

Rostocker
Mathematisches Kolloquium

Heft 25



**WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT
ROSTOCK**

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 25

1984

**Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik**

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

**Schriftleitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion
Mathematik**

**Prof. Dr. Gerhard Maeß, Schriftleiter
Dr. Klaus-Dieter Drews, Lektor
Dr. Werner Plischke, Lektor
Dorothea Meyer, Herstellung der
Druckvorlage**

**Sektion Mathematik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1**

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

**Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR-2500 Rostock**

Vogelsang 13/14

Fernruf: 369 577

Genehmigungs-Nr.: C 60/84

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz

InhaltSeite

Creutzburg, Reiner; Tesche, Manfred	Zahlentheoretische Transformationen und primitive Einheitswurzeln in einem Restklassenring modulo m	4
Leu, Dietlinde	Die maximalen Klassen von Pol_k $\text{Pol}_k \{(x, x+1 \bmod k) \mid x \in E_k\}$	23
Jagnow, Ingrid	Zur Invertierung tetradiegonaler Toeplitzcher Matrizen	31
Berg, Lothar	Zur Asymptotik der LR-Aufspaltung Toeplitzcher Bandmatrizen	37
Reo, Gendikote L. N.	Certain Distribution Algebras by Matrix Representation	45
Buikis, Andrie	Aufgabenstellung und Lösung einer Klasse von Problemen der mathematischen Physik mit nichtklassischen Zusatzbedingungen	53
Zítko, Jan	Extrapolation of iterative processes	63
Hackbusch, Wolfgang	Multi-Grid Solutions to Linear and Nonlinear Eigenvalue Problems for Integral and Differential Equations	79
Dassow, Jürgen; Feet, Uwe	On Regulated L Systems	99
Autorreferat der Dissertation A		
González, Luis Anibal	Verallgemeinerte Poisson-Integrale und ihr Randverhalten	119

Reiner Creutzburg

Manfred Tasche

Zahlentheoretische Transformationen und primitive Einheitswurzeln in einem Restklassenring modulo m

Die schnelle Berechnung von Faltungen und Korrelationen von Signalen stellt ein wesentliches Problem in der digitalen Signal- und Bildverarbeitung dar. Die diskrete Fouriertransformation ist die gebräuchlichste Transformation, mit deren Hilfe zyklische Faltungen und Korrelationen effektiv berechnet werden können (/7/). Die Betrachtung amplitudendiskreter Signale führte vor etwa 12 Jahren zur Entwicklung zahlentheoretischer Transformationen (/6-8/). Bekannte zahlentheoretische Transformationen sind die Fermat-, Mersenne-, Pseudo-Fermat- und Pseudo-Mersenne-Transformation (/7/). Die Eigenschaften der zahlentheoretischen Transformationen ähneln stark denen der Fouriertransformation (/1,7/). Insbesondere lassen sich schnelle Algorithmen für zahlentheoretische Transformationen angeben. Mit Hilfe derartiger Algorithmen können zyklische Faltungen und Korrelationen vorteilhaft berechnet werden. Bedingt durch das Rechnen im Restklassenring G_m modulo einer ungeraden Zahl $m > 1$ treten - im Gegensatz zur Fouriertransformation - keine Rundungsfehler bei einer zahlentheoretischen Transformation auf. Weiterhin können durch binäre Arithmetiken für spezielle zahlentheoretische Transformationen beträchtliche Rechenzeitverkürzungen im Vergleich zur schnellen Fouriertransformation erzielt werden.

Eine zentrale Rolle bei der Definition zahlentheoretischer Transformationen spielen die primitiven Einheitswurzeln im Restklassenring G_m , die man als natürliches Analogon der primitiven Einheitswurzeln im Körper der komplexen Zahlen ansehen kann. Die vorliegende Note ist der Konstruktion von primitiven Einheitswurzeln in G_m gewidmet. Nach der Definition der primitiven Einheitswurzeln in G_m wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium im ersten Abschnitt angegeben. Aus der Zahl-

lentheorie bekannte Resultate über primitive Wurzeln modulo einer Primzahl $p > 2$ werden anschließend kurz dargestellt. Im 3. Abschnitt wird gezeigt, daß sich im Fall $\mu | p-1$ die primitiven μ -ten Einheitswurzeln im Körper G_p eindeutig auf die primitiven μ -ten Einheitswurzeln im lokalen Ring $G_{p,r}$ abbilden lassen. Mit Hilfe des chinesischen Restsatzes werden diese Ergebnisse auf einen Restklassenring G_m ausgedehnt. Erstmals wird ein Algorithmus zur Berechnung sämtlicher primitiver μ -ter Einheitswurzeln in G_m (bei vorgegebenem Modul m) angegeben. Als Folgerung erhält man Aussagen über die Struktur der Primteiler des Moduls m . Die für komplexe primitive μ -te Einheitswurzeln bekannte Beziehung zu dem μ -ten Kreisteilungspolynom bleibt auch für primitive μ -te Einheitswurzeln in G_m gültig. Abschließend werden drei Algorithmen zum chinesischen Restsatz erwähnt.

1. Eigenschaften der primitiven Einheitswurzeln

Es sei $m > 2$ eine gegebene ungerade Zahl mit der Primzahlzerlegung

$$m = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}. \quad (1.1)$$

Mit G wird die Menge der ganzen Zahlen und mit $G_m = G \bmod m$ der Restklassenring modulo m bezeichnet. Die von der Zahl $a \in G$ erzeugte Restklasse sei \bar{a} .

Eine Zahl $a \in G$ mit $(a, m) = 1$, für die

$$a^\mu = 1 \bmod m \quad (1.2)$$

für gewisse $\mu > 1$ und

$$(a^\nu - 1, m) = 1 \quad (\nu = 1, \dots, \mu-1) \quad (1.3)$$

gilt, heißt primitive μ -te Einheitswurzel modulo m . Laut Vereinbarung heißt 1 primitive erste Einheitswurzel modulo m . Die von einer primitiven μ -ten Einheitswurzel a modulo m erzeugte Restklasse $\bar{a} \in G_m$ wird dann primitive μ -te Einheitswurzel in G_m genannt.

Gehört $a \in G$ mit $(a, m) = 1$ modulo m zum Exponenten μ , so ist a i. allg. keine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m . Im Fall $m=p$ (p prim) ist G_p ein endlicher Körper, und eine Zahl $a \in G$ mit $(a, p) = 1$ gehört modulo p genau dann zum Exponenten μ , wenn a eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo p ist.

Beispiel 1.1: Modulo 15 gehört $a = 2$ zum Exponenten 4, ist aber keine primitive vierte Einheitswurzel modulo 15, weil $a^2 - 1 = 3$ und 15 nicht teilerfremd sind. Dagegen ist $a = 14$ eine primitive zweite Einheitswurzel modulo 15.

Die Bedeutung der primitiven Einheitswurzel modulo m ergibt sich aus folgendem

Satz 1.1 (/1,7/): Es existieren genau dann primitive μ -te Einheitswurzeln modulo m , wenn für alle $i=1, \dots, s$ gilt $\mu | \rho_i - 1$.

Genügt μ der obigen Bedingung und ist a eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m , so ist $(\mu, m) = 1$, und eine zahlentheoretische Transformation von G_m^μ auf G_m^μ und deren Inverse sind durch

$$x_k \equiv \sum_{n=0}^{\mu-1} x_n a^{nk} \pmod{m} \quad (k=0, \dots, \mu-1)$$

bzw.

$$x_n \equiv \mu' \sum_{k=0}^{\mu-1} x_k a^{-nk} \pmod{m} \quad (n=0, \dots, \mu-1),$$

mit $\mu\mu' \equiv 1 \pmod{m}$ erklärt, wobei die Vektoren

$$[\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{\mu-1}]^T \in G_m^\mu, [\bar{x}'_0, \dots, \bar{x}'_{\mu-1}]^T \in G_m^\mu$$

einander zugeordnet sind.

Hinsichtlich Eigenschaften und Anwendungen der zahlentheoretischen Transformation sei auf /1,7/ verwiesen.

Bemerkung: Der Begriff "primitive Einheitswurzel modulo m " entstand in Diskussionen der Verfasser mit Herrn Prof. Dr. G. Pazderski (Rostock), dem an dieser Stelle für seine wertvolle Unterstützung gedankt sei. Die Prägung dieses neuen Begriffes war nötig, weil dadurch einerseits Satz 1.1 besonders einfach formuliert werden kann und andererseits die in der Literatur /6 - 8/ an dieser Stelle benutzten Begriffe anders definiert sind und wiederholt zu Mißverständnissen führten.

Satz 1.2: Eine Zahl $a \in G$ ist genau dann primitive μ -te Einheitswurzel modulo m , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$1) \quad a^{\mu} \equiv 1 \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s), \quad (1.4)$$

$$a^{\nu} \not\equiv 1 \pmod{p_i} \quad (i=1, \dots, s)$$

für jeden Teiler ν von μ mit μ/ν prim;

$$2) \quad a^{\mu} \equiv 1 \pmod{m},$$

$$(a^{\nu} - 1, m) = 1$$

für jeden Teiler ν von μ mit μ/ν prim;

$$3) \quad a^{\mu} \equiv 1 \pmod{m},$$

$$\sum_{k=0}^{\mu/\nu-1} a^{\nu k} \equiv 0 \pmod{m}$$

für jeden Teiler ν von μ mit μ/ν prim.

Beweis: Nach /1/ genügt es zu zeigen, daß 1) und 2) gleichbedeutend sind. Da die Primzahlen p_i in (1.1) paarweise verschiedenen sind, sind (1.4) und (1.2) äquivalent.

Nun sei ν ein beliebiger Teiler von μ , für den μ/ν prim ist. Aus $a^{\nu} \not\equiv 1 \pmod{p_i}$ für alle $i=1, \dots, s$ folgt $(a^{\nu} - 1, p_i) = 1$

und somit $(a^{\nu} - 1, m) = 1$ wegen (1.1). Ist umgekehrt

$(a^{\nu} - 1, m) = 1$, so ist $(a^{\nu} - 1, p_i) = 1$ und damit $a^{\nu} \not\equiv 1 \pmod{p_i}$ für alle $i=1, \dots, s$. \square

Ein weiteres notwendiges und hinreichendes Kriterium für primitive Einheitswurzeln modulo m ist in Abschnitt 4 zu finden.

2. Primitive Wurzeln modulo p

Aus der Zahlentheorie bekannte Ergebnisse über primitive Wurzeln (/9/) werden im folgenden kurz zusammengefaßt.

Es sei $p > 2$ eine gegebene Primzahl. Dann ist G_p ein endlicher Körper. Für jede Zahl $a \in G$ mit $(a, p) = 1$ existiert immer eine positive Zahl $\varkappa \in G$ mit

$$a^{\varkappa} \equiv 1 \pmod{p}, \quad (2.1)$$

beispielsweise $\varkappa = \varphi(p) = p-1$. Dabei ist φ die Eulersche Funktion. Die kleinstmögliche Zahl $\mu = \varkappa$ in (2.1) ist der Exponent, zu dem a modulo p gehört. Stets gilt $\mu | p-1$. Zahlen, die zum

größten Exponenten $p-1$ gehören, heißen bekanntlich primitive Wurzeln modulo p . Die von einer primitiven Wurzel g modulo p erzeugte Restklasse $\bar{g} \in G_p$ wird primitive Wurzel in G_p genannt. Nach Satz 1.2 ist $g \in G$ genau dann eine primitive Wurzel modulo p , wenn gilt

$g^\nu \not\equiv 1 \pmod{p}$
für jeden Teiler ν von $p-1$ mit $(p-1)/\nu$ prim.

Satz 2.1: In G_p existieren genau dann primitive μ -te Einheitswurzeln, wenn gilt

$$\mu | p - 1. \quad (2.2)$$

Im Fall (2.2) gibt es genau $\varphi(\mu)$ primitive μ -te Einheitswurzeln in G_p . Sämtliche Elemente $\neq \bar{0}$ sind Einheiten und bilden eine zyklische Gruppe G_p^* der Ordnung $p-1$. Ist g eine primitive Wurzel modulo p und gilt (2.2), so werden die $\varphi(\mu)$ primitiven μ -ten Einheitswurzeln in G_p von

$$(g^{(p-1)/\mu})^\nu = g^{(p-1)\nu/\mu}, \quad (2.3)$$

wobei $\nu=1, \dots, \mu-1$ mit $(\nu, \mu)=1$ zu wählen ist, erzeugt.

Die Elemente (2.3) lassen sich mittels einer Indextafel, wie sie beispielsweise für alle Primzahlen < 1000 in /3/ zu finden ist, einfach berechnen. Für gewisse Primzahlen p sind primitive Wurzeln modulo p bekannt. In /5/ findet man eine Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln modulo $p < 300\,000$. Bekannte Sätze über die Struktur primitiver Wurzeln modulo p sind beispielsweise in /2,10/ zu finden.

3. Primitive Einheitswurzeln modulo p^r

Es sei $p > 2$ eine gegebene Primzahl und $r \in G$, $r \geq 2$. Dann ist $R = G_{p^r}$ ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $M = (\bar{p})$, welches von $\bar{p} \in R$ erzeugt wird. Die p^{r-1} Elemente von M sind genau die Nullteiler von R . Da in R jeder Nichtnullteiler invertierbar ist, gibt es genau $p^r - p^{r-1} = \varphi(p^r)$ Einheiten, die eine multiplikative Gruppe R^* bilden. Der Restklassenring R/M von R nach dem maximalen Ideal M ist ein Körper, nämlich G_p .

Nach Abschnitt 2 ist dann die Gruppe G_p^* der Einheiten von G_p eine zyklische Gruppe der Ordnung $p-1$. Der natürliche Ringhomomorphismus $\pi: R \rightarrow G_p$ mit

$$\pi \bar{a} = \overline{a \bmod p} \in G_p \quad (\bar{a} \in R)$$

induziert einen Gruppenhomomorphismus $\pi^*: R^* \rightarrow G_p^*$. Der Kern von π^* besteht genau aus den p^{r-1} Elementen von $\mathbb{I} + M$, die auf $\bar{1} \in G_p^*$ abgebildet werden. Nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist G_p^* isomorph zur Faktorgruppe $R^*/(\mathbb{I} + M)$, die damit zyklisch von der Ordnung $p-1$ ist. Folglich ist nach /4/, S. 72 ff.

$$R^* = (\mathbb{I} + M) \times E^* \quad (3.1)$$

das direkte Produkt der p -Gruppe $\mathbb{I} + M$ der Ordnung p^{r-1} und einer zyklischen Gruppe E^* der Ordnung $p-1$, die isomorph zu G_p^* ist. Das folgende Schema veranschaulicht diese Zusammenhänge:

$$\begin{array}{ccc} R^* \cup M = R & \xrightarrow{\pi} & G_p \\ (\mathbb{I} + M) \times E^* = R^* & \xrightarrow{\pi^*} & G_p^* = G_p \setminus \{\bar{0}\} \\ \mathbb{I} + M & \xrightarrow{\pi^*} & \mathbb{I} \end{array}$$

Wir zeigen nun, daß sich die primitiven μ -ten Einheitswurzeln des Körpers G_p auf die primitiven μ -ten Einheitswurzeln des lokalen Ringes R eineindeutig abbilden lassen.

Satz 3.1: In R existieren genau dann primitive μ -te Einheitswurzeln, wenn (2.2) gilt. Im Fall (2.2) gibt es genau $\varphi(\mu)$ primitive μ -te Einheitswurzeln in R . Sämtliche primitiven Einheitswurzeln in R bilden eine zyklische Untergruppe $E^* \subset R^*$ der Ordnung $p-1$. Ferner ist $\sum^*: G_p^* \rightarrow E^*$ mit

$$\sum^* \bar{a} = \overline{a^{p^{r-1}} \bmod p^r} \in E^* \quad (\bar{a} \in G_p^*)$$

ein Isomorphismus von G_p^* auf E^* mit

$$\pi^* \sum^* \bar{a} = \bar{a} \quad (\bar{a} \in G_p^*).$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

1. Ist $\bar{c} \in R$ eine primitive μ -te Einheitswurzel in R , so ist

$$\pi^* \bar{c} = \overline{c \bmod p}$$

eine primitive μ -te Einheitswurzel in G_p , und es gilt (2.2).
Ist $\bar{c} \in R$ eine primitive μ -te Einheitswurzel ($\mu > 1$) in R , so ist $c^\mu \equiv 1 \pmod{p^r}$ und $(c^\nu - 1, p^r) = 1$ ($\nu = 1, \dots, \mu - 1$). Dann gilt für $d \equiv c \pmod{p}$ die Kongruenz $d^\mu \equiv 1 \pmod{p}$ und $(d^\nu - 1, p) = 1$ ($\nu = 1, \dots, \mu - 1$). Somit gehört d modulo p zum Exponenten μ , und es gilt (2.2).

2. Es sei E^* die Untergruppe von R^* , die isomorph zu G_p^* ist. Dann besteht E^* genau aus allen primitiven Einheitswurzeln von R .

Ist $\bar{c} \in R$ eine primitive μ -te Einheitswurzel in R , so gilt (2.2) nach 1. Aus $\bar{c}^\mu = \bar{1}$ folgt $\bar{c} \in E^*$, so daß wegen (3.1)

$$\bar{c} = (\bar{1} + \bar{p} \bar{k}) \bar{e}$$

mit $\bar{k} \in R$, $\bar{e} \in E^*$ gilt. Da $(\bar{1} + \bar{p} \bar{k})$ im Fall $\bar{k} \neq \bar{0}$ eine p -Potenzordnung > 1 besitzt, aber andererseits (2.2) gilt, muß $\bar{k} = \bar{0}$ sein, d. h. $\bar{c} = \bar{e} \in E^*$.

Ein Element $\bar{e} \in E^*$ hat wegen $E^* \simeq G_p^*$ die Ordnung μ mit (2.2). Wäre $\bar{e}^\nu - \bar{1} \neq \bar{0} \in R$ für gewisses $\nu = 1, \dots, \mu - 1$ nicht invertierbar, so wäre $\bar{e}^\nu - \bar{1}$ ein Nullteiler und damit in M enthalten.

Für $\bar{f} = \pi^* \bar{e} \in G_p$ würde $\bar{f}^\nu - \bar{1} = \bar{0} \in G_p$ gelten, was wegen $E^* \simeq G_p^*$ unmöglich ist.

3. Es gelte (2.2). Ist $\bar{a} \in G_p^*$ eine primitive μ -te Einheitswurzel in G_p , so ist

$$\sum^* \bar{a} = \overline{a^{p^{r-1}} \bmod p^r} \in R$$

eine primitive μ -te Einheitswurzel in R . Da für $a, c \in G$ mit

$a \equiv c \pmod{p}$ stets $a^{p^{r-1}} \equiv c^{p^{r-1}} \pmod{p^r}$ folgt, ist die Definition von \sum^* sinnvoll.

Es gelte (2.2) für $\mu > 1$ und $\bar{a} \in G_p^*$ sei eine primitive μ -te Einheitswurzel in G_p , d. h., es gilt $(a, p) = 1$ und $a^\mu \equiv 1 \pmod{p}$ und damit

$$a^\mu = 1 + kp \quad (k \in G). \tag{3.2}$$

Wir zeigen, daß $b = a^{p^{\Gamma-1}}$ eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo p^{Γ} ist. Wegen (3.2) erhält man

$$b^{\mu} = a^{\mu p^{\Gamma-1}} = (1 + kp)^{p^{\Gamma-1}} \equiv 1 \pmod{p^{\Gamma}},$$

denn für $p > 2$ prim gilt

$$a_n \equiv 0 \pmod{p^{\Gamma}} \quad (n=1, \dots, p^{\Gamma-1}),$$

wobei a_n der Koeffizient von x^n des Polynoms $(1+px)^{p^{\Gamma-1}}$ ist. Wegen $(a, p) = 1$ gilt nach dem Satz von Fermat

$$b = a^{p^{\Gamma-1}} \equiv a \pmod{p},$$

woraus $b^{\nu} \equiv a^{\nu} \not\equiv 1 \pmod{p}$ ($\nu=1, \dots, \mu-1$) folgt. Nach Satz 1.2 ist

damit $\bar{b} = \sum^* \bar{a} \in R$ eine primitive μ -te Einheitswurzel in R , die nach 2. in E^* liegt.

4. Die Abbildung $\sum^*: G_p^* \rightarrow E^*$ ist ein Isomorphismus mit der Eigenschaft

$$\prod^* \sum^* \bar{a} = \bar{a} \quad (\bar{a} \in G_p). \quad (3.3)$$

Für $\bar{a}, \bar{b} \in G_p^*$ gilt

$$\sum^* (\bar{a} \bar{b}) = (\sum^* \bar{a})(\sum^* \bar{b}),$$

wie man sofort nachrechnet. Für beliebiges $\bar{a} \in G_p$ gilt wegen $(a, p) = 1$ nach dem Satz von Fermat die Gleichung (3.3). Folglich ist \sum^* eine umkehrbar eindeutige Abbildung von G_p^* auf E^* . \square

Aus den Sätzen 2.1 und 3.1 ergibt sich

Aus den Sätzen 2.1 und 3.1 ergibt sich

Folgerung 3.2: Ist g eine primitive Wurzel modulo p und gilt (2.2) für $\mu > 1$, so sind a^{ν} mit $\nu=1, \dots, \mu-1$ und $(\nu, \mu) = 1$ die $\varphi(\mu)$ primitiven μ -ten Einheitswurzeln modulo p^{Γ} , wobei

$$a \equiv g^{\varphi(p^{\Gamma})/\mu} \pmod{p^{\Gamma}}$$

ist.

Lemma 3.3: Sind $b, c \in G$ mit $b \not\equiv c \pmod{p^{\Gamma}}$ primitive Einheitswurzeln modulo p^{Γ} , so sind $b-c$ und p teilerfremd, und die Kongruenz

$$(b-c)x \equiv 1 \pmod{p^{\Gamma}} \quad (3.4)$$

ist modulo p^{Γ} eindeutig lösbar.

Beweis: Nach Satz 3.1 bilden sämtliche primitiven Einheitswurzeln in R eine zyklische Gruppe E^* der Ordnung $p-1$, die von \bar{a} erzeugt werde. Dann ist a eine primitive $(p-1)$ -te Einheitswurzel modulo p^r , und es gilt

$$b \equiv a^{\beta} \pmod{p^r}, \quad c \equiv a^{\gamma} \pmod{p^r} \quad (\beta \neq \gamma \pmod{p-1}).$$

Wir können annehmen, daß $0 \leq \beta < \gamma < p-1$ gilt. Dann ergibt sich

$$b - c \equiv a^{\beta}(1 - a^{\gamma-\beta}) \pmod{p^r}.$$

Wegen $(a, p) = 1$ und $(1 - a^{\gamma-\beta}, p) = 1$ (nach Satz 1.2) sind $b-c$ und p teilerfremd. Die Kongruenz (3.4) ist somit modulo p^r eindeutig lösbar. \square

Satz 3.4: Es gelte (2.2), und es sei a eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo p^r . Dann gilt

$$x^{\mu} - 1 \equiv \prod_{\nu=1}^{\mu} (x - a^{\nu}) \pmod{p^r} \quad (3.5)$$

und

$$\chi_{\mu}(x) \equiv \prod_{\substack{\nu=1 \\ (\nu, \mu)=1}}^{\mu} (x - a^{\nu}) \pmod{p^r} \quad (3.6)$$

wobei $\chi_{\mu}(x)$ das μ -te Kreisteilungspolynom ist. Es gibt genau eine Faktorisierung von $x^{\mu} - 1$ bzw. $\chi_{\mu}(x)$ modulo p^r .

Beweis: 1. Nach Satz 3.1 bilden alle primitiven Einheitswurzeln der Ordnung $\leq \mu$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung μ von E^* , die von $\bar{a} \in R$ erzeugt wird. Somit sind $a, a^2, \dots, a^{\mu} \equiv 1 \pmod{p^r}$ sämtliche primitiven Einheitswurzeln der Ordnung $\leq \mu$ modulo p^r . Aus $x^{\mu} - 1 = (x-1) p_1(x)$ folgt die Kongruenz

$$0 \equiv a^{\mu} - 1 \equiv (a-1) p_1(a) \pmod{p^r}.$$

Nach Satz 1.2 ist $(a-1, p) = 1$, so daß sich

$$p_1(a) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

ergibt. Aus $p_1(x) \equiv (x-a) p_2(x) \pmod{p^r}$ mit $\text{grad } p_2 = \mu-2$ folgt

$$0 \equiv (a^2)^{\mu} - 1 \equiv (a^2-1) (a^2-a) p_2(a^2) \pmod{p^r}.$$

Nach Lemma 3.3 sind $(a^2-1, p) = 1$ und $(a^2-a, p) = 1$, so daß gilt

$$p_2(a^2) \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man (3.5).

2. Es sei $\mu > 1$ ein Teiler von $p-1$. Jede primitive Einheitswurzel der Ordnung $< \mu$ modulo p^Γ muß nach 1. Lösung von $x^\nu - 1 \equiv 0 \pmod{p^\Gamma}$ sein, wobei $\nu \neq \mu$ ein gewisser Teiler von μ ist. Bestimmt man in $G[x]$ die größten gemeinsamen Teiler von $x^\mu - 1$ mit allen möglichen Polynomen $x^\nu - 1$, wobei ν alle von μ verschiedenen Teiler von μ durchläuft, und spaltet man alle diese Teiler von $x^\mu - 1$ ab, so erhält man das μ -te Kreisteilungspolynom $\chi_\mu(x)$, dessen Nullstellen modulo p^Γ ausschließlich die primitiven μ -ten Einheitswurzeln modulo p^Γ sind. Beachtet man Folgerung 3.2, so erhält man (3.6).

3. Gibt es Zahlen $a_j \in G$ ($j=1, \dots, \mu$) mit

$$x^\mu - 1 \equiv \prod_{j=1}^{\mu} (x - a_j) \pmod{p^\Gamma}, \quad (3.7)$$

so bilden die Restklassen $\bar{a}_j \in R$ eine zyklische Gruppe der Ordnung μ . Ist \bar{a}_1 ein erzeugendes Element, so gilt

$$a_1^\mu \equiv 1 \pmod{p^\Gamma},$$

$$a_1^\nu \not\equiv 1 \pmod{p^\Gamma} \quad (\nu=1, \dots, \mu-1),$$

woraus wegen (2.2)

$$a_1^\nu \not\equiv 1 \pmod{p} \quad (\nu=1, \dots, \mu-1)$$

folgt. Nach Satz 1.2 ist a_1 eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo p^Γ . Somit stimmen die Faktoren in (3.5) und (3.7) bis auf die Reihenfolge modulo p^Γ überein.

4. Existieren Zahlen $b_j \in G$ ($j=1, \dots, \varphi(\mu)$) mit

$$\chi_\mu(x) = \prod_{j=1}^{\varphi(\mu)} (x - b_j) \pmod{p^\Gamma}, \quad (3.8)$$

so sind dies nach Satz 1.2 sämtlich primitive μ -te Einheitswurzeln modulo p^Γ , denn wegen

$$\chi_\mu(x) \mid x^\mu - 1, \quad (3.9)$$

$$\chi_\mu(x) \mid \frac{x^\mu - 1}{x^\nu - 1} = \sum_{k=0}^{\mu/\nu - 1} x^{\nu k} \quad (3.10)$$

gilt für $j=1, \dots, \varphi(\mu)$ und jeden Teiler ν von μ

$$b_j^\mu \equiv 1 \pmod{p^k}, \quad \sum_{k=0}^{\mu/\nu-1} b_j^{\nu k} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Aus Lemma 3.3 folgt, daß die Faktoren von (3.6) und (3.8) bis auf die Reihenfolge modulo p^r übereinstimmen. \square

Bemerkung: Hinsichtlich der Definition und der Eigenschaften der Kreisteilungspolynome $\chi_\mu(x)$ und einer Tabelle von $\chi_\mu(x)$ für $\mu \leq 60$ sei auf /9/ verwiesen.

4. Primitive Einheitswurzeln modulo m

Es sei eine ungerade Zahl $m > 1$ durch (1.1) gegeben. Nach dem chinesischen Restsatz ist G_m isomorph zu der direkten Summe der lokalen Ringe

$$R_i = G_{p_i}^{r_i} \quad (i=1, \dots, s).$$

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Summanden:

$$G_m \simeq R_1 \oplus \dots \oplus R_s. \quad (4.1)$$

Bei dem Isomorphismus wird ein beliebiges Element $\bar{a} \in G_m$ in das Element

$$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s) \in R_1 \oplus \dots \oplus R_s$$

mit

$$a_i \equiv a \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s) \quad (4.2)$$

abgebildet, wofür wir kurz $\bar{a} \leftrightarrow (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)$ schreiben wollen.

Umgekehrt kann $\bar{a} \in G_m$ aus den s Komponenten $\bar{a}_i \in R_i$ mit Hilfe der Algorithmen zum chinesischen Restsatz (vgl. Abschnitt 5) berechnet werden.

Satz 4.1: Es sei m durch (1.1) gegeben. In G_m existieren genau dann primitive μ -te Einheitswurzeln, wenn für alle $i=1, \dots, s$ gilt

$$\mu | p_i - 1. \quad (4.3)$$

Im Fall (4.3) gibt es genau $\varphi(\mu)^s$ primitive μ -te Einheitswurzeln in G_m .

Beweis: 1. Unter der Voraussetzung (4.3) existieren in jedem lokalen Ring R_1 ($i=1, \dots, s$) genau $\varphi(\mu)$ verschiedene primitive μ -te Einheitswurzeln \bar{a}_1 . Diesen Elementen entsprechen aufgrund der Isomorphie (4.1) genau $\varphi(\mu)^s$ Elemente $\bar{a} \in G_m$, die primitive μ -te Einheitswurzeln in G_m sind. Denn aus $\bar{a} \leftrightarrow (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)$ folgt

$$\bar{a}^\mu \leftrightarrow (\bar{a}_1^\mu, \dots, \bar{a}_s^\mu) = (\bar{1}, \dots, \bar{1})$$

und für $1 \leq \nu < \mu$

$$\bar{a}^\nu - \bar{1} \leftrightarrow (\bar{a}_1^\nu - \bar{1}, \dots, \bar{a}_s^\nu - \bar{1}).$$

Da aber $\bar{1} \leftrightarrow (\bar{1}, \dots, \bar{1})$ und $\bar{a}_1^\nu - \bar{1} \in R_1$ ($i=1, \dots, s$) invertierbar sind, folgt $\bar{a}^\mu = \bar{1}$ und die Invertierbarkeit von $\bar{a}^\nu - \bar{1} \in G_m$ für $\nu=1, \dots, \mu-1$.

