ISSN 0138 - 3248

Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 22

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 22

1983

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Schriftleitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion Mathematik
Prof. Dr. Gerhard Maeß, Schriftleiter
Dr. Werner Plischke, Lektor
Dorothea Meyer, Herstellung der Druckvorlage

Sektion Mathematik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR-2500 Rostock
Vogelsang 13/14
Fernruf: 369 577
Leiter: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage
Genehmigungs-Nr.: C 49/83
Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003829

Inhalt

Rostock. Math. Kolloq. 22, 5 - 11 (1983) 05A15
60C05

Konrad Engel

About the number of pairs of elements of E_k^n which distances have given values II

Let E_k^n be the set of all n-tuples $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ of natural numbers with $x_i \in \{0,\dots,k-1\}$ for all $i \in \{1,\dots,n\}$. Further let $\varrho(\underline{x},\underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ be the Manhattan metric on E_k^n. For a given real number d we define $R_{d,n}(k)$ and $S_{d,n}(k)$ to be the number of pairs $(\underline{x},\underline{y})$ of elements of E_k^n for which $\varrho(\underline{x},\underline{y})$ is equal to or not greater than d, respectively. Obviously,

$$R_{d,n}(k) = 0 \text{ iff } d \notin \{0,\dots,n(k-1)\},$$
$$S_{d,n}(k) = \sum_{i \le d} R_{i,n}(k). \tag{1}$$

In /1/ it is proved that

$$r_{n,k}(x) = (k + 2(k-1)x + 2(k-2)x^2 + \dots + 2x^{k-1})^n \tag{2}$$

is the generating function of the numbers $R_{i,n}(k)$. Further there was proved that for fixed n and $d = cn(k-1)$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{d,n}(k)}{k^{2n}} = 2^n \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{\min(m,[cn])} (-1)^{m+l} \frac{\binom{n}{m}\binom{m}{l}}{(n+m)!} (cn-l)^{n+m} \tag{3}$$

($[x]$ denotes the largest integer not greater than x, and c is an arbitrary real number). More exactly, one must say that (3) is an immediate consequence of Theorem 2 of /1/ since there the result was given in a bit different form.
The limit considered is of interest since it gives "for large k" the ratio of the numbers of pairs of elements of E_k^n with a distance not greater than $d = cn(k-1)$ to the number of all pairs (for $c = 0$ and $c = 1$ we have the smallest and greatest possible distance, respectively). In order to complete these investigations we will prove the following two theorems.

__Theorem 1:__ If $d = cn(k-1)$, then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{d,n}(k)}{k^{2n}} = \begin{cases} 0, \text{ if } c < \frac{k+1}{3k}, \\ \frac{1}{2}, \text{ if } c = \frac{k+1}{3k}, \\ 1, \text{ if } c > \frac{k+1}{3k}. \end{cases} \quad (k \text{ fixed})$$

__Theorem 2:__ If $n = n_k$ tends with k to infinity and if $d = cn_k(k-1)$, then

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{d,n_k}(k)}{k^{2n_k}} = \begin{cases} 0, & \text{if } c < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \text{if } c = \frac{1}{3} \text{ and } \frac{n_k}{k^2} \to 0, \\ \Phi(-\sqrt{2g}), & \text{if } c = \frac{1}{3} \text{ and } \frac{n_k}{k^2} \to g, \\ 0, & \text{if } c = \frac{1}{3} \text{ and } \frac{n_k}{k^2} \to \infty, \\ 1, & \text{if } c > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

where $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$

In all what follows $\Phi(x)$ is the function defined above. First we will prove the following

__Lemma 1:__ Let $\{\zeta_n\}$ be a sequence of random variables and let $F_n(x)$ be the distribution function of ζ_n $(n = 1,2,\ldots)$. Further let $\{x_n\}$ be a sequence of real numbers with $\lim_{n\to\infty} x_n = h$ ($h = \pm\infty$ is admitted). If $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$, then $\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n \leq x_n) = \Phi(h)$.

__Proof:__ We only consider the case that h is finite. The cases $h = \pm\infty$ can be settled analogously.

Fix $\varepsilon > 0$ and take δ such that

$$\Phi(h+\delta) - \Phi(h) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ and } \Phi(h) - \Phi(h-\delta) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Further choose n_o such that for $n > n_o$

$$h-\delta < x_n < h+\delta, \tag{5}$$

$$|P(\zeta_n < h-\delta) - \Phi(h-\delta)| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$
$$|P(\zeta_n < h+\delta) - \Phi(h+\delta)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

From (4) and (6) it follows that

$$|P(\zeta_n < h\pm\delta) - \Phi(h)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Because of (5) we have for $n > n_o$

$$P(\zeta_n < h-\delta) \leq P(\zeta_n \leq x_n) \leq P(\zeta_n < h+\delta). \tag{8}$$

From (7) and (8) we obtain

$$|P(\zeta_n \leq x_n) - \Phi(h)| < \varepsilon. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Proof of Theorem 1: Let $\{\xi_n\}$ be a sequence of independent discrete random variables which all have the probability distribution

$$P(\xi_n = 0) = \frac{k}{k^2},$$

$$P(\xi_n = j) = \frac{2(k-j)}{k^2} \quad (j \in \{1,\dots,k-1\},\ n = 1,2,\dots).$$

We put $\zeta_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Because of (1) and (2) we have

$$\frac{S_{d,n}(k)}{k^{2n}} = P(\zeta_n \leq d).$$

Obviously,

$$M(\zeta_n) = n\frac{(k-1)(k+1)}{3k} \text{ and } D^2(\zeta_n) = n\frac{(k-1)(k+1)(k^2+2)}{18k^2}.$$

($M(\zeta)$ and $D^2(\zeta)$ here always mean the expected value and variance of the random variable ζ, respectively).

Set $\zeta_n^* := \dfrac{\zeta_n - M(\zeta_n)}{D(\zeta_n)}$ and let $F_n(x)$ be the distribution function of ζ_n^*. By the Central Limit Theorem (see /2/, p. 363), we have $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$. Further it is

$$P(\zeta_n \leq d) = P\left(\zeta_n^* \leq \frac{d - M(\zeta_n)}{D(\zeta_n)}\right).$$

If $d = cn(k-1)$, then

$$\frac{d - M(\zeta_n)}{D(\zeta_n)} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{18k^2(k-1)}{(k+1)(k^2+2)}} \cdot \left(c - \frac{k+1}{3k}\right).$$

The last term tends to $-\infty$, 0, $+\infty$ if $c < \frac{k+1}{3k}$, $c = \frac{k+1}{3k}$, and $c > \frac{k+1}{3k}$, respectively. From Lemma 1 we now obtain the result given in Theorem 1. Q.E.D.

Now we will prove a lemma which is a consequence of a Central Limit Theorem for sequences of series of random variables. This is of interest for combinatorial problems since the conditions in it can be verified very easily.

<u>Lemma 2:</u> Let $\{\eta_{kn};\ n = 1,\dots,n_k,\ k = 1,2,\dots\}$ be a sequence of series of random variables that are independent within each series and take on there only values of the interval $[a_k, b_k]$ (i. e. $P(\eta_{kn} < a_k) = P(\eta_{kn} > b_k) = 0$). Further let

$$\sigma_k^2 := \sum_{n=1}^{n_k} D^2(\eta_{kn}),$$

$$\zeta_k := \frac{1}{\sigma_k} \sum_{n=1}^{n_k} (\eta_{kn} - M(\eta_{kn})),$$

and $F_k(x)$ be the distribution function of ζ_k.
If there exists a constant C such that

$$\frac{b_k - a_k}{D(\eta_{kn})} < C \tag{9}$$

and if n_k tends with k to infinity, then $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = \Phi(x)$.

<u>Proof:</u> By Theorem 4 in /2/, p. 369, it holds $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = \Phi(x)$ if the following condition (the Lindeberg condition) is satisfied:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{n_k} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{kn}(x) = 0 \text{ for every fixed } \varepsilon > 0,$$

where $F_{kn}(x)$ is the distribution function of $\frac{\eta_{kn} - M(\eta_{kn})}{\sigma_k}$.

(Exchange n and k in /2/, p. 369 and choose $\xi_{kn} := \frac{\eta_{kn}}{\sigma_k}$,

$D_{kn} := \frac{D(\eta_{kn})}{\sigma_k}$, $M_{kn} := \frac{M(\eta_{kn})}{\sigma_k}$.) Further let $\mu_{kn} := M(\eta_{kn})$. If $G_{kn}(x)$ is the distribution function of η_{kn}, then

$$G_{kn}(x) = F_{kn}\left(\frac{x - \mu_{kn}}{\sigma_k}\right).$$

Hence and because of

$$G_{kn}(y) = \begin{cases} 0, \text{ if } y \le a_k, \\ 1, \text{ if } y > b_k, \end{cases}$$

the Lindeberg condition is equivalent to

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{n=1}^{n_k} \int_{I_{kn}(\varepsilon)} (y - \mu_{kn})^2 dG_{kn}(y) = 0 \text{ (for every fixed } \varepsilon > 0),$$

where

$$I_{kn}(\varepsilon) := \{y \in [a_k, b_k] ; |y - \mu_{kn}| > \varepsilon\sigma_k\}.$$

We shall show that $I_{kn}(\varepsilon) = \emptyset$ $(n = 1, \ldots, n_k)$ if k is sufficiently large. Then all is done. For $y \in [a_k, b_k]$ we have

$$|y - \mu_{kn}| \le b_k - a_k.$$

Because of (9) it is $b_k - a_k < C \cdot D(\eta_{kn})$, hence

$$b_k - a_k < \frac{C}{\sqrt{n_k}} \sigma_k.$$

Thus, if k is sufficiently large,

$$|y - \mu_{kn}| < \frac{C\sigma_k}{\sqrt{n_k}} \le \varepsilon\sigma_k,$$

since $n_k \to \infty$ as $k \to \infty$. Q.E.D.

Proof of Theorem 2: Similar to the proof of Theorem 1, take η_{kn} in Lemma 2 such that

$$P(\eta_{kn} = 0) = \frac{k}{k^2}, \quad P(\eta_{kn} = j) = \frac{2(k-j)}{k^2} \quad (j \in \{1, \ldots, k-1\},\ n = 1, \ldots, n_k,\ k = 1, 2, \ldots).$$

With $a_k = 0$ and $b_k = k-1$ we have

$$\frac{b_k - a_k}{D(\eta_{kn})} = \sqrt{\frac{(k-1)18k^2}{(k+1)(k^2+2)}} \to \sqrt{18} \text{ as } k \to \infty.$$

Thus, the condition (9) in Lemma 2 is satisfied and consequently $\lim_{k\to\infty} F_k(x) = \Phi(x)$. We have

$$\frac{S_{d,n_k}(k)}{k^{2n_k}} = P(\eta_{k1} + \dots + \eta_{kn_k} \le d) = P(\zeta_k \le x_k),$$

where

$$x_k := \frac{d - \sum_{n=1}^{n_k} M(\eta_{kn})}{\sigma_k}.$$

With $d = cn_k(k-1)$ it holds

$$x_k = \sqrt{n_k}(k(3c-1)-1)\sqrt{\frac{2(k-1)}{(k+1)(k^2+2)}}.$$

If $c < \frac{1}{3}$ and $c > \frac{1}{3}$, we have $x_k \to -\infty$ and $x_k \to +\infty$, respectively. Take the case $c = \frac{1}{3}$.

If $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k^2} = \begin{cases} 0 \\ g, \\ \infty \end{cases}$ then $\lim_{k\to\infty} x_k = \begin{cases} 0 \\ -\sqrt{2g}. \\ -\infty \end{cases}$

Now our result follows from Lemma 1.

References

/1/ Engel, K: About the number of pairs of elements of E_k^n which distances have given values. Discrete Math., to appear

/2/ Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie. Berlin 1973

/3/ Сачков, В. Н.: Вероятностные методы в комбинаторном анализе. Москва I978

received: July 19, 1982

Author's address:

Dr. rer. nat. K. Engel
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 22, 13 - 41 (1983) 35J35
35J40

Jürgen Roßmann

Das Dirichletproblem für stark elliptische Differentialgleichungen, bei denen die rechte Seite f zum Raum $W^{-k}(G)$ gehört, in Gebieten mit konischen Ecken

0. Einleitung

W. A. Kondratjev entwickelte in /5/ eine Theorie für elliptische Randwertaufgaben

$$Lu = \sum_{|\beta| \le 2m} a_\beta(x)\, D^\beta u = f \quad \text{in } G,$$

$$B_j u = \sum_{|\beta| \le m_j} b_\beta^{(j)}(x)\, D^\beta u = g_j \quad \text{auf } \Gamma \ (j=1,2,\dots,m)$$

in Gebieten mit konischen Ecken, bei denen die rechten Seiten f und g_j zu den Sobolevräumen $W^k(G)$ und $W^{k+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bzw. zu den gewichteten Sobolevräumen $W_\alpha^k(G)$ und $W_\alpha^{k+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ($k \ge 0$, $m_j \le 2m-1$) gehören. Eine entsprechende Theorie in den zu $L_p(G)$ gehörenden gewichteten Sobolevräumen entwickelten W. G. Mazje und B. A. Plamenevskij in /7/ und /8/. H. Blum und R. Rannacher gelang es in /2/, die Ergebnisse von W. A. Kondratjev auf in der Plattentheorie auftretende Randwertaufgaben für den biharmonischen Operator zu übertragen, bei denen die rechte Seite f zum Raum $W^{-k}(G)$ ($k \ge 0$) gehört.
In dieser Arbeit wird versucht, diese Ergebnisse im Fall des Dirichletproblems auch auf allgemeinere elliptische Operatoren zu übertragen.
Wir setzen voraus, daß der Operator

$$L(x,D) = \sum_{|\beta| \le 2m} a_\beta(x)\, D^\beta$$

stark elliptisch in G ist und daß die Koeffizienten $a_\beta(x)$

zum Raum $C^{\infty}(\overline{G})$ gehören. G sei ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand Γ und einer konischen Ecke im Koordinatenursprung, d. h., in einer Umgebung $|x| < R$ des Koordinatenursprungs besitze der Rand Γ die Darstellung

$$x_n^{2p} = \sum_{i_1+\ldots+i_{n-1}=2p} a_{i_1\ldots i_{n-1}} x_1^{i_1}\ldots x_{n-1}^{i_{n-1}}, \tag{1}$$

wobei die rechte Seite eine positive Form ist.

Bemerkung 1: Wir können sogar zulassen, daß Γ in einer Umgebung des Koordinatenursprungs die Darstellung

$$x_n^{2p} = \sum a_{i_1\ldots i_{n-1}} x_1^{i_1}\ldots x_{n-1}^{i_{n-1}} + \varrho(x_1,\ldots,x_{n-1}) \tag{1'}$$

mit $\varrho(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in C^{\infty}(R^{n-1})$, $|\varrho| = o((x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^p)$ besitzt, denn in /4/ wurde von W. A. Kondratjev bewiesen, daß sich ein Gebiet mit der Randdarstellung (1') durch einen Diffeomorphismus in ein Gebiet mit der Randdarstellung (1) überführen läßt.

Wie in /2/ und /5/ wird zunächst die Lösung in gewichteten Sobolevräumen betrachtet, Dabei bezeichnet $W_\alpha^k(G)$ den gewichteten Sobolevraum mit der Norm

$$\|u\|_{W_\alpha^k(G)} = \|u\|_{k,\alpha;G} = \Big(\int_G \sum_{|\beta| \le k} r^{\alpha-2(k-|\beta|)} |D^\beta u|^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\overset{\circ}{W}{}_\alpha^k(G)$ sei die Abschließung von $C_0^{\infty}(G)$ bez. der Norm $\|\cdot\|_{k,\alpha;G}$, und $W_{-\alpha}^{-k}(G)$ sei der Dualraum zu $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^k(G)$. Die Norm in $W_{-\alpha}^{-k}(G)$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{-k,-\alpha;G}$. Für $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^0(G) = W_\alpha^0(G)$ schreiben wir auch $L_\alpha^2(G)$.

Wir betrachten das folgende Dirichletproblem

$$L(x,D)u = \sum_{|\beta| \le 2m} a_\beta(x)\, D^\beta u = f \quad \text{in } G,$$
$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \ (j=0,1,\ldots,m-1) \quad \text{auf } \Gamma. \tag{2}$$

(Die Randbedingungen beziehen sich hierbei nur auf die glatten Teilstücke von Γ.)
Wir ordnen jedem Multiindex $\beta = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ einen Multiindex $\beta' = (\beta_1',\beta_2',\dots,\beta_n')$ mit

$$\begin{aligned}&\beta' \le \beta \text{ (d. h. } \beta_i' \le \beta_i \text{ für } i = 1,2,\dots,n) \text{ und}\\ &|\beta| - m \le |\beta'| \le m\end{aligned} \tag{3}$$

zu. Dann ist

$$a(u,v) = \int_G \sum_{|\beta| \le 2m} (-1)^{|\beta'|} D^{\beta-\beta'} u D^{\beta'}(a_\beta(x)v)\, dx \tag{4}$$

eine zu $L(x,D)$ gehörende Bilinearform. Aus der Schwarzschen Ungleichung und der Beschränktheit der Funktionen $a_\beta(x)$ sowie deren Ableitungen folgt die Stetigkeit von $a(u,v)$ auf $\mathring{W}^m(G)\times\mathring{W}^m(G)$ bzw. $\mathring{W}^m_\alpha(G) \times \mathring{W}^m_{-\alpha}(G)$.
Der Aufgabe (2) entspricht das Variationsproblem

$$a(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \mathring{W}^m(G) \quad \text{bzw.} \tag{5}$$

$$a(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \mathring{W}^m_{-\alpha}(G), \tag{5'}$$

wobei $u \in \mathring{W}^m(G)$ bzw. $u \in \mathring{W}^m_\alpha(G)$ die gesuchte Lösung ist. Dabei bedeutet $\langle f,v\rangle$ mit $f \in W^{-m}(G)$ bzw. $f \in W^{-m}_\alpha(G)$ die Anwendung des Funktionals f auf die Funktion v.
Es sei G_0 ein unendlicher Kegel, dessen Rand Γ_0 die Darstellung (1) hat. $G_R = \{x \in G_0 : |x| < R\}$ und $G_{R'} = \{x \in G_0 : |x| < R'\}$ $(R' < R)$ seien Gebiete, die in $G \cap G_0$ enthalten sind.
Wir erhalten folgendes Ergebnis:

$u \in \mathring{W}^m_\alpha(G)$ sei Lösung des Variationsproblems (5') mit $f \in W^{-m+k}_\alpha(G)$ $(k \in \{1,2,\dots,m\})$.

1. Es gelte
   a) $k = 1$ oder
   b) $a_\beta(x) = \text{const.}$ für $|\beta| = 2m$, $a_\beta(x) = 0$ für $2m-k < |\beta| \le 2m-1$.

   Auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \dfrac{\pm(\alpha-2k)-n+2m}{2}$ mögen keine Pole von $R(\lambda)$ liegen. Dann gilt

$$u = \sum_j \sum_{s=o}^{k_j-1} a_{js} r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + w \quad \text{in } G_{R'}$$

mit $w \in W_\alpha^{m+k}(G_{R'})$. Dabei sind λ_j die Pole von $R(\lambda)$ aus dem Streifen $h = \frac{-(\alpha-2k)-n+2m}{2} < \mathrm{Im}\lambda < h+k$. a_{js} sind gewisse Konstanten und $\psi_{js}(\omega)$ beliebig oft differenzierbare Funktionen der Winkelkoordinaten $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$.

2. Auf den Geraden $\mathrm{Im}\lambda = \frac{\pm(\alpha-2k)-n+2m}{2}$ und im Streifen $h = \frac{-(\alpha-2k)-n+2m}{2} < \mathrm{Im}\lambda < h+k$ mögen keine Pole von $R(\lambda)$ liegen. Dann ist $u \in W_\alpha^{m+k}(G_{R'})$, und es gilt

$$\|u\|_{m+k,\alpha;G_{R'}} \le c(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R}).$$

Für $\alpha = 0$ erhält man entsprechende Aussagen in gewöhnlichen Sobolevräumen.

Hierbei ist $R(\lambda)$ der Resolventenoperator einer parameterabhängigen Randwertaufgabe der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\le 2m} \sum_{|\gamma|\le 2m-j} \hat{a}_{j\gamma}(\omega)\,(i\lambda)^j \frac{\partial^{|\gamma|}\tilde{u}}{\partial\omega^\gamma} = \tilde{F} \quad \text{in } D_0,\\
&\frac{\partial^{|\gamma|}\tilde{u}}{\partial\omega^\gamma} = 0 \quad \text{auf } \partial D_o \text{ für } |\gamma|\le m-1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Diese Randwertaufgabe erhält man aus der Aufgabe

$$\begin{aligned}
&L_0(0,D)u = \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(0)\, D^\beta u = f \quad \text{in } G_0,\\
&\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j} = 0 \text{ auf } \Gamma_0\setminus\{0\} \ (j=0,1,\ldots,m-1),
\end{aligned} \tag{7}$$

indem man die Transformation in Polarkoordinaten (r,ω) und die Transformation $\tau = \ln\frac{1}{r}$ durchführt und auf die dadurch erhaltene Randwertaufgabe die Fouriertransformation bez. τ anwendet. Der Resolventenoperator zu (6) ist bez. λ eine meromorphe Funktion. Eine ausführliche Beschreibung dieses Operators findet man z. B. in /7/ und /8/.

In den beiden ersten Abschnitten betrachten wir zunächst das Dirichletproblem für spezielle elliptische Operatoren im unendlichen Kegel G_0. Im 3. Abschnitt wird die Aufgabe (2) im beschränkten Gebiet G betrachtet. Auf die Ergebnisse der ersten beiden Abschnitte wird dadurch zurückgegriffen, daß die Koeffizienten $a_\beta(x) \in C^\infty(\overline{G})$ außerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung des Koordinatenursprungs zu Funktionen $\tilde{a}_\beta(x) \in C^\infty(\overline{G_0})$ fortgesetzt werden, die den Bedingungen (13) - (15) aus dem 2. Abschnitt genügen.

1. Die homogene Aufgabe mit konstanten Koeffizienten im unendlichen Kegel

G_0 sei ein unendlicher Kegel, dessen Rand Γ_0 die Darstellung (1) hat, d. h., für $|x| < R$ stimme Γ_0 mit Γ überein. Wir betrachten die Randwertaufgabe (7). Es sei $f \in W_\alpha^{-m}(G_0)$, und $u \in \overset{\circ}{W}{}_\alpha^m(G_0)$ sei die Lösung des Variationsproblems

$$a_0(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0), \tag{7'}$$

wobei

$$a_0(u,v) = (-1)^m \int_{G_0} \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(0)\, D^{\beta-\beta'} u D^{\beta'} v\, dx \tag{8}$$

eine zum Operator $L_0(0,D)$ gehörende Bilinearform ist.
Man überzeugt sich leicht davon, daß die Bilinearform $a_0(u,v)$ symmetrisch und stetig auf $\overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0) \times \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$ ist, d. h., es gilt

$$a_0(u,v) = a_0(v,u) \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0),\ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0), \tag{9}$$

$$|a_0(u,v)| \le c\,\|u\|_{m,\alpha;G_0} \|v\|_{m,-\alpha;G_0} \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0),\ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0). \tag{10}$$

$a_0(u,v)$ definiert folglich einen linearen stetigen Operator $A_0 : \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0) \to W_\alpha^{-m}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle A_0 u,v\rangle = a_0(u,v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0).$$

__Lemma 1:__ Es sei Ω ein Gebiet mit außer im Koordinatenursprung glattem Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in W_\alpha^m(\Omega)$ ($\alpha \in R$ beliebig) und

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\setminus\{0\} \quad (j=0,1,\ldots,m-1),$$

dann ist $u \in \overset{\circ}{W}{}_\alpha^m(\Omega)$ und umgekehrt.

__Beweis:__ 1. Es sei $u \in W_\alpha^m(\Omega)$, und es gelte $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0$ auf $\partial\Omega\setminus\{0\}$

für $j = 0,1, \ldots, m-1$. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ seien Funktionen mit

(a) $\varphi(x) = 1$ für $|x| \le 1$, $\varphi(x) = 0$ für $|x| \ge 2$,

(b) $|D^\beta\varphi(x)| \le M$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $|\beta| \le m$,

(c) $\psi(x) = 1 - \varphi(x)$.

Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ definieren wir die Funktionen $\varphi_\varepsilon(x)$ und $\psi_\varepsilon(x)$ wie folgt:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x), \quad \psi_\varepsilon(x) = \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Dann gilt offenbar $|D^\beta \varphi_\varepsilon(x)| \le \varepsilon^{|\beta|} M$ und $|D^\beta \psi_\varepsilon(x)| \le \varepsilon^{-|\beta|} M$.
Wir definieren ferner

$$g_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) \cdot \psi_\varepsilon(x) \text{ und } u_\varepsilon(x) = u\, g_\varepsilon(x).$$

Dann ist

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(x) & \text{für } |x| < 2\varepsilon, \\ 1 & \text{für } 2\varepsilon \le |x| \le \frac{1}{\varepsilon}, \\ \varphi_\varepsilon(x) & \text{für } |x| > \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Insbesondere gilt $g_\varepsilon(x) = 0$ für $|x| \le \varepsilon$ und für $|x| \ge \frac{2}{\varepsilon}$.
Folglich ist $u_\varepsilon(x) = u\, g_\varepsilon(x) \in W_\alpha^m(\Omega)$.
Es sei $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| < 2\varepsilon\}$ und $\tilde\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| > \frac{1}{\varepsilon}\}$.

Da $u(x) = u_\varepsilon(x)$ für $2\varepsilon \le |x| \le \frac{1}{\varepsilon}$ ist, erhält man

$$\|u-u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega} = \|u-u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon} + \|u-u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\tilde\Omega_\varepsilon}$$

$$\le (\|u\|_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon} + \|u_\varepsilon\|_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon})^2 + (\|u\|_{m,\alpha;\tilde\Omega_\varepsilon} + \|u_\varepsilon\|_{m,\alpha;\tilde\Omega_\varepsilon})^2.$$

Dabei ist

$$\|u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon} = \|ug_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon} = \|u\psi_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon}$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|\beta|\le m} r^{\alpha-2(m-|\beta|)} |D^\beta(u\psi_\varepsilon)|^2 \, dx$$

$$\le c' \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|\beta|\le m} r^{\alpha-2(m-|\beta|)} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} |D^{\beta_1}u|^2 \times |D^{\beta_2}\psi_\varepsilon|^2 \, dx.$$

Benutzt man, daß $r < 2\varepsilon$ in Ω_ε und $|D^{\beta_2}\psi_\varepsilon| \le \varepsilon^{-|\beta_2|} M$ ist, dann erhält man hieraus

$$\|u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon} \le c\|u\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon}$$

wobei die Konstante c nicht von ε abhängt. Analog erhält man

$$\|u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\tilde{\Omega}_\varepsilon} \le c\|u\|^2_{m,\alpha;\tilde{\Omega}_\varepsilon}$$

und damit

$$\|u-u_\varepsilon\|^2_{m,\alpha;\Omega} \le c''(\|u\|^2_{m,\alpha;\Omega_\varepsilon} + \|u\|^2_{m,\alpha;\tilde{\Omega}_\varepsilon}),$$

wobei auch c'' nicht von ε abhängt. Die rechte Seite dieser Ungleichung strebt für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, folglich gilt

$$\|u-u_\varepsilon\|_{m,\alpha;\Omega} \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Es sei $\Omega'_\varepsilon = \{x \in \Omega : \varepsilon < |x| < \frac{2}{\varepsilon}\}$. Dann ist $u_\varepsilon = ug_\varepsilon = 0$ in $\Omega \setminus \Omega'_\varepsilon$. Da die Normalenableitungen von u bis zur Ordnung $m-1$ auf $\partial\Omega \setminus \{0\}$ verschwinden, gilt auch

$$\frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial \nu^j} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \{0\} \quad (j=0,1,\dots,m-1).$$

Folglich gilt

$$\frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial \nu^j} = 0 \quad (j=0,1,\dots,m-1)$$

auf dem Rand des Gebietes Ω'_ε und damit $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^m(\Omega'_\varepsilon)$ (s. z. B. J. M. Berezanskij /1/). Da $u_\varepsilon = 0$ in $\Omega \setminus \Omega'_\varepsilon$ ist, folgt hieraus $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(\Omega)$, und wegen $\|u-u_\varepsilon\|_{m,\alpha;\Omega} \to 0$ ist auch $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(\Omega)$.

2. Es sei $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $\{u_n\}$, $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, mit $\|u-u_n\|_{m,\alpha;\Omega} \to 0$ für $n \to \infty$.

Ist $0 < \varepsilon < 1$, φ eine Funktion mit

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi = 0 \text{ für } |x| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ und } |x| > \tfrac{2}{\varepsilon},\ \varphi = 1 \text{ für } \varepsilon < |x| < \tfrac{1}{\varepsilon}$$

und $\Omega_\varepsilon'' = \{x \in \Omega : \frac{\varepsilon}{3} < |x| < \frac{3}{\varepsilon}\}$, dann ist $u_n \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon'')$, und es gilt

$$\|u\varphi - u_n\varphi\|_{W^m(\Omega_\varepsilon'')} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Folglich ist $u\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^m(\Omega_\varepsilon'')$, d. h.

$$\frac{\partial^j(u\varphi)}{\partial\nu^j} = 0 \text{ auf } \{y \in \partial\Omega : \varepsilon < |y| < \tfrac{1}{\varepsilon}\} \quad (j=0,1,\ldots,m-1), \text{ also}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j} = 0 \text{ auf } \{y \in \partial\Omega : \varepsilon < |y| < \tfrac{1}{\varepsilon}\} \quad (j=0,1,\ldots,m-1).$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, gilt

$$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \{0\} \quad (j=0,1,\ldots,m-1).$$

Das Lemma ist damit bewiesen.

