (неизвестная нам) функция  $f \in M_n$  задана при помощи оператора  $A_f$ , который по любому набору  $\tilde{\alpha} \in E^n$  выдаёт значение  $f(\tilde{\alpha})$ . На практике в качестве оператора  $A_f$  может выступать какая-нибудь задача. Найти для конкретного набора  $\tilde{\alpha}$  значение  $f(\tilde{\alpha})$  означает решить эту задачу для конкретных начальных условий.

Требуется найти хотя бы один максимальный верхний нуль функции  $f$  при помощи обращений к оператору  $A_f$ . При этом после каждого обращения к оператору полученное значение распространяется по монотонности на другие наборы.

Естественно желать не просто решить поставленную задачу, а решить её оптимальным способом. Поэтому задача решается нами в шенноновской постановке.

Через  $\mathcal{A}$  обозначим множество всех алгоритмов, решающих эту задачу. Пусть  $\mu(B, f)$  — число обращений алгоритма  $B \in \mathcal{A}$  к оператору  $A_f$  при работе с функцией  $f \in M_n$ .

Введём функцию Шеннона:

$$\mu(n) = \min_{B \in \mathcal{B}} \max_{f \in M_n} \mu(B, f).$$

Целью работы было

- 1) найти значение  $\mu(n)$ ,
- 2) построить оптимальный по Шеннону алгоритм поиска максимального верхнего нуля монотонной булевой функции.

Доказана следующая

Теорема 1:

$$\mu(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$$

Здесь  $\lfloor x \rfloor$  - наибольшее целое, не превосходящее  $x$ .

Отметим, что для аналогичной функции Шеннона  $\varphi(n)$  для задачи полной расшифровки монотонной булевой функции Анселем было получено значение

$$\varphi(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \sim 2\mu(n).$$

При доказательстве теоремы 1 построен алгоритм  $B_1 \in \mathcal{B}$ , оптимальный по Шеннону. Этот алгоритм принципиально отличен от алгоритма расшифровки Анселя. В последнем существенно используется факт разбиения  $E^n$  на цепи, что требует большой памяти ( $\approx 2^n$ ). У нас техника совсем другая, понятие цепи вовсе не используется. Вследствие этого для машинной реализации алгоритма  $B_1$  требуется существенно меньше памяти ( $\propto n$ ).

### 3. Постановка задачи и формулировка результата для одного класса функций $k$ -значной логики

Рассмотрим множество  $E_k^n = \underbrace{E_k \times \dots \times E_k}_n$  -  $n$ -ую декартову степень

множества  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Пусть в  $E_k$  введён естественный порядок  $0 < 1 < \dots < k-1$ . Тогда, аналогично булевскому случаю, в  $E_k^n$  индуцируется соответствующий частичный порядок:

$\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_i \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим класс  $M_{n,k}$  всех функций, определённых на  $E_k^n$ , монотонных относительно введённого порядка и принимающих два значения: 0 и 1.

Точно так же, как и в булевском случае, для множества  $E_K^n$  и класса  $M_{n,k}$  определим понятия: верхний нуль, норма набора, максимальный верхний нуль.

Определение 6: Два набора  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_K^n$  назовём сравнимыми, если либо  $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ , либо  $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ . В противном случае наборы  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  не сравнимы.

Определение 7: Наибольшее число попарно не сравнимых наборов, которое можно выбрать в множестве  $E_K^n$ , назовём шириной  $E_K^n$  и обозначим через  $\omega(E_K^n)$ .

Из работы В. Б. Алексеева /5/ известно, что  $\omega(E_K^n) \sim a \frac{k^n}{\sqrt{n}}$ , где  $a$  — некоторая константа.

Постановка задачи аналогична булевскому случаю. Пусть  $f \in M_{n,k}$  задана при помощи оператора  $A_f$ , который по любому набору  $\tilde{\alpha} \in E_K^n$  выдаёт значение  $f(\tilde{\alpha})$ . Требуется найти максимальный верхний нуль функции  $f$  при помощи обращений к оператору  $A_f$ .

Введём функцию Шеннона  $\mu(n, k)$ , имеющую тот же смысл, что и  $\mu(n)$  в булевском случае:

$$\mu(n, k) = \min_{G \in \mathcal{G}} \max_{f \in M_{n,k}} \mu_k(G, f).$$

Здесь  $\mathcal{G}$  — аналог  $\mathcal{B}$ ,  $\mu_k(G, f)$  — аналог  $\mu(B, f)$ .

Теорема 2: При  $k > 2$ ,  $n \geq 2$

$$\mu(n, k) = \omega(E_K^n) + 1.$$

При доказательстве этой теоремы построены следующие алгоритмы из множества  $\mathcal{G}$ : алгоритм  $G_1$ , оптимальный по Шеннону для  $k > 2$ ,  $n \geq 4$ , алгоритмы  $G_2$  и  $G_3$ , оптимальные по Шеннону для  $k > 2$  и  $n = 2, 3$  соответственно.

#### 4. Формулировка результата для некоторых подклассов монотонных булевых функций

Поскольку в общем случае сложность решения задачи поиска максимального верхнего нуля велика, изучались некоторые подклассы монотонных булевых функций, для которых задачу можно решить за

меньшее число шагов. В частности рассматривались подклассы  $M_n^m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ .

Определение 8: Функция  $f$  принадлежит подклассу  $M_n^m$  тогда и только тогда, когда  $f \in M_n$  и для любого  $\tilde{\alpha} \in E^n$  из того, что  $\|\tilde{\alpha}\| \geq m + 1$ , следует  $f(\tilde{\alpha}) = 1$ .

Для таких подклассов решалась задача поиска максимального верхнего нуля в шенноновской постановке. Вводилась функция  $\mu_m(n)$  - аналог функции  $\mu(n)$ :

$$\mu_m(n) = \min_{B \in \mathcal{B}^m} \max_{f \in M_n^m} \mu(B, f).$$

Здесь  $\mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}$ .

Теорема 3:

Если  $n - 1 \geq m \geq [n/2]$ , то  $\mu_m(n) = \binom{n}{[n/2]} + 1$ .

Если  $1 \leq m < [n/2]$ , то  $\mu_m(n) = \binom{n}{m} + 1$ .

Литература

- /1/ Коробков, В. К.: О монотонных функциях алгебры логики. Проблемы кибернетики 13, 5 - 28 (1965)
- /2/ Hansel, G.: Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de  $n$  variables. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 262, 1088 - 1090 (1966)
- /3/ Коробков, В. К.: Некоторые обобщения задачи "расшифровки" монотонных функций алгебры логики. Сб. Дискретный анализ, вып. 5, стр. 19 - 25, Новосибирск 1965
- /4/ Алексеев, В. Б.: О расшифровке некоторых классов монотонных многозначных функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 16, № 1, 189 - 198 (1976)
- /5/ Алексеев, В. Б.: О числе монотонных  $k$ -значных функций. Проблемы кибернетики 28, 5 - 24 (1974)
- /6/ Катериночкина, Н. Н.: Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики. Докл. Акад. наук СССР 224, № 3, 557 - 560 (1975)

/7/ Катериночкина, Н. Н.: Поиск максимального верхнего нуля  
для одного класса монотонных функций  $k$ -значной логи-  
ки. Докл. Акад. наук СССР 234, № 4, 746 - 749 (1977)

поступило: 30. 03. 1981

Адрес автора:

Н. Н. Катериночкина, канд. физ.-мат. наук  
Вычислительный центр  
Академии наук СССР  
улица Вавилова 40  
Москва, СССР



Konrad Engel

An asymptotic formula for maximal h-families in ranked product orders

---

Let  $Q$  be a finite partially ordered set (poset) with a rank function, i. e. there exists a function  $r: Q \rightarrow \mathbb{N}$  such that  $r(x) = 0$  for all minimal elements of  $Q$  and  $r(y) = r(x) + 1$ , if  $y > x$  and no element lies between  $x$  and  $y$ . Let  $q := \max_{x \in Q} r(x)$  and let  $N_1(Q)$  be the set of elements with rank 1. The cardinalities of  $N_1(Q)$  are called Whitney numbers and denoted by  $W_1(Q)$ .

Let  $P_n := Q^n$ , i. e.  $P_n$  is the poset over all  $n$ -tuples  $(x_1, \dots, x_n)$  with  $x_i \in Q$  for all  $i$  and with the order defined by  $(x_1, \dots, x_n) \leq_{P_n} (y_1, \dots, y_n)$  iff  $x_i \leq y_i$  for all  $i$ . Obviously  $P_n$  is a ranked poset too and

$$W_k(P_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} W_{i_1}(Q) \dots W_{i_n}(Q).$$

We define  $d_{h,n}$  as the sum of the  $h$  largest Whitney numbers of  $P_n$ . We shall prove the following

Theorem: It is  $d_{h,n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{h |Q|^n}{B}$  as  $n \rightarrow \infty$ , where

$$h = o(\sqrt{n}), \quad A = \sum_{i=0}^q \frac{1}{|Q|} \frac{W_i(Q)}{|Q|} \quad \text{and} \quad B = \sqrt{\sum_{i=0}^q \frac{1}{|Q|} \frac{W_i(Q)}{|Q|} - A^2}.$$

Proof: We use an idea of Alekseev [1] and apply a Theorem of Goedenko. Let  $\xi_i$  be independent and identically distributed random variables with

$$P(\xi_1 = k) = \frac{W_k(Q)}{|Q|} \quad (k \in \{0, \dots, q\}).$$

Further let  $\zeta_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Evidently

$$P(\zeta_n = k) = \frac{w_k(P_n)}{|P_n|} = \frac{w_k(P_n)}{|Q|^n} \quad (k \in \{0, \dots, nq\}). \quad (1)$$

Let  $A$  and  $B^2$  be the expected value and variance of  $\xi_1$ , respectively. They can be obtained as given in the Theorem. Then  $A_n := nA$  and  $B_n^2 := nB^2$  are the expected value and variance of  $\zeta_n$ , respectively. Since all values of the random variables  $\xi_1$  are of the form  $0 + k \cdot 1$  ( $k \in \{0, \dots, q\}$ ), by the Theorem of Gnedenko (see /3/ pp. 249 ff.)

$$P(\zeta_n = k) \cdot B_n - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-A_n)^2}{2B_n^2}\right) \rightarrow 0, \quad (2)$$

uniformly relative to  $k$  as  $n \rightarrow \infty$ .

From (1) and (2) we obtain

$$w_k(P_n) \approx \frac{|Q|^n}{\sqrt{2\pi} B_n} \quad \text{for all } k \in \{0, \dots, nq\}.$$

Hence we have

$$d_{h,n} \approx \frac{h|Q|^n}{\sqrt{2\pi} B_n}. \quad (3)$$

Now consider the set  $I := \{[A_n] + 1, \dots, [A_n] + h\}$  where  $[x]$  is the largest integer not greater than  $x$ . We have

$$0 \leq \frac{(k-A_n)^2}{2B_n^2} \leq \frac{h^2}{2nB^2} \quad \text{for all } k \in I \text{ and } \frac{h^2}{2nB^2} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

on account of  $h = o(\sqrt{n})$ . Hence

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-A_n)^2}{2B_n^2}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4)$$

uniformly relative to  $k \in I$  as  $n \rightarrow \infty$ .

Because of (2) and (4) there exists a function  $\varepsilon(n)$  with  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  such that

$$\left| \frac{w_k(P_n)}{|Q|^n} B_n - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq \varepsilon(n) \text{ for all } k \in I$$

or equivalently

$$\left| w_k(P_n) - \frac{|Q|^n}{B_n \sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{|Q|^n}{B_n} \varepsilon(n). \quad (5)$$

Now we obtain

$$\left| \sum_{k \in I} w_k(P_n) - \frac{h|Q|^n}{B_n \sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{h|Q|^n}{B_n} \varepsilon(n)$$

and

$$\sum_{k \in I} w_k(P_n) = \frac{h|Q|^n}{\sqrt{2\pi} B_n} (1 + o(1)).$$

Hence

$$d_{h,n} \geq \frac{h|Q|^n}{\sqrt{2\pi n} B} \quad (6)$$

and with (3) and (6) the Theorem is proved.

**Corollary:** If  $Q$  is a normal poset with logarithmic concave Whitney numbers or if  $Q$  can be partitioned into symmetric chains, then the size of a maximal  $h$ -family in  $Q^n$  is asymptotically  $\frac{h|Q|^n}{\sqrt{2\pi n} B}$  as  $n \rightarrow \infty$ , where  $h = o(\sqrt{n})$  and  $B$  is defined as in the Theorem.

For the definitions in the Corollary see for instance [2] or [4]. In these papers it is proved too that a maximal  $h$ -family in  $Q^n$  is equal to the sum of the  $h$  largest Whitney numbers.

## References

- /1/ Алексеев, В. Б.: О числе монотонных  $k$ -значных функций. Проблемы кибернетики 28, 5 - 24 (1974)

- /2/ Engel, K.: Maximale  $h$ -Familien in endlichen Ordnungen,  
Hansel-Ordnungen und monotone Funktionen.  
Dissertation (A), Wilhelm-Pieck-Universität, Rostock  
1981
- /3/ Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.  
Berlin 1978
- /4/ Greene, G., and Kleitman, D. J.: Proof techniques in the  
theory of finite sets. In: Rota, G.-C. (Ed.): Studies  
in Combinatorics. MAA Studies in Math. 17,  
pp. 22 - 79, Washington, D. C. 1978

received: February 02, 1982

Author's address:

Dr. rer. nat. K. Engel  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
DDR-2500 Rostock

Hana-Dietrich O. F. Gronau  
Jürgen Prestin

# Some results on designs with repeated blocks

## 1. Introduction

A  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) design is a system of (not necessarily distinct)  $k$ -element subsets (called blocks) of a  $v$ -element set  $K$  such that every  $t$ -element subset of  $K$  occurs exactly  $\lambda$  times in the blocks. Two  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) designs  $M$  and  $N$  are called isomorphic if and only if there is a permutation of the elements of  $K$  which transforms  $M$  into  $N$ . A  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) design is called elementary if and only if there is no subsystem which is a  $t$ -( $v, k, \lambda'$ ) design with  $0 < \lambda' < \lambda$ .

The existence of a  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) design implies that

$$\lambda \binom{v-i}{t-i} / \binom{k-i}{t-i} \quad (1)$$

is an integer for every  $i = 0, 1, \dots, t-1$ .

We introduce the following notations:

$g(v, k, t, \lambda)$  - number of pairwise nonisomorphic  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) designs with repeated blocks,

$g^*(v, k, t, \lambda)$  - number of pairwise nonisomorphic elementary  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) designs with repeated blocks.

Obviously,  $g(v, k, t, 1) = g^*(v, k, t, 1) = 0$ , i.e. for Steiner systems. The concept of elementary designs was introduced by Rasch and Herrendörfer /8/. On designs without repeated blocks there exist several papers, some of them published in this journal in the recent years. On designs with repeated blocks the following results are known:

- $g^*(6, 3, 2, \lambda) = 0$  see Burosch /1/,
- $g^*(8, 3, 2, 6) = g(8, 3, 2, 6) = 9$  see Gronau /3/ and Rasch and Herrendörfer /9/,
- $g(9, 3, 2, 2) = 23$  see Mathon and Rosa /6/,
- $g^*(9, 3, 2, 2) = 16$  see Mathon and Rosa /6/ and Morgen /7/.

- $g^*(10,3,2,2) = g(10,3,2,2) = 566$  see Ganter et al. /2/
- $g^*(v,3,2,\lambda) > 0$  for  $v \geq 8$ ,  
 $v \neq 1$  or  $3$  (6) and some  $\lambda$  see Gronau /3/,
- $g(8,4,3,\lambda) \leq g(7,3,2,\lambda)$  } see Gronau /4/.
- $g^*(8,4,3,\lambda) \leq g^*(7,3,2,\lambda)$  }

In this paper we present the following results.

Theorem 1: (i)  $g(6,3,2,2) = 0$ ,  
(ii)  $g(6,3,2,4) = 3$ ,  
(iii)  $g(6,3,2,6) = 6$ .

Theorem 2: (i)  $g(7,3,2,2) = 3$ ,  
(ii)  $g(7,3,2,3) = 9$ ,  
(iii)  $g(7,3,2,4) = 34$ ,  
(iv)  $g(7,3,2,5) \geq 50$ .

Theorem 3: (i)  $g^*(7,3,2,2) = 0$ ,  
(ii)  $g^*(7,3,2,3) = 0$ ,  
(iii)  $g^*(7,3,2,4) = 0$ .

Theorem 4:  $g(8,3,2,6) = g^*(8,3,2,6) \geq 100$ .

Theorem 5:  $g(8,4,2,3) = g^*(8,4,2,3) = 0$ .

Theorem 6:  $g(9,4,2,3) = g^*(9,4,2,3) = 0$ .

Theorem 7:  $g(9,4,3,6) = g^*(9,4,3,6) \geq 50$ .

Theorem 8:  $g^*(v,4,2,\lambda) > 0$  for  $v \geq 14$ ,  $v \neq 22$ ,  
and  $v \neq 1$  or  $4$  (12) and some  $\lambda$ ,  $\lambda = \lambda(v)$ .

The  $\lambda$ 's in the theorems are as small as possible according to (1) and  $\lambda \geq 2$ .

We also describe representatives of the isomorphic classes. The designs are given in terms of matrices where the columns represent the blocks. For simplifying we omit brackets, if no misunderstanding is to fear.

## 2. Proof of Theorem 1

A  $2-(6,3,2q)$  design has  $(b=)$   $10q$  blocks and every element occurs in  $(r=)$   $5q$  blocks. For an arbitrary triple let  $n_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) denote the number of blocks that intersect it in exactly  $i$  elements.

$$\begin{aligned}
 \text{Then} \quad n_0 + n_1 + n_2 + n_3 &= 10q, \\
 n_1 + 2n_2 + 3n_3 &= 15q, \\
 n_2 + 3n_3 &= 6q.
 \end{aligned}$$

Let the triple  $B$  be one of the repeated blocks. Then  $n_3 \geq 2$  and we obtain the following solutions in nonnegative integers of the above system

$$\begin{aligned}
 q = 1: & \text{ no solution,} \\
 q = 2: & n_3 = 2, n_2 = 6, n_1 = 12, n_0 = 0, \\
 q = 3: & n_3 = 3, n_2 = 9, n_1 = 18, n_0 = 0, \\
 & n_3 = 2, n_2 = 12, n_1 = 15, n_0 = 1.
 \end{aligned}$$

$q = 1$ . (1) is proven.

$q = 2$ . Then the design has without loss of generality (w.l.o.g.) the following structure

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 | 3 |   |   | A | B | C |   |   |   |   | D |   |   |   | E |   |   | F |

Let  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$  ( $i=4,5,6$ ) denote the number of elements  $i$  occurring in A,B,C,D,E,F, respectively.

$$\begin{aligned}
 \text{Then} \quad a_1 + b_1 + d_1 &= 4, \\
 a_1 + c_1 + e_1 &= 4, \\
 b_1 + c_1 + f_1 &= 4, \\
 a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1 &= 10.
 \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
 a_1 + b_1 + c_1 &= 2, \\
 d_1 &= 2 + c_1, \\
 e_1 &= 2 + b_1, \\
 f_1 &= 2 + a_1.
 \end{aligned}$$

W.l.o.g. we may assume that one of the following cases holds.

| A  | B  | C  |
|----|----|----|
| 44 | 55 | 66 |
| 44 | 56 | 56 |
| 45 | 46 | 56 |

Then D,E,F follow immediately and we obtain the 3 designs  $B_1, B_2, B_3$ .

$$B_1 = \begin{array}{l} 11111122111122223333 \\ 22223333445544554444, \\ 33445566666655665566 \end{array}$$

$$B_2 = \begin{array}{l} 11111122111122223333 \\ 22223333445544554444, \\ 33445656566656665566 \end{array}$$

$$B_3 = \begin{array}{l} 11111122111122223333 \\ 22223333445544454445, \\ 33454656566656665566 \end{array}$$

These designs are pairwise nonisomorphic since they have different numbers of double blocks.

|                         | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|
| Number of double blocks | 10    | 6     | 4     |

(ii) is proven.

$$q = 3, n_3 = 3.$$

Then

|     |     |     |     |        |        |        |
|-----|-----|-----|-----|--------|--------|--------|
| 111 | 111 | 111 | 222 | 111111 | 222222 | 333333 |
| 222 | 222 | 333 | 333 | . D    | E      | F      |
| 333 | A   | B   | C   |        |        |        |

In analogy to the preceding case we get 5 possibilities.

| A   | B   | C   |
|-----|-----|-----|
| 444 | 555 | 666 |
| 444 | 556 | 566 |
| 445 | 556 | 466 |
| 445 | 456 | 566 |
| 456 | 456 | 456 |

Then the designs  $B_4, \dots, B_8$  follow uniquely.

$n_3 = 2$ . We suppose that no block occurs 3 times; otherwise we have the preceding case. The design has the structure:

|    |      |      |      |       |       |       |    |
|----|------|------|------|-------|-------|-------|----|
| 11 | 1111 | 1111 | 2222 | 11111 | 22222 | 33333 | 4  |
| 22 | 2222 | 3333 | 3333 | D     | E     | F     | 5  |
| 33 | A    | B    | C    |       |       |       | 6. |

Then  $a_1 + b_1 + c_1 = 4$  and  $d_1 = 2 + c_1$ ,  $e_1 = 2 + b_1$ ,  $f_1 = 2 + a_1$  for  $i = 4, 5, 6$ .

Since there is no triple block, we infer  $1 \leq a_1 \leq 2$ ,  $1 \leq b_1 \leq 2$ , and  $1 \leq c_1 \leq 2$  for  $i = 4, 5, 6$ . (Obviously  $a_1 \leq 2$ .  $a_4 = 0$  implies



$a_5 = a_6 = 2$  and  $d_4 = 2, d_5 = d_6 = 4$ , i.e. the block 156 occurs 3 times.)

W.l.o.g.

| A    | B    | C    |
|------|------|------|
| 4456 | 4556 | 4566 |

$B_9$  follows immediately.

$B_4 =$   
 11111111222111112222233333  
 2222233333344455544455544444,  
 333444555666666666555666555666

$B_5 =$   
 11111111222111112222233333  
 2222233333344455544455544444,  
 333444555666566666556666555666

$B_6 =$   
 11111111222111112222233333  
 2222233333344445544455544445,  
 333445556466566666556666555666

$B_7 =$   
 11111111222111112222233333  
 2222233333344455544445544445,  
 333445456566566666556666555666

$B_8 =$   
 11111111222111112222233333  
 2222233333344445544445544445,  
 333456456456556666556666556666

$B_9 =$   
 11111111222111112222233333  
 222223333333334445544455444455,  
 334456455645665666655666556666

The nonisomorphism follows from the following table.

|                         | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Number of triple blocks | 10    | 6     | 4     | 3     | 1     | 0     |

(iii) is proven.

### 3. Proof of Theorem 2

A  $2-(7,3,q)$  design has  $(b=)$   $7q$  blocks and every element occurs in  $(r=)$   $3q$  blocks. The intersection numbers satisfy

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 + n_2 + n_3 &= 7q, \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 &= 9q, \\ n_2 + 3n_3 &= 3q. \end{aligned}$$

This system has the following solutions in nonnegative integers with  $n_3 \geq 2$ .

| q | $n_3$ | $n_2$ | $n_1$ | $n_0$ |
|---|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 2     | 0     | 12    | 0     |
| 3 | 3     | 0     | 18    | 0     |
|   | 2     | 3     | 15    | 1     |
| 4 | 4     | 0     | 24    | 0     |
|   | 3     | 3     | 21    | 1     |
|   | 2     | 6     | 18    | 2     |

We always assume that 123 is a block which exists  $n_3$  times. Our method in the whole section is as follows. We consider all A's (defined below) and then dependently all B's for which we find a C completing the design.

q = 2.

|    |      |      |      |
|----|------|------|------|
| 11 | 1111 | 2222 | 3333 |
| 22 | A    | B    | C    |
| 33 |      |      |      |

In A, B, and C each element of {4,5,6} occurs twice. This follows immediately by equations used in the preceding section. W.l.o.g. we may assume that  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}$  exists twice in A or once in A as well as in B.

Then

| A    | B     | C     |
|------|-------|-------|
| 4466 | 4455  | 4455  |
| 5577 | ..... | ..... |
| 4456 | 4456  | 4455  |
| 5677 | 5..7  | ..... |

Furthermore, in the first case we may assume that  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$  exists in B and in the second one that C does not contain two double pairs (then it could be reduced to case 1). Thus we obtain the following 3 possibilities for A,B,C.

|    | A    | B    | C    |
|----|------|------|------|
| 1. | 4466 | 4455 | 4455 |
|    | 5577 | 6677 | 7766 |
| 2. | 4466 | 4455 | 4455 |
|    | 5577 | 6767 | 6767 |
| 3. | 4456 | 4456 | 4455 |
|    | 5677 | 5767 | 6767 |

We denote these three designs by  $C_1$ ,  $C_2$ , and  $C_3$ , according to the order above.

|                         | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|
| Number of double blocks | 7     | 3     | 1     |

Hence the 3 designs are nonisomorphic. (1) is proven.

$$q = 3, n_3 = 3.$$

|     |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|
| 111 | 111111 | 222222 | 333333 |
| 222 | A      | B      | C      |
| 333 |        |        |        |

Here we distinguish the following cases:

1. There is a triple in one of the matrices A,B,C; then

$$\begin{matrix} 444 \\ 555 \end{matrix} \in A, \text{ and } \begin{matrix} 44 \\ 66 \end{matrix} \in B.$$

2. There is one double pair in one of the matrices; then

$$\begin{matrix} 44 \\ 55 \end{matrix} \in A; \text{ this implies } \begin{matrix} 66 \\ 77 \end{matrix} \in A, \text{ and } \begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix} \in A, \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \in B.$$

3. There is no double pair.

In the case 1 ( $i=2,3$ ) we suppose that the preceding cases are excluded.

Hence,

$$D_1 : \begin{matrix} A & B & C \\ 444666 & 444555 & 444555 \\ 555777 & 666777 & 777666 \end{matrix}$$

$$D_2 : \begin{matrix} 444666 & 444555 & 444555 \\ 555777 & 667677 & 677667 \end{matrix}$$

$$D_3 : \begin{matrix} 444566 & 444556 & 444555 \\ 556777 & 567677 & 677667 \end{matrix}$$

$$D_4 : \begin{matrix} 444566 & 444556 & 444555 \\ 556777 & 577667 & 667677 \end{matrix}$$

$$D_5 : \begin{matrix} 444556 & 444556 & 444556 \\ 567677 & 567677 & 567677 \end{matrix}.$$

$n_3 = 2$ . We suppose that no triple block exists.

|       |       |       |       |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| 11112 | 11111 | 22222 | 33333 | 4 |
| 22233 | A     | B     | C     | 5 |
| 33456 |       |       |       | 6 |

The distribution of 4,5,6,7 follows as in the preceding section.

$$A: 4,4,5,5,6,6,6,7,7,7.$$

$$B: 4,4,5,5,5,6,6,7,7,7.$$

$$C: 4,4,4,5,5,6,6,7,7,7.$$

Now we consider all combinations of A, B, and C, but we omit those where a pair exists 3 times in one matrix since this means that the design has a triple block.

|         | A              | B              | C              |                                |
|---------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| $D_6$ : | 44566<br>56777 | 45456<br>56777 | 45445<br>66777 |                                |
| $D_7$ : | "              | 45455<br>66777 | 45446<br>56777 |                                |
|         | "              | 55445<br>66777 | 44456<br>56777 | isom. to $D_7$ by (27)(36)(45) |
|         | 45466<br>56777 | 44556<br>56777 | 45445<br>66777 | isom. to $D_7$ by (12)(56)     |
|         | "              | 45455<br>66777 | 44456<br>56777 | isom. to $D_6$ by (23)(45)     |
|         | 44556<br>66777 | 45456<br>56777 | 45446<br>56777 | isom. to $D_7$ by (172643)     |
| $D_8$ : | "              | 55445<br>66777 | 44466<br>55777 |                                |
|         | 45456<br>66777 | 44566<br>55777 | 45445<br>66777 | isom. to $D_7$ by (1427)       |
|         | "              | 44556<br>56777 | 45446<br>56777 | isom. to $D_6$ by (123)(465)   |
| $D_9$ : | "              | 45456<br>56777 | 44456<br>56777 |                                |
|         | "              | 45455<br>66777 | 44466<br>55777 | isom. to $D_7$ by (145237)     |
|         | 55446<br>66777 | 44566<br>55777 | 44455<br>66777 | isom. to $D_8$ by (13)(46)     |
|         | "              | 44556<br>56777 | 44456<br>56777 | isom. to $D_7$ by (17)(23465)  |

$$q = 4, n_3 = 4.$$

|      |          |          |          |
|------|----------|----------|----------|
| 1111 | 11111111 | 22222222 | 33333333 |
| 2222 | A        | B        | C        |
| 3333 |          |          |          |

In A, B, C the elements 4, 5, 6, 7 occur 4 times each. We distinguish the following cases (each case excludes the preceding cases).

- (1) There is a pair occurring 4 times in one matrix; then

$$\begin{matrix} 4444 \\ 5555 \end{matrix} \in A, \text{ and } \begin{matrix} 44 \\ 66 \end{matrix} \in B.$$

- (2) There is a pair occurring 3 times in one matrix; then

$$\begin{matrix} 444 \\ 555 \end{matrix} \in A, \text{ and } \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \in A.$$

- (3) There are 4 double pairs in a matrix; then  $\begin{smallmatrix} 44445566 \\ 55667777 \end{smallmatrix} \in A$ ,  
and  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \in B$ .
- (4) There are only two double pairs in a matrix; then  $\begin{smallmatrix} 4466 \\ 5577 \end{smallmatrix} \in A$ ,  
and  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \in B$ .

Then

|             | A                    | B                    | C                    |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| (1) $E_1$ : | 44446666<br>55557777 | 44445555<br>66667777 | 44445555<br>77776666 |
| $E_2$ :     | "                    | 44445555<br>66676777 | 44445555<br>67776667 |
| $E_3$ :     | "                    | 44445555<br>66776677 | 44445555<br>66776677 |
| (2) $E_4$ : | 44445666<br>55567777 | 44445556<br>56676777 | 44445555<br>67776667 |
| $E_5$ :     | "                    | 44445556<br>56776677 | 44445555<br>66776677 |
| $E_6$ :     | "                    | 44445556<br>57776667 | 44445555<br>66676777 |
| (3) $E_7$ : | 44445566<br>55667777 | 44445566<br>55776677 | 44445555<br>66776677 |
| $E_8$ :     | "                    | 44445556<br>56776677 | 44445556<br>56776677 |
| (4) $E_9$ : | 44445566<br>55676777 | 44445556<br>56676777 | 44445556<br>56776677 |

$$n_3 = 3.$$

|        |         |         |         |   |
|--------|---------|---------|---------|---|
| 111112 | 1111111 | 2222222 | 3333333 | 4 |
| 222233 | A       | B       | C       | 5 |
| 333456 |         |         |         | 6 |

The distribution of the elements is given by:

A: 4,4,4,5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,7,

B: 4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,7,7,7,7,

C: 4,4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7,7,7.