2. Es sei $\bar{a} \in G_m$ eine primitive μ -te Einheitswurzel in G_m , und es gelte

$$\bar{a}_1 \equiv \bar{a} \pmod{p_1^{r_1}} \quad (i=1, \dots, s).$$

Wegen (4.1) ist jedes $\bar{a}_1 \in R_1$ ($i=1, \dots, s$) eine primitive μ -te Einheitswurzel in R_1 , woraus nach Satz 3.1 die Bedingung (4.2) folgt. \square

Wir erhalten folgenden

Algorithmus zur Bestimmung sämtlicher primitiven μ -ten Einheitswurzeln modulo m :

1. Primzahlzerlegung der ungeraden Zahl $m > 1$ gemäß (1.1).
2. Festlegen der Zahl $\mu > 1$ unter Bedingung (4.3).
3. Bestimmen der $\varphi(\mu)$ Werte ν mit $(\nu, \mu) = 1$, $1 \leq \nu \leq \mu - 1$.
4. Aufsuchen einer primitiven Wurzel g_1 modulo p_1 für $i=1, \dots, s$.
5. Berechnen der $\varphi(\mu)$ primitiven μ -ten Einheitswurzeln $b_{1\nu}$ modulo p_1 ($i=1, \dots, s$):

$$b_{1\nu} \equiv g_1^{(p_1-1)\nu/\mu} \pmod{p_1}.$$

6. Bestimmen der $\varphi(\mu)$ primitiven μ -ten Einheitswurzeln $a_{1\nu}$ modulo $p_1^{r_1}$ ($i=1, \dots, s$):

$$a_{1\nu} \equiv b_{1\nu}^{p_1^{r_1-1}} \pmod{p_1^{r_1}}$$

7. Bilden von $\varphi(\mu)^s$ primitiven μ -ten Einheitswurzeln modulo m mittels Algorithmen zum chinesischen Restsatz.

Beispiel 4.1: Es sollen alle primitiven Einheitswurzeln größtmöglicher Ordnung μ modulo 1625 bestimmt werden.

1. $m = 1625 = 5^3 \cdot 13$.
2. $\mu = 4$.
3. $\nu = 1$ oder 3.
4. $g_1 = 2$ ist primitive Wurzel modulo 5 und $g_2 = 2$ ist primitive Wurzel modulo 13.
5. $b_{11} \equiv 2 \pmod{5}$, $b_{13} \equiv 2^3 \equiv -2 \pmod{5}$,
 $b_{21} \equiv 2^3 \equiv -5 \pmod{13}$, $b_{23} \equiv 2^9 \equiv 5 \pmod{13}$.
6. $a_{11} \equiv 2^{5^2} \equiv 57 \pmod{5^3}$, $a_{13} \equiv (-2)^{5^2} \equiv -57 \pmod{5^3}$,
 $a_{21} \equiv -5 \pmod{13}$, $a_{23} \equiv 5 \pmod{13}$.
7. Die $\varphi(4)^2 = 4$ primitiven vierten Einheitswurzeln in G_{1625} lauten $\overline{\pm 57}$ und $\overline{\pm 307}$ (siehe Beispiele 5.1 - 5.3):

$$\overline{307} \leftrightarrow (\overline{57}, \overline{-5}),$$

$$\overline{57} \leftrightarrow (\overline{57}, \overline{5}),$$

$$\overline{-57} \leftrightarrow (\overline{-57}, \overline{-5}),$$

$$\overline{-307} \leftrightarrow (\overline{-57}, \overline{5}).$$

Die primitiven Einheitswurzeln der Ordnung ≤ 4 lauten $\overline{\pm 1}$, $\overline{\pm 57}$ und $\overline{\pm 307}$. Diese Elemente bilden aber keine Untergruppe von G_{1625}^* . Dagegen sind $\{\overline{57}, \overline{-1}, \overline{-57}, \overline{1}\}$ und $\{\overline{307}, \overline{-1}, \overline{-307}, \overline{1}\}$ zwei zyklische Untergruppen vierter Ordnung der Gruppe G_{1625}^* .

Lemma 4.5: Es sei m durch (1.1) gegeben. Sind $b, c \in G$ mit

$$b \not\equiv c \pmod{p_1^{r_1}} \quad (i=1, \dots, e)$$

primitive Einheitswurzeln modulo m , so sind $b-c$ und m teilerfremd.

Der Beweis ergibt sich aus (4.1) und Lemma 3.3.

Satz 4.6: Es sei m durch (1.1) gegeben, und es gelte (4.3).

Ist $a \in G$ eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m , so gilt

$$x^\mu - 1 \equiv \prod_{\nu=1}^{\mu} (x - a^\nu) \pmod{m}, \quad (4.4)$$

$$\chi_{\mu}(x) \equiv \prod_{\substack{\nu=1 \\ (\nu, \mu)=1}}^{\mu} (x-a^{\nu}) \pmod{m}, \quad (4.5)$$

wobei $\chi_{\mu}(x)$ das μ -te Kreisteilungspolynom ist. Es gibt genau $\varphi(\mu)^{s-1}$ verschiedene Faktorisierungen von $x^{\mu} - 1$ bzw. $\chi_{\mu}(x)$ modulo m , die sich modulo m nicht nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden.

Beweis: Aus (4.1) folgt

$$G_m[x] \cong R_1[x] \oplus \dots \oplus R_s[x]. \quad (4.6)$$

Bildet man die Zahlen $a_i \in G$ ($i=1, \dots, s$) mittels

$$a_i \equiv a \pmod{p_i^{r_i}},$$

so sind diese nach Satz 4.1 primitive μ -te Einheitswurzeln modulo $p_i^{r_i}$. Nach Satz 3.4 gilt

$$x^{\mu} - 1 \equiv \prod_{\nu=1}^{\mu} (x-a_1^{\nu}) \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s),$$

$$\chi_{\mu}(x) \equiv \prod_{\substack{\nu=1 \\ (\nu, \mu)=1}}^{\mu} (x-a_1^{\nu}) \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s),$$

woraus sich wegen (4.6) die Faktorisierungen (4.4) und (4.5) ergeben. Gleiche (bezüglich modulo m) Faktorisierungen (4.4) und (4.5) erhält man, wenn man anstelle von a eine der $\varphi(\mu)$ Zahlen a^{ν} mit $(\nu, \mu) = 1$ benutzt, die ebenfalls primitive μ -te Einheitswurzeln modulo m sind. Da es andererseits nach Satz 4.1 genau $\varphi(\mu)^s$ primitive μ -te Einheitswurzeln modulo m gibt, existieren genau $\varphi(\mu)^{s-1}$ verschiedene Zerlegungen der Form (4.4) bzw. (4.5). \square

Beispiel 4.2: Wählt man $m = 1625$ und $\mu = 4$ wie in Beispiel 4.1, so erhält man mit den primitiven vierten Einheitswurzeln $a \equiv 57$ bzw. $a \equiv 307$ modulo 1625 die Faktorisierungen

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &\equiv (x-57)(x+1)(x+57)(x-1) \pmod{1625} \\ &\equiv (x-307)(x+1)(x+307)(x-1) \pmod{1625} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\chi_4(x) &\equiv x^2 + 1 \equiv (x-57)(x+57) \pmod{1625} \\ &\equiv (x-307)(x+307) \pmod{1625}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Sätze 3.4 und 4.6 erkennt man, daß die primitiven μ -ten Einheitswurzeln modulo m das natürliche Analogon der primitiven μ -ten Einheitswurzeln im Körper der komplexen Zahlen sind.

Satz 4.7: Es sei m durch (1.1) gegeben, und μ genüge (4.3). Eine Zahl $a \in G$ ist genau dann eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m , wenn gilt

$$\chi_{\mu}(a) \equiv 0 \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s) \quad (4.7)$$

oder

$$\chi_{\mu}(a) \equiv 0 \pmod{m}. \quad (4.8)$$

Beweis: 1. Ist für $a \in G$ die Bedingung (4.7) erfüllt, so folgt wegen (3.9) und (3.10)

$$a^{\mu} \equiv 1 \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s)$$

$$\sum_{k=0}^{\mu/\nu-1} a^{k\nu} \equiv 0 \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s)$$

für jeden Teiler ν von μ mit μ/ν prim. Somit ist nach (4.1) die Bedingung 3) von Satz 1.2 erfüllt. Folglich ist a eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m .

2. Ist umgekehrt $a \in G$ eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m , so genügt a nach Satz 4.6 der Kongruenz (4.8), die nach (4.1) mit (4.7) gleichbedeutend ist. \square

Satz 4.8: Die ungerade Zahl $m > 1$ sei durch (1.1) gegeben. Für $n \geq 2$ und $\mu = 2^{n-1}\nu$ mit ungeradem $\nu \geq 1$ gelte $2\mu | p_i - 1$ ($i=1, \dots, s$). Ferner sei a eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m . Dann ist die quadratische Kongruenz

$$x^2 \equiv a \pmod{m} \quad (4.9)$$

lösbar, und jede der 2^s modulo m inkongruenten Lösungen $b \in G$ von (4.9) ist eine primitive 2μ -te Einheitswurzel modulo m .

Beweis: Ist a eine primitive μ -te Einheitswurzel modulo m , so folgt aus (1.2) und $\mu | (p_i - 1)/2$

$$a^{(p_i - 1)/2} \equiv 1 \pmod{p_i} \quad (i=1, \dots, s),$$

so daß a quadratischer Rest modulo p_i ($i=1, \dots, s$) ist. Somit ist (4.9) lösbar. Da jede quadratische Kongruenz

$$x^2 \equiv a \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s)$$

zwei modulo $p_i^{r_i}$ inkongruente Lösungen hat, besitzt (4.9) nach

(4.1) genau 2^s modulo m inkongruente Lösungen.

Nach Satz 4.7 bleibt zu zeigen

$$\chi_{2\mu}(b) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\chi_{\mu}(a) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Wegen $b^2 \equiv a \pmod{m}$ und aufgrund der Eigenschaften der Kreisteilungspolynome ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_{2\mu}(b) &\equiv \chi_{2n\nu}(b) \equiv \chi_{2\nu}(b^{2^{n-1}}) \equiv \chi_{2\nu}(a^{2^{n-2}}) \\ &\equiv \chi_{2^{n-1}\nu}(a) \equiv \chi_{\mu}(a) \equiv 0 \pmod{m}. \quad \square \end{aligned}$$

5. Algorithmen zum chinesischen Restsatz

Abschließend werden drei Algorithmen zur Lösung der s simultanen Kongruenzen

$$a \equiv a_i \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s) \quad (5.1)$$

bei vorgegebenen Zahlen $a_i \in G$ und gesuchter Zahl $a \in G$, die modulo m eindeutig bestimmt ist, angegeben. Dabei besitze $m \in G$ mit $m > 1$ die Primzahlzerlegung (1.1).

Algorithmus 1: Es gilt

$$a \equiv \sum_{i=1}^s m p_i^{-r_i} a_i t_i \pmod{m} \quad (5.2)$$

mit

$$(m p_i^{-r_i}) t_i \equiv 1 \pmod{p_i^{r_i}} \quad (i=1, \dots, s). \quad (5.3)$$

Die s Kongruenzen (5.3) sind mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus zu lösen. Die Hilfsfaktoren $m p_1^{-r_1} t_1$ in (5.2) sind für einen gegebenen Modul m fest.

Die simultanen Kongruenzen (5.1) können auch mit Hilfe des Satzes von Euler gelöst werden:

Algorithmus 2: Es gilt

$$a \equiv \sum_{i=1}^s (m p_1^{-r_i}) \varphi(p_1^{r_i}) a_i \pmod{m} \quad (5.4)$$

mit

$$\varphi(p_1^{r_i}) = p_1^{r_i-1} (p_1-1) \quad (i=1, \dots, s).$$

Bei der Bestimmung von a gemäß (5.4) werden zunächst die s

Hilfsfaktoren $(m p_1^{-r_i}) \varphi(p_1^{r_i})$, die für einen gegebenen Modul m fest sind, berechnet.

Da m ungerade ist und die Zahl a modulo m eindeutig durch (5.1) bestimmt ist, kann man annehmen, daß

$$-(m-1)/2 \leq a \leq (m-1)/2$$

gilt. Dann läßt sich die Zahl $a \in G$ in der Form

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 p_1^{r_1} + \alpha_3 p_1^{r_1} p_2^{r_2} + \dots + \alpha_s \prod_{j=1}^{s-1} p_j^{r_j} \quad (5.5)$$

mit

$$-(p_1^{r_i} - 1)/2 \leq \alpha_i \leq (p_1^{r_i} - 1)/2 \quad (i=1, \dots, s)$$

darstellen. Wegen (5.1) und (5.5) gilt

$$\alpha_1 \equiv a_1 \pmod{p_1^{r_1}} \quad (5.6)$$

und allgemein für $1 < k \leq s$:

$$a_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 p_1^{r_1} + \dots + \alpha_k \prod_{j=1}^{k-1} p_j^{r_j} \pmod{p_k^{r_k}}$$

woraus sich α_k berechnen läßt. Wir fassen zusammen:

Algorithmus 3: Gilt (5.6) und für $1 < k \leq s$

$$a_k \equiv [a_k - (\alpha_1 + \alpha_2 p_1^{r_1} + \dots + \alpha_{k-1} \prod_{j=1}^{k-2} p_j^{r_j})] u_k \pmod{p_k^{r_k}} \quad (5.7)$$

mit $u_1 = 1$ und

$$\left(\prod_{j=1}^{k-1} p_j^{r_j} \right) u_k \equiv 1 \pmod{p_k^{r_k}} \quad (k=2, \dots, s),$$

so ergibt sich a aus (5.5).

Anhand der folgenden Beispiele werden diese Algorithmen erläutert, wobei auf Beispiel 4.1, 7) zurückgegriffen wird.

Beispiele: 5.1. Gesucht ist eine Zahl $a \in G$ mit

$$a \equiv 57 \pmod{125}, \quad a \equiv -5 \pmod{13}.$$

Die Bestimmung von t_1 und t_2 nach (5.3) liefert $t_1 \equiv 77 \pmod{125}$

und $t_2 \equiv 5 \pmod{13}$. Nach (5.2) ergibt sich

$$a \equiv 13 \cdot 57 \cdot 77 - 125 \cdot 5 \cdot 5 \equiv 307 \pmod{1625}.$$

5.2. Es wird nach dem 2. Algorithmus eine Zahl $a \in G$ mit

$$a \equiv 57 \pmod{125}, \quad a \equiv 5 \pmod{13}$$

bestimmt. Nach (5.4) gilt

$$a \equiv 13^{100} \cdot 57 + 125^{12} \cdot 5 \equiv 57 \pmod{1625}.$$

5.3. Nach dem 3. Algorithmus wird eine Zahl $a \in G$ mit

$$a \equiv -57 \pmod{125}, \quad a \equiv 5 \pmod{13}$$

berechnet. Nach (5.6) und (5.7) gilt

$$\alpha_1 \equiv -57 \pmod{125}, \quad \alpha_2 \equiv [5 - (-57)] \cdot 5 \equiv -2 \pmod{13},$$

woraus sich wegen (5.5) ergibt

$$a \equiv -57 + 125 \cdot (-2) \equiv -307 \pmod{1625}.$$

Literatur

/1/ Creutzburg, R., und Tasche, M.: F-Transformation und Faltung in kommutativen Ringen. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. (im Druck)

- /2/ Ecker, A.: On primitive roots. Elem. Math. 37, 103 - 108
(1982)
- /3/ Jacobi, C. G. J.: Canon arithmeticus. Berlin 1956
- /4/ Hasse, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin 1950
- /5/ Kraitchik, M.: Introduction à la Théorie des Nombres.
Paris 1952
- /6/ Nicholson, P. J.: Algebraic theory of finite Fourier
transforms. J. Comput. Syst. Sci. 5, 524 - 547 (1971)
- /7/ Nussbaumer, H. J.: Fast Fourier Transform and Convolution
Algorithms. Berlin 1981
- /8/ Pollard, J. M.: The fast Fourier transform in a finite
field. Math. Comp. 25, 365 - 374 (1971)
- /9/ Tschebotarow, N.: Grundzüge der Galois'schen Theorie.
Groningen 1950
- /10/ Winogradow, I. M.: Elemente der Zahlentheorie. Berlin 1955

eingegangen: 14. 10. 1983

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Lehrer R. Creutzburg
Doz. Dr. sc. nat. M. Tasche
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $\text{Pol}_k \{(x, x+1 \bmod k) \mid x \in E_k\}$

Die Menge $\text{Pol}_k \{(x, x+1 \bmod k) \mid x \in E_k\}$ gehört zu den sogenannten Klassen (abgeschlossenen Mengen) autodualer Funktionen der k -wertigen Logik P_k , deren Elemente gewisse Permutationen bewahren und über die in der letzten Zeit einige Arbeiten publiziert worden sind. So gelang es z. B. I. G. Rosenberg und A. Szendrei in /8/, sämtliche maximalen Klassen der maximalen Klassen autodualer Funktionen von P_k zu ermitteln, womit erstmalig für die maximalen Klassen eines der 6 möglichen Typen maximaler Klassen von P_k sämtliche in diesen Klassen maximale Klassen vorliegen.

Für die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehende spezielle Menge S autodualer Funktionen wird zunächst gezeigt, daß durch geeignete Wahl von Operationen über S aus S eine Algebra gebildet werden kann, die zu der mit den üblichen Superpositionsoperationen ausgestatteten Algebra P'_k isomorph ist. Dies ausnutzend, läßt sich dann nachweisen, daß jede echte (bez. der gewöhnlichen Superpositionen) abgeschlossene Teilmenge von S ein Durchschnitt von S mit einer eindeutig bestimmten, nicht in S liegenden abgeschlossenen Teilmenge von P_k ist. Anschließend werden dann mit Hilfe des angegebenen Isomorphismus und der in /6/ ermittelten maximalen Klassen von P_k die maximalen Klassen von S bestimmt.

Die im folgenden nicht näher erläuterten Begriffe und Bezeichnungen entnehmen men /3/, /4/ und /5/.

Sei k eine gewisse natürliche Zahl, $s(x) := x + 1 \bmod k$ und S die Menge aller Funktionen aus P_k , die die Relation $\{(x, s(x)) \mid x \in E_k\}$ bewahren. Als Operationen über P_k sind wie üblich ζ , τ , Δ , ∇ , $*$ zugelassen. Die Funktionen aus S nennen wir autoduale Funktionen. Ist k eine Primzahl, so ist S eine maximale Klasse von P_k (/6/). In /3/ wurde für maximale Klassen autodualer Funktionen gezeigt, daß eine Funktion

$f^n \in P_k := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n: E_k^n \rightarrow E_k\}$ genau dann zu S gehört, wenn eine $(n-1)$ -stellige Funktion F aus $P'_k := \bigcup_{n \geq 0} \{f^n: E_k^n \rightarrow E_k\}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{k-1} j_1(x_1) \cdot s^i(F(s^{k-1}(x_2), \dots, s^{k-1}(x_n))) \pmod k \quad (1)$$

$$(s^i(x) := x + i \pmod k, j_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) := f(0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Der in /3/ gegebene Beweis für (1) verwendet nicht die Primzahleigenschaft von k , so daß (1) für beliebiges k gilt. Wegen (1) ist es möglich, eine eindeutige Abbildung α von S ($\subseteq P_k$) auf P'_k zu definieren: $\alpha: f \rightarrow F$.

Lemma 1: Die Abbildung α hat folgende Eigenschaften:

a) Für die Operationen $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$, die definiert sind durch

$$(\zeta f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_3, x_4, \dots, x_n, x_2),$$

$$(\tau f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_3, x_2, x_4, \dots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}), \text{ und}$$

$$(f * g)(x_1, \dots, x_{n+m-2}) = f(x_1, g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{n+m-2}).$$

gilt $\alpha(\zeta f) = \zeta F$, $\alpha(\tau f) = \tau F$, $\alpha(\Delta f) = \Delta F$, $\alpha(\nabla f) = \nabla F$ und $\alpha(f * g) = F * G$, d. h., die Algebra $\langle S; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ ist isomorph zur Algebra $\langle P'_k; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$.

(Für 0-stellige Funktionen h sei $\zeta h = \tau h = \Delta h = h$.)

b) Für jede abgeschlossene Teilmenge A von S ist $\alpha(A)$ abgeschlossen, und es gilt $\alpha(A) \not\subseteq S$, $A \subseteq \alpha(A)$ sowie $\alpha(A) \cap S = A$.

Beweis: Die Behauptung a) prüft man leicht nach.

Bezeichne A eine abgeschlossene Teilmenge von S . Aus a) folgt dann unmittelbar, daß auch $\alpha(A)$ abgeschlossen ist. Wäre nun $\alpha(A) \subseteq S$, dann würde für beliebiges $f^n \in A$

$$F(x_2, \dots, x_n) = s^i(F(s^{k-1}(x_2), \dots, s^{k-1}(x_n))), \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

gelten. Mit Hilfe von (1) ergäbe sich hieraus, daß die Variable x_1 in jeder Funktion $f \in A$ fiktiv wäre, was nicht möglich ist.

Daher gilt $\alpha(A) \not\subseteq S$.

Sei $f \in A$. Dann ist $\nabla f \in A$ und folglich $\alpha(\nabla f) = f \in \alpha(A)$, d. h. $A \subseteq \alpha(A)$. Sei $f^n \in S \cap \alpha(A)$. Dann ist

$$f(x_1, \dots, x_n) = s^i(f(s^{k-1}(x_1), \dots, s^{k-1}(x_n))) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, k-1$$

Folglich gilt $\Delta(\alpha^{-1}f) = f \in A$ und damit $S \cap \alpha(A) \subseteq A$. Unter Berücksichtigung von $A \subseteq \alpha(A)$ und $A \subseteq S$ folgt hieraus

$$A = S \cap \alpha(A). \quad \blacksquare$$

Dem eben bewiesenen Lemma ist zu entnehmen, daß sämtliche Teilklassen von S (also auch die im folgenden zu bestimmenden maximalen Klassen von S) Durchschnitte von S mit nicht in S enthaltenen Klassen von P_k sind. Zur Beschreibung der maximalen Klassen von S benötigen wir noch einige Bezeichnungen.

Sei T die Menge aller Teiler von k , $\gamma_r := \{x \in E_k \mid r \mid x\}$,

$\varrho_r := \{(x, y) \in E_k^2 \mid r \mid (y-x)\}$ und

$$L := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \in P_k \mid \exists a_0, a_1, \dots, a_n : f(\vec{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \pmod{k}\}.$$

Lemma 2: Folgende Klassen sind maximal in S :

$$S \cap \text{Pol } \gamma_r \quad \text{für } r \in T \setminus \{1\},$$

$$S \cap \text{Pol } \varrho_t \quad \text{für } t \in T \setminus \{1, k\} \quad \text{und}$$

$$S \cap L, \quad \text{falls } k \text{ eine Primzahl ist.}$$

Beweis: Die Klassen $\text{Pol } \gamma_r$ ($r \in T \setminus \{1\}$), $\text{Pol } \varrho_t$ ($t \in T \setminus \{1, k\}$)

und L ($\subseteq P_k$, k Primzahl) sind nach /6/ maximal in P_k . Wegen

Lemma 1, a) genügt es folglich für den Nachweis der Maximalität

der Klasse $S \cap A$ ($A \in \{\text{Pol } \gamma_r, \text{Pol } \varrho_t, L\}$), die Beziehung

$$\alpha(S \cap A) = A \quad \text{zu beweisen.}$$

Offensichtlich ist $\alpha(S \cap A) \subseteq A$ wegen $c_0 \in A$. Für den Nachweis von $A \subseteq \alpha(S \cap A)$ haben wir zu zeigen, daß jede Funktion $f^n \in S$ mit $\alpha(f) \in A$ auch zu A gehört. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: $A = \text{Pol } \gamma_r$ und $r \in T \setminus \{1\}$.

Sei $a_1, \dots, a_n \in \gamma_r$, $f^n \in S$ und $\alpha(f) \in \text{Pol } \gamma_r$. Nach Definition von γ_r ist $b_i := a_i - a_1 \bmod k$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ein Element von γ_r . Wegen $\alpha(f) \in \text{Pol } \gamma_r$ ist folglich $f(0, b_2, \dots, b_n) =: b \in \gamma_r$ und damit $f(a_1, \dots, a_n) = b + a_1 \bmod k \in \gamma_r$. Also bewahrt f die Relation γ_r , und es gilt $\alpha(S \cap \text{Pol } \gamma_r) = \text{Pol } \gamma_r$.

Fall 2: $A = \text{Pol } \varrho_t$ und $t \in T \setminus \{1, k\}$.

Sei $(a_i, b_i) \in \varrho_t$, $i = 1, 2, \dots, n$, $f^n \in S$ und $\alpha(f) \in \text{Pol } \varrho_t$. Nach Definition von ϱ_t ist $(c_i, d_i) \in \varrho_t$ für $c_i := a_i - a_1 \bmod k$, $d_i := b_i - b_1 \bmod k$ und $i = 1, 2, \dots, n$. Wegen $\alpha(f) \in \text{Pol } \varrho_t$ gilt

$$f \begin{pmatrix} 0 & c_2 & \dots & c_n \\ 0 & d_3 & \dots & d_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \varrho_t.$$

Da f in S liegt, folgt hieraus $f \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e+a_1 \bmod k \\ f+b_1 \bmod k \end{pmatrix} \in \varrho_t$.

Folglich bewahrt f die Relation ϱ_t , und es ist

$$\alpha(S \cap \text{Pol } \varrho_t) = \text{Pol } \varrho_t.$$

Fall 3: $A = L$.

Man prüft leicht die Beziehung

$$S \cap L = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f^n \in P_k \mid \exists a_0, a_1, \dots, a_n: f(\vec{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \wedge a_1 + \dots + a_n = 1 \bmod k \right\}$$

nach, woraus unmittelbar $\alpha(S \cap L) = L$ folgt. ■

Satz: Falls k eine Primzahl ist, hat S nur 2 maximale Klassen: $S \cap \text{Pol}(0)$ und $S \cap L$. Ist k keine Primzahl, so ist die Menge $\{S \cap \text{Pol}_k \gamma_r, S \cap \text{Pol}_k \varrho_t \mid r \in T \setminus \{1\}, t \in T \setminus \{1, k\}\}$ die Menge aller maximalen Klassen von S .

Beweis: Die Beweise für die Spezialfälle $k = 2$, $k = 3$ bzw. $k = p$ (p prim) findet man in /2/, /1/ bzw. /9/. Sei im folgenden k keine Primzahl und M eine Teilmenge von S , die nicht in den im Satz genannten Klassen enthalten ist. Wegen Lemma 2 genügt es zum Beweis des Satzes, $[M] = S$ zu beweisen.

Wir zeigen zunächst $S^1 \subseteq [M]$. Wegen $M \not\subseteq S \cap \text{Pol } \gamma_k$ gibt es in M eine Funktion f^n mit $f(0, \dots, 0) =: a \neq 0$. Folglich ist

$s^a(x) = f(x, \dots, x) \in [M]$. Sind a und k teilerfremd, so gilt offensichtlich $[\{s^a\}]^1 = S^1$. Falls a und k nicht teilerfremd sind, gibt es ein $t \in T \setminus \{1\}$ mit $[\{s^a\}]^1 = \{s^x | x \in \mathcal{Y}_t\}$. Wegen $M \not\subseteq S \cap \text{Pol } \mathcal{Y}_t$ gehört zu M eine Funktion f_t^m mit

$f_t(a_1, \dots, a_m) =: b \notin \mathcal{Y}_t$ für gewisse a_1, \dots, a_m aus \mathcal{Y}_t . Folglich ist $f_t(s^{a_1}(x), \dots, s^{a_m}(x)) = s^b(x) \in [M]$. Ferner existiert ein $t' \in T \setminus \{t\}$ mit $[\{s^a, s^b\}]^1 = \{s^x | x \in \mathcal{Y}_{t'}\}$. Gilt $t' = 1$, so ist $S^1 \subseteq [M]$. Falls $t' \neq 1$ ist, so gibt es eine Funktion $f_{t'} \in M$ mit $f_{t'} \notin \text{Pol } \mathcal{Y}_{t'}$. Analog zu oben kann man als Superposition über $f_{t'}$, s^a und s^b eine Funktion $s^c \notin [\{s^a, s^b\}]$ erhalten. Für $[\{s^a, s^b, s^c\}]^1$ lassen sich dann wie oben zwei Fälle unterscheiden, usw. Iteration der angegebenen Konstruktion ergibt $S^1 \subseteq [M]$.

Als Folgerung aus Lemma 1 erhält man, daß $[M] = S$ gilt, wenn $\alpha([M]) = P'_k$ ist. Den Nachweis von $\alpha([M]) = P'_k$ führen wir mit Hilfe der aus /6/ bekannten maximalen Klassen von P'_k . Im folgenden wird gezeigt, daß für jede maximale Klasse $\text{Pol } \mathcal{g}$ von P'_k , $\mathcal{g} \in \mathcal{W}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{L}'_k \cup \mathcal{L}''_k$, eine Funktion in $\alpha([M])$ existiert, die \mathcal{g} nicht bewahrt.

Zu $\alpha([M])$ gehören die Konstanten $0, 1, \dots, k-1$ (da $\alpha(s^a) = a$ und $s^a \in [M]$ für $a \in E_k$) und sämtliche Funktionen aus $[M]$ (nach Lemma 1, b)). Wegen $\{a, s^a | a \in E_k\} \subseteq \alpha([M])$ ist $\alpha([M])$ keine Teilmenge von $\text{Pol } \mathcal{g}$ für $\mathcal{g} \in \mathcal{L}''_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{W}_k$.