Lemma 2 folgt aus der Regularitätstheorie für elliptische Randwertaufgaben (s. z. B. /1/ und /3/).

<u>Lemma 2:</u> Es sei Ω ein Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, wobei insbesondere $\{y \in \partial\Omega : R_1 < |y| < R_2\}$ glatt sei. R_1' und R_2' seien reelle Zahlen mit $0 < R_1 < R_1' < R_2' < R_2$. Ferner seien $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : R_1 < |x| < R_2\}$ und $\tilde{\Omega}' = \{x \in \Omega : R_1' < |x| < R_2'\}$. Ist dann $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(\Omega)$ schwache Lösung der Aufgabe

$$Lu = f \in W^{-m+k}(\Omega) \quad (k \geq 0),$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (j=0,1,\ldots,m-1)$$

mit dem stark elliptischen Operator L, dann ist $u \in W^{m+k}(\tilde{\Omega}')$, und es gilt

$$\|u\|_{W^{m+k}(\tilde{\Omega}')} \leq c(\|f\|_{W^{-m+k}(\tilde{\Omega})} + \|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}).$$

Die Konstante c hängt hierbei nicht von f ab.

__Lemma 3:__ Es sei $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\gamma-2(m-k)}(G_0)$ und $A_0 u \in W^{-k}_{\gamma}(G_0)$ ($k \in \{0,1,\dots,m\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig). Dann ist $u \in W^{2m-k}_{\gamma}(G_0)$, und es gilt

$$\|u\|_{2m-k,\gamma;G_0} \leq c(\|A_0 u\|_{-k,\gamma;G_0} + \|u\|_{0,\gamma-2(2m-k);G_0}).$$

c hängt hierbei nicht von u ab.

Der Beweis zu diesem Lemma wird im 2. Abschnitt (s. Lemma 3') für variable Koeffizienten $a_\beta(x)$ geführt.

__Satz 1:__ Liegen keine Pole von $R(\lambda)$ auf den Geraden $\mathrm{Im}\lambda = \frac{\pm\alpha-n+2m}{2}$, dann hat die Aufgabe (7) für $f \in W^{-m}_{\alpha}(G_0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G_0)$, und es gilt

$$\|u\|_{m,\alpha;G_0} \leq c\,\|f\|_{-m,\alpha;G_0}.$$

__Beweis:__ Dieser Satz ist in /2/ für den biharmonischen Operator bewiesen worden. Der folgende Beweis ist lediglich eine Übertragung auf elliptische Differentialoperatoren beliebiger Ordnung.

1. Es sei $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G_0)$ beliebig. Dann ist nach der Definition der gewichteten Räume $r^{\alpha-2m}\,\overline{u} \in W^{0}_{2m-\alpha}(G_0) = L^{2}_{2m-\alpha}(G_0)$.

Da keine Pole von $R(\lambda)$ auf der Geraden $\mathrm{Im}\lambda = \frac{\alpha-n+2m}{2}$ liegen, hat die Aufgabe

$$L_0(0,D)v = r^{\alpha-2m}\,\overline{u} \quad \text{in } G_0,$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \setminus \{0\} \quad (j=0,1,\dots,m-1)$$

nach Satz 1.1 aus /5/ genau eine Lösung v in $W^{2m}_{2m-\alpha}(G_0)$, und es gilt

$$\|v\|_{2m,2m-\alpha;G_0} \leq c\,\|r^{\alpha-2m}\overline{u}\|_{0,2m-\alpha;G_0} = c\,\|u\|_{0,2m-\alpha;G_0}. \tag{11}$$

Aus der Einbettung $W^{2m}_{2m-\alpha}(G_0) \subset W^{m}_{-\alpha}(G_0)$ und Lemma 1 folgt $v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$. Ferner ist

$$a_0(u,v) = a_0(v,u) = \int_{G_0} L_0(0,D)v\ u\ dx = \int_{G_0} r^{\alpha-2m}\bar{u}\ u\ dx$$
$$= \|u\|^2_{0,\alpha-2m;G_0}.$$

Da nach (11) $\|v\|_{m,-\alpha;G_0} \leq \|v\|_{2m,2m-\alpha;G_0} \leq c\|u\|_{0,\alpha-2m;G_0}$ ist, erhalten wir

$$\|u\|^2_{0,\alpha-2m;G_0} = a_0(u,v) = \langle A_0u,v\rangle = \|A_0u\|_{-m,\alpha;G_0}\|v\|_{m,-\alpha;G_0}$$
$$\leq c\|A_0u\|_{-m,\alpha;G_0}\|u\|_{0,\alpha-2m;G_0}, \text{ d. h.}$$

$$\|u\|_{0,\alpha-2m;G_0} \leq c\|A_0u\|_{-m,\alpha;G_0} \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0).$$

Aus Lemma 3 mit $k=m$ und $\gamma=\alpha$ ergibt sich dann

$$\|u\|_{m,\alpha;G_0} \leq c'\|A_0u\|_{-m,\alpha;G_0}.$$

Hieraus folgt, daß $A_0 : \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0) \to W^{-m}_\alpha(G_0)$ eineindeutig ist und der Wertebereich von A_0 abgeschlossen ist.

2. Wir zeigen, daß der Nullraum des adjungierten Operators A_0^* nur aus dem Nullelement besteht.

$A_0^*: (\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0))'' \to (\overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0))'$ ist definiert durch die Gleichung

$$\langle A_0^*F,u\rangle = F\cdot A_0u \ \forall F \in (\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0))'',\ \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0).$$

Aus $F \in \ker A_0^*$ folgt $F\cdot A_0u = 0$ für alle $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0)$. Es sei T_1 die Rieszsche Abbildung von $(\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0))'$ auf $\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$ und T_2 die Rieszsche Abbildung von $(\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0))''$ auf $(\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0))'$. Dann ist

$$F\cdot A_0u = (A_0u,T_2F)_{(\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0))'} = (T_1A_0u,T_1T_2F)_{\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)}$$
$$= \langle A_0u,T_1T_2F\rangle = 0 \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0).$$

Hierbei ist $w=T_1T_2F \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$. Damit erhält man

$$\langle A_0u,w\rangle = a_0(u,w) = a_0(w,u) = 0 \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0). \tag{12}$$

Da aber auch keine Pole von $R(\lambda)$ auf der Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \frac{-\alpha-n+2m}{2}$

liegen, hat das Variationsproblem (12) nur die Lösung $w=0$ in $\overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$. Folglich besteht der Nullraum von A_0^* nur aus dem Nullelement. Damit ist A_0 ein Homöomorphismus auf $W_\alpha^{-m}(G_0)$.

Der Beweis des folgenden Satzes wird ebenfalls analog zu /2/ geführt.

<u>Satz 2:</u> Es sei $\alpha_1 > \alpha_2$ und $f \in W_{\alpha 1}^{-m}(G_0) \cap W_{\alpha 2}^{-m}(G_0)$. Liegen auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \dfrac{\pm\alpha_2 - n + 2m}{2}$ keine Pole von $R(\lambda)$ und ist $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha_1}(G_0)$ Lösung des Variationsproblems

$$a_0(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_1}(G_0),$$

dann gilt

$$u_1 = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j - 1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + u_2,$$

wobei $u_2 \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha_2}(G_0)$ Lösung des Variationsproblems

$$a_0(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_2}(G_0)$$

ist und $\|u_2\|_{m,\alpha_2;G_0} \le c\,\|f\|_{-m,\alpha_2;G_0}$.

Hierbei sind λ_j die Pole von $R(\lambda)$ aus dem Streifen

$h_1 = \dfrac{-\alpha_1 - n + 2m}{2} < \operatorname{Im}\lambda < h_2 = \dfrac{-\alpha_2 - n + 2m}{2}$ und k_j deren Vielfachheiten. $\psi_{js}(\omega)$ sind beliebig oft differenzierbare Funktionen der Winkelkoordinaten $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$.

<u>Beweis:</u> Da auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \dfrac{\pm\alpha_2 - n + 2m}{2}$ keine Pole von $R(\lambda)$ liegen, existiert nach Satz 1 genau eine Lösung $u_2 \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha_2}(G_0)$ des Variationsproblems

$$a_0(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_2}(G_0),$$

und es gilt $\|u_2\|_{m,\alpha_2;G_0} = c\,\|f\|_{-m,\alpha_2;G_0}$. Setzen wir $w = u_1 - u_2$, dann erhalten wir

$$a_0(w,v) = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_1}(G_0) \cap \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_2}(G_0),$$

$$\frac{\partial^j w}{\partial \nu^j} = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \setminus \{0\} \quad (j=0,1,\dots,m-1).$$

Aus Lemma 2 folgt $w \in W^{2m}(\tilde{G})$ für jedes Gebiet $\tilde{G} = \{x \in G_0 : R_1 < |x| < R_2\}$ mit $0 < R_1 < R_2 < \infty$.

Es sei $\chi \in C^\infty(\overline{G}_0)$ eine Ausschneidungsfunktion mit

$$0 \leq \chi \leq 1,\ \chi = 1 \text{ für } |x| < R_1,\ \chi = 0 \text{ für } |x| > R_2 > R_1.$$

Man weist leicht nach, daß dann $\chi w \in \overset{o}{W}{}^{m}_{\alpha_1}(G_0)$ ist. Ferner gilt $L_0(0,D)(\chi w) \in L^2_{\alpha+2m}(G_0)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, also insbesondere

$$L_0(0,D)(\chi w) \in L^2_{\alpha_1+2m}(G_0).$$

Aus Lemma 3 mit $k = 0$ und $\gamma = \alpha_1+2m$ folgt dann $\chi w \in W^{2m}_{\alpha_1+2m}(G_0)$.

Analog erhält man $(1-\chi)w \in W^{2m}_{\alpha_2+2m}(G_0)$. Aus $\chi w \in W^{2m}_{\alpha_1+2m}(G_0)$, $L_0(0,D)(\chi w) \in L^2_{\alpha_2+2m}(G_0)$ und $\left.\frac{\partial^j(\chi w)}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma_0 \setminus \{0\}} = 0$ für $j=0,1,\dots,m-1$ folgt nach Satz 1.2 aus /5/

$$\chi w = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + w'$$

mit $w' \in W^{2m}_{\alpha_2+2m}(G_0)$, $L_0(0,D)w' = L_0(0,D)(\chi w)$ und $\frac{\partial^j w'}{\partial \nu^j} = 0$ auf $\Gamma_0 \setminus \{0\}$ $(j=0,1,\dots,m-1)$. Wir kürzen die Summe durch $\sum$ ab. Dann ist

$$w - \sum = \chi w - \sum + (1-\chi)w = w' + (1-\chi)w \in W^{2m}_{\alpha_2+2m}(G_0),$$

$$L_0(0,D)(w-\sum) = L_0(0,D)w - L_0(0,D)(\chi w - w') = 0,$$

$$\frac{\partial^j(w-\sum)}{\partial \nu^j} = \frac{\partial^j w}{\partial \nu^j} - \frac{\partial^j(\chi w)}{\partial \nu^j} + \frac{\partial^j w'}{\partial \nu^j} = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \setminus \{0\}\ (j=0,\dots,m-1).$$

Da keine Pole von $R(\lambda)$ auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \frac{\pm\alpha_2-n+2m}{2}$ liegen, hat diese Aufgabe nach Satz 1.1 aus /5/ nur die Lösung $w - \sum = 0$ in $W^{2m}_{\alpha_2+2m}(G_0)$, woraus die Behauptung des Satzes folgt.

2. Die homogene Aufgabe mit variablen Koeffizienten im unendlichen Kegel

Wir betrachten jetzt die Aufgabe

$$
\begin{aligned}
&L_0(x,D)u = \sum_{|\beta|=2m} \tilde{a}_\beta(x)\, D^\beta u = f \quad \text{in } G_0, \\
&\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \setminus \{0\} \quad (j=0,1,\dots,m-1)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

mit dem dazugehörigen Variationsproblem

$$a_1(u,v) = (-1)^m \int_{G_0} \sum_{|\beta|=2m} D^{\beta-\beta'} u\, D^{\beta'}(\tilde{a}_\beta(x)v)\, dx = \langle f,v\rangle \tag{12'}$$

für alle $v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$. $L_0(x,D)$ sei wieder stark elliptisch, und an die Koeffizienten $\tilde{a}_\beta(x) \in C^\infty(\overline{G}_0)$ stellen wir folgende Bedingungen:

$$\left| r^{|\gamma|} D^\gamma(\tilde{a}_\beta(x) - \tilde{a}_\beta(0))\right| \le \delta \quad \text{für} \quad |\gamma| \le m \tag{13}$$

(δ hinreichend klein),

$$\tilde{a}_\beta(x) = \tilde{a}_\beta(0) \quad \text{für } |x| \ge 1, \tag{14}$$

$$\left| r^{|\gamma|-1} D^\gamma(\tilde{a}_\beta(x) - \tilde{a}_\beta(0))\right| \le M \quad \text{für} \quad |\gamma| \le m. \tag{15}$$

$a_1(u,v)$ ist stetig auf $\overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0) \times \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$ und erzeugt folglich einen linearen stetigen Operator $A_1 : \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0) \to W^{-m}_\alpha(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle A_1 u, v\rangle = a_1(u,v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0).$$

Das folgende Lemma ist in /2/ für den biharmonischen Operator bewiesen worden. Ein entsprechendes Ergebnis für elliptische Operatoren mit variablen Koeffizienten findet man für den Fall $\alpha = 0$, $k = 0$ auch in /5/. Wir benutzen hier die gleiche Beweisidee.

<u>Lemma 3':</u> Es gelte $\tilde{a}_\beta(x) = \text{const.}$ für $|x| \ge 1$. Ist $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{\gamma+2(k-m)}(G_0)$ und $A_1 u \in W^{-k}_\gamma(G_0)$ ($k \in \{0,1,\dots,m\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig), dann ist $u \in W^{2m-k}_\gamma(G_0)$, und es gilt

$$\|u\|_{2m-k,\gamma;G_0} \le c(\|A_1u\|_{-k,\gamma;G_0} + \|u\|_{0,\gamma+2(k-2m);G_0}).$$

<u>**Beweis:**</u> Wir definieren folgende Gebiete:

$$S_i = \{x \in G_0:\ 2^{-i} < |x| < 3\cdot 2^{-i}\},$$

$$S_i' = \{x \in G_0:\ 2^{-(i+1)} < |x| < 3\cdot 2^{-(i-1)}\} = S_{i-1} \cup S_i \cup S_{i+1}.$$

$\{S_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$ bildet dann offenbar eine abzählbare Überdeckung von G_0, wobei jeder Punkt $x \in G_0$ von höchstens 2 der Gebiete S_i überdeckt wird. In S_i und S_i' gilt

$$\frac{r}{6} < 2^{-i} < 2r,$$

d. h. für beliebiges $\mu \in \mathbb{R}$

$$6^{-|\mu|}\, r^{\mu} < 2^{-i\mu} < 6^{|\mu|}\, r^{\mu}. \tag{16}$$

Aus $A_1u \in W_\gamma^{-k}(G_0)$ folgt nach Lemma 2 $u|_{S_i'} \in W^{2m-k}(S_i')$. Ferner gilt

$$\|u\|^2_{W^{2m-k}(S_0)} \le c(\|A_1u\|^2_{W^{-k}(S_0')} + \|u\|^2_{L^2(S_0')}), \tag{17}$$

wobei die Konstante c nur von m,n,S_0,S_0' und den Maxima der Koeffizienten $\tilde{a}_\beta(x)$ abhängt (s. /3/). Es sei nun $x \in S_i'$. Dann ist $x' = 2^i x \in S_0'$ und $\tilde{u}(x') = u(2^{-i}x') \in W^{2m-k}(S_0')$. Für $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}^k(S_i')$ gilt dann $\tilde{\varphi}(x') = \varphi(2^{-i}x') \in \overset{0}{W}{}^k(S_0')$.

$A_1^{(i)}:\ W^m(S_0') \to W^{-m}(S_0')$ sei der durch die Gleichung

$$\langle A_1^{(i)}\tilde{u}(x'),\, \tilde{\varphi}(x')\rangle = \langle A_1u(x),\, \varphi(x)\rangle \ \forall \tilde{\varphi}(x') \in \overset{0}{W}{}^m(S_0')$$

definierte Operator. Für $\tilde{\varphi}(x') \in \overset{0}{W}{}^m(S_0')$ (d. h. $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}^m(S_i')$) ist

$$\langle A_1u(x),\, \varphi(x)\rangle = (-1)^m \int_{S_i'} \sum_{|\beta|=2m} D_x^{\beta-\beta'}u(x)\, D_x^{\beta'}[\tilde{a}_\beta(x)\,\varphi(x)]\,dx$$

$$= (-1)^m \int_{S_0'} \sum_{|\beta|=2m} D_{x'}^{\beta-\beta'}\tilde{u}(x')\, D_{x'}^{\beta'}[\tilde{a}_\beta(2^{-i}x')\,\tilde{\varphi}(x')]\,2^{(2m-n)i}dx',$$

d. h., man erhält

$$(-1)^m \int_{S_0'} \sum_{|\beta|=2m} D_{x'}^{\beta-\beta'} \tilde{u}(x')\, D_{x'}^{\beta'}[\tilde{a}_\beta(2^{-i}x')\, \tilde{\varphi}(x')]\, dx'$$

$$= \langle 2^{(n-2m)i}\, A_i^{(i)} \tilde{u}(x'),\, \tilde{\varphi}(x')\rangle.$$

Da die Konstante c in (17) nur von m, n, S_0, S_0' und den Maxima der Koeffizienten $\tilde{a}_\beta(x)$ abhängt, folgt hieraus

$$\|\tilde{u}\|^2_{W^{2m-k}(S_0)} \leq c(\|2^{(n-2m)i} A_i^{(i)} \tilde{u}(x')\|^2_{W^{-k}(S_0')} + \|\tilde{u}\|^2_{L^2(S_0')}) \quad (18)$$

mit der gleichen Konstante c wie in (17). Hierbei ist

$$\|2^{(n-2m)i} A_i^{(i)} \tilde{u}(x')\|^2_{W^{-k}(S_0')}$$

$$= \sup_{\substack{\tilde{\varphi}(x') \in \overset{\circ}{W}{}^k(S_0') \\ \tilde{\varphi} \neq 0}} \frac{|2^{(n-2m)i} \langle A_i^{(i)} \tilde{u}(x'),\, \tilde{\varphi}(x')\rangle|^2}{\int_{S_0'} \sum_{|\beta|=k} |D_{x'}^\beta \tilde{\varphi}(x')|^2\, dx'}$$

$$= \sup_{\substack{\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^k(S_i') = \overset{\circ}{W}{}^k_{-\gamma}(S_i') \\ \varphi \neq 0}} \frac{|2^{(n-2m)i} \langle A_1 u(x),\, \varphi(x)\rangle|^2}{\int_{S_i'} \sum_{|\beta|=k} |D_x^\beta \varphi(x)|^2\, 2^{(n-2|\beta|)i}\, dx}.$$

Unter Benutzung von (16) erhält man

$$\|2^{(n-2m)i}\, A_i^{(i)} \tilde{u}(x')\|^2_{W^{-k}(S_0')}$$

$$\leq 2^{(n-4m+\gamma+2k)i}\, 6^{|\gamma|+2k} \sup_{\substack{\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^k_{-\gamma}(S_i') \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\langle A_1 u(x),\, \varphi(x)\rangle|^2}{\|\varphi\|^2_{W^k_{-\gamma}(S_i')}}$$

$$\leq 2^{(n-4m+\gamma+2k)i}\, 6^{|\gamma|+2k} \|A_1 u\|^2_{-k,\gamma;S_i'}.$$

Aus (18) folgt damit nach der Koordinatentransformation $x = 2^{-i}x'$

$$\int_{S_i} \sum_{|\beta|=2m-k} |D_x u(x)|^2\, 2^{-i(\gamma-2(2m-k)+2|\beta|)}\, dx$$

$$\leq c(6^{|\gamma|+2k} \|A_1 u\|^2_{-k,\gamma;S_i'} + \int_{S_i'} |u|^2\, 2^{-i(\gamma+2k-4m)}\, dx).$$

Aus (16) ergibt sich dann

$$\|u\|^2_{2m-k,\gamma;S_i} = c'(\|A_1u\|^2_{-k,\gamma;S_i'} + \|u\|^2_{0,\gamma+2k-4m;S_i'}). \tag{19}$$

wobei c' unabhängig von u und i ist. Offenbar gilt

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|u\|^2_{0,\gamma+2k-4m;S_i'} \leq 4\|u\|^2_{0,\gamma+2k-4m;G_0}.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existieren Funktionen $v \in \overset{0}{W}{}^k_{-\gamma}(G_0)$ und $v_i \in \overset{0}{W}{}^k_{-\gamma}(S_i')$ mit

$$\langle A_1u,\varphi\rangle = (\varphi,v)_{W^k_{-\gamma}(G_0)} \qquad \forall\varphi \in \overset{0}{W}{}^k_{-\gamma}(G_0),$$

$$\langle A_1u,\varphi\rangle = (\varphi,v_i)_{W^k_{-\gamma}(S_i')} \qquad \forall\varphi \in W^k_{-\gamma}(S_i'),$$

$$\|v\|_{k,-\gamma;G_0} = \|A_1u\|_{-k,\gamma;G_0}, \quad \|v_i\|_{k,-\gamma;S_i'} = \|A_1u\|_{-k,\gamma;S_i'}.$$

Es sei $\tilde{v}_i$ die Fortsetzung von v_i durch 0 auf G_0. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|v_i\|^2_{k,-\gamma;S_i'} &= (v_i,v_i)_{W^k_{-\gamma}(S_i')} = \langle A_1u,v_i\rangle = \langle A_1u,\tilde{v}_i\rangle \\ &= (v,\tilde{v}_i)_{W^k_{-\gamma}(G_0)} = (v,v_i)_{W^k_{-\gamma}(S_i')} \\ &\leq \|v\|_{k,-\gamma;S_i'}\|v_i\|_{k,-\gamma;S_i'},\end{aligned}$$

d. h., es ist $\|v_i\|_{k,-\gamma;S_i'} \leq \|v\|_{k,-\gamma;S_i'}$ und damit

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|A_1u\|^2_{-k,\gamma;S_i'} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|v_i\|^2_{k,-\gamma;S_i'} \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|v\|^2_{k,-\gamma;S_i'} \\ &\leq 4\|v\|^2_{k,-\gamma;G_0} = 4\|A_1u\|^2_{-k,\gamma;G_0}.\end{aligned}$$

Hiermit folgt aus (19)

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{2m-k,\gamma;G_0} &\leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|u\|^2_{2m-k,\gamma;S_i'} \\ &\leq 4c'(\|A_1u\|^2_{-k,\gamma;G_0} + \|u\|^2_{0,\gamma+2k-4m;G_0}),\end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Wie in /5/ erhält man aus Satz 2 den folgenden Satz.

Satz 2': Es sei $\alpha_1 - 2 \le \alpha_2 < \alpha_1$ und $f \in W^{-m}_{\alpha_1}(G_0) \cap W^{-m}_{\alpha_2}(G_0)$.

$u \in \overset{0}{W}{}^{m}_{\alpha_1}(G_0)$ mit $u = 0$ für $|x| > R > 0$ sei Lösung des Variationsproblems

$$a_1(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in W^{m}_{-\alpha_1}(G_0).$$

Für die Koeffizienten $\tilde{a}_\beta(x)$ seien die Bedingungen (13) und (15) erfüllt. Liegen dann keine Pole von $R(\lambda)$ auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \frac{\pm\alpha_2 - n + 2m}{2}$, so gilt

$$u = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j - 1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + w(x),$$

wobei λ_j wieder die Pole von $R(\lambda)$ aus dem Streifen $\frac{-\alpha_1 - n + 2m}{2} < \operatorname{Im}\lambda < \frac{-\alpha_2 - n + 2m}{2}$ und k_j deren Vielfachheiten bezeichnen.

$w \in \overset{0}{W}{}^{m}_{\alpha_2}(G_0)$ ist Lösung des Variationsproblems

$$a_0(w,v) = \langle f,v\rangle - a_1(u,v) + a_0(u,v) \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}^{m}_{-\alpha_2}(G_0),$$

und es gilt

$$\|w\|_{m,\alpha_2;G_0} \le c(\|f\|_{-m,\alpha_2;G_0} + \|u\|_{m,\alpha_1;G_0}).$$

Beweis: Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|a_1(u,v) - a_0(u,v)| = \Big|\int_{G_0} \sum_{|\beta| = 2m} D^{\beta-\beta'} u\, D^{\beta'}[(\tilde{a}_\beta(x) - \tilde{a}_\beta(0))v]\, dx$$

$$\le c' \int_{G_0} \sum_{|\beta| = 2m} \sum_{\beta'' \le \beta'} r^{\frac{\alpha_1}{2}} |D^{\beta-\beta'} u|\, r^{-\frac{\alpha_2}{2} - (m - |\beta''|)} |D^{\beta''} v|$$

$$\cdot |r^{m - |\beta''| - 1} D^{\beta' - \beta''}(\tilde{a}_\beta(x) - \tilde{a}_\beta(0))|\, r^{1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}\, dx$$

$$\le c'' \|u\|_{m,\alpha_1;G_0} \|v\|_{m,-\alpha_2;G_0} \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}^{m}_{-\alpha_1}(G_0).$$

$a_1(u,v) - a_0(u,v)$ definiert also ein lineares stetiges Funktional $f' \in W^{-m}_{\alpha_1}(G_0) \cap W^{-m}_{\alpha_2}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle f',v\rangle = a_1(u,v) - a_0(u,v) \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}^{m}_{-\alpha_1}(G_0).$$

und es gilt $\|f'\|_{-m,\alpha_2;G_0} \leq c'' \|u\|_{m,\alpha_1;G_0}$. Aus $a_1(u,v) = \langle f,v\rangle$ folgt

$$a_0(u,v) = \langle f-f',v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_1}(G_0)$$

mit $f-f' \in W^{-m}_{\alpha_1}(G_0) \cap W^{-m}_{\alpha_2}(G_0)$ und aus Satz 2 daher weiter

$$u = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + w(x)$$

mit $a_0(w,v) = \langle f-f',v\rangle = \langle f,v\rangle - a_1(u,v) + a_0(u,v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha_1}(G_0)$ und

$$\|w\|_{m,\alpha_2;G_0} \leq c_1 \|f-f'\|_{-m,\alpha_2;G_0} \leq c_1(\|f\|_{-m,\alpha_2;G_0} + \|f'\|_{-m,\alpha_2;G_0})$$
$$\leq c(\|f\|_{-m,\alpha_2;G_0} + \|u\|_{m,\alpha_1;G_0}).$$

3. Das Dirichletproblem für stark elliptische Differentialgleichungen im beschränkten Gebiet

Wir kehren jetzt zur Aufgabe (2) zurück. G sei dabei ein beschränktes Gebiet, dessen Rand Γ für $|x| < R$ mit dem Rand Γ_0 von G_0 übereinstimmt. Der Aufgabe (2) entspricht das Variationsproblem (5')

$$a(u,v) = \int_G \sum_{|\beta|=2m} (-1)^{|\beta'|} D^{\beta-\beta'} u\, D^{\beta'}(a_\beta(x)v)\,dx = \langle f,v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G),$$

wobei die Multiindizes β' den Multiindizes β so zugeordnet worden sind, daß sie die Bedingung (3) erfüllen.
Da die Koeffizienten $a_\beta(x)$ und deren Ableitungen in $\bar{G}$ beschränkt sind, ist $a(u,v)$ stetig auf $\overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G) \times \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G)$ und definiert folglich einen linearen stetigen Operator
$A^{(\alpha)}: \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G) \to W^{-m}_{\alpha}(G)$ durch die Gleichung

$$\langle A^{(\alpha)}u,v\rangle = a(u,v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G).$$

Aus $a_\beta(x) \in C^\infty(\bar{G})$ folgt ferner, daß es Funktionen $\tilde{a}_\beta(x) \in C^\infty(\bar{G}_0)$ gibt, die in einer Umgebung $\{x \in G_0 : |x| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon < R' < R)$ des Koordinatenursprungs mit $a_\beta(x)$ übereinstimmen und die Bedingungen (13), (14) und (15) erfüllen.

(Ist z. B. $\psi(x) \in C^\infty(\overline{G}_0)$ eine Funktion mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$, $|D^\gamma \psi| \leq C$ für $|\gamma| \leq m$, dann erfüllen die Funktionen

$$\tilde{a}_\beta(x) = \begin{cases} \psi(\frac{x}{\varepsilon}) \; (a_\beta(x) - a_\beta(0)) + a_\beta(0) & \text{für } |x| < 2\varepsilon, \\ a_\beta(0) & \text{für } |x| \geq 2\varepsilon \end{cases}$$

bei genügend kleinem $\varepsilon < \frac{R}{2}$ die geforderten Bedingungen. Die starke Elliptizität bleibt hierbei erhalten.)

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Norm in $W^k_\alpha(G)$.

<u>Lemma 4:</u> Es gilt $W^{k_1}_{\alpha_1}(G) \subset W^{k_2}_{\alpha_2}(G)$, $\overset{\circ}{W}{}^{k_1}_{\alpha_1}(G) \subset \overset{\circ}{W}{}^{k_2}_{\alpha_2}(G)$ und damit auch

$W^{-k_2}_{-\alpha_2}(G) \subset W^{-k_1}_{-\alpha_1}(G)$ für $k_1 \geq k_2 \geq 0$, $2k_1 - \alpha_1 \geq 2k_2 - \alpha_2$.

