ISSN 0138 - 3248

Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 29

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT
ROSTOCK

Information

Rostocker Informatik-Berichte

Die Schriftenreihe erscheint von der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor

Heft 1 (1985) 20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung

Heft 2 (1985) DIGRA'84
(Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)

Heft 3 (1986) Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinaten der DDR.

Bezugsmöglichkeiten

Die Hefte der Schriftenreihe sind im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Tauschstelle, DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Es bestehen beschränkte Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universeität Rostock, DDR-2500 Rostock, Vogelsang 13/14
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, DDR-7010 Leipzig, Leninstraße 16.

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 29

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
1986

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel
(Sektionsdirektor)
Prof. Dr. Gerhard Maeß
Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Klaus-Dieter Drews
Herstellung der Druckvorlage: Dorothea Meyer

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-2500 Rostock
Universitätsplatz 1

Redaktionsschluß: 13. 02. 1986

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint zweimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Es bestehen beschränkte Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR-2500 Rostock, Vogelsang 13/14
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, DDR-7010 Leipzig, Leninstraße 16.

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1986)29

Abt. Wissenschaftspublizistik,
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
DDR-2500 Rostock, Vogelsang 13/14, Telefon 369 577
Genehmigungs-Nr.: C 58/86
Druck: ODR WII-15-14.0,50

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003843

Inhalt

		Seite
Denecke, Klaus; Lau Dietlinde	Kongruenzen auf Klons und vollinvariante Kongruenzen relativ freier Algebren II	4
Labahn, Roger	On an interesting property of binomial coefficients	21
Berg, Lothar	Berichtigung der Arbeit "Distributive Verbände als ralativ invertierbare Halbgruppen"	25
Mahnke, Ralf	Einige Beispiele für rcc-aymmetric chain Ordnungen	29
Labahn, Roger; Kanthack, Helmut	A special realisation of set-operations	33
Markwardt, Klaus	Maß und Integral auf einheitlicher algebraischer Grundlage	41
Grinda, Iris	Zur Anwendung eines Ergebnisses der Potentialtheoria auf ein Differentialgleichungasyatem erster Ordnung	57
Wanka, Gart; Wanka, Johanna	Approximationsprobleme bei Randkontaktaufgaben I (alliptischa Problame)	61
Roßmann, Jürgen	Ober zwei Klassen von gewichteten Sobolevräumen in ebenen Gebieten mit Ecken und Anwendungen auf elliptieche Randwertaufgaben	78
Lorz, Udo	Sekundärgrößen Poissonscher Punktprozesse - Grenzwertsätze und Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit	99
Frischmuth, Kurt	Iterationsverfahren zur Lösung eines Problems der nichtlinearen Mechanik	112

Rostock. Math. Kolloq. 29, 4 - 20 (1986)

08815
03850

Klaus Danecke
Dietlinde Lau

Kongruenzen auf Klons und vollinvariante Kongruenzen relativ freier Algebren II

Sei $\underline{A} = (A,F)$ eine Algebra, $V_{\underline{A}}$ die von $\underline{A}$ erzeugte Varietät und $T(\underline{A})$ die Menge aller mittels der Superpositionsoperationen ζ, τ, Δ, $*$ aus F und der Projektion e_1^2 erzeugbaren Funktionen über der Menge A. Die Algebra $\underline{T(A)} := (T(A), \zeta, \tau, \Delta, *, e_1^2)$ heißt Klon bzw. Funktionenalgebra über A.
D. Schweigert machte in /23/ darauf aufmerksam, daß jede Kongruenzrelation auf dem Klon $T(\underline{A})$ eindeutig einer vollinvarianten Kongruenz auf der freien Algebra abzählbaren Ranges der Varietät $V_{\underline{A}}$ entspricht und (bis auf eine Ausnahme) umgekehrt. Im vorliegenden Artikel soll dieser Zusammenhang (nach der Auflistung einiger Grundbegriffe und elementarer Eigenschaften von Kongruenzen auf Klons) ausführlich dargestellt und dazu benutzt werden, aus bekannten Resultaten über Kongruenzen auf Klons solche der Universalen Algebra über Untervarietäten auf - wie wir meinen - einfacherem Wege zu erhalten. Außerdem werden wir mit Hilfe des beschriebenen Zusammenhangs unter Berufung auf Ergebnisse über Varietäten ein Beispiel eines endlich erzeugten Klons über einer 3-elementigen Menge mit überabzählbar vielen Kongruenzen angeben sowie sämtliche Kongruenzen auf Klons, die eine dreistellige Funktion d mit $d(x,x,y) = d(x,y,x) = d(y,x,x) = x$ und sämtliche Konstanten enthalten, bestimmen. Für die beiden letztgenannten Resultate sind uns - trotz einiger Bemühungen - keine Beweise "innerhalb" der Funktionenalgebrentheorie bekannt.