Sei $\mathcal{g} \in \mathcal{L}'_k \setminus \mathcal{L}''_k$, c ein zentrales Element von \mathcal{g} und $(a_1, \dots, a_n) \notin \mathcal{g}$. Dann bewahrt die Funktion s^{a_1-c} aus $[M]$ wegen

$$s^{a_1-c} \begin{pmatrix} c \\ a_2 - a_1 + c \text{ mod } k \\ \vdots \\ a_h - a_1 + c \text{ mod } k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix}$$

nicht die Relation \mathcal{g} . Folglich ist $\alpha([M]) \not\subseteq \text{Pol } \mathcal{g}$ für $\mathcal{g} \in \mathcal{L}'_k$. Wir ermitteln als nächstes diejenigen \mathcal{g} aus \mathcal{U}_k , die von s bewahrt werden.

Sei im folgenden $\varrho \in \mathcal{U}_k$, $s \in \text{Polg}$ und $U := \{x \in E_k \mid (0, x) \in \varrho\}$.
 Wegen $s \in \text{Polg}$ folgt aus $(a, b) \in \varrho$ stets $(b-a, 0) = s^{-a} \binom{a}{b} \in \varrho$.

Umgekehrt ergibt sich aus $(b-a, 0) \in \varrho$ wegen $s^a \binom{0}{b-a} = \binom{a}{b}$ stets $(a, b) \in \varrho$. Es gelten also die Äquivalenzen

$$\binom{a}{b} \in \varrho \iff \binom{0}{b-a} \in \varrho \iff b-a \in U. \quad (2)$$

Mit Hilfe von (2) und den Eigenschaften von Äquivalenzrelationen überlegt man sich leicht, daß U eine Untergruppe der zyklischen Gruppe $\langle E_k; + \text{ mod } k \rangle$ ist. Bekanntlich läßt sich jede Untergruppe einer endlichen zyklischen Gruppe mit k Elementen durch einen Teiler von k beschreiben. Es gibt also für unsere Menge U ein $t \in T$ mit $U = \{a \in E_k \mid t \mid a\}$. Hieraus und aus (2) folgt $\varrho = \varrho_t$. Wegen $s \in \alpha([M])$ und $M \notin \text{Polg}_t$ für jedes $t \in T \setminus \{1, k\}$ ist $\alpha([M]) \notin \text{Polg}$ für $\varrho \in \mathcal{U}_k$.

Gilt $\varrho = \iota_k$, so bewahren die zu M gehörenden Funktionen aus $S \setminus \text{Polg}_t$, $t \in T \setminus \{1, k\}$, nicht die Relation ι_k , da sie von mindestens zwei Variablen wesentlich abhängen und k verschiedene Werte annehmen. Sei als nächstes $\varrho \in \mathcal{U}_k^h$ und $3 \leq h \leq k-1$. Dann existiert eine Abbildung q von E_k auf E_{h^m} ($m \geq 1, h \geq 3$) mit

$$(a_1, \dots, a_h) \in \varrho \iff (q(a_1), \dots, q(a_h)) \in \zeta_m,$$

wobei ζ_m eine h -adisch elementare Relation auf E_{h^m} bezeichnet.

Ist q eine eindeutige Abbildung, so überzeugt man sich leicht mit Hilfe von Lemma 4.1 aus /3/, daß s nicht ϱ bewahrt. Ist q nicht eindeutig, so definiert q auf E_k eine nichttriviale Äquivalenzrelation $\sigma := \{(a, b) \in E_k^2 \mid q(a) = q(b)\}$, die zu \mathcal{U}_k gehört. Oben wurde nachgewiesen, daß zu $\alpha([M]) \cap S$ eine Funktion f_σ^n gehört, die σ nicht bewahrt. Dann existieren Tupel

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \sigma \text{ mit } f_\sigma \binom{a_1 \dots a_n}{b_1 \dots b_n} = \binom{c}{d} \notin \sigma.$$

Da $\iota_h \cap E_{h^m}^h \subseteq \zeta_m$, ist $\{(a_1, b_1, x_3, \dots, x_n) \mid x_3, \dots, x_n \in E_k\} \subseteq \varrho$,

$i = 1, 2, \dots, n$. Aus der Definition von ϱ und der Wahl von c und d folgt andererseits, daß gewisse $e_3, \dots, e_n \in E_k$ mit

$(c, d, e_3, \dots, e_n) \notin \varrho$ existieren. Wegen ihrer Zugehörigkeit zu S nimmt die Funktion f_σ alle Werte aus E_k^k an. Folglich gibt es

Tupel $(a_1, b_1, c_{13}, \dots, c_{1h}) \in \mathfrak{g}$, $i = 1, 2, \dots, n$, mit

$$f_6 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_{13} & c_{23} & \dots & c_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1h} & c_{2h} & \dots & c_{nh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e_3 \\ \vdots \\ e_h \end{pmatrix}.$$

Also bewahrt f_6 nicht die Relation $\mathfrak{g} \in \mathcal{L}_k^h$.

Für den Beweis des Satzes fehlt noch der Nachweis, daß $\alpha([M])$ keine Teilmenge einer maximalen Klasse vom Typ \mathcal{L} ist. Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \mathcal{L}_k$ ($k=p^m$, p prim, $m \geq 2$) mit $\alpha([M]) \subseteq \text{Pol} \lambda$. Da nach Lemma 1 die Beziehung $[M] = S \cap \alpha([M])$ besteht, folgt hieraus, daß $[M]$ eine Teilmenge von $S \cap \text{Pol} \lambda$ ist. Im folgenden wird gezeigt, daß aus gewissen Relationen der Menge $\text{Inv}(S \cap \text{Pol} \lambda)$ eine Relation γ aus $\mathcal{U}_k \cup \mathcal{H}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{Z}_k$ abgeleitet werden kann. Damit wäre $S \cap \text{Pol} \lambda$ und auch $[M]$ eine Teilmenge von $\text{Pol} \gamma$, im Widerspruch zum oben Gezeigten, wo mit Hilfe von Funktionen aus $[M]$ nachgewiesen wurde, daß $\alpha([M])$ nicht in maximalen Klassen des Typs \mathcal{U} , \mathcal{H} , \mathcal{L} oder \mathcal{Z} liegt. Die Relation λ ist durch eine elementar abelsche p -Gruppe $\langle E_k, \oplus \rangle$ charakterisierbar, für die wir wegen $/7/$ 0 als neutrales Element annehmen können. Es gilt $\lambda = \{(a, b, c, d) \in E_k^4 \mid a \oplus b = c \oplus d\}$. Man prüft leicht nach, daß die Relationen

$$\lambda_1 = \{(a_1, \dots, a_p) \in E_k^p \mid a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_p = 0\},$$

$$\lambda_2 = \{(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \in E_k^{2p} \mid a_1 \oplus \dots \oplus a_p = b_1 \oplus \dots \oplus b_p\}$$

und $\mathfrak{g}' = \{(i, i+1 \bmod k, i+2 \bmod k, \dots, i+p-1 \bmod k) \mid i \in E_k\}$ zu $\text{Inv}(S \cap \text{Pol} \lambda)$ gehören. Sei $a_i := i \oplus (i+1 \bmod k) \oplus (i+2 \bmod k) \oplus \dots \oplus (i+p-1 \bmod k)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$. Da $p \neq k$ ist, können nicht alle a_i gleich sein. Existiert ein j mit $a_j = 0$ (nur möglich für $p \neq 2$), so gilt $\text{pr}_1(\mathfrak{g}' \cap \lambda_1) \in \mathcal{L}_k^1$. Falls alle a_i ungleich 0 sind, gibt es mindestens ein Paar r, s mit $r \neq s$ und $a_r = a_s$. Wegen dieser Eigenschaft gilt für die Relation

$$\mathfrak{g}'' := \text{pr}_{1,p+1}((\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}') \cap \lambda_2)$$

die Beziehung $\mathcal{L}_2 \not\subseteq \mathfrak{g}'' \not\subseteq \Pi_2$. Der Arbeit $/6/$ (bzw. $/5/$, S. 126) ist zu entnehmen, daß aus einer solchen Relation eine Relation aus $\mathcal{U}_k \cup \mathcal{H}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{Z}_k$ ableitbar ist. Folglich liegt $S \cap \text{Pol} \lambda$ in einer maximalen Klasse vom

Typ \mathcal{U} , \mathcal{M} , \mathcal{L} oder \mathcal{S} , womit der oben angekündigte Widerspruch nachgewiesen wurde. Unsere Annahme $\alpha([M]) \subseteq \text{Pol}_k$ war also falsch. Die Menge $\alpha([M])$ ist folglich keine Teilmenge einer maximalen Klasse von P_k^1 . Damit gilt $\alpha([M]) = P_k^1$, woraus sich - wie schon oben erwähnt - schließlich $[M] = S$ ergibt.

Literatur

- /1/ Марченков, С. С., Деметрович, Я., и Ханнак, Л.: О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 . Методы дискретного анализа 34, 38 - 73 (1980)
- /2/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970
- /3/ Lau, D.: Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24, 79 - 96 (1978)
- /4/ Lau, D.: Die Maximalen Klassen von $\text{Pol}_k(0)$. Rostock. Math. Kolloq. 19, 29 - 47 (1982)
- /5/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationalalgebren. Berlin 1979
- /6/ Rosenberg, I. G.: Ober die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Rozprawy Československe Akad. Věd, Řada Mat. Přírod. Věd 80, 3 - 93 (1970)
- /7/ Rosenberg, I. G.: Ober die Verschiedenheit maximaler Klassen in P_k . Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 14, 431 - 483 (1969)
- /8/ Rosenberg, I. G., und Szendrei, A.: Submaximal clones with a prime order automorphism. Eingereicht bei Acta Sci. Math. (Szeged)
- /9/ Szendrei, A.: Algebras of prime cardinality with a cyclic automorphism. Univ. Montreal, Preprint CRMA-1009 (1981)

eingegangen: 05. 10. 1983

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. D. Lau
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitätsplatz 1
 DDR-2500 Rostock

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c & b & a & 1 \\ \dots & c & b & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

wobei das eingekreiste Element dasjenige mit den Indizes $n=m=0$ sein soll. Das Gleichungssystem $Ax = f$ mit $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T$, $f = (\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots)^T$ ist zur Differenzgleichung (1) für alle ganzzahligen n äquivalent, die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (3)$$

werden mit α, β, γ bezeichnet. Unter der Zusatzvoraussetzung, daß f_n und x_n linksfinit sind, d. h. ab einem gewissen n_0 für $n \leq n_0$ nur verschwindende Werte annehmen, besitzt (1) eine eindeutig bestimmte Lösung, die sich mit Hilfe der Operatorenrechnung ermitteln läßt (vgl. etwa L. Berg /1/).

Ist nämlich V der durch $Vx_n = x_{n-1}$ definierte Verschiebungsoperator, so lautet (1) in Operatorform

$$(1 + aV + bV^2 + cV^3)x_n = Vf_n,$$

und im Fall paarweise verschiedener Nullstellen von (3) folgt mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{V}{(1-\alpha V)(1-\beta V)(1-\gamma V)} = \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(1-\alpha V)} + \frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(1-\beta V)} + \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(1-\gamma V)} \quad (4)$$

und der Neumannschen Reihe

$$\frac{1}{1-\alpha V} f_n = \sum_{m=-\infty}^n \alpha^{n-m} f_m$$

die Lösungsdarstellung

$$x_n = \sum_{m=-\infty}^n h_{n-m} f_m \quad (5)$$

$$\text{mit } h_n = \frac{(\beta-\gamma)\alpha^{n+1} + (\gamma-\alpha)\beta^{n+1} + (\alpha-\beta)\gamma^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \quad (6)$$

für $n \geq 0$. Aus (4) und (6) findet man die Werte $h_{-1} = h_0 = 0$, $h_1 = 1$. Für den Fall $\alpha = \beta$ folgt durch Modifikation von (4)

dann diejenigen Elemente von (10), die zusätzlich die Anfangsbedingungen

$$g_{0m} = g_{-1m} = g_{n0} = 0 \quad (11)$$

erfüllen. Wegen $h_{-m} = 0$ für $m \geq 0$ ist $x_n = h_n$ wegen (6), (7) bzw. (8) bis auf einen konstanten Faktor die einzige Lösung der zu (1) gehörenden homogenen Differenzgleichung mit $x_0 = x_{-1} = 0$. Daher sind wegen $h_1 = 1$

$$g_{nm} = h_{n-m} - h_n \gamma^{-m} \quad (12)$$

spezielle Elemente der Form (10) mit (11), und

$$g_{nm} = h_{n-m} - h_n (\gamma^{-m} + c_1 u_{1m} + c_2 u_{2m}) \quad (13)$$

mit $u_{10} = u_{20} = 0$ ist die allgemeine Form der Elemente der Inversen von B.

Als Beispiel für die Gleichung (12) erhält man unter Benutzung der Formel (8) sowie der Festlegung $h_n = 0$ für $n < 0$ für die Elemente g_{nm} der inversen Matrix im Fall $\alpha = \beta = \gamma$ den Ausdruck

$$g_{nm} = \begin{cases} -\frac{1}{2} (n+1)n\gamma^{n-m-1} & \text{für } n < m, \\ \frac{1}{2} ((n-m+1)(n-m) - (n+1)n)\gamma^{n-m-1} & \text{für } n \geq m. \end{cases}$$

III. Der endliche Fall

Um jetzt die Inverse $D = (d_{nm})$ der Matrix C aus der Einleitung zu berechnen, bestimmen wir in dem aus (13) hervorgehenden Ansatz $d_{nm} = h_{n-m} - h_n u_m$ die Lösung u_m von (9) so, daß neben $u_0 = 1$ die Randbedingung

$$d_{N+1,m} = 0 \quad (14)$$

für $1 \leq m \leq N$ erfüllt ist. Hieraus ergibt sich im Fall

$$h_{N+1} \neq 0 \quad (15)$$

die Gleichung $u_m = \frac{h_{N+1-m}}{h_{N+1}}$, so daß wir das Ergebnis

$$d_{nm} = h_{n-m} - \frac{h_n}{h_{N+1}} h_{N+1-m} \quad (16)$$

erhalten, das in allen drei Fällen (6), (7) und (8) richtig ist.

Während in den beiden unendlichen Fällen die Inversen stets existieren, tritt im endlichen Fall die notwendige und hinreichende Existenzbedingung (15) auf. Wie man wegen $h_n = 0$ für

$n \neq 0$ sofort sieht, erfüllen die Matrixelemente d_{nm} von (16) auch die wegen der Eindeutigkeit der Inversen im endlichen Fall zu (14) äquivalenten Randbedingungen

$$d_{n,N+1} = d_{n,N+2} = 0. \quad (17)$$

Aus der Gleichung (16) erhält man analog wie zuvor für die Elemente d_{nm} der inversen Matrix beispielsweise im Fall $\alpha = \beta = \gamma$ den Ausdruck

$$d_{nm} = \frac{-\gamma^{n-m-1}}{2(N+1)(N+2)} \begin{cases} n(n+1)(N+1-m)(N+2-m) & \text{für } n < m, \\ m(N+1-n)[n(N+1-m) + (N+2)(n-m+1)] & \text{für } n \geq m. \end{cases}$$

Zur Abrundung der Betrachtungen beweisen wir über die reduzierte Wronskische Determinante

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} v_m & v_{m+1} \\ w_m & w_{m+1} \end{vmatrix} \quad (18)$$

den folgenden

Hilfssatz: Es seien v_m und w_m zwei beliebige Lösungen der Differenzgleichung (9). Dann ist $(-c)^n \Delta_n = x_n$ mit (18) eine Lösung der zu (1) gehörenden homogenen Gleichung.

Beweis: Führen wir neben (18) die Determinante

$$d_m = \begin{vmatrix} v_m & v_{m+2} \\ w_m & w_{m+2} \end{vmatrix}$$

ein, so folgt aus

$$v_{m-1} + av_m + bv_{m+1} + cv_{m+2} = 0,$$

$$w_{m-1} + aw_m + bw_{m+1} + cw_{m+2} = 0$$

nach Multiplikation der ersten Gleichung mit w_m , der zweiten Gleichung mit $-v_m$ und anschließender Addition die Beziehung

$$\Delta_{m-1} - b\Delta_m - cd_m = 0.$$

Analog ergibt sich nach Multiplikation der ersten Gleichung mit w_{m+1} , der zweiten Gleichung mit $-v_{m+1}$ und anschließender Addition $d_{m-1} + a\Delta_m - c\Delta_{m+1} = 0$. Durch Elimination von d_m folgt hieraus $-c^2\Delta_{m+1} + ac\Delta_m - b\Delta_{m-1} + \Delta_{m-2} = 0$, woraus nach Multiplikation mit $(-c)^{m-1}$ die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Dieser Hilfssatz läßt sich vorteilhaft verwenden, wenn man für die Berechnung von d_{nm} den Ansatz (13) benutzt und die Konstanten c_1 und c_2 mit Hilfe der Randbedingungen (17) bestimmen will, da die Systemdeterminante des entstehenden Gleichungssystems dann vom Typ Δ_{N+1} ist.

IV. Der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$

Anschließend soll gezeigt werden, daß sich auch umgekehrt der Fall II unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ aus dem Fall III herleiten läßt. Dazu denken wir uns die Nullstellen des Polynoms (3) in der Form

$$|\alpha| \leq |\beta| \leq |\gamma| \quad (19)$$

geordnet und stellen fest, wann bei festem m

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{h_{N+1-m}}{h_{N+1}} = \gamma^{-m} \quad (20)$$

ist und man somit das Ergebnis für die Elemente der einseitig unendlichen inversen Matrix aus der Gleichung (16) erhalten kann. Dies tritt für paarweise verschiedene Nullstellen wegen (6) ein, wenn der letzte Teil der Relation (19) zu $|\beta| < |\gamma|$ verschärft wird. Ebenfalls unter der Bedingung $|\beta| < |\gamma|$ erhält man im Fall $\alpha = \beta$ die Gleichung (20) aus (7), und auch im Fall $\alpha \neq \beta = \gamma$ folgt (20) aus Gleichung (7), wenn man dort α und γ vertauscht. Für eine dreifache Nullstelle des Polynoms (3) folgt (20) schließlich aus Formel (8).

Literatur

- /1/ Berg, L.: Operatorenrechnung I. Algebraische Methoden. Berlin 1972
- /2/ Fort, T.: Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain. Oxford 1948
- /3/ Jagnow, I.: Zur Invertierung tetradiagonaler Toeplitzischer Matrizen. Diplomarbeit, Wilhelm-Pieck-Universität, Rostock 1984

eingegangen: 02. 01. 1984

Anschrift des Verfassers:

stud. math.-phys. I, Jagnow
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

sierung des zu A gehörenden Stabilitätspolynoms

$$P(\lambda) = a_p \lambda^{p+q} + \dots + a_0 \lambda^q + \dots + a_{1-q} \lambda + a_{-q} \quad (2)$$

herangezogen werden, sofern die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,n-1} = b_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,n+j} = c_j \quad (3)$$

für $i = 1, \dots, q$ und $j = 0, \dots, p-1$ existieren, denn es gilt mit diesen Grenzwerten

$$P(\lambda) = (\lambda^q + b_1 \lambda^{q-1} + \dots + b_q)(a_p \lambda^p + c_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + c_0). \quad (4)$$

In /1/ wurde behauptet, daß die Grenzwerte (3) unter folgenden beiden Voraussetzungen existieren:

I. Die Matrizen (1) sind für alle $N \geq 1$ regulär.

II. Die $p+q$ linear unabhängigen Lösungen $z_{ni} = n^{\kappa} \lambda_{\mu}^n$ mit $\kappa = \kappa_i$, $\mu = \mu_i$ für $i = 1, \dots, p+q$ der zu (2) gehörenden homogenen Differenzgleichung

$$a_p z_{n+p} + \dots + a_0 z_n + \dots + a_{-q} z_{n-q} = 0 \quad (5)$$

lassen sich in q Minimallösungen x_{ni} , $i = 1, \dots, q$, und in p Maximallösungen y_{nj} , $j = 1, \dots, p$, einteilen mit

$$x_{ni} = o(y_{nj}) \quad (6)$$

für $n \rightarrow \infty$ und alle vorkommenden i, j . Die λ_{μ} sind dabei die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms (2) und die nichtnegativen ganzen Zahlen κ kleiner als die zugehörigen Vielfachheiten k_{μ} .

Der Beweis für diese Behauptung wurde in /1/ jedoch nur skizziert und enthält eine Lücke, die im folgenden durch Verschärfung der Voraussetzung II geschlossen werden soll. Anschließend wird (3) unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen.

1. Der spezielle Grenzwertsatz

Wir lassen jetzt den Index μ der Nullstellen λ_{μ} des Polynoms (2) von $-r$ bis s laufen und denken uns diese Nullstellen folgendermaßen geordnet:

$$|\lambda_{-r}| \leq \dots \leq |\lambda_0| < |\lambda_1| = \dots = |\lambda_t| < |\lambda_{t+1}| \leq \dots \leq |\lambda_s| \quad (7)$$

mit $-r \leq 1 \leq t \leq s$. Die zugehörigen Vielfachheiten der t betragsmäßig gleichen Nullstellen seien ebenfalls der Größe nach geordnet:

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t. \quad (8)$$

III. Für drei natürliche Zahlen $\gamma, k, \tau+1$ mit $\tau \leq t$ und $\gamma \leq k$ sei $k_{\tau+1} = \dots = k_t = k$ und

$$q = k_{-r} + \dots + k_1 + \dots + k_\tau + \gamma(t-\tau) \quad (9)$$

sowie $k_\tau + k - 1 \leq 2\gamma$, falls $\tau > 0$ ist.

Satz 1: Unter den Voraussetzungen I und III existieren die Grenzwerte (3), und die auf der rechten Seite von (4) auftretenden Polynome lauten mit $b_0 = 1$ und $c_p = a_p$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^q b_i \lambda^{q-1} &= \prod_{i=-r}^{\tau} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \prod_{j=\tau+1}^t (\lambda - \lambda_j)^{\gamma}, \\ \sum_{j=0}^p c_j \lambda^j &= \prod_{j=\tau+1}^t (\lambda - \lambda_j)^{k-\gamma} \prod_{i=t+1}^s (\lambda - \lambda_i)^{k_i}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Beweis: Zunächst erkennt man, daß die Voraussetzung II aus III folgt, wenn man zu den Minimallösungen x_{ni} alle Lösungen $n^k \lambda^n$ mit $\mu \leq \tau$ sowie alle Lösungen mit $\tau < \mu \leq t$ und $k < \gamma$ zählt. Aus I folgt die Existenz der LR-Aufspaltung von A.

Wir betrachten jetzt an Stelle der Maximallösungen y_{nj} für $j = 1, \dots, p$ die Linearkombination

$$\eta_{nj} = y_{nj} + \sum_{i=1}^q u_{ji} x_{ni} \quad (11)$$

und bestimmen die u_{ji} so, daß die Anfangsbedingungen

$$\eta_{0j} = \eta_{-1,j} = \dots = \eta_{1-q,j} = 0 \quad (12)$$

erfüllt sind. Dies ist in eindeutiger Weise möglich, da die x_{ni} als Fundamentalsystem einer Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten aufgefaßt werden können. Die η_{nj} sind dann nicht nur Lösungen von (5), sondern gleichzeitig auch Lösungen der zur Matrix R gehörenden Differenzgleichung mit variablen

Hieraus kann man das allgemeine Bildungsgesetz der Elemente sowie ihre Konvergenz im Sinne von (3) gegen

$$b_1 = -1, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = 0$$

ablesen. Die Voraussetzung III ist jedoch wegen $t = 2$ für keinen Wert von τ erfüllt, woraus hervorgeht, daß Satz 1 noch verallgemeinerungsfähig ist.

Wie man nachprüfen kann, ist die Voraussetzung III jedoch für die transponierte Matrix A^T erfüllt, so daß man von $A^T = LR$ über $A = R^T L^T$ nach neuer Normierung von R^T und L^T doch noch unser Beispiel mit Hilfe von Satz 1 begründen kann.

2. Der allgemeine Grenzwertsatz

Die Voraussetzung III soll jetzt durch eine allgemeinere ersetzt werden, die bereits in /2/ bei der asymptotischen Untersuchung der zu (1) inversen Matrizen auftrat.

IV. Die quadratische Form

$$Q = \sum_{i=1}^t (k_i - B_i) B_i \quad (15)$$

möge für ganzzahlige Veränderliche B_1, \dots, B_t unter den Nebenbedingungen $0 \leq B_i \leq k_i$ für $1 \leq i \leq t$ und

$$B_1 + \dots + B_t = 1 \quad (16)$$

an der Stelle $B_1 = \gamma_1, \dots, B_t = \gamma_t$ ein strenges Maximum besitzen.

Die Lösung dieses ganzzahligen Optimierungsproblems ist in geschlossener Form möglich, man findet sie in /2/. Sie soll hier aber nicht wiedergegeben werden, da sie zu viel Platz erfordert.

Satz 2: Unter der Voraussetzung I sowie der Voraussetzung IV bezüglich der Vielfachheiten der Nullstellen von (2) mit (7) und

$$1 = p - k_{t+1} - \dots - k_s \quad (17)$$

existieren die Grenzwerte (3), und die auf der rechten Seite von (4) auftretenden Polynome lauten mit $b_0 = 1$ und $c_p = a_p$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^q b_i \lambda^{q-1} &= \prod_{i=-r}^0 (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \prod_{i=1}^t (\lambda - \lambda_i)^{k_i - \gamma_i}, \\ \sum_{j=0}^p c_j \lambda^j &= \prod_{j=1}^t (\lambda - \lambda_j)^{\gamma_j} \prod_{i=t+1}^s (\lambda - \lambda_i)^{k_i}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Beweis: Zunächst gehen wir wie beim Beweis von Satz 1 vor, wobei die Lösungen $n^k \lambda_\mu^n$ von (5) im Fall $\mu \leq 0$ sowie im Fall $1 \leq \mu \leq t$ und $\kappa < k_\mu - \gamma_\mu$ mit x_{ni} und im Fall $\mu > t$ sowie im Fall $1 \leq \mu \leq t$ und $k_\mu - \gamma_\mu \leq \kappa < k_\mu$ mit y_{nj} bezeichnet werden. Wegen (16) und (17) gibt es wieder q linear unabhängige Lösungen x_{ni} und p linear unabhängige Lösungen y_{nj} , wobei allerdings (6) nicht mehr erfüllt sein muß.

Wir setzen jetzt den Ansatz (11) mit (12) in (13) ein und zerlegen anschließend die in (13) auftretende Determinante in die Summe von $(q+1)p$ Determinanten, die sich von der erstgenannten Determinante bis auf konstante Faktoren nur dadurch unterscheiden, daß die η_{nj} durch y_{nj} oder gewisse x_{ni} ersetzt sind. Unter den letztgenannten Determinanten ermitteln wir jetzt diejenige mit der maximalen Größenordnung für $n \rightarrow \infty$. Diese Determinante muß wegen (7) alle Lösungen $n^k \lambda_\mu^n$ mit $\mu > t$ enthalten, während die Lösungen mit $\mu \leq 0$ nicht auftreten können. Von den Lösungen mit $1 \leq \mu \leq t$ mögen β_μ mit $0 \leq \beta_\mu \leq k_\mu$ vorkommen, wobei (16) gilt wegen (17). Die Ordnung wird am größten, wenn die β_μ Lösungen bei festem μ die folgenden sind:

$$n^{\mu - \beta_\mu} \lambda_\mu^n, \dots, n^{\mu - 1} \lambda_\mu^n.$$

Nach der Bildung geeigneter Linearkombinationen der Spalten der Determinanten ziehen wir aus ihnen den Faktor

$$n^Q (\lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_t^{\beta_t} \lambda_{t+1}^{k_{t+1}} \dots \lambda_s^{k_s})^n$$

mit (15) heraus. Auf Grund der Voraussetzung IV hat er für $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_t = \gamma_t$ eine maximale Ordnung. Führen wir anschließend in den p letzten Spalten der Determinanten den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so konvergieren alle Determinanten bis auf diejenige mit der maximalen Ordnung gegen Null, und (13) geht in

$$\begin{vmatrix} \eta_n & z_{o1} & \dots & z_{op} \\ \eta_{n+1} & z_{11} & \dots & z_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{n+p} & z_{p1} & \dots & z_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

über, wobei die z_{nj} für $t < \mu \leq s$ die y_{nj} und für $1 \leq \mu \leq t$ die $n^k \lambda_\mu^n$ mit $0 \leq k < \gamma_\mu$ sind. Diese Grenzgleichung ist aber eine Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom bis auf einen konstanten Faktor gerade das zweite Polynom in (18) ist. Damit ist die Behauptung (3) bezüglich der c_{nm} bewiesen. Die Richtigkeit der übrigen Behauptungen erkennt man wieder wie in /1/.

Beispiele: 1^o. Zunächst wollen wir zeigen, daß die Voraussetzung IV eine Abschwächung von III ist und somit Satz 1 ein spezielles Beispiel zu Satz 2. Aus (9) und (17) folgt im vorliegenden Fall

$$1 = (k - \gamma)(t - \tau). \quad (19)$$

Die quadratische Form Q aus (15) läßt sich unter der Nebenbedingung (16) in der Form

$$Q = \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2}(k_i + k) - \gamma \right)^2 + (2\gamma - k)1 - \sum_{i=1}^t \left(B_i - \frac{1}{2}(k_i + k) + \gamma \right)^2$$

schreiben. Unter der Voraussetzung III wird Q offenbar für

$$B_i = k - \gamma \text{ im Fall } i > \tau \text{ und } B_i = 0 \text{ im Fall } i \leq \tau$$

maximal, da $\frac{1}{2}(k_i + k) - \gamma \leq \frac{1}{2}(k_\tau + k) - \gamma \leq \frac{1}{2}$ ist für $i \leq \tau$ und die

B_i ganze Zahlen mit $0 \leq B_i \leq k_i$ sind. Im Fall $\frac{1}{2}(k_j + k) - \gamma = \frac{1}{2}$

mit $j \leq \tau$ wird zwar der gleiche Maximalwert angenommen, wenn man $B_j = 1$ wählt, da aber

$$\sum_{i=\tau+1}^t B_i = (k - \gamma)(t - \tau)$$

wegen (19) bereits gleich 1 ist, wäre dann nicht mehr die Nebenbedingung (16) erfüllt.