Diese Einbettungen sind außerdem stetig.

Im folgenden seien

$$G_\varepsilon = \{x \in G : |x| < \varepsilon\} = \{x \in G_0 : |x| < \varepsilon\},$$

$$\tilde{G}_\varepsilon = \{x \in G : \tfrac{\varepsilon}{2} < |x| < \varepsilon\} = \{x \in G_0 : \tfrac{\varepsilon}{2} < |x| < \varepsilon\}.$$

Ferner sei $\chi \in C^\infty(\tilde{G})$ (bzw. $\chi \in C^\infty(\overline{G}_0)$) eine Funktion mit

$$0 \leq \chi \leq 1, \; \chi = 1 \text{ für } |x| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \; \chi = 0 \text{ für } |x| > \varepsilon.$$

Mit $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v})$ bezeichnen wir die folgende Bilinearform über $\overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0) \times \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$:

$$\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{G_0} \sum_{|\beta| \leq 2m} (-1)^{|\beta'|} D^{\beta - \beta'} \tilde{u} \, D^{\beta'} (\tilde{a}_\beta \tilde{v}) \, dx = a_1(\tilde{u}, \tilde{v}) + a_2(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

wobei $a_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = \displaystyle\int_{G_0} \sum_{|\beta| = 2m} (-1)^m \, D^{\beta - \beta'} \tilde{u} \; D^{\beta'} (\tilde{a}_\beta \tilde{v}) \, dx$ und

$$a_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{G_0} \sum_{|\beta| < 2m} (-1)^{|\beta'|} D^{\beta - \beta'} \tilde{u} \; D^{\beta'} (\tilde{a}_\beta \tilde{v}) \, dx \text{ sei.}$$

Lemma 5: Es sei $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G_0)$ und $\tilde{u}|_{\tilde{G}_\varepsilon} \in W^{m+k}(\tilde{G}_\varepsilon) = W^{m+k}_{\alpha'}(\tilde{G}_\varepsilon)$ ($\alpha' \in \mathbb{R}$ beliebig). Dann definiert die Bilinearform

$$k(\tilde{u},\tilde{v}) = a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v})$$

ein lineares stetiges Funktional $\tilde{f} \in W^{-m+k+1}_{\alpha'}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle\tilde{f},\tilde{v}\rangle = k(\tilde{u},\tilde{v}) \quad \forall\, \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0),$$

und es gilt $\|\tilde{f}\|_{-m+k+1,\alpha';G_0} \leq c\|\tilde{u}\|_{m+k,\alpha';\tilde{G}_\varepsilon}$.

Beweis: Man überzeugt sich leicht davon, daß

$$k(\tilde{u},\tilde{v}) = (-1)^m \int_{G_0} \sum_{|\beta|=2m} [D^{\beta-\beta'}(\chi\tilde{u})\, D^{\beta'}(\tilde{a}_\beta\tilde{v}) - D^{\beta-\beta'}\tilde{u}\, D^{\beta'}(\chi\tilde{a}_\beta\tilde{v})]\,dx$$

Summe von Termen der Gestalt

$$\int_{G_0} h(x)\, D^{\gamma_1}\chi\, D^{\gamma_2}\tilde{u}\, D^{\gamma_3}\tilde{v}\, dx = \int_{\tilde{G}_\varepsilon} h(x)\, D^{\gamma_1}\chi\, D^{\gamma_2}\tilde{u}\, D^{\gamma_3}\tilde{v}\, dx$$

mit $1 \leq |\gamma_1| \leq m$, $|\gamma_2| \leq m$, $|\gamma_3| \leq m$ und $|\gamma_2| + |\gamma_3| \leq 2m-1$ ist. (Die Terme mit $\gamma_1 = 0$ heben sich auf.) Es sei $\gamma' \leq \gamma_3$ ein Multiindex mit $|\gamma_3| - (m-k-1) \leq |\gamma'| \leq m+k-|\gamma_2|$. (Da $|\gamma_2| + |\gamma_3| \leq 2m-1$ ist, existiert solch ein Multiindex.) Dann ist

$$\int_{\tilde{G}_\varepsilon} h(x)\, D^{\gamma_1}\chi\, D^{\gamma_2}\tilde{u}\, D^{\gamma_3}\tilde{v}\, dx = (-1)^{|\gamma'|} \int_{\tilde{G}_\varepsilon} D^{\gamma'}(h(x) D^{\gamma_1}\chi D^{\gamma_2}\tilde{u}) D^{\gamma_3-\gamma'}\tilde{v}\, dx$$

für alle $\tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$. Da $|\gamma_2+\gamma'| \leq m+k$ und $|\gamma_3-\gamma'| = m-k-1$ ist, gilt

$$\left|\int_{\tilde{G}_\varepsilon} D^{\gamma'}(h\, D^{\gamma_1}\chi D^{\gamma_2}\tilde{u})\, D^{\gamma_3-\gamma'}\tilde{v}\, dx\right| \leq c'\, \|\tilde{u}\|_{m+k,\alpha';\tilde{G}_\varepsilon} \|\tilde{v}\|_{m-k-1,\alpha';G_0}\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Lemma 6: Es sei $a_2(u,v) = \int_{G_0} \sum_{|\beta| \leq 2m-1} (-1)^{|\beta'|} D^{\beta-\beta'}\tilde{u}\, D^{\beta'}(\tilde{a}_\beta\tilde{v})\, dx$

($1 \in \{1,2,\dots,m\}$). Ist $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G_0) \cap W^{m+k}_{\alpha+2k}(G_R)$, dann definiert

$a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ ein lineares stetiges Funktional $\tilde{f} \in W^{-m+k+1}_{\alpha'}(G_0)$ ($\alpha' \geq \alpha + 2k$) durch die Gleichung

$$a_2(\tilde u,\chi\tilde v) = \langle\tilde f,\tilde v\rangle \quad \forall\tilde v\in \overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0),$$

und es gilt $\|\tilde f\|_{-m+k+1,\alpha';G_0} \le c\|\tilde u\|_{m+k,\alpha+2k;G_\varepsilon}$.

Beweis: Es seien $\gamma\le\beta'$ Multiindizes mit $|\beta'-\gamma|\le m-k-1$ und $|\beta-\beta'+\gamma|\le m+k$. Für $|\beta|\le 2m-1$ existieren solche Multiindizes. Dann gilt für alle $\tilde v\in\overset{\circ}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$

$$a_2(\tilde u,\chi\tilde v) = \int\limits_{G_0}\sum_{|\beta|\le 2m-1}(-1)^{|\beta'|+|\gamma|}D^{\beta-\beta'+\gamma}\tilde u\; D^{\beta'-\gamma}(\tilde a_\beta\chi\tilde v)\,dx,$$

d. h.

$$|a_2(\tilde u,\chi\tilde v)|$$

$$\le c\sum_{|\beta|\le 2m-1}\;\sum_{\gamma'\le\beta'-\gamma}\int\limits_{G_0}|D^{\beta-\beta'+\gamma}\tilde u|\,|D^{\beta'-\gamma-\gamma'}(\tilde a_\beta\chi)|\,|D^{\gamma'}\tilde v|\,dx$$

$$= c\sum_{|\beta|\le 2m-1}\;\sum_{\gamma'\le\beta'-\gamma}\int\limits_{G_0} r^{\frac{\alpha+2k}{2}-(m+k-|\beta-\beta'+\gamma|)}|D^{\beta-\beta'+\gamma}\tilde u|$$

$$\cdot\, r^{2m-1-|\beta|+\frac{\alpha'-(\alpha+2k)}{2}+|\beta'-\gamma-\gamma'|}|D^{\beta'-\gamma-\gamma'}(\chi\tilde a_\beta)|$$

$$\cdot\, r^{-\frac{\alpha'}{2}-(m-k-1-|\gamma'|)}|D^{\gamma'}\tilde v|\,dx$$

$$\le c'\|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_\varepsilon}\|\tilde v\|_{m-k-1,-\alpha';G_0}.$$

(Hierbei wurde benutzt, daß die Koeffizienten $\tilde a_\beta(x)$ der Bedingung (13) genügen.) Das Lemma ist damit bewiesen.

Lemma 7: Es sei $f\in W^{-m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G)$ $(k\in\{0,1,\dots,m-1\})$.

$u\in\overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G)\cap W^{m+k}_{\alpha+2k}(G_R)$ sei Lösung des Variationsproblems (5').

Dann ist $u\in W^{m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_{R'})$, und es gilt

$$\|u\|_{m+k+1,\alpha+2k+2;G_{R'}} \le c(\|f\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_R}+\|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_R}).$$

Beweis: $\tilde u\in\overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G_0)\cap W^{m+k}_{\alpha+2k}(G_0)$ sei eine Funktion mit $\tilde u|_{G_\varepsilon} = u|_{G_\varepsilon}$.

Für alle $\tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$ gilt

$$a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v}) + a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v}) - a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v}).$$

Ist $v \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G)$ eine Funktion mit $v|_{G_\varepsilon} = \tilde{v}|_{G_\varepsilon}$, dann gilt

$$\tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v}) = a(u,\chi v).$$

Für alle $\tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$ haben wir also

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v})| &= |a(u,\chi v)| = |\langle f,\chi v\rangle| \\ &\leq \|f\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_\varepsilon} \|\chi v\|_{m-k-1,-\alpha-2k-2;G_\varepsilon} \\ &\leq c_1 \|f\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G} \|v\|_{m-k-1,-\alpha-2k-2;G_0}. \end{aligned}$$

Folglich definiert $\tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ ein lineares stetiges Funktional $f' \in W^{-m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle f',\tilde{v}\rangle = \tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0),$$

denn $\overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$ ist eine dichte Teilmenge von $\overset{\circ}{W}{}^{m-k-1}_{-(\alpha+2k+2)}(G_0)$. Dabei gilt $\|f'\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_0} \leq c_1 \|f\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_\varepsilon}$.

Aus Lemma 5 und Lemma 6 folgt, daß $a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ und $a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ zwei lineare stetige Funktionale $f'' \in W^{-m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_0)$ und $f''' \in W^{-m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_0)$ durch die Gleichungen

$$\langle f'',\tilde{v}\rangle = a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0) \text{ und}$$

$$\langle f''',\tilde{v}\rangle = a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$$

definieren, wobei $\|f''\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_0} \leq c_2 \|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_\varepsilon}$ und $\|f'''\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_0} \leq c_3 \|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_\varepsilon}$ gilt. Damit erhält man

$$a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) = \langle f' - f'' + f''',\tilde{v}\rangle \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$$

mit $f' - f'' + f''' \in W^{-m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_0)$. Ersetzt man in Lemma 3' k durch $m-k-1$ und setzt danach $\gamma = \alpha+2k+2$, dann folgt hieraus $\chi\tilde{u} \in W^{m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_0)$ und damit $\chi u \in W^{m+k+1}_{\alpha+2k+2}(G_\varepsilon)$. Ferner gilt

$$\|\chi\tilde{u}\|_{m+k+1,\alpha+2k+2;G_0} \le c'(\|f'-f''+f'''\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_0} + \|\chi\tilde{u}\|_{0,\alpha-2m;G_0})$$

$$\le c''(\|f\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_\varepsilon} + \|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_\varepsilon} + \|\chi u\|_{0,\alpha-2m;G_\varepsilon}),$$

d. h.

$$\|u\|_{m+k+1,\alpha+2k+2;G_{\frac{\varepsilon}{2}}} \le \|\chi\tilde{u}\|_{m+k+1,\alpha+2k+2;G_0}$$

$$\le 2c''(\|f\|_{-m+k+1,\alpha+2k+2;G_\varepsilon} + \|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_\varepsilon}).$$

Aus Lemma 2 folgt dann die Behauptung.

Als Folgerung von Lemma 7 ergibt sich unmittelbar

<u>Satz 3:</u> Ist $u \in \overset{0}{W}{}^m_\alpha(G)$ Lösung des Variationsproblems (5') und $f \in W^{-m+k}_{\alpha+2k}(G)$ $(k \le m)$, dann ist $u \in W^{m+k}_{\alpha+2k}(G_{R'})$, und es gilt

$$\|u\|_{m+k,\alpha+2k;G_{R'}} \le c(\|f\|_{-m+k,\alpha+2k;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R}).$$

<u>Satz 4:</u> Es gelte

1) $k=1$ oder
2) $k \in \{1,2,\dots,m\}$, $a_\beta(x)=\text{const.}$ für $|\beta|=2m$,
$a_\beta(x)=0$ für $2m-k<|\beta|\le 2m-1$.

$u \in \overset{0}{W}{}^m_\alpha(G)$ sei Lösung des Variationsproblems (5') mit $f \in W^{-m+k}_\alpha(G)$.
Auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \frac{\pm(\alpha-2k)-n+2m}{2}$ mögen keine Pole von $R(\lambda)$ liegen. Dann gilt

$$u = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + w$$

in $G_{R'}$ mit $w \in W^{m+k}_\alpha(G_{R'})$ und

$$\|w\|_{m+k,\alpha;G_{R'}} \le c(\|u\|_{m,\alpha;G_R} + \|f\|_{-m+k,\alpha;G_R}).$$

Dabei sind λ_j die Pole von $R(\lambda)$ aus dem Streifen $h = \frac{-\alpha-n+2m}{2} < \operatorname{Im}\lambda < h+k$ und k_j deren Vielfachheiten.

<u>Beweis:</u> $\tilde{u} \in \overset{0}{W}{}^m_\alpha(G_0)$ sei eine Funktion mit $\tilde{u}|_{G_\varepsilon} = u|_{G_\varepsilon}$.
Für alle $\tilde{v} \in \overset{0}{W}{}^m_{-\alpha}(G_0)$ gilt

$$a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v}) - a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v}) + a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v}).$$

Wie im Beweis von Lemma 7 definiert $\tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ ein lineares stetiges Funktional $f' \in W_{\alpha}^{-m+k}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle f',\tilde{v}\rangle = \tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0).$$

Dabei gilt $\|f'\|_{-m+k,\alpha;G_0} \leq c_1 \|f\|_{-m+k,\alpha;G_\varepsilon}$.

Da $f \in W_{\alpha}^{-m+k}(G)$ ist, gilt nach Lemma 2 $u \in W_{\alpha}^{m+k}(\tilde{G}_\varepsilon)$ und damit auch $\tilde{u} \in W_{\alpha}^{m+k}(\tilde{G}_\varepsilon)$. Folglich definiert $a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v})-a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ nach Lemma 5 ein lineares stetiges Funktional $f'' \in W_{\alpha}^{-m+k}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle f'',\tilde{v}\rangle = a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$$

mit $\|f''\|_{-m+k,\alpha;G_0} \leq c_2' \|u\|_{m+k,\alpha;\tilde{G}_\varepsilon}$

$$\leq c_2(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}}) \quad (\varepsilon' > \varepsilon).$$

(Der letzte Teil der Ungleichung gilt nach Lemma 2.)
Nach Lemma 6 definiert $a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v})$ ein lineares stetiges Funktional $f''' \in W_{\alpha}^{-m+k}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle f''',\tilde{v}\rangle = a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$$

mit $\|f'''\|_{-m+k,\alpha;G_0} \leq c_3 \|u\|_{m,\alpha;G_\varepsilon}$. Damit erhält man

$$a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) = \langle f'+f''-f''',\tilde{v}\rangle \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$$

mit $f'+f''-f''' \in W_{\alpha}^{-m+k}(G_0)$ und

$$\|f'+f''-f'''\|_{-m+k,\alpha;G_0} = c'(\|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|f\|_{-m+k,\alpha;G_{\varepsilon'}}).$$

Wegen der Einbettung $W_{\alpha}^{-m+k}(G_0) \subset W_{\alpha-2k}^{-m}(G_0)$ folgt hieraus nach Satz 2 bzw. Satz 2'

$$u = \sum_{j} \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + \tilde{u}'$$

mit $\tilde{u}' \in W_{\alpha-2k}^{m}(G_0)$ und

$$\|\tilde{u}'\|_{m,\alpha-2k;G_0} \leq c''(\|f'+f''-f'''\|_{-m,\alpha-2k;G_0} + \|\chi\tilde{u}\|_{m,\alpha;G_0})$$

$$\leq c'''(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}}).$$

Wir betrachten zunächst den Fall k=1. In diesem Fall ist $\tilde{u}' \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha-2}(G_0)$ nach Satz 2' Lösung des Variationsproblems

$$a_0(\tilde{u}',\tilde{v}) = \langle f'+f''-f''',\tilde{v}\rangle + a_0(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha+2}(G_0).$$

Aus $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G)$ und $f \in W^{-m+1}_{\alpha}(G) \subset W^{-m+1}_{\alpha+2}(G)$ folgt nach Satz 3

$u \in W^{m+1}_{\alpha+2}(G_\varepsilon)$ und

$$\|u\|_{m+1,\alpha+2;G_\varepsilon} \leq c_0(\|f\|_{-m+1,\alpha+2;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}}) \quad (\varepsilon' > \varepsilon).$$

Damit ist $\chi\tilde{u} \in W^{m+1}_{\alpha+2}(G_0)$ und

$$\|\chi\tilde{u}\|_{m+1,\alpha+2;G_0} \leq c_0'(\|f\|_{-m+1,\alpha+2;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}}).$$

Ordnet man jedem Multiindex β' mit $|\beta'| = m$ einen Multiindex $\beta'' \leq \beta'$ mit $|\beta''| = 1$ zu, dann erhält man mit Hilfe von (15)

$$|a_0(\chi\tilde{u},\tilde{v})-a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v})| = \Big|\int_{G_0} \sum_{|\beta|=2m} D^{\beta-\beta'}(\chi\tilde{u})\, D^{\beta'}[(\tilde{a}_\beta(x)-\tilde{a}_\beta(0))\tilde{v}]dx\Big|$$

$$\leq c_4 \sum_{|\beta|=2m}\ \sum_{\gamma\leq\beta'-\beta''} \Big|\int_{G_0} r^{\frac{\alpha+2}{2}} |D^{\beta-\beta'}(\chi\tilde{u})|\, r^{-\frac{\alpha}{2}-(m-1-|\gamma|)} |D^{\gamma}\tilde{v}|$$

$$\cdot \big|r^{m-1-|\gamma|-1}\, D^{\beta'-\beta''-\gamma}(\tilde{a}_\beta(x)-\tilde{a}_\beta(0))\big|\,dx$$

$$\leq c_5\, \|\chi\tilde{u}\|_{m+1,\alpha+2;G_0} \|\tilde{v}\|_{m-1,-\alpha;G_0}$$

$$\leq c_6(\|f\|_{-m+1,\alpha+2;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}})\|\tilde{v}\|_{m-1,-\alpha;G_0}.$$

Folglich definiert $a_0(\chi\tilde{u},\tilde{v})-a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v})$ ein lineares stetiges Funktional $\tilde{f} \in W^{-m+1}_{\alpha}(G_0)$ durch die Gleichung

$$\langle \tilde{f},\tilde{v}\rangle = a_0(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-(\alpha-2)}(G_0),$$

und es gilt $\|\tilde{f}\|_{-m+1,\alpha;G_0} \leq c_6(\|f\|_{-m+1,\alpha+2;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}})$

$$\leq c_7(\|f\|_{-m+1,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}}).$$

Damit ist $\tilde{u}' \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha-2}(G_0)$ Lösung des Variationsproblems

$$a_0(\tilde{u}',\tilde{v}) = \langle \tilde{f}',\tilde{v}\rangle \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-(\alpha-2)}(G_0)$$

mit $\tilde{f}' = f' + f'' - f''' + \tilde{f} \in W^{-m+1}_{\alpha}(G_0)$ und

$$\|\tilde{f}'\|_{-m+1,\alpha;G_0} \leq (c'+c_7)\,(\|f\|_{-m+1,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}}).$$

Aus Lemma 3 folgt $\tilde{u}' \in W_{\alpha}^{m+1}(G_0)$ und

$$\|\tilde{u}'\|_{m+1,\alpha;G_0} \le c_8(\|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|f\|_{-m+1,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|\tilde{u}'\|_{m,\alpha-2;G_0})$$
$$\le c(\|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|f\|_{-m+1,\alpha;G_{\varepsilon'}}).$$

In dem Fall, daß die Koeffizienten $a_\beta(x)$ für $|\beta| = 2m$ konstant sind, ist $\tilde{u}' \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha-2k}(G_0)$ Lösung des Variationsproblems

$$a_0(\tilde{u}',\tilde{v}) = \langle f'+f''-f''',\tilde{v}\rangle \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-(\alpha-2k)}(G_0)$$

und daher nach Lemma 3 $\tilde{u}' \in W_{\alpha}^{m+k}(G_0)$.

Genauso wie im 1. Fall erhält man

$$\|\tilde{u}'\|_{m+k,\alpha;G_0} \le c(\|u\|_{m,\alpha;G_{\varepsilon'}} + \|f\|_{-m+k,\alpha;G_{\varepsilon'}}),$$

woraus die Behauptung folgt.

<u>Lemma 8:</u> Liegen keine Pole von $R(\lambda)$ auf den Geraden $\mathrm{Im}\lambda = \frac{\pm\alpha_1-n+2m}{2}$ und im Streifen $\frac{-\alpha-n+2m}{2} < \mathrm{Im}\lambda < \frac{-\alpha_1-n+2m}{2}$ mit $\alpha_1 < \alpha$ und ist $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G)$ Lösung von (5') mit $f \in W^{-m}_{\alpha_1}(G)$, dann ist $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha_1}(G)$, und es gilt $\|u\|_{m,\alpha_1;G_R} \le c(\|f\|_{-m,\alpha_1;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R})$.

<u>Beweis:</u> 1. Es sei zunächst $\alpha-2 \le \alpha_1 < \alpha$. $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha}(G_0)$ sei wieder eine Funktion mit $\tilde{u}|_{G_\varepsilon} = u|_{G_\varepsilon}$. Analog zum Beweis von Satz 4 erhält man

$$a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) = \langle f'+f''-f''',\tilde{v}\rangle \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0),$$

wobei f', f'' und f''' die durch die Gleichungen

$$\langle f',\tilde{v}\rangle = \tilde{a}(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0),$$

$$\langle f'',\tilde{v}\rangle = a_1(\chi\tilde{u},\tilde{v}) - a_1(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0),$$

$$\langle f''',\tilde{v}\rangle = a_2(\tilde{u},\chi\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{-\alpha}(G_0)$$

definierten linearen stetigen Funktionale aus $W^{-m}_{\alpha_1}(G_0)$ sind.

Dabei ist $\|f'+f''-f'''\|_{-m,\alpha_1;G_0} \le c'(\|f\|_{-m,\alpha_1;G_\varepsilon} + \|u\|_{m,\alpha;G_\varepsilon})$.

Aus Satz 2' folgt $\chi\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{\alpha_1}(G_0)$ und

$$\|\chi\tilde{u}\|_{m,\alpha_1;G_0} \leq c(\|f\|_{-m,\alpha_1;G_\varepsilon} + \|u\|_{m,\alpha;G_\varepsilon}),$$

woraus sich die Behauptung des Lemmas ergibt.

2. Ist $\alpha_1 < \alpha - 2$, dann erhält man durch mehrmalige Anwendung des ersten Beweisschrittes die Behauptung.

<u>Satz 5:</u> Es sei $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_\alpha(G)$ Lösung von (5') mit $f \in W_\alpha^{-m+k}(G)$, und es mögen keine Pole von $R(\lambda)$ auf den Geraden $\operatorname{Im}\lambda = \frac{\pm(\alpha-2k)-n+2m}{2}$ und im Streifen $h = \frac{-\alpha-n+2m}{2} < \operatorname{Im}\lambda < h+k$ liegen, wobei $k \in \{1,\dots,m\}$ sei. Dann ist $u \in W_\alpha^{m+k}(G_{R'})$, und es gilt

$$\|u\|_{m+k,\alpha;G_{R'}} \leq c(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R}).$$

<u>Beweis:</u> Da $f \in W_\alpha^{-m+k}(G) \subset W_{\alpha-2k}^{-m}(G)$ ist, folgt aus Lemma 8 $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{\alpha-2k}(G)$. Dabei ist

$$\begin{aligned}\|u\|_{m,\alpha-2k;G_R} &\leq c'(\|f\|_{-m,\alpha-2k;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R})\\ &\leq c''(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R}).\end{aligned}$$

Aus $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{\alpha-2k}(G)$ und $f \in W_\alpha^{-m+k}(G)$ folgt nach Satz 3 $u \in W_\alpha^{m+k}(G_{R'})$ und

$$\begin{aligned}\|u\|_{m+k,\alpha;G_{R'}} &\leq c'''(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_R} + \|u\|_{m,\alpha-2k;G_R})\\ &\leq c(\|f\|_{-m+k,\alpha;G_R} + \|u\|_{m,\alpha;G_R}).\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt das Variationsproblem (5).
Dazu benötigen wir das folgende Lemma (s. z. B. A. Kufner /6/):

<u>Lemma 9:</u> Es gilt $\overset{\circ}{W}{}^k_0(G) = \overset{\circ}{W}{}^k(G)$ und damit auch $W_0^{-k}(G) = W^{-k}(G)$.

Für $\alpha = 0$ erhält man aus den Sätzen 4 und 5 die folgenden beiden Sätze.

<u>Satz 4':</u> Es gelte

1) $k = 1$ oder
2) $k \in \{1,2,\dots,m\}$, $a_\beta(x) = \text{const.}$ für $|\beta| = 2m$,
   $a_\beta(x) = 0$ für $2m-k < |\beta| \leq 2m-1$.

$u \in \overset{\circ}{W}{}^m(G)$ sei Lösung des Variationsproblems (5) mit $f \in W^{-m+k}(G)$. Auf den Geraden $\mathrm{Im}\lambda = \pm k - \frac{n}{2} + m$ mögen keine Pole von $R(\lambda)$ liegen. Dann gilt

$$u = \sum_j \sum_{s=0}^{k_j-1} a_{js}\, r^{-i\lambda_j} \ln^s r\, \psi_{js}(\omega) + w \quad \text{in } G_{R'}$$

mit $w \in W^{m+k}(G_{R'})$ und $\|w\|_{W^{m+k}(G_{R'})} \le c(\|u\|_{W^m(G_R)} + \|f\|_{W^{-m+k}(G_R)})$.

Hierbei sind λ_j die Pole von $R(\lambda)$ aus dem Streifen

$-\frac{n}{2} + m < \mathrm{Im}\lambda < -\frac{n}{2} + m + k$ und k_j deren Vielfachheiten.

<u>Satz 5':</u> Es sei $u \in \overset{\circ}{W}{}^m(G)$ Lösung des Variationsproblems (5) mit $f \in W^{-m+k}(G)$, und es mögen keine Pole von $R(\lambda)$ auf den Geraden $\mathrm{Im}\lambda = \pm k - \frac{n}{2} + m$ und im Streifen $-\frac{n}{2} + m < \mathrm{Im}\lambda < -\frac{n}{2} + m + k$ liegen.

Dann ist $u \in W^{m+k}(G_{R'})$, und es gilt

$$\|u\|_{W^{m+k}(G_{R'})} \le c(\|u\|_{W^m(G_R)} + \|f\|_{W^{-m+k}(G_R)}).$$

<u>Beweis:</u> Nach Lemma 9 ist $u \in W_0^m(G)$, und es gilt

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_0^m(G)$$

mit $f \in W^{-m+k}(G) = W_0^{-m+k}(G)$. Wegen $W_0^{m+k}(G_R) \subset W^{m+k}(G_R)$ folgt aus den Sätzen 4 bzw. 5 die Behauptung.

Literatur

/1/ Berezanskij, J. M.: Zerlegung nach Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren (russ.). Kiew 1965

/2/ Blum, H., and Rannacher, R.: On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners. Math. Methods Appl. Sci. <u>2</u>, 556 - 581 (1980)

/3/ Browder, F. E.: Functional analysis and partial differential equations II. Math. Annalen <u>145</u>, 81 - 226 (1962)

/4/ Kondratjev, W. A.: Randwertaufgaben für parabolische Gleichungen in abgeschlossenen Gebieten (russ.). Trudy Moskov. Mat. Obšč. 15, 400 - 451 (1966)

/5/ Kondratjev, W. A.: Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen in Gebieten mit konischen und Winkelecken (russ.). Trudy Moskov. Mat. Obšč. 16, 209 - 292 (1967)

/6/ Kufner, A.: Weighted Sobolev Spaces. Leipzig 1980

/7/ Mazja, W. G., and Plamenevskij, B. A.: Estimates in L_p and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular boundary points. Math. Nachr. 81, 25 - 82 (1978)

/8/ Mazja, W. G., und Plamenevskij, B. A.: Über die Koeffizienten in der Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit konischen Punkten. Math. Nachr. 76, 29 - 60 (1977)

eingereicht: 15. 02. 1982

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. J. Roßmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 22, 43 - 56 (1983) 35J40
35A35

Günther Wildenhain

Approximation in Sobolev-Räumen durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung

1. Wir betrachten einen eigentlich elliptischen Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

im R^n mit reellen, beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten. Dabei sei $m > 0$ ganz, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ($\alpha_i \geq 0$ ganz),

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.