We restrict ourselves to designs without blocks existing 4 times (case  $q=4$ ,  $n_3=4$ ). We distinguish the following cases.

- (1) There is a matrix in  $\{A, B, C\}$  in which  $\begin{smallmatrix} xx \\ yy \end{smallmatrix}$  exists, where  $x$  and  $y$  are the two elements existing exactly 3 times in this matrix; then  $\begin{smallmatrix} 44 \\ 55 \end{smallmatrix} \in A$ .

- (2) In each matrix there exists  $\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$  exactly once; then  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \in A$ ,  
 $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix} \in B$ ,  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix} \in C$ .
- (3) In exactly 2 matrices there exists  $\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$  exactly once; then  
 $\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \in A$ ,  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix} \in B$ .
- (4) In exactly one matrix there exists  $\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$  exactly once; then  
 $\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \in A$ .
- (5) In no matrix there exists  $\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$ .

In the 1th, 4th, and 5th case we may assume w.l.o.g. additionally that A does not contain more  $\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}$ 's than  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$ 's (otherwise use (23)(45)).

|                | A                  | B                  | C                  |                                   |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------|
| (1) $E_{10}$ : | 4445666<br>5567777 | 4445556<br>5676777 | 4444555<br>6777667 |                                   |
| $E_{11}$ :     | "                  | 4445556<br>5776677 | 4444555<br>6677677 |                                   |
| $E_{12}$ :     | "                  | 4445555<br>7776667 | 4444556<br>5667777 |                                   |
| $E_{13}$ :     | "                  | 4445555<br>6776677 | 4444556<br>5677677 |                                   |
|                | "                  | 4445555<br>6676777 | 4444556<br>5777667 | isom. to $E_{12}$ by (27)(36)(45) |
| (2) $E_{14}$ : | 4445566<br>5667777 | 4445555<br>6776677 | 5446644<br>6557777 |                                   |
| $E_{15}$ :     | 4445566<br>5676777 | 4445556<br>6576777 | 5454644<br>6576777 |                                   |
| (3) $E_{16}$ : | 4445566<br>5676777 | 4445555<br>6776677 | 4454664<br>5576777 |                                   |
| (4) $E_{17}$ : | 4445566<br>5667777 | 4445555<br>7776667 | 4454664<br>5576777 |                                   |
| $E_{18}$ :     | 4445566<br>5676777 | 4445565<br>5776677 | 4554464<br>5776677 |                                   |
| (5) $E_{19}$ : | 4445556<br>6667777 | 4445555<br>7776667 | 4446664<br>5557777 |                                   |
| $E_{20}$ :     | 4445556<br>6676777 | 4445565<br>5776677 | 4454664<br>5576777 |                                   |

$n_3 = 2$ .

We suppose that no block exists more than twice.

a) The two blocks disjoint to 123 are identical.

|    |        |        |        |        |    |
|----|--------|--------|--------|--------|----|
| 11 | 111122 | 111111 | 222222 | 333333 | 44 |
| 22 | 223333 |        |        |        | 55 |
| 33 | D      | A      | B      | C      | 66 |

D contains 4,4,5,5,6,6. W.l.o.g. we may restrict ourselves to the following 3 cases for D. These and the distribution of the elements are given by

|     | D      | A                  | B                  | C                  |
|-----|--------|--------------------|--------------------|--------------------|
| (1) | 445566 | 2x4, 2x5, 4x6, 4x7 | 2x4, 4x5, 2x6, 4x7 | 4x4, 2x5, 2x6, 4x7 |
| (2) | 445656 | 2x4, 3x5, 3x6, 4x7 | 2x4, 3x5, 3x6, 4x7 | 4x4, 2x5, 2x6, 4x7 |
| (3) | 454656 | 2x4, 3x5, 3x6, 4x7 | 3x4, 2x5, 3x6, 4x7 | 3x4, 3x5, 2x6, 4x7 |

In the first case we may assume additionally that A does not contain more  $\frac{5}{6}$ 's than  $\frac{4}{6}$ 's and in the other ones that A does not contain more  $\frac{4}{6}$ 's than  $\frac{5}{6}$ 's.

|              | A                | B                | C                |                                   |
|--------------|------------------|------------------|------------------|-----------------------------------|
| (1) $E_{21}$ | 445566<br>667777 | 554455<br>667777 | 446644<br>557777 |                                   |
| $E_{22}$     | 454566<br>667777 | 454655<br>567777 | 444456<br>567777 |                                   |
| (2) $E_{23}$ | 445566<br>567777 | 554456<br>667777 | 444456<br>567777 |                                   |
|              | 454566<br>567777 | 454566<br>567777 | 444455<br>667777 | isom. to $E_{23}$ by (16)(2534)   |
| $E_{24}$     | "                | 454556<br>667777 | 444456<br>567777 |                                   |
|              | 554456<br>667777 | 445566<br>567777 | 444456<br>567777 | isom. to $E_{23}$ by (12)(56)     |
| (3) $E_{25}$ | 445566<br>567777 | 454466<br>567777 | 454455<br>667777 |                                   |
| $E_{26}$     | "                | 454456<br>667777 | 454456<br>567777 |                                   |
|              | 454566<br>567777 | 444566<br>567777 | 454455<br>667777 | isom. to $E_{26}$ by (13)(46)     |
|              | "                | 444556<br>667777 | 454456<br>567777 | isom. to $E_{24}$ by (16)(24)(35) |
| $E_{27}$     | "                | 454456<br>667777 | 444556<br>567777 |                                   |
|              | 554456<br>667777 | 444566<br>567777 | 444556<br>567777 | isom. to $E_{24}$ by (143526)     |
|              | "                | 444556<br>667777 | 444566<br>557777 | isom. to $E_{22}$ by (1435)(26)   |

b) The two blocks disjoint to 123 are different.

|    |        |        |        |        |    |
|----|--------|--------|--------|--------|----|
| 11 | 111122 | 111111 | 222222 | 333333 | 44 |
| 22 | 223333 | A      | B      | C      | 55 |
| 33 | D      |        |        |        | 67 |

W.l.o.g. we may restrict ourselves to the following 3 cases for D. These and the distribution of the elements are given by:

|     | D      | A                  | B                  | C                   |
|-----|--------|--------------------|--------------------|---------------------|
| (1) | 445567 | 2x4, 2x5, 4x6, 4x7 | 2x4, 4x5, 3x6, 3x7 | 4x4, 2x5, 3x6, 3x7  |
| (2) | 445657 | 2x4, 3x5, 3x6, 4x7 | 2x4, 3x5, 4x6, 3x7 | 4x4, 2x5, 3x6, 3x7  |
| (3) | 454657 | 2x4, 3x5, 3x6, 4x7 | 3x4, 2x5, 4x6, 3x7 | 3x4, 3x5, 3x6, 3x7. |

We may assume that no block exists more than twice, i.e. the matrices A, B, C do not contain a pair more than twice each. Furthermore, the double pairs of different matrices are non-disjoint (otherwise we have case a)). By the same argument our design does not contain in C one of the following pairs twice:  $\begin{smallmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 7 \end{smallmatrix}$ , or  $\begin{smallmatrix} 6 \\ 7 \end{smallmatrix}$  in the first and second case. Analogously, B does not contain in the first case one of the pairs  $\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 7 \end{smallmatrix}$ , or  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$  twice. Finally we assume that in the first case A does not contain more  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$ 's than  $\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$ 's.

We construct all A's, then B's and C's, but in the following list we only put those which form a design satisfying all restriction described above.

|                | A                | B                | C                |                                   |
|----------------|------------------|------------------|------------------|-----------------------------------|
| (1) $E_{28}$ : | 445566<br>667777 | 455456<br>566777 | 444456<br>567767 |                                   |
| $E_{29}$ :     | 445566<br>676777 | 445556<br>566777 | 444456<br>567767 |                                   |
| "              |                  | 455456<br>566777 | 444456<br>566777 | isom. to $E_{29}$ by (67)         |
| (2) $E_{30}$ : | 454566<br>567777 | 445566<br>566777 | 444455<br>667767 |                                   |
| "              |                  | 445556<br>666777 | 444456<br>567767 | isom. to $E_{29}$ by (12)(34)(56) |
| $E_{31}$ :     |                  | 445556<br>676677 | 444456<br>566777 |                                   |
|                | 454556<br>667777 | 445566<br>566777 | 444456<br>567767 | isom. to $E_{31}$ by (12)(67)     |



|            | A      | B      | C      |                                   |
|------------|--------|--------|--------|-----------------------------------|
| $E_{32}$ : | 454556 | 445556 | 444466 |                                   |
|            | 667777 | 676677 | 556777 |                                   |
|            | 554456 | 445566 | 444456 | isom. to $E_{29}$ by (34)(567)    |
|            | 667777 | 566777 | 566777 |                                   |
| (3)        | 454566 | 444566 | 444555 | isom. to $E_{29}$ by (156)(37)    |
|            | 567777 | 566777 | 677667 |                                   |
|            | "      | 444566 | 444555 | isom. to $E_{31}$ by (136)(247)   |
|            |        | 567677 | 667677 |                                   |
| $E_{33}$ : | "      | 444556 | 444556 |                                   |
|            |        | 667677 | 567677 |                                   |
| $E_{34}$ : | "      | 444556 | 444556 |                                   |
|            |        | 677667 | 566777 |                                   |
|            | 454556 | 444566 | 444556 | isom. to $E_{33}$ by (12)(45)(67) |
|            | 667777 | 567677 | 567677 |                                   |
|            | "      | 444556 | 444566 | isom. to $E_{34}$ by (14)(37)(56) |
|            |        | 677667 | 556777 |                                   |
|            | 554456 | 444566 | 444556 | isom. to $E_{31}$ by (16)(357)    |
|            | 667777 | 566777 | 567677 |                                   |
|            | "      | 444566 | 444556 | isom. to $E_{34}$ by (12)(45)(67) |
|            |        | 567677 | 566777 |                                   |
|            | "      | 444556 | 444566 | isom. to $E_{34}$ by (1246375).   |
|            |        | 667677 | 556777 |                                   |

Now we prove that these 34 designs are pairwise nonisomorphic. Therefore we list the number  $v_i$  of blocks which exist exactly  $i$  times in the design ( $i=2,3,4$ ).

| $E_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-------|---|---|---|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $v_4$ | 7 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1 | 1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $v_3$ | 0 | 4 | 0 | 4 | 2 | 6 | 0  | 0 | 0 | 3  | 2  | 4  | 2  | 1  | 1  | 1  | 3  | 1  | 7  | 1  |
| $v_2$ | 0 | 0 | 8 | 2 | 6 | 0 | 12 | 8 | 6 | 3  | 6  | 3  | 5  | 9  | 3  | 6  | 5  | 5  | 0  | 6  |

The triple block in  $E_{16}$  and  $E_{20}$  is 123. B of  $E_{16}$  contains 3 double pairs, while A,B,C of  $E_{20}$  exactly contain 2 double pairs each.

| $E_1$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $v_4$ | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $v_3$ | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $v_2$ | 14 | 8  | 8  | 7  | 8  | 6  | 5  | 8  | 6  | 6  | 5  | 6  | 3  | 6  |
|       | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | y  | y  | y  | y  | y  | y  | y  |

x means that the design has disjoint blocks among the double blocks, the converse statement is indicated by y. For the designs  $E_{22}$ ,  $E_{23}$ ,  $E_{25}$ , and  $E_{29}$ ,  $E_{30}$ ,  $E_{32}$ ,  $E_{34}$  we list how often each element exists in the double blocks.

| i times | $E_{22}$ | $E_{23}$ | $E_{25}$ | $E_{29}$ | $E_{30}$ | $E_{32}$ | $E_{34}$ |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 6       | -        | -        | 7        | -        | -        | -        | -        |
| 5       | -        | -        | -        | -        | -        | -        | -        |
| 4       | 123      | 1247     | -        | 1        | -        | -        | -        |
| 3       | 4567     | 56       | 123456   | 237      | 123467   | 1235     | 2367     |
| 2       | -        | 3        | -        | 45       | -        | 467      | 145      |
| 1       | -        | -        | -        | 6        | -        | -        | -        |
| 0       | -        | -        | -        | -        | 5        | -        | -        |

Finally we note that the elements 4,6,7 (each twice in the double blocks of  $E_{32}$ ) do not occur in different double blocks only, while 1,4,5 ( $E_{34}$ ) do so. (iii) is proven.

In order to prove (iv) we construct 50 designs by combining 2-(7,3, $\lambda$ ) designs with  $\lambda \leq 4$  in a suitable way. Especially, we make use of the  $E_i$ 's. Furthermore, we need the 2-(7,3,1) design

$$T = \begin{matrix} 1112233 \\ 2464545. \\ 3576776 \end{matrix}$$

The nonisomorphism follows by the vector  $(v_5, v_4, v_3, v_2)$  again.  $B^*(v, k)$  denotes the set of all k-element subsets of  $\{1, 2, \dots, v\}$ .

| $v_5 v_4 v_3 v_2$ | Combination of | $v_5 v_4 v_3 v_2$ | Combination of              |
|-------------------|----------------|-------------------|-----------------------------|
| 7 0 0 0           | $E_1, T$       | 0 1 3 3           | $E_{15}, T$                 |
| 3 4 0 0           | $E_2, T$       | 0 1 2 7           | $E_{16}, T$                 |
| 3 0 4 4           | $E_3, T$       | 0 1 1 7           | $E_{18}, T$                 |
| 1 6 0 0           | $E_6, (67)T$   | 0 1 0 9           | $E_{20}, T$                 |
| 1 4 2 0           | $E_4, T$       | 0 0 7 7           | $T, T, T, (3467)T, (3467)T$ |
| 1 2 4 2           | $E_6, T$       | 0 0 6 1           | $E_{34}, (67)T$             |
| 1 2 2 6           | $E_5, T$       | 0 0 4 10          | $E_{21}, T$                 |
| 1 0 6 6           | $E_7, (67)T$   | 0 0 4 7           | $E_{25}, (67)T$             |
| 1 0 6 0           | $E_9, T$       | 0 0 4 5           | $E_{24}, T$                 |

| $v_5 v_4 v_3 v_2$ | Combination of        | $v_5 v_4 v_3 v_2$ | Combination of           |
|-------------------|-----------------------|-------------------|--------------------------|
| 1 0 4 8           | $E_7, T$              | 0 0 4 4           | $E_{22}, T$              |
| 1 0 4 6           | $E_8, T$              | 0 0 3 9           | $E_{11}, (347)T$         |
| 1 0 2 8           | $E_9, (67)T$          | 0 0 3 8           | $E_{24}, (347)T$         |
| 0 7 0 0           | $T, T, T, T, (3467)T$ | 0 0 3 7           | $E_{25}, T$              |
| 0 4 3 0           | $E_{12}, (67)T$       | 0 0 3 6           | $E_{31}, T$              |
| 0 3 4 0           | $E_{19}, (67)T$       | 0 0 3 5           | $E_{31}, (67)T$          |
| 0 3 3 1           | $E_{10}, T$           | 0 0 3 4           | $E_{33}, T$              |
| 0 3 1 7           | $E_{17}, (67)T$       | 0 0 2 10          | $E_{22}, (67)T$          |
| 0 2 5 1           | $E_{11}, (67)T$       | 0 0 2 9           | $E_{32}, (347)T$         |
| 0 2 3 4           | $E_{12}, T$           | 0 0 2 7           | $E_{32}, (67)T$          |
| 0 2 2 6           | $E_{11}, T$           | 0 0 2 6           | $E_{34}, T$              |
| 0 1 6 3           | $E_{19}, T$           | 0 0 1 10          | $E_{27}, (347)T$         |
| 0 1 5 1           | $E_{18}, (67)T$       | 0 0 1 9           | $E_{32}, T$              |
| 0 1 3 9           | $E_{14}, T$           | 0 0 0 12          | $E_{34}, (347)T$         |
| 0 1 3 7           | $E_{14}, (67)T$       | 0 0 0 10          | $E_{33}, (347)T$         |
| 0 1 3 6           | $E_{16}, (67)T$       | 0 0 0 7           | $T, B^*(7,3)-(34)(567)T$ |

(iv) is proven.

#### 4. Proof of Theorem 3

We use the results of Theorem 2 and show that each design according to (i), (ii), and (iii) contains a  $2-(7,3,1)$  design.

$$T \subseteq C_1, C_2, D_1, D_2, D_3, D_5, D_7, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_8, E_9, E_{10}, E_{14}, E_{15}, E_{26}, E_{30}, E_{33},$$

$$(67)T \subseteq C_3, D_4, D_6, E_6, E_7, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{17}, E_{18}, E_{23}, E_{24}, E_{25}, E_{27}, E_{34},$$

$$(57)T \subseteq E_{16}, E_{31}, E_{32},$$

$$(56)T \subseteq E_{28}, E_{29},$$

$$(23)(56)T \subseteq D_8, D_9, E_{19}, E_{20}, E_{21}, E_{22}.$$

#### 5. Proof of Theorem 4

We construct  $2-(8,3,6)$  designs in 3 ways. Let  $v_1$  be defined as above.

1. Since  $\lambda = 6$ , the greatest  $i$  with  $v_i > 0$  is  $i = 6$ . We construct designs with  $v_6 = 1$ . W.l.o.g. they have the structure:

$$M = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} & 66\dots 6 & 77\dots 7 & 88\dots 8 & 666666 \\ \hline A & B & C & D & 777777 \\ \hline & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & 888888 \end{array} \right).$$

5
15
15
15

The elements  $1, i = 1, 2, \dots, 5$ , occur 3 times each in A and 6 times each in B, C, and D, respectively.

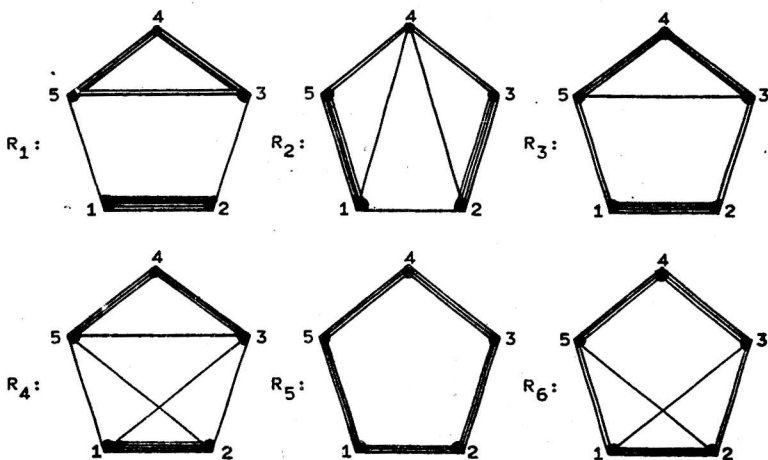
Up to an isomorphism there are only two possible matrices for A:

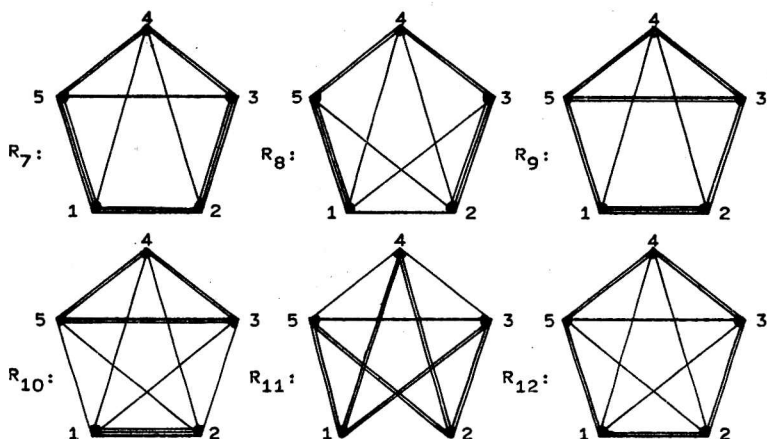
$$A_1 = \begin{pmatrix} 11133 \\ 22244 \\ 34555 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 11123 \\ 22434 \\ 35545 \end{pmatrix}.$$

To A, B, C, and D we associate graphs, where the vertices are the elements  $1, 2, 3, 4, 5$  and the edge  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 5$ , occurs  $t$  times if and only if the pair  $(i, j)$  exists exactly  $t$  times in A, B, C, and D, respectively. We identify the notations of the matrices and the related graphs.

Each of the graphs A, B, C, D is 6 regular. M is a  $2-(8, 3, 6)$  design if and only if the edge  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 5$ , exists altogether 6 times in A, B, C, and D.

We will consider the following 6 regular graphs with 5 vertices:





Then  $A_1 = R_{10}$  and  $A_2 = R_{12}$ . We give a list for possible B's, C's and D's. If  $\tau$  is a permutation on  $\{1, 2, \dots, 5\}$  let  $\tau.R_1$  denote the graph  $R_1$  after changing the numbers of the vertices according to  $\tau$ . Simple counting yields the vector  $(v_6, \dots, v_2)$  again.

| M               | A               | B                      | C                     | D                      | $v_6 v_5 v_4 v_3 v_2$ |
|-----------------|-----------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| F <sub>1</sub>  | R <sub>10</sub> | R <sub>11</sub>        | R <sub>5</sub>        | (2354)R <sub>5</sub>   | 1 0 0 10 7            |
| F <sub>2</sub>  | R <sub>10</sub> | R <sub>11</sub>        | R <sub>6</sub>        | (13)(25)R <sub>6</sub> | 1 0 0 6 11            |
| F <sub>3</sub>  | R <sub>10</sub> | R <sub>11</sub>        | R <sub>7</sub>        | (1325)R <sub>7</sub>   | 1 0 0 4 13            |
| F <sub>4</sub>  | R <sub>10</sub> | R <sub>11</sub>        | R <sub>8</sub>        | (1325)R <sub>9</sub>   | 1 0 0 3 14            |
| F <sub>5</sub>  | R <sub>10</sub> | R <sub>11</sub>        | R <sub>10</sub>       | R <sub>11</sub>        | 1 0 0 1 16            |
| F <sub>6</sub>  | R <sub>10</sub> | R <sub>11</sub>        | R <sub>12</sub>       | (2354)R <sub>12</sub>  | 1 0 0 0 17            |
| F <sub>7</sub>  | R <sub>10</sub> | (15)(23)R <sub>4</sub> | R <sub>2</sub>        | (12)R <sub>2</sub>     | 1 0 5 2 5             |
| F <sub>8</sub>  | R <sub>10</sub> | (15)(23)R <sub>4</sub> | (12345)R <sub>3</sub> | (132)R <sub>2</sub>    | 1 0 4 4 5             |
| F <sub>9</sub>  | R <sub>10</sub> | (15)(23)R <sub>4</sub> | R <sub>8</sub>        | (12)R <sub>8</sub>     | 1 0 1 4 3             |
| F <sub>10</sub> | R <sub>12</sub> | (2354)R <sub>12</sub>  | R <sub>5</sub>        | (2354)R <sub>5</sub>   | 1 0 0 10 5            |
| F <sub>11</sub> | R <sub>12</sub> | (2354)R <sub>12</sub>  | R <sub>6</sub>        | (13)(25)R <sub>6</sub> | 1 0 0 6 9             |
| F <sub>12</sub> | R <sub>12</sub> | (2354)R <sub>12</sub>  | R <sub>7</sub>        | (1325)R <sub>7</sub>   | 1 0 0 4 11            |
| F <sub>13</sub> | R <sub>12</sub> | (2354)R <sub>12</sub>  | R <sub>8</sub>        | (1325)R <sub>9</sub>   | 1 0 0 3 12            |
| F <sub>14</sub> | R <sub>12</sub> | (2354)R <sub>12</sub>  | R <sub>10</sub>       | R <sub>11</sub>        | 1 0 0 1 14            |
| F <sub>15</sub> | R <sub>12</sub> | (2354)R <sub>12</sub>  | R <sub>12</sub>       | (2354)R <sub>12</sub>  | 1 0 0 0 15            |
| F <sub>16</sub> | R <sub>12</sub> | (15)(23)R <sub>1</sub> | R <sub>2</sub>        | (12)R <sub>2</sub>     | 1 1 4 2 5             |
| F <sub>17</sub> | R <sub>12</sub> | (15)(23)R <sub>1</sub> | (12345)R <sub>3</sub> | (132)R <sub>2</sub>    | 1 1 3 4 5             |
| F <sub>18</sub> | R <sub>12</sub> | (15)(23)R <sub>1</sub> | R <sub>8</sub>        | (12)R <sub>8</sub>     | 1 1 0 6 5             |

2. This method was first proposed in /3/. The set  $B^*(8,3)$  of all triples of  $\{1,2,\dots,8\}$  is a  $2-(8,3,6)$  design, but without repeated blocks.  $B^*(8,3)$  contains  $B^*(7,3)$ , a  $2-(7,3,5)$  design. If we replace  $B^*(7,3)$  by five  $2-(7,3,1)$  or one  $2-(7,3,3)$  and two  $2-(7,3,1)$  designs, we get a  $2-(8,3,6)$  design, which is elementary, of course. For showing the nonisomorphism, we consider the vector  $(v_6, \dots, v_2)$  again.

In our construction we use the following  $2-(7,3,\lambda)$  designs (T see section 3):

$$T_1 = T, T_2 = (67)T, T_3 = (56)T, T_4 = (567)T, T_5 = (576)T, \\ T_6 = (34)(567)T,$$

$$T_7 = \begin{matrix} 11111111222222333345 \\ 222334446334455445656. \\ 357565677466767577767 \end{matrix}$$

Analogously we may replace  $B^*(6,3)$  in  $B^*(8,3)$  by  $2-(6,3,4)$  designs, see section 2. We will use  $B_1$  and  $B_3$ .

3. We combine the construction of 2. with an idea of Rasch and Herrendörfer /9/. If  $123, 145, 248, 358 \in M$ , we replace these four blocks by the blocks  $124, 135, 238, 458$  and we get a  $2-(8,3,6)$  design again. If we have used this operation we mark it in the table with  $Z_1$ .