2^o. Sind die Voraussetzungen von Satz 2 für eine gegebene Matrix A der Form (1) erfüllt, so wollen wir jetzt zeigen, daß sie dann auch für die zugehörige transponierte Matrix A^T er-

füllt sind. Dies bedeutet insbesondere, daß sich unser allererstes Beispiel direkt dem Satz 2 zuordnen läßt.

Zum Beweis unserer Behauptung beachten wir zunächst, daß sich beim Übergang von A zu A^T die Zahlen p und q vertauschen und die Nullstellen des Stabilitätspolynoms (2) in die reziproken Werte übergehen. Ersetzen wir jetzt die Veränderlichen B_1 in der Voraussetzung IV durch $k_1 - \alpha_1$, so bleibt Q unverändert, nur mit α_1 an Stelle von B_1 , (16) geht in

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_t = \sum_{i=1}^t k_i - 1 \quad (20)$$

über und (17) in

$$\sum_{i=1}^t k_i - 1 = q - k_0 - \dots - k_r.$$

Hieraus ist aber ersichtlich, daß Q mit den ganzzahligen Veränderlichen α_1 unter den Nebenbedingungen $0 \leq \alpha_1 \leq k_1$ und (20) für $\alpha_1 = k_1 - \gamma_1$ ein strenges Maximum annimmt.

Literatur

- /1/ Berg, L.: Numerische Faktorisierung von Polynomen. Z. Angew. Math. Mech. 58, 245 - 249 (1978)
- /2/ Berg, L.: Asymptotische Abschätzung der Inversen Toeplitz-scher Bandmatrizen im Grenzfall. Zeitschr. Analysis und ihre Anwendungen (im Druck)
- /3/ Faddejew, D. K., und Faddejewa, W. N.: Numerische Methoden der linearen Algebra. Berlin 1978

eingegangen: 31. 10 1983

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. L. Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Gandikota L. N. Rao

Certain Distribution Algebras by Matrix Representation1. Introduction

In 1975 L. Berg first pioneered the work on construction of distribution algebras while investigating the problem of the existence of the square of Dirac's δ distribution in /2/. In a series of papers, which are listed in /4/, he developed the theory and studied differential algebras generated by Heaviside's jump function h with $\delta = h'$ and in which each element has a derivative, where the differentiation is a linear operation satisfying the product rule

$$(fg)' = f'g + fg'$$

In /1/ a distribution algebra was defined as a differential algebra having an element h with $\delta = h' \neq 0$ and

$$h^2 = h. \tag{1}$$

There the construction of such distribution algebras was shown by means of matrix representations, since every algebra of $N \times N$ -matrices $f = (f_{ik})$, $i, k = 1, \dots, N$, becomes a differential algebra defining

$$f' = (f_{1,k-1} - f_{i+1,k})$$

with $f_{10} = f_{N+1,k} = 0$. Such a matrix algebra is also a distribution algebra if it contains a diagonal matrix the elements of which in the principal diagonal are partly 1 and partly 0. In /1/ also representations of distribution algebras by infinite matrices were developed, and a good survey on this theory was given by Pho That Shay /5/.

The author is very grateful to Professor Berg for suggesting the problem and for several helpful discussions. Thanks are also expressed to Professor Engel for his constant encouragement. The author is indebted very much to Wilhelm-Pieck-University for its kind hospitality and treatment.

In /3/ the property (1) was generalized to

$$2h^3 = 3h^2 - h \quad (2)$$

with the result that

$$\delta = 3h\delta + 3\delta h - 2h^2\delta - 2h\delta h - 2\delta h^2. \quad (3)$$

To simplify (3) in /3/ differential algebras were considered with the commuting property

$$h\delta = x\delta + y\delta h + z\delta h^2 \quad (4)$$

for some numbers x, y, z . From (4) we get

$$h^2\delta = \delta(x^2 + 2xyh + (y^2 + 2xz)h^2 + 2yzh^3 + z^2h^4)$$

and by using (2) and the relation $4h^4 = 7h^2 - 3h$, which is a consequence of (2), we obtain as in /3/

$$h^2\delta = x^2\delta + (2xy - yz - \frac{3}{4}z^2)\delta h + (y^2 + \frac{7}{4}z^2 + 2xz + 3yz)\delta h^2. \quad (5)$$

The purpose of this paper is to construct all possible types of differential algebras with a cubic element satisfying (2), (4) and some additional assumptions. Further we will verify also that our results coincide with the six possibilities to represent h as a 3×3 diagonal matrix with the diagonal elements $1, \frac{1}{2}, 0$.

2. Some assumptions, notation, and terminology

The same terminology and notation from /1/, /2/ and /3/ will be used. We will construct differential algebras with (2), (4) and the axiom

$$\delta h^2 = a\delta + b\delta h \quad (6)$$

where a, b are two numbers. Then (4) reduces to relation

$$h\delta = x\delta + y\delta h \quad (7)$$

with new constants x and y , and (5) in view of (6) obtains the form

$$h^2\delta = \alpha\delta + \beta h\delta. \quad (8)$$

Further $y \neq 0$ is assumed in (7), since $y = 0$ leads to the trivial case $\delta^2 = 0$. The inequality $y \neq 0$ implies that $\delta, h\delta$ are linearly independent, and so are $\delta, \delta h$. Now with these assumptions we construct all possible types of differential algebras.

3. Construction of differential algebras

First step: Determination of a and b . From (6) we have the

equation $\delta h^3 = a\delta h + b\delta h^2$. Using (2) we have

$$(2a+1)\delta h + (2b-3)\delta h^2 = 0 \text{ or}$$

$$(2a+1+2b^2-3b)\delta h + a(2b-3)\delta = 0.$$

By the linear independence of $\delta h, \delta$ we have the three possibilities

$$a = 0 \text{ with } b = 1 \text{ or } \frac{1}{2}, \text{ and } b = \frac{3}{2} \text{ with } a = -\frac{1}{2}.$$

Second step: Determination of α and β . From (8) we find similarly

$$(2\alpha+1+2\beta^2-3\beta)h\delta + \alpha(2\beta-3)\delta = 0$$

and from this the three possibilities

$$\alpha = 0 \text{ with } \beta = 1 \text{ or } \frac{1}{2}, \text{ and } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ with } \beta = \frac{3}{2}.$$

Third step: Determination of x and y . To find equations for determining x and y we first calculate $h\delta h$ from (7) in different ways and second eliminate $h\delta h, h^2\delta$ and δh^2 by means of (6),

(8). Hence

$$(x+yb)\delta h + (ay - \frac{\alpha}{y})\delta + (\frac{x}{y} - \frac{\beta}{y})h\delta = 0.$$

Comparing this equation with (7) we find

$$x = \frac{1}{2}(\beta - yb) \tag{9}$$

and an additional nonlinear equation. Eliminating again $h\delta h,$

$h^2\delta$ and δh^2 from (3) and $h\delta h = x\delta h + y\delta h^2$ we find using (9)

$$y = \frac{3-2b-\beta}{b+2\beta-3} \text{ and } y = \frac{2+4\alpha+4a+2\beta^2-3\beta}{2\beta\beta-3\beta-4a}. \tag{10}$$

By means of (9) and (10) we will now set up a table with all nine possibilities for the values of $a, b, \beta, \alpha, x, y$.

Possibility	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
b	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
B	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
x	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
y	-1	-2	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	-2	-1

In order to prove the existence of differential algebras according to these nine possible cases we consider the diagonal matrices

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad h_5 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad h_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$h_7 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad h_8 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad h_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 0 & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

with the derivatives explained in the introduction

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ & 0 & \frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \\ & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_6 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\delta_7 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ & 0 & \frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_9 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

respectively. All absent entries are zero. Obviously, all elements h_j with $1 \leq j \leq 9$ satisfy (2), and it can be checked that for every fixed j the elements h_j and the corresponding derivatives δ_j satisfy also the relations (6), (7) and (8) with the values of the coefficients standing in the i -th column of the foregoing table. Besides (2), the elements h_1 , h_5 and h_9 satisfy already the quadratic equations

$$2h_1^2 = 3h_1 - 1, \quad h_5^2 = h_5, \quad 2h_9^2 = h_9.$$

This means that h_1 and h_9 are not relevant for Heaviside's jump function, whereas h_5 concerns the case (1) originally discussed by L. Berg in /1/ and /2/.

Summarizing the results we have found the following

Theorem 1: There exist six non trivial types of differential algebras with (2) as an irreducible equation and the further equations (6), (7). The elements $h_2, h_3, h_4, h_6, h_7, h_8$, respectively, generate such differential algebras.

4. Some properties of the six types of differential algebras

Concerning the six differential algebras of Theorem 1 we formulate a

Lemma: There exist three constants c_1, c_2 , and c_3 in the six types of differential algebras with (2), (6), (7) such that

$$\delta h \delta = c_1 \delta^2, \tag{11}$$

$$h \delta^2 = c_2 \delta^2, \tag{12}$$

$$\delta^2 h = c_3 \delta^2. \tag{13}$$

Proof: Multiplying (8) by δ from left and multiplying (6) by δ from right we get $(\beta-b)\delta h \delta + (\alpha-a)\delta^2 = 0$. Hence we have proved (11) with

$$c_1 = \frac{\alpha - a}{\beta - b}.$$

Now multiplying (7) by δ from right and using (11) we get $h\delta^2 = (x + yc_1)\delta^2$, and therefore (12) with

$$c_2 = x + yc_1.$$

Multiplying (7) by δ from left we have similarly

$(c_1 - x)\delta^2 = y\delta^2 h$, i.e. (13) with

$$c_3 = \frac{c_1 - x}{y}.$$

We now give a table indicating the values of the three constants c_1 , c_2 , and c_3 in the six cases of Theorem 1.

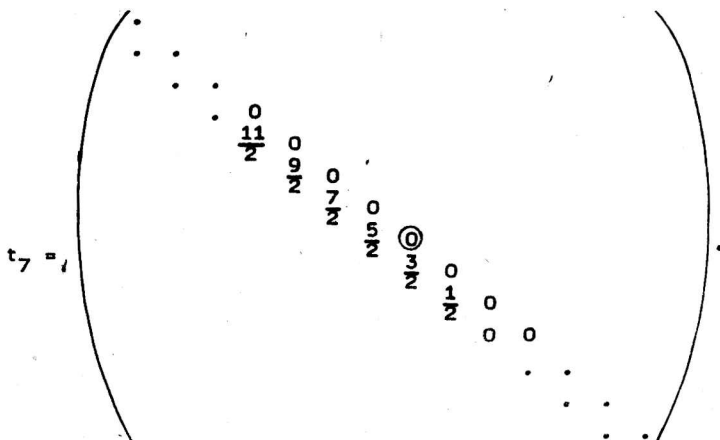
	h_2	h_3	h_4	h_6	h_7	h_8
c_1	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0
c_2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
c_3	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$

From these values of the three constants we get an interesting property in the

Theorem 2: The constants c_2 , c_1 , c_3 in each possibility form the diagonal elements in the corresponding matrices representing h , namely

$$h_j = \begin{pmatrix} c_2 & & \\ & c_1 & \\ & & c_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

for $j = 2, 3, 4, 6, 7, 8$.



References

- /1/ Berg, L.: Representations for distribution algebras. Z. Angew. Math. Mech. 56, 177 - 181 (1976)
- /2/ Berg, L.: Noncommutative operations with distributions. In: Dimovski, I. (Ed.): Generalized Functions and Operational Calculus. Proceedings of the Conference, Varna, Sept. 29 - Oct. 6, 1975, pp.27 - 34. Sofia 1979
- /3/ Berg, L.: Differentiationsalgebren mit einem kubischen Element. Zeitschr. Analysis und ihre Anwendungen 1 (4), 25 - 30 (1982)
- /4/ Berg, L.: Commutative differential algebras with an algebraic element. Studia Math. (in print)
- /5/ Pho Thet Shay: Distribution Algebra of Infinite Matrices and Formal Sums. M. Sc. Thesis, Arts and Science University of Rangoon 1982

received: 04. 01. 1984

Present address:

Prof. Dr. G. L. N. Rao
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitätsplatz 1
 DDR-2500 Rostock

Permanent address:

Prof. Dr. G. L. N. Rao
 Department of Mathematics
 Jamshedpur Cooperative
 College Ranchi University
 Jamshedpur 831001
 India

Andrie Buikie

Aufgabenstellung und Lösung einer Klasse von Problemen der mathematischen Physik mit nichtklassischen Zusatzbedingungen

In den Anwendungen spielen solche Probleme der mathematischen Physik eine wichtige Rolle, die Prozesse in inhomogenen Medien beschreiben. Das führt notwendigerweise zu partiellen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Besonders häufig tritt dabei der Fall stückweise stetiger (oder stückweise konstanter) Koeffizienten innerhalb ihres Definitionsbereiches auf.

Auf solche Situationen trifft man oft, etwa wenn sich in verschiedenen Teilbereichen die charakteristischen Werte der Koeffizienten stark voneinander unterscheiden oder wenn das geometrische Maß eines (oder mehrerer) der Teilbereiche in irgendeiner Richtung klein ist im Vergleich zum Maß der anderen Teilbereiche. Eine direkte Anwendung der traditionellen numerischen Algorithmen auf das eingangs erwähnte Problem ist gewöhnlich nicht von Nutzen: Sie führt entweder zur starken Steigerung des Umfangs der Berechnungen oder zu starkem Verlust an Genauigkeit. Es ist zweckmäßig, zuallererst die Problemstellung zu modifizieren, was realisiert wird durch eine auf spezielle Art und Weise über einigen Teilbereichen durchgeführte Mittelwertbildung unter Auenutzung der Rand- und Koppelungsbedingungen auf den Rändern der Teilgebiete. Das führt in der modifizierten Problemstellung zum Auftreten zusätzlicher Rand- bzw. Koppelungsbedingungen speziellen Typs, welche die höheren Ableitungen der Differentialgleichung enthalten. (In den Zusatzbedingungen können ferner Ableitungen noch höherer Ordnung auftreten.) Diese Bedingungen nennen wir im Unterschied zu den Randbedingungen 1., 2. und 3. Art und zu gewöhnlichen Koppelungsbedingungen "nichtklassische Zusatzbedingungen".

Bei der Auswahl aus dem reichhaltigen Literaturangebot über solche Probleme der mathematischen Physik begnügen wir uns mit dem Hinweis auf die anachainend ersten Arbeiten zu diesem Problem: A. A. Semarakij /1/ (zur Wärmeleitungsgleichung

mit einer Raumkoordinate), A. N. Tichonov /2/ (Über gewöhnliche Differentialgleichungen) sowie die Monographie /3/, worin konkrete Probleme der Wärmeleitung mit zwei Raumkoordinaten betrachtet werden.

I. Wir gehen nun zur Behandlung einiger Probleme mit nichtklassischen Zusatzbedingungen über, wobei wir uns auf solche der Ebene beschränken wollen. Sei das einfach zusammenhängende (beschränkte oder unbeschränkte) Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Rand $\Gamma = \bar{G} \setminus G$ Vereinigung zweier Teilgebiete, $\bar{G} = \bar{G}_0 \cup \bar{G}_1$, welche die Berührungslinie $\Gamma_{01} = \bar{G}_0 \cap \bar{G}_1$ haben. Der Rand Γ hat dann die Form $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, wobei jedes der Γ_i für $i \in \{0,1\}$ ein Teil des gesamten Randes des Teilgebietes G_i ist.

Möge die auf \bar{G} definierte Funktion $u(x,y)$ zusammenfallen mit u^0 auf \bar{G}_0 und mit u^1 auf \bar{G}_1 , wobei jedes $u^i(x,y)$ der Differentialgleichung

$$L_1 u^i(x,y) = -f^i(x,y), \quad (x,y) \in G_i, \quad i \in \{0,1\} \quad (1)$$

genügt. Wir setzen voraus, daß die L_1 Differentialoperatoren 2. Ordnung elliptischen Typs in Divergenzform sind:

$$L_1 u^i = \text{div} (k^i \text{grad } u^i). \quad (2)$$

Wir nehmen ferner an, daß jede der Funktionen $k^i(x,y)$ stetig in \bar{G}_i ist, daß aber ihre Werte in den Punkten des Randes Γ_{01} nicht übereinstimmen.

Bekanntlich müssen dann auf Γ_{01} die Koppelungsbedingungen

$$u^0 = u^1, \quad k^0 \partial_n u^0 = k^1 \partial_n u^1 \quad (3)$$

erfüllt sein, wobei $\partial_n u$ die Ableitung in Richtung der Normalen zu Γ_{01} ist.

Zur Vervollständigung müssen wir zu (1) und (3) noch die Randbedingung

$$\ell_1 u^i(x,y) = g^i(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_i, \quad i \in \{0,1\} \quad (4)$$

hinzufügen. Hierbei ist ℓ_1 ein Randdifferentialoperator einer der drei Grundtypen; d. h., ℓ_1 ist entweder die Identität oder

Ableitung in Richtung der Normalen zu Γ_1 oder eine Linearkombination dieser beiden.

Treffen wir nun für den Übergang zur nichtklassischen Problemstellung die prinzipiellen Voraussetzungen:

1. Nach glatter Variablentransformation $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ gehe das Teilgebiet \bar{G}_0 homöomorph über in das Rechteck

$$\bar{D}^0 = \{(\xi, \eta) \mid \xi \in [-\delta, 0], \eta \in [\eta_1, \eta_2]\}. \quad (5)$$

\bar{D}^0 habe in ξ -Richtung mindestens die Größenordnung 1, $\delta = o(1)$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß (2) und (3) in den neuen Variablen die Form

$$L_1 u^1 = \partial_\xi (k_1^1 \partial_\xi u^1) + \partial_\eta (k_2^1 \partial_\eta u^1). \quad (6)$$

bzw.

$$u^0|_{\xi=-\delta} = u^1|_{\xi=+\delta}, \quad k_1^0 \partial_\xi u^0|_{\xi=-\delta} = k_1^1 \partial_\xi u^1|_{\xi=+\delta} \quad (7)$$

besitzen.

2. Für jedes η besteht die folgende Beziehung zwischen den Werten der Koeffizienten k_1^1 :

$$\min_{\xi} k_1^0 \geq \max_{\xi} k_1^1. \quad (8)$$

Wir weisen darauf hin, daß die Forderung bezüglich δ in (5) abgeschwächt werden kann, wenn wir anstelle von (8) die strengere Ungleichung

$$\min_{\xi} k_1^0 \gg \max_{\xi} k_1^1 \quad (8_1)$$

verwenden: Statt $\delta = o(1)$ reicht dann $\delta = O(1)$ aus. Die Funktion $u^0(\xi, \eta)$ werde jetzt über die Höhe des Rechtecks \bar{D}^0 (in Richtung der Koordinate ξ) gemittelt, d. h., wir führen die neue Funktion

$$u_0(\eta) = \delta^{-1} \int_{-\delta}^0 u^0(\xi, \eta) d\xi \quad (9)$$

ein und integrieren Gleichung (6) für $i = 0$ unter Berücksichtigung von (7). Damit ergibt sich

$$\delta^{-1} (k_1^1 \partial_\xi u^1|_{\xi=+\delta} - k_1^0 \partial_\xi u^0|_{\xi=-\delta}) + \partial_\eta (k_{20} \partial_\eta u_0) = -f_0, \quad (10)$$

wobei $f_0(\eta)$ und $k_{20}(\eta)$ gemäß (9) aus $f^0(\xi, \eta)$ und $k_2^0(\xi, \eta)$ durch Mittelung zu berechnen sind. Für einen von ξ unabhängigen Koeffizienten k_2^0 wird (10) zur Identität. Hängt der Koeffizient k_2^0 dagegen von der Variablen ξ ab, so wird die Mittelwertbildung des zweiten Gliedes der rechten Seite von (6) auf folgende Weise durchgeführt:

$$\begin{aligned} \delta^{-1} \int_{-\delta}^0 \partial_\eta (k_2^0 \partial_\eta u^0) d\xi &= \partial_\eta \delta^{-1} \int_{-\delta}^0 [\partial_\eta (k_2^0 u^0) - u^0 \partial_\eta k_2^0] d\xi \\ &= \partial_\eta [\partial_\eta (u^0|_{\xi=\xi^*} k_{20} - u^0|_{\xi=\xi^{**}} k_{20})] \approx \partial_\eta [\partial_\eta (u_0 k_{20}) - u_0 \partial_\eta k_{20}] \\ &= \partial_\eta (k_{20} \partial_\eta u_0). \end{aligned}$$

Wir haben demnach notwendigerweise vorauszusetzen, daß $k_2^0(\xi, \eta)$ stetig differenzierbar von η abhängt; k_2^0 und $\partial_\eta k_2^0$ sollen bei festem η ihr Vorzeichen in $[-\delta, 0]$ nicht wechseln, ferner sollen $u^0(\xi^*, \eta)$ und $u^0(\xi^{**}, \eta)$ näherungsweise mit $u_0(\eta)$ zusammenfallen.

Bemerkung 1: Offenbar ergibt die Betrachtung parabolischer Differentialgleichungen, bei denen anstelle der Funktion $u^0(\xi, \eta)$ die Funktion $u^0(\xi, \eta, \tau)$ steht und der Operator L_0 noch die Ableitung nach der Zeitvariablen τ enthält, keine prinzipiell neuen Aspekte. Darum werden wir uns mit diesem Fall nicht gesondert befassen.

II. Die konkrete Gestalt der nichtklassischen Zusatzbedingungen wird wesentlich durch die Randbedingungen des Ausgangsproblems für $\xi = -\delta$ bestimmt. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall, der Randbedingung 2. Art:

$$-k_1^0 \partial_\xi u^0 |_{\xi = -\delta} = \varphi^0(\eta). \quad (11)$$

Zu vermerken ist, daß in der Literatur hauptsächlich die homogene Randbedingung (11) ($\varphi^0 = 0$) betrachtet wird. Insbesondere wurde sie in /1/ behandelt, und die gesamte Monographie /3/ beschränkt sich praktisch auf diesen Fall. Wenn für diese homoge-

ne Randbedingung die Beziehung (8₁) erfüllt ist, kann man natürlich davon ausgehen, daß $u^0(\xi, \eta)$ für jedes feste η konstant wird. Dann folgt einerseits aus (9), daß

$$u^0(\xi, \eta) = u_0(\eta) \quad (12)$$

gilt, und andererseits erhalten wir aus der ersten Bedingung von (7), daß

$$u^0(\xi, \eta) = u^1(+0, \eta) \quad (13)$$

gilt.

Aus (12) und (13) folgt, daß man $u_0(\eta)$ auffassen kann als Grenzwert

$$u_0(\eta) = \lim_{\xi \rightarrow +0} u^1(\xi, \eta)$$

der in \bar{G}_1 stetigen Funktion $u^1(\xi, \eta)$, welche sowohl die Gleichung (1) in G_1 als auch die sich aus (10) ergebenden nichtklassischen Randbedingungen

$$\tilde{L}^{(2)} u^1 \equiv \partial_\eta(k_{20} \partial_\eta u^1) + \delta^{-1} k_1^1 \partial_\xi u^1 = -f_0 \quad (14)$$

auf dem Rand Γ_{01} (für $\xi = 0$) und die gewöhnlichen Randbedingungen (4) auf dem restlichen Teil des Randes des Gebietes G_1 erfüllt.

Wie schon zu Beginn dieser Arbeit bemerkt, ist in /1/ und /3/ der Fall der instationären Gleichung mit konstanten Koeffizienten (genauer mit in jedem Teilgebiet konstanten Koeffizienten) behandelt worden. Gleichung (14) hätte dann die Form

$$\partial_\eta(k_{20} \partial_\eta u^1) + \delta^{-1} k_1^1 \partial_\xi u^1 = \partial_\tau u^1 - f_0.$$

Ausgehend von ihrer physikalischen Bedeutung wurde in der Arbeit /1/ diese Gleichung mit "Bedingung der konzentrierten Wärmekapazität" bezeichnet. Sie hat sich in der Fachliteratur weitgehend unter diesem Namen eingebürgert. Unter den gleichen Voraussetzungen (12) und (13) erscheint bei Betrachtung der inhomogenen Randbedingung (11) auf der rechten Seite von (14) anstelle von $-f_0$ der Term $-(f_0 + \delta^{-1} \varphi^0)$. Die Annahme, daß (12) und (13) gelten, d. h., daß u^0 konstant bezüglich ξ ist, kann in vielen Fällen zu streng sein: Sie ist exakt nur im Grenzfall

erfüllt, d. h. für $k_1^0 \rightarrow \infty$. Deshalb ist es notwendig, für u^0 die Abhängigkeit von ξ einzubeziehen. Die einfachste Methode besteht darin, u^0 für jeden festen Wert η durch eine lineare Funktion zu approximieren. Die Parameter dieser Geraden lassen sich leicht mit Hilfe von (9) und (11) feststellen. Als Ergebnis erhalten wir wieder (14), nur mit anderer rechter Seite:

$$\tilde{I}^{(2)} u^1 = -\{f_0 + \delta^{-1} \varphi^0 + 2^{-1} \delta \partial_\eta [k_{20} \partial_\eta (\varphi^0 / k_{10})]\}. \quad (15)$$

Man kann in der Genauigkeit noch einen Schritt weiter gehen und u^0 entlang der Koordinate ξ mit Hilfe einer Parabel approximieren. Dann erhalten wir die nichtklassische Randbedingung bei $\xi = 0$ in der Form zweier Gleichungen:

$$\partial_\eta (k_{20} \partial_\eta u_0) + \delta^{-1} k_1^1 \partial_\xi u^1 = -(f_0 + \delta^{-1} \varphi^0), \quad (16)$$

$$k_1^1 \partial_\xi u^1 = k_1^0 [3\delta^{-1} (u^1 - u_0) + 2^{-1} \varphi^0]. \quad (17)$$

III. Wir betrachten jetzt längs $\xi = -\delta$ Randbedingungen 1. Art:

$$u^0|_{\xi=-\delta} = \varphi^0(\eta). \quad (18)$$

Die Annahme, daß u^0 konstant bezüglich ξ ist, führt zur klassischen Randbedingung 2. Art:

$$\delta^{-1} k_1^1 \partial_\xi u^1 = -[f_0 + \partial_\eta (k_{20} \partial_\eta \varphi^0)].$$

Darum beginnen wir mit der Approximation von u^0 mit Hilfe einer bezüglich ξ linearen Funktion. Die Berücksichtigung der offensichtlichen Beziehung $2u_0 = u^1 + \varphi^0$ ergibt zusammen mit dem Ausdruck für die Ableitung $\partial_\xi u^0 = \delta^{-1} (u^1 - \varphi^0)$ die folgende nichtklassische Randbedingung:

$$\tilde{I}^{(1)} u^1 = -[2f_0 + 2\delta^{-2} k_{10} \varphi^0 + \partial_\eta (k_{20} \partial_\eta \varphi^0)] \quad (19)$$

mit

$$\tilde{I}^{(1)} u^1 = \partial_\eta (k_{20} \partial_\eta u^1) + 2\delta^{-1} k_1^1 \partial_\xi u^1 - 2\delta^{-2} k_{10} u^1. \quad (20)$$

(Wie schon früher sei auch hierbei - falls nicht ausdrücklich aufgeschrieben - $\xi = 0$ und η ein beliebiger Punkt des Definitionsbereiches.)

Wenn man die Approximation von u^0 mit Hilfe eines Polynoms 2. Grades (einer Parabel) durchführt und u_0 eliminiert, indem man es durch u^1 und $\partial_{\xi} u^1$ ausdrückt, dann erhält man anstelle von (16), (17) eine nichtklassische Randbedingung. Diese ist dann schon eine Differentialgleichung 3. Ordnung, d. h., in dieser Gleichung treten Ableitungen auf, die von höherer Ordnung sind als die in der Grundgleichung:

$$\tilde{L}^{(3)} u^1 = -[2^{-1} 3f_0 + 3\delta^{-1} k_1^0 \varphi^0 + 2^{-1} \partial_{\eta}(k_{20} \partial_{\eta} \varphi^0)] \quad (21)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(3)} u^1 = & \partial_{\eta} [k_{20} \partial_{\eta} (u^1 - 4^{-1} \delta k_1^1 / k_1^0 \partial_{\xi} u^1)] \\ & + 3^{-1} \delta^{-1} (k_1^1 \partial_{\xi} u^1 - k_1^0 u^1). \end{aligned} \quad (22)$$

Wir werden bei der Betrachtung nichtklassischer Randbedingungen (für den Fall, daß bei $\xi = -\delta$ solch eine Randbedingung 3. Art gegeben ist) nicht verweilen, wollen aber zwei Bemerkungen über die Möglichkeit der Gewinnung solcher Zusatzbedingungen in anderen Fällen erwähnen.

Bemerkung 2: Die Koordinatentransformation (Übergang von den Koordinaten (x, y) zu (ξ, η)), die G_0 auf das Rechteck \mathcal{D}^0 abbildet, führt im allgemeinen Fall zum Auftreten gemischter Ableitungen 2. Ordnung und von Ableitungen 1. Ordnung in den Differentialoperatoren L_1 . Die zweite der Koppelungsbedingungen aus (7) kann auch komplizierter werden. Aber das führt nur zur Verkomplizierung des technischen Charakters und zum Entstehen neuer Glieder im Endausdruck für die nichtklassischen Zusatzbedingungen.