$\Omega \subset R^n$ sei ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Auf $\partial\Omega$ sei ein normales, der sogenannten Wurzelbedingung (vgl. /9/, /10/) genügendes System $B_1, \ldots, B_m$ von Randoperatoren mit ord $B_j = m_j \leq 2m - 1$ und glatten Koeffizienten gegeben. $\Gamma \subset \Omega$ sei eine glatte, d-dimensionale Fläche ($1 \leq d \leq n-1$), die Ω nicht zerlegt und $G \subset \Omega \setminus \Gamma$ eine offene Menge. Mit $L_G(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{aligned} &L\,u = g \quad \text{in } \Omega, \\ &B_j u|_{\partial\Omega} = 0 \ (j = 1, \ldots, m), \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei g alle Funktionen aus $C^\lambda(\Omega)$ ($0 < \lambda < 1$) durchläuft, für die $g \equiv 0$ in $\Omega \setminus G$ gilt, und mit $L_G(\Gamma)$ die Menge aller Einschränkungen von $u \in L_G(\Omega)$ auf Γ. Ist andererseits V eine vorgegebene offene Teilmenge des Randes $\partial\Omega$, so wollen wir mit $L_V(\Omega)$ die Menge aller Lösungen der Gleichung $Lu = 0$ in Ω bezeichnen, für die $B_1 u|_{\partial\Omega} = B_2 u|_{\partial\Omega} = \ldots = B_m u|_{\partial\Omega} = 0$ in $\partial\Omega \setminus V$ gilt. Entsprechend sei $L_V(\Gamma)$ der Raum der Einschränkungen von

$u \in L_V(\Omega)$ auf Γ. Über Γ betrachten wir den Sobolev-Raum $W_2^{2m-1}(\Gamma)$, der definiert werde als Vervollständigung der glatten Funktionen auf Γ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{W_2^{2m-1}(\Gamma)} = \left\{ \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma |D^\beta u(x)|^2 \, d\sigma_\Gamma(x) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei bedeutet D^β die Ableitung nach Koordinaten in der Fläche und $d\sigma_\Gamma$ das Flächenelement bezüglich Γ. Schließlich nehmen wir noch an, daß der adjungierte Operator

$$L^* u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} \; D^\alpha(a_\alpha(x)u)$$

die Eindeutigkeitseigenschaft im Kleinen besitzt, d. h., falls u in einem Gebiet $\tilde{\Omega}$ Lösung der Gleichung $L^* u = 0$ ist und in einer nichtleeren, offenen Teilmenge $\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}$ verschwindet, so ist $u \equiv 0$ in $\tilde{\Omega}$.

Wir beweisen in der vorliegenden Arbeit unter anderem die folgenden Resultate.

<u>Satz 1:</u> Bezüglich L, Ω, Γ und der Randoperatoren B_j $(j=1,\dots,m)$ seien die im vorangehenden formulierten Voraussetzungen erfüllt. Dann liegt der Raum $L_G(\Gamma)$ dicht in $W_2^{2m-1}(\Gamma)$.

Das Gebiet Ω denken wir uns derart zu einem glatten Gebiet Ω_1 erweitert, daß $\partial\Omega \backslash V \subset \partial\Omega_1$ gilt. Zusätzlich zu den bisher gemachten Voraussetzungen nehmen wir an:

(i) Die Koeffizienten der Randoperatoren B_j seien derart von $\partial\Omega$ auf $\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$ fortsetzbar, daß das entstehende System $(\tilde{B}_j)_{j=1,\dots,m}$ auf $\partial\Omega_1$ ebenfalls normal ist und der Wurzelbedingung genügt.

Falls die Operatoren B_j konstante Koeffizienten besitzen (zum Beispiel für das Dirichlet-Problem), ist diese Bedingung trivial realisierbar.

Satz 2: Gelten die Voraussetzungen von Satz 1 sowie (i), so liegt der Raum $L_V(\Gamma)$ dicht in $W_2^{2m-1}(\Gamma)$.

Der Satz 2 verallgemeinert ein Ergebnis, das im Falle Dirichletscher Randbedingungen von H. Beckert /2/ für elliptische Gleichungen 2. Ordnung und für den biharmonischen Operator angegeben wurde. Im Unterschied zu /2/, wo der Beweis auf das Cauchy-Problem zurückgeführt wird, benutzen wir hier den Satz 1 und die Eindeutigkeitseigenschaft im Kleinen. In /13/ und /14/ wurden entsprechende Resultate über die gleichmäßige Approximation der Ableitungen bis einschließlich zur Ordnung m-1 (d. h. die Dichtheit von $L_G(\Gamma)$ bzw. $L_V(\Gamma)$ im Raum $W^{m-1}(\Gamma)$ der Whitneyschen Taylorfelder) bewiesen. Auch dabei handelt es sich um die Verallgemeinerung von Resultaten, die, was die Dichtheit von $L_V(\Gamma)$ betrifft, im Falle von Gleichungen 2. Ordnung bekannt waren und von H. Beckert /2/, A. Göpfert /6/, /7/, G. Anger /1/ und G. Wanka /11/ stammen. Approximationssätze etwas anderen Charakters (auch für Gleichungen höherer Ordnung) wurden von F. E. Browder /4/, /5/ veröffentlicht.

2. Beweis zu Satz 1: a) Wir betrachten zunächst den Fall, daß das homogene Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ B_j u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad (j=1,\dots,m) \end{aligned} \tag{2.1}$$

nur die triviale Lösung besitzt.
Nach J. M. Berezanskij und J. A. Rojtberg /3/ (vgl. auch /12/) läßt sich die eindeutig bestimmte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} Lu &= g \quad \text{in } \Omega, \\ B_j u|_{\partial\Omega} &= \varphi_j \quad (j=1,\dots,m) \end{aligned} \tag{2.2}$$

unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen an g und φ_j (die im folgenden immer erfüllt sein werden) mit Hilfe einer Greenschen Funktion G(x,y) in der Gestalt

$$u(x) = \int_{\Omega} g(y)\, G(x,y)dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\, C_j' G(x,y)\, d\sigma(y) \tag{2.3}$$

darstellen, wobei das System der Randoperatoren $(C'_j)_{j=1,\dots,m}$ eine Ergänzung des zu $(B_j)_{j=1,\dots,m}$ adjungierten Systems $(B'_j)_{j=1,\dots,m}$ zu einem Dirichlet-System der Ordnung 2m bezeichnet (vgl. /9/, /12/). Die Operatoren C'_j sind in (2.3) auf die Variable y anzuwenden. Unter den gemachten Annahmen ist die Funktion G(x,y) bezüglich beider Variabler für $x \neq y$ beliebig oft differenzierbar. Es gilt bei Anwendung der Differentialoperatoren auf die Variable y

$$\begin{aligned} &L^*G(x,y) = 0 \quad \text{für } x,y \in \Omega (x \neq y), \\ &B'_jG(x,y)\big|_{y \in \partial\Omega} = 0 \ (j=1,\dots,m), \end{aligned} \tag{2.4}$$

und für $|x-y|$ hinreichend klein und $|\alpha|+|\beta| \leq 2m-2$ bestehen die Abschätzungen

$$|D_x^\alpha D_y^\beta G(x,y)| \leq \begin{cases} C_{\alpha\beta}|x-y|^{2-n} & \text{für } n > 2, \\ C_{\alpha\beta}(1+|\ln|x-y||) & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

(vgl. /8/).

Wir beweisen Satz 1 indirekt und nehmen $\overline{L_G(\Gamma)} \neq W_2^{2m-1}(\Gamma)$ an. Nach dem Satz von Riesz existiert dann ein Element $h \in W_2^{2m-1}(\Gamma)$, $h \neq 0$, das zu $L_G(\Gamma)$ orthogonal ist, d. h.

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u(x)\ D^\beta h(x)\ d\sigma_\Gamma(x) = 0 \text{ für alle } u \in L_G(\Gamma). \tag{2.5}$$

Da $u \in L_G(\Omega)$ Lösung des Problems (1.1) ist, folgt aus (2.3) für $x \in \Gamma$ und $|\beta| \leq 2m-1$

$$D^\beta u(x) = \int_G D_x^\beta G(x,y)\ g(y)\ dy$$

und nach Einsetzen in (2.5)

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta h(x) \Big(\int_G D_x^\beta G(x,y)\ g(y)\ dy \Big)\ d\sigma_\Gamma(x)$$

$$= \int_G g(y) \left\{ \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D_x^\beta G(x,y)\, D^\beta h(x)\, d\sigma_\Gamma(x) \right\} dy = 0$$

für alle $g \in C^\lambda(\Omega)$ mit $g = 0$ in $\Omega \setminus G$.
Mit

$$v^h(y) := \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D_x^\beta G(x,y)\, D^\beta h(x)\, d\sigma_\Gamma(x)$$

bedeutet das $v^h(y) = 0$ in G.
Wegen (2.4) gilt offenbar

$$L^* v^h(y) = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Gamma.$$

Auf Grund der vorausgesetzten Eindeutigkeitseigenschaft im Kleinen für den Operator L^* folgern wir daraus weiter

$$v^h(y) = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Gamma. \tag{2.6}$$

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, daß für beliebige Funktionen $u \in C^{2m+\lambda}(\overline{\Omega})$, die den Randbedingungen $B_j u|_{\partial\Omega} = 0$ $(j=1,\dots,m)$ genügen,

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u(x)\, D^\beta h(x)\, d\sigma_\Gamma(x) = 0 \tag{2.7}$$

gilt. Mit $f := Lu \in C^\lambda(\overline{\Omega})$ kann u als Lösung des Randwertproblems

$$Lu = f \text{ in } \Omega,$$
$$B_j u|_{\partial\Omega} = 0 \; (j=1,\dots,m)$$

aufgefaßt werden, und nach (2.3) ergibt sich wie oben

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Wegen $f \in C^\lambda(\overline{\Omega})$ und des Charakters der Singularität von $G(x,y)$ kann man bis zur Ordnung $2m-1$ unter dem Integralzeichen differenzieren. Man erhält

$$D^\beta u(x) = \int_\Omega D_x^\beta\, G(x,y)\; f(y)\; dy$$

für $|\beta| \leq 2m-1$. Weiter folgt

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u(x)\; D^\beta h(x)\; d\sigma_\Gamma(x)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta h(x)\; \Big(\int_\Omega D_x^\beta\, G(x,y)\; f(y)\; dy\Big)\; d\sigma_\Gamma(x)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta h(x)\; \Big(\int_{\Omega\setminus U} D_x^\beta\, G(x,y)\; f(y)\; dy\Big)\; d\sigma_\Gamma(x)$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta h(x)\; \Big(\int_U D_x^\beta\, G(x,y)\; f(y)\; dy\Big)\; d\sigma_\Gamma(x)$$

$$= I_1 + I_2.$$

Dabei sei $U \subset \Omega$ eine offene Menge, welche Γ im Innern enthält. Zunächst gilt nun wegen (2.6)

$$I_1 = \int_{\Omega\setminus U} \Big\{ \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta h(x)\; D_x^\beta\, G(x,y)\; d\sigma_\Gamma(x) \Big\}\; f(y)\; dy$$

$$= \int_{\Omega\setminus U} v^h(y)\; f(y)\; dy = 0.$$

Um I_2 abzuschätzen, wählen wir U so "schmal", daß

$\left| \int_U D_x^\beta\, G(x,y)\; f(y)\; dy \right| < \varepsilon$ für $|\beta| \leq 2m-1$ und gleichmäßig bezüglich $x \in \Gamma$ gilt. Wegen der Glattheit von Γ und der Konvergenz der Integrale ist dies möglich. Nach Anwendung der Hölder-Ungleichung folgt damit

$$|I_2| \leq \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \varepsilon^2\; m(\Gamma) \int_\Gamma |D^\beta h(x)|^2\; d\sigma_\Gamma(x).$$

$m(\Gamma)$ bezeichnet den d-dimensionalen Inhalt von Γ. Damit ist die Behauptung (2.7) bewiesen.

Es ist nun leicht einzusehen, daß sich jede Funktion aus $W_2^{2m-1}(\Gamma)$ durch Einschränkungen von Funktionen $u \in C^{2m+\lambda}(\overline{\Omega})$ approximieren läßt, für die außerdem die Bedingungen $B_j u|_{\partial\Omega} = 0$ $(j=1,\dots,m)$ gelten. Wir wählen eine solche Folge $u_n \in C^{2m+\lambda}(\overline{\Omega})$ mit

$$\|u_n - h\|_{W_2^{2m-1}(\Gamma)} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wegen

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u_n(x)\, D^\beta h(x)\, d\sigma_\Gamma(x) = 0$$

für alle n folgt daraus

$$\|h\|^2_{W_2^{2m-1}(\Gamma)} = \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma (D^\beta h(x))^2\, d\sigma_\Gamma(x)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma (D^\beta h(x) - D^\beta u_n(x))\, D^\beta h(x)\, d\sigma_\Gamma(x)$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u_n(x)\, D^\beta h(x)\, d\sigma_\Gamma(x)$$

$$\leq \|u_n - h\|_{W_2^{2m-1}(\Gamma)} \|h\|_{W_2^{2m-1}(\Gamma)},$$

d. h. $h = 0$. Unter der eingangs gemachten Voraussetzung ist damit $\overline{L_G(\Gamma)} = W_2^{2m-1}(\Gamma)$ bewiesen.

b) Wir nehmen jetzt an, daß k linear unabhängige (normierte) Eigenlösungen $u_1,\dots,u_k$ des Problems (2.1) existieren. Bekanntlich (vgl. /9/, /12/) besitzt dann auch das adjungierte Problem

$$\begin{aligned} &L^* v = 0 \text{ in } \Omega, \\ &B_j' v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (j=1,\dots,m) \end{aligned} \tag{2.8}$$

k linear unabhängige (normierte) Lösungen $v_1,\dots,v_k$. Nach /3/ existiert in diesem Falle unter den vorliegenden Voraussetzungen eine verallgemeinerte Greensche Funktion $\hat{G}(x,y)$ mit den Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
&L^*\hat{G}(x,y) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x)\ u_i(y), \\
&B_j'\ \hat{G}(x,y)\big|_{y\in\partial\Omega} = 0\ (j=1,\dots,m),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

wobei die Differentialoperatoren auf y anzuwenden sind. Hinsichtlich der Glattheitseigenschaften von $\hat{G}$ für $x \neq y$ sowie hinsichtlich des Charakters der Singularität für $x = y$ gelten die gleichen Aussagen wie im Eindeutigkeitsfall (vgl. J. P. Krasovskij /8/). Die Lösung des Randwertproblems (2.2) wird dargestellt durch

$$
u(x) = \int_\Omega g(y)\ \hat{G}(x,y)dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \varphi_i(y)\ C_j'\ \hat{G}(x,y)\ d\sigma(y), \tag{2.10}
$$

wobei für g, $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ und $i = 1,\dots,k$ die Lösbarkeitsbedingungen

$$
\int_\Omega g(y)v_i(y)dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\ C_j'v_i(y)\ d\sigma(y) = 0 \tag{2.11}
$$

erfüllt sein müssen. Für $u \in L_G(\Gamma)$, $x \in \Gamma$ und $|\beta| \leq 2m-1$ gilt also nach (2.10)

$$
D^\beta u(x) = \int_G g(y)\ D_x^\beta\ \hat{G}(x,y)\ dy \tag{2.12}
$$

und nach (2.11)

$$
\int_G g(y)\ v_i(y)\ dy = 0\ (i=1,\dots,k). \tag{2.13}
$$

Setzen wir jetzt (2.12) in (2.5) ein, so erhalten wir wie in a) mit

$$
\hat{V}^h(y) := \sum_{|\beta|\leq 2m-1} \int_\Gamma D_x^\beta\ \hat{G}(x,y)\ D^\beta h(x)\ d\sigma_\Gamma(x)
$$

die Beziehung

$$\int_G g(y)\ \hat{v}^h(y)\ dy = 0$$

für alle $g \in C^\lambda(\Omega)$ mit $g \equiv 0$ in $\Omega\setminus G$, die außerdem den Bedingungen (2.13) genügen. Daraus schließt man

$$\hat{v}^h(y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\ v_i(y) =: v(y) \text{ in } G.$$

Die α_i sind dabei reelle Konstanten. Wir setzen $w(y) := \hat{v}^h(y) - v(y)$. Wegen (2.9) und $L^*v = 0$ in Ω folgt

$$\begin{aligned} L^*w(y) &= L^*\hat{v}^h(y) - L^*v(y) \\ &= \sum_{|\beta|\le 2m-1} \int_\Gamma D_x^\beta\ L_y^*\ \hat{G}(x,y)\ D^\beta h(x)\ d\sigma_\Gamma(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k} u_i(y) \left\{ \sum_{|\beta|\le 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u_i(x)\ D^\beta h(x)\ d\sigma_\Gamma(x) \right\}. \end{aligned}$$

Da h im Sinne des Skalarprodukts von $W_2^{2m-1}(\Gamma)$ zu $L_G(\Gamma)$ orthogonal und u_i als Lösung von (2.1) in $L_G(\Omega)$, d. h. $u_i|_\Gamma$ in $L_G(\Gamma)$ enthalten ist, bekommen wir

$$\sum_{|\beta|\le 2m-1} \int_\Gamma D^\beta u_i(x)\ D^\beta h(x)\ d\sigma_\Gamma(x) = 0$$

und damit $L^*w(y) = 0$ in $\Omega\setminus\Gamma$.
Wegen $w \equiv 0$ in G und der Eindeutigkeitseigenschaft im Kleinen folgt daraus $w \equiv 0$ in $\Omega\setminus\Gamma$, d. h.

$$\hat{v}^h(y) = v(y) \text{ in } \Omega\setminus\Gamma.$$

Weiter zeigen wir, daß wie im Fall a) für alle $u \in C^{2m+\lambda}(\overline{\Omega})$ mit $B_j u|_{\partial\Omega} = 0$ $(j=1,\dots,m)$

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_{\Gamma} D^{\beta}u(x)\, D^{\beta}h(x)\, d\sigma_{\Gamma}(x) = 0$$

gilt. Wir bemerken, daß für $f := Lu$ wegen $B_j v_i|_{\partial\Omega} = B_j u|_{\partial\Omega} = 0$ $(j=1,\dots,m;\ i=1,\dots,k)$, $L^* v_i(y) = 0$ in Ω $(i=1,\dots,k)$, nach Anwendung der Greenschen Formel (vgl. /9/, /12/) auf u, v_i

$$\int_{\Omega} f(y) v_i(y) dy = \int_{\Omega} Lu(y) v_i(y) dy = \int_{\Omega} u(y)\, L^* v_i(y)\, dy = 0$$

folgt, d. h., wir können u als Lösung des Randwertproblems

$$Lu = f \text{ in } \Omega,$$

$$B_j u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (j=1,\dots,m)$$

auffassen, wobei die Lösbarkeitsbedingungen (2.11) automatisch erfüllt sind. Daher gilt

$$u(x) = \int_{\Omega} \hat{G}(x,y)\, f(y)\, dy$$

und nach der gleichen Argumentation wie in a)

$$D^{\beta}u(x) = \int_{\Omega} D_x^{\beta}\, \hat{G}(x,y)\, f(y)\, dy$$

für $|\beta| \leq 2m-1$. Wie in a) ergibt sich die Zerlegung

$$\sum_{|\beta| \leq 2m-1} \int_{\Gamma} D^{\beta}u(x)\, D^{\beta}h(x)\, d\sigma_{\Gamma}(x) = I_1 + I_2,$$

wobei nur $\hat{G}(x,y)$ an Stelle von $G(x,y)$ zu schreiben ist. Es ist in diesem Falle

$$I_1 = \int_{\Omega\setminus U} \hat{v}^h(y)\, f(y)\, dy = \int_{\Omega\setminus U} v(y)\, f(y)\, dy.$$

Da v Lösung von (2.8) ist, folgt nach (2.11)

$$\int_{\Omega} v(y)\, f(y)\, dy = 0.$$

Wir können also U so "klein" wählen, daß

$$|I_1| = \left| \int_{\Omega\setminus U} v(y)\, f(y)\, dy \right| < \varepsilon$$

wird. Der zweite Summand I_2 kann dann wie in a) behandelt und der Beweis wie dort zu Ende geführt werden.

<u>Beweis zu Satz 2:</u> Wir wählen eine offene Menge $G \subset \Omega_1 \setminus \Omega$ und betrachten $L_G(\Omega_1)$. Nach Satz 1 gilt $\overline{L_G(\Omega_1)|_\Gamma} = W_2^{2m-1}(\Gamma)$. Wegen $L_G(\Omega_1)|_{\overline{\Omega}} \subset L_V(\Omega)$ folgt daraus $\overline{L_V(\Gamma)} = W_2^{2m-1}(\Gamma)$.

3. Wir nehmen jetzt an, daß Γ eine innerhalb Ω liegende, (n-1)-dimensionale, geschlossene, glatte Fläsche ist, durch die das Gebiet Ω in die disjunkten Gebiete Ω_i und Ω_a zerlegt werde. $G_1 \subset \Omega_i$ und $G_2 \subset \Omega_a$ seien zwei gegebene offene Mengen.

<u>Satz 3:</u> Bezüglich L, Ω und der Randoperatoren B_j $(j=1,\dots,m)$ seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Zusätzlich werde vorausgesetzt, daß das Randwertproblem (2.1) nur die triviale Lösung besitzt. Unter den obigen Annahmen über Γ liegt dann der Raum $L_G(\Gamma)$ $(G = G_1 \cup G_2)$ dicht in $W_2^{2m-1}(\Gamma)$.

<u>Beweis:</u> Die Annahme der Existenz eines Elements $h \in W_2^{2m-1}(\Gamma)$, $h \neq 0$, das orthogonal zu $L_G(\Gamma)$ ist, führt wie im Beweis zu Satz 1 (Teil a)) zu der für alle $g \in C^\lambda(\Omega)$ mit $g \equiv 0$ in $\Omega \setminus G$ gültigen Beziehung

$$\int_{G_1} g(y)\, v^h(y)\, dy + \int_{G_2} g(y)\, v^h(y)\, dy = 0.$$

Da $g \equiv 0$ in G_1 bzw. G_2 unabhängig voneinander gesetzt werden kann, erhält man

$$v^h(y) \equiv 0 \text{ in } G = G_1 \cup G_2$$

und damit $v^h(y) = 0$ in $\Omega \setminus \Gamma$. Der Beweis kann nun wie in Satz 1, Teil a), zu Ende geführt werden.
Offenbar spielt es keine Rolle, ob für das Gebiet Ω_i Eigenlösungen existieren oder nicht.

Wir nehmen jetzt an, daß das glatte Gebiet Ω ein "Loch" besitzt, so daß sich sein Rand aus den beiden disjunkten Teilen $\partial\Omega^i$ und $\partial\Omega^a$ zusammensetzt. Ferner nehmen wir an, daß die geschlossene, im Innern von Ω liegende Fläche Γ den Randteil $\partial\Omega^i$ umschließt. Es sei $V = V^i \cup V^a$, wobei V^i bzw. V^a beliebig vorgegebene, offene Teilmengen der Randteile $\partial\Omega^i$ bzw. $\partial\Omega^a$ sind. $L_V(\Omega)$ und $L_V(\Gamma)$ seien wie in Abschmitt 1 definiert. Wir nehmen eine Gebietserweiterung Ω_1 mit $\partial\Omega \setminus V \subset \partial\Omega_1$ derart vor, daß der Rand sowohl über V^i als auch über V^a "ausgebeult" wird. Bezüglich der Randoperatoren B_j setzen wir entsprechend die Bedingung (i) voraus.

<u>Satz 4:</u> Unter den vorangehenden Annahmen sowie den Voraussetzungen von Satz 1 liegt $L_V(\Gamma)$ dicht in $W_2^{2m-1}(\Gamma)$.

<u>Beweis:</u> Wir wählen zwei offene Mengen $G_1 \subset \Omega_1 \setminus \Omega$, $G_2 \subset \Omega_1 \setminus \Omega$ (im Innern der beiden "Beulen") und führen den Beweis analog wie bei Satz 2 durch Zurückführung auf Satz 3.

Literatur

/1/ Anger, G.: Eindeutigkeitssätze und Approximationssätze für Potentiale II. Math. Nachr. <u>50</u>, 229 - 244 (1971)

/2/ Beckert, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. <u>139</u>, 255 - 264 (1960)

/3/ Березанский, Ю. М., и Ройтберг, Я. А.: Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач. Укр. математ. ж. <u>19</u>, 3 - 32 (1967)

/4/ Browder, F. E.: Functional analysis and partial differential equations II. Math. Ann. <u>145</u>, 81 - 226 (1962)

/5/ Browder, F. E.: Approximation by solutions of partial differential equations. Amer. J. Math. 84, 134 - 160 (1962)

/6/ Göpfert, A.: Über L_2-Approximationssätze - eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Nachr. 31, 1 - 24 (1966)

/7/ Göpfert, A.: Eine Anwendung des Unitätssatzes von Itô-Yamabe. Beiträge Anal. 1, 29 - 41 (1971)

/8/ Красовский, Ю. П.: Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач. Докл. Акад. наук СССР 184, 270 - 273 (1969)

/9/ Lions, J. L., et Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes et applications I. Paris 1968

/10/ Schulze, B.-W., und Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin 1977, Basel und Stuttgart 1977

/11/ Wanka, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Beiträge Anal. 17, 19 - 29 (1981)

/12/ Wildenhain, G.: Darstellung von Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen. Berlin 1981

/13/ Wildenhain, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung I. Eingereicht in Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen

/14/ Wildenhain, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung II. Eingereicht in Math. Nachr.

eingegangen: 23. 04. 1982

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. G. Wildenhain
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 22, 57 - 66 (1983) 41A55 65D30

Raimond Strauß

Eine Interpolationsquadratur für Cauchy-Hauptwertintegrale

Zur numerischen Integration von Cauchy-Hauptwertintegralen

$$I(x) = I(\varphi,x) := \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}dt, \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

mit $\varphi(t) \in H^\lambda$ (Raum der hölderstetigen Funktionen), $0 < \lambda \leq 1$, sind zahlreiche Arbeiten erschienen. Dabei stehen Methoden im Vordergrund, die auf der Approximation der Dichtefunktion $\varphi(t)$ durch orthogonale Polynome beruhen /1/, /2/. Der Vorteil solcher Gauß-Quadraturen ist ihr hoher Exaktheitsgrad für Polynome. Fragt man nach Quadraturformeln, die in einem gewissen, noch näher zu erläuternden Sinn optimal sind, so wird man auf Splinefunktionen geführt. Makovoz/Šeško /3/ bewiesen, daß für $\varphi(t) \in H^\lambda$ und eine lineare Interpolationsquadratur

$$|R_n(x)| = \left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt - \sum_{k=0}^{n} A_k(x)\, \varphi(x_k) \right| \leq c\, \frac{\ln n}{n^\lambda} \tag{2}$$

für $-1 \leq x \leq 1$ gilt und eine Verschärfung von (2) nicht möglich ist (siehe Satz 1). Wie in /3/ wird auch in der vorliegenden Arbeit das Polygonzugverfahren benutzt und die Frage behandelt, wie sich das Verhalten von $R_n(x)$ verändert, wenn man die zugelassene Funktionenklasse einschränkt. Weiterhin wird eine Optimalitätsaussage unter Anwendung der Methoden aus /3/ bewiesen.

1. Eine Interpolationsquadratur

Sei $\varphi(t) \in H^\lambda$, $0 < \lambda \leq 1$, und bezeichne $S_n(t)$ den Polygonzug, der $\varphi(t)$ in den Punkten $t_k = \frac{2}{n}k-1$, $k = 0(1)n$, interpoliert. Die stückweise lineare Funktion $S_n(t)$ besitzt die Darstellung

$$S_n(t) = \frac{n}{2}\,(t_k-t)\,\varphi(t_{k-1}) + \frac{n}{2}\,(t-t_{k-1})\,\varphi(t_k) \qquad \text{für } t \in [t_{k-1},t_k],\ k = 1(1)n, \tag{3}$$

bzw.

$$S_n(t) = \sum_{k=o}^{n} S_k^{(n)}(t)\, \varphi(t_k) \tag{4}$$

mit

$$S_k^n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}\,(t-t_{k-1}) & \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k] \\ \frac{n}{2}\,(t_{k+1}-t) & \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0(1)n, \\ 0 \text{ sonst,} & \end{cases}$$

wobei $t_{-1} = t_o = -1$ und $t_{n+1} = t_n = 1$ gesetzt wird.

Ersetzt man in (1) $\varphi(t)$ durch den Polygonzug (4), so erhält man

$$\begin{aligned} I_n(x) = I(S_n(t), x) &= \int_{-1}^{1} \frac{S_n(t)}{t-x}\, dt = \sum_{k=o}^{n} \varphi(t_k) \int_{-1}^{1} \frac{S_k^{(n)}(t)}{t-x}\, dt \\ &= \sum_{k=o}^{n} A_k(x)\, \varphi(t_k). \end{aligned} \tag{5}$$

Für $x \neq t_j$ $(j=k-1,k,k+1)$ ergeben sich die Gewichtsfunktionen $A_k(x)$ als

$$\begin{aligned} A_o(x) &= \frac{n}{2}\left[(t_1-x)\ \ln\left|\frac{x-t_1}{x+1}\right| - \frac{2}{n}\right], \\ A_k(x) &= \frac{n}{2}\left[(x-t_{k-1})\ \ln\left|\frac{t_k-x}{t_{k-1}-x}\right| + (t_{k+1}-x)\ln\left|\frac{t_{k+1}-x}{t_k-x}\right|\right], \\ &\quad k = 1(1)n-1, \\ A_n(x) &= \frac{n}{2}\left[(x-t_{n-1})\ln\left|\frac{1-x}{t_{n-1}-x}\right| + \frac{2}{n}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

$A_k(t_k)$, $A_k(t_{k-1})$ und $A_k(t_{k+1})$ erhält man durch Grenzübergang:

$$A_{k-1}(t_k) = \begin{cases} -1 & \text{für } k = 1, \\ -2\ln 2 & \text{für } k = 2(1)n, \end{cases}$$

$$A_k(t_k) = 0 \text{ für } k = 1(1)n-1,$$

$$A_{k+1}(t_k) = \begin{cases} 2\ln 2 & \text{für } k = 0(1)n-2, \\ 1 & \text{für } k = n-1. \end{cases}$$

2. Fehlerabschätzung

In /3/ bewiesen Makovoz und Šeško

Satz 1: Für $\varphi(t) \in H^{\lambda}$, $0 < \lambda \leq 1$, konvergiert $I_n(x)$ auf $[-1,1]$ gegen $I(x)$, und es gilt die Abschätzung

$$|I(x) - I_n(x)| \leq c \frac{\ln n}{n^{\lambda}}.$$

Mit c wird hier und im folgenden eine positive Konstante bezeichnet, deren Wert nicht näher bestimmt ist und die auch bei Wertänderung nicht umbenannt wird.
Weiterhin wird in /3/ gezeigt, daß die Konvergenzordnung für hölderstetige Funktionen nicht zu verbessern ist. Die Frage, wie sich die Konvergenzordnung bei schärferen Voraussetzungen an $\varphi(t)$ verändert und ob dann das Quadraturverfahren (5), (6) den optimalen Fehler liefert, wird jetzt beantwortet.
H_r^{λ} bezeichne die Menge der auf $[-1,1]$ r-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren r-te Ableitung einer Hölderbedingung mit dem Exponenten λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, genügt (H_r^0 ist die Menge der r-mal stetig differenzierbaren Funktionen).
Für die weiteren Überlegungen benötigt man

Lemma 1: Für $\varphi(t) \in H_1^{\lambda}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, gilt

$$|\varphi(t) - S_n(t)| \leq \frac{c}{n^{1+\lambda}} (1-s)s,$$

wobei der Parameter s durch $t = t_{k-1} + \frac{2s}{n}$, $0 \leq s \leq 1$, für $t \in [t_{k-1}, t_k]$ erklärt ist.