Furthermore we use the following replacements:

$$Z_2: 127, 138, 248, 347 \text{ by } 128, 137, 247, 348,$$

$$Z_3: 138, 147, 248, 257, 347, 458 \text{ by } 137, 148, 247, 258, 348, 457,$$

$$Z_4: 138, 157, 248, 257, 458, 467, 568 \text{ by } 137, 158, 247, 258, 348, 457, 468, \\ 567.$$

In the following table we describe further 82  $2-(8,3,6)$  designs. We start with 1 of the notation  $F_1$ . Then there follow  $v_5, v_4, v_3, v_2$  ( $v_6 = 0$  always) and we indicate if we replace  $B^*(7,3)$  or  $B^*(6,3)$  and finally we note which and how many designs of the designs defined above we use instead of  $B^*(7,3)$  or  $B^*(6,3)$ , respectively. Additionally we indicate which of the operations  $Z_1$  is used.

| 1  | $v_5$ | $v_4$ | $v_3$ | $v_2$ | $B^*(7,3)$ | $B^*(6,3)$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ | $B_1 B_3$ | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ |
|----|-------|-------|-------|-------|------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| 19 | 7     | 0     | 0     | 0     | x          |            | 5     |       |       |       |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 20 | 5     | 2     | 0     | 2     | x          |            | 5     |       |       |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 21 | 3     | 4     | 0     | 0     | x          |            | 4     | 1     |       |       |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 22 | 3     | 0     | 4     | 4     | x          |            | 3     | 2     |       |       |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 23 | 2     | 4     | 1     | 2     | x          |            | 4     |       | 3     |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 24 | 2     | 1     | 3     | 7     | x          |            | 3     |       | 2     |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 25 | 1     | 6     | 0     | 2     | x          |            | 4     | 1     |       |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 26 | 1     | 6     | 0     | 0     | x          |            | 4     |       |       | 1     |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 27 | 1     | 4     | 2     | 0     | x          |            | 3     | 1     | 1     |       |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 28 | 1     | 2     | 4     | 6     | x          |            | 3     | 2     |       |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 29 | 1     | 2     | 4     | 2     | x          |            | 3     | 1     |       | 1     |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 30 | 1     | 2     | 2     | 6     | x          |            | 2     | 2     | 1     |       |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 31 | 1     | 0     | 6     | 0     | x          |            | 3     |       |       | 1     | 1     |       |       |           |       |       |       |       |
| 32 | 1     | 0     | 4     | 8     | x          |            | 1     | 2     | 2     |       |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 33 | 1     | 0     | 4     | 6     | x          |            | 1     | 2     | 1     | 1     |       |       |       |           |       |       |       |       |
| 34 | 1     | 0     | 2     | 8     | x          |            | 2     | 1     |       | 1     | 1     |       |       |           |       |       |       |       |
| 35 | 1     | 0     | 0     | 12    | x          |            | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |       |       |           |       |       |       |       |
| 36 | 0     | 7     | 0     | 0     | x          |            | 4     |       |       |       |       | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 37 | 0     | 6     | 1     | 2     | x          |            | 4     |       |       | 1     |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 38 | 0     | 5     | 2     | 3     | x          |            | 4     |       |       |       |       | 1     |       |           |       | x     |       |       |
| 39 | 0     | 4     | 3     | 2     | x          |            | 3     | 1     | 1     |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 40 | 0     | 3     | 4     | 1     | x          |            | 3     | 1     |       |       |       | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 41 | 0     | 3     | 1     | 9     | x          |            | 2     | 1     | 2     |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 42 | 0     | 3     | 1     | 7     | x          |            | 2     | 2     |       |       |       | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 43 | 0     | 2     | 5     | 4     | x          |            | 3     | 1     |       | 1     |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 44 | 0     | 2     | 4     | 5     | x          |            | 3     |       | 1     |       |       | 1     |       |           |       | x     |       |       |
| 45 | 0     | 2     | 3     | 8     | x          |            | 2     | 2     | 1     |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 46 | 0     | 2     | 3     | 4     | x          |            | 1     | 2     |       | 1     |       | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 47 | 0     | 1     | 6     | 4     | x          |            | 3     | 1     |       |       |       | 1     |       |           |       | x     |       |       |
| 48 | 0     | 1     | 6     | 3     | x          |            | 3     |       |       | 1     |       | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 49 | 0     | 1     | 6     | 0     | x          |            | 3     |       |       |       | 1     | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 50 | 0     | 1     | 5     | 3     | x          |            | 3     |       |       | 1     | 1     |       |       |           |       | x     |       |       |
| 51 | 0     | 1     | 5     | 1     | x          |            | 1     | 2     |       |       | 1     | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 52 | 0     | 1     | 4     | 7     | x          |            | 1     | 1     | 2     | 1     |       |       |       |           |       | x     |       |       |
| 53 | 0     | 1     | 4     | 4     | x          |            | 2     | 1     | 1     |       |       | 1     |       |           |       |       |       |       |
| 54 | 0     | 1     | 3     | 11    | x          |            | 1     | 2     |       |       |       |       |       |           |       | x     |       |       |

| i  | v <sub>5</sub> | v <sub>4</sub> | v <sub>3</sub> | v <sub>2</sub> | B*(7,3) | B*(6,3) | T <sub>1</sub> | T <sub>2</sub> | T <sub>3</sub> | T <sub>4</sub> | T <sub>5</sub> | T <sub>6</sub> | T <sub>7</sub> | B <sub>1</sub> B <sub>3</sub> | Z <sub>1</sub> Z <sub>2</sub> Z <sub>3</sub> Z <sub>4</sub> |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 55 | 0              | 1              | 3              | 10             | x       |         | 2              | 2              |                |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 56 | 0              | 1              | 3              | 9              | x       |         | 2              | 1              | 1              | 1              |                |                |                |                               | x                                                           |
| 57 | 0              | 1              | 3              | 9              | x       |         | 1              | 2              |                | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 58 | 0              | 1              | 3              | 7              | x       |         | 2              | 1              |                | 1              | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 59 | 0              | 1              | 3              | 6              | x       |         | 1              | 2              | 1              |                | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 60 | 0              | 1              | 2              | 12             | x       |         | 1              | 2              |                |                | 2              |                |                |                               | x                                                           |
| 61 | 0              | 1              | 2              | 7              | x       |         | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 62 | 0              | 1              | 1              | 11             | x       |         | 2              | 1              |                | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 63 | 0              | 1              | 0              | 13             | x       |         | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 64 | 0              | 0              | 7              | 7              | x       |         | 3              |                |                |                | 2              |                |                |                               |                                                             |
| 65 | 0              | 0              | 6              | 10             | x       |         | 3              |                |                |                | 2              |                |                |                               | x                                                           |
| 66 | 0              | 0              | 6              | 7              | x       |         | 3              |                | 1              | 1              |                |                |                |                               | x                                                           |
| 67 | 0              | 0              | 6              | 4              | x       |         | 3              |                |                | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 68 | 0              | 0              | 6              | 1              | x       |         | 2              |                |                |                | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 69 | 0              | 0              | 5              | 5              | x       |         | 1              | 2              |                | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 70 | 0              | 0              | 4              | 10             | x       |         | 2              | 1              |                |                | 2              |                |                |                               |                                                             |
| 71 | 0              | 0              | 4              | 8              | x       |         | 2              | 2              |                |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 72 | 0              | 0              | 4              | 7              | x       |         |                |                |                |                | 2              | 1              |                |                               | x                                                           |
| 73 | 0              | 0              | 4              | 6              | x       |         | 2              |                |                |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 74 | 0              | 0              | 3              | 13             | x       |         | 2              | 1              |                |                | 2              |                |                |                               | x                                                           |
| 75 | 0              | 0              | 3              | 11             | x       |         | 2              | 2              |                |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 76 | 0              | 0              | 3              | 10             | x       |         | 1              | 2              | 1              |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 77 | 0              | 0              | 3              | 9              | x       |         | 1              | 1              | 1              | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 78 | 0              | 0              | 3              | 6              | x       |         | 1              | 1              |                |                | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 79 | 0              | 0              | 3              | 4              | x       |         |                | 2              |                |                | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 80 | 0              | 0              | 2              | 11             | x       |         | 2              | 1              |                | 1              | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 81 | 0              | 0              | 2              | 9              | x       |         |                | 1              |                | 1              |                | 1              |                |                               | x                                                           |
| 82 | 0              | 0              | 2              | 8              | x       |         |                |                | 2              |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 83 | 0              | 0              | 2              | 6              | x       |         | 1              | 1              |                |                | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 84 | 0              | 0              | 1              | 11             | x       |         | 1              | 1              |                |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 85 | 0              | 0              | 1              | 10             | x       |         | 1              |                | 1              |                | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 86 | 0              | 0              | 1              | 9              | x       |         | 1              |                | 1              |                | 1              |                |                |                               | x                                                           |
| 87 | 0              | 0              | 1              | 7              | x       |         | 1              |                |                | 1              | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 88 | 0              | 0              | 1              | 6              | x       |         |                |                | 1              | 1              | 1              |                |                |                               |                                                             |
| 89 | 0              | 0              | 0              | 18             |         | x       |                |                |                |                |                |                |                | 1                             | x                                                           |
| 90 | 0              | 0              | 0              | 16             |         | x       |                |                |                |                |                |                |                | 1                             | x                                                           |



| i   | $v_5$ | $v_4$ | $v_3$ | $v_2$ | $B^*(7,3)$ | $B^*(6,3)$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ | $B_1 B_3$ | $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------------------|
| 91  | 0     | 0     | 0     | 14    |            | x          |       |       |       |       |       |       |       | 1         | x                 |
| 92  | 0     | 0     | 0     | 13    | x          |            | 1     |       | 1     |       | 1     |       |       |           | x                 |
| 93  | 0     | 0     | 0     | 12    |            | x          |       |       |       |       |       |       |       | 1         | x                 |
| 94  | 0     | 0     | 0     | 11    | x          |            | 1     |       |       | 1     | 1     |       |       |           | x                 |
| 95  | 0     | 0     | 0     | 10    | x          |            | 1     |       |       | 1     | 1     |       |       |           | x                 |
| 96  | 0     | 0     | 0     | 9     | x          |            | 1     |       |       | 1     | 1     |       |       |           |                   |
| 97  | 0     | 0     | 0     | 8     |            | x          |       |       |       |       |       |       |       | 1         | x                 |
| 98  | 0     | 0     | 0     | 7     | x          |            |       | 1     |       | 1     | 1     |       |       |           |                   |
| 99  | 0     | 0     | 0     | 6     | x          |            |       |       |       | 1     | 1     | 1     |       |           |                   |
| 100 | 0     | 0     | 0     | 4     |            | x          |       |       |       |       |       |       |       | 1         |                   |

## 6. Proof of Theorems 5 and 6

We consider the equations of the intersection numbers  $n_0, \dots, n_4$  for the case of Theorem 5 and of Theorem 6, i.e.

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= 14, \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 28, \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 &= 18, \text{ and} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= 18, \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 32, \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 &= 18, \text{ respectively.} \end{aligned}$$

These two systems of equations have no solutions in nonnegative integers with  $n_4 \geq 2$ , which can be verified easily.

## 7. Proof of Theorem 7

The smallest positive  $\lambda$  with  $v=9$ ,  $k=4$ ,  $t=3$  is  $\lambda=6$ , i.e. all 3-(9,4,6) designs are elementary. We construct 3-(9,4,6) designs in the following way. Let  $N$  be one of the 50 2-(7,3,5) designs on  $\{1,2,\dots,7\}$  defined on pages 28 - 29. To each block we add the element 8. Then we add to this system the complements of all these quadruples according to  $\{1,2,\dots,8\}$ . This yields a 3-(8,3,5) design, see Gronau /4/. Finally we add  $\{x : x \in B^*(9,4), 9 \in x\}$  and obtain a 3-(9,4,6) design  $N'$ . It is easy to check that the frequency-vector  $(v'_5, v'_4, v'_3, v'_2)$  of  $N'$  is  $(0, 2v_5, 2v_4, 2v_3, 2v_2)$ , where  $(v_5, v_4, v_3, v_2)$  is that one of  $N$ . The table on pages 28 - 29 yields the nonisomorphism of the 50 obtained designs.

# 8. Proof of Theorem 8

The idea of this proof is the same as in the proof of the analogous result for designs with  $k = 3$  given in Gronau /3/. We start with  $B^*(v, 4)$  and exchange  $B^*(p, 4) \subset B^*(v, 4)$  -  $p$  denotes the greatest integer less than  $v$  for which  $2-(p, 4, 1)$  designs exist - by  $\binom{p-2}{2}$  copies of a fixed  $2-(p, 4, 1)$  designs. This yields a  $2-(v, 4, \binom{v-2}{2})$  design again. Let  $w$  denote the smallest positive integer for which  $2-(v, 4, w)$  designs exist. If our constructed design is nonelementary we must have

$$w \binom{p-2}{2} \leq \binom{v-2}{2}, \quad (2)$$

since our design has some blocks  $\binom{p-2}{2}$ -times, i.e. every decomposition in designs without repeated blocks contains at least  $\binom{p-2}{2}$  designs. The lower bound for the  $w$ 's according to (1) is given in the following table.

|                             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |
|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|---|
| $v \equiv x \pmod{12}, x =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |   |
| $w =$                       |   | 3 | 1 | 6 | 6 | 1 | 3 | 6 | 2 | 3 | 3  | 2  | 6 |

(1) is sufficient for the existence of  $2-(v, 4, 1)$  designs; see Lenz /5/. (2) is equivalent to

$$\frac{(v-2)(v-3)}{(p-2)(p-3)} \geq w. \quad (3)$$

We disprove (3) for  $v < 30$  by the following table.

|                                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |                  |                 |                 |                 |                   |                 |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| $v$                             | 14              | 15              | 17              | 18               | 19               | 20               | 21               | 23              | 24              | 26              | 27                | 29              |
| $p$                             | 13              | 13              | 16              | 16               | 16               | 16               | 16               | 16              | 16              | 25              | 25                | 28              |
| $\frac{(v-2)(v-3)}{(p-2)(p-3)}$ | $\frac{12}{10}$ | $\frac{78}{55}$ | $\frac{15}{13}$ | $\frac{120}{91}$ | $\frac{136}{91}$ | $\frac{153}{91}$ | $\frac{171}{91}$ | $\frac{30}{13}$ | $\frac{33}{13}$ | $\frac{12}{11}$ | $\frac{300}{253}$ | $\frac{27}{25}$ |
| $w$                             | 6               | 6               | 3               | 6                | 2                | 3                | 3                | 6               | 3               | 6               | 6                 | 3               |

For  $v \geq 30$  we have  $p \geq v - 8$  and  $w \geq 2$ . Hence

$$\frac{(v-2)(v-3)}{(p-2)(p-3)} \leq \frac{(v-2)(v-3)}{(v-10)(v-11)} \leq \frac{28 \cdot 27}{20 \cdot 19} = \frac{378}{190} < 2 \leq w.$$

## Acknowledgement

The authors are indebted to the wife of the first one, Mrs. Annegret Gronau, for her assistance in the laborious construction of nonisomorphic designs.

## References

- /1/ Burosch, G.: Über die Anzahl elementarer BUB der vollständigen  $(6,3)$ -Familie. Rostock. Math. Kolloq. 11, 5 - 11 (1979)
- /2/ Ganter, B., Gülzow, A., Mathon, R., and Rosa, A.: A complete census of  $(10,3,2)$ -block designs and of Mendelsohn triple systems of order ten, Part IV:  $(10,3,2)$ -designs with repeated blocks. Gesamthochschule Kassel, Mathematische Schriften 5/78, Kassel 1978
- /3/ Gronau, H.-D.: Einige Bemerkungen zur Arbeit "Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten  $(v,k)$ -Familien" von D. Rasch und G. Herrendörfer. Rostock. Math. Kolloq. 9, 27 - 34 (1978)
- /4/ Gronau, H.-D. O. F.: Über  $(2p-1)-(4p,2p,\lambda)$ -Blockpläne. Rostock. Math. Kolloq. 11, 67 - 74 (1979)
- /5/ Lenz, H.: Blockpläne und verwandte Inzidenzstrukturen. In: Chatterji, S. D., u. a. (Ed.): Jahrbuch Oberblicke Mathematik. S. 79 - 105. Mannheim 1979
- /6/ Mathon, R., and Rosa, A.: A census of Mendelsohn triple systems of order nine, Ars Combin. 4, 309 - 315 (1977)
- /7/ Morgan, E. J.: Some small quasi-multiple designs. Ars Combin. 3, 233 - 250 (1977)
- /8/ Rasch, D., und Herrendörfer, G.: Über die Anzahl elementarer BUB in eingeschränkten  $(v,k)$ -Familien. Rostock. Math. Kolloq. 8, 71 - 82 (1978)



Ivan Havel

Embedding the directed dichotomic tree into the n-cube

Both the dichotomic (binary) trees and the n-dimensional cubes are commonly considered to be interesting combinatorial objects, as concerns their properties, structure and applications. In this paper we investigate their mutual relationship, namely, we deal with the problem of embedding dichotomic trees in cubes. Throughout the paper  $i, k, l, m, n, \dots$  range over positive integers, if not stated otherwise.

$Q_n(\vec{Q}_n)$  denotes the undirected (directed) graph of an n-dimensional cube, defined in the standard way (/1/, /2/). For an undirected  $G$ ,  $\dim G$  denotes "the cubical dimension of  $G$ ", i. e. the smallest  $n$  such that  $G$  is isomorphic to a subgraph of  $Q_n$  ( $G \subseteq Q_n$ ). Similarly,  $\dim \vec{G}$  denotes the smallest  $n$  such that the digraph  $\vec{G}$  is isomorphic to a subgraph of  $\vec{Q}_n$  ( $\vec{G} \subseteq \vec{Q}_n$ ).

The cubical dimension of certain trees is investigated in /3/, /4/, and /6/. Here we shall consider the cubical dimension of the so-called complete directed dichotomic trees.

The complete dichotomic tree  $D_k$  on  $k$  levels is a rooted tree, each vertex of which either has exactly two sons or is a leaf and all the paths from the root to the leaves have the same length  $k$ . Therefore, for  $0 \leq i \leq k$ ,  $D_k$  has  $2^i$  vertices of the " $i$ -th level".  $D_k$  is an undirected graph; if all its edges are directed "from the root to the leaves", the digraph obtained is denoted by  $\vec{D}_k$ .

We proved in /3/ that  $k \geq 2 \rightarrow \dim D_k = k+2$ . Here we find only certain upper and lower bounds for  $\dim \vec{D}_k$ .

In /5/ two necessary conditions for  $\vec{G} \subseteq \vec{Q}_n$  are given, while the problem of a necessary and sufficient condition for  $\vec{G} \subseteq \vec{Q}_n$  is mentioned as an open one. In /2/ such a condition is stated; for the case of  $\vec{D}_k$  it may be formulated as follows:

Assertion 1:  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n$  if and only if there is a mapping  $\varphi: A(\vec{D}_k) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  - where  $A(\vec{D}_k)$  is the set of all arcs of  $\vec{D}_k$  - satisfying the following two conditions:

- (i) if  $(a_1, \dots, a_k)$  is the sequence of arcs of any path from the root  $r$  to a leaf in  $\vec{D}_k$ , then  $1 \leq i, j \leq k \text{ \& } i \neq j \Rightarrow \varphi(a_i) \neq \varphi(a_j)$ .
- (ii) if  $u, v \in V(\vec{D}_k)$  are two different vertices of  $\vec{D}_k$ , both different from the root  $r$ , and if  $(b_1, \dots, b_l), (c_1, \dots, c_m)$  are the sequences of arcs of the paths leading from  $r$  to  $u, v$ , respectively, then  $\{\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_l)\} \neq \{\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)\}$ .

Proof: Let  $\varphi: A(\vec{D}_k) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  satisfy (i) and (ii). Define a mapping  $f: V(\vec{D}_k) \rightarrow V(\vec{Q}_n)$  as follows: for the root  $r$  of  $\vec{D}_k$  put  $f(r) = (0, \dots, 0)$ . If  $u \in V(\vec{D}_k)$ ,  $u \neq r$ , let  $(b_1, \dots, b_l)$  be the sequence of arcs of the (only) path from  $r$  to  $u$  in  $\vec{D}_k$ . For  $1 \leq i \leq n$  put  $u_i = 1$  if  $i \in \{\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_l)\}$ , otherwise  $u_i = 0$ , and  $f(u) = (u_1, \dots, u_n)$ . Then  $f$  is an injection and moreover,  $(u, v) \in A(\vec{D}_k) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in A(\vec{Q}_n)$ , hence  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n$ .

Suppose on the other hand  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n$ . This means that we are given an injection  $f: V(\vec{D}_k) \rightarrow V(\vec{Q}_n)$  such that  $(u, v) \in A(\vec{D}_k) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in A(\vec{Q}_n)$ . Let  $u, v \in V(\vec{D}_k)$ ,  $(u, v) \in A(\vec{D}_k)$ ,  $f(u) = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $f(v) = (v_1, \dots, v_n)$ , where  $u_i, v_i \in \{0, 1\}$ . Then there is precisely one  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) such that  $u_i = 0$ ,  $v_i = 1$  ( $u_j = v_j$  for  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ ). Put  $\varphi((u, v)) = i$ . Then obviously  $\varphi: A(\vec{D}_k) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  satisfies (i) and (ii).

The following statements describe the basic properties of  $\dim \vec{D}_k$ .

Assertion 2:  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_m \text{ \& } \vec{D}_1 \subseteq \vec{Q}_n \Rightarrow \vec{D}_{k+1} \subseteq \vec{Q}_{m+n}$

Proof: According to Assertion 1 there are mappings

$\varphi_1: A(\vec{D}_k) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  and  $\varphi_2: A(\vec{D}_1) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  satisfying both (i) and (ii) for  $\vec{D}_k, \vec{D}_1$ , respectively. In order to construct  $\varphi: A(\vec{D}_{k+1}) \rightarrow \{1, \dots, m+n\}$  satisfying again (i) and (ii), let us notice that  $\vec{D}_{k+1}$  may be obtained by joining one specimen of  $\vec{D}_k$  with  $2^k$  specimens of  $\vec{D}_1$  (every leaf of  $\vec{D}_k$  being identified with the root of a new  $\vec{D}_1$ ). This enables us to construct  $\varphi$  with the desired properties in the following way: the arcs of  $\vec{D}_k$  are assigned values by  $\varphi_1$ ; if  $a \in A(\vec{D}_1)$ , then  $a$  is assigned the value  $m + \varphi_2(a)$ . Further,  $\vec{D}_k$  with arcs valued by  $\varphi_1$  and  $2^k$  specimens of  $\vec{D}_1$  with arcs valued by  $m + \varphi_2$  are joined as described above. In this way  $\vec{D}_{k+1}$  arises with values assigned to its arcs; let us denote this valuation by  $\varphi$ , obviously  $\varphi: A(\vec{D}_{k+1}) \rightarrow \{1, \dots, m+n\}$  satisfies (i) and (ii) of Assertion 1.

Remark 1: Assertion 2 implies the following result:

$$\dim \vec{D}_{k+1} \leq \dim \vec{D}_k + \dim \vec{D}_1,$$

$$\dim \vec{D}_{jk} \leq j \cdot \dim \vec{D}_k.$$

Assertion 3:  $\vec{D}_k \in \vec{Q}_n \Rightarrow 2^k \leq \binom{n}{k}$ .

Proof: By Assertion 1 it follows from  $\vec{D}_k \in \vec{Q}_n$  that there is  $\varphi: A(\vec{D}_k) \rightarrow \{1, \dots, n\}$  such that if  $(a_1, \dots, a_k)$  and  $(a'_1, \dots, a'_k)$  are the sequences of arcs of two different paths from the root to leaves in  $\vec{D}_k$ , then  $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)\} \neq \{\varphi(a'_1), \dots, \varphi(a'_k)\}$ . Since the total number of leaves in  $\vec{D}_k$  is  $2^k$ , the desired inequality follows.

Remark 2:  $2^k \leq \binom{\dim \vec{D}_k}{k}$ .

Remark 3: By an elementary argument we obtain

$$k > 1 \text{ \& } 2^k \leq \binom{n}{k} \Rightarrow 2^{k-1} \leq \binom{n}{k-1}.$$

Thus,  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n$  also implies  $2^i \leq \binom{n}{i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , which may be as well obtained via Assertion 1.

**Remark 4:** The inequality of Assertion 3 may be strengthened, namely

$$\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n \Rightarrow 2^k \leq \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k},$$

since there are two arcs in  $\vec{D}_k$  incident with the root, and any path from the root to a leaf contains exactly one of them.

**Assertion 4:**

- (i)  $\dim \vec{D}_k = \left\lfloor \frac{3k+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k = 1, \dots, 5$ ,
- (ii)  $\dim \vec{D}_6 = 9$ ,
- (iii)  $\dim \vec{D}_k \leq \frac{3k}{2}$  if  $k \equiv 0 \pmod{6}$ ,
- (iv)  $\dim \vec{D}_k \leq \left\lfloor \frac{3k+1}{2} \right\rfloor$  if  $k \not\equiv 0 \pmod{6}$ .

**Proof:** (i) the case  $\dim \vec{D}_1 = 2$  being trivial,

$\dim \vec{D}_k \geq \left\lfloor \frac{3k+1}{2} \right\rfloor$ ,  $k = 2, \dots, 5$ , follows from Remark 2. In order to prove the reverse inequalities, we can use Assertion 1, Remark 1, and the valuations of arcs of  $\vec{D}_3$  and  $\vec{D}_5$  given by Fig. 1 and Fig. 2. (In Figs. 1, 2 all the edges are directed downwards, but the arrows as well as the last level arcs in  $\vec{D}_5$ , leading to leaves, are omitted).

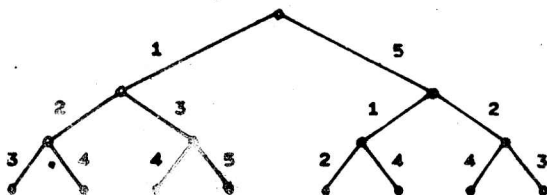


Fig. 1



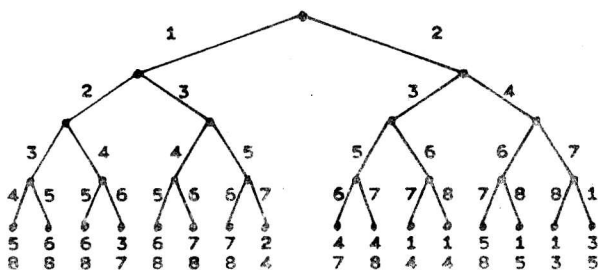


Fig. 2

(ii)  $\dim \vec{D}_6 \geq 9$  follows from Remark 2. We prove  $\vec{D}_6 \subseteq \vec{Q}_9$  again by constructing  $\varphi: A(\vec{D}_6) \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  satisfying (i) and (ii) of Assertion 1.  $\varphi$  may be defined e. g. by Fig. 3 (where the last level arcs are omitted and only the values assigned to them by  $\varphi$  are given). It is only a matter of direct (but rather tedious) inspection to check that  $\varphi$  of Fig. 3 possesses the properties required.

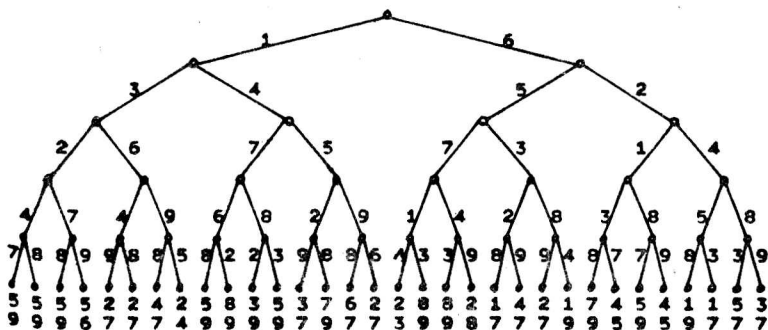


Fig. 3

(iii) follows from (ii) and Remark 1, (iv) may be derived from (iii) and (i) again by Remark 1.

Assertion 5:  $\binom{\lceil \frac{5k}{4} \rceil}{k} \leq 2^k$  for all  $k$ .

Proof: It follows easily by induction that  $\binom{5t+2}{4t+1} \leq 2^{4t+1}$  for  $t \geq 0$ ; hence we derive further

$$\binom{5t+3}{4t+2} \leq 2^{4t+2}, \binom{5t+4}{4t+3} \leq 2^{4t+3} \text{ and finally, } \binom{5t+5}{4t+4} \leq 2^{4t+4}.$$

Assertion 6:  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n \rightarrow n \geq \lceil \frac{5k}{4} \rceil$ .

Proof: If  $k \leq n < \lceil \frac{5k}{4} \rceil$ , then  $\binom{n}{k} < \binom{\lceil \frac{5k}{4} \rceil}{k} \leq 2^k$  (Assertion 5),

which contradicts  $\vec{D}_k \subseteq \vec{Q}_n$  (Assertion 3).

The next statement follows immediately from Assertions 4 and 6; it yields asymptotic bounds for  $\dim \vec{D}_k$ .

Assertion 7:  $\frac{5}{4} \leq \frac{\dim \vec{D}_k}{k} \leq \frac{3}{2}$ .

Remark 5: By means of a more detailed numerical analysis one can obtain a greater constant (approximately 1.29...) instead of the value  $5/4$  in Assertions 5, 6, and 7. The upper bound (Assertions 4 and 7) could be probably improved as well, e. g. by determining  $\dim \vec{D}_k$  for some  $k > 6$  and then using Remark 1. Though it may be shown that the lower bound of  $\dim \vec{D}_k$  given in Remark 2 cannot equal  $\dim \vec{D}_k$  for every  $k$

$$(2^{26} < \binom{35}{26}) \text{ but } \dim \vec{D}_{26} > 35, \text{ since } \binom{35}{26} - \binom{33}{26} < 2^{26}, \text{ cf.}$$

Remark 4), it seems to be likely that better estimations of  $\dim \vec{D}_k$  could be obtained rather by improving the upper than the lower bound.

References:

- /1/ Harary, F.: Graph Theory, Reading, Mass., 1969
- /2/ Havel, I.: Embedding graphs in undirected and directed cubes. In: Proceedings of the Graph Theory Conference, Łagów, February 1981 (in print)
- /3/ Havel, I., and Liebl, P.: Embedding the dichotomic tree into the cube (Czech, with English summary). Časopis Pěst. Mat. 97, 201 - 205 (1972)
- /4/ Havel, I., and Liebl, P.: Embedding the polytomic tree into the n-cube, Časopis Pěst. Mat. 98, 307 - 314 (1973)
- /5/ Hechler, S. H., and Kainen, P. C.: On the immersion of digraphs in cubes. Israel J. Math. 18, 221 - 223 (1974)
- /6/ Nebeský, L.: On cubes and dichotomic trees. Časopis Pěst. Mat. 99, 164 - 167 (1974)

received: March 30, 1981

Author's address:

Dr. I. Havel  
Mathematical Institute  
Czechoslovak Academy of Sciences  
Žitná 25  
ČS-11567 - Prague 1, ČSSR



Dieter Pötschke

# Die topologische Entropie als Isomorphieinvariante endlicher Graphen

## 1. Topologische Entropie von kompakten topologischen Räumen

Im Jahre 1965 führten Adler, Konheim und McAndrew die topologische Entropie für kompakte topologische Räume ein. Diese Größe ist ein topologisches Analogon zur Shannon-Entropie für stationäre Wahrscheinlichkeitsräume, die in der Ergodentheorie auch als dynamische Systeme bezeichnet werden.

In den nachfolgenden Jahren wurde die topologische Entropie von expansiven und entropie-expansiven Homöomorphismen mit Methoden der Informationstheorie und vor allem der topologischen Dynamik untersucht, und es wurden interessante Ergebnisse erzielt; zu einer Übersicht vgl. z. B. Pötschke, Sobik /8/, Kap. 5. Dabei spielen die sog. Unterverschiebungen endlicher Ordnung (subshifts of finite order) eine wesentliche Rolle.

In dem vorliegenden Beitrag soll nun gezeigt werden, daß die für Unterverschiebungen erhaltenen Ergebnisse auf Graphen übertragbar sind. Dazu muß von dem Graphen zu dem von ihm erzeugten Folgenraum, der hier als Graphraum bezeichnet wird, übergegangen werden. Weiterhin werden dazu die topologischen Mischungsbegriffe auf Graphen bzw. Graphräume übertragen.

In der Graphentheorie wurde bisher zwar eine Reihe von Isomorphieinvarianten eines endlichen Graphen untersucht, aber bisher ist keine vollständige Isomorphieinvariante bekannt. Auch das Spektrum - von dem Herery /5/ noch 1962 behauptete, daß nicht-isomorphe Graphen verschiedene Spektren haben - erwies sich im allgemeinen als nicht vollständige Isomorphieinvariante.

Dabei heißt eine Isomorphieinvariante vollständig, wenn aus ihrer Gleichheit für zwei Graphen die Isomorphie der Graphen folgt. Dies ist eine ähnliche Situation, wie sie in der Ergodentheorie bis zum Jahre 1963 bestand, als z. B. für Bernoulli-Systeme noch keine vollständige Isomorphieinvariante bekannt war. Ornstein konnte dann aber zeigen, daß die Shannon-Entropie

eine vollständige Isomorphieinvariante für alle Bernoulli-Systeme und darüber hinaus für alle stark gemischten Markow-Prozesse ist.

Die folgenden Untersuchungen stellen nun einen ersten Schritt dar, diese informationstheoretischen Überlegungen analog auf das Isomorphieproblem für Graphen bzw. Graphenräume zu übertragen.

Zunächst werden in diesem Abschnitt topologische Mischungsbe-  
griffe und die topologische Entropie definiert. Im Abschnitt 2 wird auf gewisse Eigenschaften des Spektrums eingegangen, insbesondere welche Graphklassen es trennt. Satz 2.5 stellt den Zusammenhang zwischen der topologischen Entropie und dem Index eines Graphen her. Der Übergang zu Graphräumen ergibt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen topologischer Struktur und Wahrscheinlichkeit:

Zu jedem topologisch transitiven Graphraum existiert ein ergo-  
disches Markowsches Wahrscheinlichkeitsmaß gleicher Entropie. Bereits Shannon (1949), der Begründer der Informationstheorie, wies auf Zusammenhänge zwischen Markow-Prozessen und Digraphen hin. Es wird hier gezeigt (Satz 2.8), daß topologisch transitive Graphräume echt ergodisch sind.