Bemerkung 3: Die Gewinnung nichtklassischer Zusatzbedingungen ist auch dann möglich, wenn dasjenige Teilgebiet, über welchem die Mittelwertbildung durchgeführt wird, zwischen zwei Teilgebieten liegt. Sei beispielsweise \mathcal{D}^2 neben \mathcal{D}^1 ein weiteres Teilgebiet (für $\xi < -\delta$) und $L_2 u^2 = -f^2$ eine weitere Gleichung

des Typs (6) mit den Koeffizienten k_1^2 und k_2^2 . Bei der Approximation der Funktion u^0 im Rechteck \mathcal{D}^0 durch eine Konstante (bezüglich ξ) erhalten wir aus den Koppelungsbedingungen auf den Geraden $\xi = 0$ und $\xi = -\delta$:

$$u^1(\xi, \eta)|_{\xi=+0} = u^2(\xi, \eta)|_{\xi=-\delta-0} \quad (23)$$

Dies erlaubt uns, das Gebiet \mathcal{D}^2 um die Größe δ nach rechts zu verschieben, wobei wir ein neues, wiederum einfach zusammenhängendes Gebiet $\bar{\mathcal{D}}$ erhalten, das aus dem so verschobenen \mathcal{D}^2 und dem Gebiet \mathcal{D}^1 besteht. Über $\bar{\mathcal{D}}$ haben wir eine stetige Funktion $u(\xi, \eta)$ zu betrachten, die außerhalb $\xi = 0$ der Differentialgleichung $L_1 u = f^1$ (in \mathcal{D}^1) bzw. $L_2 u = f^2$ (im verschobenen Gebiet \mathcal{D}^2) genügt. Die Koeffizienten dieses Differentialoperators sind auf der Geraden $\xi = 0$ unstetig, der Differentialoperator ist deshalb auf dieser Geraden nicht definiert. Statt dessen muß dort die Gleichung (ein Analogon zu den Koppelungsbedingungen für den Fluß)

$$\partial_\eta(k_{20} \partial_\eta u) + \delta^{-1} k_1^1 \partial_\xi u|_{\xi=+0} - \delta^{-1} k_1^2 \partial_\xi u|_{\xi=-0} = -f_0 \quad (24)$$

erfüllt sein. Im Unterschied zu den gewöhnlichen Koppelungsbedingungen, die nur Ableitungen niedrigster Ordnung enthalten, kommt in Gleichung (24) die höchste Ableitung des Hauptdifferentialoperators in Richtung der Geraden $\xi = 0$ vor. Schließlich muß die Funktion $u(\xi, \eta)$ auf dem Rand des Gebietes $\bar{\mathcal{D}}$ den klassischen Randbedingungen des Ausgangsproblems genügen.

Betrachten wir jetzt die in Bemerkung 3 gegebene Bedingung (24) vom Standpunkt der umgeformten Problemstellung aus, so gehört die Gerade $\xi = 0$ nicht mehr zum Rand des Gebietes $\bar{\mathcal{D}}$. Es ist daher nicht empfehlenswert, (24) Randbedingung zu nennen. Das ist einer der Gründe, weshalb wir die oben betrachteten Bedingungen lieber als "nichtklassische Zusatzbedingungen" bezeichnen wollen und nicht als "nichtklassische Randbedingungen".

IV. Unsere Aufmerksamkeit war in dieser Arbeit auf die Gewinnung von Aufgaben mit nichtklassischen Zusatzbedingungen konzentriert. Zum Schluß noch einige Worte zu den Lösungsmethoden

für derartige Aufgaben. In der Literatur werden meist Aufgaben für parabolische, nicht aber für elliptische Gleichungen behandelt, wobei in der Regel vom Standpunkt der Anwendung ausgegangen wird. Im Falle unbeschränkter Gebiete oder bei der Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Koeffizienten werden solche Probleme meistens mit Hilfe der Methode der Integraltransformation gelöst, z. B. der Laplace-Transformation. (In /3/ und /4/ werden auf diese Weise zweidimensionale Probleme des 1. Quadranten bzw. der rechten Halbebene gelöst.) Aus der in geschlossener Form erhaltenen Lösung kann man in der Regel sofort die Korrektheit der nichtklassischen Problemstellung ersehen (Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität der Lösung).

Für beschränkte Gebiete kann die klassische Methode der Trennung der Variablen verwendet werden. (In /1/ wurde auf diese Weise ein Problem im Intervall $x \in [0,1]$ gelöst, für das die Bedingung der konzentrierten Wärmekapazität im Punkt $x = 0$ erfüllt ist.) Die breitesten Anwendungsmöglichkeiten findet jedoch die Differenzenmethode. Das Differenzenschema für instationäre Differentialgleichungen auf einem reellen Intervall wird in der Monographie /5/ angegeben, für zweidimensionale stationäre Differentialgleichungen in /6/. In /7/ betrachten wir Differenzenschemata für zweidimensionale, bezüglich einer Variablen degenerierte Wärmeleitgleichungen; im Artikel /8/ dagegen wird eine direkte Methode zur Lösung des sich ergebenden Differenzengleichungssystems aufgezeigt. (Dort ist eine Modifikation des Faktorisierungsverfahrens für Probleme mit nichtklassischen Ergänzungsbedingungen der Typen (14), (16) bzw. (17) angegeben.)

In /9/ und /10/ finden wir Differenzenschemata und einige numerische Resultate von Problemen, bei denen die Mittelwertbildung über mehrere paarweise disjunkte Untergebiete (die Schichten) geführt wird. Die Problematik wird erschwert, wenn man die Mittelwertbildung über einander berührende Schichten führen muß. Wir haben hier keine Möglichkeit, diesen Fall ausführlich zu behandeln, das ist ein Thema für eine weitere Publikation. Es sei lediglich darauf verwiesen, daß in diesem Falle die Ausnutzung speziell definierter Integralsplines möglich ist.

Literatur

- /1/ Самарский, А. А.: Об одной задаче распространения тепла. 1,2. Вестник Москов. унив. 3, 85 - 101, 6, 119 - 129 (1947)
- /2/ Тихонов, А. Н.: О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения. Мат. Сб. 26(68), 35 - 56 (1950)
- /3/ Пудовкин, М. А., и Волков, И. К.: Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах. Казань 1978
- /4/ Буйкис, А. А., и Кузмишкينا, Н. В.: Решение двух задач теплопроводности при краевых условиях сосредоточенной емкости. В: Прикладные задачи теоретической и математической физики 3, 85 - 90, Рига 1980
- /5/ Самарский, А. А.: Теория разностных схем. Москва 1977
- /6/ Самарский, А. А., и Андреев, В. В.: Разностные методы для эллиптических уравнений. Москва 1976
- /7/ Буйкис, А. А.: Разностные схемы для уравнения теплопроводности при краевых условиях типа сосредоточенной емкости. В: Прикладные задачи теоретической и математической физики 2, 130 - 145, Рига 1978
- /8/ Буйкис, А. А.: Обобщение метода прогонки для уравнения теплопроводности с сосредоточенной емкостью в краевом условии. В: Прикладные задачи теоретической и математической физики 3, 104 - 110, Рига 1980
- /9/ Буйкис, А. А., и Шмите, М. З.: О разностной аппроксимации одной неклассической задачи для уравнения теплопроводности. В: Латв. Мат. Ежегодник 26, 217 - 222, Рига 1982
- /10/ Буйкис, А. А., и Шмите, М. З.: Разностные схемы для процессов переноса в многослойных пластах. В: Прикладные задачи математической физики 53 - 66, Рига 1983

eingegangen: 21. 09. 1983

Anschrift des Verfassers:

Kand. d. phys.-math. Wiss. A. Buikis
Lettische Staatsuniversität Peter-Stučka
Phys.-Math. Fakultät
Rainis B. 19
226098 Riga, UdSSR

Jan Zítko

Extrapolation of iterative processes

Let us consider an iterative process

$$x_{n+1} = Tx_n + b \quad (1)$$

for solving an operator equation

$$x = Tx + b \quad (2)$$

in Hilbert space X . We assume that $T \in [X]$ and $r(T) < 1$.

Therefore for every $x_0 \in X$ the sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ obtained by using (1) is convergent with a limit x^* . Let $l > 0, k, m_0, m_1, \dots, m_l$ be integers and let the inequalities

$$0 = m_0 < m_1 < \dots < m_l, \quad k > m_l \quad (3)$$

hold. Let H be a linear operator from $[X]$ and let H^{-1} exist.

In the paper /1/ we considered the problem of finding complex numbers $\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_l^{(k)}$ such that

$$\|H(x^* - \sum_{i=0}^l \alpha_i^{(k)} x_{k-m_i})\| = \min_{\beta_0 + \dots + \beta_l = 1} \|H(x^* - \sum_{i=0}^l \beta_i x_{k-m_i})\| \quad (4)$$

and

$$\sum_{i=0}^l \alpha_i^{(k)} = 1. \quad (5)$$

The norm is defined by the inner product (\dots) in X . The operator H should be chosen so that it is possible to evaluate the expression in the norm. We shall call $\alpha_i^{(k)}$ the coefficients of extrapolation.

In section 2 we introduce the main results concerning construction and convergence of $\alpha_i^{(k)}$ for $k \rightarrow \infty$. If we put

$$y_k = \alpha_0^{(k)} x_k + \alpha_1^{(k)} x_{k-m_1} + \dots + \alpha_l^{(k)} x_{k-m_l} \quad (6)$$

For a sequence $\{u_k\} \subset X$ let $\delta_{1j}u_k$ and δ_1u_k denote the differences

$$\delta_{1j}u_k = u_{k-m_{j-1}} - u_{k-m_j},$$

$$\delta_1u_k = \delta_{11}u_k = u_{k-m_{1-1}} - u_{k-m_1}.$$

Put

$$\varepsilon_1 = x^* - x_1, \quad \eta_1 = H\varepsilon_1, \quad (7)$$

$$H_k = (\eta_k, \eta_{k-m_1}, \dots, \eta_{k-m_{l-1}}), \quad (8)$$

$$L_k = (\delta_1\eta_k, \delta_2\eta_k, \dots, \delta_l\eta_k), \quad (9)$$

$$Q_k = H_k \otimes H_k, \quad (10)$$

$$R_k = L_k \otimes L_k, \quad (11)$$

$$S_k = \begin{pmatrix} L_k \otimes H_k \\ e^T(1+1) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

2. The main theoretical results

In this section we describe the solution of (4) and (5) and the behaviour of the numbers $\alpha_1^{(k)}$. All results have been proved in the papers /1/ and /2/.

Theorem 1: Let X be a Hilbert space. Let $T \in [X]$, $H \in [X]$, H^{-1} exist and $r(T) < 1$. We denote by x^* the limit of the sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ obtained by using (1). Assume further that the integers $l > 0, m_0, \dots, m_{l-1}$ and k fulfil the inequalities (3).

If the matrix Q_k is positive definite, then there exists one and only one vector $\alpha^{(k)} = (\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_1^{(k)})^T$ which solves the problem (4), (5). For the vector $\alpha^{(k)}$ we have

$$\alpha^{(k)} = (e^T(n)Q_k^{-1}e(n))^{-1} Q_k^{-1}e(n) \quad (13)$$

or equivalently $S_k \omega^{(k)} = e_{1+1}(1+1)$.

The proof is given in /1/.

For further investigation let, moreover, the spectrum of T have the following structure: There exist finite sequences $\{i_k\}_{k=1}^r$ of positive integers and $\{\lambda_k\}_{k=1}^r \subset \mathbb{C}$ for some integer $r \geq 1$ such that each λ_k is a pole of the resolvent operator $R(\lambda, T)$ of order i_k :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_r|, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ for } i \neq j \text{ and} \\ \{\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq \lambda_i, i=1, \dots, r\} \Rightarrow |\lambda| < |\lambda_r|.$$

For a fixed $j \in \{1, \dots, r\}$ let C_j be the circumference with center λ_j and radius ρ_j such that

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_j| \leq \rho_j\} \cap \sigma(T) = \{\lambda_j\}.$$

Moreover let

$$C_c = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = \rho_c\},$$

where

$$\{\lambda \mid |\lambda| \leq \rho_c\} \cap \sigma(T) = \sigma(T) - \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}.$$

We assume that

$$k > \max_{j=1, 2, \dots, r} (i_j), \quad (14)$$

$$B_{j1} \varepsilon_0 \neq 0 \text{ for all } j = 1, 2, \dots, r, \quad (14')$$

where

$$B_{j1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} (\lambda - \lambda_j)^{i-1} R(\lambda, T) d\lambda. \quad (15)$$

It is easy to show that

$$\varepsilon_k = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{i_j} \binom{k}{i-1} \lambda_j^{k-i+1} B_{j1} \varepsilon_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_c} \lambda^k R(\lambda, T) \varepsilon_0 d\lambda \quad (16)$$

and

$$\eta_k = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{i_j} \binom{k}{i-1} \lambda_j^k v_{j1} + v(k), \quad (16')$$

where we have put

$$v_{j1} = H(B_{j1} \varepsilon_0 / \lambda_j^{i-1}) \text{ and } v(k) = H\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_c} \lambda^k R(\lambda, T) \varepsilon_0 d\lambda\right).$$

Assumption 1: Let the equality

$$\sum_{j=1}^{\tau} i_j = 1$$

hold for some integer $\tau \in \langle 1, r \rangle$.

Let G_k be a matrix formed from the first l rows of the matrix F_k .

Assumption 2: Let there exist an integer k_0 such that

$$\det G_k \neq 0 \text{ for all } k \geq k_0.$$

From this it follows that the system

$$G_k \cdot (z_1, \dots, z_l)^T = -(w_1^T(k), \dots, w_\tau^T(k))^T, \quad (18)$$

where the subvectors $w_s(k)$ have the following structure

$$w_s(k) = ((i_{s-1}^k) \lambda_s^k, (i_{s-2}^k) \lambda_s^k, \dots, (i_1^k) \lambda_s^k, \lambda_s^k)^T$$

for $s = 1, 2, \dots, \tau$, has for every $k \geq k_0$ a nontrivial solution which is independent of k (see /2/). Let us denote the solution of (18) by $(b_1, \dots, b_l)^T$.

Theorem 3: If $m_1 = i \quad \forall i = 1, \dots, l$, then $\det G_k \neq 0$ for all $k > \max_{j=1, \dots, r} (i_j) + m_1$ and the equality

$$(z - \lambda_1)^{i_1} (z - \lambda_2)^{i_2} \dots (z - \lambda_\tau)^{i_\tau} = z^{l+b_1} z^{l-1} + \dots + b_{l-1} z + b_l$$

holds for all $z \in \mathbb{C}$, i.e. b_1, \dots, b_l are coefficients of the polynomial

$$(z - \lambda_1)^{i_1} (z - \lambda_2)^{i_2} \dots (z - \lambda_\tau)^{i_\tau}.$$

The proof is given in /2/.

We shall show in the following section that (18) is valid for $m_1 = in$, too. Let us put

$$P_1(z) = z^{l+b_1} z^{l-1} + \dots + b_{l-1} z^{l-1} + b_l. \quad (19)$$

Assumption 3: Let $P_1(1) \neq 0$.

Define

$$P(z) = P_1(z)/P_1(1) = \epsilon_0 z^{m_1} + \epsilon_1 z^{m_1 - m_1} + \dots + \epsilon_1.$$

$$\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_1)^T,$$

$$f^{(1)}(k) = S_k \epsilon = (f_{k,0}, f_{k,1}, \dots, f_{k,l-1}, 1)^T, \quad (20)$$

$$f(k) = f^{(1)}(k) - \epsilon_{l+1}(l+1).$$

It is easy to see that $S_k \epsilon = f(k) + \epsilon_{l+1}(l+1)$ or

$$\epsilon = S_k^{-1} f(k) + \alpha^{(k)} \text{ and therefore we have } \alpha^{(k)} = \epsilon - S_k^{-1} f(k).$$

Assumption 4: Let $\tau + 1 \leq r$ and let for the poles λ_τ and $\lambda_{\tau+1}$ of the resolvent operator $R(\lambda, T)$ the inequality $|\lambda_\tau| > |\lambda_{\tau+1}|$ hold.

Let \mathcal{T} be the set of all positive integers $i \leq l$ for which $|\lambda_{p_i}| = |\lambda_\tau|$, where (p_i, q_i) lies on the i -th position in the sequence (17).

Assumption 5: Let there exist an integer k_0 such that for all $k \geq k_0$ the matrix formed from the first l rows of $F_k^{(0)}$ is nonsingular. Moreover, let for every matrix $F_k^{(1)}(j)$ and $F_k^{(2)}(i)$, $j = 1, \dots, l+1$; $i = 1, \dots, l$ there exist integers $i^{(1)}(j) \in \mathcal{T}$ and $i^{(2)}(i) \in \mathcal{T}$, respectively, so that the matrix formed from the first l rows of $F_k^{(1)}(j)$ and $F_k^{(2)}(i)$ without the $i^{(1)}(j)$ -th and the $i^{(2)}(i)$ -th row, respectively, is nonsingular.

Remark: We shall not investigate the validity of these assumptions in the special cases $m_1 = 1$ or $m_1 = \infty$.

Theorem 4: Let the Assumptions 1-5 be valid. Then for every m ($1 \leq m \leq l$) and s ($1 \leq s \leq l-1$) there exist sequences $\{\Omega_{m,s}(k)\}$ and $\{\xi_{m,s}(k)\}$ such that

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |\Omega_{m,s}(k)| < \infty$ and

$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{m,s}(k) = 0$ for all m and s ,

such that the m -th component of the vector $S_k^{-1}f(k)$ has the form

$$\sum_{s=1}^{l-1} k^{\alpha_{m,s}} \Omega_{m,s}(k) (1 + \xi_{m,s}(k)) \left(\frac{\lambda_1 \lambda_{\tau+1}}{|\lambda_{\tau}|^2} \right)^k$$

where $\alpha_{m,s}$ are integers.

The proof is given in /2/.

From this assertion the theorem concerning the convergence of $\alpha^{(k)}$ immediately follows.

Theorem 5: Let the assumptions 1-5 be valid. Let P be the polynomial defined by (20). If $|\lambda_1 \lambda_{\tau+1}| < |\lambda_{\tau}|^2$, then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^{(k)} = \sigma_i$$

for all $i=0,1,\dots,l$, where σ_i are the coefficients of the polynomial P .

3. The convergence of $\alpha_i^{(k)}$ in a special case

In this section let Assumption 1 be valid. We will investigate the special case $m_1 = 1n$, where n is a positive integer. We shall prove a theorem which is analogous to Theorem 3.

Lemma 1: Let $q \geq 0$, $n > 0$ be integers, and $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_q$ polynomials. Let us define a polynomial $p_q(z, n)$ by the formula

$$p_q(z, n) = a_0(n)z^q + a_1(n)z^{q-1} + \dots + a_{q-1}(n)z + a_q(n).$$

Then there exist polynomials $b_0 \neq 0, b_1, \dots, b_q$ such that for every integer j the equality

$$p_q(j, n)n^q = b_0(n) \binom{jn}{q} + b_1(n) \binom{jn}{q-1} + \dots + b_{q-1}(n) \binom{jn}{1} + b_q(n)$$

holds.

Proof: By a straightforward calculation we obtain

$$\begin{aligned}
 & p_q(j, n)n^q - a_0(n)q!(\binom{jn}{q}) - a_1(n)(q-1)!(\binom{jn}{q-1})n \\
 & - a_2(n)(q-2)!(\binom{jn}{q-2})n^2 - \dots - a_{q-1}(n)(\binom{jn}{1})n^{q-1} - a_q(n)n^q \\
 & = a_0(n) [j^q n^q - q!(\binom{jn}{q})] + a_1(n)n [j^{q-1} n^{q-1} - (q-1)!(\binom{jn}{q-1})] \\
 & + a_2(n)n^2 [j^{q-2} n^{q-2} - (q-2)!(\binom{jn}{q-2})] \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + a_{q-2}(n)n^{q-2} [j^2 n^2 - 2!(\binom{jn}{2})] \\
 & = p_{q-1,1}(j, n)n^{q-1} + p_{q-2,2}(j, n)n^{q-2} + \dots + p_{1,q-1}(j, n)n.
 \end{aligned}$$

where $p_{q-1,1}$ is a polynomial of the form

$$p_{q-1,1}(z, n) = d_1(n)z^{q-1}$$

and d_1 are polynomials. It is not necessary to describe the explicit form of d_1 . Therefore we have

$$p_q(j, n)n^q = \sum_{i=0}^q a_i(n)n^i (q-1)!(\binom{jn}{q-1}) + \sum_{i=1}^{q-1} d_i(n)j^{q-i}n^{q-i}.$$

Using induction, the assertion of Lemma 1 immediately follows.

Theorem 6: Let G_k be a matrix formed from the first l rows of the matrix F_k . If $a_i = in \quad \forall i = 0, \dots, l$, where n is a positive integer, and if $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n$ are mutually different, then there exists an integer k_0 such that

$$\det G_k \neq 0$$

for all $k \geq k_0$ and the equality

$$(z-\lambda_1^n)^{i_1} (z-\lambda_2^n)^{i_2} \dots (z-\lambda_r^n)^{i_r} = z^{1+b_1} z^{1-1} + \dots + b_{l-1} z^{b_1}$$

holds for all $z \in \mathbb{C}$, where $(b_1, b_2, \dots, b_l)^T$ is the solution of the equation (18), i.e.

$$G_k \cdot (b_1, b_2, \dots, b_l)^T = -\tilde{c}(k), \quad (21)$$

and the vector $\tilde{c}(k)$ consists of the first l components of $c(k)$.

The vector $(b_1, b_2, \dots, b_l)^T$ is independent of k .

If we put

$$P_1(z) = z^1 + b_1 z^{1-1} + b_2 z^{1-2} + \dots + b_{1-1} z + b_1$$

and

$$P(z) = P_1(z)/P_1(1) = \epsilon_0 z^1 + \epsilon_1 z^{1-1} + \dots + \epsilon_1$$

and if assumptions 4 and 5 are valid, then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^{(k)} = \epsilon_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, l.$$

Proof: Let us assume that $\det G_k = 0$ for all k fulfilling the inequality

$$k - \ln > n \max_{j=1, \dots, r} (i_j). \quad (22)$$

Let us remark that we have proved in /1/ that either $\det G_k = 0$ for all k or it exists a number k' so that $\det G_k \neq 0$ for all $k \geq k'$.

If for some integer s the number $k = sn$ fulfills (22), then there exist complex numbers B_1, \dots, B_1 such that

$$\sum_{i=1}^1 |B_i|^2 > 0 \quad (23)$$

and

$$G_k \cdot (B_1, \dots, B_1)^T = 0, \quad (23')$$

i.e.

$$\sum_{m=1}^1 B_m \binom{k-mn}{q-1} \lambda_p^{k-mn} = 0 \quad (24)$$

for the first l pairs (p, q) from the sequence (17).

Putting $\lambda_p^n = \Lambda_p$, we can rewrite (24) in the equivalent system

$$\sum_{m=1}^1 B_m \binom{(s-m)n}{i} \Lambda_j^{s-m} = 0 \quad (25)$$

for $j = 1, \dots, r$ and $i = 0, 1, \dots, i_j - 1$ for every j . From Lemma 1 we have for every integer $m \in \langle 1, l \rangle$ and $i \in \langle 0, i_j - 1 \rangle$

$$\binom{(s-m)n}{i} = b_0^{(i)}(n) \binom{(s-m)n}{i} + b_1^{(i)}(n) \binom{(s-m)n}{i-1} + \dots + b_i^{(i)}(n),$$

where $b_p^{(i)}$ ($p=0,1,\dots,i$) are polynomials. Multiplying the equations

$$\sum_{m=1}^1 B_m \binom{(s-m)n}{p} \Lambda_j^{s-m} = 0$$

for $p = 0,1,\dots,i$ successively by $b_p^{(i)}$ and summing all these equations, we obtain

$$\sum_{m=1}^1 B_m \binom{(s-m)}{i} \Lambda_j^{s-m} = 0.$$

But we can repeat this procedure for every $j = 1,2,\dots,\tau$ and $i \in \langle 0, i_j-1 \rangle$. From the system (25) we obtain

$$\sum_{m=1}^1 B_m \binom{(s-m)}{i} \Lambda_j^{s-m-i+1} = 0 \quad (26)$$

for $j = 1,\dots,\tau$ and $i = 0,1,\dots,i_j-1$ for every j .

Without loss of generality let $B_1 \neq 0$. From (26) it follows that the polynomial D defined by

$$D(z) = B_1 z^{s-1} + B_2 z^{s-2} + \dots + B_1 z^{s-1}$$

has $s-1 + \sum_{j=1}^{\tau} i_j = s-1+1 = s$ roots. This is a contradiction.

Therefore (22) does not hold and $\det G_k \neq 0$ for $k = sn$. From this it follows that there exists a number k_0 such that $\det G_k \neq 0$ for all $k \geq k_0$.

If we put for $s > \max\left[\left\lceil \frac{k_0}{n} \right\rceil, \max(i_j)+1\right]$

$$U(z) = z^s + b_1 z^{s-1} + \dots + b_1 z^{s-1},$$

then putting $k = sn$ we obtain from (21)

$$U^{(i-1)}(\Lambda_j) = 0 \text{ for all } j = 1,2,\dots,\tau$$

and $i = 1,2,\dots,i_j$ and therefore the polynomial

$(z-\Lambda_1)^{i_1} \dots (z-\Lambda_\tau)^{i_\tau}$ divides the polynomial U . The rest is obvious.

4. Extrapolation and procedures

In this section we describe some procedures for extrapolation. Let us remark that we have defined

$$y_k = \alpha_0^{(k)} x_k + \alpha_1^{(k)} x_{k-m_1} + \dots + \alpha_{l_1}^{(k)} x_{k-m_{l_1}}.$$

We shall present firstly a theorem which shows the advantage of extrapolation.

Theorem 7: Let assumptions 1-5 be valid. We suppose that for some $r_1 \in \langle 1, r \rangle$ the inequality $|\lambda_{r_1}| > |\lambda_{r_1+1}|$ holds and if

$|\lambda_{p_1}| = |\lambda_1|$ for $p_1 \in \langle 1, r_1 \rangle$, then let $i_1 > i_{p_1}$. Moreover, let

$$|\lambda_1^{2-p} \lambda_{T+1}| / |\lambda_1|^2 < 1 \text{ for some } p \geq 1.$$

Then there exists an integer k_0 such that $\varepsilon_k = \|x^* - x_k\| \neq 0$ for all $k \geq k_0$ and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^* - y_k\| / \|x^* - x_k\|^p) = 0.$$

The proof is given in /2/.

For the operator H it is convenient to put $H = I - T^n$ for some positive integer n . In this case

$$\eta_{k+1} = x_{k+n} - x_k \quad (27)$$

and

$$\eta_{k+1} = T \eta_k. \quad (27')$$

Algorithm 1: (the general case)

$l, m_0, m_1, \dots, m_{l_1}, k_1$ given integers; $k_1 > \max(i_1) + m_1$.

- 1) For $k = 0, 1, \dots, k_1+n-1$ evaluate $x_{k+1} = Tx_k + b$.
- 2) Put $s = k_1$.
- 3) For $i = 0, 1, \dots, l$ evaluate $\eta_{s-m_i} = x_{s-m_i+n} - x_{s-m_i}$.
- 4) Form a matrix Q_s or S_s and solve the system

$$\begin{cases} Q_s \alpha^{(s)} = \lambda e(1+1) \\ e^T(1+1) \alpha^{(s)} = 1 \text{ or } S_s \alpha^{(s)} = e_{1+1}(1+1). \end{cases}$$

5) Form

$$y_s = \alpha_0^{(s)} x_s + \alpha_1^{(s)} x_{s-m_1} + \dots + \alpha_l^{(s)} x_{s-m_l}.$$

6) Calculate

$$\eta_{s+1} = T \eta_s;$$

$s + 1 \rightarrow s$ and repeat this procedure from the part 3), or from the part 4) if all η_{s-m_i} ($i=0,1,\dots,l$) are known. If we repeat from the part 3), we calculate only unknown η_{s-m_i} . We repeat the procedure until some given condition for termination is fulfilled.

This algorithm is not convenient for practical calculation but from these formulas we see that for $m_1 = in$ we obtain a useful algorithm (see [1]). We shall present here a special case for $l = 1$.

Algorithm 2:

$$l=1, m_0=0, m_1=n, k_1 \in \mathbb{N}, k_1 > \max(i_j) + n.$$

1) For $k = 0, 1, \dots, k_1-1$ evaluate

$$x_{k+1} = T x_k + b$$

(In the memory we have only x_{k_1-n}).

$$\text{Put } s = k_1 - n, s_1 = k_1.$$

2) Evaluate $\eta_s = x_{s_1} - x_s$. Go to 4).

3) Put $x_{s_1} = x_s + \eta_s$.

4) For $k = s, s+1, \dots, s+n-1$ evaluate $\eta_{k+1} = T \eta_k$.

5) Solve the system

$$\begin{pmatrix} (\eta_{s_1}, \eta_{s_1}) & (\eta_s, \eta_{s_1}) \\ (\eta_{s_1}, \eta_s) & (\eta_s, \eta_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^{(s_1)} \\ \alpha_1^{(s_1)} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_0^{(s_1)} + \alpha_1^{(s_1)} = 1$$

or calculate

$$\delta = (\eta_{s_1}, \eta_{s_1} - \eta_s), \delta_1 = (\eta_{s_1} - \eta_s, \eta_{s_1} - \eta_s)$$

and put

$$\alpha_1^{(s_1)} = \delta / \delta_1, \alpha_0^{(s_1)} = 1 - \alpha_1^{(s_1)}.$$

6) Calculate

$$y_{s_1} = \alpha_0^{(s_1)} x_{s_1} + \alpha_1^{(s_1)} x_s.$$

7) Put $s_1 \rightarrow s$, $s_1 + n \rightarrow s_1$
and repeat from 3).

In this case we obtain the sequence $\{y_{k_1+sn}\}_{s=0}^{k_2}$, where k_2 is a number of repetition.

Remark 1: We always assume that $\sum_{j=1}^r i_j = 1$ and therefore in the case $l = 1$ it is $i_1 = 1$.

Analogous algorithms should be written for $l = 2$ or $l = 3$.

Remark 2: In the paper /5/ the converted procedure for extrapolation is given in a special case $m_1 = n$. First the polynomial

$$p(z) = (z - \lambda_1^n)^{i_1} \dots (z - \lambda_r^n)^{i_r}$$

is constructed, which gives us coefficients of extrapolation. In accordance with Theorem 7 these coefficients are limits of $\alpha_i^{(k)}$ for $k \rightarrow \infty$.