Beweis: Es ist

$$|\varphi(t)-S_n(t)| = |\varphi(t) - \frac{n}{2}(t_k-t)\,\varphi(t_{k-1}) - \frac{n}{2}(t-t_{k-1})\,\varphi(t_k)|$$

$$= |\varphi(t)+\varphi(t_{k-1}) - \varphi(t_{k-1}) - \frac{n}{2}(t_{k-1}+\frac{2}{n}-t)\,\varphi(t_{k-1})$$

$$- \frac{n}{2}(t-t_{k-1})\,\varphi(t_k)|$$

$$= |\varphi(t)-\varphi(t_{k-1}) - \frac{n}{2}(t_{k-1}-t)\,\varphi(t_{k-1}) - \frac{n}{2}(t-t_{k-1})\,\varphi(t_k)|$$

$$= \left|(t-t_{k-1})\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(t_{k-1})}{t-t_{k-1}} - \frac{\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right]\right|$$

$$= 2\frac{s}{n}\,|\varphi'(\xi_k^{(1)}) - \varphi'(\xi_k^{(2)})| \leq c\,\frac{s}{n^{1+\lambda}}, \text{ da } \varphi'(t) \in H^{\lambda}.$$

Analog zeigt man

$$|\varphi(t) - S_n(t)| \leq c\, \frac{1-s}{n^{1+\lambda}}.$$

Damit ist $|\varphi(t) - S_n(t)| \leq c\, \frac{1}{n^{1+\lambda}} \min\{1-s, s\}$, woraus die Behauptung folgt.

<u>Satz 2:</u> Falls $\varphi(t) \in H_1^{\lambda}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, gilt für $-1 \leq x \leq 1$ die Abschätzung

$$|I(\varphi,x) - I_n(\varphi,x)| = c\, \frac{\ln n}{n^{1+\lambda}}. \tag{7}$$

<u>Beweis:</u>

$$R_n(x) = I(x) - I_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt + r_1(x) \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$= R_n^{(1)}(x) + R_n^{(2)}(x), \quad r_n(t) = \varphi(t) - S_n(t).$$

Sei $0 \leq x \leq 1$, dann ist

$$|R_n^{(2)}(x)| = |r_n(x) \ln \frac{1-x}{1+x}| \leq c\left[\frac{\ln 2}{n^{1+\lambda}} + \frac{1}{n^{1+\lambda}} |s(1-s) \ln(1-t_{k-1} - 2\tfrac{s}{n})|\right]$$

$$\leq c\left[\frac{\ln 2}{n^{1+\lambda}} + \frac{1}{n^{1+\lambda}} |s(1-s) \ln(1-t_{n-1} - 2\tfrac{s}{n})|\right]$$

$$= c\left[\frac{\ln 2}{n^{1+\lambda}} + \frac{1}{n^{1+\lambda}} \left|s(1-s)\left[\ln \tfrac{2}{n} + \ln(1-s)\right]\right|\right] \leq c\, \frac{\ln n}{n^{1+\lambda}}.$$

Für $0 < \delta_n < \frac{1}{2}$ wird $R_n^{(1)}(x)$ in der Form geschrieben

$$R_n^{(1)}(x) = \int_{-1}^{1} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt = \left[\int_{-1}^{x-\delta_n} + \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} + \int_{x+\delta_n}^{1}\right] \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt.$$

Sei zunächst $\delta_n < 1 - x$. Für I_1, I_2 und I_3 erhält man

$$|I_1| = \left|\int_{-1}^{x-\delta_n} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt\right| \leq \frac{2c}{n^{1+\lambda}} \left|\ln(x-t)\Big|_{-1}^{x-\delta_n}\right|$$

$$= \frac{2c}{n^{1+\lambda}} \left[|\ln \delta_n| + \ln(1+x)\right] \leq c\, \frac{\ln \delta_n}{n^{1+\lambda}}.$$

Beachtet man, daß $r_n(t) \in H^1$ ist(siehe /3/), so ergibt sich

$$|I_2| = \left| \int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt \right| \le c\delta_n.$$

Genau wie für I_1 erhält man

$$|I_3| = \left| \int_{x+\delta_n}^{1} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt \right| \le \frac{2c}{n^{1+\lambda}} \ln (t-x)\Big|_{x+\delta_n}^{1}$$

$$= \frac{2c}{n^{1+\lambda}}\left[\ln (1-x) - \ln\delta_n\right] \le \frac{c}{n^{1+\lambda}}|\ln\delta_n|.$$

Für $\delta_n \ge 1 - x$ wird $R_n^{(1)}(x)$ in der Form

$$R_n^{(1)}(x) = \left[\int_{-1}^{x-\delta_n} + \int_{x-\delta_n}^{1}\right] \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt = I_1' + I_2'$$

geschrieben. I_1' läßt sich genauso wie im vorhergehenden Fall abschätzen. Für I_2' gilt

$$|I_2'| = \left| \int_{x-\delta_n}^{1} \frac{r_n(t)-r_n(x)}{t-x}\, dt \right| \le c\delta_n.$$

Setzt man $\delta_n = \frac{1}{n^{1+\lambda}}$, so erhält man $|R_n^{(1)}(x)| \le c\,\frac{\ln n}{n^{1+\lambda}}$ für $x \in [0,1]$.

Der Fall $-1 \le x < 0$ kann in gleicher Weise behandelt werden.

3. Eine Optimalitätsaussage

Für die Optimalitätsaussage wird Lemma 2 benötigt, das mit Hilfe der Überlegungen aus /3/ bewiesen wird.

Lemma 2: Für das Intervall $[-1,1]$ seien die Punkte $-1 \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le 1$ und eine äquidistante Zerlegung in $2(n+1)$ Teilintervalle $\Delta_j = \left[-1+\frac{j-1}{n+1}, -1+\frac{j}{n+1}\right]$, $j = 1(1)2n+2$, gegeben. Dann gibt es m Teilintervalle

$$\left\{\Delta_i^*,\ i = 1(1)m\right\} \subseteq \left\{\Delta_j,\ j = 1(1)2n+2\right\}$$ und einen Punkt $\xi \in [-1,1]$

mit

a) $x_k \notin \Delta_i^*$, $k = 0(1)n$, $i = 1(1)m$,

b) $m \geq \frac{n+1}{6}$,

c) $0 \leq t - \xi < 3\,\frac{1}{n+1}$ für $t \in \Delta_i^*$ und $i = 1(1)m$.

Beweis: Alle Intervalle der Menge $\{\Delta_i,\ i = 1(1)2n+2\}$, die keinen Punkt x_k, $k = 0(1)n$, enthalten, werden als "gekennzeichnete" Intervalle bezeichnet. Es ist klar, daß ihre Anzahl $p \geq n+1$ ist. Sei $\Theta(k,l)$ das Verhältnis der Anzahl der gekennzeichneten Teilintervalle der Menge $\{\Delta_{k+1}, \Delta_{k+2}, \ldots, \Delta_{k+l}\}$ zu ihrer Gesamtzahl $l-k$ $(k = 0(1)2n+2,\ l = 1(1)2n+2-k)$, so gibt es ein $\bar{k} < \frac{3}{2}(n+1)$ mit

$$\min_{l > \bar{k}} \Theta(\bar{k}, l) \geq \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Nimmt man an, diese Aussage ist falsch, dann gibt es ein l_1 mit $\Theta(0,l_1) < \frac{1}{3}$ und ein $l_2 > l_1$ mit $\Theta(l_1,l_2) < \frac{1}{3}$ usw. Schließlich gibt es aufgrund der Annahme ein $l_\nu \geq \frac{3}{2}(n+1)$ mit $\Theta(l_{\mu-1}, l_\mu) < \frac{1}{3}$ für $\mu = 1(1)\nu$ $(l_0 = 0)$. Dann sind unter den Intervallen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{l_\nu}$ weniger als $\frac{1}{3}\,l_\nu$ gekennzeichnete, und ihre Gesamtzahl ist kleiner als $\frac{1}{3}\,l_\nu + (2n+2-l_\nu) = 2n+2-\frac{2}{3}\,l_\nu$. Wegen $p \geq n+1$ erhält man die Ungleichung $2n+2-\frac{2}{3}\,l_\nu > n+1$, und es ergibt sich $l_\nu < \frac{3}{2}(n+1)$ im Gegensatz zur Annahme $l_\nu \geq \frac{3}{2}(n+1)$. Deshalb existiert ein $\bar{k} < \frac{3}{2}(n+1)$ mit $\min\limits_{l > \bar{k}} \Theta(\bar{k},l) \geq \frac{1}{3}$. Man wählt $\xi = 1 + \frac{\bar{k}}{n+1}$ und bezeichnet mit Δ_j^*, $j = 1(1)m$, die gekennzeichneten Intervalle der Menge $\{\Delta_{\bar{k}+1}, \ldots, \Delta_{2(n+1)}\}$ in natürlicher Reihenfolge. Aufgrund der Wahl von $\bar{k}$ ist $m \geq \frac{1}{6}(n+1)$. Sei $\Delta_j^* = [t_{j-1}, t_j]$. Aus (8) folgt, daß $t_j \leq \xi + 3\,\frac{1}{n+1}$, $j = 1(1)m$, ist. Denn würde für ein j die Ungleichung $t_j > \xi + 3\,\frac{1}{n+1}$

gelten, so wären in der Menge $\{\Delta_{\overline{k}+1}, \ldots, \Delta_{\overline{k}+3j}\}$ weniger als j gekennzeichnete Intervalle enthalten, d. h., $\Theta(\overline{k},\overline{k}+3j)$ wäre kleiner als $\frac{1}{3}$. Deshalb gilt für $t \in \Delta_j^* = [t_{j-1}, t_j]$ die Ungleichung $t - \xi \le 3\,\frac{j}{n+1}$, $j = 1(1)m$.

Jetzt kann man zeigen, daß die Abschätzung (7) in der Funktionenklasse H_1^λ optimal ist.

<u>Satz 3:</u> Für beliebige in $(-1,1)$ definierte Funktionen $A_k(x)$ und Knoten $x_k \in [-1,1]$, $k = 0(1)n$, gibt es eine Funktion $\varphi_0(x) \in H_1^\lambda$, $0 \le \lambda \le 1$, und einen Punkt $\xi \in [-1,1]$, so daß die Ungleichung

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{t - \xi}\,dt - \sum_{k=0}^{n} A_k(\xi)\,\varphi_0(x_k) \right| \ge c\,\frac{\ln n}{n^{1+\lambda}}$$

gilt.

<u>Beweis:</u> Der Punkt ξ wird wie im Beweis von Lemma 2 festgelegt. Es sei

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le \xi \text{ sowie auf allen Intervallen der Zerlegung } \Delta_j \text{ (vgl. Lemma 2),} \\ & j = 1(1)2n+2, \text{ die ein } x_k,\ k = 0(1)n, \text{ enthalten,} \\ (x - t_{j-1})^{1+\lambda} & \text{für } t_{j-1} \le x \le \frac{t_j + t_{j-1}}{2}, \\ (t_j - x)^{1+\lambda} & \text{für } \frac{t_j + t_{j-1}}{2} \le x \le t_j, \end{cases} \quad \left.\right\} \text{falls } [t_{j-1}, t_j] \text{ ein gekennzeichnetes Intervall ist.} \tag{9}$$

Leicht sieht man, daß $\varphi_0(x) \in H_1^\lambda$ und $\varphi_0(x_k) = 0$, $k = 0(1)n$, ist. Damit ergibt sich

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{t - \xi}\,dt - \sum_{k=0}^{n} A_k(\xi)\,\varphi_0(x_k) \right| = \int_{\xi}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{t - \xi}\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\Delta_j^*} \frac{\varphi_0(t)}{t - \xi}\,dt \ge \frac{n+1}{3} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \int_{\Delta_j^*} \varphi_0(t)\,dt$$

$$= \frac{2(n+1)}{3} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \int_{0}^{\frac{1}{2(n+1)}} t^{1+\lambda}\, dt = \frac{c}{n^{1+\lambda}} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \geq c\, \frac{\ln n}{n^{1+\lambda}}.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der bekannten Eigenschaft der Partialsumme der harmonischen Reihe.

Die Frage ist nun, ob man den Quadraturfehler dadurch verringern kann, daß man die Quadraturformel modifiziert und neben den Funktionswerten $\varphi(x_k)$ auch die Ableitung $\varphi'(x)$ an den Knoten x_k, $k = 0(1)n$, in die Formel einbezieht, d. h., Näherungsquadraturen der Art

$$\tilde{I}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{1} A_k^j(x)\, \varphi^{(j)}(x_k) \approx \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt \tag{10}$$

betrachtet, wie sie z. B. von Solijev /4/ untersucht wurden.

<u>Satz 4:</u> Die Fehlerabschätzung (7) ist für die Quadraturformel (10) optimal im Sinne von Satz 3.

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß für $\varphi_o(x)$ aus (9) neben $\varphi_o(x_k) = 0$ auch $\varphi'_o(x_k) = 0$, $k = 0(1)n$, gilt und damit alle Abschätzungen im Beweis von Satz 3 erhalten bleiben.

Damit ist die Näherungsquadratur, die auf äquidistanter Polygonzuginterpolation beruht, trotz ihrer einfachen Bauart in den betrachteten Funktionenräumen äußerst wirkungsvoll. Das wird auch durch folgende Beispiele unterstrichen. Alle Rechnungen wurden auf dem Tischrechner K 1002 durchgeführt.

n	$I(t^2, 0.99)$	$I(t^3, 0)$	$I(t^3, 0.99)$
50		0,66828	
200	-3,208056	0,66676	-2,50938
500	-3,207982		
exakt	-3,207968	0,66667	-2,50922

n	$I(e^t,0)$	$I(\sqrt{1-t^2}e^t,-0{,}25)$
50	2,1147875	2.06013
200	2,1145194	2.06412
500	2,1145045	
exakt	2,1145017	2.06465

Abschließend sei bemerkt, daß sich eine weitere Einschränkung der zugelassenen Funktionen, z. B. durch höhere Stetigkeitsforderungen, nicht mehr im Quadraturfehler niederschlägt, da schon die Abschätzung des Fehlers in Lemma 1 auch für glattere Funktionen nicht zu verbessern ist.
Sucht man optimale Quadraturformeln für Funktionen, die stärkeren Stetigkeitsforderungen genügen, muß man Splines höherer Ordnung zu ihrer Konstruktion heranziehen.

Literatur

/1/ Hunter, D. B.: Some Gauß-type formulae for the evaluation of Cauchy principal values of integrals. Numer. Math. 19, 419 - 424 (1972)

/2/ Tsamasphyros, G. J., and Theocaris, P. S.: On the convergence of a Gauß quadratur rule evaluation of Cauchy type singular integrals. BIT 17, 458 - 464 (1977)

/3/ Маковоз, Ю. И., и Шешко, М. А.: Об оценке прогрешности квадратурной формулы для сингулярного интеграла. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук 1977, № 6, 36 - 41 (1977)

/4/ Солиев, Ю.: Об интерполяционных квадратурных формулах с кратными узлами для сингулярных интегралов. Изв. высш. учебн. завед., Матем. 1977, № 9, (184) 122 - 126 (1977)

eingegangen: 23. 08. 1982

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. R. Strauß
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. **22**, 67 - 79 (1983) 46F10

Brian Fisher

Some neutrix products of distributions

The following definition for the product of two distributions was given in /2/ and /3/.

Definition 1: Let f and g be two distributions for which on the open interval (a,b), f is the r-th derivative of an ordinary summable function F in $L^p(a,b)$ and $g^{(r)}$ is an ordinary summable function in $L^q(a,b)$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then the product $fg = gf$ of f and g is defined on the open interval (a,b) by

$$fg = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, {}_rc_i \left[Fg^{(i)}\right]^{(r-i)},$$

where

$${}_rc_i = \frac{r!}{i!(r-i)!}.$$

Now let ϱ be a fixed infinitely differentiable function having the properties

(i) $\varrho(x) = 0$, for $|x| \geq 1$,

(ii) $\varrho(x) \geq 0$,

(iii) $\varrho(x) = \varrho(-x)$,

(iv) $\int_{-1}^{1} \varrho(x)dx = 1$.

We define the function δ_n by

$$\delta_n(x) = n\varrho(nx)$$

for $n = 1,2,\ldots$. The sequence $\{\delta_n\}$ is regular and converges to the Dirac delta-distribution δ. For an arbitrary distribution f we define the function f_n by

$$f_n(x) = f*\delta_n = \int_{-1/n}^{1/n} f(x-t)\delta_n(t)\,dt$$

for $n = 1,2,\ldots$. The sequence $\{f_n\}$ is regular and converges to f.

The following definition extends definition 1 to a wider class of distributions and was given in /3/.

Definition 2: Let f and g be arbitrary distributions and let

$$g_n = g*\delta_n.$$

We say that the product $f \circ g$ of f and g exists and is equal to h on the open interval (a,b) if

$$\lim_{n\to\infty} (fg_n,\phi) = \lim_{n\to\infty} (f,g_n\phi) = (h,\phi)$$

for all test functions ϕ with compact support contained in the interval (a,b).

The following theorem was proved in /3/.

Theorem 1: Let f and g be distributions. If the product fg exists on the open interval (a,b) then the products $f \circ g$ and $g \circ f$ exist and

$$f \circ g = g \circ f = fg$$

on this interval.

Examples were also given in /3/ to show that definiton 2 is in fact a proper extension of definiton 1.
The next definition was given by van der Corput /1/.

Definition 3: A neutrix N is a commutative additive group of functions $\nu(\xi)$ defined on a domain N' with values in an additive group N", where further if for some ν in N, $\nu(\xi) = \gamma$ for all ξ in N', then $\gamma = 0$. The functions in N are called negligible functions. Now let N' be a set contained in a topological space with a limit point b which does not belong to N'. If $f(\xi)$ is a function defined on N' with values in N" and it is possible to find a constant B such that $f(\xi) - B$ is negligible in N, then B is called the neutrix limit or N-limit of f as ξ tends to b and we write

$$\operatorname*{N-lim}_{\xi\to b} f(\xi) = B$$

where the limit B must be unique if it exists.

The following definition extends definition 2 to an even wider class of distributions and was given in /4/.

__Definition 4:__ Let f and g be arbitrary distributions and let

$$g_n = g * \delta_n .$$

We say that the neutrix product $f \circ g$ of f and g exists and is equal to h on the open interval (a,b) if

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\ (fg_n,\phi) = \underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\ (f,g_n\phi) = (h,\phi)$$

for all test functions ϕ with compact support contained in the interval (a,b), where N is the neutrix having domain $N' = \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ and range N" the real numbers with negligible functions linear sums of the functions

$$n^{\lambda}\ln^{r-1}n,\ \ln^r n$$

for $\lambda > 0$ and $r = 1,2,\ldots$ and all functions f(n) for which

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

The following theorems were proved in /4/.

__Theorem 2:__ Let f and g be distributions for which the product $f \circ g$ exists by definition 2. Then the neutrix product $f \circ g$ exists and defines the same distribution.

__Theorem 3:__ Let f and g be distributions and suppose that the neutrix products $f \circ g$ and $f \circ g'$ exist on the open interval (a,b). Then the neutrix product $f' \circ g$ exists on the interval (a,b) and

$$(f \circ g)' = f' \circ g + f \circ g'$$

on the interval (a,b).

__Theorem 4:__ The neutrix products $x^{-r} \circ \delta^{(p)}$ and $\delta^{(p)} \circ x^{-r}$ exist and

$$x^{-r} \circ \delta^{(p)} = \frac{(-1)^r p!}{(p+r)!}\,\delta^{(p+r)},\quad \delta^{(p)} \circ x^{-r} = 0$$

for $r = 1,2,\ldots$ and $p = 0,1,2,\ldots$.

__Theorem 5:__ The neutrix products $x_+^{\,r} \circ \delta^{(r+p)}(x)$ and $\delta^{(r+p)}(x) \circ x_+^{\,r}$ exist and

$$x_+^{\,r} \circ \delta^{(r+p)}(x) = \delta^{(r+p)}(x) \circ x_+^{\,r} = \frac{(-1)^r (r+p)!}{2p!}\,\delta^{(\ )}(x)$$

for $r,p = 0,1,2,\ldots$.

We note here that the products given in the last two theorems are not in general defined by definition 2 and so definition 3 is a proper extension of definition 2.

We now prove the following theorem.

<u>Theorem 6:</u> The neutrix product $x^r \circ x^s$ exists and

$$x^r \circ x^s = x^{r+s} \tag{1}$$

for $r,s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

<u>Proof:</u> We note first of all that if either r or $s = 0,1,2,\ldots$ then this product exists by definition 1 and then $x^r x^s = x^{r+s}$. Equation (1) follows from theorems 1 and 2 for these cases. We therefore only need consider the neutrix product $x^{-r} \circ x^{-s}$ for $r,s = 1,2,\ldots$. We have by definition

$$x^{-r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{d^r}{dx^r} \ln|x|$$

for $r = 1,2,\ldots$ and

$$(x^{-2r},\Phi) = \int_0^\infty x^{-2r}\Big[\Phi(x)+\Phi(-x)-2\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\Phi^{(2i)}(0)}{(2i)!} x^{2i}\Big]dx,$$

$$(x^{-2r+1},\Phi) = \int_0^\infty x^{-2r+1}\Big[\Phi(x)-\Phi(-x)-2\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\Phi^{(2i-1)}(0)}{(2i-1)!} x^{2i-1}\Big]dx$$

for arbitrary test function Φ with compact support and $r = 1,2,\ldots,$ see Gelfand and Shilov /5/.

First of all let us consider the neutrix product $x^{-1} \circ x^{-2s}$ for $s = 1,2,\ldots$ and put

$$(x^{-2s})_n = x^{-2s} * \delta_n = -\frac{1}{(2s-1)!}\int_{-1/n}^{1/n} \ln|x-t|\,\delta_n^{(2s)}(t)dt.$$

Then $(x^{-2s})_n$ is an even function. Thus if Φ is an arbitrary test function with compact support, we have

$$(x^{-1},(x^{-2s})_n\Phi) = \int_0^\infty x^{-1}(x^{-2s})_n\,[\Phi(x)-\Phi(-x)]dx.$$

It follows from Taylor's theorem that

$$\Phi(x)-\Phi(-x) = 2\sum_{i=1}^{s} \frac{\Phi^{(2i-1)}(0)}{(2i-1)!} x^{2i-1} + \frac{\Phi^{(2s+1)}(\xi x)-\Phi^{(2s+1)}(-\xi x)}{(2s+1)!} x^{2s+1}$$

where $0 \leq \xi \leq 1$ and so

$$(x^{-1},(x^{-2s})_n \Phi) = 2\sum_{i=1}^{s} \frac{\Phi^{(2i-1)}(0)}{(2i-1)!} \int_0^\infty x^{2i-2}(x^{-2s})_n dx$$

$$+ \frac{1}{(2s+1)!}\int_0^\infty x^{2s}(x^{-2s})_n \left[\Phi^{(2s+1)}(\xi x)-\Phi^{(2s+1)}(-\xi x)\right] dx.$$

Now

$$-(2s-1)!\int_0^\infty x^m(x^{-2s})_n dx = \int_0^\infty x^m \int_{-1/n}^{1/n} \ln|x-t|\,\delta_n^{(2s)}(t)\,dt\,dx$$

$$= n^{2s-m-1}\int_0^\infty v^m \int_{-1}^{1}[\ln|v-u|-\ln n]\rho^{(2s)}(u)\,du\,dv$$

on making the substitutions $nt = u$ and $nx = v$. It follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_0^\infty x^m(x^{-2s})_n dx = 0$$

for $m = 1,2,\dots, 2s-2$ and so

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \sum_{i=1}^{s} \frac{\Phi^{(2i-1)}(0)}{(2i-1)!} \int_0^\infty x^{2i-2}(x^{-2s})_n dx = 0.$$

Further, from what we noted at the start of the proof,

$$\lim_{n\to\infty} x^{2s}(x^{-2s})_n = \underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\, x^{2s}(x^{-2s})_n = x^{2s}x^{-2s} = 1$$

and so

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_0^\infty x^{2s}(x^{-2s})_n\left[\Phi^{(2s+1)}(\xi x)-\Phi^{(2s+1)}(-\xi x)\right]dx$$

$$= \int_0^\infty \left[\Phi^{(2s+1)}(\xi x)-\Phi^{(2s+1)}(-\xi x)\right]dx.$$

It follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\,(x^{-1},(x^{-2s})_n\,\phi) = \frac{1}{(2s+1)!}\int_0^{\infty}[\phi^{(2s+1)}(\xi x)-\phi^{(2s+1)}(-\xi x)]\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^{-2s-1}[\phi(x)-\phi(-x)-2\sum_{i=1}^{s}\frac{\phi^{(2i-1)}(0)}{(2i-1)!}\,x^{2i-1}]\,dx = (x^{-2s-1},\,\phi)$$

for all test functions ϕ with compact support. The neutrix product $x^{-1} \circ x^{-2s}$ therefore exists and

$$x^{-1} \circ x^{-2s} = x^{-2s-1}$$

for $s = 1,2,\dots$.

We can prove similarly that the neutrix product $x^{-1} \circ x^{-2s+1}$ exists and

$$x^{-1} \circ x^{-2s+1} = x^{-2s}$$

for $s = 1,2,\dots$. We have therefore proved that the neutrix product $x^{-1} \circ x^{-s}$ exists and

$$x^{-1} \circ x^{-s} = x^{-s-1}$$

for $s = 1,2,\dots$.

Now assume that the neutrix product $x^{-r} \circ x^{-s}$ exists and

$$x^{-r} \circ x^{-s} = x^{-r-s} \tag{2}$$

for some positive integer r and $s = 1,2,\dots$. Then it follows from theorem 3 that the neutrix product $x^{-r-1} \circ x^{-s}$ exists and

$$-\,r(x^{-r-1} \circ x^{-s}) = -\,(r+s)x^{-r-s-1} + s(x^{-r} \circ x^{-s-1}) = -\,rx^{-r-s-1}$$

by our assumption for $s = 1,2,\dots$. Equation (2) follows by induction for $r,s = 1,2,\dots$. This completes the proof of the theorem.

<u>Theorem 7:</u> The neutrix product $\delta^{(r)} \circ \delta^{(s)}$ exists and

$$\delta^{(r)} \circ \delta^{(s)} = 0$$

for $r,s = 0,1,2,\dots$.

<u>Proof:</u> Let ϕ be an arbitrary test function with compact support. Then

$$(\delta^{(r)},\delta_n{}^{(s)}\phi) = (-1)^r\sum_{i=0}^{r} {}_rc_i\,\delta_n{}^{(s+i)}(0)\,\phi^{(r-i)}(0).$$

where $\delta_n^{(s+i)}(0) = n^{s+i+1}\,\rho^{(s+i)}(0)$ for $i = 0,1,\ldots,r$. It follows that either $\delta_n^{(s+i)}(0) = 0$ or

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \delta_n^{(s+i)}(0) = 0.$$

Thus

$$\begin{aligned}\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} (\delta^{(r)},\delta_n^{(s)}\Phi) &= \operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} (-1)^r \sum_{i=0}^{r} {}_rc_i\delta_n^{(s+i)}(0)\Phi^{(r-i)}(0)\\ &= 0\\ &= (0,\Phi).\end{aligned}$$

It follows that the neutrix product $\delta^{(r)} \circ \delta^{(s)}$ exists and

$$\delta^{(r)} \circ \delta^{(s)} = 0$$

for $r,s = 0,1,2,\ldots$. This completes the proof of the theorem.

<u>Theorem 8:</u> The neutrix products $(x \pm i0)^r \circ (x \pm i0)^s$ exist and

$$(x \pm i0)^r \circ (x \pm i0)^s = (x \pm i0)^{r+s} \tag{3}$$

for $r,s = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots$.