Zunächst benötigen wir einige Grundbegriffe.

Sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen.

**Definition 1.1:**  $[Y, T]$  heißt topologisches dynamisches System, wenn  $Y$  ein kompakter metrischer Raum und  $T: Y \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus ist.

Damit ist  $T$  auch bezüglich der Borel-Mengen meßbar.

**Definition 1.2:**

1.  $[Y, T]$  heißt topologisch transitiv, wenn für alle nichtleeren offenen Mengen  $U, V \subset Y$  ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so daß

$$U \cap T^{-n}V \neq \emptyset \text{ gilt.}$$

2.  $[Y, T]$  heißt topologisch schwach gemischt, wenn das Produkt  $[Y \times Y, T \times T]$  topologisch transitiv ist.

3.  $[Y, T]$  heißt topologisch stark gemischt, wenn für alle nichtleeren offenen Mengen  $U, V \subset Y$  und alle hinreichend großen  $n$

$$U \cap T^{-n}V \neq \emptyset \text{ gilt.}$$

Man zeigt leicht, daß topologisch stark gemischt die Eigenschaft topologisch schwach gemischt impliziert und jedes topologisch schwach gemischte System auch topologisch transitiv ist.

Es gibt nun einen engen Zusammenhang zwischen diesen topologischen und den entsprechenden maßtheoretischen Mischungsbegriffen (vgl. /8/, S. 97 ff.).

Sei  $[Y, T]$  ein topologisches dynamisches System und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Weiterhin sei

$$H(\mathcal{U}) =_{\text{Df}} \log N(\mathcal{U}),$$

wobei  $N(\mathcal{U})$  die kleinste Kardinalzahl einer Teilüberdeckung von  $Y$  ist.  $H(\mathcal{U})$  ist endlich, da  $Y$  ein kompakter metrischer Raum ist. Für jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  existiert der Grenzwert

$$H(\mathcal{U}, T) =_{\text{Df}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H((\mathcal{U})_0^{n-1}),$$

wobei  $(\mathcal{U})_0^n =_{\text{Df}} \mathcal{U} \vee T^{-1}\mathcal{U} \vee \dots \vee T^{-n}\mathcal{U}$  ist,  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir bezeichnen

$$h_{\text{top}}(T) =_{\text{Df}} \sup \{H(\mathcal{U}, T) \mid \mathcal{U} \text{ offene Überdeckung von } Y\}$$

als topologische Entropie von  $[Y, T]$ .

## 2. Spektrum, Graphräume und topologische Entropie

$G = [X, K]$  heißt Graph, wenn  $X$  eine endliche, nichtleere Menge ist und  $K \subseteq X \times X$ .  $X$  heißt Knoten- und  $K$  Kantenmenge.  $G$  heißt ungerichtet, wenn für alle  $x, x' \in X$  mit  $(x, x') \in K$  gilt  $(x', x) \in K$ . Sonst heißt  $G$  gerichteter Graph oder Digraph.

$A = (a_{ij})$  sei die Adjazenzmatrix des Graphen  $G$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (x_i, x_j) \notin K, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit  $|A|$  bezeichnen wir die Determinante der Adjazenzmatrix.

### Definition 2.1:

a) Das charakteristische Polynom

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

der Adjazenzmatrix  $A$  von  $G$

heißt charakteristisches Polynom des Graphen  $G$  und wird mit  $P_G(\lambda)$  bezeichnet.

b) Die Eigenwerte von  $A$  (d. h. die Nullstellen von  $P_G(\lambda)$ ) bzw. das Spektrum von  $A$  (das aus den Eigenwerten besteht) heißen Eigenwerte bzw. Spektrum des Graphen  $G$ .

Wenn  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die der fallenden Größe nach geordneten Eigenwerte von  $G$  sind, so bezeichnen wir das Spektrum des Graphen mit  $Sp(G) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Lemma 2.1: Seien  $G_1$  und  $G_2$  isomorphe Graphen, dann ist  $Sp(G_1) = Sp(G_2)$ .

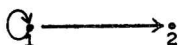
Beweis: Sei  $f$  ein Isomorphismus von  $G_1 = [X, K]$  auf  $G_2 = [X, K']$ , d. h.  $(x_1, x_j) \in K \leftrightarrow (f(x_1), f(x_j)) \in K'$  für alle  $x_1, x_j \in X$ .

$f$  erzeugt eine Permutationsmatrix  $P$  auf  $X$ . Dann ist

$$|\lambda P - P A P^{-1}| = |\lambda P| + |P| \cdot |-A| \cdot |P^{-1}| = |\lambda P - A|.$$

Damit haben isomorphe Graphen das gleiche Spektrum, q. e. d.

Beispiel 1:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_G(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1).$$

Daher ist  $Sp(G) = (1, 0)$ .

Eine wichtige Frage besteht darin, welche Information über die Struktur des Graphen  $G$  in dem Spektrum enthalten ist und wie diese Information aus dem Spektrum gewonnen werden kann. Dieser Frage ist die Monographie von Cvetković, Doob, Sachs /3/ gewidmet, der wir hier folgen.

Der Wert dieser Information darf nicht überschätzt werden, da das Spektrum nicht nur unter der Gruppe der Permutationen, sondern auch unter der Gruppe aller orthogonalen Transformationen invariant bleibt.

Graphen gleichen Spektrums werden als isospektral (oder cospektral) bezeichnet. Nach Lemma 2.1 sind also isomorphe Graphen isospektral.

Noch Harary /5/ vermutete, daß isospektrale Graphen isomorph sind. Dies ist aber nicht der Fall. Abb. 2.1 zeigt ein Paar



isospektraler nicht-isomorpher Graphen, das von Collatz, Singowitz /2/ angegeben wurde.



Abb. 2.1

Bei isospektralen Graphen kann auch die Zusammenhangseigenschaft verloren gehen, vgl. Abb. 2.2.



Abb. 2.2

Beide Graphen sind isospektral, aber offensichtlich nicht isomorph (vgl. /3/).

Dieser Sachverhalt ändert sich auch nicht für große Knotenzahlen.

Satz 2.2: (Hoffman, nach Mowshowitz /6/)

Für jede positive ganze Zahl  $n$  existiert eine natürliche Zahl  $N$ , so daß für jedes  $m \geq N$   $n$  nichtisomorphe isospektrale reguläre zusammenhängende Graphen mit jeweils  $m$  Knoten existieren.

Für gewisse Klassen von Digraphen ist das Spektrum allerdings eine vollständige Isomorphieinvariante. Dies ist analog zu dem Sachverhalt in der Informationstheorie, daß die Shannon-Entropie eine vollständige Isomorphieinvariante für stark gemischte Markow-Prozesse ist.

Satz 2.3: (Elses, Turner /4/)

Sei  $D$  die Menge aller Digraphen (oder Graphen) mit  $n$  ( $n$  eine Primzahl) Knoten und einer zyklischen Adjazenzmatrix. Zwei Digraphen aus  $D$  sind isomorph genau dann, wenn sie gleiches Spektrum haben.

Auch nichtisomorphe Graphen, die von symmetrischen Blockplänen erzeugt werden, haben verschiedene Spektren (vgl. Cvetkovič et al. /3/, Theorem 6.9).

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen dem Spektrum von Graphen und der topologischen Entropie herstellen.

Es sei der Graph  $G = [X, K]$  gegeben.  $X^{\mathbb{Z}}$  sei die Menge aller Funktionen von der Menge  $\mathbb{Z}$  aller ganzen Zahlen in die Menge  $X$ , d. h. die Menge aller beidseitig unendlichen Folgen über  $X$ .

$T: X^{\mathbb{Z}} \rightarrow X^{\mathbb{Z}}$  sei die Verschiebetransformation, dann ist  $X^{\mathbb{Z}}$  ein kompakter metrischer Raum und  $T$  ein Homöomorphismus. Somit ist  $[X^{\mathbb{Z}}, T]$  ein topologisches dynamisches System (entsprechend Def. 1.1).  $T$  ist topologisch transitiv und sogar topologisch stark gemischt (vgl. /8/, S. 98 ff.).

Sei  $E_G =_{\text{Def}} \{a \mid a \in X^{\mathbb{Z}} \wedge \forall i (i \in \mathbb{Z} \rightarrow [a(i), a(i+1)] \in K)\}$

die Menge aller beidseitig unendlichen Wege im Graphen  $G$ . Offensichtlich ist  $E_G$   $T$ -invariant und abgeschlossen, da das Komplement offen ist. Auch die Abbildung  $T|_{E_G}$  ist ein Homöomorphismus, und das topologische dynamische System  $[E_G, T|_{E_G}]$  bezeichnen wir als den durch  $G$  definierten Graphraum.  $E_G$  wird in der topologischen Dynamik als Unterschiebung endlichen Typs der Ordnung 2 bezeichnet (vgl. /8/).

Die Adjazenzmatrix  $A$  des Graphen  $G$  heißt die Obergangsmatrix des Graphraumes  $E_G$ .

**Definition 2.2:** Eine  $(n, n)$ -Matrix  $R = (r_{ij})$  heißt irreduzibel, wenn für jedes Paar von Indizes  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , das  $(i, j)$ -te Element einer Potenz  $R^m$ ,  $m > 0$ , positiv ist.

Die Irreduzibilität der Obergangsmatrix ist für Graphräume äquivalent zur topologischen Transitivität, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 2.4:** Sei  $E_G$  ein Graphraum mit der Obergangsmatrix  $A$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1.  $[E_G, T|_{E_G}]$  ist topologisch transitiv.
2.  $A$  ist irreduzibel.

Mit Hilfe einer Zerlegung des Graphraumes, die analog der De-52

komposition stationärer Wahrscheinlichkeitsräume in ergodische Bestandteile ist (vgl. /8/, Satz 5.32), kann die topologische Entropie von Graphräumen bestimmt werden.

Durch Anwendung des Satzes von Parry /7/ auf Graphräume ergibt sich

Satz 2.5: Sei  $E_G \subseteq X^{GZ}$  ein Graphraum mit der Übergangsmatrix  $A$ . Dann gilt

$$h_{\text{top}}(T|E_G) = \text{ld} \lambda,$$

wobei  $\lambda$  der Spektralradius von  $A$  ist.  $\lambda$  ist ein Element des Spektrums, das dem absoluten Betrage nach maximal ist.

Falls  $E_G$  ein topologisch stark gemischter Graphraum ist, so kann die topologische Entropie mit Hilfe des Satzes von Bowen bestimmt werden (/8/, Satz 5.34).

Wir kommen nun zu dem in der Einleitung erwähnten Zusammenhang zwischen der topologischen Entropie von Graphräumen und ergodischen Markowschen Quellen.

Satz 2.6: Sei  $E_G$  ein topologisch transitiver Graphraum. Dann existiert eine ergodische Markowsche Quelle  $[X^{GZ}, \mathcal{X}, T, \pi_G]$  derart, daß gilt

$$h(\pi_G, T|E_G) = h_{\text{top}}(T|E_G).$$

Beweis: Sei  $A$  die Übergangsmatrix des Graphraumes  $E_G$ , die nach Lemma 2.4 irreduzibel ist. Nach dem Satz von Perron-Frobenius entsprechen dem betragsgrößten Eigenwert  $\lambda$  ein rechter Eigenvektor  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_s)$  und ein linker Eigenvektor  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_s)$  mit  $u_i > 0$  und  $v_i > 0$  für jedes  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

Wir können voraussetzen, daß  $\sum_{i=1}^s u_i v_i = 1$  ist. Nun definieren

wir auf folgende Weise ein stationäres Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi_G$  (zur Def. s. /8/, S. 35): Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(i, j \in X)$  sind bestimmt durch

$$p_{ij} = \frac{u_j a_{ij}}{u_i} \quad (i, j \in X)$$

und die initiale Verteilung  $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_s)$  als

$$p_i = u_i v_i \quad (i \in X).$$

Für  $i \in X$  gilt

$$\sum_{j \in X} p_{ij} = \frac{1}{\lambda u_i} \sum_{j \in X} a_{ij} u_j = 1, \quad \sum_{i \in X} p_i = \sum_{i \in X} u_i v_i = 1,$$

und  $\mathcal{P}$  bleibt bei Rechtsmultiplikation mit der stochastischen Matrix  $P = (p_{ij})_{i,j \in X}$  invariant.

Da  $a_{ij} = 0$  genau dann, wenn  $(i,j)$  nicht in  $E_G$  vorkommt, und  $p_{ij} = 0$  genau dann, wenn  $a_{ij} = 0$  ist, folgt daraus

$$\pi_G(E_G) = 1.$$

Folglich ist  $\pi_G$  ein Markowsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $E_G$ , und es gilt für die Entropie von  $\pi_G$ :

$$\begin{aligned} h(\pi_G, T|E_G) &= - \sum_{i,j \in X} p_i p_{ij} \lg p_{ij} = - \sum_{i,j \in X} u_i v_i \frac{u_j a_{ij}}{\lambda u_i} \lg \frac{u_j a_{ij}}{u_i} \\ &= (\lg \lambda) \left( \sum_{i \in X} \frac{v_i}{\lambda} \sum_{j \in X} u_j a_{ij} \right) + \sum_{i \in X} \frac{v_i}{\lambda} \lg u_i \sum_{j \in X} u_j a_{ij} \\ &\quad - \sum_{j \in X} \frac{u_j}{\lambda} \lg u_j \sum_{i \in X} v_i a_{ij} - \sum_{i,j \in X} v_i u_j \frac{a_{ij}}{\lambda} \lg a_{ij} = \lg \lambda, \end{aligned}$$

da  $a_{ij} \lg a_{ij} = 0$  für alle  $i,j \in X$  und  $\sum_{i \in X} u_i v_i = 1$  gilt.

Daraus folgt  $h(\pi_G, T|E_G) = h_{\text{top}}(T|E_G)$ , q.e.d.

Satz 2.6 besagt, daß zu jedem Graphen, der einen topologisch transitiven Graphraum erzeugt, ein ergodisches Markowsches Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, dessen Shannon-Entropie gleich der topologischen Entropie des Graphraumes ist.

Folgerung 2.7: Das in Satz 2.6 angegebene Maß  $\pi_G$  auf einem topologisch stark gemischtem Graphraum  $E_G$  ist Bernoullisch in dem Sinne, daß es zu einer unabhängigen stationären Quelle konjugiert ist.

Beweis: Pötschke, Sobik /8/, S. 110.

Ein zentrales Problem der Informationstheorie auf kompakten topologischen Räumen (übrigens lassen sich die Betrachtungen auch

auf nicht notwendig kompakte topologische Räume ausdehnen, bei denen die topologische Entropie nach dem Vorbild der Hausdorff-Dimension definiert wird) stellt das Variationsprinzip:

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\pi \in \text{WM}(Y, T)} h(\pi, T),$$

d. h. die Frage nach Wahrscheinlichkeitsmaßen, deren Supremum über die Shannon-Entropie gleich der topologischen Entropie ist. Mit Satz 2.6 kann diese Frage für topologisch transitive Graphräume positiv entschieden werden: Die topologische Entropie wird durch die Entropie des Maßes  $\pi_G$  angenommen. Interessant ist nun, daß dies auch das einzige Maß ist, für das das Variationsprinzip gilt.

Definition 2.3: (Weiss, 1970)

Ein topologisches dynamisches System  $[Y, T]$  heißt echt ergodisch (intrinsically ergodic), wenn  $\text{WM}_{\text{max}}(T)$  genau ein Element enthält.

Dabei ist  $\text{WM}_{\text{max}}(T)$  die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße maximaler Entropie, für die also gilt

$$h(\pi, T) = h_{\text{top}}(T).$$

Satz 2.8: Jeder topologisch transitive Graphraum  $[E_G, T|E_G]$  ist echt ergodisch.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 5.54 in /8/.

Damit ist für topologisch transitive Graphräume das Maß  $\pi_G$  das einzige Maß maximaler Entropie.

Aufgrund des durch Satz 2.5 hergestellten Zusammenhanges zwischen topologischer Entropie und maximalem Eigenwert gilt

Satz 2.9: Ein streng zusammenhängender Digraph  $G$  hat keine geraden Zyklen genau dann, wenn  $-\exp h_{\text{top}}(T|E_G)$  auch ein Eigenwert von  $G$  ist.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 2.5 und Theorem 3.4 in /3/.

Einen anderen Zusammenhang zwischen der topologischen Entropie und strukturellen Grapheigenschaften zeigt der folgende Satz auf.

Satz 2.10: Sei  $\bar{d}$  der Mittelwert der Knotengrade des Graphen  $G$ .  
Dann gilt

$$\log \bar{d} \leq h_{\text{top}}(T|E_G),$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn der Graph  $G$  regulär ist.

Beweis: Folgt aus Satz 2.5 und dem Theorem von Collatz, Singowitz (in /3/ Theorem 3.8).

Satz 2.6 bzw. Satz 2.8 versetzen uns nun in die Lage, die Fast-überall-Isomorphieklassen von gewissen Graphtypen durch die topologische Entropie zu charakterisieren. Darauf werden wir an anderer Stelle näher eingehen.

Ich möchte mich an dieser Stelle recht herzlich bei Herrn Prof. H. Sachs (Ilmenau) für die Übersendung der Monographie /3/ bedanken, auf der einige der oben dargestellten Ergebnisse beruhen.

#### Literatur

- /1/ Adler, R. L., Konheim, A. G., and Andrew, M. H.: Topological entropy. Trans. Amer. Math. Soc. 114, 309 - 319 (1965)
- /2/ Collatz, L., und Singowitz, U.: Spektren endlicher Graphen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21, 63 - 77 (1957)
- /3/ Cvetković, D. M., Doob, M., and Sachs, H.: Spectra of Graphs: Theory and Application. Berlin 1980
- /4/ Elspas, B., and Turner, J.: Graphs with circulant adjacency matrices. J. Combin. Theory 9, 297 - 307 (1970)
- /5/ Harary, F.: The determinant of the adjacency matrix of a graph. SIAM Rev. 4, 202 - 210 (1962)
- /6/ Mowshowitz, A.: The characteristic polynomial of a graph. J. Combin. Theory Ser. B 12, 177 - 193 (1972)

/7/ Parry, W.: Intrinsic Markov chains, Trans. Amer. Math. Soc.  
112, 55 - 66 (1964)

/8/ Pötschke, D., und Sobik, F.: Mathematische Informations-  
theorie, Berlin 1980

eingegangen: 30. 03. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. D. Pötschke  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Zentralinstitut für Kybernetik  
und Informationsprozesse  
Kurststraße 30/34  
DDR-1080 Berlin





Nikolai Nikolajewiĉ Kusjurin

One limit theorem about  $(n, k, l)$ -coverings

Let  $S_n$  denote an  $n$ -element set  $\{1, 2, \dots, n\}$ , and  $B^k(S_n)$  the set of all  $k$ -subsets of  $S_n$ , i. e. subsets of cardinality  $k$ , and  $n \geq k \geq l \geq 1$  are natural numbers.

Definition: The system of  $k$ -subsets  $P \subseteq B^k(S_n)$  is called  $(n, k, l)$ -covering if for an arbitrary element  $\tilde{\alpha} \in B^l(S_n)$  there exists at least one element  $\tilde{\beta} \in P$  such that  $\tilde{\alpha} \subseteq \tilde{\beta}$  (as a subset).

Let  $M(n, k, l)$  denote the minimal cardinality of a  $(n, k, l)$ -covering. In /1/ there is proved that

$$\frac{C_n^l}{C_k^l} \leq M(n, k, l) \leq \frac{C_n^l}{C_k^l} (1 + \ln C_k^l) + 1. \quad (1)$$

In /2/ Erdős and Hanani conjectured that for fixed  $k$  and  $l$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(n, k, l) \cdot C_k^l / C_n^l = 1 \quad (2)$$

and proved (2) for  $l=2$  and  $l=3$ ,  $k=p+1$ , where  $p$  is a prime power. Our main result is stated as the following

Theorem: Let  $k = k(n) \rightarrow \infty$  and  $\frac{k}{n} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Then for arbitrary fixed  $l \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(n, k, l) \cdot C_k^l / C_n^l = 1. \quad (3)$$

Proof: It is easy to prove that under the conditions of the

theorem  $C_k^l / C_n^l \sim \left(\frac{k}{n}\right)^l$  as  $n \rightarrow \infty$ . Let  $\mu(n, k, l) = M(n, k, l) \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^l$  and let  $p = p(n)$  denote the minimal prime such that  $p(n) \geq \frac{n}{k(n)}$ .

In the theory of numbers there is proved that

$$p(n) \sim \frac{n}{k(n)} \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

We assume that (3) is false and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n, k, 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(n_t, k(n_t), 1) > 1. \quad (4)$$

Case 1: There exists a subsequence of  $\{n_t\}$  (we denote it by  $\{n_j\}$ ) such that

$$p(n_j) > k(n_j) \text{ for all } j. \quad (5)$$

From the monotonous increasing of  $M(n, k, 1)$  (as a function of  $n$ ) we conclude that

$$M(n, k(n), 1) \leq M(p(n) \cdot k(n), k(n), 1). \quad (6)$$

Let  $G_1 = \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $G_2 = \{p+1, \dots, 2p\}$ , ...,

$$G_k = \{(k-1)p+1, \dots, kp\}.$$

Let  $V_{p,k,1}$  denote the set of all solutions of the system:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k x_i \equiv 0 \pmod{p}, \\ \sum_{i=1}^k i \cdot x_i \equiv 0 \pmod{p}, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^k i^{k-1} \cdot x_i \equiv 0 \pmod{p}, \\ x_i \in G_i, i = 1, \dots, k. \end{array} \right. \quad (7)$$

If we fix any  $l$  arguments  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$  in (7)

we obtain a system with Vandermonde's determinant and, consequently,  $|V_{p,k,1}| = p^l$ .

Let  $T_{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}}$  denote any fixed minimal  $(p(l-1), k, 1)$ -cov-

ering of a set  $\bigcup_{r=1}^{l-1} G_{i_r}$ .

Define a  $(n, k, 1)$ -covering  $P(n, k, 1)$  as follows:

$$P(n, k, 1) = V_{p,k,1} \cup \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{l-1} \leq k} T_{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}}. \quad (8)$$

It is easy to prove that

$$M(pk, k, 1) \leq |P(n, k, 1)| \leq p^1 + C_k^{1-1} \cdot M(p \cdot (1-1), k, 1). \quad (9)$$

Using (1), (6), (9), we estimate  $M(n_j, k(n_j), 1)$  as follows:

$$\begin{aligned} M(n_j, k(n_j), 1) &\leq \left(\frac{n_j}{k(n_j)}\right)^1 + C_{k(n_j)}^{1-1} \cdot \frac{C_{(1-1)}^1 \cdot \frac{n_j}{k(n_j)}}{C_{k(n_j)}^1} \cdot (1 + \ln C_{k(n_j)}^1) \\ &\leq \left(\frac{n_j}{k(n_j)}\right)^1 \cdot (1 + c(1) \cdot \frac{\ln k(n_j)}{k(n_j)}). \end{aligned}$$

From this inequality we obtain that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(n_j, k(n_j), 1) = 1 \quad (\text{because } \frac{\ln k(n_j)}{k(n_j)} \rightarrow 0)$$

and this contradicts (4).

Case 2:  $\forall t \geq t_0$  it holds  $p(n_t) \leq k(n_t)$ .

Lemma (see /3/): If  $1 \leq k_1 \leq k$  and  $q = \lfloor \frac{n}{k/k_1} \rfloor$ , then

$$M(n, k, 1) \leq M(q, k_1, 1). \quad (10)$$

Using (10) we may estimate  $M(n, k, 1)$  as follows:

$$M(n, k, 1) \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^1 \leq M(q, k_1, 1) \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^1 \leq M(q, k_1, 1) \cdot \left(\frac{k_1}{q}\right)^1 \cdot \left(\frac{kq}{nk_1}\right)^1.$$

Since  $q \leq \frac{n}{\lfloor k/k_1 \rfloor} + 1 \leq 1 + \frac{nk_1}{k-k_1}$ , we may conclude that

$$\mu(n, k, 1) \leq \mu(q, k_1, 1) \cdot \left(1 + \frac{k_1}{k-k_1} + \frac{k}{nk_1}\right)^1. \quad (11)$$

Let  $k_1 := \lfloor \sqrt{\frac{n}{k} \ln \frac{n}{k}} \rfloor$ . It is easy to prove that the following assertions holds under the conditions of the case 2:

$$k_1^2(n_t) \leq q \quad \text{and} \quad \frac{k_1(n_t)}{k(n_t)} \rightarrow 0, \quad n_t \rightarrow \infty.$$

For the sequences  $q(n_t)$  and  $k_1(n_t)$  there hold all the conditions of the case 1 and, consequently,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(q(n_t), k_1(n_t), 1) \leq 1.$$

From (11) we conclude that  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(n_t, k(n_t), 1) \leq 1$  and this contradicts (4). Thus in both cases 1 and 2 we proved that  $\lim_n \mu(n, k, 1) = 1$  and, consequently,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n, k, 1) = 1$ .

# References

- /1/ Erdős, P., and Spencer, J.: Probabilistic methods in combinatorics. Budapest 1974
- /2/ Erdős, P., and Hanani, H.: On a limit theorem in combinatorial analysis. Publ. Math. Debrecen 10, 10 - 13 (1963)
- /3/ Kusjurin, N. N.: Some recurrent and asymptotic estimations in the problem of coverings (in Russian). Mat. Zametki 26, 4, 603 - 611 (1979)

received: May 17, 1982

# Author's address:

cand. phys.-math. sci. N. N. Kusjurin  
 Scientific council of cybernetics  
 Academy of science of the USSR  
Moscow, USSR

Jean-Marie Laborde

## Charakterisierungen des Hyperwürfels

Kurzfassung: Wir stellen hier verschiedene Charakterisierungen des  $n$ -Würfels vor, die bisher gegeben worden sind.

Einführung: Nur drei reguläre konvexe Polytope existieren in allen Dimensionen, nämlich das Simplex, das Kreuzpolytop und sein duales Polytop - der  $n$ -Würfel.

Als Graph (Menge seiner Knotenpunkte und Kanten) erscheint das Simplex als der vollständige Graph  $K_n$ . Die Frage, die uns beschäftigt, lautet: Wie kann man einen Graphen als Graphen eines  $n$ -Würfels (oder kürzer als  $n$ -Würfel) erkennen?

Nach dem oben Gesagten kann man unmittelbar die folgende Definition eines  $n$ -Würfels geben:

Definition: Einen  $n$ -Würfel nennen wir den Graph  $C_n$  mit der Knotenpunktmenge  $\{0,1\}^n$ , wobei zwei Punkte genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die zwei entsprechenden  $n$ -Tupel sich in genau einer Koordinate unterscheiden.

### 1. Frühere Charakterisierungen des $n$ -Würfels

Um diese vorstellen zu können, benötigen wir folgende

Definitionen: Ein Graph  $G$  heißt

- schlicht, wenn er weder Schlingen noch Vielfachkanten besitzt,
- pear, wenn die Menge  $V(G)$  seiner Knotenpunkte derart in zwei Klassen zerlegt werden kann, daß jede Kante einen Knotenpunkt in der ersten Klasse mit einem Knotenpunkt in der zweiten verbindet,
- zusammenhängend, wenn je 2 Knotenpunkte durch aufeinanderfolgende Kanten miteinander verbunden sind; der Abstand  $d(x,y)$  zweier Knotenpunkte  $x$  und  $y$  ist dann die kleinste Kantenzahl in einer Kantenfolge, die  $x$  mit  $y$  verbindet; der Durchmesser  $\text{Diam}(G)$  ist der größtmögliche Abstand zweier Knotenpunkte von  $G$ .

Beim Studium der Hassegraphen von halbgeordneten Mengen gelang es Alvarez, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz (Alvarez /1/): Ein endlicher schlichter zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann der Hassegraph eines modularen Verbandes, wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(I)  $G$  ist ein paarer Graph.

(II) Es gibt zwei Knotenpunkte  $u_1$  und  $u_2$ , so daß

a)  $d(u_1, u_2) = \text{Diam}(G)$  und

b) für jeden Punkt  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , ist erfüllt: sind  $a, b$  zwei verschiedene Knotenpunkte im gleichen Abstand von  $u_i$ , so gilt:

$$\exists c \ d(u_i, a) = d(u_i, b) = d(u_i, c) + 1 \Rightarrow \exists! e \ d(u_i, e) = d(u_i, c) + 2.$$

(III) Ist  $C =$   ein Teilgraph von  $G$ , so ist  $C$  Teilgraph

von einem  $C_3$ , und dieser  $C_3$  ist Teilgraph von  $G$ .

Zusatz:  $G$  ist Hassegraph eines distributiven Verbandes, falls neben (I) - (III) auch die folgende notwendige Bedingung erfüllt ist:

(IV)  $K_{2,3}$  ist kein Teilgraph von  $G$ .

Aus der Bemerkung, daß die Booleschen Verbände genau die atomaren distributiven Verbände sind, folgt unmittelbar der

Satz: Ein endlicher schlichter zusammenhängender Graph  $G$  ist ein  $n$ -Würfel genau dann, wenn er den Bedingungen (I), (II), (III), (IV) und

(V)  $\forall x \exists! y \ d(x, y) = \text{Diam}(G)$  genügt.

Soweit ich weiß, ist aber das Problem der Charakterisierung der allgemeinen Hassegraphen noch nicht gelöst.

1977 wurde von Foldes folgendes elegante Resultat veröffentlicht:

Satz (Foldes /4/): Ein endlicher zusammenhängender schlichter Graph  $G$  ist genau dann ein  $n$ -Würfel, wenn er den Bedingungen genügt:

(I)  $G$  ist ein paarer Graph.

(II') Zwischen je zwei Knotenpunkten, die in einem Abstand von  $d$  liegen, gibt es genau  $d!$  Wege, die aus jeweils genau  $d$  Kanten bestehen.

1978 wurde danach die Frage gestellt: Kann man in der folgenden Charakterisierung die Bedingung (III') fortlassen?

Satz (Laborde /5/): Ein schlichter zusammenhängender Graph ist ein  $n$ -Würfel genau dann, wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(I')  $G$  besitzt kein Dreieck.

(II') Zwischen je zwei Knotenpunkten, die in einem Abstand von 2 liegen, gibt es genau 2 Wege, die aus jeweils genau 2 Kanten bestehen.

(III')  $G$  besitzt den Teilgraphen



nicht.

(V')  $G$  besitzt  $2^n$  Knotenpunkte und  $n2^{n-1}$  Kanten.