1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Sei A nachfolgend stets eine nichtleere Menge, $P_A^{(n)}$ die Menge aller n-stelligen Funktionen über A und $P_A := \bigcup_{n\geq 1} P_A^{(n)}$.

Zur Kennzeichnung der Stellenzahl (Arität) einer Funktion f aus $P_A^{(n)}$ schreiben wir statt f oft f^n und für n auch af. Die durch $e_i^n(x_1,\dots,x_n) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ und $c_a^n(x_1,\dots,x_n) = a$ $(a \in A)$ definierten Funktionen e_i^n und c_a^n aus $P_A^{(n)}$ nennen wir Projektionen bzw. Konstanten. Wie in /15/ führen wir $\zeta, \tau, \Delta, *$ als Operationen über P_A ein, die für beliebige $f^n, g^m \in P_A$ durch

$\zeta f \in P_A^{(n)}$, $\tau f \in P_A^{(n)}$, $\Delta f \in P_A^{(\max(1,n-1))}$, $f * g \in P_A^{(m+n-1)}$ und

$(\zeta f)(x_1,\dots,x_n) = f(x_2,x_3,\dots,x_n,x_1)$,

$(\tau f)(x_1,\dots,x_n) = f(x_2,x_1,x_3,\dots,x_n)$,

$(\Delta f)(x_1,\dots,x_{n-1}) = f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ für $n \geq 2$ und

$\zeta f = \tau f = \Delta f = f$ für $n = 1$,

$(f * g)(x_1,\dots,x_{n+m-1}) = f(g(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})$

$(x_1,\dots,x_{n+m-1} \in A)$ definiert sind.

Eine Funktion f, die sich aus Funktionen einer Menge F $(\subseteq P_A)$ und der Projektion e_1^2 durch endliche Anwendung der Operationen $\zeta, \tau, \Delta, *$ erzeugen läßt, heißt Superposition über F. Die Menge aller Superpositionen über F bezeichnen wir mit [F]. Offenbar gehören alle Projektionen über A zu [F] und jede n-stellige Funktion $f^m(f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \dots, f_m^{n_m})$, die durch

$f(f_1,\dots,f_m)(x_1,\dots,x_n) = f(f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_m(x_1,\dots,x_{n_m}))$,

falls $f, f_1,\dots,f_m \in [F]$ und $n := \max_i n_i$, definiert ist.

Eine Teilmenge $F \subseteq P_A$ heißt Klon (über A), wenn $[F] = F$ bzw. $\underline{F} := (F, \zeta, \tau, \Delta, *, e_1^2)$ eine Algebra vom Typ (1,1,1,2,0) ist. Für die Algebra $\underline{A} := (A,F)$, $F \subseteq P_A$, bezeichnen wir den Klon [F] auch mit $T(\underline{A})$ ("Termfunktionen von $\underline{A}$") und den Klon $[F \cup \{c_a^1 \mid a \in A\}]$ mit $P(\underline{A})$ ("Polynomfunktionen von A").

Eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf einem Klon F nennen wir wie üblich eine Kongruenz(relation) von F, wenn F mit $*, \zeta, \tau, \Delta$ kompatibel ist, d. h., wenn für beliebige $f, g, s, t \in F$ aus

(f,g), $(s,t) \in \mathfrak{K}$ stets $(f \times s,\ g \times t) \in \mathfrak{K}$ und $(\alpha f, \alpha g) \in \mathfrak{K}$ für $\alpha \in \{\zeta, \tau, \Delta\}$ folgt. Für die Erläuterung weiterer Begriffe und Bezeichnungen sei auf /9/ und /22/ verwiesen.