<u>Proof:</u> The distribution $(x \pm i0)^r$ is defined by $(x \pm i0)^r = x^r$ for $r = 0,1,2,\ldots$ and

$$(x \pm i0)^{-r} = x^{-r} \pm \frac{(-1)^r i\pi}{(r-1)!}\delta^{(r-1)}$$

for $r = 1,2,\ldots$, see Gelfand and Shilov /5/. It follows that if either r or $s = 0,1,2,\ldots$ then the products in this theorem exist by definition 1 and

$$(x \pm i0)^r(x \pm i0)^s = (x \pm i0)^{r+s}.$$

Equations (3) follow from theorems 1 and 2 for these cases.

We therefore only need to consider the neutrix products $(x \pm i0)^{-r} \circ (x \pm i0)^{-s}$ for $r,s = 1,2,\ldots$. Since the neutrix product is obviously distributive with respect to addition we have

$$\begin{aligned}x^{-r} \circ x^{-s} - \frac{(-1)^{r+s}\pi^2}{(r-1)!(s-1)!}\delta^{(r-1)} \circ \delta^{(s-1)}\\ \pm \frac{(-1)^r i\pi}{(r-1)!}\delta^{(r-1)} \circ x^{-s} \pm \frac{(-1)^s i\pi}{(s-1)!}x^{-r} \circ \delta^{(s-1)}\end{aligned}$$

$$= x^{-r-s} \pm \frac{(-1)^{r+s} i\pi}{(r+s-1)!} \delta^{(r+s-1)}$$

$$= (x \pm i0)^{-r-s}$$

$$= [x^{-r} \pm \frac{(-1)^{r} i\pi}{(r-1)!} \delta^{(r-1)}] \circ [x^{-s} \pm \frac{(-1)^{s} i\pi}{(s-1)!} \delta^{(s-1)}]$$

$$= (x \pm i0)^{-r} \circ (x \pm i0)^{-s}$$

on using theorems 4,6 and 7, for $r,s = 1,2,\ldots$. This completes the proof of the theorem.

The following theorem follows similarly.

<u>Theorem 9:</u> The neutrix products $(x \mp i0)^{-r} \circ (x \pm i0)^{-s}$ exist and

$$(x \mp i0)^{-r} \circ (x \pm i0)^{-s} = (x \pm i0)^{-r-s}$$

for $r,s = 1,2,\ldots$.

We now prove the following theorem.

<u>Theorem 10:</u> The neutrix products $x_+^\lambda \circ \delta^{(r)}(x)$ and $\delta^{(r)}(x) \circ x_+^\lambda$ exist and

$$x_+^\lambda \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ x_+^\lambda = 0$$

for $\lambda \neq 0,1,\ldots, r,-1,2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

<u>Proof:</u> We first of all note that if $\lambda > r$ then it is easily seen that the product $x_+^\lambda \delta^{(r)}(x)$ exists by definition 1 and the results of the theorem follow from theorems 1 and 2.

Now suppose that $\lambda > -1$. Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \delta_n^{(r)} x^m dx = \int_0^{1/n} x^{m+\lambda} \delta_n^{(r)}(x) dx$$

$$= n^{r-m-\lambda} \int_0^1 t^{m+\lambda} \rho^{(r)}(t) dt$$

where the substitution $nx = t$ has been made. It follows that the functions

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \delta_n^{(r)}(x) x^m dx$$

are negligible, or zero, for $\lambda \neq 0,1,\ldots,r$ and $m = 0,1,2,\ldots$. Further

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_+^{\lambda}\delta_n^{(r)}(x)x^{r+1}|\,dx \le n^{-1-\lambda}\int_0^1 |t^{r+1+\lambda}\rho^{(r)}(t)|\,dt$$

and so

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x_+^{\lambda}\delta_n^{(r)}(x)x^{r+1}|\,dx = 0.$$

Now let Φ be an arbitrary test function. Then

$$\Phi(x) = \sum_{m=0}^{r}\frac{x^m}{m!}\Phi^{(m)}(0) + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!}\Phi^{(r+1)}(\xi x)$$

where $0 \le \xi \le 1$ and so

$$(x_+^{\lambda},\delta_n^{(r)}(x)\,\Phi(x)) = \sum_{m=0}^{r}\frac{\Phi^{(m)}(0)}{m!}\int_{-\infty}^{\infty} x_+^{\lambda}\,\delta_n^{(r)}(x)x^m dx$$

$$+ \frac{1}{(r+1)!}\int_{-\infty}^{\infty} x_+^{\lambda}\delta_n^{(r)}(x)x^{r+1}\,\Phi^{(r+1)}(\xi x)\,dx.$$

Since

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x_+^{\lambda}\delta_n^{(r)}(x)x^{r+1}\,\Phi^{(r+1)}(\xi x)\,dx\right|$$

$$\le \sup_x\left\{|\Phi^{(r+1)}(x)|\right\}\int_{-\infty}^{\infty}|x_+^{\lambda}\delta_n^{(r)}(x)x^{r+1}|\,dx$$

it follows from what we have just proved that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\,(x_+^{\lambda},\delta_n^{(r)}(x)\,\Phi(x)) = 0 = (0,\Phi(x)).$$

Thus

$$x_+^{\lambda}\circ\delta^{(r)}(x) = 0 \tag{4}$$

for $\lambda > -1$ and $\lambda \ne 0,1,\ldots,r$.

Now assume that equation (4) holds when $-k < \lambda < -k+1$ and $r = 0,1,2,\ldots$, where k is a positive integer. This is certainly true when $k = 1$. Using theorem 3 we have ,

$$[x_+^{\lambda}\circ\delta^{(r)}(x)]' = 0 = \lambda x_+^{\lambda-1}\circ\delta^{(r)}(x) + x_+^{\lambda}\circ\delta^{(r+1)}(x)$$

and it follows from our assumption that equation (4) holds when $-k-1 < \lambda < -k$ and $r = 0,1,2,\ldots$. Equation (4) now follows by induction for $\lambda < -1$, $\lambda \ne -2,-3,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

We will now consider the neutrix product $\delta^{(r)}(x) \circ x_+^\lambda$. If $\lambda > -1$ then x_+^λ is an ordinary summable function and if $-k-1 < \lambda < -k$, where k is a positive integer, then

$$x_+^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)} \frac{d^k}{dx^k} x_+^{\lambda+k},$$

$x_+^{\lambda+k}$ being an ordinary summable function. Thus

$$(x_+^\lambda)_n = x_+^\lambda * \delta_n(x)$$

$$= \begin{cases} \int_{-1/n}^{x} (x-t)^\lambda \delta_n(t)dt, & \lambda > -1, \\ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_{-1/n}^{x} (x-t)^{\lambda+k} \delta_n^{(k)}(t)dt, & -k-1 < \lambda < -k \\ & \text{and } k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Making the substitution $nt = s$ we have

$$\int_{-1/n}^{0} (-t)^{\lambda+k} \delta_n^{(k)}(t)dt = n^{-\lambda} \int_{-1}^{0} (-s)^{\lambda+k} \rho^{(k)}(s)ds$$

and we see that the functions

$$\int_{-1/n}^{0} (-t)^{\lambda+k} \delta_n^{(k)}(t)dt$$

are negligible for $\lambda \neq 0$ and $k = 0,1,2,\ldots$.

Now let Φ be an arbitrary test function. Then

$$(\delta(x), (x_+^\lambda)_n \Phi(x))$$

$$= \begin{cases} \Phi(0) \int_{-1/n}^{0} (-t)^\lambda \delta_n(t)dt, & \lambda > -1, \\ \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Phi(0)}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_{-1/n}^{0} (-t)^{\lambda+k} \delta_n^{(k)}(t)dt, & -k-1 < \lambda < -k \\ & \text{and } k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

and it follows from what we have just proved that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\, (\delta(x), (x_+^\lambda)_n \Phi(x)) = 0 = (0, \Phi(x)).$$

Thus

$$\delta(x) \circ x_+^\lambda = 0$$

for $\lambda \neq 0,-1,-2,\ldots$.
Now assume that

$$\delta^{(r)}(x) \circ x_+^{\lambda} = 0 \tag{5}$$

for some positive integer r and $\lambda \neq 0,1,\ldots, r,-1,-2,\ldots$.
This is certainly true when $r = 0$. Using theorem 3 we have

$$[\delta^{(r)}(x) \circ x_+^{\lambda}]' = 0 = \delta^{(r+1)}(x) \circ x_+^{\lambda} + \lambda\delta^{(r)}(x) \circ x_+^{\lambda-1}$$
$$= \delta^{(r+1)}(x) \circ x_+^{\lambda}$$

by our assumption for $\lambda - 1 \neq 0,1,\ldots, r,-1,-2,\ldots$. It follows that

$$\delta^{(r+1)}(x) \circ x_+^{\lambda} = 0$$

for $\lambda \neq 0,1,\ldots, r+1,-1,-2,\ldots$. Equation (5) follows by induction for $\lambda \neq 0,1,\ldots, r,-1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$. This completes the proof of the theorem.

Corollary 1: The neutrix products $x_-^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x)$ and $\delta^{(r)}(x) \circ x_-^{\lambda}$ exist and

$$x_-^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ x_-^{\lambda} = 0$$

for $\lambda \neq 0,1,\ldots, r,-1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

Proof: The results follow on replacing x by $-x$ in equations (4) and (5).

Corollary 2: The neutrix products $|x|^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x)$, $\delta^{(r)}(x) \circ |x|^{\lambda}$, $(\operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\lambda}) \circ \delta^{(r)}(x)$ and $\delta^{(r)}(x) \circ (\operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\lambda})$ exist and

$$|x|^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ |x|^{\lambda} = (\operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\lambda}) \circ \delta^{(r)}(x)$$
$$= \delta^{(r)}(x) \circ (\operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\lambda}) = 0$$

for $\lambda \neq 0,1,\ldots, r,-1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

Proof: The results follow on noting that

$$|x|^{\lambda} = x_+^{\lambda} + x_-^{\lambda}, \quad \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\lambda} = x_+^{\lambda} - x_-^{\lambda},$$

the neutrix product being distributive with respect to addition.

We can now define further neutrix products. Consider for example the function

$$\cos x_+^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} x_+^{2m\lambda}/(2m)!$$

where $\lambda > 0$. Choosing an integer k so that $2k\lambda > r \geq 0$, the function $\sum_{m=k}^{\infty} x_+^{2m\lambda}/(2m)!$ is r times continuously differentiable and its r-th derivative at the origin is zero. Thus

$$\Big\{\sum_{m=k}^{\infty} x_+^{2m\lambda}/(2m)!\Big\} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ \Big\{\sum_{m=k}^{\infty} x_+^{2m\lambda}/(2m)!\Big\}$$
$$= 0.$$

It follows that the neutrix products $\cos x_+^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x)$ and $\delta^{(r)}(x) \circ \cos x_+^{\lambda}$ exist and

$$\cos x_+^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ \cos x_+^{\lambda} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(2m)!} x_+^{2m\lambda} \circ \delta^{(r)}(x) \tag{6}$$

for $2k\lambda > r$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

If $2m\lambda \neq 1,\ldots,r$ for $m = 1,\ldots, k-1$, these equations reduce to

$$\cos x_+^{\lambda} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ \cos x_+^{\lambda} = x_+^0 \circ \delta^{(r)}(x) = \tfrac{1}{2}\delta^{(r)}(x),$$

using theorems 5 and 10, for $r = 0,1,2,\ldots$.

If $\lambda = \frac{1}{2}$, then equations (6) become

$$\cos x_+^{\frac{1}{2}} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ \cos x_+^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{m=0}^{r} \frac{1}{(2m)!} x_+^{m} \circ \delta^{(r)}(x) = \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m r!}{2(r-m)!(2m)!} \delta^{(r-m)}(x),$$

using theorem 5, for $r = 0,1,2,\ldots$.

As a second example, consider the function f(x) defined on the open interval (-1,1) by

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^{\frac{1}{2}})^{-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Then $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x_+^{m/2}$ on the open interval (-1,1). The function

$\sum_{m=2r+1}^{\infty} x_+^{m/2}$ is r times continuously differentiable and its r-th derivative at the origin is zero. Thus

$$\left\{\sum_{m=2r+1}^{\infty} x_+^{m/2}\right\} \circ \delta^{(r)}(x) = \delta^{(r)}(x) \circ \left\{\sum_{m=2r+1}^{\infty} x_+^{m/2}\right\} = 0.$$

It follows that the neutrix products $f(x) \circ \delta^{(r)}(x)$ and $\delta^{(r)}(x) \circ f(x)$ exist on the open interval $(-1,1)$ and

$$\begin{aligned} f(x) \circ \delta^{(r)}(x) &= \delta^{(r)}(x) \circ f(x) \\ &= \sum_{m=0}^{2r} x_+^{m/2} \circ \delta^{(r)}(x) = \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m r!}{2(r-m)!} \delta^{(r-m)}(x), \end{aligned}$$

using theorems 5 and 10, for $r = 0,1,2,\ldots$.

References

/1/ van der Corput, J. G.: Introduction to the neutrix calculus. J. Analyse Math. 7, 291 - 398 (1959)

/2/ Fisher, B.: The product of distributions. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 22, 291 - 298 (1971)

/3/ Fisher, B.: On defining the product of distributions. Math. Nachr. 99, 239 - 249 (1980)

/4/ Fisher, B.: A non-commutative neutrix product of distributions. Math. Nachr. (to appear)

/5/ Gelfand, I. M., and Shilov, G. E.: Generalized Functions, Vol. I. New York 1964

received: July 16, 1982

Author's address:

B. Fisher
Department of Mathematics, The University
Leicester
LE1 7RH, England

Rostock. Math. Kolloq. 22, 81 - 88 (1983) 65010
90C20

Lothar Berg

Natürlicher Ausgleich von Meßwerten mehrfach monotoner Funktionen[1]

Sucht man für eine Folge von Meßwertpaaren

$$(t_i, y_i),\ i = 0,1,\dots,n, \tag{1}$$

eine Regressionsfunktion $r(t)$, so geht man von einer Kurvenschar mit endlich vielen Parametern aus und bestimmt diese Parameter mit Hilfe der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate. Die Wahl der Kurvenschar erfolgt auf Grund einer vorhergehenden Modellvorstellung über den hinter (1) stehenden Zusammenhang. Für den Fall, daß noch keine Modellvorstellung vorliegt bzw. man sich bei mehreren möglichen Modellen nicht für ein bestimmtes entscheiden kann, haben J. Peil und S. Schmerling in einer Reihe von Arbeiten /5/, /6/, /7/, /8/, /9/ ein empirisches Regressionsverfahren entwickelt mit dem Ergebnis

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i K(t-t_i) \Big/ \sum_{j=1}^{n} K(t-t_j).$$

In den dort betrachteten Beispielen ist die Kernfunktion $K(t)$ nichtnegativ, gerade sowie für $t \geq 0$ monoton nichtwachsend, und $r(t)$ hängt von der Wahl der Kernfunktion nicht wesentlich ab.

Im folgenden soll unter der Voraussetzung äquidistanter $t_i = i$ ein anderes natürliches Ausgleichsverfahren vorgestellt werden. Vorausgesetzt wird, daß die y_i in (1) Näherungswerte für eine k-fach monotone Funktion z_i sind, d. h. für eine Funktion mit

$$\nabla^j z_i \geq 0 \tag{2}$$

für $i = j, j+1, \dots, n$ und $j = 1,2,\dots,k$, wobei ∇ der Operator für die Rückwärtsdifferenzen $\nabla z_i = z_i - z_{i-1}$ ist.

1 Ausarbeitung eines Teils der Schauvorlesung gleichen Titels vom 02. 04. 1982

Bei nichtäquidistanten t_i kann man analog vorgehen, wenn man die Differenzen durch die Steigungen ersetzt. Die Überlegungen lassen sich weiterhin auf den Fall übertragen, wo in (2) für einige oder alle j das $\leq$ - Zeichen steht. Schwieriger ist dagegen der Fall, wo in (2) das Relationszeichen bei festem j an einer Stelle i_o wechselt, sofern man diese Stelle nicht von vornherein kennt, sondern erst aus dem Zahlenmaterial zu bestimmen hat.

Aufgabe: Zu gegebenen reellen Zahlen $y_o, y_1, \ldots, y_n$ und einer natürlichen Zahl $k \leq n$ werden reelle Zahlen $x_o, x_1, \ldots, x_n$ gesucht, so daß $z_i = y_i + x_i$ die Ungleichungen (2) erfüllt und

$$\sum_{i=o}^{n} x_i^2 = \text{Min!} \tag{3}$$

wird.
Offenbar genügt es, die Ungleichungen (2) für $1 \leq i = j \leq k$ und $j = k < i \leq n$ zu erfüllen, so daß sie nach Einführung der $n \times (n+1)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 3 & -3 & 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ (-1)^k & & & \cdots & \binom{k}{2} & -\binom{k}{1} & 1 & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & (-1)^k & \cdots & & & \binom{k}{2} & -\binom{k}{1} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit den Elementen $a_{ij} = (-1)^{i+j}\binom{\text{Min}(i,k)}{i-j}$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$, und der Spaltenvektoren

$$x = (x_o x_1 \ldots x_n)^T, \quad y = (y_o y_1 \ldots y_n)^T$$

bei komponentenweiser Ordnung die Form

$$-Ax \leq Ay \tag{5}$$

annehmen. Nach /2/, S. 137, ergibt sich die Lösung der Minimalaufgabe mit Hilfe der Hilfsvektoren

$$u = (u_1 \ldots u_n)^T, \quad v = (v_1 \ldots v_n)^T$$

aus dem folgenden

<u>Satz von Kuhn-Tucker:</u> Ein $(n+1)$-dimensionaler Vektor x ist genau dann Minimallösung von (3), (5), wenn es zwei n-dimensionale Vektoren u,v gibt mit

$$x = A^T u, \quad v = Ay + Ax, \quad u^T v = 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0. \tag{6}$$

Aus den ersten beiden Bedingungen von (6) folgt durch Elimination von x

$$AA^T u = v - Ay, \tag{7}$$

wobei die Matrix AA^T wegen (4) an der Stelle i,j mit $1 \leq i,j \leq n$ das Element

$$(-1)^{i+j} \binom{\mathrm{Min}(i,k) + \mathrm{Min}(j,k)}{\mathrm{Min}(i,k) - i+j}$$

besitzt. Aus den letzten drei Bedingungen folgt, daß $u_i v_i = 0$ ist für alle i. Somit lassen sich die von Null verschiedenen Komponenten von u aus denjenigen Gleichungen des Systems (7) bestimmen, in denen $v_i = 0$ ist. Man muß nur diese Gleichungen kennen.

Ein in /4/ beschriebenes Iterationsverfahren von Hildreth und d'Esopo ist zur numerischen Lösung von (6), (7) nicht zu empfehlen, da sich bei den durchgerechneten Testbeispielen trotz theoretischer Konvergenz keine konstanten Werte eingestellt haben.

<u>Der Fall k = 1:</u> Wir betrachten jetzt Funktionen, die im gewöhnlichen Sinne monoton nichtfallend sind wie etwa die Wachstumsfunktionen (vgl. /1/). Dann ist $k = 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offenbar zerfällt die Matrix AA^T, wenn man im Innern eine Zeile und die zugehörige Spalte streicht. Im Fall $v = 0$ wird nichts gestrichen, und die Komponenten der Lösungsvektoren x, u aus (6) lauten

$$x_i = -y_i + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} y_j, \quad u_i = \sum_{j=i}^{n} x_j$$

für alle i, wobei gleichzeitig $u_1 = -x_0$ gilt. Hieraus ergibt sich zur Lösung der Aufgabe (3), (5) der folgende endliche

<u>Algorithmus:</u> Im Fall $\nabla y_i \leq 0$ für $p \leq i \leq q$, aber $\nabla y_{p-1} > 0$ für $p > 1$ sowie $\nabla y_{q+1} > 0$ für $q < n$ ersetze man die Werte $y_{p-1}, \dots, y_q$ je durch

$$\frac{1}{q-p+2}\sum_{i=p-1}^{q} y_i.$$

Dieses Verfahren wiederhole man so lange, bis alle $\nabla y_i \geq 0$ sind. Die dadurch entstandenen y_i sind die gesuchten z_i.

<u>Der Fall n = 2:</u> Um die vorhergehenden Ergebnisse im Fall $k = 1$, $n = 2$ zu illustrieren, bilden wir mit den Abkürzungen

$$a = y_1 - y_0, \quad b = y_2 - y_0 \tag{8}$$

das Differenzenschema (vgl. /3/, S. 142)

$$\begin{array}{lll} y_0 & & \\ & a & \\ y_1 & & b-2a. \\ & b-a & \\ y_2 & & \end{array}$$

Das erste Gleichungssystem von (6) und das System (7) lauten in Komponentenschreibweise

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = -u_1, & 2u_1 - u_2 = v_1 - a, \\ x_1 = u_1 - u_2, & -u_1 + 2u_2 = v_2 + a - b. \\ x_2 = u_2, & \end{array}\right\} \tag{9}$$

Wir unterscheiden vier Unterfälle, die in Abb. 1 zusammengestellt werden.

I. Im Fall $u_1 = u_2 = 0$ ist $x_o = x_1 = x_2 = 0$ und

$$z_o = y_o,\ z_1 = y_1,\ z_2 = y_2. \tag{10}$$

Wegen der aus (9) folgenden Beziehungen $v_1 = a$, $v_2 = -a+b$ und $v \geq 0$ tritt dies ein für

$0 \leq a \leq b$.

II. Im Fall $v_1 = u_2 = 0$ ist $u_1 = -a/2$ und $x_o = a/2$, $x_1 = -a/2$, $x_2 = 0$ sowie wegen (8)

$$z_o = z_1 = (y_o+y_1)/2,\ z_2 = y_2. \tag{11}$$

Wegen $v_2 = b-a/2$ tritt dies ein für

$a \leq 0 \leq 2b-a$.

III. Im Fall $u_1 = v_2 = 0$ ist $u_2 = (a-b)/2$ und $x_o = 0$, $x_1 = (b-a)/2$, $x_2 = (a-b)/2$ sowie

$$z_o = y_o,\ z_1 = z_2 = (y_1+y_2)/2. \tag{12}$$

Wegen $v_1 = (a+b)/2$ tritt dies ein für

$-a \leq b \leq a$.

IV. Im Fall $v_1 = v_2 = 0$ ist $u_1 = -(a+b)/3$, $u_2 = (a-2b)/3$ und $x_o = (a+b)/3$, $x_1 = (-2a+b)/3$, $x_2 = (a-2b)/3$ sowie

$$z_o = z_1 = z_2 = (y_o+y_1+y_2)/3. \tag{13}$$

Dies tritt ein für

$2b \leq a \leq -b$.

<u>Der Fall $k = 2$:</u> Zum Vergleich führen wir noch den Fall $k = n = 2$ an, bei dem die Gleichungen (9) in

$$\left.\begin{array}{ll} x_o = -u_1+u_2, & 2u_1-3u_2 = v_1-a, \\ x_1 = u_1-2u_2, & -3u_1+6u_2 = v_2+2a-b \\ x_2 = u_2, & \end{array}\right\} \tag{14}$$

übergehen. Wir unterscheiden wieder dieselben vier Unterfälle wie zuvor, die aber diesmal zu Abb. 2 führen.

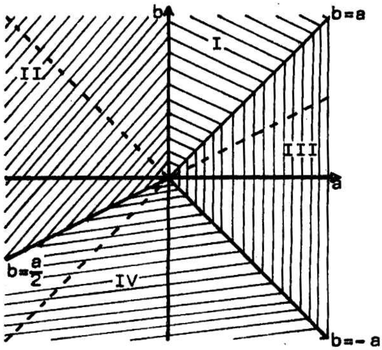

Abb. 1

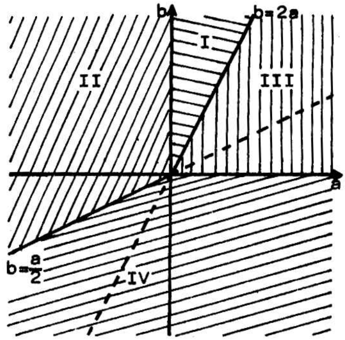

Abb. 2

I. Im Fall $u_1 = u_2 = 0$ gilt wieder (10), die Bedingung $v \geq 0$ liefert aber wegen der aus (14) folgenden Beziehungen $v_1 = a$, $v_2 = b - 2a$ die Ungleichungen

$$0 \leq 2a \leq b.$$

II. Im Fall $v_1 = u_2 = 0$ bleibt alles erhalten einschließlich (11) und der zugehörigen Ungleichungen.

III. Im Fall $u_1 = v_2 = 0$ ist $u_2 = (2a-b)/6$ und $x_0 = (2a-b)/6$, $x_1 = (b-2a)/3$, $x_2 = (2a-b)/6$ sowie

$$z_0 = (5y_0+2y_1-y_2)/6, \quad z_1 = (y_0+y_1+y_2)/3,$$

$$z_2 = (-y_0+2y_1-5y_2)/6.$$

Wegen $v_1 = b/2$ tritt dies ein für

$$0 \leq b \leq 2a.$$

IV. Im Fall $v_1 = v_2 = 0$ ist zwar $u_1 = -b$, die übrigen Werte bis einschließlich (13) bleiben aber unverändert. Lediglich die Ungleichungen für a und b ändern sich zu

$$b \leq 0 \leq a - 2b.$$

Beispiel: Als Beispiel zum Fall $k = 3$, $n = 4$ betrachten wir das Differenzenschema

$$
\begin{array}{ccccc}
2664 & & & & \\
 & 27 & & & \\
2691 & & 0 & & \\
 & 27 & & 1 & \\
2718 & & 1 & & \\
 & 28 & & -2. & \\
2746 & & -1 & & \\
 & 27 & & & \\
2773 & & & &
\end{array}
$$

An Stelle von (9) erhalten wir aus (6) und (7) diesmal

$$
\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ & 1 & -3 & 3 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -10 & 5 \\ 4 & -10 & 20 & -15 \\ -1 & 5 & -15 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & -27 \\ v_2 & \\ v_3 & -1 \\ v_4 & +2 \end{pmatrix}.
$$

In Anlehnung an den vorhergehenden Algorithmus beginnen wir mit $u_1 = u_2 = u_3 = v_4 = 0$, so daß wir $u_4 = 0{,}1$ erhalten sowie $v_1 = 26{,}9$, $v_2 = 0{,}5$ und $v_3 = -0{,}5$. Dies bedeutet, daß wir im nächsten Schritt $u_1 = u_2 = v_3 = v_4 = 0$ zu setzen haben, wobei $u_3 = 2/35$, $u_4 = 1/7$ folgt. Da jetzt v_1 und v_2 positiv sind, bricht der Algorithmus ab mit dem Ergebnis

$$
x_0 = -\frac{2}{35}, \quad x_1 = \frac{1}{35}, \quad x_2 = \frac{9}{35}, \quad x_3 = -\frac{13}{35}, \quad x_4 = \frac{1}{7}.
$$

In der abschließenden Tabelle mit auf zwei Dezimalen gerundeten Daten vergleichen wir die Werte $z_i = y_i + x_i$ mit den Werten $e_i = 1000 \cdot \exp(0.98+0.01 \cdot i)$, aus denen die y_i durch Rundung auf ganze Zahlen entstanden sind.

i	0	1	2	3	4
z_i	2663.94	2691.03	2718.23	2745.63	2773.14
e_i	2664.46	2691.23	2718.28	2745.60	2773.19
$e_i - z_i$	0.52	0.20	0.05	-0.03	0.05

Beim vorliegenden Beispiel sind die berechneten z_i nichts anderes als die Werte des zu den gegebenen y_i gehörenden Ausgleichspolynoms zweiten Grades.

Literatur

/1/ Berg, L.: Über Gaußsche Markov-Prozesse als Wachstumsmodelle. Biometrical J. 23, 477 - 486 (1981)

/2/ Collatz, L., und Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben. Berlin 1971

/3/ Kiesewetter, H., und Maeß, G.: Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Berlin 1974

/4/ Künzi, H. P., und Krelle, W.: Nichtlineare Programmierung. Berlin 1962

/5/ Peil, J., und Schmerling, S.: Empirische Regression als ein Verfahren zur "parameterfreien" Aufbereitung und Auswertung morphometrischer Daten für funktional-stochastische Beziehungen zwischen Systemgrößen. Gegenbauers morph. Jahrb. 126, 221 - 227 (1980)

/6/ Peil, J., and Schmerling, S.: Biomathematical description of relationships between morphological quantities by empirical regression procedures. Mikroskopie (Wien) 37 (Suppl.), 466 - 472 (1980)

/7/ Schmerling, S., und Peil, J.: Zur Schätzung der Regression aus Beobachtungswerten stetiger Zufallsgrößen. Biometrical J. 19, 291 - 301 (1977)

/8/ Schmerling, S., and Peil, J.: Remarks upon empirical regression belt. Biometrical J. 21, 71 - 78 (1979)

/9/ Schmerling, S., and Peil, J.: Empirical regression as a conditional expected value of a special distribution-mixture for a modelfree quantitative recording of stochastical relations. Biometrical J. 22, 487 - 495 (1980)

eingegangen: 14. 05. 1982

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. L. Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 22, 89 - 107 (1983) 65J05
65H10

Zoltán Szabó

Ein Erweiterungsversuch des divergenzpunktfreien Verfahrens der Berührungsparabeln zur Lösung nichtlinearer Gleichungen in normierten Vektorverbänden

Summary

Let X be a normed vector lattice (i.e. a locally convex linear topological lattice so that its topology is defined by a lattice norm) and $f : X \to X$ be a Fréchet-differentiable nonlinear operator. The author tries to extend the always convergent iteration formula of tangent parabolas described in /32/ to the solution of the operator equation $f(x) = 0$. The use of this generalized method is illustrated on some systems of nonlinear equations.