Verschiedene Charakterisierungen sind auch von MacFall gegeben worden, die im Prinzip aus den letzten geschlossen werden können. Eine der interessantesten ist vielleicht der

Satz (MacFall /3/): Ein endlicher zusammenhängender schlichter Graph  $G$  ist genau dann ein  $n$ -Würfel, wenn er den Bedingungen genügt:

(I)  $G$  ist ein paarer Graph.

(II'') Sind  $x, y$  zwei Knotenpunkte von  $G$ , so ist die Breite des Intervalls  $I(u, v)$  gleich  $\binom{d(u, v)}{\lfloor \frac{1}{2}d(u, v) \rfloor}$ , wobei

$$\text{Breite}(I(u, v)) = \max_{0 \leq \delta \leq d(u, v)} |\{x \mid d(u, x) = \delta \wedge d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)\}|.$$

Bemerkung: Man kann auch eine Arbeit von Bermond /2/ über die Charakterisierung der vertretenden Graphen der vollständigen  $n$ -partiten Hypergraphen  $L_{n-1}(K_{n*2}^n)$  nennen, aus der in einem speziellen Fall eine frühere lokale Charakterisierung des  $n$ -Würfels entnommen werden kann.

## 2. Neue Charakterisierungen

Mulder hat die folgenden Sätze angegeben:

Satz (Mulder /7/): Ein endlicher schlichter zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann ein  $n$ -Würfel, wenn er folgenden Bedingungen genügt:

(II'') Zwischen je zwei Knotenpunkten vom Abstand 2 gibt es genau zwei aus jeweils 2 Kanten bestehende Wege (daraus resultiert  $\Delta = \delta$ , d. h., G ist regulär).

(V'')  $\text{Diam}(G) = \Delta (= \delta)$ .<sup>1</sup>

Satz (Mulder /8/): Ein endlicher schlichter zusammenhängender Graph G ist ein n-Würfel genau dann, wenn er den Bedingungen genügt:

(II''') G ist regulär.

(IV') G ist ein Mittelgraph, das heißt: Sind u, v und w beliebige Knotenpunkte, so gibt es genau einen Knotenpunkt x, so daß x auf drei kürzesten Wegen von u nach v, v nach w und w nach u liegt.

Dazu wurde einerseits von Laborde und Rao Hebbare, andererseits von Mulder - wenn auch mit kleinen Varianten -, das folgende Resultat gegeben:

Satz (Laborde - Rao Hebbare (1980) /6/): Ein zusammenhängender Graph G ist genau dann ein n-Würfel, wenn er die Bedingungen erfüllt:

(II''') Zwei am selben Knotenpunkt inzidierende Kanten gehören einem einzigen Viereck an.

(V''') Die Minimalvalenz von G ist endlich, gleich n und  $|V(G)| = 2^n$ .

Skizze des Beweises: Man braucht folgende

Definition: Eine Menge von 4 Kanten wird ein Viereck genannt, wenn jede Kante mit genau zwei anderen inzidiert.

Daraus folgt unmittelbar, daß ein Viereck weder Vielfachkanten noch Schlingen enthält. Sei  $\mathcal{E}$  die Klasse der Graphen, die

(II''') genügen, so gilt die Aussage:

Ist G in  $\mathcal{E}$ , so ist G (mit Ausnahme einer Schlinge) ein schlichter Graph.

Seien x und y zwei adjazente Knotenpunkte, so entnehmen wir in Verbindung mit (II'''), daß die Valenz von y, das heißt die An-

---

<sup>1</sup>  $\Delta$  bzw.  $\delta$  bezeichnen den maximalen bzw. minimalen Grad eines Punktes im Graph G.



Zahl der zu  $y$  benachbarten Knotenpunkte, nur so groß wie die Valenz von  $x$  sein kann. Somit muß  $G$  ein regulärer Graph sein. Mit Hilfe einer Schichtenzerlegung von  $G$  erhält man die Ungleichung  $|V(G)| \leq 2^n$ .  $|V(G)| = 2^n$  gilt dann offenbar nur im Fall  $p$ -ärer Graphen. Weiter zeigt man mittels Induktion, daß die minimalen Teilgraphen aus  $\mathcal{L}$ , die  $p$  beliebige, am selben beliebigen Knotenpunkt inzidierende Kanten enthalten, sämtlich  $p$ -Würfel sind.

Daraus folgt unmittelbar der Satz.

### Literatur

- /1/ Alvarez, L.: Undirected graphs realizable as graph of modular lattices. *Canad. J. Math.* 17, 923 - 932 (1965)
- /2/ Bermond, J. C.: Graphes représentatifs de l'hypergraphe  $h$ -particomplet. In: Berge, C., and Ray-Chaudhuri, D. (Ed.): *Hypergraph Seminar: Ohio State Univ.* 1972. *Lecture Notes in Mathematics* 411, pp. 34 - 54. Berlin 1974
- /3/ MacFall, J.: Characterizing hypercubes. *Ann. Discrete Math.* 9, 237 - 241 (1980)
- /4/ Foldes, S.: A characterization of hypercubes. *Discrete Math.* 17, 155 - 159 (1977)
- /5/ Laborde, J. M.: Caractérisation locale du graphe du  $n$ -cube. En: Benzaken, C. (Ed.): *Actes du colloque algèbre appliquée et combinatoire*, Grenoble 1978. pp. 198 - 200. Grenoble 1978
- /6/ Laborde, J. M., and Rao Hebbare, S. P.: Another characterization of hypercubes. *Discrete Math.* (to appear)
- /7/ Mulder, H. M.:  $(0, \lambda)$ -Graphs and  $n$ -Cubes. *Discrete Math.* 28, 179 - 188 (1979)
- /8/ Mulder, H. M.:  $n$ -Cubes and Median Graphs. *Graph Theory* 4, 107 - 110 (1980)

eingegangen: 30. 03. 1981

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. J.-M. Laborde

CNRS-IMAG

BP 53 X,

38041 Grenoble Cédex, Frankreich

Bohdan Zelinka

Domatische Zahlen der Graphen

Dieser Vortrag stellt einige Resultate des Autors vor, die mit den domatischen Zahlen der Graphen zusammenhängen. Die Beweise kann man in der zitierten Literatur /2 - 5/ finden.

Eine dominante Menge in einem ungerichteten Graphen  $G$  ist eine Untermenge  $D$  der Knotenpunktmenge  $V(G)$  von  $G$  mit der Eigenschaft, daß zu jedem Knotenpunkt  $x \in V(G) - D$  mindestens ein Knotenpunkt  $y \in D$  existiert, der mit  $x$  verknüpft ist. Eine Zerlegung der Menge  $V(G)$ , deren alle Klassen dominante Mengen sind, heißt eine domatische Zerlegung von  $G$ . Die maximale Anzahl der Klassen einer domatischen Zerlegung von  $G$  heißt die domatische Zahl von  $G$  und wird durch  $d(G)$  bezeichnet. Dieser Begriff wurde von E. J. Cockayne und S. T. Hedetniemi /1/ eingeführt.

Das Wort "domatisch" steht in keinem Zusammenhang mit den kristallographischen Termini "Doma" und "domatisch". Es wurde aus den Wörtern "dominant" und "chromatisch" in ähnlicher Weise erzeugt, wie das Wort "Smog" aus den englischen Wörtern "smoke" (Rauch) und "fog" (Nebel).

Ein Graph  $G$  heißt domatisch kritisch, falls nach Entfernen einer beliebigen Kante aus  $G$  ein Graph  $G'$  entsteht mit  $d(G') < d(G)$ .

Ein Graph  $G$  heißt domatisch voll, falls  $d(G) = \delta(G) + 1$  gilt, wobei  $\delta(G)$  der minimale Grad eines Knotenpunktes von  $G$  ist.

Satz 1: Sei  $G$  ein domatisch kritischer Graph mit der domatischen Zahl  $d(G) = d$ . Dann ist die Knotenpunktmenge  $V(G)$  von  $G$  die Vereinigung der  $d$  paarweise elementfremden Mengen  $V_1, \dots, V_d$  mit der Eigenschaft, daß für zwei beliebige Zahlen  $i, j$  aus den Zahlen  $1, \dots, d$  der durch die Vereinigung  $V_i \cup V_j$  induzierte Untergraph  $G_{ij}$  von  $G$  ein paarar Graph mit den Knotenpunkt mengen  $V_i, V_j$  ist, dessen sämtliche Komponenten Sterne sind.

**Satz 2:** Ein regulärer domatisch voller Graph  $G$  mit  $n$  Knotenpunkten und mit der domatischen Zahl  $d$  existiert dann und nur dann, wenn  $n$  durch  $d$  teilbar ist; solch ein Graph ist auch domatisch kritisch. Seine Struktur ist die folgende: Die Knotenpunktmenge  $V(G)$  ist die Vereinigung der paarweise elementfremden Mengen  $V_1, \dots, V_d$ , von denen jede  $n/d$  Elemente enthält und die die Eigenschaft haben, daß der durch  $V_i \cup V_j$  (wo  $i, j$  zwei beliebige der Zahlen  $1, \dots, d$  sind) induzierte Untergraph von  $G$  ein regulärer Graph vom Grad 1 ist.

Eine dominante Menge im Graphen  $G$  heißt unteilbar, falls sie nicht Vereinigung zweier kleinerer dominanter Mengen von  $G$  ist. Die minimale Anzahl der Klassen einer Zerlegung von  $V(G)$ , deren alle Klassen unteilbare dominante Mengen sind, heißt die adomatische Zahl von  $G$  und wird durch  $ad(G)$  bezeichnet.

**Satz 3:** Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es einen Graphen  $G$ , für den

$$d(G) - ad(G) = n$$

gilt und der die Eigenschaft hat, daß jede Zerlegung seiner Knotenpunktmenge in unteilbare dominante Mengen entweder  $d(G)$  oder  $ad(G)$  Klassen besitzt.

Der Graph des  $n$ -dimensionalen Würfels ist der Graph, dessen Knotenpunktmenge aus der Menge aller  $n$ -dimensionalen Booleschen Vektoren besteht und in dem zwei Knotenpunkte dann und nur dann verknüpft sind, falls sie sich voneinander in genau einer Koordinate unterscheiden.

**Satz 4:** Sei  $k$  eine natürliche Zahl. Dann haben die Graphen der Würfel der Dimensionen  $2^k - 1$  und  $2^k$  beide die domatische Zahl  $2^k$ .

Die oben erwähnten Autoren haben bewiesen, daß  $d(G) \leq \delta(G) + 1$  gilt, wobei  $\delta(G)$  der minimale Grad eines Knotenpunktes von  $G$  ist. Die folgenden Sätze zeigen weitere Zusammenhänge zwischen  $\delta(G)$  und  $d(G)$  auf.

**Satz 5:** Für jede von Null verschiedene Kardinalzahl  $\alpha$  gibt es einen Graphen  $G$ , in dem jeder Knotenpunkt mindestens den Grad  $\alpha$  hat und dessen domatische Zahl gleich 2 ist.

**Satz 6:** Sei  $G$  ein endlicher ungerichteter Graph mit  $n$  Knotenpunkten und  $\delta(G)$  das Minimum der Grade der Knotenpunkte von  $G$ . Dann gilt

$$d(G) \geq \lceil n/(n - \delta(G)) \rceil.$$

**Satz 7:** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph, dessen Knotenpunktmenge die unendliche Kardinalzahl  $\alpha$  besitzt, sei  $\bar{G}$  sein Komplement. Wenn das Supremum der Grade der Knotenpunkte von  $G$  kleiner als  $\alpha$  ist, dann ist  $d(\bar{G}) = \alpha$ .

Die domatische Zahl kann auch für gerichtete Graphen definiert werden. Eine Untermenge  $D$  der Knotenpunktmenge  $V(G)$  eines gerichteten Graphen  $G$  heißt dominant, falls zu jedem Knotenpunkt  $x \in V(G) - D$  (nicht notwendig verschiedene) Knotenpunkte  $y, z$  aus  $D$  existieren, so daß  $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{zx}$  Kanten von  $G$  sind. Die domatische Zahl von  $G$  ist dann die maximale Anzahl der Klassen einer Zerlegung von  $V(G)$ , deren sämtliche Klassen dominante Mengen von  $G$  sind.

**Satz 8:** Sei  $G$  ein endlicher gerichteter Graph. Dann sind die folgenden zwei Behauptungen äquivalent:

- (1)  $G$  enthält einen Faktor  $G_0$ , der ein paarer Graph ist und keine Quelle und keine Senke enthält.
- (2)  $d(G) \geq 2$ .

**Folgerung 1:** Wenn der Graph  $G$  eine Quelle oder eine Senke hat, dann ist  $d(G) = 1$ .

**Folgerung 2:** Wenn alle Zyklen des Graphen  $G$  ungerade Länge haben, dann ist  $d(G) = 1$ .

**Satz 9:** Sei  $G$  ein gerichteter Graph mit  $n$  Knotenpunkten, in dem zwei beliebige Knotenpunkte durch höchstens eine Kante verbunden sind. Dann gilt  $d(G) \leq n/2$ .

**Satz 10:** Sei  $n$  eine gerade natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $k \leq n/2$  ein Turnier mit  $n$  Knotenpunkten, dessen domatische Zahl gleich  $k$  ist.

**Satz 11:** Sei  $G$  ein gerichteter Graph und  $r_1(G)$  (bzw.  $r_2(G)$ ) das Minimum der Ausgangsgrade (bzw. Eingangsgrade) der Knotenpunkte des Graphen  $G$ . Dann gilt

$$d(G) \leq 1 + \min(r_1(G), r_2(G)).$$

**Satz 12:** Sei  $G$  ein gerichteter Graph und  $d$  seine domatische Zahl. Dann gibt es zwei kantenfremde Faktoren  $G_1, G_2$  von  $G$  mit der Eigenschaft, daß jeder von diesen Graphen, als ein ungerichteter Graph betrachtet, die domatische Zahl  $d$  besitzt.

**Satz 13:** Die minimale Anzahl  $m(n, d)$  der Kanten eines gerichteten Graphen mit  $n$  Knotenpunkten und mit der domatischen Zahl  $d$  ist

$$m(n, d) = d(d-1)(k+1) - (d-r)(d-r-1),$$

wobei  $n = kd + r, 0 \leq r < d$ .

Man kann auch domatisch kritische und domatisch volle gerichtete Graphen ähnlich wie bei ungerichteten definieren. Es gelten analoge Sätze zu den Sätzen 1 und 2.

Ein Teil der hier erwähnten Resultate ist auch im Übersichtsartikel /6/ enthalten.

#### Literatur

- /1/ Coekayne, E. J., and Hedetniemi, S. T.: Towards a theory of domination in graphs. Networks 7, 247 - 261 (1977)
- /2/ Zelinka, B.: Domatically critical graphs. Czechoslovak. Math. J. 30, 486 - 489 (1980)
- /3/ Zelinka, B.: Domatic numbers of cube graphs. Math. Slovaca (im Druck)
- /4/ Zelinka, B.: Domatic numbers and degrees of vertices of a graph. Math. Slovaca (im Druck)
- /5/ Zelinka, B.: Domatic numbers of directed graphs. Czechoslovak. Math. J. (im Druck)
- /6/ Zelinka, B.: Domatic number and bichromaticity of a graph. In: Proceedings of the Graph Theory Conference, Łagów, February 1981. (im Druck)

eingegangen: 30. 03. 1981

#### Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. rer. nat. B. Zelinka  
Maschinenbau- und Textilhochschule  
Liberec, CSSR

Jerzy Topp

Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphsI. Introduction and preliminaries

In this note, a digraph is a directed graph  $D = (V_D, \Gamma_D)$ , as defined in the book /2/, where  $V_D$  is the vertex set of  $D$  (it may be infinite), and  $\Gamma_D$  is a function mapping  $V_D$  into  $P(V_D)$ , the set of all subsets of  $V_D$ . For a vertex  $v \in V_D$  let

$$\Gamma_D^{-1}(v) = \{u \in V_D : v \in \Gamma_D(u)\} \text{ and let } \Gamma_D^{-1}(T) = \bigcup_{v \in T} \Gamma_D^{-1}(v).$$

$\Gamma_D(T) = \bigcup_{v \in T} \Gamma_D(v)$  for  $T \in P(V_D)$ . Let  $A_D$  be an arc set of  $D$ , i.e.,

$$A_D = \bigcup_{v \in V_D} (\{v\} \times \Gamma_D(v)). \text{ By } V_D^0 \text{ and } A_D^0 \text{ we denote a set of terminal}$$

vertices and arcs in  $D$ , respectively, i.e.,

$$V_D^0 = \{v \in V_D : \Gamma_D(v) = \emptyset\}, A_D^0 = (V_D \times V_D^0) \cap A_D. \text{ A set } S \in P(V_D) \text{ is}$$

independent in  $D$  if for each  $v \in S$  is  $\Gamma_D(v) \cap S = \emptyset$ . A set

$S \in P(V_D)$  is absorbent in  $D$  if for each  $v \in V_D \setminus S$  is  $\Gamma_D(v) \cap S \neq \emptyset$ .

The set  $S$  is a kernel of  $D$  if it is both independent and absorbent in  $D$ .

The concept of a kernel of a digraph has been introduced in papers /4/ and /6/. A kernel is naturally linked with games; using a kernel it is possible, for instance, to characterize positions of a Nim-game on a digraph (see, for example /2/, Ch. 14, /5/, and /8/).

The notions not defined here can be found in /2/; we assume that loops are circuits.

In our further considerations we will refer to the following statements, proved earlier.

Theorem A (/6/): Every finite digraph with no circuit has a unique kernel.

Theorem B (/7/): Every locally finite digraph with no odd circuit has at least one kernel.

Theorem C (/8/): Every bipartite digraph has at least one kernel.

This paper deals with problems posed in /3/ (see also /1/). We intend to investigate some unary operations on digraphs and some necessary or sufficient conditions for the existence or uniqueness of kernels of digraphs formed by these operations from another digraph.

Let  $S, R, Q, T, L$  be unary operations which transform the digraph  $D = (V_D, \Gamma_D)$  onto the digraphs  $S(D), R(D), Q(D), T(D), L(D)$  such that  $V_{S(D)} = V_{R(D)} = V_{Q(D)} = V_{T(D)} = V_D \cup A_D$ ,

$V_{L(D)} = A_D$ , and the functions  $\Gamma_{S(D)}, \Gamma_{R(D)}, \Gamma_{Q(D)}, \Gamma_{T(D)}, \Gamma_{L(D)}$  are defined in the following way:

$$\Gamma_{S(D)}(x) = \begin{cases} \{x\} \times \Gamma_D(x) & \text{for } x \in V_D, \\ \{u\} & \text{for } x = (v, u) \in A_D, \end{cases}$$

$$\Gamma_{R(D)}(x) = \begin{cases} \Gamma_D(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D(x)) & \text{for } x \in V_D, \\ \{u\} & \text{for } x = (v, u) \in A_D, \end{cases}$$

$$\Gamma_{Q(D)}(x) = \begin{cases} \{x\} \times \Gamma_D(x) & \text{for } x \in V_D, \\ \{u\} \cup (\{u\} \times \Gamma_D(u)) & \text{for } x = (v, u) \in A_D, \end{cases}$$

$$\Gamma_{T(D)}(x) = \begin{cases} \Gamma_D(x) \cup (\{x\} \times \Gamma_D(x)) & \text{for } x \in V_D, \\ \{u\} \cup (\{u\} \times \Gamma_D(u)) & \text{for } x = (v, u) \in A_D, \end{cases}$$

$$\Gamma_{L(D)}(x) = \{u\} \times \Gamma_D(u) \text{ for } x = (v, u) \in A_D.$$

The digraphs  $S(D), Q(D), T(D)$ , and  $L(D)$  are called the subdivision digraph, the middle digraph, the total digraph, and the line digraph of the digraph  $D$ , respectively.



## II. Main results

1. We shall begin with the subdivision digraph

$S(D) = (V_D \cup A_D, \Gamma_{S(D)})$ . Obviously, the digraph  $S(D)$  is bipartite, therefore by Theorem C, we have

Theorem 1.1: The digraph  $S(D)$  has at least one kernel for every digraph  $D$ .

It is easy to see that we have

Theorem 1.2: The set  $V_D$  is a kernel of  $S(D)$ .

Theorem 1.3: Let  $D' = (V_D, \Gamma_D)$  be a maximal subdigraph of  $D$  such that  $V_D^0 = \emptyset$ . Then the set  $S = A_D \cup (V_D \setminus V_{D'})$  is a kernel of  $S(D)$ .

Proof: Certainly, the sets  $A_D$ ,  $V_D \setminus V_{D'}$  are independent in  $S(D)$ .

We have  $\Gamma_D(v) \subset V_D$  for  $v \in V_D$ , and  $A_D = \bigcup_{v \in V_D} (\{v\} \times \Gamma_D(v))$ ,

therefore  $\Gamma_{S(D)}(v, u) = \{u\} \subset V_D$  for  $(v, u) \in A_D$ . Then

$\Gamma_{S(D)}(A_D) \cap (V_D \setminus V_{D'}) = \emptyset$ . At the same time

$\Gamma_{S(D)}(V_D \setminus V_{D'}) \cap A_D = \emptyset$ . Hence, it follows that the set  $S$  is independent in  $S(D)$ . To prove that  $S$  is absorbent in  $S(D)$ , let us take:  $v \in V_D$  and  $(w, u) \in A_D \setminus A_{D'}$ . From the definition of  $D'$

we have  $\Gamma_D(v) \neq \emptyset$  for  $v \in V_D$ . Thus,  $\Gamma_{S(D)}(v) \cap A_D \neq \emptyset$  for  $v \in V_D$ . For  $(w, u) \in A_D \setminus A_{D'}$ , by the maximality of  $D'$  we have  $u \in V_D \setminus V_{D'}$ , and therefore  $\Gamma_{S(D)}(w, u) \cap (V_D \setminus V_{D'}) \neq \emptyset$ . This completes the proof that  $S$  is a kernel of  $S(D)$ .

Now, we have the following

Corollary 1.1: The set  $A_D$  is a kernel of  $S(D)$  if and only if the digraph  $D$  has no terminal vertices.

Corollary 1.2: The set  $V_D$  is a unique kernel of  $S(D)$  if and only if every subdigraph of  $D$  has got a terminal vertex.

Proof: The necessity follows from Theorem 1.3.

Conversely, let us assume that a set  $S \neq V_D$  is a kernel of  $S(D)$ . Define a subdigraph  $D' = (V_{D'}, \Gamma_{D'})$  of  $D$  such that  $V_{D'} = V_D \setminus S$ ;  $V_{D'} \neq \emptyset$ . We shall show that  $D'$  did not get a terminal vertex. Since  $S(D)$  is bipartite, and  $S$  is absorbent in  $S(D)$ , we get  $\Gamma_{S(D)}(v) \cap S = (\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap (S \cap A_D) \neq \emptyset$  for each  $v \in V_{D'}$ . Hence, there exists a vertex  $u$  in  $D$  such that  $u \in \Gamma_D(v)$  and  $(v, u) \in \Gamma_{S(D)}(v) \cap S$ . Since  $S$  is independent in  $S(D)$ , we get  $\Gamma_{S(D)}(v, u) = \{u\} \subset V_{D'}$ . Now, from this the result follows that  $\Gamma_{D'}(v) \neq \emptyset$  for each  $v \in V_{D'}$ , and therefore  $V_{D'}^0 = \emptyset$ , which is a contradiction to the fact that every subdigraph of  $D$  has got a terminal vertex. This completes the proof.

An immediate consequence of these theorems is the following

Corollary 1.3: Let  $D$  be a finite digraph. Then  $S(D)$  has a unique kernel if and only if  $D$  has no circuit.

2. For the digraph  $R(D) = (V_D \cup A_D, \Gamma_{R(D)})$  we have the following result:

Theorem 2: The set  $S = V_D^0 \cup (A_D \setminus A_D^0)$  is a unique kernel of  $R(D)$ .

Proof: It is easy to see that  $S$  is independent in  $R(D)$ . We shall show that  $S$  is absorbent in  $R(D)$ .

Certainly,  $\Gamma_{R(D)}(v, u) \cap S \neq \emptyset$  for  $(v, u) \in A_D^0$ . Now, if  $v \in V_D \setminus V_D^0$ , then we consider two cases:  $\Gamma_D(v) \cap V_D^0 \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_D(v) \cap V_D^0 = \emptyset$ . In the first case we immediately have  $\Gamma_{R(D)}(v) \cap S \neq \emptyset$ . In the second case we have  $\Gamma_D(v) \neq \emptyset$  and  $(v, u) \in \Gamma_{R(D)}(v) \setminus A_D^0$  for each  $u \in \Gamma_D(v)$ , and therefore also  $\Gamma_{R(D)}(v) \cap S \neq \emptyset$ . This proves that  $S$  is a kernel of  $R(D)$ .

It remains to prove that  $S$  is unique. Let  $S'$  be some kernel of  $R(D)$ . We shall show that  $S' = S$ .

Let us observe that  $V_D^0 \subset S'$  and  $A_D^0 \cap S' = \emptyset$ . Assume

$S' \cap (V_D \setminus V_D^0) \neq \emptyset$ . Since  $S'$  is independent in  $R(D)$ , it follows

$\Gamma_{R(D)}(v) \cap S' = \emptyset$ , i.e.,  $\Gamma_D(v) \cap S' = \emptyset$  and  $(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap S' = \emptyset$  for  $v \in S' \cap (V_D \setminus V_D^0)$ . Because  $S'$  is absorbent in  $R(D)$ , it holds  $\Gamma_{R(D)}(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap S' = \Gamma_D(v) \cap S' \neq \emptyset$ . We get a contradiction to the fact that  $\Gamma_D(v) \cap S' = \emptyset$  for  $v \in S' \cap (V_D \setminus V_D^0)$ . From this we conclude that  $S'$  is a subset of  $S$  and therefore  $S = S'$ . The proof is finished.

3. It is easy to see, that the vertex-set  $V_D$  of the digraph  $D$  is a kernel of the middle digraph  $Q(D) = (V_D \cup A_D, \Gamma_{Q(D)})$ . Here we shall show that  $V_D$  is a unique kernel of  $Q(D)$ . For this purpose it will be sufficient to show that the set  $V_D$  is a subset of any kernel  $S$  of  $Q(D)$ .

Assume  $V_D \not\subset S$ . Then  $\Gamma_{Q(D)}(v) \cap S = (\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap S \neq \emptyset$  for each  $v \in V_D \setminus S$ , and therefore there exists a vertex  $u$  in  $D$  such that  $u \in \Gamma_D(v)$ ,  $(v, u) \in S$ . Since  $S$  is independent in  $Q(D)$ , so we have  $u \notin S$ . Now, by analogous arguments, for the vertex  $u$  there exists a vertex  $w$  in  $D$  such that  $w \in \Gamma_D(u)$ ,  $(u, w) \in S$ . Thus,  $(u, w) \in \Gamma_{Q(D)}(v, u)$  and  $(v, u), (u, w) \in S$ . We get a contradiction to the fact that  $S$  is independent in  $Q(D)$ . Thus,  $V_D \subset S$ .

As a result of this we have

Theorem 3: The set  $V_D$  of vertices of the digraph  $D$  is a unique kernel of the middle digraph  $Q(D)$ .

4. To investigate kernels of the line digraph  $L(D) = (A_D, \Gamma_{L(D)})$  we shall need the following lemma:

Lemma 4.1: If  $R$  is a kernel of  $L(D)$  and  $(v, u) \in R$ , then  $\Gamma_D^{-1}(u) \times \{u\} \subset R$ .

Proof: Assume  $(v, u) \in R$  and  $(v', u) \notin R$  for some  $v' \in \Gamma_D^{-1}(u)$ .

Thus, by the properties of a kernel,  $\Gamma_{L(D)}(v, u) \cap R = \emptyset$  and

$\Gamma_{L(D)}(v', u) \cap R \neq \emptyset$ . We get a contradiction, because

$\Gamma_{L(D)}(v, u) = \{u\} \times \Gamma_D(u) = \Gamma_{L(D)}(v', u)$ .

**Theorem 4.1:** The line digraph  $L(D)$  has a kernel if and only if the digraph  $D$  has a kernel.

**Proof:** It is easy to verify that if  $S$  is a kernel of  $D$ , then the set  $R = (V_D \times S) \cap A_D$  is a kernel of  $L(D)$ .

Conversely, let  $R \subset A_D$  be a kernel of  $L(D)$ . Let us assume that  $S_R^+ = \{u \in V_D; (V_D \times \{u\}) \cap R \neq \emptyset\}$  and

$S_R^- = \{v \in V_D; (V_D \times \{v\}) \cap A_D = \emptyset \text{ and } (\{v\} \times V_D) \cap R = \emptyset\}$ . We shall show that the set  $S_R = S_R^+ \cup S_R^-$  is a kernel of  $D$ .

Proving that  $S_R$  is independent let us notice that if  $w \in S_R^+$ , then  $\Gamma_D^{-1}(w) \neq \emptyset$  and, by Lemma 4.1,  $\Gamma_D^{-1}(w) \times \{w\} \subset R$ . Assume

$\Gamma_D^{-1}(w) \cap S_R^+ \neq \emptyset$ . Then  $\Gamma_D^{-1}(u) \neq \emptyset$  and  $\Gamma_D^{-1}(u) \times \{u\} \subset R$  for

$u \in \Gamma_D^{-1}(w) \cap S_R^+$ . Now it is  $(u, w) \in \Gamma_{L(D)}(v, u)$  and  $(v, u), (u, w) \in R$

for  $v \in \Gamma_D^{-1}(u)$ . This contradicts the fact that  $R$  is independent in  $L(D)$ . Hence,  $\Gamma_D(v) \cap S_R^+ = \emptyset$  for  $v \in S_R^+$ . By the definition of

$S_R^-$  we have  $(V_D \times S_R^-) \cap A_D = \emptyset$  and therefore  $\Gamma_D(v) \cap S_R^- = \emptyset$  for

$v \in S_R^+ \cup S_R^-$ . Similarly, from  $(S_R^- \times V_D) \cap R = \emptyset$  it follows that

$\Gamma_D(u) \cap S_R^+ = \emptyset$  for  $u \in S_R^-$ . This proves that  $S_R$  is an independent set in  $L(D)$ .

Now, let  $v \in V_D \setminus S_R$ . We shall show that  $\Gamma_D(v) \cap S_R \neq \emptyset$ .