At the end of this paper we describe a modification of the Algorithm 2 for solving of the matrix equation

$$Ax = b \tag{28}$$

with a consistently ordered 2-cyclic Stieltjes matrix A . Let us write $A = D(I-L-U)$, where $D = \text{diag } A$, L and U are strictly lower and upper triangular matrices, respectively. We rewrite the system (28) in the form

$$x = \mathcal{L}_1 x + c,$$

where $\mathcal{L}_1 = (I-L)^{-1}U$ and $c = (I-L)^{-1}D^{-1}b$. We use Algorithm 2 for the iterative process

$$x_{k+1} = \mathcal{L}_1 x_k + c$$

and construct the y_k , $\alpha_0^{(k)}$, $\lambda_1^n(k) = \frac{\alpha_0^{(k)} - 1}{\alpha_0^{(k)}}$ in view of

$$\alpha_0^{(k)} \rightarrow \frac{1}{1 - \rho^n(\mathcal{L}_1)} \text{ for } k \rightarrow \infty, \text{ and } \omega(k) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda_1(k)}}.$$

After some steps of Algorithm 2 we continue by using the S.O.R. method with $\omega(k)$.

For the system (28) we can take $H=A$, too.

5. Numerical results

As an example we take the model problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ on } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

where Ω is a rectangle $A_1A_2A_3A_4$ in the plane. Let $A_1 = (x_0, y_0)$, $A_2 = (x_{N+1}, y_0)$, $A_3 = (x_{N+1}, y_{M+1})$, $A_4 = (x_0, y_{M+1})$ and let a uniform mesh exist with the mesh size h such that

$$x_{N+1} = x_0 + (N+1)h, \quad y_{M+1} = y_0 + (M+1)h.$$

By the five point difference approximation of (29) we obtain the system of linear algebraic equations

$$Ax = 0 \tag{30}$$

with the Stieltjes matrix A . In the usual way we express

$A = D - L - U$ and rewrite the system (30) in the form

$$x = \mathcal{L}_\omega x,$$

where $\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}(\omega U + (1 - \omega)D)$. For the initial approximation x_0 we choose $x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T = e(MN)$. We take $M = 20$,

$N = 30$. In all cases we compare norms of error vectors. In the following table we compare the errors of the S.O.R. iterations with extrapolated iterations.

Table 1: $\omega = 1.5$, $l = 1, 2, 3, 4$, $m_1 = \text{in}$, $n = 3$.

number of iterations	S.O.R. iterations	extrapolated iterations			
		$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
18	0.144_{10}^{-1}	0.525_{10}^{-2}	0.444_{10}^{-2}	0.439_{10}^{-2}	0.438_{10}^{-2}
36	0.604_{10}^{-2}	0.504_{10}^{-3}	0.262_{10}^{-3}	0.156_{10}^{-3}	0.153_{10}^{-3}
54	0.246_{10}^{-2}	0.884_{10}^{-4}	0.101_{10}^{-4}	0.190_{10}^{-5}	0.479_{10}^{-6}
72	0.995_{10}^{-3}	0.142_{10}^{-4}	0.437_{10}^{-6}	0.555_{10}^{-7}	0.239_{10}^{-8}
90	0.399_{10}^{-3}	0.224_{10}^{-5}	0.204_{10}^{-7}	0.134_{10}^{-8}	0.245_{10}^{-9}

Now we use a modification of the Algorithm 2 described at the end of section 4.

Table 2: $l = 1$

number of iterations k	$\omega(k)$	S.O.R. iteration with $\omega(k)$	extrapolated iterations
12	1.	$0.290_{10^{-1}}$	$0.249_{10^{-1}}$
24	1.51	$0.137_{10^{-1}}$	$0.331_{10^{-1}}$
36	1.76	$0.510_{10^{-3}}$	$0.349_{10^{-3}}$
84	1.76	$0.575_{10^{-8}}$	$0.190_{10^{-8}}$
120	1.77 (optimum factor)	$0.835_{10^{-12}}$	$0.608_{10^{-12}}$

At the same time, we have calculated estimates of the optimum relaxation factor, too. We have been improving the relaxation factor after each 12 iterations. We have obtained a very good convergence.

References

- /1/ Zítko, J.: Improving the convergence of iterative methods. *Apl. Mat.* 28, 3, 215 - 229 (1983)
- /2/ Zítko, J.: Convergence of extrapolation coefficients. (to appear in *Apl. Mat.*)
- /3/ Maeß, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. *Nova Acta Leopoldina, Neue Folge Nr. 238, Bd. 52,* 1979
- /4/ Maeß, G.: Extrapolation bei Iterationsverfahren. *Z. Angew. Math. Mech.* 56, 121 - 122 (1976)
- /5/ Marek, I., and Zítko, J.: Ljusternik acceleration and the extrapolated S.O.R. method. *Apl. Mat.* 22, 2, 116 - 133 (1977)
- /6/ Marek, I.: On Ljusternik's method of improving the convergence of nonlinear iterative sequences. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 6, 3, 371 - 380 (1965)
- /7/ Taylor, A. E.: *Introduction to Functional Analysis.* New-York 1958

received: May 5, 1983

Author's address:

RNDr. J. Zítko, CSc.
Katedra numerické matematiky na MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1, ČSSR

Multi-Grid Solutions to Linear and Nonlinear Eigenvalue Problems for Integral and Differential Equations1. Introduction

The discretization of an eigenvalue problem for an integral equation

$$u(x) = \lambda \int_0^1 k(x,y) u(y) dy, \quad u \neq 0$$

yields a matrix eigenvalue problem

$$u_h = \lambda k_h u_h,$$

where k_h is a $N \times N$ matrix with $N = 1/h$ (h : step size). In this paper we propose a multi-grid method that needs only $O(N^2)$ operations for computing one eigenvalue and the corresponding eigenfunction. Moreover, by the same amount of computational work nonlinear problems as

$$u(x) = \int_{\Omega} k(\lambda, x, y) u(y) dy, \quad u \neq 0$$

can be solved. Such problems arise, for instance, from bifurcation problems.

The eigenvalue problems can be rewritten as nonlinear equations with isolated solutions. These new problems are treated by the multi-grid iteration of the second kind.

Although we explain this technique in detail for integral equations, eigenvalue problems for elliptic differential equations can be treated similarly.

In Section 2.1 we recall the method of [13] for solving nonlinear integral equations. Section 2.2 contains the transformation of the linear eigenvalue problem $u = \lambda ku$ (k : integral operator) into the nonlinear equation $u = \mathcal{K}(u)$. In Section 2.3 we prove that the solution of the latter equation is isolated, provided that the eigenvalue is single. The case of multiple

eigenvalues is briefly discussed in Section 2.4. Nonlinear eigenvalue problems are mentioned in Section 2.5. Section 2.6 explains the connection to bifurcation problems. Section 3 contains the discretization of the integral equation (Section 3.1) and the description of the multi-grid method of the second kind (Section 3.2).

In Section 4 we discuss eigenvalue problems for elliptic partial differential equations. The eigenvalue problem $Lu = \lambda u$ is transformed into a nonlinear problem $\mathcal{L}(u) = 0$ (Section 4.1), that can be treated by the multi-grid algorithm of the first kind (Section 4.2). As already described in /10/ it is possible to transform nonlinear differential equations into problems $u = \mathcal{K}(u)$ that can be solved by the multi-grid algorithm of the second kind (Section 4.3). It is to be emphasized that the described methods are different from the method of Astrachancev /1/ or Hackbusch /11, 17/.

Numerical examples are reported in Section 5. In order to show that the class of problems that can be treated is larger than described above, we consider an integrodifferential equation (Section 5.1) and the Steklov eigenvalue problem (Section 5.2).

This paper is a slightly renewed version of the report /12/ from 1980.

2. Eigenvalue Problems for Integral Equations

2.1 Solution of nonlinear Integral Equations

In /13/ we described a multi-grid algorithm (cf. Section 3) for solving the nonlinear equation

$$u = \mathcal{K}(u), \quad (2.1)$$

for example, for the integral operator

$$[\mathcal{K}(u)](x) = \int_a^b k(x,y,u(y)) dy \quad (x \in [a,b]). \quad (2.2)$$

Let the derivative of \mathcal{K} evaluated at the solution of (2.1) be denoted by

$$K = \mathcal{K}'(u) \quad (u: \text{solution of (2.1)}).$$

The multi-grid algorithm is applicable if K is a bounded mapping from one Banach space U into a second Banach space $V \subset U$ with a finer topology:

$$\|kv\|_V \leq C\|v\|_U \quad \text{for all } v \in U, \quad (2.3a)$$

$$V \hookrightarrow U \text{ compactly imbedded,} \quad (2.3b)$$

and if a similar property holds for the discretization of \mathcal{X} . Here and in the following C denotes a generic constant.

Example 2.1: Let \mathcal{X} be defined by (2.2). If $\partial k / \partial u$ is m -times differentiable with respect to x , the properties (2.3a,b) hold with

$$U = C^0([a,b]), \quad V = C^m([a,b]).$$

2.2 Reformulation of the Eigenvalue Problem

Consider the eigenvalue problem

$$u = \lambda ku, \quad u \neq 0, \quad (2.4)$$

where k is a linear integral operator, for instance,

$$[ku](x) = \int_0^1 k(x,y) u(y) dy. \quad (2.5)$$

The normalized eigenfunction is the solution of

$$u = \lambda ku, \quad \varphi(u) = 1, \quad (2.6)$$

where φ is some suitable linear or nonlinear functional. Using $\varphi(u) = \lambda \neq 0$ instead of $\varphi(u) = 1$, we can eliminate the eigenvalue:

$$u = \varphi(u) ku, \quad u \neq 0. \quad (2.7)$$

Example 2.2: The positive eigenvalues of the operator k from (2.5) are solutions of (2.7) with

$$\varphi(u) = \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (2.8a)$$

Example 2.3: If the eigenfunction u of (2.4) satisfies $u(x_0) \neq 0$ for some fixed x_0 , one may use

$$\varphi(u) = u(x_0). \quad (2.8b)$$

The nonlinear equation (2.7) is of the form (2.1) if we define

$$\mathcal{K}(u) = \varphi(u) ku. \quad (2.9a)$$

The derivative of $\mathcal{K}(u)$ is K with

$$Kv = \varphi(u) kv + (\varphi'(u) \cdot v) ku. \quad (2.9b)$$

2.3 Case of a Single Eigenvalue

Let \mathbb{K} denote either the real numbers \mathbb{R} or the complex numbers \mathbb{C} and define the range

$R(u) := \{\varphi(\mu u) : \mu \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K} \quad (u \in U)$
for the functional φ involved in (2.6) and (2.7).

The following note shows that the reformulated eigenvalue problem has the properties needed for applying the multi-grid algorithm.

Proposition 2.1: (i) Let $u^* \neq 0$ and λ^* satisfy the original eigenvalue problem (2.4). Assume $\lambda^* \in R(u^*)$. Then for suitable $\mu \in \mathbb{K}$ $u = \mu u^*$ is a solution of the nonlinear equation (2.7), hence of (2.1) with \mathcal{K} defined by (2.9a).

(ii) Let $u \neq 0$ be a solution of (2.7). Then u is a solution of the eigenvalue problem with $\lambda = \varphi(u)$.

(iii) Let $0 \neq u \in U$ be a solution of (2.7), $u = \mathcal{K}(u)$, and assume that $\lambda = \varphi(u)$ is a single eigenvalue of k :

$$[I - \lambda k] w = \varphi u \text{ imply } \varphi = 0 \text{ and } w \in \text{span}(u), \quad (2.10)$$

where k satisfies (2.3a,b). Furthermore,

$$\varphi'(u) u \neq 0, \quad |\varphi'(u)v| \leq C \|v\|_U \quad (2.11)$$

is supposed for the derivative φ' of φ . Then the derivative K of \mathcal{K} at u satisfies (2.3a,b) and

$$\|(I - K)^{-1}\|_{U \rightarrow U} \leq C; \quad (2.12)$$

thus, the solution u is isolated.

Proof: (i) and (ii) are obvious. (iii) The property (2.3a,b) follows from the representation (2.9b) of K . Since K is compact, it suffices to show " $v = Kv \rightarrow v = 0$ " instead of (2.12). By (2.9b), $v = Kv$ reads as

$$[I - \lambda k]v = \varphi u \text{ with } \lambda = \varphi(u), \quad \varphi = \varphi'(u)v / \varphi(u).$$

(2.10) shows $v = \mu u$, $g = 0$. Hence, $g = \mu \varphi'(u)u / \varphi(u) = 0$ yields $\mu = 0$ because of (2.11). Thus, $v = 0$ is proved. ■

2.4 Case of Double Eigenvalues

If the continuous and the discrete problems have double eigenvalues, one can compute an eigenvector $u \perp w$ for some fixed w . Equation (2.1), $u = \mathcal{K}(u)$, can be defined by

$$u \mapsto u' := \varphi(u)ku \mapsto \mathcal{K}(u) := u' - (u', w)/(w, w),$$

where (\cdot, \cdot) is the scalar product of U . Changing w we obtain a second solution.

If there is a cluster of eigenvalues this approach does not work. For that case a method has been proposed by Madame Chatelin /7/.

2.5 Nonlinear Eigenvalue Problems

Suppose that the operator $k = k(\lambda)$ depends nonlinearly on λ and consider the eigenvalue problem

$$u = k(\lambda)u, \quad u \neq 0 \quad (2.13)$$

instead of (2.4). The analogous reformulation yields (2.1) with \mathcal{K} defined by $k(\varphi(u))u$:

$$u = k(\varphi(u))u, \quad u \neq 0.$$

Note 2.2: Let $\lambda \in R(u)$ be a single eigenvalue of (2.13) and normalize the eigenfunction u by $\lambda = \varphi(u)$. Assume that k and the derivative k_λ satisfy (2.3a,b) at λ . Furthermore, (2.11) and $(u^*, k_\lambda(\lambda)u) \neq 0$ are required, where $u^* \in \ker(I - k^*(\lambda))$. Then, the derivative K of $\mathcal{K}(u) = k(\varphi(u))u$ satisfies (2.3a,b) and (2.12).

Proof: (2.3a,b) results from the representation of K :

$$Kv = (\varphi'(u)v)k_\lambda(\lambda)u + k(\lambda)v, \quad \lambda := \varphi(u).$$

As above (2.12) holds if $v = Kv$ has only the trivial solution. $v = Kv$ yields $[I - k(\lambda)]v = gw$ with $w := k_\lambda u$, $g := \varphi'(u)v$. By assumption $(u^*, w) \neq 0$ holds and implies $g = 0$ and $v = \alpha u$. Hence, (2.11) leads to $\alpha = 0$, i.e., $v = 0$. ■

2.6 Bifurcation

Let

$$u = k(\lambda, u) \quad (2.15)$$

be a nonlinear integral equation depending on a parameter λ . For fixed λ the function $u = u(\lambda)$ is the solution of an equation of the form (2.1) with $\mathcal{K}(u) = k(\lambda, u)$. In the case of a simple bifurcation, $k(\lambda, 0) = 0$ holds for all λ . Branching points are determined by

$$v = k_u(\lambda, 0)v, \quad v \neq 0.$$

This eigenvalue problem is just of the form (2.13).

3. The Solution of the Discrete Problems by the Multi-Grid Algorithm

3.1 Discrete Integral Equations

For the numerical computation the eigenvalue problem (2.1) with \mathcal{K} from (2.9a) or (2.14) is to be replaced by a suitable discretization corresponding to a step size h . In order to apply the multi-grid algorithm of Section 3.2 we need a sequence of step sizes

$$h_0 > h_1 > \dots > h_1 > \dots > h_{1_{\max}} = h, \quad h_1 \leq C h_{1-1}. \quad (3.1)$$

The discrete problem related to the step size h_1 is denoted by

$$u_1 = \mathcal{K}_1(u_1), \quad u_1 \neq 0. \quad (3.2)$$

In the case of (2.9a), $\mathcal{K}(u) = \varphi(u)ku$, the discrete function is

$$\mathcal{K}_1(u_1) = \varphi_1(u_1) k_1 u_1. \quad (3.3)$$

Hence, (3.2) is equivalent to $u_1 = \lambda_1 k_1 u_1$ with $\lambda_1 = \varphi_1(u_1)$.

For the discussion of the discretization error $|\lambda - \lambda_1|$ compare, e.g., Spence /23/.

The 'grid function' u_1 belongs to the vector space U_1 with norm also denoted by $\|\cdot\|_U$. The condition

$$\|k_1 v_1\|_V \leq C \|v_1\|_U \quad \text{for all } v_1 \in U_1. \quad (3.4)$$

is a discrete counterpart of (2.3a). The norms of U_1 and V_1 are

related to those of U and V , respectively. For example, in the case of $U = C^0([0,1])$ and $V = C^1([0,1])$ the norms of the grid functions $v_1 = (v_1(\nu h_1))_{\nu=0, \dots, N}$ ($N=1/h_1$) are

$$\|v_1\|_U = \max\{|v_1(\nu h_1)| : 0 \leq \nu \leq N\},$$

$$\|v_1\|_V = \max\{\|v_1\|_U, |v_1(\nu h_1 + h_1) - v_1(\nu h_1)|/h_1 : 0 \leq \nu < N\}.$$

Proposition 2.1 holds for \mathcal{X}_1 , too. Under analogous assumptions the derivative K_1 of \mathcal{X}_1 with

$$K_1 v_1 = \mathcal{X}'_1(u_1) v_1 = (\varphi'_1(u_1) v_1) k_1 u_1 + \varphi_k(u_1) k_1 v_1 \quad (3.5)$$

(cf. (3.3))

satisfies the counterparts of (2.3a) and (2.12):

$$\|K_1 v_1\|_V \leq C \|v_1\|_U \quad \text{for all } v_1 \in U_1, \quad (3.6)$$

$$\| [I - K_1]^{-1} \|_{U \rightarrow U} \leq C. \quad (3.7)$$

Note that the constants C are independent of 1 , i.e., independent of the step size h_1 .

3.2 Multi-Grid Algorithm of the Second Kind

The spaces U_1 and U_{1-1} corresponding to the step sizes h_1 and $h_{1-1} > h_1$, respectively, are connected by a prolongation (interpolation)

$$p : U_{1-1} \rightarrow U_1, \quad \|p\|_{U \rightarrow U} \leq C \quad (3.8a)$$

from the coarser grid into the finer one and by a restriction

$$r : U_1 \rightarrow U_{1-1}, \quad \|r\|_{U \rightarrow U} \leq C \quad (3.8b)$$

from the finer grid into the coarser one.

The condition (2.3b) is strengthened by

$$\|v_1 - p r v_1\|_U \leq C h_{1-1}^\gamma \|v_1\|_V \quad \text{for all } v_1 \in V_1 \quad (3.9)$$

for some $\gamma > 0$. The difference of the left-hand side of (3.9) can be viewed as the interpolation error of p .

The consistency is expressed by

$$\| [K_{1-1} r - r K_1] v_1 \|_U \leq C h_{1-1}^\gamma \|v_1\|_V \quad \text{for all } v_1 \in V_1 \quad (3.10)$$

with some $\gamma > 0$.

Note 3.1: Assume that \mathcal{K}_1 has the representation (3.3). Then (3.10) follows from

$$\begin{aligned} \|k_1 v_1\|_V &\leq C \|v_1\|_U, \quad \text{for all } v_1 \in U_1 \text{ (cf. (3.6)),} \\ \| [k_{1-1} r - r k_1] v_1 \|_U &\leq C h_{1-1}^B \|v_1\|_V \quad \text{for all } v_1 \in U_1 \\ &\hspace{15em} \text{(cf. (3.10)),} \\ | [\varphi_{1-1}^i(u_{1-1}) r - \varphi_1^i(u_1)] v_1 | &\leq C h_{1-1}^\gamma \|v_1\|_V \quad \text{for all } v_1 \in V_1, \\ \|u_{1-1} - r u_1\|_U &\leq C h_{1-1}^\gamma, \quad |\lambda_1 - \lambda_{1-1}| \leq C h_{1-1}^\gamma, \\ |\varphi_1^i(u_1) v_1| &\leq C \|v_1\|_V \quad \text{for all } v_1 \in V_1, \end{aligned}$$

where $\lambda_1 = \varphi_1(u_1)$, u_1 solution of (3.2).

The nonlinear problem (3.2) may have more than one solution. Having fixed some solution u_1^* of (3.2), we denote by

$$u_1 = \tilde{\Phi}_1(f_1)$$

the solution of the perturbed equation (3.11) lying in the neighbourhood of u_1^* :

$$u_1 + \mathcal{K}_1(u_1) + f_1, \quad \|f_1\|_U \leq \varrho_1, \quad \varrho_1 > 0 \text{ sufficiently small. (3.11)}$$

By (3.7) $\tilde{\Phi}_1$ is well-defined in a neighbourhood of $f_1 = 0$.

The multi-grid algorithm requires a repeated solution of (3.11) for the coarsest grid size ($l=0$) with different f_0 's. Assume that there is some iteration (e.g., Newton's iteration)

$$v_0^{(k)} \rightarrow v_0^{(k+1)} = \tilde{\Phi}_0(v_0^{(k)}, f_0) \quad (v_0^{(k)}, f_0 \in U_0)$$

that converges to $u_0 = \tilde{\Phi}_0(f_0)$.

One step of the multi-grid iteration is performed by the following programme. The first parameter l corresponds to the step size h_l . The last parameter f is the perturbation f_l from (3.11). Starting with $u = u_1^{(k)}$ [k^{th} iterate] the procedure yields the output $u = u_1^{(k+1)}$ [$(k+1)^{\text{st}}$ iterate].

```

procedure mgm (l,u,f); integer l; array u,f;
if l = 0 then u :=  $\tilde{\Phi}_0(u,f)$  else
begin integer j; array v,d; real s;
    u :=  $\mathcal{X}_1(u) + f$ ;
    d := r * (u -  $\mathcal{X}_1(u)$  - f);
    s :=  $\|d\|_U$ ;
    s := if s = 0 then 1 else  $\varrho_1/(2*s)$ ;
    comment for  $\varrho_1$  compare (3.11);
    d :=  $\tilde{f}_{l-1} + s * d$ ; v :=  $\tilde{u}_{l-1}$ ;
    for j := 1,2 do mgm (l-1,v,d);
    u := u-p * (v -  $\tilde{u}_{l-1}$ )/s
end;

```

\tilde{u}_{l-1} is an approximation to $\tilde{\Phi}_{l-1}(0)$ [solution of (3.2) for $l-1$],
while \tilde{f}_{l-1} is its defect:

$$\tilde{f}_{l-1} = \tilde{u}_{l-1} - \mathcal{X}_{l-1}(\tilde{u}_{l-1}).$$

If $\|\tilde{f}_{l-1}\|_U \leq \varrho_1/2$, the right-hand side d appearing in the procedure mgm satisfies $\|d\|_U \leq \varrho_1$ as required in (3.11).

Usually, the algorithm is called as follows:

```

 $\tilde{u}_0$  := suitable approximation;
for k := 1 step 1 until l do
    begin  $\tilde{u}_k := p * \tilde{u}_{k-1}$ ;  $\tilde{f}_{k-1} := \tilde{u}_{k-1} - \mathcal{X}_{k-1}(\tilde{u}_{k-1})$ ;
        for j := 1 step 1 until i do mgm (k,  $\tilde{u}_k, 0$ )
    end;

```

(3.12)

The usual choice of i is $i=1$.

The amount of computational work is proportional to the work needed for the performance of the mapping $v_1 \rightarrow \mathcal{X}_1(v_1)$ (cf. [10,13]).

The convergence of the multi-grid iteration is proved in /13/ (linear case) and /15/. The following note shows that the rate of convergence tends to zero as $h_1 \rightarrow 0$.

Note 3.2: Assume (3.4a,b), (3.6), (3.7), (3.8a,b), (3.9), (3.10),

$$\|\tilde{\Phi}_0(\tilde{u}_0, f_0) - \tilde{\Phi}_0(f_0)\|_U \leq \kappa \text{ for all } \|f_0\|_U \leq \varrho_0$$

with sufficiently small K , and

$$2\|f_k\|_U \leq \varrho_k \leq Ch_k^\gamma \quad (k=0,1,\dots,l-1)$$

and

$$\|u_1^{(0)} - u_1\|_U \leq C'h_1^\gamma \quad (C' \text{ small enough})$$

with γ from (3.9/10) and $u_1 = \Phi_1(0)$ (solution of (3.2)). Then the estimate

$$\|u_1^{(k+1)} - u_1\|_U \leq C h_1^\gamma \|u_1^{(k)} - u_1\|_U \quad (3.13)$$

holds for the iteration errors of the k^{th} and $(k+1)^{\text{st}}$ iterates $u_1^{(k)}$ produced by mgm for $f = f_1 = 0$.

The estimate of $u_1^{(0)} - u_1$ for the starting value can be reached by means of the technique (3.12) (cf. /15/).

Since \mathcal{X}_1 is not required to be a contraction the error of the approximation u_1 may become much larger by the 'smoothing step' $u_1 := \mathcal{X}_1(u_1) + f_1$ of the procedure mgm. Therefore it is advantageous to replace this statement by

$$\text{phi} := \varphi_1(u_1); u_1 := \mathcal{Z}_1(u_1) + f_1; u_1 := u_1 * \text{phi} / \varphi_1(u_1), \quad (3.14)$$

if φ_1 is linear. Hence, $\lambda_1 = \varphi_1(u_1)$ remains unchanged.

4. Eigenvalue Problems for Elliptic Partial Differential Equations

4.1 Reformulation of the Eigenvalue Problem

In /11/ we proposed a multi-grid method for solving elliptic eigenvalue problems. The method presented here is perhaps more easily to perform since no singular equations occur. An approach very similar to ours has intermediately been published by Ruge /20/. In addition he proposes to compute several eigenfunctions simultaneously and to improve the multi-grid iteration by Ritz' approximation.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) be a domain, $L = L(x, \partial/\partial x)$ is an elliptic differential operator of order $2m$. The boundary condition is described by the boundary operator B (Dirichlet boundary condition: $Bu = u$, Neumann condition: $Bu = \partial u / \partial n$).

The eigenvalue problem in consideration is

$$Lu = \lambda u \text{ in } \Omega, \quad Bu = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (4.1)$$

As for integral equations we introduce a functional φ and eliminate the unknown eigenvalue by $\lambda = \varphi(u)$:

$$\mathcal{L}(u) \equiv Lu - \varphi(u)u = 0 \text{ } (\Omega), \quad Bu = 0 \text{ } (\partial\Omega), \quad u \neq 0. \quad (4.2)$$

Under conditions similar to those of Note 2.1 the solution of (4.2) is isolated, u must be a single eigenvalue of L , i.e., $Lv - \lambda v = gu$ must imply $g = 0$ and $v \in \text{span}\{u\}$. Furthermore, $\varphi'(u)u \neq 0$ is required.

As in Section 2.5 the generalized nonlinear eigenvalue problem

$$L(\lambda)u = M(\lambda)u \text{ } (\Omega), \quad Bu = 0 \text{ } (\partial\Omega), \quad u \neq 0 \text{ } (L(\lambda)^{-1} M(\lambda) \text{ compact}) \quad (4.3)$$

can be rewritten as the nonlinear boundary value problem

$$\mathcal{L}(u) \equiv L(\varphi(u))u - M(\varphi(u))u = 0 \text{ } (\Omega), \quad Bu = 0 \text{ } (\partial\Omega), \quad u \neq 0. \quad (4.4)$$

4.2 Discretization and Multi-Grid Method of the First Kind

The continuous problem $\mathcal{L}(u) = 0$, $Bu = 0$ is to be discretized for a sequence (3.1) of step sizes as in Section 3.1. The discrete equation corresponding to the grid width h_1 is denoted by

$$\mathcal{L}_1(u_1) = 0, \quad u_1 \neq 0, \quad (4.5)$$

where in the case of (4.2) \mathcal{L}_1 is of the form

$$\mathcal{L}_1(u_1) = L_1 u_1 - \varphi_1(u_1) u_1.$$

Hence, the solution of (4.5) is the eigenfunction of the discrete problem $L_1 u_1 = \lambda_1 u_1$ with $\lambda_1 = \varphi_1(u_1)$.

The system (4.5) of nonlinear equations can be solved by the multi-grid method explained in /4/ or /18/. We call this method multi-grid algorithm of the first kind, since its properties are different from the iteration of Section 3.2. In contrast to the convergence properties of the algorithm of the second kind (cf. (3.13)), the multi-grid iteration of the first kind has a rate of convergence bounded by a constant not depending on the grid size h_1 . For more details and a proof compare /14/, /16/.

The proof of convergence requires a 'smoothing property' and an 'approximation property'. The first one follows from the smoothing property of L_1 by means of /14, Note 3.1/. The approximation property can be shown by virtue of the technique used in /9/.

4.3 Transformation into an Equation of the Second Kind

The nonlinear equations (4.2) or (4.4) can be treated as described in /7/. Consider the general eigenvalue problem (4.3). It is equivalent to (2.13), $u = k(\lambda)u$, with

$$k(\lambda) = L(\lambda)^{-1} M(\lambda).$$

Thus, the method of Section 3 can be applied. A natural discretization of $k(\lambda)$ is

$$k_1(\lambda_1) = L_1(\lambda_1)^{-1} M_1(\lambda_1), \quad \lambda_1 = \varphi_1(u_1).$$

Therefore, the performance of the mapping $v_1 \mapsto k_1(\lambda_1)v_1$ requires the (approximate) solution of the linear equation $L_1(\lambda_1)w_1 = M_1(\lambda_1)v_1$. In the general case this equation can be solved by the linear multi-grid algorithm (of the first kind, compare /8, 14/).

In many applications the following technique can be used. Consider the problem (4.2), $Lu = \varphi(u)u$. Assume that L can be split into $L' - L''$, where L'' is of lower order, while L' is easily invertible. E.g., assume that the discrete equation $L_1^i v_1 = f_1$ can be solved by a fast direct method (cf. Schröder, Trottenberg /21, 22/). Rewriting (4.2) as $L'u = L''u + \varphi(u)u$ one obtains (2.13), $u = k(\lambda)u$, with

$$k(\lambda) = L'^{-1} [L'' + \lambda I], \quad \lambda = \varphi(u).$$

Obviously, the performance of $v_1 \mapsto k_1(\lambda_1)v_1$ requires only the solution of $L_1^i w_1 = f_1 := L_1^i v_1 + \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 = \varphi_1(v_1)$.

An example of this technique is given in Section 5.2.

5. Numerical Examples

5.1. Integrodifferential Equation

Consider the nonlinear eigenvalue problem

$$-u''(x) = \int_0^1 e^{\lambda|x-y|} u(y) dy \quad (0 < x < 1),$$
$$u(0) = u(1) = 0, \quad (5.1)$$

which is of the form $Lu = k(\lambda)u$ (cf. (4.3)), where L is a differential operator, while $k(\lambda)$ is an integral operator. According to Section 4.3 it is transformed into $u = L^{-1}k(\lambda)u$.