1. Einleitung

Satz 1.1(/31/, /35/): Die stationären und sich auf einen Punkt stützenden Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{1.1}$$

mit der Iterationsfunktion F zur Lösung der reellen nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ haben die folgenden Eigenschaften:

1° Die Informationseffektivität $\mathrm{Eff} = \frac{p}{q}$ einer beliebigen Iterationsmethode (1.1) ist nicht größer als eins:

$$\mathrm{Eff} \leq 1,$$

wobei p und q die Konvergenzordnung bzw. der Informationsaufwand von (1.1) sind.

2° Für jede ganze Zahl $p > 1$ kann ein Iterationsverfahren von der Gestalt (1.1) mit einer Konvergenzordnung p und mit

Eff = 1 angegeben werden.

3^o Die Iterationsfunktion F einer beliebigen Iterationsmethode (1.1) mit der Konvergenzordnung p enthält explizit jede der Funktionen $f, f', \ldots, f^{(p-1)}$.

<u>Definition 1.1</u>(/35/): Im Falle Eff = 1 wird die Iteration (1.1) optimal genannt.

Unter den Iterationsverfahren (1.1) hat die quadratische (p = 2), optimale und in mehreren Richtungen erweiterte, verallgemeinerte und modifizierte Newton-Raphsonsche (kurz NR) Methode eine große Bedeutung, deren Fouriersche /11/, Cauchysche /8/ und andere /4/, /10/, /26/, /28/, /29/, /34/ Konvergenzbedingungen aber ziemlich stark sind. Die wohlbekannte "modifizierte" oder "vereinfachte" NR-Methode /9/, /27/, /28/, /35/ steht den Untersuchungen von /32/ sehr nahe, da ihre Konvergenzbedingungen schwächer sowie auf unsere Verfahren übertragbar und ausdehnbar sind.

<u>Definition 1.2</u> (/32/): Die mit der Funktion f verbundene Iterationsfunktion $F(x;r)$ und auch das entsprechende Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = F(x_n;r), \qquad n = 0,1,\ldots,$$

wird in dem abgeschlossenen Intervall $I = [a,b]$ <u>stets konvergent</u> (oder <u>divergenzpunktfrei</u>) genannt, falls die Iterationsfolge $\{x_n\}$ für jeden beliebigen Anfangswert $x_o \in I$ mit $f(x_o) \neq 0$

1^o monoton ist und

2^o gegen die rechts (bzw. links) von x_o nächstliegende Nullstelle $\alpha \in I$ von f konvergiert, vorausgesetzt, daß der Wert des "Richtungsparameters" r im Verlauf der Iteration konsequent stets 1 (bzw. −1) gewählt wird.

3^o Wenn es keine Nullstelle $\alpha \in (x_o,b]$ (bzw. $\alpha \in [a,x_o)$) von f gibt, dann verläßt $\{x_n\}$ das Intervall I.

Die Familie der Iterationsfunktionen mit diesen Eigenschaften wird mit $A(f,I)$ bezeichnet.

Eine Konvergenzaussage zur modifizierten NR-Methode wird im folgenden Satz formuliert.

<u>Satz 1.2:</u> Existiert eine reelle Zahl $M_1 > 0$ mit

$$|f'(x)| \leq M_1, \quad x \in I = [a,b] \subset \mathbb{R},$$

dann gilt

$$F(x;r) = x + r\,\frac{|f(x)|}{M_1} \in A(f,I).$$

Dieses Verfahren ist in I stets (d.h. für ein beliebiges $x_0 \in I$) konvergent. Mit anderen Worten, es gibt in I keinen Divergenzpunkt (vgl. /32/). Der "Preis" für diese vorteilhafte Eigenschaft bei der Modifikation der NR-Methode ist das Abnehmen der Konvergenzordnung ($p = 1$).
In den letzten 10 - 15 Jahren wurden zahlreiche Iterationsverfahren von höherer Ordnung erarbeitet, die in irgendeinem Sinne immer konvergent sind (z.B. /1/, /2/, /3/, /6/, /7/, /13/, /15/, /20/, /21/, /23/, /25/). Bei diesen Methoden wird meistens die Intervallarithmetik als Hilfsmittel herangezogen. In vielen Fällen wird die Relation

$$f(a)\,f(b) < 0 \tag{1.2}$$

vorausgesetzt.
In /32/ sind auch stets konvergente Iterationsverfahren angegeben, die keine Intervallarithmetik benutzen und bei denen keine Relation von der Gestalt (1.2) vorausgesetzt wird. Die Arbeit enthält unter anderem die Konvergenzsätze der stets konvergenten Methoden der Berührungskegelschnitte (d.h. der TH-, TP- bzw. TE-Methode). Die Verfahren basieren auf den Hyperbeln $\left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1 + x^2$, den Parabeln $\left(\frac{y}{c}\right)^2 = x^4$ bzw. den Ellipsen $\left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1 - x^2$ ($|x| \leq 1$), wobei die Werte von $c > 0$ hinreichend groß sind. Eine Konvergenzaussage zur

Methode der Berührungsparabeln (TP) ist der folgende

<u>Satz 1.3</u> (Satz 7 aus /32/): Ist die Funktion

$$f : [a,b] = I \ (\subset \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

in I zweimal differenzierbar und ist die Relation

$$|f''(x)| \leq M_2 \neq 0, \quad x \in I,$$

erfüllt, so gilt

$$F_{TP}(x;r) = x + \operatorname{sign}(f(x_0)) \frac{f'(x)}{M_2} + r\sqrt{\frac{2|f(x)|}{M_2} + \left[\frac{f'(x)}{M_2}\right]^2} \in A(f,I).$$

Im Falle einer einfachen Nullstelle α von f werden für die quadratischen und optimalen TH-, TP- und TE-Methoden Fehlerabschätzungen von der Gestalt

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K|x_n - \alpha|^2,$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K_1|x_{n+1}-x_n|^3 + K_2|x_{n+1}-x_n|^2, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

bewiesen und die Konvergenzfaktoren (s. /18/) bestimmt (Sätze 9, 10, 11 und 12 in /32/). Ferner werden einige Bemerkungen über die Methoden von Tschebyscheff, Halley und Cauchy-Hitotumatu (/8/, /12/, /16/, /33/, /35/), über die durch Interpolationspolynome hergestellten und monotonen Iterationen von J.F. Traub /35/ und über die Zusammenhänge der obigen Methoden bzw. der stets konvergenten Verfahren der Berührungskegelschnitte gemacht. Als eine Verallgemeinerung der TP-Methode haben wir in /32/ eine stets konvergente Iterationsfamilie, die Methode der konkaven Berührungsfunktionen, vorgelegt.
In dieser Arbeit wollen wir eine Erweiterungsmöglichkeit der Iterationsformel von TP zur Lösung nichtlinearer Gleichungen in normierten Vektorverbänden angeben.

2. Funktionalanalytische Vorbereitungen

Im folgenden werden die Begriffe des halbgeordneten Vektorraumes und der Fréchetschen Ableitung von nichtlineren Operatoren (deshalb der Begriff des normierten Raumes) benötigt. Der normierte Vektorverband ist die lineare Struktur, die für unsere Zwecke am meisten geeignet, d.h., die mit einer Halbordnung und mit einer Normtopologie ausgerüstet ist. Er ist ein lokalkonvexer topologischer Vektorverband, in dem die Topologie durch eine monotone Norm eingeführt wird. Die genaue Definition wird im folgenden angegeben (vgl. /22/, /24/,/30/, /36/).

X sei ein <u>halbgeordneter reeller Vektorraum</u>. Die Halbordnung wird durch einen <u>Kegel</u> $C(\subset X)$ eingeführt:

$$x \leq y, \quad \text{falls} \quad y - x \in C \quad (x,y \in X) \text{ ist .}$$

<u>Definition 2.1:</u> Gibt es einen Vektor z aus dem halbgeordneten reellen Vektorraum X mit

1° $x \leq z, \quad y \leq z;$

2° $x \leq z', \quad y \leq z' \quad (z' \in X) \Rightarrow z \leq z'$

für beliebige Vektoren $x,y \in X$, so nennt man z das <u>Supremum</u> von x und y:

$$z = x \vee y \ (= \sup \{x,y\} \ ) \ ;$$

der Vektor

$$x \wedge y \ (= \inf \ \{x,y\} \ ) = - ((-x) \vee (-y)) \in X$$

heißt <u>Infimum</u> von x und y und X <u>Vektorverband</u> mit den Verbandsoperationen $\vee$, $\wedge$.

Man kann den <u>Absolutwert</u> von einem beliebigen x bilden:

$$|x| = x \vee (-x) \ ,$$

er liegt in dem Kegel.

Definition 2.2: Für beliebige Vektoren x,y mit $x \leq y$ aus dem Vektorverband X nennt man die Menge

$$[x,y] = \{z \in X \mid x \leq z, \quad z \leq y\}$$

ein Ordnungsintervall.

Definition 2.3: Man nennt eine Teilmenge H des Vektorverbandes X mit dem Kegel C

solid, falls $\quad x \in H \Longrightarrow [-|x|,|x|] \subset H$,

bzw.

voll, falls $\quad H = (H + C) \cap (H - C)$.

Definition 2.4: Der Vektorraum X wird topologischer Vektorraum genannt, falls

1° X ein Hausdorffscher Raum ist,

2° die Abbildungen

$$(x,y) \longrightarrow x+y$$

$$(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$$

sowohl in x wie auch in y, bzw. in λ und in x stetig sind ($x,y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$). (Die Topologie von X wird mit T bezeichnet.)

Definition 2.5: Der topologische Vektorraum mit der Topologie T ist lokalkonvex, falls T eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt.

Satz 2.1 (/24/): Jeder normierte Vektorraum ist zugleich ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

Definition 2.6: Der Vektorverband X ist ein topologischer Vektorverband, falls

1° X ein topologischer Vektorraum (mit der Topologie T) ist,

2° T eine Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen besitzt.

Die Kompatibilitätsbedingung 2° für die Verknüpfung der topologischen Struktur und des Vektorverbandes wird im Licht des Satzes 2.2 noch natürlicher erscheinen.

<u>Definition 2.7:</u> Der positive Kegel eines topologischen Vektorverbandes wird (für T) <u>normal</u> genannt, falls T eine aus vollen Mengen bestehende Nullumgebungsbasis besitzt.

<u>Satz 2.2</u> (/22/): X sei ein Vektorverband und ein topologischer Vektorraum (mit der Topologie T). X ist ein topologischer Vektorverband dann und nur dann, wenn der positive Kegel normal ist und die Verbandsoperationen $\vee, \wedge$ bezüglich T in ihren Argumenten stetig sind.

<u>Definition 2.8:</u> Ein lokalkonvexer topologischer Vektorverband wird <u>lokalkonvexer Vektorverband</u> genannt.

<u>Definition 2.9:</u> Wird die Topologie des lokalkonvexen Vektorbandes X durch eine Norm mit

$$x, y \in X, \quad |x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

(d.h. durch eine monotone Norm) eingeführt, so nennt man X einen <u>normierten Vektorverband</u>. Ist X darüber hinaus vollständig in der Normtopologie, so bildet er einen <u>Banach-Verband</u>.

Als Beispiele für Banach-Verbände können die wohlbekannten Räume (Punkträume, Folgenräume bzw. Funktionsräume)

$$\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n,\ \mathbb{C},\ \mathbb{C}^n,\ c,\ m,\ s,\ l_2,\ L^2[a,b],\ L^p(\mu),\ C[a,b]$$

erwähnt werden.

<u>Satz 2.3</u> (/30/): X sei ein normierter Raum und ein Vektorverband. X bildet einen normierten Vektorverband dann und nur dann, falls die Einheitskugel von X solid ist.

Wir bezeichnen den Raum aller linearen und beschränkten Operatoren $V \longrightarrow W$ mit $L(V,W)$, wobei V und W reelle Vektorräume sind.

<u>Definition 2.10</u> (/9/, /17/): Es seien X, Y reelle normierte Räume,

$$f: X \longrightarrow Y$$

ein beliebiger nichtlinearer (d.h. nicht notwendigerweise linearer) Operator und $x_0 \in X$ ein beliebiger Vektor. Gibt es einen linearen Operator $\ell \in L(X,Y)$ mit

$$\|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - \ell\Delta x\| \leq \|\Delta x\| \cdot \varepsilon(\|\Delta x\|)$$

und

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \varepsilon(\|\Delta x\|) = 0 ,$$

so heißt f Fréchet-differenzierbar in x_0. Der Operator $f'(x_0) = \ell$ wird die Fréchetsche Ableitung von f in x_0 genannt.

Existiert $f'(x)$ für ein beliebiges $x \in D \subseteq X$, so heißt f Fréchet-differenzierbar in D. Die Fréchetschen Ableitungen höherer Ordnung $f^{(n)}$ werden auf ähnliche Weise definiert (s. /9/, /17/). Es können einige zum reellen Fall analoge Eigenschaften der Fréchetschen Ableitung, wie z.B. die Additivität, Homogenität, Eindeutigkeit, Stetigkeit, das Differenzieren von impliziten Operatoren, bewiesen werden (s. /5/, /9/, /17/).

3. Die erweiterte TP-Methode

Es sei X ein beliebiger normierter Vektorverband und $f: X \longrightarrow X$ ein in X Fréchet-differenzierbarer nichtlinearer Operator. Unser Ziel ist es, ähnlich dem stets konvergenten Verfahren der Berührungsparabeln eine Iterationsformel zur Lösung der nichtlinearen Operatorgleichung $f(x) = 0$ aufzubauen und die erhaltene Methode an einigen nichtlinearen Gleichungssystemen vorzustellen.

Es sei $e \in X$ ein (auf geeignete Weise gewählter) Vektor und $c \in L(X, L(X,X))$ ein positiver symmetrischer bilinearer Operator ($cxx = cx^2 \geq 0$, $cxy = cyx$; $x,y \in X$), so daß der inverse Operator $(ce)^{-1}$ von $ce \in L(X,X)$ existiert. (Daraus folgt übrigens die Relation $(ce)^{-1} \in L(X,X)$, vgl. /5/.) Der Operator c erzeugt in X eine multiplikative Operation. Es wird vorausgesetzt, daß man die "c-Quadratwurzel" aus beliebigen Vektoren x des positiven Kegels im folgenden Sinne ziehen kann:

$$x \geq 0 \longrightarrow \exists y := \underset{(c)}{\sqrt{x}} \text{ mit } y \geq 0 \text{ und } cy^2 = x .$$

(Dann kann auch der Vektor $-y$ als eine andere Quadratwurzel von x in Betracht gezogen werden: $c(-y)(-y) = cy^2 = x$.)

Es sei $x_0 \in X$ ein vorgegebener Vektor mit $f(x_0) > 0$. Wir betrachten den durch

$$y(x) := A - c(x-B)(x-B) = A - c(x-B)^2, \quad A,B \in X \tag{3.1}$$

angegebenen "quadratischen" Operator y. Wir fordern, daß die Relationen erfüllt sind

$$y(x_0) = f(x_0), \quad y'(x_0)e = f'(x_0)e , \tag{3.2}$$

d.h.

$$A - c(x_0 - B)^2 = f(x_0), \; -2c(x_0 - B)e = f'(x_0)e,$$

wobei $y'(x_0)$, $f'(x_0) \in L(X,X)$ die Fréchetschen Ableitungen von y und f in x_0 sind. Auf Grund der Bedingungen kann die letzte Gleichung in der Form

$$c(x_0 - B)e = ce(x_0 - B) = -\frac{1}{2} f'(x_0)e$$

geschrieben werden, woraus sich der Wert von

$$x_0 - B = (ce)^{-1}\left[-\frac{1}{2} f'(x_0)e\right] = -\frac{1}{2} (ce)^{-1}\left[f'(x_0)e\right]$$

ergibt. Mit Hilfe der Bezeichnung

$$v_0 := \frac{1}{2} (ce)^{-1} [f'(x_0)\ e]\ (\in X)$$

erhält man den Wert von A und B in der Form

$$B = x_0 + v_0,$$

$$A = f(x_0) + c(-v_0)(-v_0) = f(x_0) + cv_0^2.$$

Die Gleichung der "tangierenden Parabel" (entsprechend (7) aus /32/) sieht also folgendermaßen aus:

$$y(x) = f(x_0) + cv_0^2 - c(x-x_0-v_0)^2.$$

Unsere Aufgabe ist jetzt, die "quadratische Gleichung" $y(x) = 0$ zu lösen. Nach Umordnung ergibt sich die Gleichung

$$c(x-x_0-v_0)^2 = f(x_0) + cv_0{}^2.$$

Auf Grund unserer Bedingungen ist die rechte Seite positiv. Jetzt "ziehen wir die c-Quadratwurzel" aus beiden Seiten:

$$x-x_0-v_0 = \pm \sqrt[(c)]{f(x_0) + cv_0{}^2}\ ,$$

woraus sich der entsprechende Wert von $x_1 := x$ ergibt:

$$x_1 = x_0 + v_0 \pm \sqrt[(c)]{f(x_0) + cv_0{}^2}.$$

So erhalten wir die Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n + v_n \pm \sqrt[(c)]{f(x_n) + cv_n{}^2}\ , \quad n = 0,1,\ldots,$$

wobei

$$v_n = \frac{1}{2} (ce)^{-1} [f'(x_n)\ e]$$

ist und das Vorzeichen von $\sqrt[(c)]{\ }$ im Verlauf des Iterationsprozesses einheitlich gewählt wird.

Wie beim TP-Verfahren in /32/ entspricht im Fall $-f(x_0) > 0$ der Gleichung (3.1) der Operator

$$y(x) = A + c(x-B)^2.$$

Aus den Forderungen (3.2) erhält man für A und B

$$A = x_0 - v_0 , \quad B = f(x_0) - cv_0^2.$$

Damit hat die "Berührungsparabel" die Form

$$y(x) = f(x_0) - cv_0^2 + c(x - x_0 + v_0)^2.$$

Daraus bekommt man mit $x_1 := x$

$$x_1 = x_0 - v_0 \pm \sqrt[(c)]{- f(x_0) + cv_0^2}.$$

Also ist die Iterationsformel von der Gestalt

$$x_{n+1} = x_n - v_n \pm \sqrt[(c)]{-f(x_n) + cv_n^2} , \quad n = 0,1,\dots,$$

mit

$$v_n = \frac{1}{2} (ce)^{-1} [f'(x_n) e] .$$

Die Untersuchung der Konvergenzbedingungen kann das Objekt weiterer Forschungen bilden. Hier wollten wir nur auf eine Möglichkeit der Verallgemeinerung der TP-Methode hinweisen.

4. Numerische Beispiele

Wir wollen das Verfahren an drei nichtlinearen Gleichungssystemen im $\mathbb{R}^2$ demonstrieren.

4.1. Das Gleichungssystem (s. /14/)

$$\begin{aligned} 9\,y^2 - 9\,z^2 + 6\,z - 19 &= 0 \\ 18\,yz - 6\,y &= 0 \end{aligned}$$

hat die Lösung

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.414213562373 \\ 0.333333333333 \end{pmatrix} .$$

Hier hat f die folgende Gestalt

$$f(x) = f\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9y^2 - 9z^2 + 6z - 19 \\ 18yz - 6y \end{pmatrix}$$

mit den Fréchetschen Ableitungen

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 18y & ; & -18z + 6 \\ 18z-6 & ; & 18y \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

bzw.

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 18; & 0 & 0; & -18 \\ 0; & 18 & 18; & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)).$$

Als e und c wählen wir $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $c = 18(\delta_{ijk})$, wobei (δ_{ijk}) eine "diagonale 2x2x2 Raum-Matrix" ist mit

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j=k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$cx'x'' = c\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'' \\ z'' \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} y'y'' \\ z'z'' \end{pmatrix} .$$

Deshalb können wir jetzt die "c-Quadratwurzel" im gewöhnlichen Sinne und komponentenweise ziehen.
Der Startwert sei $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Dann sind

$$f(x_0) = \begin{pmatrix} 17.75 \\ 6 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad f'(x_0)e = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 3 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 39 \end{pmatrix} ,$$

$$v_0 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}33\\39\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0.9166667\\1.0833333\end{pmatrix} \text{ und } e v_0^{\,2} \approx \begin{pmatrix}15.124996\\21.124998\end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$x_1 = \begin{pmatrix}2.9166667\\1.5833333\end{pmatrix} - \sqrt[(c)]{\frac{1}{18}\begin{pmatrix}32.874996\\27.124998\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}2.9166667\\1.5833333\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1.3514394\\1.2275765\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{1}.5652273\\\underline{0.}3557568\end{pmatrix}.$$

Auf ähnliche Weise können weitere Glieder der monoton abnehmenden Iterationsfolge erhalten werden:

$$x_2 = \begin{pmatrix}\underline{1.4}312134\\\underline{0.333}9496\end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix}\underline{1.414}5026\\\underline{0.333333}9\end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix}\underline{1.41421}37\\\underline{0.3333333}\end{pmatrix}.$$

Im Falle des Ausgangsvektors $x_0 = \binom{1}{0}$ gilt die Ungleichung

$$f(x_0) = \begin{pmatrix}-10\\-\ 6\end{pmatrix} < 0 .$$

Wendet man die entsprechende Iterationsformel wiederholt an, so ergibt sich die monoton zunehmende Folge

$$x_1 = \begin{pmatrix}\underline{1}.3333333\\\underline{0.3333333}\end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix}\underline{1.41}20227\\\underline{0.3333333}\end{pmatrix},$$

$$x_3 = \begin{pmatrix}\underline{1.41421}19\\\underline{0.3333333}\end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix}\underline{1.414213}5\\\underline{0.3333333}\end{pmatrix}.$$

<u>4.2.</u> Das durch die Abbildung

$$f(x) = \begin{pmatrix}y-0.7 \sin y - 0.2 \cos z - 6.4832\\ z-0.7 \cos y + 0.2 \sin z - 2.4416\end{pmatrix}$$

bestimmte nichtlineare Gleichungssystem hat die Nullstelle

$$a \approx \begin{pmatrix}6.283234283\\3.141601836\end{pmatrix}.$$

Die benötigten Fréchetschen Ableitungen von f sind

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1-0.7\cos y & 0.2\sin z \\ 0.7\sin y & 1+0.2\cos z \end{pmatrix}$$

und

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 0.7\sin y\ ;\ 0 & 0;\ 0.2\cos z \\ 0.7\cos y\ ;\ 0 & 0;-0.2\sin z \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $e = \binom{1}{1}$ und $c = 0.45\ (\delta_{ijk})$.

Die numerischen Ergebnisse (mit der Genauigkeit $\varepsilon = {}_{10}-8$) sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

n	x_n	$f(x_n)$
0	5	$-1.2_{10}0$
	2	$-4.6_{10}-1$
1	5.85872973	$-1.8_{10}-1$
	2.49938091	$-4.6_{10}-1$
2	$\underline{6}$.14662670	$-4.2_{10}-2$
	$\underline{3}$.06910924	$-5.1_{10}-2$
3	$\underline{6.2}$5911807	$-7.2_{10}-3$
	$\underline{3.1}$3900360	$-1.9_{10}-3$
4	$\underline{6.28}$237477	$-2.6_{10}-4$
	$\underline{3.141}$39558	$-1.6_{10}-4$
5	$\underline{6.28323}$308	$-3.6_{10}-7$
	$\underline{3.141601}$67	$-1.3_{10}-7$
6	$\underline{6.28323428}$	$-1.2_{10}-12$
	$\underline{3.14160184}$	$-3.5_{10}-13$

<u>4.3</u> Die Abbildung

$$f(x) = \begin{pmatrix} y^3 - 3yz^2 - 1 \\ 3y^2z - z^2 \end{pmatrix}$$

aus /35/ hat die Nullstelle $\alpha = \binom{1}{0}$ und die ersten zwei Ableitungen

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 3(y^2-z^2) & ; -6yz \\ 6yz & ; 3y^2-2z \end{pmatrix}, \quad f''(x) = \begin{pmatrix} 6y; & -6z & -6z; & -6y \\ 6z; & 6y & 6y; & -2 \end{pmatrix}.$$

Es seien $e = \binom{1}{1}$, $c = 12\ (\delta_{ijk})$ und $\varepsilon = {}_{10}{-8}$. Die folgende Tabelle enthält die numerischen Ergebnisse:

n	x_n	$f(x_n)$
0	5	$6.4_{10}{}^{1}$
	2	$1.5_{10}{}^{2}$
1	2.81221849	$1.3_{10}{}^{1}$
	0.98067408	$2.2_{10}{}^{1}$
2	1.93001776	4.9
	0.47770111	5.1
3	1.46703206	2.0
	0.20849283	1.3
4	1.20822994	$7.5_{10}{}^{-1}$
	0.07161780	$3.1_{10}{}^{-1}$
5	1.07218075	$2.3_{10}{}^{-1}$
	0.01486748	$5.1_{10}{}^{-2}$
6	1.01480778	$4.5_{10}{}^{-2}$
	0.00099844	$3.1_{10}{}^{-3}$
7	1.00093609	$2.8_{10}{}^{-3}$
	0.00000546	$1.6_{10}{}^{-5}$
8	1.00000433	$1.3_{10}{}^{-5}$
	0.00000000	$5.1_{10}{}^{-10}$
9	1.00000000	$3.1_{10}{}^{-10}$
	0.00000000	$3.2_{10}{}^{-13}$

Literatur

/1/ Alefeld, G.: Eine Modifikation des Newtonverfahrens zur Bestimmung der reellen Nullstellen einer reellen Funktion. Z. Angew. Math. Mech. <u>50</u>, T 32 - 33 (1970)

/2/ Alefeld, G.: Stets konvergente Verfahren höherer Ordnung zur Berechnung von reellen Nullstellen. Computing <u>13</u>, 55 - 65 (1974)

/3/ Barth, W.: Nullstellenbestimmung mit der Intervallrechnung. Computing <u>8</u>, 320 - 328 (1971)

/4/ Bauer, M.: Az algebrai egyenletek valós gyökeinek meghatározása iterácioval. (Die Bestimmung reeller Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Iteration). Math. és Phys. Lapok <u>26</u>, 57 - 66 (1917)

/5/ Bögel, K., und Tasche, M.: Analysis in normierten Räumen. Berlin 1974

/6/ Brent, R.P.: An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. Comput. J. <u>14</u>, 422 - 425 (1971)

/7/ Bus, J.C.P., and Dekker, T.J.: Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of a function. ACM Trans. Math. Software <u>1</u>, 4, 330 - 345 (1975)

/8/ Cauchy, A.: Leçons sur le calcul différentiel. Sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Oeuvres Complètes II. T. 4, pp. 573 - 609

/9/ Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin 1964

/10/ Darboux, G.: Sur la méthode d' approximation de Newton. Nouv. Annales de math. 1869

/11/ Fourier, J.B.J.: Analyse des équations déterminées. Paris 1831 (Oeuvres de Fourier, Vol. II. Paris 1890)

/12/ Halley, E.: A new and general method of finding the roots of equations. Philos. Trans. Roy. Soc. London 18, 136 (1694)

/13/ Hansen, E.R.: A globally convergent interval method for computing and bounding real roots. BIT 18, 415 - 424 (1978)

/14/ Hansen, E.R.: On solving systems of equations using interval arithmetic. Math. Comp. 22, 374 - 384 (1968)

/15/ Herzberger, J.: Bemerkungen zu einem Verfahren von R.E. Moore. Z. Angew. Math. Mech. 53, 356 - 358 (1973)

/16/ Hitotumatu, S.: A method of successive approximation based on the expansion of second order. Math. Japon. 7, 31 - 50 (1962)

/17/ Jankó, B.: Rezolvarea ecuatiilor operationale neliniare in spatii Banach. Bucuresti 1969

/18/ Kiesewetter, H., und Maeß , G.: Elementare Methoden der numerischen Mathematik. Berlin 1974

/19/ Kolmogorov, A.N.: Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math. 5, 29 - 33 (1934)

/20/ Krawczyk, R.: Einschließung von Nullstellen mit Hilfe einer Intervallarithmetik. Computing 5, 356 - 370 (1970)

/21/ Krawczyk, R.: Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken. Computing 4, 187 - 201 (1969)

/22/ Marti, J.T.: Konvexe Analysis. Basel 1977

/23/ Moore, R.E.: Interval Analysis, Englewood Cliffs, N.J., 1966

/24/ Naimark, M.A.: Normed Algebras. Groningen 1972

/25/ Nickel, K.: Die vollautomatische Berechnung einer einfachen Nullstelle von F(t) = 0 einschließlich einer Fehlerabschätzung. Computing 2, 232 - 245 (1967)

/26/ Ostrowski, A.M.: Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens. Mat. Sbornik 2, 1073 - 1095 (1937)

/27/ Ostrowski, A.M.: Über eine Modifikation des Newtonschen Näherungsverfahrens. Trudy Tbilissk. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR-Grus. Fil. 2, 241 - 250 (1937)

/28/ Ostrowski, A.M.: Solution of Equations and Systems of Equations. New York 1960

/29/ Romanowsky, P.: Theorie der sukzessiven Newtonschen Annäherungen. Z. Angew. Math. Mech. 9, 420 - 421 (1929)

/30/ Schaefer, H.H.: Banach Lattices and Positive Operators. Berlin 1974

/31/ Schröder, E.: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. 2, 317 - 365 (1870)

/32/ Szabó, Z.: Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I-III. Publ. Math. Debrecen 20, 223 - 233 (1973); 21, 285 - 293 (1974); 27, 185 - 200 (1980)

/33/ Salechov, G.S.: Über die Konvergenz des Verfahrens der Berührungshyperbeln (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR 82, 525 - 528 (1952)

/34/ Tauber, A.: Über die Newtonsche Näherungsmethode. Monatshefte für Mathematik und Physik 6, 291 - 302 (1895)

/35/ Traub, J.F.: Iterative Methods for the Solution of Equations. Englewood Cliffs, N.J., 1964

/36/ Vulikh, B.C.: Introduction to the Theory of Partially Ordered Vector Spaces. Groningen 1967

eingegangen: 27. 07. 1982

revidierte Fassung: 10. 11. 1982

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr. Z. Szabó
Kossuth L. Universität
Mathem. Institut
H-4010 Debrecen, Ungarn

Rostock. Math. Kolloq. 22, 109 - 110 (1983) 05A10

Joachim Rudolph

Ober eine Verallgemeinerung von Multinomialkoeffizienten im Zusammenhang mit der Untersuchung von Kontingenztafeln

Autorreferat der Dissertation A

Zwei einfach-indizierten Partitionen $(m_1,\dots,m_n)$ und $(r_1,\dots,r_s)$ einer natürlichen Zahl m läßt sich durch die Anzahl derjenigen zweifach-indizierten Partitionen $(m_{11},\dots,m_{1s},\dots,m_{n1},\dots,m_{ns})$ von m, die – als $n \times s$-Kontingenztafeln geschrieben – gerade diese Randsummen haben, eindeutig eine Zahl $\left(\binom{m_1,\dots,m_n}{r_1,\dots,r_s}\right)$ zuordnen.