It is obvious if  $(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap R \neq \emptyset$ . Thus, it remains to prove that  $(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap R \neq \emptyset$  for  $v \in V_D \setminus S_R$ . We assume

$(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap R = \emptyset$  for some  $v \in V_D \setminus S_R$ . Then  $v \in S_R^+$  if

$(V_D \times \{v\}) \cap A_D \neq \emptyset$  or  $v \in S_R^-$  if  $(V_D \times \{v\}) \cap A_D = \emptyset$ , which is a contradiction to  $v \in V_D \setminus S_R$ .

This proves that  $S_R$  is a kernel of  $D$ .

The function  $\varphi$  which associates with every kernel  $S$  of  $D$  the kernel  $\varphi(S) = (V_D \times S) \cap A_D$  of  $L(D)$  is a bijection. In reality, if  $S_1, S_2$  are different kernels of  $D$  then we may assume that there exists a vertex  $v \in S_1 \setminus S_2$ . Then  $\Gamma_D(v) \cap S_1 = \emptyset$  and

$\Gamma_D(v) \cap S_2 \neq \emptyset$ . Hence  $(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap \varphi(S_1) = \emptyset$ ,  
 $(\{v\} \times \Gamma_D(v)) \cap \varphi(S_2) \neq \emptyset$  which implies  $\varphi(S_1) \neq \varphi(S_2)$ . Now, if  $R$   
 is a kernel of  $L(D)$ , and the sets  $S_R'$ ,  $S_R''$  are such as in proof  
 of the last theorem, then  $S_R' \cup S_R''$  is a kernel of  $D$  and  
 $\varphi(S_R' \cup S_R'') = (V_D \times \{u \in V_D; (V_D \times \{u\}) \cap R \neq \emptyset\}) \cap A_D = R$ . This  
 implies the following

Corollary 4.1: There exists a one-to-one correspondence between  
 the kernels of  $D$  and the kernels of  $L(D)$ .

5. The problem of kernels of the total digraph  $T(D) = (V_D \cup A_D, \Gamma_{T(D)})$  is very difficult and is far from being finally solved.  
 We shall give here only a few results concerning this problem.  
 We shall begin with the following two lemmas which can be  
 quickly established.

Lemma 5.1: The total digraph  $T(D)$  is locally finite (finite) if  
 and only if the digraph  $D$  is locally finite (finite).

Lemma 5.2: The total digraph  $T(D)$  has an odd circuit if and on-  
 ly if the digraph  $D$  has a circuit.

These facts in connection with Theorem A and B give the follo-  
 wing

Theorem 5.1: Let  $D$  be a finite (locally finite) digraph without  
 a circuit. Then the total digraph  $T(D)$  has a unique (at least  
 one) kernel.

Theorem 5.2: Let  $D$  be a digraph in which there exists a path  
 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{3n} = v_0$  containing all arcs of  $D$ , and such  
 that if  $v_i = v_j$  then  $i \equiv j \pmod{3}$ . Then  $D$  has at least one  
 kernel.

Proof: We shall show that if  $S_1 = \{v_0, v_3, \dots, v_{3(n-1)}\}$  and  
 $S_2 = \{(v_1, v_2), (v_4, v_5), \dots, (v_{3n-2}, v_{3n-1})\}$ , then the set  
 $S = S_1 \cup S_2$  is a kernel of  $T(D)$ . Proving that  $S$  is an independent  
 set in  $T(D)$ , we shall deal with four cases.

a. Suppose  $v_{3p} \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l})$  for some  $p$  and  $l$ . Then  $(v_{3l}, v_{3p}) \in A_D$ , and according to the assumption there exists a number  $t$  such that  $(v_{3l}, v_{3p}) = (v_t, v_{t+1})$ . Hence  $3l \equiv t \pmod{3}$  and  $3p \equiv t+1 \pmod{3}$ , which is impossible.

b. Analogously, the assumption  $(v_{3r+1}, v_{3r+2}) \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l+1}, v_{3l+2})$  implies  $v_{3l+2} = v_{3r+1}$ . Hence  $3l+2 \equiv 3r+1 \pmod{3}$ , which is impossible.

c. The assumption  $(v_{3l+1}, v_{3l+2}) \in \Gamma_{T(D)}(v_{3p})$  implies  $v_{3l+1} = v_{3p}$ . Hence  $3l+1 \equiv 3p \pmod{3}$ , which is impossible.

d. Similarly, from the assumption  $v_{3r} \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l+1}, v_{3l+2})$  it follows  $v_{3r} = v_{3l+2}$  and therefore  $3r \equiv 3l+2 \pmod{3}$ , which again is impossible.

Summing a - d, we obtain that  $S$  is an independent set in  $T(D)$ . To prove that  $S$  is absorbent in  $T(D)$ , it will be sufficient to notice that for any  $l$  such that  $0 \leq l \leq n-1$  we have:

$(v_{3l+1}, v_{3l+2}) \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l+1}) \cap S_2 \neq \emptyset$ ,  $v_{3l+3} \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l+2}) \cap S_1 \neq \emptyset$ ,  
 $(v_{3l+1}, v_{3l+2}) \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l}, v_{3l+1}) \cap S_2 \neq \emptyset$ , and  
 $v_{3l+3} \in \Gamma_{T(D)}(v_{3l+2}, v_{3l+3}) \cap S_1 \neq \emptyset$ .

The proof is finished.

**Corollary 5.1:** Let  $C_k$  be a circuit of length  $k$ . Then  $T(C_k)$  has a kernel if and only if  $k = 3n$  for some number  $n$ .

**Proof:** Let  $C_k = (V, \Gamma)$ , where  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $\Gamma(v_k) = \{v_1\}$  and  $\Gamma(v_i) = \{v_{i+1}\}$  for  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Let  $S$  be a kernel of  $T(C_k)$ . Then  $S \cap V \neq \emptyset$  and without loss of generality, we can suppose that  $v_1 \in S$ . This implies  $S = \{v_1, (v_2, v_3), v_4, \dots, v_{3l+1}, (v_{3l+2}, v_{3l+3})\}$  and  $v_{3l+3} = v_k$ . Thus  $k = 3(l+1)$ .

The remaining part of the corollary follows from Theorem 5.2.

From Corollary 5.1 it is obvious that there are digraphs  $D$  such that  $D$  has or has not a kernel and the total digraph  $T(D)$  has or has not a kernel.

## References

- /1/ Behzad, M., and Harary, F.: Which directed graphs have a solution? Math. Slovaca 27, 37 - 42 (1977)
- /2/ Berge, C.: Graphs and Hypergraphs. Amsterdam 1973
- /3/ Harary, F., and Richardson, M.: A matrix algorithm for solution and r-bases of a finite irreflexive relation. Navel Res. Logist. Quart. 6, 307 - 314 (1959)
- /4/ König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936
- /5/ Kummer, B.: Spiele auf Graphen. Berlin 1979
- /6/ von Neumann, J., and Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton 1947
- /7/ Richardson, M.: Solutions of irreflexive relations. Ann. of Math. 58, 573 - 590 (1953)
- /8/ Topp, J.: Asymmetric games on digraphs. (to appear)

received: March 30, 1981

## Author's address:

Dr. J. Topp  
Institute of Mathematics  
Gdańsk Technical University  
ul. Majakowskiego 11/12  
80-233 Gdańsk, Poland





Karl Weber

Random graphs - a survey

Our aim is to give a survey about some concepts of random graphs. The paper contains the following three parts:

1. Properties of almost every graph,
2. Random spanning subgraphs of a given graph,
3. Random induced subgraphs of a given graph.

The first direction is the traditional one. The investigations were initiated by the famous paper of Erdős and Renyi /10/. They considered the probability space  $\mathcal{G}(n, M)$  consisting of all  $\binom{N}{M}$  graphs,  $N = \binom{n}{2}$ , with a fixed set of  $n$  labeled vertices and  $M = M(n)$  edges. All those graphs have the same probability  $P(G) = 1/\binom{N}{M}$ . Erdős and Renyi asked how the typical properties  $Q$  of such graphs depend on the number  $M$  of edges and gave many answers. The word "typical" means that asymptotically all  $\binom{N}{M}$  graphs have the property  $Q$ , i.e.  $P(G \text{ has } Q) \rightarrow 1$  as  $n \rightarrow \infty$ .

Closely related with  $\mathcal{G}(n, M)$  is the probability space  $\mathcal{G}(n, p)$  consisting of all graphs with  $n$  labeled vertices. The probability of a graph with  $M$  edges is  $P(G) = p^M(1-p)^{N-M}$ . (The edges of the random graph  $G$  are chosen independently and with the same probability  $p$ .) The second direction is a generalization of the first one. Let  $\Gamma = (V, E)$  be a fixed graph with  $n$  labeled vertices and  $N'$  edges. The probability space  $\mathcal{G}(\Gamma, p)$  consists of all  $2^{N'}$  spanning subgraphs of  $\Gamma$ . (A subgraph  $G = (V, E')$ ,  $E' \subseteq E$ , is called spanning.) The probability  $P(G)$  of a spanning subgraph  $G$  with  $M$  edges is  $p^M(1-p)^{N'-M}$ . Obviously it holds  $\mathcal{G}(n, p) = \mathcal{G}(C_n, p)$ , where  $C_n$  is the complete graph. The definition of  $\mathcal{G}(\Gamma, M)$  is evident. There are few results for arbitrary graphs  $\Gamma$ . We only know estimates of  $P(G \text{ is connected})$  (cf. /21/). Burton /6/ and Erdős and Spencer /14/ determined the limit of  $P(G \text{ is connected})$  in the

space  $g(E^k, p)$ , where  $E^k$  is the  $k$ -cube<sup>1</sup>. The question how the minimization of Boolean functions  $f$  depends on the number  $m = |\{a: f(a) = 1\}|$  leads us to the third model of random graphs. As above let  $\Gamma = (V, E)$  be a fixed graph with  $n$  labeled vertices. The probability space  $g^*(\Gamma, p)$  consists of all  $2^n$  induced subgraphs of  $\Gamma$ . (A subgraph  $G = (V', E')$  is called induced if  $E'$  contains exactly those edges of  $E$  which join two vertices in  $V'$ .) The probability of an induced subgraph  $G$  with  $m$  vertices is  $P(G) = p^m(1-p)^{n-m}$ . (The vertices of  $G$  are chosen independently and with the same probability  $p$ .) The definition of  $g^*(\Gamma, m)$  is now evident again. Let  $\Gamma = E^k$ . We can identify the spanning subgraphs of  $E^k$  with Boolean functions of  $k$  arguments. We have studied minimization parameters as the length of minimal disjunctive normal forms, the number of irredundant DNF, the number of prime implicants etc. of random Boolean functions. Glagoliev /16/ and Saposhenko /24/, /25/, and /26/ considered only the case  $p = 1/2$ . We could generalize many of their results. Toman /28/ investigated the number of components of random Boolean functions for arbitrary fixed probability  $p$ ,  $0 < p < 1$ . In all probability spaces defined above we say that almost every (a.e.) graph  $G$  has the property  $Q$  if  $P(G \text{ has } Q) \rightarrow 1$  as  $n \rightarrow \infty$ .

We use the following notations too. (All limits, asymptotics etc. are considered as  $n \rightarrow \infty$ .) We use Landaus notation  $O(g(n))$  for a term that, when divided by  $g(n)$ , remains bounded. Similarly,  $o(g(n))$  denotes a term that, when divided by  $g(n)$ , tends to 0. We write  $g(n) \asymp h(n)$  if  $g(n) = O(h(n))$  and  $h(n) = O(g(n))$  and  $g(n) \sim h(n)$  if the quotient  $g(n)/h(n)$  tends to 1 ( $g(n)$  and  $h(n)$  are of the same order or  $g(n)$  and  $h(n)$  are asymptotically equal, respectively). We write  $g(n) \leq h(n)$  if  $g(n) \leq h(n) (1+o(1))$  and  $g(n) \leq h(n)$  if  $g(n) = O(h(n))$ .  $\varphi = \varphi(n)$  denotes a function tending arbitrary slowly to

---

<sup>1</sup>  $E^k$  has the  $2^k$  vertices  $(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a_i = 0, 1$ , and two vertices are adjacent if and only if they differ in exactly one coordinate, i.e.  $E^k$  has  $k2^{k-1}$  edges.

infinity. For any real  $x$  let  $\lfloor x \rfloor$  and  $\lceil x \rceil$  denote the greatest integer not greater than  $x$  and the least integer not less than  $x$ , respectively. Furthermore  $\ln n$  and  $\log n$  denote the natural and the dual logarithm, respectively.

## 1. Properties of almost every graph

### 1.1. Properties of a.e. $G \in \mathcal{G}(n, 1/2)$

All graphs  $G \in \mathcal{G}(n, 1/2)$  have the same probability

$P(G) = 1/2^N$ ,  $N = \binom{n}{2}$ . Thus, in this case a.e. graph  $G$  has a property  $Q$  means that asymptotically all  $2^N$  labeled  $n$ -graphs satisfy this property  $Q$ , i.e.  $Q$  is a typical property of graphs. Let us list some typical properties of graphs: Almost every graph  $G$

- is nonplanar,
- is connected,
- has diameter and radius 2,
- has a 1-factor for even  $n$  (Erdős and Renyi /12/),
- is Hamiltonian (Moon /22/),
- has the trivial automorphism group consisting only of the identity (Erdős and Renyi /11/),
- has a unique vertex of minimum degree  $\delta(G)$  and a unique vertex of maximum degree  $\Delta(G)$  (Erdős and Wilson /15/, correction by Bollobás /3/),
- satisfies  $k'(G) = \delta(G)$ , where  $k'$  is the cover index (Anderson /1/),
- satisfies  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , where  $\chi'$  is the chromatic index (Erdős and Wilson /15/),
- satisfies  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$ , where  $\kappa$  is the vertex connectivity and  $\lambda$  is the edge connectivity (Bollobás /3/),
- has more than  $\frac{N}{2}(1-\varepsilon)$  and no more than  $\frac{N}{2}(1+\varepsilon)$  edges, where  $\varepsilon > 0$  is arbitrary fixed.

Finally we remark that Bollobás /3/ found very precise estimates for the degrees  $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta$  of a.e. graph. Some of the properties are very easy to prove. As an example we show that for a.e.  $G$  the diameter  $D(G)$  and the radius  $R(G)$  both are equal to two:

$P(\text{two fixed vertices of } G \text{ are not connected by a path of length } 2) \leq (1 - (1/2)^2)^{n-2} = (3/4)^{n-2},$

$P(\text{there exist 2 vertices in } G \text{ which are not connected by a path of length } 2) \leq \binom{n}{2} (3/4)^{n-2} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$

Actually we calculated the expectation  $EX$  for the random variable  $X$  which denotes the number of pairs of vertices without connecting path of length 2. By Markov's inequality

$P(X \geq tEX) \leq 1/t$  we obtain  $P(X = 0) \rightarrow 1$  if  $EX \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .

Hence,  $D(G) \leq 2$ .

On the other hand  $P(\text{there is a vertex in } G \text{ joined with all other vertices}) \leq n(1/2)^{n-1} \rightarrow 0$ . And thus,  $R(G) > 1$ .

If we want to show that a random variable  $X$  is large or only nonzero for a.e. graph then we use Chebyshev's inequality

$P(|X - EX| \geq t) \leq D^2X/t^2$  where  $D^2X$  is the variance of  $X$ . An immediate consequence of this inequality is that, when the number of edges in  $G$  is denoted by  $X(G)$ ,

$(N/2) - \varphi(n)\sqrt{N} \leq X(G) \leq (N/2) + \varphi(n)\sqrt{N}$  for a.e.  $G$ ,  
 $\varphi(n) \rightarrow \infty$  arbitrary slowly as  $n \rightarrow \infty$  ( $EX = N/2$ ,  $D^2X = N/4$ ).

In particular, often it is used  $P(X = 0) \leq D^2X/(EX)^2$  what implies  $P(X \geq 1) \rightarrow 1$  if  $X = 0, 1, 2, \dots$ ,  
 $D^2X = o((EX)^2)$ , i.e.  $EX^2 = (EX)^2(1+o(1))$ .

## 1.2. Threshold functions

One says that  $A = A(n)$  is a threshold function for the property  $Q$  if

$$P(G \text{ has } Q) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{as } n \rightarrow \infty \text{ if } M = o(A), \\ 1 & \text{as } n \rightarrow \infty \text{ if } A = o(M), \end{cases}$$

where the probability is considered in the space

$g(n, M)$ ,  $M = M(n)$ . We will also say that the property  $Q$  appears at  $M = A(n)$ . We mention some well-known results: Nonplanarity appears at  $M = n$  (Erdős and Rényi /10/). Connectedness, the existence of a 1-factor (for even  $n$ ), and the Hamiltonicity appear at  $M = n \ln n$  (Erdős and Rényi /9, 12/ and Pósa /23/).

In fact, there are essentially sharper thresholds for this properties. They show that many properties appear rather abruptly. Erdős and Renyi /9/ proved that for  $M = (1/2)(n \ln n + cn)$ , where  $c$  is a constant,  $P(G \text{ is connected}) \rightarrow \exp(-e^{-c})$  as  $n \rightarrow \infty$ . (One can find the proof also in /2/, /27/, and /28/.) It follows that

$$P(G \text{ is connected}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{as } n \rightarrow \infty \text{ if } M = (n/2) \ln n + \varphi(n)n, \\ 0 & \text{as } n \rightarrow \infty \text{ if } M = (n/2) \ln n - \varphi(n)n, \end{cases}$$

where  $\varphi(n) \rightarrow \infty$  arbitrary slowly as  $n \rightarrow \infty$ . Now we give the corresponding sharp thresholds for the other properties mentioned above. (All limits are considered as  $n \rightarrow \infty$  and  $\varphi(n)$  denotes a function tending to infinity arbitrary slowly as  $n \rightarrow \infty$ .)

$$P(G \text{ has a 1-factor} \mid n \text{ even}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{if } M = (n/2) \ln n + \varphi(n)n, \\ 0 & \text{if } M = (n/2) \ln n - \varphi(n)n, \end{cases}$$

(Erdős and Renyi /12/).

$$P(G \text{ is Hamiltonian}) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{if } M = (n/2)(\ln n + \ln \ln n + \varphi(n)), \\ 0 & \text{if } M = (n/2)(\ln n + \ln \ln n - \varphi(n)), \end{cases}$$

(Korshunov /19/).

$$P(G \text{ is planar}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } M = (n/2) + \varphi(n)\sqrt{n}, \\ g(c) & \text{if } M = (n/2) + c\sqrt{n}, \\ 1 & \text{if } M = c'n, \end{cases}$$

where  $c$  and  $c'$  are constants,  $c' < 1/2$ , and  $g(c)$  is unknown except that  $g(c) > 0$  for  $-\infty < c$  and  $g(c) \rightarrow 1$  as  $c \rightarrow \infty$  (Erdős and Renyi /10/). These results with exception of the last one concerning planarity hold in  $\mathcal{G}(n, p)$  with  $p = M/N$  too.

With respect to the proof technique it is interesting that the sharp threshold for Hamiltonity can not be obtained by showing  $EX \rightarrow \infty$  and  $D^2 X = o((EX)^2)$  (what implies  $P(X = 0) \rightarrow 0$ ). Let  $X(G)$  be the number of Hamilton cycles. Wright /32/ showed that for  $M/n \rightarrow \infty$ ,  $M = o(n^{3/2})$  the ratio  $EX^2/(EX)^2$  tends to infinity as  $n \rightarrow \infty$ .

1.3. The hierarchy of graph theoretic parameters by Cockayne et al. (cf. /7/)

Many authors investigated relations between various parameters of the following hierarchy

$$ir \leq \gamma \leq i \leq B \leq \Gamma \leq IR.$$

We determined the domination number  $\gamma$ , the independent domination number  $i$ , and the independence number  $B$  for a. e.

$G \in \mathcal{G}(n, p)$ ,  $p$  fixed. The result concerning  $B$  improves the estimate obtained by Korshunov /18/, but Korshunov considered also the case  $p = p(n) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . The paper of Bollobás and Erdős /5/ contains results concerning the independence number too. Before listing our results we will remember the definitions of the parameters mentioned above.

A vertex  $v \in V' \subseteq V$  is redundant if its closed neighbourhood ( $v$  and all vertices adjacent to  $v$ ) is contained in the union of closed neighbourhoods of vertices of  $V' - \{v\}$ . The lower and upper irredundance numbers  $ir(G)$  and  $IR(G)$  are the minimum and maximum cardinalities respectively taken over all maximal sets of vertices having no redundancies. The domination number  $\gamma(G)$  and the upper domination number  $\Gamma(G)$  are the minimum and maximum cardinalities respectively taken over all minimal dominating sets. The independent domination number  $i(G)$  and the independence number  $B(G)$  are the minimum and maximum cardinalities respectively taken over all maximal independent sets of vertices of  $G$ .

We proved the following (cf. /30/):

For a. e.  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ ,  $p$  fixed,  $0 < p < 1$  (for brevity  $\log$  denotes the logarithm with base  $1/p$ ) it holds

$$k_1 \leq \gamma \leq k_1 + 1, \quad k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + 2,$$

$$\gamma \leq i \leq \gamma + 1, \quad k_2 \leq B \leq k_2 + 1,$$

where  $k_1 = \lfloor \log n - 2\log \log n + \log \log e \rfloor + 1$ ,

$$k_2 = \lfloor 2(\log n - \log \log n + \log e) \rfloor - 1.$$

It is not possible to strengthen these results, since there are subsequences  $n_j$  and  $n_l$  of natural numbers such that for

a. e.  $G_{n_j}$  ( $G_{n_1}$ ) equality holds at the lower (upper) bound. The last result in this direction is:  
 For  $k_1 + 1 < k < k_2 + 1$  there exist independent dominating (maximal independent)  $k$ -sets. For  $k < k_1 + 1$  or  $k_2 + 1 < k$  there do not exist independent dominating sets.  
 We do not know nontrivial estimates for the parameters  $ir$ ,  $\Gamma$ , and  $IR$  for a. e. graph.

#### 1.4. Graph coverings by special subgraphs

Let  $\mathcal{K}$  be a class of certain graphs. The vertex (edge)- $\mathcal{K}$ -covering number  $\alpha(G)$  is the minimum number of subgraphs of  $G$  belonging to  $\mathcal{K}$  and covering the vertex (edge) set of  $G$ . We discuss covering numbers for a. e.  $G \in \mathcal{G}(n, 1/2)$ .

First let us consider vertex coverings

- by edges:  $\alpha(G) = \lceil n/2 \rceil$   
 (it follows from the existence of a 1-factor),
- by stars:  $\alpha(G) = \gamma(G)$   
 (the value of the domination number see above),
- by cliques:  $\alpha(G) = \chi(\bar{G}) \sim n/2 \log n$   
 ( $\chi(G)$  denotes the chromatic number, Korshunov /20/ proved the upper bound only recently, see also the interesting paper /17/ of Grimmet and McDiarmid),
- by paths
- by cycles
- by trees

$$\left. \begin{array}{l} \text{by paths} \\ \text{by cycles} \\ \text{by trees} \end{array} \right\} \alpha(G) = 1$$

(we remember that a. e. graph is Hamiltonian).

It is true that  $\alpha(G) = \lceil n/k \rceil$  for a. e.  $G$  if we cover the vertex set of  $G$  by trees of order  $\leq k$ .

Now we discuss edge coverings

- by paths:  $\alpha(G) \geq n/4$ ,  
 (We have only this trivial lower bound. It is interesting to remember the conjecture of Gallai that for the greatest path covering number of a connected  $n$ -graph it holds  $\alpha(n) = \lceil n/2 \rceil$ . The best result in this direction is  $\alpha(n) \leq \lceil 3n/4 \rceil$  proved by Donald /8/.)

- by stars:  $\alpha(G) = n - \beta(G)$   
(the value of  $\beta$  see above),
- by trees:  $\alpha(G) \sim n/4$ ,  
(For every graph  $G$  it is  $\alpha(G) = Y(G)$ , where  $Y$  denotes the arboricity. By a result of Nash-Williams it holds  $Y(G) = \max [q_k/(k-1)]$  taken over  $2 \leq k \leq n$ , where  $q_k$  is the maximum number of edges in a subgraph of  $G$  of order  $k$ . Bollobás [3] proved that every subgraph of order  $k \times n$  of a. e. graph  $G$  has asymptotically  $\binom{k}{2}/2$  edges.)
- by cliques:  $n^2/8 \log^2 n \leq \alpha(G) \leq (1 \ln 2) n^2 \log \log n / 4 \log^2 n$ ,  
(The lower bound is trivial again, since every clique contains no more than  $\binom{2 \log n}{2}$  edges. We obtain the upper bound for a greedy algorithm.)
- by cycles:  $\alpha(G) \geq n/4$ .  
(We have only this trivial lower bound.)

## 2. Random spanning subgraphs of a given graph

The probability space  $\mathcal{G}(\Gamma, p)$  consists of all  $2^{N'}$  spanning subgraphs  $G$  of the given graph  $\Gamma$  with  $N'$  edges and  $n$  vertices. Put  $P_{\text{con}} = P(G \text{ is connected})$ . Lomonosov and Poleski [21] gave the following upper bound for  $P_{\text{con}}$ :

$$P_{\text{con}} \leq (1 - (1-p)^{2N'/n})^{n-1}.$$

This bound provides precise thresholds for connectivity in the cases  $\Gamma = C_n$  and  $\Gamma = K^k$ . In  $\mathcal{G}(C_n, p)$  we obtain

$$P_{\text{con}} \leq (1 - (1-p)^{n-1})^{n-1},$$

and this bound implies  $P_{\text{con}} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  for  $p = \frac{\ln n}{n} - \frac{\varphi(n)}{n}$ ,  $\varphi(n) \rightarrow \infty$  arbitrary slowly as  $n \rightarrow \infty$ .

For  $\mathcal{G}(K^k, p)$ ,  $p = \frac{1}{2} - \frac{\varphi(k)}{k}$ ,  $\varphi(k) \rightarrow \infty$  as  $k \rightarrow \infty$ , we have

$$P_{\text{con}} \leq (1 - (1-p)^{2k^{k-1}/2^k})^{2^{k-1}} = (1 - (1-p)^k)^{2^{k-1}} \leq e^{-(2(1-p))^k/2} \rightarrow 0$$

as  $k \rightarrow \infty$ .



Burtin /6/ showed that  $P_{\text{con}} \rightarrow 1$  as  $k \rightarrow \infty$  if  $p > 1/2$ . Erdős and Spencer /14/ proved that for  $p = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2k}$

$$P_{\text{con}} \rightarrow \exp(-e^{-\epsilon}) \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

Moreover, they discussed (without proofs) the evolution of  $q(E^k, p)$  for increasing  $p$ .

### 3. Random induced subgraphs of a given graph

In this paper we confine ourselves to the case that the given graph  $\Gamma$  is the  $k$ -cube  $E^k$ . Then we can interpret the elements  $G$  of  $g^*$  as Boolean functions  $f$  of  $k$  arguments. We are interested in graph theoretical properties and in properties concerning minimization of random Boolean functions.

#### 3.1. The case $p = 1/2$

A. e.  $f \in g^*(E^k, 1/2)$  has a property  $Q$  means that asymptotically all  $2^n$ ,  $n = 2^k$ , Boolean functions of  $k$  variables have  $Q$ . Thus in this case we can speak of typical properties in the usual sense. For a. e.  $f$

- there is one large component with asymptotically  $2^{k-1}$  points and  $< \varphi(k)$  isolated points,  $\varphi(k) \rightarrow \infty$  arbitrary slowly as  $k \rightarrow \infty$ . Other components do not exist (Saposhenko /24/).

There is easily shown the preciser result

$P(X=t) \rightarrow e^{-1/2} / 2^t t!$  as  $k \rightarrow \infty$ , where  $X$  is the number of isolated points. As an immediate consequence we have  $P(f \text{ is connected}) \rightarrow 1/\sqrt{e}$  as  $k \rightarrow \infty$ .

- $D(f) = k + 1$ , where  $D$  denotes the diameter (Saposhenko /26/),
- $k - 2 \leq R(f) \leq k - 1$ , where  $R$  is the radius (Saposhenko /24/).

In the minimization theory one is interested in minimal coverings of the point set of  $f$  by special subgraphs of  $f$ , namely by subcubes of  $E^k$ . "Minimal" here means by a minimum number of subcubes. (In algebraic manner of speaking coverings of  $f$  by subcubes contained in  $f$  are called disjunctive normal forms.) This minimum number is denoted by  $l(f)$ . By  $s(f)$  we denote the

number of maximal subcubes of  $f$ . A covering of  $f$  containing only maximal subcubes of  $f$  is called irredundant if no member of the covering may be covered by the other ones. Let  $\tau(f)$  be the number of irredundant coverings of  $f$  and  $l^+(f)$  the maximal number of subcubes in an irredundant covering of  $f$ . In order to see that  $l, s, \tau$ , and  $l^+$  are important parameters characterizing the complexity of general minimization methods, we remember the process of minimization: First determine all maximal subcubes, second determine all irredundant coverings, and third find the minimal coverings among the irredundant ones. In the years between 1967 and 1972 Glagoliev and Saposhenko obtained the following estimations for a. e.  $f$ :

- $2^k / \log k \log \log k \leq l(f) \leq 2^k / \log k$  (Glagoliev /16/, Saposhenko /25/)
- $s(f) = k^{(1-o(1))} \log \log k \cdot 2^k$  (Glagoliev /16/)
- $\log \tau(f) \sim 2^{k-1} \log k \log \log k$  (Glagoliev /16/, Saposhenko /24/)
- $l^+(f) \sim 2^{k-1}$  (Saposhenko /24/).

The main tool in proving these bounds consists in estimation of  $EX$  and  $D^2X$  for certain subsidiary parameters  $X$  and using Markov's and Chebyshev's inequalities. Such parameters are in particular the number of  $d$ -dimensional subcubes and the number of maximal  $d$ -dimensional subcubes of  $f$ .

### 3.2. The components of random Boolean functions

Now we describe the components of a. e.  $f \in \mathcal{G}^*(\mathbb{F}^k, p)$  for fixed  $p$ ,  $0 < p < 1$ . The following assertions are valid for a. e. function  $f$ :

- If  $p > 1/2$  then  $f$  is connected.
- If  $0 < p < 1/2$  then there is one giant component containing  $\sim p 2^k$  points and  $\sim p(2(1-p))^k$  components of order  $\leq \lceil 2 / \log \frac{1}{1-p} \rceil - 1$ . (Asymptotically all components are isolated points.) (Toman /29/)

One can strengthen this result in the following way: For

$$p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c}{k} \right) \text{ we have } P(X=r) \rightarrow \frac{(e^{-c/2})^r}{r!} \exp(-e^{-c/2}) \text{ as } k \rightarrow \infty,$$

1. e. the number of isolated points is Poisson-distributed with mean value  $\lambda = e^{-c}/2$ . In particular  $P(X=0) = P(f \text{ is connected}) \rightarrow \exp(-e^{-c}/2)$ .