The integral ku is discretized by the trapezoidal rule $k_1 u_1$, while $Lu = -u''$ is replaced by the usual difference formula $L_1 u_1$. The performance of $v_1 \mapsto \mathcal{K}_1(v_1)$ with

$$\mathcal{K}_1(v_1) := L_1^{-1} k_1(\lambda_1) v_1, \quad \lambda_1 = \mathcal{P}_1(v_1) := v_1(1/2)$$

requires the matrix multiplication $k_1(\lambda_1) * v_1$ and the inversion of a tridiagonal system of linear equations. The conditions (2.3a,b) are satisfied, e.g., with $B_0 = C^0([0,1])$ and $B_1 = C^2([0,1])$.

The prolongation p is defined as piece-wise linear interpolation, while r is the trivial restriction: $(r v_1)(x) = v_1(x)$ for $x = \nu h_{1-1}$, ν integer. The sequence of grid sizes is $h_1 = 1/2^{1+2}$ ($l=0,1,\dots$). $h_0 = 1/4$ is the coarsest grid width. The corresponding solution \tilde{u}_0 is

$$\tilde{u}_0(0) = \tilde{u}_0(1) = 0, \quad \tilde{u}_0(1/4) = \tilde{u}_0(3/4) = 6.925668, \quad \tilde{u}_0(1/2) = 7.734301.$$

$\tilde{\mathcal{K}}_0$ is defined as Newton's iteration with $\partial \mathcal{K}_0 / \partial u_0$ evaluated at \tilde{u}_0 . The multi-grid iteration with (3.14) is used.

The results¹ of Table 1 are obtained by (3.12), where $\tilde{u}_k := p * \tilde{u}_{k-1}$ is replaced by $\tilde{u}_k := s * p * \tilde{u}_{k-1}$ with

$$s = (5 * \tilde{\lambda}_{k-1} - \tilde{\lambda}_{k-2}) / (4 * \tilde{\lambda}_k), \quad \tilde{\lambda}_k = \mathcal{P}_k(\tilde{u}_k) \quad (5.2)$$

¹ The complete programme is contained in /8/.

in the case of $k \geq 2$. By this definition $\varphi_1(u_1)$ is the result of quadratic extrapolation of $\lambda_{1-2} = \lambda(h_{1-2})$ and $\lambda_{1-1} = \lambda(h_{1-1})$ to $h = h_1$. The number of iterations is $i = 1$. g_1 is chosen as $1/100$.

step size h_1	$h_0=1/4$	$h_1=1/8$	$h_2=1/16$	$h_3=1/32$	$h_4=1/64$
$u_1^{(1)}(1/2)$	7.734	5.5700	6.0795	6.2539	6.2347
exact solution $u_1(1/2)$	7.734	6.5349	6.3024	6.2475	6.2339

Table 1. Results $\lambda_1 = \varphi_1(u_1) = u_1(1/2)$ from (3.12) with $i = 1$ for the integrodifferential equation (5.1)

The iteration error $u_4^{(1)}(1/2) - u_4(1/2)$ of $\lambda_4^{(1)} = u_4(1/2)$ corresponding to $h_4 = 1/64$ is about 8_{10}^{-4} , whereas the discretization error $u_4(1/2) - u(1/2)$ is nearly 4_{10}^{-3} . Therefore, the first iterate $u_4^{(1)}$ at level $l = 4$ is accurate enough.

If greater accuracy is desired, it is possible to compute the second iterate $u_4^{(2)}$ at level $l = 4$ [result: $u_4^{(2)}(1/2) = 6.233974$]. But it is cheaper to increase the parameter i of (3.12) for the lower levels $l < 4$. Table 2 shows the results for $i = 2$, i.e., two multi-grid iterations (3.12) are performed per level. The starting value $u_1^{(0)}$ is computed from the second iterates $u_{1-1}^{(2)}$ and $u_{1-2}^{(2)}$ (cf. (5.2)). The arrows in Table 2 indicate the course of the computation. The calculation can be stopped when the first iterate $u_4^{(1)}$ at the level $l = 4$ is computed, since this value is sufficiently accurate. Only for completeness the second iterate $u_4^{(2)}$ is contained in Table 2, too.

h_1	$h_0 = 1/4$	$h_1 = 1/8$	$h_2 = 1/16$	$h_3 = 1/32$	$h_4 = 1/64$
$u_1^{(1)}(1/2)$	7.734	→ 5.5700	6.31747	6.25229	6.2339585
$u_1^{(2)}(1/2)$	-	↓ ↗ 6.1891	↓ ↗ 6.29739	↓ ↗ 6.24795	↓ ↗ 6.2339433
$u_1(1/2)$	7.734	6.5349	6.30241	6.24749	6.2339431

Table 2. Results as in Table 1, but for $i = 2$

There are two reasons for the greater accuracy of $u_4^{(1)}(1/2)$ in the case of $i = 2$. $u_4^{(0)}$ is a better starting value as for $i = 1$. Moreover, the better approximations $\tilde{u}_k = u_k^{(2)}$ ($k < 4$) yield a better rate of convergence. The rates at the level $l = 4$ are $\approx 1/20$ for $i = 1$ (i.e. $\tilde{u}_k = u_k^{(1)}$, $k < 4$) and $\approx 1/100$ for $i = 2$.

5.2 Steklov Eigenvalue Problem

In Section 4 we mentioned only problems with homogeneous boundary condition $Bu = 0$. Nevertheless, other kinds of problems can be treated, too. As one example we consider the Steklov eigenvalue problem

$$\begin{aligned}
 -\Delta y &= 0 & \text{in } \Omega &= (0,1) \times (0,1), \\
 \frac{\partial y}{\partial n} &= \lambda y & \text{on } \partial\Omega.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

According to the technique of Section 4.3 we define an operator

$k : U \subset L^2(\partial\Omega) \rightarrow V \subset H^1(\partial\Omega)$ as follows. Let

$$u \in U := \left\{ v \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} v d\Gamma = 0 \right\}$$

and define $y \in H^{1/2}(\Omega)$ as solution of the Neumann problem $-\Delta y = 0$ (Ω), $\partial y / \partial n = u$ ($\partial\Omega$). By $u \in U$ a solution y exists and is well-determined up to a constant. y is unique if we require $y|_{\partial\Omega} \in U$. Define ku as restriction of y to

$\partial\Omega$: $ku = y|_{\partial\Omega}$. Obviously, (5.3) takes the form (2.4), $u = \lambda ku$.

The performance of $v_1 \rightarrow k_1 v_1$ requires the solution y_1 of a die-

crete Neumann problem. As solver we used the iterative programme contained in /8/. More precisely, the solution y_1 is approximated by the first iterate $y_1^{(1)}$ produced by the programme /8/. The starting value $y_1^{(0)}$ is $y_1^{(1)}$ from the preceding call of $v_1 \rightarrow k_1 v_1$. For the first iteration at the level 1 the starting value $y_1^{(0)}$ is defined by py_{1-1} . A similar secondary iteration technique is studied in /15/.

The first eigenvalue $\lambda = 0$ of (5.3) has the trivial solution $y = \text{const}$. In this case $u = y|_{\partial\Omega}$ does not belong to U . Hence, $\lambda = 0$ is no eigenvalue of $u = \lambda ku$.

The second and third eigenvalue of (5.3) is the double eigenvalue $\lambda \approx 1.3765$. Table 3 shows the results $\lambda_1 = \mathcal{P}_1(u_1) := u_1(0,0)$ of the programme (3.12) with $m = 1$ and (5.2). The starting value \tilde{u}_0 is defined by $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{u}_0(0,0) = 1.349$, $\tilde{u}_0(1/4,0) = 1.035$, $\tilde{u}_0(1/2,0) = 0.937$, $\tilde{u}_0(0,1/4) = 0.753$ and by its symmetries $u_0(x,y) = u_0(1-x,y) = -u_0(x,1-y)$. The observed rates of convergence are

$h = 1/8 : 0.09$, $h = 1/16 : 0.06$, $h = 1/32 : 0.03$, $h = 1/64 : 0.014$ according to (3.13) and $\gamma = 1$. Again the iteration error is much smaller than the discretization error.

step size	$h_0=1/4$	$h_1=1/8$	$h_2=1/16$	$h_3=1/32$	$h_4=1/64$
$\lambda_1^{(1)} = u_1^{(1)}(0,0)$	1.3490	1.3688	1.37466	1.376063	1.3763961
exact solution λ_1	1.3490	1.3696	1.37479	1.376077	1.3763983

Table 3. 2nd and 3rd Steklov eigenvalues λ_1

The main work for computing the results of Table 3 (and Table 4) is the work for performing $v_1 \rightarrow K_1 v_1$, since this mapping requires the computation of y_1 . $K_1 v_1$ is called 2-times for $l = 4$, 6-times for $l = 3$, 12-times for $l = 2$, and 24-times for $l = 1$.

The fourth eigenvalue $\lambda = 2$ belongs to the eigenfunction $y = 2(1-2x)(1-2y)$. The calculation is trivial, since the interpolation of u_0 yields the exact discrete function u_1 .

The fifth and sixth eigenvalue $\lambda \approx 4.647$ is a double one. The starting value \tilde{u}_0 is defined by $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{u}_0(0,0) = 4.628$, $\tilde{u}_0(1/4,0) = -0.726$, $\tilde{u}_0(1/2,0) = -3.175$ and the symmetries $u_0(x,y) = u_0(1-x,y) = u_0(x,1-y)$. The programme (3.12) with $i = 1$ and (5.2) results in the approximations shown in Table 4.

step size	$h_0=1/4$	$h_1=1/8$	$h_2=1/16$	$h_3=1/32$	$h_4=1/64$
$\lambda_1^{(1)} = u_1^{(1)}(0,0)$	4.6277	4.6918	4.6562	4.651034	4.647942
exact λ_1	4.6277	4.6690	4.6552	4.649417	4.647822

Table 4. 5th and 6th Steklov eigenvalue λ_1

The seventh and eighth eigenvalue is $\lambda \approx 4.7808$. The starting value \tilde{u}_0 is chosen as $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{u}_0(0,0) = 4.893$, $\tilde{u}_0(1/4,0) = -3.767$, $\tilde{u}_0(1/2) = -8.310$, $\tilde{u}_0(0,1/4) = 1.582$ with $u_0(x,y) = u_0(1-x,y) = -u_0(x,1-y)$. Table 5 contains the results of (3.12) with (5.2) and $i = 3$. Obviously, the first iterate $u_4^{(1)}$ at the level $h_4 = 1/64$ has an iteration error smaller than the discretization error.

step size	$h_0 = 1/4$	$h_1 = 1/8$	$h_2 = 1/16$	$h_3 = 1/32$	$h_4 = 1/64$
$\lambda_1^{(1)}$	4.893	4.8924	4.8243	4.785482	4.7820368
$\lambda_1^{(2)}$	-	4.8453	4.8021	4.784900	4.7818015
$\lambda_1^{(3)}$	-	4.8360	4.7972	4.784795	4.7817911
exact λ_1	4.893	4.8332	4.7962	4.784785	4.7817905

Table 5. 7th and 8th Steklov eigenvalue $\lambda_1^{(1)}$

The ninth and tenth eigenvalue $\lambda \approx 7.859$ requires $h_0 = 1/8$ as coarsest grid. The starting value is $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{u}_0(0,0) = 8.105$, $\tilde{u}_0(1/8,0) = -0.106$, $\tilde{u}_0(1/4,0) = -5.426$, $\tilde{u}_0(3/8,0) = -5.039$ with $u_0(x,y) = -u_0(1-x,y) = -u_0(x,1-y)$. The results of Table 6 are obtained from (3.12) with (5.2) and $i = 3$.

step size.	$h_0 = 1/8$	$h_1 = 1/16$	$h_2 = 1/32$	$h_3 = 1/64$
$\lambda_1^{(1)}$	8.105	7.9626	7.93068	7.84432
$\lambda_1^{(2)}$	-	7.9469	7.89608	7.85432
$\lambda_1^{(3)}$	-	7.9456	7.88488	7.86206
exact λ_1	8.105	7.9469	7.88325	7.86543

Table 6. 9th and 10th Steklov eigenvalue $\lambda_1^{(1)}$.

References

- /1/ Astrachancev, G. P.: Ob odnom iteracionnom metode rešenija setočnych elliptičeskich zadač. Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. 11, 2, 439 - 448 (1971)
- /2/ Baker, C. T. H.: The numerical treatment of integral equations. London 1977
- /3/ Brakhage, H.: Zur Fehlerabschätzung für die numerische Eigenwertbestimmung bei Integralgleichungen. Numer. Math. 3, 174 - 179 (1961)
- /4/ Brandt, A.: Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. Math. Comp. 31, 333 - 390 (1977)
- /5/ Bulirsch, R., Grigorieff, R. D., and Schröder, J. (Eds.): Numerical treatment of differential equations. Proceedings, Oberwolfach, July 1976. Lecture Notes in Math. 631, Berlin 1978

- /6/ Chatelin, F.: Spectral approximation of linear operators.
New York 1983
- /7/ Chatelin, F.: Newton methods for iterative refinement of eigenelements of linear operators. Lecture presented at the conference on 'Error Asymptotic and Defect Correction' (organized by K. Böhmer, V. Pereyra, H. J. Stetter), Oberwolfach, July 1983
- /8/ Hackbusch, W.: A multi-grid method applied to a boundary value problem with variable coefficients in a rectangle. Report 77 - 17, Universität Köln 1977
revised version: Bericht 2/83, Universität Kiel 1983
- /9/ Hackbusch, W.: On the multi-grid method applied to difference equations. Computing 20, 291 - 306 (1978)
- /10/ Hackbusch, W.: On the fast solution of nonlinear elliptic equations. Numer. Math. 32, 83 - 95 (1979)
- /11/ Hackbusch, W.: On the computation of approximate eigenvalues and eigenfunctions of elliptic operators by means of a multi-grid method. SIAM J. Numer. Anal. 16, 201 - 215 (1979)
- /12/ Hackbusch, W.: Multi-grid solutions to linear and nonlinear eigenvalue problems for integral and differential equations. Report 80 - 3, Universität Köln 1980
- /13/ Hackbusch, W.: Die schnelle Auflösung der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art. Beiträge Numer. Math. 9, 47 - 62 (1981)
- /14/ Hackbusch, W.: On the convergence of multi-grid iterations. Beiträge Numer. Math. 9, 213 - 239 (1981)
- /15/ Hackbusch, W.: Error analysis of the nonlinear multi-grid method of the second kind. Apl. Mat. 26, 18 - 29 (1981)

- /16/ Hackbusch, W. : Multi-grid convergence theory. In: Hackbusch, W., and Trottenberg, U. (Eds.): /18/, S. 177 - 219
- /17/ Hackbusch, W., and Hofmann, G. : Results of the eigenvalue problem for the plate equation. Z. Angew. Math. Phys. 31, 730 - 739 (1980)
- /18/ Hackbusch, W., and Trottenberg, U. (Eds.): Multi-grid methods. Proceedings, Köln-Porz, Nov. 1981. Lecture Notes in Math. 960, Berlin 1982
- /19/ Hemker, P. W., and Schippers, H. : Multiple grid methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind. Math. Comp. 36, 215 - 232 (1981)
- /20/ Ruge, J. W. : Multigrid methods for differential eigenvalue and variational problems and multigrid simulation. Doctoral thesis, Colorado State University, Fort Collins 1981
- /21/ Schröder, J., and Trottenberg, U. : Reduktionsverfahren für Differenzgleichungen bei Randwertaufgaben. I. Numer. Math. 22, 37 - 68 (1973)
- /22/ Schröder, J., Trottenberg, U., and Witsch, K. : On fast Poisson solvers and applications. In: Bulirsch, R., Grigorieff, R. D., and Schröder, J. (Eds.): /5/, S. 153 - 187
- /23/ Spence, A. : On the convergence of the Nyström method for the integral equation eigenvalue problem. Numer. Math. 25, 57 - 66 (1975)

received: November 7, 1983

Author's address:

Prof. Dr. W. Hackbusch
Institut für Informatik und Praktische Mathematik
Christian-Albrechts-Universität Kiel
Olshausenstr. 40
D-2300 Kiel 1

Jürgen Dassow
Uwa Fest

On Regulated L Systems

0. Introduction

Mechanisms which regulate the application of the rules belong to the most important devices in order to enlarge the generative capacity of a certain type of grammars. Some of the most well-known regulation mechanisms are matrices, programs, random context, and regular control, and added to context-free grammars they have the same generative power. In this paper we continue the comparison of these devices (see /6/ for further comparison results); we shall study the effect of these mechanisms applied to L systems.

The derivation $v \rightarrow w$ in an L system is characterized by the rewriting of all letters of v according to the given set of productions. In order to apply an regulation mechanism there are two possibilities:

1. We consider the derivation $v \Rightarrow w$ as a sequential rewriting of all letters of v , and this sequential process is regulated by one of the above mechanisms,

or

2. we use systems with a set of production sets, so-called tabled L systems, and with a parallel rewriting of all letters of v according to one of these tables. Then the mechanism regulates the application of the tables.

L systems of the first type were introduced in /12/, however, only programmed L systems were considered. In the first part of this paper we give the definitions for the other mechanisms, too, and we compare the corresponding families of extended languages, i.e. we consider only words over a terminal alphabet. We show that, in all cases, the generative capacity coincides with that of the (sequential) programmed context-free

grammars. This continues the work of /12/ and /4/. L systems of the second type were already studied in /1/, /8/, /11/, /13/, /15/, /18/. Besides /13/ only extended languages were considered. In the second part we regard L systems of this type without nonterminals. We discuss the effect of determinism and of the use of erasing productions, we give some closure properties and compare the generative capacities. Throughout this paper we assume that the reader is familiar with the basic concepts of formal language theory, e.g. in the scope of /16/. Further we identify two languages if they differ only in the empty word.

1. L_I systems

1.1. Definitions and notations

For the sake of completeness we recall informally the definitions of regularly controlled, matrix, programmed, and random context (context-free) grammars and their languages. For detailed information we refer to /16/, /10/.

In all cases we use the set V_N of nonterminals, the set V_T of terminals, $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$, the axiom $S \in V_N$, and P denotes the set of productions.

The productions of a programmed grammar $G = (V_N, V_T, P, S)$ are of the form

$$(b, A \rightarrow w, S(b), F(b))$$

where b is the label of the production, $A \in V_N$, $w \in V^+$, and $S(b)$ and $F(b)$ are sets of labels. If $A \rightarrow w$ is applicable, then, after its use, we have to apply a rule with a label in the success field $S(b)$. If $A \rightarrow w$ is not applicable, then we continue the derivation with a production whose label is in the failure field $F(b)$.

The productions of a random context grammar $G = (V_N, V_T, P, S)$ are of the form

$$(A \rightarrow w, R, Q)$$

where $A \in V_N$, $w \in V^+$, and R and Q are subsets of V_N . The

rule is applicable to uAv iff uv contains all letters of R , and no letter of Q occurs in uv .

In these both cases the generated language is defined by

$$L(G) = \{w : w \in V_T^*, S \xrightarrow{*} w\}$$

where $\xrightarrow{*}$ is the transitive closure of the direct derivation \Rightarrow .

A regularly controlled grammar is a construct

$$G = (V_N, V_T, P, S, R, F)$$

where R is a regular language over the set of labels of the context-free productions, and F is a subset of the set of labels. The generated language consists of all words $w \in V_T^*$ which have a derivation

$$S \xrightarrow{i_1} w_1 \xrightarrow{i_2} w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_{n-1} \xrightarrow{i_n} w$$

such that

- 1) $i_1 i_2 \dots i_n \in R$,
- ii) $w_j = u_j A v_j$, $w_{j+1} = u_j w v_j$, and $A \rightarrow w$ is the rule with label i_{j+1}
or
 $w_j = w_{j+1}$, $A \rightarrow w$ has the label i_{j+1} , A does not occur in w_j , and $i_j \in F$.

A matrix grammar is a construct $G = (V_N, V_T, M, S, F)$ where

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$$

is a finite set of finite sequences of productions,

$$m_i = [A_{i,1} \rightarrow w_{i,1}, A_{i,2} \rightarrow w_{i,2}, \dots, A_{i,k(i)} \rightarrow w_{i,k(i)}]$$

for $1 \leq i \leq s$, and F is a subset of the occurrences of rules in the matrices. The application of a matrix is defined as the sequential application of its rules in the given order; again the rules of F can be overpassed if they are not applicable. The language of G consists of all words of V_T^* which can be obtained by iterated applications of the matrices.

By PrCF, RccF, RCF, and MCF we denote the family of programmed, random context, regularly controlled, and matrix grammars with context-free core productions. $\mathcal{L}(X)$ denotes the family of languages generated by grammars in X . It is a well-known result (see /10/, /16/) that

$$\mathcal{L}(\text{PrCF}) = \mathcal{L}(\text{RccF}) = \mathcal{L}(\text{RCF}) = \mathcal{L}(\text{MCF}).$$

Now we define the first type of regulated L systems. In the usual theory of L systems an alphabet V is considered, and the set V' of terminals is a subset of V , and the productions have the form $a \rightarrow u$ where $a \in V$, i.e. there are also rules for terminals, and the axiom w is an element of V^+ . It is easy to define the above regulation mechanisms under these circumstances, too. Indeed, the only necessary modification is needed for random context systems where $R \subseteq V$, $Q \subseteq V$ have to be required.

We say that $v \in V^+$ derives $v' \in V^+$ in the I-mode¹ iff

- i) $v = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \in V$ for $1 \leq i \leq n$,
- ii) $v' = u_1 u_2 \dots u_n$,
- iii) there are words w_0, w_1, \dots, w_n and a permutation π of $\{1, 2, \dots, n\}$ such that $w_0 = v$, $w_n = v'$, and w_i is obtained from w_{i-1} , $1 \leq i \leq n$, by application of the rule $a_{\pi(i)} \rightarrow u_{\pi(i)}$.

Now let $G = (V, V', P, w)$, $G = (V, V', M, w, F)$ or $G = (V, V', P, w, R, F)$ be a random context, programmed, matrix or regularly controlled L system. Then its language $L_I(G)$ consists of all words $v \in (V')^+$ such that there are words v_0, v_1, \dots, v_m with

- i) $w = v_0$, $v = v_m$,
- ii) for $1 \leq i \leq m$, v_i is derived from v_{i-1} in the I-mode,
- iii) the complete derivation $w \xrightarrow{x} v$ satisfies the condition of the regulation mechanism.

¹ The letter I stands for Indian since this type of regulation of the derivation was introduced by K. S. Rajasethupathy and R. K. Shyamasundar from India.

By $\mathcal{L}(\text{PrL}_I)$, $\mathcal{L}(\text{RcL}_I)$, $\mathcal{L}(\text{ML}_I)$, and $\mathcal{L}(\text{RL}_I)$ we denote the families of languages generated in the I-mode by programmed, random context, matrix, and regularly controlled L systems, respectively.

Remark: Our definition of a programmed L system differs slightly from that in /12/ since we do not use a set of final productions. However, it can be seen from the proof of Theorem 1 in /12/ that this requirement is not necessary for extended languages.

1.2. The generative capacity of L_I systems

In /12/ and /4/ it is proved that

$$\mathcal{L}(\text{PrCF}) = \mathcal{L}(\text{PrL}_I).$$

In this paragraph we show that the same relation holds for the other regulation mechanisms, too. In the constructions we use primed alphabets. Then we put $w' = x_1'x_2'\dots x_n'$ for $w = x_1x_2\dots x_n$ and $Q' = \{x' : x \in Q\}$ for $Q \subseteq V$.

Lemma 1.1: $\mathcal{L}(\text{RcCF}) = \mathcal{L}(\text{RcL}_I)$.

Proof: 1) $\mathcal{L}(\text{RcCF}) \subseteq \mathcal{L}(\text{RcL}_I)$.

Let $G = (V_N, V_T, P, S)$ be a random context grammar. We construct the following random context L_I system

$G' = (V, V', P', S)$ with

$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ where $V_1 = V_N \cup V_T$,

$$V_2 = \{x' : x \in V_1\},$$

$$V_3 = \{x'' : x \in V_1\},$$

$V' = V_T$,

$P' = \{(A \rightarrow w', R, Q \cup V_2 \cup V_3) : (A \rightarrow w, R, Q) \in P\}$

$$\cup \{(a \rightarrow a', \emptyset, V_3) : a \in V_1\}$$

$$\cup \{(a' \rightarrow a'', \emptyset, V_1) : a \in V_1\}$$

$$\cup \{(a'' \rightarrow a, \emptyset, V_2) : a \in V_1\}.$$

Now we consider a derivation step $uAv \Rightarrow uvw$ in the grammar G . Obviously, it can be simulated in the system G' by

$$z_0 = uAv \Rightarrow uw'v \xrightarrow{M} u'w'v' = z_1 \xrightarrow{M} u''w''v'' = z_2 \xrightarrow{M} uvw = z_3$$

where each of the derivations $z_i \xrightarrow{M} z_{i+1}$, $0 \leq i < 3$, is in the I-mode. Besides derivations of this type we have only derivations of the form

$$z \xrightarrow{M} z' \xrightarrow{M} z'' \xrightarrow{M} z.$$

Hence $L(G) = L_I(G')$.

ii) $\mathcal{L}(RCL_I) \subseteq \mathcal{L}(RcCF)$.

Let $G = (V, V', P, w)$ be a random context L_I system. Then we construct the random context grammar $G' = (V_N, V_T, P', S)$ where

$$V_N = V(1) \cup V(2) \cup V(3) \cup \{S\} \quad \text{with } V(1) = \{x^{(1)} : x \in V\} \\ \text{for } 1 \leq i \leq 3,$$

$$V_T = V',$$

and P' consists of all rules of the form

$$(S \rightarrow w^{(1)}, \emptyset, \emptyset),$$

$$(a^{(1)} \rightarrow w^{(2)}, R^{(1)}, Q^{(1)} \cup Q^{(2)} \cup V(3) \cup V') \quad (1) \\ \text{where } (a \rightarrow w, R, Q) \in P,$$

$$(a^{(1)} \rightarrow w^{(2)}, R_1^{(1)} \cup R_2^{(2)}, Q^{(1)} \cup Q^{(2)} \cup R_2^{(1)} \cup V(3) \cup V') \quad (2) \\ \text{where } (a \rightarrow w, R, Q) \in P, R_1 \cup R_2 = R,$$

$$(a^{(2)} \rightarrow a^{(3)}, \emptyset, V(1) \cup V') \quad \text{for } a \in V,$$

$$(a^{(3)} \rightarrow a^{(1)}, \emptyset, V(2) \cup V') \quad \text{for } a \in V, \quad (3)$$

$$(a^{(3)} \rightarrow a, \emptyset, V(1) \cup V(2)) \quad \text{for } a \in V'. \quad (4)$$

Now we consider a derivation in G' . It starts with $S \Rightarrow w^{(1)}$. Then we can apply only rules of the types (1) and (2) until all letters of $w^{(1)}$ are rewritten, and we obtain $w^{(1)} \xrightarrow{M} v^{(2)}$. Then we have to rewrite all letters $a^{(2)}$ of

$v^{(2)}$ by $a^{(3)}$ which leads to $v^{(3)}$. If we now use a rule of type (3), we have to rewrite all letters $a^{(3)}$ of $v^{(3)}$ by $a^{(1)}$ and we obtain $v^{(1)}$. Therefore $w^{(1)} \xrightarrow{x} v^{(1)}$ is a correct derivation in G' , and by the definition of the rules (1) and (2) it corresponds to a derivation $w \Rightarrow v$ in the I-mode in the system G .

If we apply a rule of type (4) to $v^{(3)}$ we have to rewrite all letters $a^{(3)}$ of $v^{(3)}$ by a and we obtain a word over the terminal alphabet V' which belongs to $L(G)$ or the derivation stops after some steps with a word over the set $V^{(3)} \cup V'$ which contains at least one element of $V^{(3)}$. Hence $L_I(G) = L(G')$.

Lemma 1.2: $\mathcal{L}(ML_I) = \mathcal{L}(MCF)$.

Proof: 1) $\mathcal{L}(ML_I) \subseteq \mathcal{L}(MCF)$.

Let $G = (V, V', M, w, F)$ be a matrix ML_I system. Further, let $V = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $V' = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. We put

$V^{(1)} = \{x^{(1)} : x \in V\}$, $1 \leq i \leq 4$. In the following constructions we write $V \rightarrow N$ instead of $[x_1 \rightarrow N, x_2 \rightarrow N, \dots, x_m \rightarrow N]$,

and we use analogous abbreviations for the other alphabets.