Die auf diese Weise für eine feste Partition $(m_1,\dots,m_n)$ von m durch Variation über alle $(r_1,\dots,r_s)$ (s fest, $r \geq 0$) entstehenden Zahlen werden als verallgemeinerte Multinomialkoeffizienten (VMK) eingeführt. Interpretationsbeispiele sind: die Anzahl der Lösungsmöglichkeiten gewisser diophantischer Gleichungssysteme, die Anzahl der Teilersysteme einer natürlichen Zahl (Teilmengen einer Multimenge), Weganzahlen in gewissen Pseudographen u. a. Für $s = 2$ erhält man die von Sved /1/ untersuchten verallgemeinerten Binomialkoeffizienten, für $(m_1,\dots,m_n) = (1,\dots,1)$ die Binomial- und Multinomialkoeffizienten. Erzeugende Funktionen, Summen- und Rekursionsformeln lassen sich unmittelbar angeben. Für die verellgemeinerten Binomialkoeffizienten wird die logarithmische Konkavität gezeigt. Die Beurteilung der Größenrelation zwischen zwei VMK aus den variablen Partitionen allein gilt nur für verallgemeinerte Binomialkoeffizienten (Monotonie im kleineren Partitionsteil). Aus der Abzähltheorie von Redfield /2/, Pólya und de Bruijn erhält man eine Darstellung der VMK durch Faktorielle, die für $(m_1,\dots,m_n) = (1,\dots,1)$ in die bekannten Formeln übergeht. Sie ist nicht frei von Aufzählungen. Aufzählungefreie Formeln für spezielle VMK (z. B. $n = s$ und/oder Obereinetimmung der Partitionsteile) werden zueammengeetellt. Innerhalb der mathematischen Statistik können VMK z. B. im Zueammenhang mit dem exakten Test nach Fisher eine Rolle spielen. Sie ermöglichen hier eine Kalkulation des Rechenaufwands und erlauben in gewissen Fällen sogar eine vorzeitige Testentscheidung. In der Arbeit wird ein Algorithmus zur Aufzählung randverträglicher Kontingenztafeln vorgeschlagen, der einem in diesem Zusammenhang geschriebenen Algolprogramm für diesen Test zugrunde liegt. In diesem Programm wird der zugehörige VMK rekursiv berechnet. Gail und Mantel /3/ haben eine in der Arbeit nicht berücksichtigte Normalapproximation für VMK angegeben.

Literatur

/1/ Sved, M.: A Generalization of the binomial coefficients. In: Little, C. H. C. (Ed.): Combinatorial Mathematics V. Lecture Notes Mathematics 622, pp. 209 - 213, Berlin 1977

/2/ Redfield, J. H.: The theory of group-reduced distributions. Amer. J. Math. 49, 433 - 455 (1927)

/3/ Gail, M., and Mantel, N.: Counting the number of r x c contingency tables with fixed margins. J. Amer. Statist. Assoc. 75, 371, 510 - 515 (1977)

eingereicht: August 1980 verteidigt: 08. 05. 1981

Gutachter: Prof. Dr. G. Burosch (Rostock),
Prof. Dr. D. Rasch (Rostock),
Prof. Dr. P. H. Müller (Dresden)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. J. Rudolph
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für m.-l. Soziologie
Oranienburger Straße 18
DDR-1020 Berlin

Rostock. Math. Kolloq. 22, 111 - 112 (1983) 06A10
05A05

Konrad Engel

Maximale h-Familien in endlichen Ordnungen, Hansel-Ordnungen und monotone Funktionen

Autorreferat der Dissertation (A)

Im Jahre 1928 löste SPERNER folgendes Problem: Man bestimme die maximale Mächtigkeit einer Familie paarweise bez. Inklusion unvergleichbarer Teilmengen einer endlichen Menge und gebe alle maximalen Familien an. In den letzten Jahrzehnten hat sich hiervon ausgehend eine Theorie entwickelt. Es zeigte sich, daß die Probleme
a) Bestimmung der maximalen Mächtigkeit gewisser Familien und
b) Auflistung aller maximalen Familien
zwar beide miteinander zusammenhängen, aber beide von eigenständigem Interesse sind und nicht mit den gleichen Mitteln behandelt werden können. Wir betrachten in unserer Arbeit (endliche, partielle) Ordnungen $P_{\leq}$ mit Rangfunktion, d. h. solche Ordnungen, für die eine Funktion $r: P \to \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt: $r(x) = 0$ für alle minimalen Elemente x in P und $r(y) = r(z) + 1$, wann $y > z$ ist und kein w mit $y > w > z$ existiert. Sei $r(P) := \max\{r(x);\ x \in P\}$. Die Elemente vom Rang k bilden das Niveau N_k, und $|N_k|$ heißt k-te Niveauzahl. Eine Teilmenge $\mathcal{F}_h$ von P bezeichnet man als h-Familie, falls keine $h+1$ Elemente $c_o,\dots,c_h$ aus $\mathcal{F}_h$ eine Kette ($c_o < \dots < c_h$) bilden. ERDÖS, KATONA, KLEITMAN u. a. lösten das Problem a) für h-Familien in gewissen Ordnungen. Das Problem b) wurde nur für 1-Familien in sehr speziellen Ordnungen gelöst (SPERNER, KATERINOČKINA, CLEMENTS, GRIGGS). In unserer Arbeit lösten wir das Problem b) für h-Familien mit einer neuen Methode in einer allgemeinen Form, so daß sich daraus alle uns bekannten, schon früher erzielten Resultate, die das Problem b) für 1-Familien betreffen, folgern lassen. Die Ordnung $P_<$ heißt $[\alpha,\beta)$-normal, wenn $|A|\,|N_k|^{-1} \leq |R(A)|\,|N_{k+1}|^{-1}$ für beliebige $A \subseteq N_k$ und $k \in [0,r(P))$ gilt und Gleichheit nicht für $k \notin [\alpha,\beta)$ und $\emptyset \neq A \subsetneq N_k$ eintritt. Hierbei ist $R(A)$ die Menge der Elemente aus N_{k+1}, die mit we-

nigstens einem Element aus A vergleichbar sind. Die Niveauzahlen von $P_<$ sind (α,β)-logarithmisch konkav, wenn $|N_k|^2 \geq |N_{k-1}|\,|N_{k+1}|$ für beliebige $k \in (0,r(P))$ gilt und Gleichheit nicht für $k \notin (\alpha,\beta)$ eintritt.

Satz: Ist $P_<$ $[\alpha,\beta)$-normal und hat $P_<$ (α,β)-logarithmisch konkave Niveauzahlen, so gibt es höchstens 2 maximale h-Familien ($h \geq \beta - \alpha + 1$), und diese können konkret angegeben werden.

Im folgenden Satz werden Ergebnisse von HARPER, HSIEH, KLEITMAN und CLEMENTS verschärft bzw. verallgemeinert.

Satz: Sind $Q_{1<},\ldots,Q_{n<}$ $(n \geq 2)$ $\emptyset$-normale Ordnungen mit $(0,r(Q_1))$-logarithmisch konkaven Niveauzahlen und gilt $r(Q_1) \leq \ldots \leq r(Q_n)$, so ist $P_< := \prod_{i=1}^{n} Q_{i<}$ eine $[\alpha,\beta)$-normale Ordnung mit (α,β)-logarithmisch konkaven Niveauzahlen, wobei $\alpha = r(Q_1) + \ldots + r(Q_{n-1})$ und $\beta = r(Q_n)$ gilt.

Die vorliegenden Ergebnisse werden auf spezielle Ordnungen, nämlich den Booleschen Verband, projektiv lineare, affine und modulare geometrische Verbände, den Verband der Teilquader eines Quaders, Kettenprodukte und Griggs-Ordnungen angewandt.

In Teil II der Arbeit behandeln wir folgendes Problem (KOROBKOV, HANSEL, ALEKSEEV): Es sei bekannt, daß f eine monotone Funktion von der Ordnung $P_<$ in die Ordnung $Q_<$ ist, jedoch seien die Werte von f noch unbekannt. Wir bestimmen für gewisse Ordnungen $P_<$ und beliebige Ordnungen $Q_<$ die minimale Anzahl derjenigen Elemente von P, für die ein bester Algorithmus die Funktionswerte berechnen muß, damit ermittelt werden kann, um welche konkrete monotone Funktion es sich handelt.

eingereicht: 02. 07. 1981 verteidigt: 06. 11. 1981

Gutachter: Prof. Dr. G. Burosch (Rostock)
Prof. Dr. H. Sachs (Ilmenau)
Dr. G. O. H. Katona (Budapest)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. K. Engel
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 22, 113 - 114 (1983) 20L05 20L10

Barbara Schultz

Über die induktiven Gruppoide der partiellen Automorphismen von Algebren einiger ausgewählter Klassen

Autorreferat der Dissertation B

Die Isomorphismen zwischen den Unteralgebren einer Algebra bilden bezüglich ihrer Hintereinanderausführung und bezüglich ihres Induzierens ein induktives Gruppoid im Sinne von Ehresmann, das induktive Gruppoid der partiellen Automorphismen der Algebra. Für eine Algebra $\underline{A}$ bezeichnen wir das induktive Gruppoid von $\underline{A}$ durch $\underline{\Gamma}(\underline{A})$.
Der Begriff des Isomorphismus ist ein zentraler Begriff der Algebra. So wie der Begriff des Morphismus zum Begriff der Kategorie führt, führt der Begriff des Isomorphismus zum Begriff des Gruppoids. Stellt man sich die Frage, ob ein Isomorphismus zu einem anderen fortsetzbar ist, kommt man zum Begriff des induktiven Gruppoids. Stellt man sich die Frage, ob mehrere verträgliche Isomorphismen zu einem neuen Isomorphismus gemeinsam fortsetzbar sind, so kommt man zum Begriff der Vollständigkeit eines induktiven Gruppoids.
Das induktive Gruppoid $\underline{\Gamma}(\underline{A})$ ist genau dann vollständig, wenn jede kompatible Untermenge von $\underline{\Gamma}(\underline{A})$ bezüglich der Halbordnungsrelation von $\underline{\Gamma}(\underline{A})$ nach oben beschränkt ist.
Die Vollständigkeit von $\underline{\Gamma}(\underline{A})$ ist abhängig von den definierenden Operationen von $\underline{A}$. Für jede direkte Familie
$\underline{\underline{F}} = (\underline{\Lambda}, (\underline{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (\varphi_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda,\lambda\le\mu})$, für welche die Funktionen $\varphi_{\lambda u}$ mit $\lambda,\mu\in\Lambda$ und $\lambda\le\mu$ sämtlich eineindeutig sind, gilt:
Das induktive Gruppoid des direkten Limes von $\underline{\underline{F}}$ ist genau dann vollständig, wenn die induktiven Gruppoide $\underline{\Gamma}(\underline{A}_\lambda)$ sämtlich vollständig sind. Als Folgerung ergibt sich der Satz von Michler und Schrackenberger, daß $\underline{\Gamma}(\underline{A})$ für jede Algebra $\underline{A}$ genau dann vollständig ist, wenn $\underline{\Gamma}(\underline{U})$ für jede endlich erzeugbare Unteralgebra $\underline{U}$ von $\underline{A}$ vollständig ist.
Für beliebige Familien $(\underline{C})_{\lambda\in\Lambda}$ induktiver Gruppoide ist das direkte Produkt $\mathop{\times}\limits_{\lambda\in\Lambda}\underline{C}_\lambda$ genau dann vollständig, wenn $\underline{C}_\lambda$ für jedes

$\lambda \in \Lambda$ vollständig ist.
Für jede Familie $(\underline{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ endlicher typgleicher Algebren, denen Gruppen unterliegen, gilt folgender Zerlegungssatz:
Sind die Ordnungen der $\underline{A}_\lambda$ paarweise teilerfremd, so ist $\underline{\Gamma}(\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \underline{A}_\lambda) \cong \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} \underline{\Gamma}(\underline{A}_\lambda)$. Dabei bezeichnet $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \underline{A}_\lambda$ das eingeschränkte direkte Produkt von $(\underline{A}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Folgerungen: Sind die $\underline{A}_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ Gruppen bzw. Ringe bzw. Multioperatorgruppen bzw. $\sum$-Operatorgruppen bzw. $\sum$-Operatorringe gleichen Typs, so ergeben sich Zerlegungssätze für diese.

Für jede endliche Gruppe $\underline{G}$ ist $\underline{\Gamma}(\underline{G})$ genau dann vollständig, wenn $\underline{G}$ eine zyklische Gruppe oder direktes Produkt einer Kleinschen Vierergruppe und einer zyklischen Gruppe ungerader Ordnung ist. Für jeden endlichen zyklischen Ring $\underline{R}$ ist $\underline{\Gamma}(\underline{R})$ vollständig. Für jeden endlichen Ring $\underline{R}$ ist $\underline{\Gamma}(\underline{R})$ genau dann vollständig, wenn $\underline{\Gamma}(\underline{R}')$ für jede Primärkomponente $\underline{R}'$ von $\underline{R}$ vollständig ist. Die induktiven Gruppoide $\underline{\Gamma}(\underline{K})$ für endliche Körper $\underline{K}$ sind vollständig.
Abschließend beschäftigen wir uns mit der Frage, inwieweit Algebren durch ihre induktiven Gruppoide bestimmt sind. Eine Algebra $\underline{A}$ einer Klasse S (S-Algebra) ist genau dann durch ihr induktives Gruppoid bestimmt, wenn für jede S-Algebra $\underline{B}$ aus der Isomorphie von $\underline{\Gamma}(\underline{A})$ und $\underline{\Gamma}(\underline{B})$ die Isomorphie von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ folgt. Die Frage wird insbesondere für endliche Gruppen untersucht. S-Algebren sind i. allg. nicht innerhalb S durch ihre induktiven Gruppoide bestimmt.

eingereicht: Juli 1981 verteidigt: 2. Juli 1982

Gutachter: Prof. Dr. G. Pazderski (Rostock),
Prof. Dr. L. Michler (Köthen),
Prof. Dr. F. Rühs (Freiberg),
Doz. Dr. R. Strecker (Güstrow)

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. B. Schultz
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
Sektion Mathematik
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt
PSF 964

Rostock. Math. Kolloq. 22, 115 - 116 (1983) 20F20

Jürgen Wisliceny

Zur Darstellung von Pro-p-Gruppen und Lieschen Algebren durch Erzeugende und Relationen

Autorreferat der Dissertation B

Ist G eine endliche p-Gruppe, d ($= \dim_{F_p} H^1(G)$) ihr Erzeugendenrang und r ($= \dim_{F_p} H^2(G)$) ihr Relationenrang im Sinne der Präsentation als Pro-p-Gruppe, so besagt der Satz von Golod-Šafarvič (1964) in der Verschärfung von E. B. Vinberg (1965) die Gültigkeit von

$$\frac{r}{d^2} > \frac{1}{4}. \tag{1}$$

A. J. Kostrikin (1965) und H. Koch (1975) konstruierten Serien endlicher p-Gruppen, bezüglich derer $\lim\inf \frac{r}{d^2} \leq \frac{1}{3}$ bzw. $\lim\inf \frac{r}{d^2} < \frac{1}{3}$ nachgewiesen wurden. Als bislang ungelöstes Problem stellte sich damit die Frage nach der Existenz einer Serie endlicher p-Gruppen mit $\lim\inf \frac{r}{d^2} = \frac{1}{4}$, also die Frage nach der Optimalität des Wertes $\frac{1}{4}$ in der Abschätzung (1).

Das Hauptergebnis der Arbeit ist die positive Beantwortung dieser Frage. Zunächst wird für einen beliebigen Körper K in der freien K-Liealgebra L(n) über $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Relationenmenge $R(n) = \{r_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$ durch

$$r_{i,j} := \sum x_{i+r(j-i+1)} x_{j+r(j-i+1)}$$

erklärt, wobei die Summation über alle $r \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq i + r(j-i+1) \leq n$ und $1 \leq j + r(j-i+1) \leq n$ erfolgt.

<u>Beispiel:</u> $R(6) = \{x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6,\ x_2x_3 + x_4x_5,\ x_1x_3 + x_4x_6,\ x_2x_4,\ x_3x_5,\ x_1x_4,\ x_2x_5,\ x_3x_6,\ x_1x_5,\ x_2x_6,\ x_1x_6\}$.

Für $n \geq 2$ erhält man

$$|R(n)| = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{7 + (-1)^n}{8}.$$

Bezeichnet $I(n)$ das von $R(n)$ in $L(n)$ erzeugte Ideal, so gilt der

Satz 1: Die Liesche Algebra $L(n)/I(n)$ ist nilpotent.

Ausgehend von den Relationen $r_{i,j}$ wird in der freien $F_p[y]$-Liealgebra $\mathcal{L}(X)$ eine Relationenmenge $\mathcal{R}(n)$ aus Relationen der Form

$$r_{i,j} - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu^{(i,j)} y x_\nu \qquad (1 \leq i < j \leq n,\ g_\nu^{(i,j)} \in F_p)$$

betrachtet. Es wird nachgewiesen, daß die Koeffizienten $g_\nu^{(i,j)}$ so gewählt werden können, daß die entsprechende Faktoralgebra eine endliche $F_p[y]$-Liealgebra wird. Die Ergebnisse über Liealgebren führen zu Ergebnissen über Pro-p-Gruppen auf der Grundlage des Zusammenhangs zwischen Pro-p-Gruppen und $F_p[y]$-Liealgebren vermöge der p-Zentralreihe. Ist p eine Primzahl ($\neq 2$) und G eine endlich erzeugte Pro-p-Gruppe, so kann das zur p-Zentralreihe $(G_n)_{n\in N}$ $(G_1 = G,\ G_{n+1} = G_n^p(G_n,G))$ gehörige graduierte Objekt $gr\, G = \sum_{n=1}^{\infty} gr_n G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n/G_{n+1}$ bekanntlich als $F_p[y]$-Liealgebra aufgefaßt werden. Das Relationensystem $\mathcal{R}(n)$ läßt sich in ein Relationensystem $\tilde{\mathcal{R}}(n)$ für die freie Pro-p-Gruppe $F(n)$ umsetzen, so daß beim Übergang von der entsprechenden Faktorgruppe $G(n)$ zur $F_p[y]$-Liealgebra $gr\, G(n)$ Identitäten entstehen, die den Relationen aus $\mathcal{R}(n)$ entsprechen. Aus der Endlichkeit der durch $\mathcal{R}(n)$ bestimmten Faktoralgebra folgt die Endlichkeit der Pro-p-Gruppe $G(n)$. In dieser Weise ergibt sich unter Beachtung von (2) der

Satz 2: Es gibt eine Folge endlicher p-Gruppen $G(n)$ mit $d(G(n)) = n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(G(n))}{d(G(n))^2} = \frac{1}{4}.$$

eingereicht: Mai 1980 verteidigt: 19. 12. 1980

Gutachter: Prof. Dr. G. Pazderski (Rostock),
Prof. Dr. H. Koch (Berlin),
Prof. Dr. O.-H. Keller (Halle)

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. J. Wieliceny
Pädagogische Hochschule Güstrow, Sekt. Mathematik/Physik
Goldberger Straße 12
DDR-2600 Güstrow

Rostock. Math. Kolloq. 22, 117 - 118 (1983) 62K05

Manfred Bartko

Versuchsplanung für Schätzungen im gemischten Modell der linearen Regression

Autorreferat der Dissertation A

Das Modell

$$\underline{y}_x = \beta_o + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_p x_p + \gamma_1 \underline{z}_1 + \ldots + \gamma_q \underline{z}_q + \underline{e} \tag{1}$$

wird als "gemischtes Modell der linearen Regression" bezeichnet. Dabei sind p,q nichtnegative ganze Zahlen, $\{x_1,\ldots,x_p\}$ die einstellbaren Regressoren, $(\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_q)'$ der $N_q(\mu,\Sigma)$-verteilte zufällige Regressor und $\underline{e}$ ein $N(0,\sigma^2)$-verteilter und von $(\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_q)'$ stochastisch unabhängiger, zufälliger Fehler. $\{\beta_o,\ldots,\beta_p, \gamma_1,\ldots,\gamma_q\}$ ist der Vektor der unbekannten Regressionskoeffizienten, und $\underline{y}_x$ stellt die Familie der Regressanden dar. Nach der Methode der kleinsten Quadrate schätzt man die Regressionskoeffizienten erwartungstreu durch die Schätzfunktion

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{\beta}} \\ \hat{\underline{\gamma}} \end{pmatrix} = \left[(X|\underline{Z})'(X|\underline{Z})\right]^{-1}(X|\underline{Z})'\underline{Y}_x, \tag{2}$$

wobei $\underline{Y}_x$, $\underline{Z}$ und X Matrizen der Formate $(n \times 1)$, $(n \times q)$ bzw. $(n \times (p+1))$ sind.

Es wird gezeigt, daß die Kovarianzmatrix der Schätzfunktion (2) für $n \geq p+q+3$ existiert und die Gestalt

$$K\begin{pmatrix} \hat{\underline{\beta}} \\ \hat{\underline{\gamma}} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{n-p-q-2}\left(\begin{array}{c|c} (n-p-2)(X'X)^{-1} + \mu'\Sigma^{-1}\mu \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots0 \\ 0 & \\ \vdots & 0_{p,p} \\ 0 & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -\mu'\Sigma^{-1} \\ \hline 0_{p,q} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c} -\Sigma^{-1}\mu & 0_{q,p} \end{array} & \Sigma^{-1} \end{array}\right) \tag{3}$$

hat.

Liegt ein gemischtes Modell vor, so wird das entsprechende Modell mit $q = 0$ als "Modell-I-Anteil" bezeichnet. Zur Problematik

der o p t i m a l e n A l l o k a t i o n wird dann gezeigt, daß in der Klasse der diskreten und konkreten Versuchspläne vom Umfang n (n beliebig, aber fest) gilt: Die C-,A-,D- und G-optimalen Pläne eines gemischten Modells der linearen Regression sind identisch mit den C-,A-,D- bzw. G-optimalen Plänen des Modell-I-Anteils dieses Modells. Aus Genauigkeitsforderungen für die Varianz der Schätzfunktion $(\hat{\underline{\beta}}', \hat{\underline{\gamma}}')c$ $(c \in R^{p+q+1})$, das arithmetische Mittel der Varianzen von $\{\hat{\underline{\beta}}', \hat{\underline{\gamma}}'\}$, den Erwartungswert des Quadrates der Breite des Konfidenzintervalles für einen Regressionskoeffizienten, die maximale Varianz der Schätzung der Regressionsfunktion über einem Prognosebereich bzw. den maximalen Erwartungswert des Quadrates der Breite des Konfidenzintervalles für die Regressionsfunktion über einem Prognosebereich werden Ungleichungen zur S t i c h p r o b e n - u m f a n g s p l a n u n g abgeleitet.
Die Kosten eines Versuches sind von der Anzahl der Einzelversuche und von der Lage der Versuchspunkte abhängig. Am Beispiel des Modells (1) mit nur einem im Versuchsbereich $[x_u, x_o] \subset R^1$ einstellbaren Regressor (p=1), einer linear von der Lage der Versuchspunkte abhängigen Kostenfunktion und der Beschränkung der Varianz der Schätzung für β_1 als Genauigkeitsforderung wird ein Problem der kostenoptimalen Versuchsplanung bearbeitet. Es ergibt sich, daß die diskreten kostenoptimalen Pläne das Spektrum $\{x_u, x_o\}$ besitzen. Ein nichtlineares Gleichungssystem für die Teilstichprobenumfänge n_u^* und n_o^* wird angegeben.

eingereicht: Dezember 1980 verteidigt: 30. 05. 1981

Gutachter: Prof. Dr. D. Rasch (Rostock),
Doz. Dr. J. Bock (Rostock),
Prof. Dr. Läuter (Berlin)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. M. Bartko
Institut für Rinderproduktion
der AdL der DDR
DDR-3541 Iden

Rostock. Math. Kolloq. 22, 119 - 120 (1983) 65N30

Tranduy Doã

Approximation einer Variationsungleichung zur Greenschen Funktion

Autorreferat der Dissertation A

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des R^N und G die Greensche Funktion des Dirichletproblems für den Laplaceoperator $-\Delta$. Es ist eine Funktion f^* zu finden, für die das Skalarprodukt (Gf, f) sein Minimum annimmt unter den Nebenbedingungen $f \in K \cap E_s$:

$$\frac{1}{2}(Gf,f) = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega G(x,y)f(x)f(y)dxdy \longrightarrow \underset{f \in K \cap E_s = U}{\mathrm{Min}} . \qquad (1)$$

Die Aufgabe wird betrachtet über dem Hilbertraum $L_2(\Omega)$ bzw. $H^{-1}(\Omega)$. Es sei:

$$K = \{f(x) \in L_2(\Omega) : -1 \leq f(x) \leq 0 \quad \text{f. ü. in } \Omega\},$$

$$E_s = \{f(x) \in L_2(\Omega) : \int_\Omega f(x)\psi(x)dx = s\}.$$

Hierbei ist $\psi(x)$ eine über Ω positive harmonische Funktion. Der Parameter s ist aus dem Intervall $-\int_\Omega \psi(x)dx \leq s \leq 0$ zu wählen. Bekanntlich lassen sich die Lösungen von (1) durch die Variationsungleichung

$$\langle \varphi - f^*, Gf^* \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \text{ aus } U \qquad (2)$$

bzw. durch

$$\langle \varphi - f^*, Gf^* \rangle + \lambda(\varphi - f^*, \psi) \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi \text{ aus } K \qquad (3)$$

charakterisieren.
Das Hauptaugenmerk der Untersuchung wurde auf die numerische Approximation bzw. auf das Finite-Elemente-Verfahren gerichtet. Mit dem Ansatz

$$f = \sum f_\nu \chi_{\Omega_\nu} \qquad (4)$$

führt die Aufgabe auf

$$\frac{1}{2}(Gf,f) = \frac{1}{2}(Af,f) \longrightarrow \underset{\substack{f \in R^n, -1 \le f_i \le 0 \\ (f,\psi) = s}}{\mathrm{Min}} \quad , \tag{5}$$

wobei $A = (a_{\nu\mu})$ eine $(n \times n)$-Matrix ist.

Satz 1: Der Lagrange-Multiplikator λ in (3) ist eindeutig bestimmt. Es ist $\lambda > 0$. Ferner gilt

$$u^* = Gf^* + \lambda\psi \ge 0 \quad \text{in } \Omega \text{ und } f^* = -\chi_{\Omega^+}.$$

Hierbei ist χ_{Ω^+} die charakteristische Funktion der offenen Menge $\Omega^+ = \{x \in \Omega: u^*(x) > 0\}$.

Das numerische Verfahren für die Bestimmung der Lösung von (5):

Es bezeichne $f_m^h = u^m$ sowie

$$U^{m-1,i} = \{u^{m-1,i} \in R^n \cap K : u^{m-1,i} = (u_1^m, \dots, u_i^m, u_{i+1}^{m-1}, \dots, u_n^{m-1})\}.$$

Ferner werde λ_m, $\varrho_m > 0$ und $u^{m-1} \in R^n \cap K$ gewählt. Man bestimme dann u^m durch die n folgenden Minimalaufgaben zur Lagrange-Funktion L des Variationsproblems (1):

$$L(u^{m-1,i}, \lambda_m) \le L(v^{m-1,i}, \lambda_m) \quad \forall v^{m-1,i} \in U^{m-1,i} \cap K.$$

Aus u^m wird weiter λ_{m+1} wie folgt berechnet:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m + \varrho_m((u^m, \psi) - s).$$

Auf Grund von notwendigen Bedingungen führt die Aufgabe zu

$$\tilde{u}_i^m = -\frac{1}{a_{ii}}\Big[\sum_{i>j} a_{ij}\tilde{u}_j^m + \sum_{i<j} a_{ij}\tilde{u}_j^{m-1} + \lambda_m \psi_i\Big], \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{6}$$

Die Lösung der Aufgabe (5) ist die Projektion von $\tilde{u}_i^m$ auf K. Sie ist wie folgt definiert:

$$u_i^m = \max(-1, \min(\tilde{u}_i^m, 0)).$$

Satz 2: Mit passendem ϱ_m ist der Algorithmus (6) konvergent.

eingereicht: Dezember 1981 verteidigt: 19. 03. 1982

Gutachter: Prof. Dr. K. Beyer (Rostock),
Prof. Dr. L. Berg (Rostock),
Dr. sc. nat. E. Miersemann (Leipzig)

Anschrift des Verfassers:

Dr. Tranduy Doã
Polytechnische Universität Hanoi/SR Vietnam

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq. /Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. a. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparentpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

/8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1958

/9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)

/10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers:/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

ODR II 15 14 C 49/83 3390