This is a good example in order to see in which sense the work in  $g^*(E^k, p)$  is more complicated than those in  $g(n, p)$ . Let the vertices of the  $n$ -graph labeled with  $1, 2, \dots, n$ . Let  $X$  denote the number of isolated points.

Then  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , where  $X_i = 1$  if point  $i$  is isolated and  $X_i = 0$

otherwise. Set  $S_\nu = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\nu \leq n} P(X_{i_1} = 1 \wedge \dots \wedge X_{i_\nu} = 1)$ .

If  $S_\nu \rightarrow \frac{\lambda^\nu}{\nu!}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , then  $P(X=t) \rightarrow \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$  as  $n \rightarrow \infty$  (cf. /27/). In  $g(n, p)$  we can easily compute

$S_\nu = \binom{n}{\nu} (1-p)^{n\nu - \binom{\nu+1}{2}} \rightarrow (e^{-c})^\nu / \nu!$  for  $p = \frac{\ln n}{n} + \frac{c}{n}$ . Obviously

one can not determine  $S_\nu$  so easily in the space  $g^*(E^k, p)$  (though an estimation is not difficult) since the points of the  $k$ -cube are connected in a special way.

We also considered the case  $p = p(k) \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ , but we do not know the threshold for the property " $f$  has a giant component with  $\sim p2^k$  points". By the results of Toman it is only clear that this threshold lies between  $p = 1/8k$  and  $p = o(1)$ .

### 3.3. Minimization parameters for random Boolean functions

We have the following bounds for the parameter  $l(f)$  for a. e.

$f \in g^*(E^k, p)$

$$(1) \quad pk^{d/2^d-1} \rightarrow 0: \quad p2^{k-d+1} \leq l(f),$$

$$(2) \quad pk^{d/2^d-1} \rightarrow \infty: \quad l(f) \leq p2^{k-d}(\ln 2 + 1),$$

$$(3) \quad pk^{1/2^d-1} \rightarrow \infty: \quad l(f) \leq p2^{k-d}$$

as  $k \rightarrow \infty$ ,  $d = 1, 2, \dots$ ,  $p = p(k)$ ,  $0 < p < 1$ .

For  $p$  with (1) subcubes of dimension  $\geq d$  cover only  $o(p2^k)$  points. For  $p$  with (2)  $\binom{k}{d} p^{2^d-1} \rightarrow \infty$ , and asymptotically  $p2^n$  points are covered by asymptotically  $\binom{k}{d} p^{2^d-1}$   $d$ -dimensional subcubes. Every greedy algorithm over the set of  $d$ -dimensional subcubes provides a covering containing asymptotically no more than the number of subcubes mentioned above (for the method cf. /25/). A set of  $\sim p2^{k-d}$  pairwise disjoint  $d$ -dimensional subcubes of  $f$  we will call an optimal  $d$ -matching. For  $p$  with (3) we are able to show the existence of an optimal  $d$ -matching.

Let us consider some examples.

$pk \rightarrow 0$ :  $l(f) \sim p2^k$  (by (1)),

$pk \rightarrow \infty$  and  $pk^{2/3} \rightarrow 0$ :  $l(f) \sim p2^{k-1}$  (by (1) and (3)).

This is the only nontrivial asymptotic for  $l$  which we know.

$pk^{2/3} \rightarrow \infty$  and  $pk^{3/7} \rightarrow 0$ :  $p2^{k-2} \leq l(f) \leq p2^{k-1}$  (by (1) and (3)).

We use (3) with  $d = 1$ . For the greedy algorithm with  $d = 2$  by (2) we get the bound  $l(f) \leq p2^{k-2}(\ln 4 + 1)$  which is not so good.

$pk^{3/7} \rightarrow \infty$  and  $pk^{1/3} = o(1)$ :  $p2^{k-3} \leq l(f) \leq p2^{k-3}(3\ln 2 + 1)$  (by (1) and (2)). The optimal 1-matching provides in this case the weaker result  $l(f) \leq p2^{k-1}$ . But we can not prove the existence of an optimal 2- or even 3-matching.

$pk^{1/3} \rightarrow \infty$  and  $pk^{4/15} \rightarrow 0$ :  $p2^{k-3} \leq l(f) \leq p2^{k-2}$  (by (1) and (3)). (2) gives here the weaker result  $l(f) \leq p2^{k-3}(3\ln 2 + 1)$ .

Finally we remark that the given estimations also hold for  $d = d(k) \rightarrow \infty$  as  $k \rightarrow \infty$ . (For proofs see /31/.)

Now let us consider the parameters  $\tau$  and  $l^+$ . We obtain for a. e.  $f \in \mathcal{G}^*(\mathbb{E}^k, p)$ :

- If  $1/\log k \leq p \leq c$ ,  $0 < c < 1$ , then  
 $\log \tau(f) \sim \log k \log \log k \log p2^k$ .
- If  $p = k^{-c}$ ,  $0 < c < 1$ , and  $d = \lfloor \log(1/c) \rfloor + 1$  then  
 $\log \tau(f) \sim (d - c(2^d - 1)) \log k \log p2^k$ .

- If  $p = \varphi(k)/k$ ,  $\varphi(k) \rightarrow \infty$  and  $\varphi = o(k^{1/3})$  as  $k \rightarrow \infty$  then  

$$\log \tau(f) \sim p 2^k \log \varphi.$$

In all cases it holds  $1^+ \sim p 2^k$ . Here we used the method from /24/.

## References

- /1/ Anderson, L. D.: Lower bounds on the cover-index of a graph. Discrete Math. 25, 199 - 210 (1979)
- /2/ Bender, E. A.: Asymptotic methods in enumeration. SIAM Rev. 16, 4, 485 - 515 (1974) (Russian translation in the book "Enumeration Problems in Combinatorial Analysis", Moscow 1979)
- /3/ Bollobás, B.: Degree sequences of random graphs. Aarhus Universitet, Matematisk Institut, Preprint Series 1978/79 No. 9, Aarhus 1978
- /4/ Bollobás, B.: Graph Theory - an Introductory Course. Berlin 1979
- /5/ Bollobás, B., and Erdős, P.: Cliques in random graphs. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 80, 419 - 427 (1976)
- /6/ Burtin, Yu. D.: On the probability of connectedness of a random subgraph of the  $n$ -cube (in Russian). Problemy Peredači Informacii 13, 90 - 95 (1977)
- /7/ Cockayne, E. J., Favaron, O., Payan, C., and Thomason A. A.: A contribution to the theory of domination, independence and irredundance in graphs. Univ. of Victoria, Deptm. of Math., Preprint, Victoria 1980
- /8/ Donald, A.: An upper bound for the path number of a graph. J. Graph Theory 4, 185 - 201 (1980)
- /9/ Erdős, P., and Renyi, A.: On random graphs I. Publ. Math. Debrecen 6, 290 - 297 (1959)

- /10/ Erdős, P., and Renyi, A.: On the evolution of random graphs. Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci, Ser. A, 5, 17 - 61 (1960)
- /11/ Erdős, P., and Renyi, A.: Asymmetric graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 14, 293 - 315 (1963)
- /12/ Erdős, P., and Renyi, A.: On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17, 359 - 368 (1966)
- /13/ Erdős, P., and Spencer, J.: Probabilistic Methods in Combinatorics. Budapest 1974
- /14/ Erdős, P., and Spencer, J.: Evolution of the  $n$ -cube. Comput. Math. Appl. 2, 33 - 39 (1979)
- /15/ Erdős, P., and Wilson, R. J.: On the chromatic index of almost all graphs. J. Combin. Theory Ser. B 23, 255 - 257 (1977)
- /16/ Glagoliev, W. W.: Some estimations for disjunctive normal forms of Boolean functions (in Russian). Problemy Kibernet. 19, 75 - 94 (1967)
- /17/ Grimmet, G. R., and McDiarmid, C. J. H.: On colouring random graphs. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77, 313 - 324 (1975)
- /18/ Korshunov, A. D.: On the interior stable number (in Russian). Kibernetika 1, 17 - 28 (1974)
- /19/ Korshunov, A. D.: Solution of a problem of Erdős and Renyi on Hamilton cycles in nonoriented graphs (in Russian). Soviet Math. Dokl. 17, 760 - 764 (1976)
- /20/ Korshunov, A. D.: On the chromatic number of graphs with  $n$  vertices (in Russian). Diskret. Analiz 35, 15 - 44 (1980)

- /21/ Lomonossov, M. W., and Polesski, W. P.: An upper bound for the reliability of information circuits (in Russian). Problemy Peredači Informacii 7, 4, 78 - 81 (1971)
- /22/ Moon, J. W.: Almost all graphs have a spanning cycle. Canad. Math. Bull. 15, 1, 39 - 41 (1972)
- /23/ Pósa, L.: Hamiltonian circuits in random graphs. Discrete Math. 14, 359 - 364 (1976)
- /24/ Saposhenko, A. A.: On the greatest length of an irredundant disjunctive normal form of almost all Boolean functions (in Russian). Mat. Zametki 4, 6, 649 - 658 (1967)
- /25/ Saposhenko, A. A.: On the complexity of the disjunctive normal form obtaining by a greedy algorithm (in Russian). Diskret. Analiz 21, 62 - 71 (1972)
- /26/ Saposhenko, A. A.: Geometric structure of almost all Boolean functions (in Russian). Problemy Kibernet. 30, 227 - 261 (1975)
- /27/ Sačkov, W. N.: Probabilistic Methods in Combinatorial Analysis (in Russian). Moskow 1978
- /28/ Tinhofer, G.: Zufallsgraphen. München 1980
- /29/ Toman, E.: Geometric structure of random Boolean functions (in Russian). Problemy Kibernet. 35, 111 - 132 (1979)
- /30/ Weber, K.: Domination number for almost every graph. Rostock. Math. Kolloq. 16, 31 - 43 (1981)
- /31/ Weber, K.: The length of random Boolean functions. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. (to appear)
- /32/ Wright, E. M.: For how many edges is a graph almost certainly Hamiltonian? J. London Math. Soc. (2) 8, 44 - 48 (1974)

received: March 30, 1981

Author's address: \*

Dr. rer. nat. K. Weber

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

Universitätshof

DDR-2500 Rostock



Jürgen Dossow

Weitere Bemerkungen zu einem modifizierten Vollständigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen

Eines der Hauptprobleme der strukturellen Automatentheorie ist das Vollständigkeitsproblem, ob aus einer gegebenen Menge von Elementarautomaten alle Automaten bzw. alle Automaten eines bestimmten Typs konstruiert werden können. Die Ergebnisse von V. S. Kudrjavcev und I. M. Kratko (siehe /4/ Chapter 4) deckten grundsätzliche Schwierigkeiten bei der Behandlung des allgemeinen Vollständigkeitsproblems auf. Daher wurden in der letzten Zeit eine Reihe von Modifikationen des Vollständigkeitsbegriffs eingeführt. Einer davon ist die in /2/ erstmals betrachtete Kleene-Vollständigkeit, die in dieser Note weiter untersucht werden soll. Wir betrachten einen algebraischen Zugang zum Vollständigkeitsproblem über maximale Teilalgebren, die noch nicht Kleene-vollständig sind, und geben einige Resultate für den Spezialfall der Halbgruppe der einstelligen sequentiellen Funktionen.

## 1. Grundbegriffe

In diesem Paragraphen geben wir einige wesentliche Definitionen und Bezeichnungen an. Dabei verzichten wir mehrfach auf eine formal exakte Beschreibung; diese ist dann jeweils in /4/ zu finden.

Es sei

$$E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

$P_k^n$  bezeichne die Menge aller sequentiellen Funktionen, d. h. die Menge aller durch endliche Automaten induzierbaren Funktionen, die die freie Worthalbgruppe über  $E_k^n$  in die freie Worthalbgruppe über  $E_k$  abbilden.

$$P_k^n = \{f \mid f : (E_k^{n,*}) \rightarrow E_k^*\}.$$

Wir setzen

$$P_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^n.$$

Eine Funktion  $F \in P_k^n$  kann durch eine unendliche Folge

$$(\varphi_F^1, \varphi_F^2, \dots, \varphi_F^t, \dots)$$

beschrieben werden, wobei

$$\varphi_F^t : (E_k^n)^t \rightarrow E_k$$

und für alle  $t$  und alle  $\underline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ ,  $1 \leq i \leq t$ , die Beziehung

$$F(\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_t) = \varphi_F^t(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_t)$$

erfüllt ist. Für eine Funktion  $F \in P_k$  und eine Menge  $Y$ ,  $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq E_k$ , definieren wir

$$T(F, Y) = \{\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_m : \varphi_F^m(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m) \in Y\}.$$

Der Satz von Kleene besagt, daß jede Menge der Form  $T(F, Y)$  regulär ist und daß umgekehrt jede reguläre Menge in dieser Form dargestellt werden kann.

In der Menge  $P_k$  sind in natürlicher Weise die folgenden Operationen erklärt: Identifizieren von Variablen, Umordnen von Variablen, Hinzufügen fiktiver Variabler, Komposition von Funktionen und Rückkopplung. Auf diese Weise erhalten wir die Algebra  $P_k$ . Mit  $[M]$  bezeichnen wir die von  $M \subseteq P_k$  erzeugte Teilalgebra von  $P_k$ . Eine Teilmenge  $M \subseteq P_k$  heißt vollständig, falls  $[M] = P_k$  gilt.

Gegenstand dieser Note ist die folgende Abschwächung des Vollständigkeitsbegriffes.

Eine Teilalgebra  $M$  von  $P_k$  heißt Kleene-Menge, wenn zu jedem  $n \geq 1$  und jeder regulären Menge  $R \subseteq (E_k^n)^*$  eine Funktion  $F \in M$  und eine Menge  $Y$ ,  $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq E_k$ , derart existieren, daß  $T(F, Y) = R$  gilt.  $M \subseteq P_k$  heißt Kleene-vollständig, falls  $[M]$  eine Kleene-Menge ist.

Im weiteren benötigen wir die folgende Aussage aus /3/:

Es gibt eine endliche Menge  $\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  regulärer Mengen, so daß die Teilalgebra  $M \subseteq P_k$  genau dann eine Kleene-Menge ist, wenn Funktionen  $F_i \in M$  und Mengen  $Y_i$ ,  $\emptyset \subsetneq Y_i \subsetneq E_k$ ,  $1 \leq i \leq r$ , mit  $U_i = T(F_i, Y_i)$  existieren.

Neben der Algebra  $P_k$  betrachten wir noch die Algebra  $P'_k$  der Funktionen über endlichen Mengen mit der Trägermenge

$$P'_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^n,$$

$$P_k^n = \{f \mid f : E_k^n \rightarrow E_k\},$$

und den folgenden Operationen: Identifizieren und Umordnen von Variablen, Hinzufügen fiktiver Variabler und Komposition von Funktionen. Für  $R \subseteq P'_k$  setzen wir

$$M_R = \{F \mid \varphi_F^1 \in R\}.$$

Falls  $R$  Teilalgebra von  $P'_k$  ist, so ist  $M_R$  Teilalgebra von  $P_k$ .

$k_1 \in P'_k$  sei die konstante Funktion mit dem Wertebereich  $\{1\}$ .

$\mathcal{M}$  bezeichne die Menge der monotonen Funktionen aus  $P'_2$ , und es sei für  $i \in \{0,1\}$

$$T_i = \{f \mid f \in P'_2, f(1,1,\dots,1) = i\}.$$

Die Mächtigkeit des Kontinuums bezeichnen wir mit  $\mathfrak{c}$ .

## 2. Prä-Kleene-Mengen

Die folgende Aussage ist ein bekanntes Vollständigkeitskriterium der universellen Algebra: Eine Menge ist genau dann vollständig, wenn sie in keiner maximalen Teilalgebra enthalten ist. In /6/ zeigte V. B. Kudrjavcev, daß  $P_k$  überabzählbar viele maximale Teilalgebren besitzt. Daher ist obiges Kriterium nicht effektiv. V. A. Buevič untersuchte in /1/ einen abgeschwächten Vollständigkeitsbegriff, metrische oder A-Vollständigkeit genannt. Er definierte ein Analogon zur maximalen Teilalgebra und konnte ein entsprechendes A-Vollständigkeitskriterium herleiten. Hier erwies es sich, daß eine abzählbar unendliche Menge von A-maximalen Mengen existiert. In diesem Paragraphen wollen wir die gleiche Frage bez. der Kleene-Vollständigkeit behandeln.

**Definition:** Eine Menge  $M \subseteq P_k$  heißt Prä-Kleene-Menge, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $M$  ist nicht Kleene-vollständig.
- ii)  $[M \cup \{F\}]$  ist für jedes  $F \notin M$  eine Kleene-Menge.

Lemma 1: Jede Prä-Kleene-Menge von  $P_k$  ist eine Teilalgebra von  $P_k$ .

Beweis:  $[M]$  ist wegen i) der Prä-Kleene-Mengen-Definition keine Kleene-Menge. Angenommen, es gilt  $M \neq [M]$ . Dann gibt es ein  $F \in [M] \setminus M$ , und es gilt  $[M \cup \{F\}] \subseteq [M]$ . Da  $[M \cup \{F\}]$  nach ii) der Definition eine Kleene-Menge ist, muß  $[M]$  auch eine Kleene-Menge sein.

Beispiel 1: Jede in  $P_k$  maximale Teilalgebra, die keine Kleene-Menge ist, ist eine Prä-Kleene-Menge.

Beispiel 2:  $M_{T_0 \cap T_1}$  ist eine Prä-Kleene-Menge in  $P_2$ .

Sei nämlich  $F \notin M_{T_0 \cap T_1}$ . Dann ist

$$[(T_0 \cap T_1) \cup \{\phi_F^1\}] \in \{T_0, T_1, P_2\}$$

(siehe /5/) und entsprechend gilt auch

$$[M_{T_0 \cap T_1} \cup \{F\}] \in \{M_{T_0}, M_{T_1}, P_2\},$$

indem man eine zum Beweis von Lemma 2.4. in /4/ analoge Konstruktion durchführt. Nach /4/, Theorem 5.9 ist damit  $M_{T_0 \cap T_1}$  als Prä-Kleene-Menge nachgewiesen.

Bemerkung: In  $P_2$  ist jede Prä-Kleene-Menge eine maximale Teilalgebra einer Kleene-Menge. Dies läßt sich wie folgt zeigen. Sei  $M \in P_2$  eine Prä-Kleene-Menge. Ferner sei  $M \subseteq M_{T_0}$ . Die Existenz einer Teilalgebra  $M'$  mit  $M \subseteq M' \subseteq M_{T_0}$  würde  $[M \cup \{F\}] \subseteq M'$  für  $F \in M' \setminus M$  implizieren. Da  $M'$  nach /4/, Theorem 5.9 keine Kleene-Menge ist, könnte  $M$  keine Prä-Kleene-Menge sein. Da  $M = M_{T_0}$  ebenfalls unmöglich ist, haben wir damit  $M$  als maximale Teilalgebra von  $M_{T_0}$  nachgewiesen.

Analog gehen wir bei  $M \subseteq M_{T_1}$  vor.

Falls  $M \not\subseteq M_{T_0}$  und  $M \not\subseteq M_{T_1}$  gilt, so bestehen für alle  $F \notin M$  ebenfalls die Beziehungen

$$M'' = [M \cup \{F\}] \not\subseteq M_{T_0} \text{ und } M'' \not\subseteq M_{T_1}.$$

Da  $M''$  Kleene-Menge ist, muß folglich  $M'' = P_2$  gelten.

Somit ist  $M$  maximale Teilalgebra von  $P_2$ .

Die Umkehrung der obigen Aussage gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.  $M_{T_0 \cap M}$  ist zwar maximale Teilalgebra der Kleene-Menge  $M_{T_0}$  (dies kann analog zu /4/, Example 4.1. gezeigt werden), aber für die Funktion  $F$  mit  $\varphi_F^t = k_1$  gilt

$[M_{T_0 \cap M} \cup \{F\}] = M_M$ , und  $M_M$  ist nach /4/, Theorem 5.9., keine Kleene-Menge.

**Lemma 2:** Zu jeder Teilalgebra  $M$  von  $P_2$ , die keine Kleene-Menge ist, gibt es eine Prä-Kleene-Menge  $N$  mit  $N \supsetneq M$ .

**Beweis:** Wenn das Lemma nicht gilt, so gibt es eine unendliche Kette von Teilalgebren

$$M_\alpha \subsetneq M_\beta \subsetneq M_\gamma \subsetneq \dots,$$

so daß jedes Element der Kette keine Kleene-Menge ist, aber

$$T = \bigcup_{i \in I} M_i$$

eine Kleene-Menge ist. Seien nun  $F_i$  die Funktionen aus  $T$  und  $Y_i$  die Mengen mit

$$U_i = T(F_i, Y_i), \quad 1 \leq i \leq r.$$

Dann gilt auch schon

$$\{F_1, F_2, \dots, F_r\} \subseteq M_\delta$$

für ein  $\delta \in I$ . Folglich ist  $M_\delta$  bereits eine Kleene-Menge im Widerspruch zur Voraussetzung.

**Satz 3:**  $M \subseteq P_k$  ist genau dann Kleene-vollständig, wenn  $M$  in keiner Prä-Kleene-Menge von  $P_k$  enthalten ist.

**Beweis:** Angenommen,  $M$  wäre in einer Prä-Kleene-Menge  $N$  enthalten. Dann gilt  $[M] \subseteq N$ , und folglich ist  $M$  nicht Kleene-vollständig.

Wenn umgekehrt  $M$  nicht Kleene-vollständig ist, ist  $[M]$  keine Kleene-Menge, und nach Lemma 2 gilt dann  $M \subsetneq [M] \subseteq N$  für eine Prä-Kleene-Menge  $N$ .

Allerdings ist das Kriterium aus Satz 3 nicht effektiv, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4: Die Mächtigkeit der Menge der Prä-Kleene-Mengen von  $P_k$  ist  $\mathcal{C}$ .

Beweis: Sei  $k = 2$ . V. B. Kudrjavcev zeigte, daß die Menge der maximalen Teilalgebren von  $P_2$  die Mächtigkeit  $\mathcal{C}$  hat. Da nur zwei dieser Teilalgebren Kleene-Mengen sind (/4/, Theorem 5.9.), hat nach Beispiel 1 die Menge der Prä-Kleene-Mengen von  $P_2$  die Mächtigkeit  $\mathcal{C}$ .

Sei nun  $k \geq 3$ . Ferner sei  $V$  eine Prä-Kleene-Menge in  $P_2$ , die maximale Teilalgebra von  $P_2$  ist. Für  $F \in P_k^n$  definieren wir  $pr(F)$  als Einschränkung auf die Eingabeworte über  $\{0,1\}^n$ . Offenbar ist  $pr$  ein Homomorphismus von  $P_k$  in  $P_2$ . Weiterhin sei  $M_{\{0,1\}}$  die Menge aller Funktionen aus  $P_k$  mit einem Wertebereich, der in  $\{0,1\}^*$  enthalten ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß  $M_{\{0,1\}}$  eine Kleene-Menge in  $P_k$  ist. Wir betrachten nun

$$V' = pr^{-1}(V) \cap M_{\{0,1\}}.$$

$V'$  ist sicher eine Teilalgebra. Nun gibt es eine reguläre Menge  $S \subseteq (E_2^n)^*$  (für ein gewisses  $n \geq 1$ ), so daß für alle  $F \in V$  und alle  $Y$ ,  $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq E_2$ , die Beziehung  $S \neq T(F, Y)$  gilt. Daher gilt auch  $S \neq T(G, Y)$  für alle  $G \in V'$  und alle  $Y$ . Somit ist  $V'$  keine Kleene-Menge.  $V'$  ist außerdem noch maximale Teilalgebra von  $M_{\{0,1\}}$ . Das läßt sich wie folgt zeigen. Ist  $F \in M_{\{0,1\}} \setminus V'$ , so ist  $pr(F)$  ein Element aus  $P_2 \setminus V$ . Daher läßt sich zu jedem  $G \in P_2$  ein  $G' \in [V' \cup \{F\}]$  so finden, daß  $pr(G') = G$  gilt. Da in  $V'$  bereits alle Funktionen liegen, die für eine Kodierung von  $0,1,\dots,k-1$  durch Tupel über  $\{0,1\}$  benötigt werden, ist nun  $[V' \cup \{F\}] = M_{\{0,1\}}$  leicht zu zeigen.

Zu  $V'$  gibt es nach Lemma 2 eine Prä-Kleene-Menge  $N(V')$  mit  $N(V') \supsetneq V'$ . Nun gilt  $N(V') \cap M_{\{0,1\}} \supsetneq V'$ . Da  $N(V')$  keine Kleene-Menge ist, ist  $N(V') \cap M_{\{0,1\}} \neq M_{\{0,1\}}$  und somit gilt  $N(V') \cap M_{\{0,1\}} = V'$ . Wegen  $V_1' \neq V_2'$  für  $V_1 \neq V_2$  ist mit  $V_1 \neq V_2$  auch  $N(V_1') \neq N(V_2')$ . Nach den Ausführungen für  $k = 2$  ist damit

auch die Mächtigkeit der Prä-Kleene-Mengen in  $P_k$  mindestens  $\mathfrak{C}$ . Da aber  $P_k$  selbst abzählbar ist, ist die Behauptung bewiesen.

### 3. 1-Kleene-Mengen

Die Menge  $P_k^1$  der einstelligen sequentiellen Funktionen bildet mit der Funktionenkomposition als Operation eine Halbgruppe, die grundsätzlich andere Eigenschaften besitzt als die Algebra  $P_k$  aller sequentiellen Funktionen. In diesem Paragraphen setzen wir das Studium des Verhältnisses zwischen  $P_k$  und  $P_k^1$  fort, indem wir den zur Kleene-Menge analogen Begriff in  $P_k^1$  untersuchen.

Definition: Eine Teilhalbgruppe  $M$  von  $P_k^1$  heißt 1-Kleene-Menge, wenn für jede reguläre Menge  $R \subseteq E_k$  eine Funktion  $F \in M$  und eine Menge  $Y$ ,  $\emptyset \subsetneq Y \subseteq E_k$ , existieren, so daß  $R = T(F, Y)$  gilt. Die 1-Kleene-Menge  $M \subseteq P_k^1$  heißt minimale 1-Kleene-Menge, wenn keine Teilhalbgruppe  $N$  mit  $N \subsetneq M$  eine 1-Kleene-Menge ist.

In /2/ ist gezeigt, daß es in  $P_2$  genau drei Kleene-Mengen gibt. Hinsichtlich der 1-Kleene-Menge ist die Situation erheblich komplizierter, denn es gilt der folgende Satz.

Satz 5: Die Mächtigkeit der Menge der 1-Kleene-Mengen in  $P_2^1$  ist  $\mathfrak{C}$ .

Beweis: Wir betrachten die sequentiellen Funktionen  $F_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , die durch

$$\varphi_{F_t}^1(x_1, x_2, \dots, x_1) = \begin{cases} \text{non}(x_1) & \text{für } i < t, \\ \text{non}(x_t) & \text{für } i \geq t \end{cases}$$

definiert sind. Die Menge

$$M_{T_0}^1 = M_{T_0} \cap P_k^1$$

ist sicher eine 1-Kleene-Menge. Daher ist auch für  $I \subseteq \mathbb{N}$

$$M_I = [M_{T_0}^1 \cup \{F_t \mid t \in I\}]$$

eine 1-Kleene-Menge. Wir zeigen nun, daß aus  $1 \notin I_1$ ,  $1 \notin I_2$ ,  $I_1 \neq I_2$  auch  $M_{I_1} \neq M_{I_2}$  folgt. Damit ist der Satz dann bewiesen.

Sei dazu  $S \neq 1$ ,  $S \notin I$ . Angenommen, es gilt  $F_S \in M_I$ . Dann realisiert eine Kaskade von Elementen aus  $M_{T_0}^1 \cup \{F_t \mid t \in I\}$  die sequentielle Funktion  $F_S$ . In dieser Kaskade muß mindestens ein  $F_t$ ,  $t \in I$ , verwendet werden, da sonst  $F_S \in M_{T_0}^1$  sein würde. Die Kaskade vor  $F_t$  induziere die sequentielle Funktion  $F$ , die nach  $F_t$  induziere  $G$ . Damit ergibt sich für die Gesamtkaskade die sequentielle Funktion  $H$  mit

$$\varphi_H^1(x_1, \dots, x_t) = \begin{cases} \varphi_G^1(\text{non}(\varphi_F(x_1)), \text{non}(\varphi_F(x_1)), \dots, \text{non}(\varphi_F(x_1))) & \text{für } i < t, \\ \varphi_G^1(\text{non}(\varphi_F(x_1)), \dots, \text{non}(\varphi_F(x_1))), & \\ \text{non}(\varphi_F^t(x_1, \dots, x_t)), \dots, & \\ \text{non}(\varphi_F^t(x_1, \dots, x_t))) & \text{für } i \geq t. \end{cases}$$

Ist  $S < t$ , so ändern sich die  $\varphi_H^1$  für  $i \geq t$ , falls  $x_S$  geändert wird. Ist aber  $S > t$  so ändert sich  $H$  bei Änderung von  $x_S$  nicht. Folglich ist  $H \neq F_S$ .

Satz 5 gilt sicher auch für  $k \geq 3$ . Um dies zu beweisen, reicht es, die 1-Kleene-Mengen in  $M_{\{0,1\}}$  zu betrachten, für die die obigen Schlüsse ebenfalls gelten.

**Lemma 6:** Zu jeder 1-Kleene-Menge  $M \in P_2^1$  gibt es eine minimale 1-Kleene-Menge  $N \in P_2^1$  mit  $N \subseteq M$ .

**Beweis:** Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, daß es eine unendliche absteigende Kette  $M_\alpha > M_\beta > \dots$  von 1-Kleene-Mengen  $M_\gamma$ ,  $\gamma \in U$  ( $U$  eine Indexmenge), gibt. Wir betrachten  $N = \bigcap_{\gamma \in U} M_\gamma$ .

Angenommen,  $N$  ist keine 1-Kleene-Menge. Da  $N$  sicher eine Teilmultigruppe ist, gibt es eine reguläre Menge  $S \in E_2^*$  mit  $S \neq T(F, Y)$  für alle  $F \in N$  und alle  $Y$ . Nun gibt es aber genau

zwei Funktionen  $F_1, F_2 \in P_2^1$  mit  $S = T(F_1, \{0\})$  bzw.