With each matrix

$$[a_1 \rightarrow u_1, a_2 \rightarrow u_2, \dots, a_n \rightarrow u_n] \in M$$

we associate the following matrices

$$[V^{(4)} \rightarrow N, V^{(1+2)} \rightarrow N, a_1^{(1)} \rightarrow u_1^{(1+1)}, \dots, a_n^{(1)} \rightarrow u_n^{(1+1)}], \quad (1)$$

$$[V^{(4)} \rightarrow N, V^{(1+2)} \rightarrow N, a_1^{(1)} \rightarrow u_1^{(1+1)}, \dots, a_j^{(1)} \rightarrow u_j^{(1+1)}, \\ V^{(1)} \rightarrow N, a_{j+1}^{(1+1)} \rightarrow u_{j+1}^{(1+2)}, \dots, a_n^{(1+1)} \rightarrow u_n^{(1+2)}], \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & [v^{(4)} \rightarrow N, v^{(1+2)} \rightarrow N, a_1^{(1)} \rightarrow u_1^{(1+1)}, \dots, a_r^{(1)} \rightarrow u_r^{(1+1)}, \\
 & \quad v^{(1)} \rightarrow N, a_{r+1}^{(1+1)} \rightarrow u_{r+1}^{(1+2)}, \dots, a_s^{(1+1)} \rightarrow u_s^{(1+2)}, \\
 & \quad v^{(1+1)} \rightarrow N, a_{s+1}^{(1+2)} \rightarrow u_{s+1}^{(1)}, \dots, a_n^{(1+2)} \rightarrow u_n^{(1)}], \quad (3)
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 & [v^{(4)} \rightarrow N, v^{(1+2)} \rightarrow N, a_1^{(1)} \rightarrow u_1^{(1+1)}, v^{(1+3)} \rightarrow N, a_2^{(1+1)} \rightarrow u_2^{(1+2)}, \\
 & \quad v^{(1+4)} \rightarrow N, a_3^{(1+2)} \rightarrow u_3^{(1+3)}, \dots, v^{(1+n+1)} \rightarrow N, \\
 & \quad a_n^{(1+n-1)} \rightarrow u_n^{(1+n)}], \quad (n-1)
 \end{aligned}$$

where $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq s \leq n$, $1 \leq i \leq 3$, and the addition is performed mod 3. Further we add the starting matrix

$$[S \Rightarrow w^{(1)}]$$

and the terminating matrices

$$[v^{(1)} \rightarrow N, v^{(1+1)} \rightarrow N, x_j^{(1+2)} \rightarrow x_j^{(4)}] \text{ for } 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq t,$$

$$[v^{(1)} \rightarrow N, v^{(2)} \rightarrow N, v^{(3)} \rightarrow N, x_j^{(4)} \rightarrow x_j] \text{ for } 1 \leq j \leq t.$$

Let M' be the set of all matrices constructed in this way, and let F' consist of all occurrences of rules of the form $x \rightarrow N$ and of all occurrences of rules whose original rules in M are in F . We consider the context-free matrix grammar

$G' = (V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(3)} \cup V^{(4)} \cup \{S, N\}, V', M', S, F')$. In any derivation, first we have to apply the starting matrix, i.e. we obtain $S \Rightarrow w^{(1)}$. Then $i = 1$ and we can apply a matrix of type (1), (2), ..., (n-1) or a terminating rule. In the first n-1 cases we simulate the application of the associated matrix in the L_I system, and after its application we can continue this process. If we apply a terminating matrix (this is only possible if the last applied matrix finished the rewriting of a word in the I-mode), then in the sequel only terminating matrices are applicable and we derive a word over V' which belongs to $L_I(G')$. Therefore $L(G') = L_I(G)$.

11) First we note that we can assume that in a context-free matrix grammar we can rewrite only letters of the current word v if we apply a matrix to v (essentially, this is proved in /7/ in the construction of the checking version). Now we can apply the techniques of the proof of Lemma 1.1 and part 1) of this proof in order to show the statement $\mathcal{L}(\text{MCF}) \subseteq \mathcal{L}(\text{ML}_I)$.

Lemma 1.3: $\mathcal{L}(\text{RCF}) = \mathcal{L}(\text{RL}_I)$.

Since the ideas of the proof of Lemma 1.3 are similar to those of the preceding ones, we omit it.

Combining all these results we obtain

Theorem 1.4: $\mathcal{L}(\text{PrL}_I) = \mathcal{L}(\text{RcL}_I) = \mathcal{L}(\text{ML}_I) = \mathcal{L}(\text{RL}_I)$
 $= \mathcal{L}(\text{PrCF}) = \mathcal{L}(\text{RcCF}) = \mathcal{L}(\text{MCF}) = \mathcal{L}(\text{RCF})$.

Hitherto we have considered only grammars and systems without erasing rules. If we allow erasing rules, all our constructions remain valid, and thus we obtain

Corollary 1.5: The families of languages generated by random context, programmed, regularly controlled, and matrix L systems in the I-mode coincide with the family of recursively enumerable languages.

Remark: Further, the regulated rewriting concerned context-free grammars. If we consider Indian parallel grammars, i.e. in each derivation step all occurrences of a letter are rewritten by the same rule, then we obtain in the case of unregulated L systems the family of parallel OL languages which is already studied in /2/, /9/, /17/. In the regulated case we have the following results: The Indian parallel programmed, matrix, random context, and regularly controlled L_I systems (with and without erasing rules) generate the family of extended deterministic tabled OL languages (see the next paragraph for a definition of the latter family). The proof follows by the above arguments and by /3/.

2. Regulated tabled L systems

2.1. Definitions and notations

A TOL system is a triplet $G = (V, \mathcal{P}, w)$ where

- V is a finite alphabet,
- \mathcal{P} is a finite set $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ of tables, and each table p_i , $1 \leq i \leq r$, is a finite subset of $V \times V^*$ such that, for all $a \in V$, there is a pair (a, u) in p_i (the elements of $V \times V^*$ are usually written as $a \rightarrow u$),
- $w \in V^+$.

We say that x directly derives y in G iff

- i) $x = x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in V$ for $1 \leq i \leq n$,
- ii) $y = y_1 y_2 \dots y_n$, $y_i \in V^*$,
- iii) there is a table p_j , $1 \leq j \leq r$, such that $x_i \rightarrow y_i \in p_j$ for $1 \leq i \leq n$.

In this case we write $x \xrightarrow{p_j} y$ or $x \xrightarrow{G} y$ or $x \Rightarrow y$ (if the table and/or the system are obvious by the context). By $\xrightarrow{*}$ we denote the reflexive and transitive closure of \Rightarrow .

The language $L(G)$ generated by G is defined as

$$L(G) = \{x : w \xrightarrow{*} x\}.$$

Now we define four types of regulation of the application of the tables.

A programmed TOL system is a triplet $G = (V, \mathcal{P}, w)$ where V , \mathcal{P} , and w are defined as above and where with each table p of \mathcal{P} a set $S(p) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ is associated. The language $L(G)$ of a programmed TOL system G consists of all words x which have a derivation

$$w \xrightarrow{p_{i_1}} w_1 \xrightarrow{p_{i_2}} w_2 \xrightarrow{p_{i_3}} \dots \xrightarrow{p_{i_{n-1}}} w_{n-1} \xrightarrow{p_{i_n}} w_n = x$$

such that $p_{i_{j+1}} \in S(p_{i_j})$ for $1 \leq j < n$.

A regularly controlled TOL system is a construct $G = (V, \mathcal{P}, w, R)$ where (V, \mathcal{P}, w) is a TOL system and R is a regular set over $\{1, 2, \dots, r\}$. The language $L(G)$ of a reg-

ularly controlled system G consists of all words x such that there is a derivation

$$w \xrightarrow{p_{i_1}} w_1 \xrightarrow{p_{i_2}} w_2 \xrightarrow{p_{i_3}} \dots \xrightarrow{p_{i_n}} w_n = x$$

with $i_1 i_2 \dots i_n \in R$.

A matrix TOL system is a construct $G = (V, \mathcal{P}, w, M)$ where (V, \mathcal{P}, w) is a TOL system and M is a finite set,

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\},$$

of finite sequences

$$m_i = (i_1, i_2, \dots, i_{k_i})$$

of elements of $\{1, 2, \dots, r\}$. We write $x \xrightarrow{m_i} y$ iff there are

words x_1, x_2, \dots, x_{k_i} such that

$$x = x_1 \xrightarrow{p_{i_1}} x_2 \xrightarrow{p_{i_2}} \dots \xrightarrow{p_{i_{k_i-1}}} x_{k_i} \xrightarrow{p_{i_{k_i}}} y.$$

The language $L(G)$ of a matrix TOL system G consists of all words u with a derivation

$$w = w_0 \xrightarrow{m_{j_0}} w_1 \xrightarrow{m_{j_1}} \dots \xrightarrow{m_{j_h}} w_h \xrightarrow{p_{i_1}} w_1' \xrightarrow{p_{i_2}} \dots \xrightarrow{p_{i_t}} w_t' = u$$

where $m_{j_0}, m_{j_1}, \dots, m_{j_h} \in M$ and (i_1, i_2, \dots, i_t) is the initial part of a matrix $m_i \in M$ (i.e. only the last matrix is not applied completely).

A random context TOL system is a construct $G = (V, \mathcal{P}, w)$ where with each table $p \in \mathcal{P}$ a pair (R, Q) with $R \subseteq V, Q \subseteq V, R \cap Q = \emptyset$ is associated, and the table p is applicable to a word x iff all letters of R are contained in x and no letter of Q occurs in x . $L(G)$ consists of all words y which have a derivation

$$w = w_0 \xrightarrow{p_{i_0}} w_1 \xrightarrow{p_{i_1}} \dots \xrightarrow{p_{i_{n-1}}} w_n \xrightarrow{p_{i_n}} y$$

such that p_{i_j} is applicable to w_j for $1 \leq j \leq n$.

By TOL, PrTOL, RTOL, MTOL, RCTOL we denote the families of unregulated, programmed, regularly controlled, matrix, and random context TOL systems. Let

$$G = \{\lambda, Pr, P, M, Rc\} \text{ and } G' = G \setminus \{\lambda\}^1.$$

Let $X \in G$. We say that L is an XTOL language iff there is a $G \in XTOL$ such that $L = L(G)$. By $\mathcal{L}(XTOL)$ we denote the family of all XTOL languages.

A system G is called deterministic iff, for all $p \in P$, the following condition is satisfied: $a \rightarrow u_1 \in p$ and $a \rightarrow u_2 \in p$

imply $u_1 = u_2$. It is called propagating if no table contains an erasing rule. The corresponding families of systems and languages with these restrictions are denoted by adding the letter D (deterministic) or P (propagating) to the above notation.

L is called an extended XTOL language iff there are an XTOL system G with the alphabet V and a subset V' of V such that $L = L(G) \cap (V')^*$. By $\mathcal{L}(EXTOL)$ we denote the family of extended XTOL languages.

In some cases, in the following theorems we state the result for all these families, and we give the proof only for matrix TOL systems. The proofs for the other families can be given with slight modifications by the same arguments, and they are left to the reader.

Remark: In contrast to the definitions of the first part of this paper we use the appearance checking mode only for the random context TOL systems, because we have no failure field associated with the tables of a programmed TOL system and there is no set of tables, which can be overpassed, in the definition of matrix and regularly controlled TOL systems. Obviously, by the required condition for the tables of a TOL system we have applicability of the next table in a matrix, programmed, and regularly controlled TOL system, and therefore appearance checking is not useful for these systems.

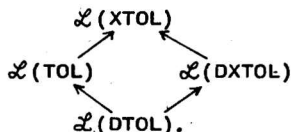
¹ λ denotes the empty word.

2.2. Properties of the language families of regulated L systems

First we study the effect of determinism and of the use of erasing rules.

In the following diagrams $X \rightarrow Y$ is written instead of $X \subseteq Y$, $X \not\subseteq Y$. If two families are not connected, then they are incomparable.

Theorem 2.1: Let $X \in \mathcal{G}'$. Then



Proof: i) Let $L_1 = \{a^2, a^4, b^4\}$. Then $L_1 \in \mathcal{L}(DMTOL)$ since the matrix TOL system

$$G = (\{a, b\}, \{\{a \rightarrow a^2, b \rightarrow b\}, \{a \rightarrow b, b \rightarrow b\}\}, a^2, \{(1, 2)\})$$

generates L_1 . $L_1 \notin \mathcal{L}(TOL)$ can be proved by standard technique (see /14/).

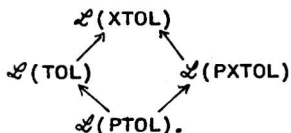
ii) Let $L_2 = \{a^n : n \geq 1\}$. $L_2 \in \mathcal{L}(TOL)$ is obvious. Assume that $L_2 = L(G)$ for some deterministic matrix TOL system G .

Without loss of generality we can assume that no table contains the (only) rule $a \rightarrow a$. Now let $a \rightarrow a^{r_1}, a \rightarrow a^{r_2}, \dots, a \rightarrow a^{r_p}$, $r_1 < r_2 < \dots < r_p$ be the rules which occur in the tables, and let a^r be the axiom. Then any word generated

by G has the form $a^{r \cdot r_1^{n_1} r_2^{n_2} \dots r_p^{n_p}}$ for some integers

n_1, n_2, \dots, n_p . Thus $a^z \notin L(G)$ for some prime number z which is not a divisor of $r \cdot r_1 r_2 \dots r_p$. Hence $L_2 \neq L(G)$ in contradiction to the assumption.

Theorem 2.2: For $X \in \mathcal{G}'$,



Proof: 1) $L_3 = \{ac^2\} \cup \{a^{2^n} : n \geq 1\}$ is generated by the TOL system $G = (\{a, c\}, \{a \rightarrow a^2, c \rightarrow \lambda\}, ac^2)$. Now assume that L_3 is generated by a propagating matrix TOL system G' . Then a^2 has to be the axiom, and there has to be a table whose application to a^2 leads to ac^2 . Obviously, then c^2a or cac can be also generated. Again, we have a contradiction.

ii) L_1 satisfies $L_1 \in \mathcal{L}(\text{PMTOL})$, $L_1 \notin \mathcal{L}(\text{TOL})$.

Theorem 2.3: For $X \in \mathcal{G}$, $\mathcal{L}(XTOL)$ forms an Anti-AFL, i.e. it is not closed under each of the AFL-operations.

Proof: i) union. Clearly, $L_4 = \{a^{2^n} : n \geq 1\}$ and

$L_5 = \{b^{3^m} : m \geq 1\}$ are DTOL languages. We show that

$L_4 \cup L_5 \neq L(G)$ for all MTOL systems G . Assume the contrary,

and let $G = (V, \mathcal{T}, w, M)$. If $w = a^{2^n}$ for some n , then there has to be a table containing a rule of the form $a \rightarrow b^k$, $k \geq 1$.

However, then $a^{2^1} \rightarrow b^{2^1 k}$ is a correct derivation for some i .

Since $2^1 k \neq 3^p$ for all i, k, p , we obtain a contradiction.

Similarly we prove that $w = b^{3^m}$ for some m is impossible.

ii) product. $L_6 = \{ab^{2^n} : n \geq 1\}$ is a DTOL language. We prove

that $L = L_2 \cdot L_6 \notin \mathcal{L}(\text{MTOL})$. Assume that $L = L(G)$ for some

MTOL system $G = (V, \mathcal{T}, w, M)$. By standard technique we can prove that

- G is deterministic,

- each table has the form $a \rightarrow a^i, b \rightarrow b^j$ with $i \geq 1, j \geq 1$

(or it is the table $a \rightarrow \lambda, b \rightarrow \lambda$ since we consider languages modulo λ).

Since the exponents of a in the words of L are of the

form $2^n + 1$, they are odd numbers. Thus i has to be an odd

number, too. Further, $a^{2^1} b^2$ has to be the axiom because -

with exception of the table which generates λ - all tables

are propagating. Now we have

$$a^3 b^2 \xRightarrow[p]{n} a^{3i} b^{2j} \quad \text{for } p = \{a \rightarrow a^i, b \rightarrow b^j\},$$

and since $3i = 3$ for $i = 1$ or $3i \geq 9$ for $i \geq 3$ we cannot generate the word $a^{2^2+1} b^2 = a^5 b^2$ which is in L .

iii) catenation closure. We prove that $L_7 = \{a^{2^n} b^{2^n} : n \geq 1\}^+$

is not an MTOL language. Assume that $L_7 = L(G)$ for some

MTOL system $G = (V, \mathcal{Z}, w, M)$. It is easy to prove that

- each table $p \in \mathcal{Z}$ contains only productions of the form

$$a \rightarrow a^{2^{n_1}} b^{2^{n_1}} a^{2^{n_2}} b^{2^{n_2}} \dots a^{2^{n_k}} b^{2^{n_k}}, \quad b \rightarrow a^{2^{m_1}} b^{2^{m_1}} \dots a^{2^{m_r}} b^{2^{m_r}}$$

or it contains only productions of the form $a \rightarrow a^{2^k}, b \rightarrow b^{2^m}$,

- there is a matrix $m \in M$ whose tables have only productions

of the form $a \rightarrow a^{2^k}, b \rightarrow b^{2^m}$,

- all matrices which contain only tables with productions of

the form $a \rightarrow a^{2^k}, b \rightarrow b^{2^m}$ are deterministic.

Hence there cannot be generated words of the form $a^{2^n} b^{2^n} a^{2^m} b^{2^m}$ with arbitrary numbers n, m . Since these words are in L_7 we have the desired contradiction.

iv) homomorphism. $L_8 = \{c\} \cup \{a^{2^n} : n \geq 1\} \cup \{b^{3^m} : m \geq 1\}$ is a

DTOL language. Obviously, for h defined by $h(a) = a,$

$h(b) = b, h(c) = a^2,$ we obtain $h(L_8) = L_4 \cup L_5$ which is not in $\mathcal{L}(\text{MTOL})$ (see part 1) of this proof).

v) inverse homomorphism. Let $g(c) = c^2, g(a) = a, g(b) = b.$

Then $g^{-1}(L_8) = L_4 \cup L_5.$

vi) intersection with regular sets. $L_8 \cap \{a, b\}^* = L_4 \cup L_5.$

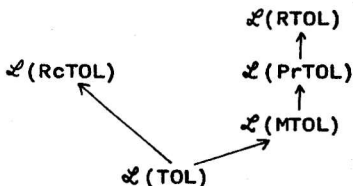
2.3. Comparison of the generative capacities

First we note that it is proved in /1/, /11/, /18/, /8/, /15/ that

$$\mathcal{L}(\text{ETOL}) = \mathcal{L}(\text{EPrtOL}) = \mathcal{L}(\text{EMTOL}) = \mathcal{L}(\text{ERTOL})$$

$$\subsetneq \mathcal{L}(\text{ERCtOL}) = \mathcal{L}(\text{PrCF}).$$

Theorem 2.4:



Proof: i) $\mathcal{L}(\text{RcTOL}) \setminus \mathcal{L}(\text{YTOL}) \neq \emptyset$ for $Y \in \mathcal{G} \setminus \{\text{Rc}\}$.

By the above relation there is an RcTOL language L and an alphabet V such that $L \cap V^* \neq L(G) \cap V^*$ for all YTOL systems G . Hence $L \notin \mathcal{L}(\text{YTOL})$.

ii) $\mathcal{L}(\text{MTOL}) \setminus \mathcal{L}(\text{RcTOL}) \neq \emptyset$.

As in /5/ we can prove that an RcTOL language $L \subseteq \{a\}^*$ is a TOL language. However, it is easy to construct an MTOL language over $\{a\}$ which is not a TOL language.

iii) $\mathcal{L}(\text{PrTOL}) \supseteq \mathcal{L}(\text{MTOL})$.

Let $G = (V, \mathcal{P}, w, M)$ be a matrix TOL system with

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_s\},$$

$$m_i = (i_1, i_2, \dots, i_{k(i)}), \quad 1 \leq i \leq s.$$

With each pair (i, j) , $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq k(i)$, we associate the table

$$p(i, j) = \{a \rightarrow u : a \in V, u \in \mathcal{C}_{i, j}(a)\}$$

where $\mathcal{C}_{i, j}$ is the composition of the finite substitutions given by the tables $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_j}$. We define the programmed TOL system $G' = (V, \mathcal{P}', w)$ with

$$\mathcal{P}' = \{p(i, j) : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq k(i)\}$$

and

$$S(p(i, j)) = \begin{cases} \emptyset & \text{for } 1 \leq j < k(i), \\ \mathcal{P}' & \text{for } j = k(i). \end{cases}$$

It is easy to see that $L(G') = L(G)$.

iv) $\mathcal{L}(\text{PrTOL}) \setminus \mathcal{L}(\text{MTOL}) \neq \emptyset$.

As in /5/ one can prove that the MTOL language over a single letter alphabet can be generated by TOL systems with a finite set of axioms. The programmed TOL system

$$G = (\{a\}, \{p_1, p_2\}, a) \text{ with } p_1 = \{a \rightarrow a^2\}, S(p_1) = \{1\},$$

$$p_2 = \{a \rightarrow a^3\}, S(p_2) = \{2\}$$

generates $\{a^{2^n} : n \geq 1\} \cup \{a^{3^m} : m \geq 1\}$ which cannot be generated by a TOL system with a finite set of axioms.

v) $\mathcal{L}(\text{RTOL}) \supseteq \mathcal{L}(\text{PrTOL})$.

For the PrTOL system $G = (V, \{p_1, p_2, \dots, p_r\}, w)$, we consider the finite automaton \mathcal{U} with the input alphabet $\{1, 2, \dots, r\}$, the state set $\{0, 1, 2, \dots, r+1\}$, the initial state 0, the accepting set $\{1, 2, \dots, r\}$ and the transition function δ defined by

$$\delta(x, y) = \begin{cases} x & \text{if } y = 0, \\ x & \text{if } 1 \leq y \leq r, x \in S(p_y), \\ r+1 & \text{if } 1 \leq y \leq r, x \notin S(p_y), \\ r+1 & \text{if } y = r+1. \end{cases}$$

It is obvious that \mathcal{U} accepts the set R of all sequences

$$i_1 i_2 \dots i_t \text{ with } i_{j+1} \in S(p_{i_j}) \text{ for } 1 \leq j < t.$$

Hence the controlled TOL system $G' = (V, \{p_1, p_2, \dots, p_r\}, w, R)$ generates $L(G)$.

vi) $\mathcal{L}(\text{RTOL}) \setminus \mathcal{L}(\text{PrTOL}) \neq \emptyset$.

We consider the language $L_{10} = \{a^2, a^4, a^8\} \cup \{a^{8 \cdot 3^n} : n \geq 1\}$

which is generated by the regularly controlled TOL system

$$G = (\{a\}, \{\{a \rightarrow a^2\}, \{a \rightarrow a^3\}\}, a^2, 1^3 2^4 \cup \{1, 1^2\}).$$

Assume that $L_{10} = L(G')$ for some programmed TOL system

$G' = (V, \mathcal{P}, w)$. Let n be a sufficient large number. Then there is a derivation

$$w \rightarrow \dots \rightarrow w' \xrightarrow[p]{a^{8 \cdot 3^n}} a^{8 \cdot 3^n}, w' \neq a^{8 \cdot 3^n}.$$

Obviously, $w' = a^{8 \cdot 3^m}$ for some $m < n$, and p is a deterministic table $a \rightarrow a^{3^r}$ for some r . Since this table is applicable to the axiom, $w = a^{8 \cdot 3^t}$ for some t . Now we consider a derivation of a^2 . It has to have the following form

$$a^{8 \cdot 3^t} \Rightarrow \dots \Rightarrow w'' \xrightarrow[p']{=} a^2$$

where w'' contains at least four times the letter a and p' has to contain the rules $a \rightarrow \lambda$, $a \rightarrow a^2$ or the rules $a \rightarrow \lambda$, $a \rightarrow a$. In the former case we can generate $a^6 \notin L_{10}$, in the latter case we can derive $a^3 \notin L_{10}$ from w'' by application of p' .

Remark: We note that all the results of this chapter remain valid if we use random context TOL systems without appearance checking, i.e. $Q = \emptyset$ for all rules; the only exception is that then it can be proved only $\mathcal{L}(\text{ERC TOL}) \subseteq \mathcal{L}(\text{PrCF})$.

References

- /1/ Asveld, P. R. J.: Iterated Context-Independent Rewriting. Dissertation, Technological University Twente 1978
- /2/ Dassow, J.: Über quasideterministische Sprachen. Rostock. Math- Kolloq. 1, 51 - 60 (1976)
- /3/ Dassow, J.: On some extensions of Indian parallel context free grammars. Acta Cybernet. 4, 303 - 310 (1980)
- /4/ Dassow, J.: A note on programmed OL systems. Inform. Sci. 30, 1 - 4 (1983)
- /5/ Dassow, J.: Pure grammars with regulated rewriting. To appear in Rev. Roumaine Math. Pures Appl.

- /6/ Dassow, J.: Comparison of some types of regulated rewriting. To appear in Proc. Colloquium on Algebra, Logic, and Combinatorics in Computer Science, Győr 1983
- /7/ Dassow, J., and Paun, Gh.: Extension of some grammars by order relations. Submitted for publication
- /8/ Ginsburg, S., and Rozenberg, G.: TOL schemes and control sets. Inform. and Control 27, 109 - 125 (1974)
- /9/ Kudlek, M.: Comparing several ways of context independent parallel rewriting. In: Siefkes, D. (Ed.): Vierte Jahrestagung der Gesellschaft für Informatik, Berlin 1974. Lecture Notes in Comput. Sci. 26, 122 - 130, Berlin 1975
- /10/ Mayer, O.: Some restrictive devices for context free grammars. Inform. and Control 20, 69 - 92 (1972)
- /11/ Nielsen, M.: EOL systems with control devices. Acta Inform. 4, 373 - 386 (1975)
- /12/ Rajasethupathy, K. S., and Shyamasundar, R. K.: Programmed OL systems. Inform. Sci. 20, 137 - 150 (1980)
- /13/ Reusch, P. J. A.: Regulierte TOL Systeme I. Gesellsch. f. Math. u. Datenverarbeitung Bonn, Report Nr. 81 (1974)
- /14/ Rozenberg, G.: TOL systems and languages. Inform. and Control 23, 357 - 381 (1973)
- /15/ Rozenberg, G., and von Solms, S. H.: Priorities on context conditions in rewriting systems. Inform. Sci. 14, 15 - 50 (1978)
- /16/ Salomaa, A.: Formal Languages. New York 1973

/17/ Siromoney, R., and Siromoney, G.: Parallel OL languages.
Internat. J. Comput. Math. 5, 109 - 123 (1976)

/18/ von Solms, S. H.: Some notes on ETOL languages. Internat.
J. Comput. Math. 5, 285 - 296 (1976)

received: 06. 01. 1984

Author's address:

Dr. sc. nat. J. Dassow
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Mathematik und Physik
PSF 124
DDR-3040 Magdeburg

Dipl.-Lehrer U. Fest
Karl-Wagner-Oberschule
Philipp-Daub-Str. 2
DDR-3035 Magdeburg

Verallgemeinerte Poisson-Integrale und ihr Randverhalten

Autorreferat der Dissertation A

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Darstellung von Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen $Lu = 0$ in beschränkten Gebieten Ω mit glattem Rand $\partial\Omega$. Insbesondere wird die Darstellung polyharmonischer Funktionen in einer Kugel im \mathbb{R}^n sowie ihr Verhalten in der Nähe des Randes studiert. Es handelt sich bei der Darstellung um verallgemeinerte Poisson-Integrale mit Hilfe von Maßen, die auf dem Rand des Gebietes definiert sind und mit dem Randverhalten der betrachteten Lösungen im Zusammenhang stehen. Die Arbeit gibt unter anderem eine Antwort auf die folgende Frage: Unter welchen Bedingungen an das Verhalten der Lösung $u(x)$ in Randnähe sind solche Darstellungen möglich?

Es sei L ein Differentialoperator der Ordnung $2m$ und B_j ($j=1, \dots, m$) ein System von Randoperatoren. Das System $B'_1, \dots, B'_m, C'_1, \dots, C'_m$ sei ein Dirichlet-System der Ordnung $2m$, für welches die Greensche Formel gilt. $W_p^s(\Omega)$ und $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ stellen Sobolev-Räume bzw. ihre Spurräume dar.

Um das Wesen der in der Arbeit bewiesenen Sätze zu charakterisieren, beschränken wir uns auf die Formulierung einiger typischer Resultate.

Wir machen die folgenden Annahmen: a) Das elliptische Randwertproblem $Lu = f$ in Ω , $B_j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j$ ($j=1, \dots, m$) sei regulär.

b) Für die durch die Parallelränder $\partial\Omega_\varrho$ begrenzten Gebiete Ω_ϱ sollen die zum Randwertproblem a) gehörenden klassischen Agmon-Douglis-Nirenberg-Ungleichungen mit einer von ϱ unabhängigen Konstanten gelten. c) Die Kerne der Operatoren (L, B_1, \dots, B_m) und (L^*, B'_1, \dots, B'_m) sollen nur das Nullelement enthalten.

Satz: Es sei $p > n$ und $f \in W_p^{s-2m}(\Omega)$. Es sei u eine Lösung der Gleichung $Lu = f$ in Ω , und es gelte

$$\|B_j u|_{\partial\Omega_\varrho}\|_{s-m_j-\frac{1}{p}, p} \leq C < \infty. \quad (1)$$

Weiter seien die Voraussetzungen a), b) und c) erfüllt. Dann existieren Funktionen φ_j in $W_p^{s-m, j-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ derart, daß u für $x \in \Omega$ in der Gestalt

$$u(x) = (f, \Gamma_x^{(B)}) + \sum_{j=1}^m (\varphi_j, c_j \Gamma_x^{(B)})$$

darstellbar ist. Die Skalarprodukte sind im Sinne der Dualität zu verstehen. $\Gamma_x^{(B)}$ ist die Greensche Funktion des Randwertproblems a). Mit der Bedingung

$$\sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega_g} |B_j u(y)| d\sigma_g(y) \leq C < \infty$$

an Stelle von (l) erhält man unter den gleichen Annahmen über die Lösung u der Gleichung $Lu = 0$ die Darstellung

$$D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^m (-1)^{|\alpha|} \int_{\partial\Omega_g} c_j D_x^\alpha \Gamma_x^{(B)}(y) d\mu_j(y)$$

durch Maße μ_1, \dots, μ_m mit dem Träger auf $\partial\Omega_g$.

In entsprechender Weise kann man eine Beschränktheitsbedingung für eine m -polyharmonische Funktion in einer Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ angeben, so daß diese als Poisson-Integral $P(\mu_1, \dots, \mu_m, \partial B)(x)$ darstellbar ist. Es werden ferner Aussagen über die Existenz radialer, nichttangentialer bzw. tangentialer Grenzwerte von Poisson-Integralen $P(\mu_1, \dots, \mu_m, \partial B)$ und ihrer Ableitungen am Rande einer Kugel bewiesen.

eingereicht: 11. 10. 1983

verteidigt: 09. 12. 1983

Gutachter: Prof. Dr. G. Wildenhain (Rostock),
 Prof. Dr. H.-W. Stolle (Rostock),
 Prof. Dr. G. Anger (Halle).

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. Luis A. González
 Fac. de Matemática - Cibernética
 Universidad Central
 Santa Clara
 Cuba

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock, Math. Kolloq. / Leerzeile / Vorname Name / Leerzeile / Titel der Arbeit / 1 Zeilenumschaltung / Unterstreichung / Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen / Zwischenüberschrift / Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung) / 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperrn möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. a. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- /8/ Zariaki, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra.
Princeton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkbänd anlässlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers: Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