$S = T(F_2, \{1\})$ . Da  $F_1 \notin N$  für  $i = 1, 2$  gilt, ist  $F_1 \notin M_{\gamma_1}$  für ein gewisses  $\gamma_1 \in U$ . Folglich gibt es ein  $\gamma$  mit  $F_1 \notin M$ ,  $i = 1, 2$ .



Damit ist  $M_2$  keine 1-Kleene-Menge im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folgerung 7: Eine Teilhalbgruppe  $M \subseteq P_2^1$  ist genau dann eine 1-Kleene-Menge, wenn  $M$  eine in  $P_2^1$  minimale 1-Kleene-Menge umfaßt.

Über die Anzahl der minimalen 1-Kleene-Mengen in  $P_2^1$  liegt noch kein endgültiges Resultat vor. In  $P_2$  sind  $M_{T_0}$  und  $M_{T_1}$  die einzigen minimalen Kleene-Mengen, und sicher sind  $M_{T_0}$  und  $M_{T_1}$  minimale 1-Kleene-Mengen. Wir geben jetzt ein weiteres Beispiel einer 1-Kleene-Menge in  $P_2^1$  an.

Dazu sei  $K$  die Menge der Abbildungen  $\mu$  von  $\{0,1\}^2$  in  $\{0,1\}^2$ , die wie folgt gegeben werden können: Es existieren  $f \in P_2^1$  und  $g \in P_2^{1,2}$  derart, daß

$$\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in E_2$$

gilt. Wir schreiben dafür kurz  $\mu = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ . Offenbar sind die Abbildungen  $\mu$  durch das Verhalten von sequentiellen Funktionen aus  $P_2^1$  in den ersten beiden Fakten simulierbar, d. h.,

es gilt  $\mu = \begin{pmatrix} \varphi_F^1 \\ \varphi_F^2 \end{pmatrix}$  für eine sequentielle Funktion  $F$  aus

$P_2^1$ . In  $K$  erklären wir (motiviert durch die Komposition in  $P_2^1$ ) die Operation  $\circ$  durch

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(f_1(x_1)) \\ g_2(f_1(x_1), g_1(x_1, x_2)) \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist  $(K, \circ)$  eine Halbgruppe, die wir erneut mit  $K$  bezeichnen.

Wir definieren die Funktionen  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7 \in P_2^{1,2}$  durch die folgende Tabelle.

| $x_1$ | $x_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ | $h_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     |

Weiterhin definieren wir für  $h_i \in P_2'^2$ ,  $1 \leq i \leq 7$ , die Funktion  $\bar{h}_i$  durch  $\bar{h}_i(x_1, x_2) = \text{non}(h_i(x_1, x_2))$ . Man rechnet leicht nach, daß

$$K' = \left\{ \begin{pmatrix} \text{id} \\ h_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ \bar{h}_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ \bar{h}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ h_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ \bar{h}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ h_4 \end{pmatrix}, \right. \\
\left. \begin{pmatrix} \text{non} \\ \bar{h}_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ h_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ \bar{h}_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ h_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ \bar{h}_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ k_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ k_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{non} \\ k_1 \end{pmatrix}, \right. \\
\left. \begin{pmatrix} \text{id} \\ h_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{id} \\ \bar{h}_5 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ f \end{pmatrix} : i \in \{0, 1\}, f \in P_2'^2 \right\}$$

eine Teilhalbgruppe von  $K$  bildet. Wir betrachten nun

$$K_1 = \left\{ F \mid F \in P_2^1, \begin{pmatrix} \varphi_F^1 \\ \varphi_F^2 \end{pmatrix} \in K' \right\}.$$

Da die Funktionen  $\varphi_F^1$ ,  $1 \leq 3$ , beliebig sind, ist leicht nachzuweisen, daß  $K_1$  eine 1-Kleene-Menge ist. Sei  $N$  eine nach Lemma 6 existierende minimale 1-Kleene-Menge mit  $N \subseteq K_1$ . Dann gilt sicher  $N \neq M_{T_0}^1$ ,  $N \neq M_{T_1}^1$ .

$M_{T_0}^1$ ,  $M_{T_1}^1$  sind dadurch charakterisiert, daß nur an die Funktio-

nen  $\varphi_F^1$  Forderungen gestellt werden. Bei der Konstruktion von  $N$  haben wir Forderungen an  $\varphi_F^1$  und  $\varphi_F^2$  gestellt. Wir vermuten, daß sich analog neue minimale 1-Kleene-Mengen dadurch angeben lassen, daß Forderungen an  $\varphi_F^1$ ,  $1 \leq r$ , gestellt werden. Daher vermuten wir insbesondere, daß die Menge der minimalen 1-Kleene-Mengen in  $P_2^1$  unendlich ist.

In [7] wurde gezeigt, daß in  $P_2^1$  vollständige und in  $P_2^1$  A-vollständige Mengen unterschiedliche Eigenschaften haben. Wir beweisen hier abschließend ein Resultat über die Anzahl der

A-vollständigen Teilhalbgruppen von  $P_2^1$ . Dabei definieren wir die A-Vollständigkeit wie folgt: Für  $F_1, F_2 \in P_2^1$  seien

$$n(F_1, F_2) = \min \{i : \varphi_{F_1}^i \neq \varphi_{F_2}^i\},$$

$$d(F_1, F_2) = \frac{1}{n(F_1, F_2)}.$$

Die Teilhalbgruppe  $M \subseteq P_2^1$  heißt A-vollständig, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  und jedes  $F \in P_2^1$  ein  $F' \in M$  derart existiert, daß  $d(F, F') < \varepsilon$  gilt.

**Satz 8:** Die Menge der A-vollständigen Teilhalbgruppen von  $P_2^1$  hat die Mächtigkeit  $\mathfrak{C}$ .

**Beweis:** Für  $t \in \mathbb{N}$  sei

$$M_t = \{F \mid \varphi_F^i = k_0 \text{ für } i > t\}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß

$$M = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} M_t$$

eine A-vollständige Teilhalbgruppe ist. Ferner sei für  $S \in \mathbb{N}$  die Funktion  $G_S$  durch

$$\varphi_{G_S}^i = \begin{cases} k_0 & \text{für } i \leq S, \\ k_1 & \text{für } i > S \end{cases}$$

erklärt. Für  $I \subseteq \mathbb{N}$  ist dann

$$N_I = M \cup \{G_S : S \in I\}$$

eine Teilhalbgruppe und sogar A-vollständig. Offenbar ist aber mit  $I_1 \neq I_2$  auch  $N_{I_1} \neq N_{I_2}$ , womit Satz 8 bewiesen ist.

### Literatur

- /1/ Бувевич, В. А.: Об аппроксимационной полноте (А-полноте) автоматов. Диссертация, МГУ, Москва 1973
- /2/ Dassow, J.: Kleene-Mengen und Kleene-Vollständigkeit. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 10, 285 - 295 (1974)

- /3/ Dassow, J.: Some remarks on the algebra of automata.  
Tanulmányok-MTA Számítástechn. Automat. Kutató Int.  
Budapest 87/1978, 71 - 77 (1978)
- /4/ Dassow, J.: Completeness Problems in the Structural Theory  
of Automata, Berlin 1981
- /5/ Jablonskij, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. S.:  
Boolesche Funktionen und Postsche Klassen.  
Berlin 1970
- /6/ Кудрявцев, В. Б.: О мощностях множеств предполных множеств  
некоторых функциональных систем связанных с автомата-  
ми. Проблемы кибернетики 13, 45 - 74 (1965)
- /7/ Thalheim, B.: Über ein Vollständigkeitskriterium für eine  
Klasse von Automaten (einstellige Approximationsauto-  
maten). Rostock, Math. Kolloq. 18, 99 - 111 (1981)

eingegangen: 24. 04. 1982

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. J. Dassow  
Technische Hochschule Otto von Guericke  
Sektion Mathematik und Physik  
Boleslaw-Bierut-Platz 5, PSF 124  
DDR-3010 Magdeburg

Thomas Fischer

## Zur Kompliziertheit von assoziativen Suchprozessen in mehrdimensionalen binären Suchbäumen

Die Arbeit befaßt sich mit der Realisierung bestimmter Formen assoziativer Suchprozesse mit Hilfe von mehrdimensionalen binären Suchbäumen. In derartigen Baumstrukturen werden die abgespeicherten Informationen nicht nur durch einen einzelnen Schlüssel (wie bei gewöhnlichen binären Suchbäumen, vgl. Knuth /4/), sondern durch einen Vektor von Schlüsseln repräsentiert. Als Anfragen werden dann auch solche Vektoren zugelassen, in denen eine oder mehrere Komponenten nicht genau festgelegt sind. Während in gewöhnlichen binären Suchbäumen einer Anfrage  $x$  eindeutig ein Weg von der Wurzel des Baumes bis zu einem mit dem entsprechenden Schlüsselwort gekennzeichneten Knoten  $y$  entspricht (d. h., es wird eine eindeutige Abbildung  $f$  von der Menge der Anfragen  $X$  auf die Menge der gespeicherten Schlüssel  $Y$  realisiert), kann in einem mehrdimensionalen Suchbaum durch eine Anfrage eine ganze Teilmenge  $f(x) = Y$  abgerufen werden. Das bedeutet, daß durch  $x$  die Suche in einem Teilbaum  $B_x$  des mehrdimensionalen binären Suchbaums ausgelöst wird.

Es seien  $S_1, \dots, S_n$  endliche geordnete Mengen (Mengen von Schlüsselwörtern), und es sei  $Y \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$ . Ferner seien  $*_1, \dots, *_n$  Symbole, die in keiner der Schlüsselwortmengen enthalten sind. Als Menge  $X$  der möglichen Anfragen kann dann jede Teilmenge von  $(S_1 \cup \{*_1\}) \times \dots \times (S_n \cup \{*_n\})$  auftreten. Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  sei  $R_i = \{*_i \rightarrow s/s \in S_i\}$  eine Regelmenge, mit deren Hilfe für alle  $x \in X$  die Sprachen

$$L(x) = \{y/y \in S_1 \times \dots \times S_n \wedge x \xrightarrow{R} y\}$$

erzeugt werden können, dabei ist  $R = \bigcup R_i$ . An die Stelle der oben erwähnten eindeutigen Abbildung  $f$  bei gewöhnlichen binären Suchbäumen tritt dann die durch  $f_L(x) = \bigcap_{\text{df}} L(x) \cap Y$  definierte Abbildung  $f_L$ .

Zur Vereinfachung der Darstellung wird nachfolgend nur der Spezialfall  $Y = S^n$  betrachtet;  $S$  sei eine endliche geordnete Menge mit wenigstens zwei Elementen. Weiterhin sei  $X \subseteq (S \cup \{*\})^n$  mit  $* \notin S$ . Offenbar gilt dann  $f_L(x) = L(x)$  für alle  $x \in X$ .

Die zunächst zu lösende Aufgabe besteht darin, zu einem gegebenen Tripel  $(X, Y, f_L)$  eine Baumstruktur  $B$  und einen entsprechenden Suchalgorithmus so zu finden, daß durch  $B$  genau die Abbildung  $f_L$  realisiert wird. Wenn man den Suchalgorithmus mit  $A$  bezeichnet, dann bedeutet dies, daß bei Anwendung von  $A$  auf eine beliebige Anfrage  $x \in X$  genau die Menge  $f_L(x)$  aufgesucht wird, d. h., es gilt  $A(x) = f_L(x)$  für alle  $x \in X$ .

Es sei ferner  $p$  eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung über  $X$ , und  $c(x)$  bezeichne die Anzahl der zur Auffindung von  $f_L(x)$  notwendigen Vergleiche. Als Maß für den mittleren Suchaufwand einer Realisierung  $B$  eines gegebenen Suchproblems  $(X, Y, f_L)$  wird dann die Funktion

$$S_p(B) = \text{Df} \sum_{x \in X} p(x) c(x)$$

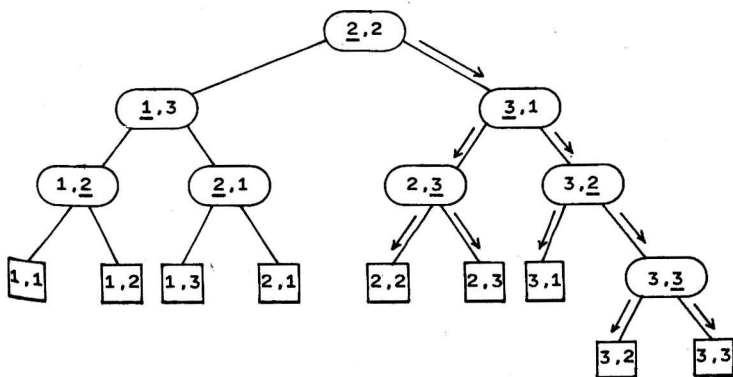
verwendet. Die zweite Aufgabe besteht dann darin, einen bezüglich  $S_p(B)$  optimalen Baum zu finden.

Nachfolgend werden zunächst zwei Verfahren zur Konstruktion eines zur Realisierung eines Suchproblems  $(X, Y, f_L)$  geeigneten mehrdimensionalen Suchbaums angegeben.

Methode 1: Die erste Methode zur Konstruktion eines mehrdimensionalen binären Suchbaums besteht einfach darin, die durch  $S$  vorgegebene Ordnung in natürlicher Weise auf  $Y = S^n$  auszudehnen und für die derart geordnete Menge  $Y$  einen (gewöhnlichen) binären Suchbaum nach einer der üblichen Methoden zu konstruieren. Dabei wird vorausgesetzt, daß die im Suchbaum abgespeicherten Informationen über die Endknoten abgerufen werden, die inneren Knoten werden nur als Testknoten verwendet. Jedem inneren Knoten wird neben dem zugehörigen Schlüsselvektor  $(s_1, \dots, s_n)$  noch eine natürliche Zahl  $i \in \{1, \dots, n\}$  zugeordnet, die anzeigt, welche Komponente des Schlüsselvektors für den Vergleich ge-

nutzt wird. Wenn also eine Anfrage  $(s'_1, \dots, s'_n)$  vorliegt, werden für die Entscheidung über die weitere Suche nur die Schlüssel  $s'_i$  und  $s_i$  miteinander verglichen.

**Beispiel:** Es sei  $S = \{1, 2, 3\}$  und  $n = 2$ . Für das Suchproblem  $(X, Y, f_L)$  mit  $X \subseteq (S \cup \{*\})^2$  und  $Y = S^2$  erhält man nach Methode 1 zum Beispiel den folgenden Baum:



Die für den Vergleich ausgewählten Komponenten sind hier durch Unterstreichen gekennzeichnet. Wenn  $s'_i < s_i$  ( $s'_i > s_i$ ) gilt, wird im linken (rechten) Teilbaum weitergesucht. Wenn hingegen  $s'_i = s_i$  oder  $s'_i = *$  gilt, muß die Suche offenbar in beiden Teilbäumen fortgesetzt werden.

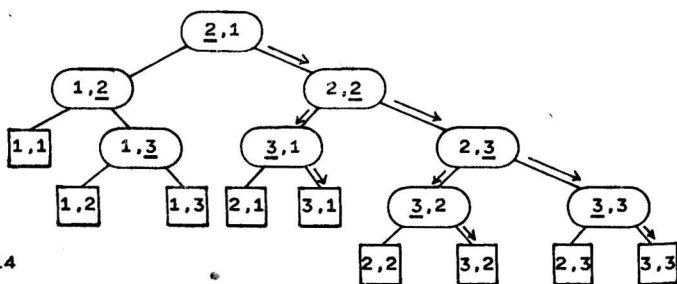
Man überzeugt sich leicht davon, daß bei jeder Anfrage  $x \in X$  stets alle Elemente aus  $f_L(x)$  tatsächlich gefunden werden. Andererseits werden bei einigen Anfragen auch Endknoten erreicht, denen nicht zu  $f_L(x)$  gehörende Schlüsselvektoren zugeordnet sind (dies ist zum Beispiel bei der Anfrage  $(3, *)$  der Fall). Dies bedeutet, daß der verwendete Suchalgorithmus zwar vollständig ist, aber nicht korrekt im Sinne der obigen Forderung. Auf die Verzweigung im Falle der Gleichheit der Schlüssel  $s'_i$  und  $s_i$  kann aber auch nicht verzichtet werden, weil dann sogar die Vollständigkeit verlorenggeht.

Eine Möglichkeit zur Überwindung dieser Schwierigkeiten besteht

darin, mit Hilfe des Regelsystems  $R$  die Menge  $f_L(x)$  zu berechnen und dann die Suche nach  $x$  durch sukzessives Suchen nach den Elementen von  $f_L(x)$  zu ersetzen. Dann ist gesichert, daß für jedes  $x$  tatsächlich nur in dem durch die zu  $f_L(x)$  gehörende Endknotenmenge eindeutig bestimmten Teilbaum  $B_x$  gesucht wird. Nachteilig fällt hierbei natürlich der durch die vorherige Berechnung von  $f_L(x)$  zusätzlich entstehende Aufwand ins Gewicht.

**Methode 2:** Für die gegebene Menge  $Y$  von Schlüsselvektoren wird zunächst die für den Vergleich zu verwendende Komponente ausgewählt. Dadurch wird eine Zerlegung von  $Y$  erzeugt. Diese Zerlegung wird in Abhängigkeit von der gewählten Komponente geordnet. Danach kann die übliche Halbierungsmethode auf die so geordnete Zerlegung von  $Y$  angewendet werden. Diese Vorgehensweise wird dann iteriert.

**Beispiel:** Es sei wieder  $Y = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ . Wir benutzen die erste Komponente für den Vergleich und erhalten die bereits geordnete Zerlegung  $Z = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}, \{(2,1), (2,2), (2,3)\}, \{(3,1), (3,2), (3,3)\}$ . Eine Teilung ist jetzt nur an zwei Stellen möglich. Wählt man die erste Möglichkeit, erhält man die Schlüssel Mengen  $Y_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$  und  $Y_r = \{(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ . Wählt man für  $Y_r$  die zweite Komponente als Vergleichskomponente, erhält man die ebenfalls bereits geordnete Zerlegung  $Z_r = \{(2,1), (3,1)\}, \{(2,2), (3,2)\}, \{(2,3), (3,3)\}$ . Wir teilen wieder an der ersten möglichen Stelle und erhalten  $Y_{r1} = \{(2,1), (3,1)\}$  und  $Y_{rr} = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ . Setzt man dieses Verfahren fort, erhält man den Baum:





Der Nachteil der Methode 2 besteht offenbar darin, daß sich der Baum nicht mehr so gut balancieren läßt. Das liegt an der Einschränkung bei der Anwendung der Halbierungsregel. Als wesentlicher Vorteil erweist sich, daß eine Verzweigung bei der Suche jetzt nur noch erforderlich ist, wenn  $s_1^* = *$  gilt. Wenn hingegen  $s_1^* = s_1$  ist, wird stets im rechten Teilbaum weitergesucht. Man überzeugt sich leicht davon, daß der angegebene Baum tatsächlich eine korrekte Realisierung des Suchproblems

$((S \cup \{*\})^n, S^n, f_L)$  für  $S = \{1, 2, 3\}$  und  $n = 2$  darstellt.

Es sei jetzt  $|B_x|$  die Anzahl der inneren Knoten in dem durch die Anfrage  $x$  aktivierten Teilbaum  $B_x$ , und für jedes  $y \in Y$  bezeichne  $l(y)$  die Weglänge (Anzahl der Kanten) von der Wurzel des Baums  $B$  bis zu dem mit dem Schlüsselvektor  $y$  markierten Endknoten. Der mittlere Suchaufwand für einen nach der Methode 2 konstruierten Suchbaum beträgt dann

$$S_p^2(B) = \sum_{x \in X} p(x) |B_x|,$$

während sich für einen nach Methode 1 konstruierten Baum

$$S_p^1(B) = \sum_{x \in X} p(x) \sum_{y \in f_L(x)} l(y)$$

ergibt. Offensichtlich gilt stets  $S_p^2(B) \leq S_p^1(B)$ , es genügt daher, zunächst eine Abschätzung für  $S_p^1(B)$  zu suchen.

**Lemma 1:** Es existiert eine durch  $p$  und  $f_L$  eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\bar{p}$  derart, daß

$$S_p^1(B) = V(p, f_L) \cdot L_{\bar{p}}(B)$$

gilt. Dabei ist  $L_{\bar{p}}(B)$  die übliche mittlere Weglänge von  $B$  bezüglich der Verteilung  $\bar{p}$ , und  $V(p, f_L)$  ist ein von der Struktur des Baumes  $B$  unabhängiger Faktor.

**Beweis:** Für alle  $y \in Y$  seien  $p_x$ ,  $p'$  und  $\bar{p}$  wie folgt definiert:

$$p_x(y) = \text{Df} \begin{cases} p(x) & \text{für } y \in f_L(x), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$p'(y) = \text{Df} \sum_{x \in X} p_x(y),$$

$$\bar{p}(y) = \text{Df } p'(y) / \sum_{y' \in Y} p'(y').$$

Die Funktion  $\bar{p}$  ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über  $Y$ . Wegen  $p_x(y) = p(x)$  für  $y \in f_L(x)$  ergibt sich

$$\sum_{y \in f_L(x)} l(y) = \sum_{y \in f_L(x)} \frac{p_x(y)}{p(x)} l(y).$$

Daraus erhält man unmittelbar

$$S_p^1(B) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in f_L(x)} p_x(y) l(y),$$

und wegen  $p_x(y) = 0$  für  $y \notin f_L(x)$  gilt

$$\begin{aligned} S_p^1(B) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p_x(y) l(y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p_x(y) l(y) \\ &= \sum_{y \in Y} p'(y) l(y) = \sum_{y \in Y} p'(y) L_{\bar{p}}(B), \end{aligned}$$

wobei

$$L_{\bar{p}}(B) = \text{Df } \sum_{y \in Y} \bar{p}(y) l(y)$$

gesetzt wurde. Mit

$$\begin{aligned} v(p, f_L) &= \text{Df } \sum_{y \in Y} p'(y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p_x(y) \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p_x(y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in f_L(x)} p(x) \end{aligned}$$

ergibt sich Lemma 1.

Es sei

$$H(\bar{p}) = \text{Df } - \sum_{y \in Y} \bar{p}(y) \log \bar{p}(y)$$

die Entropie der Verteilung  $\bar{p}$ . Für jeden inneren Knoten  $i$  eines Suchbaums sei  $\bar{p}_l(i)$  die Wahrscheinlichkeit des linken und  $\bar{p}_r(i)$  die des rechten Teilbaums mit der Wurzel  $i$ . Ferner sei

$$D(B, \bar{p}) = \text{Def} \sum_{i \in I} |\bar{p}_l(i) - \bar{p}_r(i)|,$$

wobei  $I$  die Menge aller inneren Knoten von  $B$  bezeichnet.

**Lemma 2:** Es gilt die Abschätzung

$$L_{\bar{p}}(B) \leq H(\bar{p}) + D(B, \bar{p}).$$

Der Beweis von Lemma 2 ergibt sich durch eine leichte Verallgemeinerung einer entsprechenden Abschätzung von Horibe [3]. Aus Lemma 1 und Lemma 2 ergibt sich unmittelbar

**Satz 1:** Nach der Methode 2 erhält man einen mehrdimensionalen binären Suchbaum  $B$ , dessen mittlerer Suchaufwand die Ungleichung

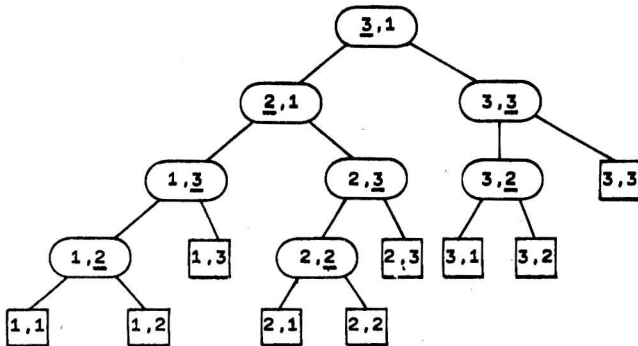
$$S_p^2(B) \leq V(p, f_L) \cdot (H(\bar{p}) + D(B, \bar{p}))$$

erfüllt.

Der von der Struktur des erhaltenen Suchbaums unabhängige Faktor  $V(p, f_L)$  kann als ein "Verzweigungsfaktor" aufgefaßt werden. Wenn  $f_L$  eindeutig ist, gilt  $V(p, f_L) = 1$ . Wegen  $f_L(x) \leq Y$  gilt auch stets  $V(p, f_L) \leq |Y|$ . Mit der Abschätzung aus Lemma 2 eröffnet sich eine Möglichkeit zur Optimierung bei der Anwendung der Methode 2. Offenbar muß man in jedem Knoten versuchen, die Differenz zwischen den Wahrscheinlichkeiten des linken und des rechten Teilbaums möglichst gering zu halten. Hierbei ist aber stets zu beachten, daß sich diese Optimierung nicht auf das Kompliziertheitsmaß  $S_p^2(B)$  selbst, sondern nur auf eine obere Abschätzung dieses Maßes bezieht.

**Beispiel:** Wir betrachten wieder das Suchproblem aus den vorangegangenen Beispielen. Die Verteilung  $p$  sei durch  $p(*, 1) = p(*, 2) = p(1, *) = p(2, *) = 0,1$ ,  $p(*, 3) = p(3, *) = 0,3$ ,  $p(1, j) = p(*, *) = 0$  für alle  $1, j \in \{1, 2, 3\}$  definiert. Durch Anwendung der oben angedeuteten Optimierungsstrategie ergibt sich der auf der nächsten Seite dargestellte Baum. Es gilt  $S_p^2(B) = 4,8$ , während man für den im zweiten Beispiel konstruierten Baum den Wert 5,5 erhält.

Suchbaum, der nach der aus Satz 1 abgeleiteten Optimierungsstrategie konstruiert ist:



Für einen nach der Methode 1 konstruierten Suchbaum läßt sich das Ergebnis von Satz 1 noch verschärfen. Horibe /3/ hat auch gezeigt, daß sich stets ein binärer Suchbaum  $B$  finden läßt, für den  $D(B, \bar{p}) \leq 2$  gilt. Mit Hilfe dieses Ergebnisses erhält man dann aus Lemma 1 und Lemma 2

**Satz 2:** Nach der Methode 1 erhält man einen mehrdimensionalen binären Suchbaum  $B$ , dessen mittlerer Suchaufwand die Ungleichung

$$S_p^1(B) \leq V(p, f_L)(H(\bar{p}) + 2)$$

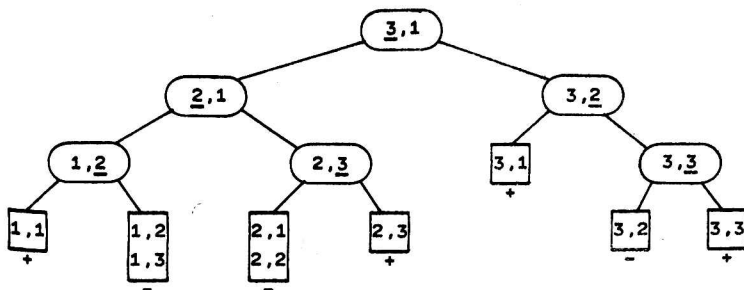
erfüllt.

Die Methode 1 bietet also die Möglichkeit, die schon aus der Theorie gewöhnlicher binärer Suchbäume bekannten Konstruktionsalgorithmen auch für mehrdimensionale binäre Suchbäume zu verwenden. Insbesondere bietet sich auch die Möglichkeit, die Ideen, die zur Konstruktion universeller binärer Suchbäume verwendet wurden, auf den Fall mehrdimensionaler Suchbäume zu übertragen (vgl. /2/).

Abschließend sei jetzt noch kurz der Fall behandelt, daß mit positiver Wahrscheinlichkeit auch nach Informationen gesucht wird, die im Suchbaum nicht gespeichert sind, d. h., wir betrachten den Fall  $Y \subset S^n$ . Die Konstruktion eines Suchbaums

für diesen Fall soll hier nur durch ein Beispiel angedeutet werden.

Beispiel: Es sei wieder  $S = \{1,2,3\}$  und  $n = 2$ . Als Menge der im Suchbaum gespeicherten Informationen wird  $Y = \{(1,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$  gewählt, die Menge der möglichen Anfragen ist  $X = (S \cup \{*\})^2$ . Der nachstehend angegebene Baum stellt eine mögliche Realisierung dieses Suchproblems dar.



Eine Verzweigung wird wieder nur dann vorgenommen, wenn in der für den Vergleich benötigten Stelle des Anfragevektors ein \* eingetragen ist. Während beim Erreichen eines mit "+" markierten Endknoten die zugehörige Information ausgegeben wird, wird bei einem mit "-" gekennzeichneten Endknoten nur angezeigt, daß die gesuchte Information nicht verfügbar ist.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß ähnliche Baumstrukturen auch von Bentley /1/ verwendet wurden. Im Gegensatz zu den hier vorgestellten Methoden läßt sich bei dem in /1/ benutzten Typ mehrdimensionaler binärer Suchbäume ein zum Teil beträchtlicher überflüssiger Suchaufwand nicht vermeiden.

## Literatur

/1/ Bentley, J. L.: Multidimensional binary search trees used for associative searching. Comm. ACM 18, 509 - 517 (1975)

- /2/ Fischer, Th.: On the weighted path length of binary search trees for unknown access probabilities. In: Běčvář, J. (Ed.): Mathematical Foundations of Computer Sciences 1979, Proceedings, 8th Symposium, Olomouc, Czechoslovakia, September 3 - 7, 1979. Lecture Notes Computer Science 74, pp. 284 - 291. Berlin 1979
- /3/ Horibe, Y.: An improved bound for weight-balanced tree. Inform. and Control 34, 148 - 151 (1977)
- /4/ Knuth, D. E.: The Art of Computer Programming. Vol. 3: Sorting and Searching. Reading 1973

eingegangen: 30. 03. 1981

Anschrift des Verfassers:

Dr. Th. Fischer  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Mathematik  
Mohrenstraße 39  
DDR-1086 Berlin

## Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock, Math. Kolloq. / Leerzeile / Vorname Name / Leerzeile / Titel der Arbeit / 1 Zeilenumschaltung / Unterstreichungs / Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift / Unterstreichungs (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperrn möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. a. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. a. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzpiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- /8/ Zeriski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra.  
Princeton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichenardt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen: bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers: Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlages vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