2. Kongruenzen auf Klons

Auf jedem Klon F über A gibt es nach /15/ mindestens drei Kongruenzen $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_a$, $\mathfrak{K}_1$ (die sogenannten trivialen Kongruenzen):

$(f,g) \in \mathfrak{K}_0 :\Leftrightarrow \{f,g\} \subseteq F \wedge f = g$,
$(f,g) \in \mathfrak{K}_a :\Leftrightarrow \{f,g\} \subseteq F \wedge af = ag$,
$(f,g) \in \mathfrak{K}_1 :\Leftrightarrow \{f,g\} \subseteq F$.

Die Menge aller Kongruenzen auf F sei mit Con F bezeichnet. Kongruenzen $\mathfrak{K} \in$ Con F mit $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_a$ nennen wir Aritätekongruenzen und fassen sie zur Menge $\mathrm{Con}_a F$ zusammen. $\mathfrak{K}^{(n)}$ bezeichnet die Menge $\mathfrak{K} \cap (F^{(n)} \times F^{(n)})$.
Zunächst eine Zusammenstellung einiger grundlegender Eigenschaften von Kongruenzen.

Lemma 2.1(/3/): Sei $\mathfrak{K}$ eine nichttriviale Kongruenz des Klons F über A. Dann gilt

(a) $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_a$,

(b) $\mathfrak{K}^{(|A|)} \neq \mathfrak{K}_1^{(|A|)}$,

(c) $\mathfrak{K}^{(n)} \neq \mathfrak{K}_a^{(n)}$ für alle $n \geq 2$.

Beweis: (a) Angenommen, es gelte $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{K}_a$. Dann gibt es Funktionen f^n, $g^m \in F$ mit $n > m$ und $(f,g) \in \mathfrak{K}$. Folglich haben wir $(e_n^n \times (\Delta^{n-2} f),\ e_n^n \times (\Delta^{n-2} g)) = (e_{n+1}^{n+1},\ e_n^n) \in \mathfrak{K}$ für beliebiges $n \geq 2$ und $(\Delta e_3^3, \Delta e_2^2) = (e_2^2,\ e_1^1) \in \mathfrak{K}$, woraus sich unmittelbar $(e_r^r,\ e_1^1) \in \mathfrak{K}$ für alle $r \geq 1$ ergibt. Sei nun h^t eine beliebige Funktion aus F. Wegen $(e_2^2,\ e_1^1) \in \mathfrak{K}$ ist $(e_2^2 \times h,\ e_1^1 \times h)$ $= (h,\ e_{t+1}^{t+1}) \in \mathfrak{K}$ und deshalb auch $(h,\ e_1^1) \in \mathfrak{K}$. Also gilt $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathfrak{K} \notin \{\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_a, \mathfrak{K}_1\}$.

(b) Wegen (a) gibt es zwei verschiedene $\mathfrak{K}$-kongruente Funktionen f^n, g^n in F. Durch Anwenden der Operationen erhält man offenbar $|A|$-stellige Funktionen f', g' mit $(f',g') \in \mathfrak{K}$ und $f' \neq g'$. Folglich gilt (b).

(c) Es genügt, die Behauptung für n = 2 zu beweisen. Angenommen, $\mathfrak{K}_a^{(2)} = \mathfrak{K}^{(2)}$. Dann ist $(e_1^2, e_2^2) \in \mathfrak{K}$. Hieraus folgt für beliebiges $f^n \in F$ $(\Delta(\zeta(f * e_1^2)), \Delta(\zeta(f * e_2^2))) = (f, e_n^n) \in \mathfrak{K}$ und damit $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_a$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Betrachtet man anstelle von Klons $\underline{F} = (F, \zeta, \tau, \Delta, *, e_1^2)$ Algebren der Form $\underline{F}' := (F', \zeta, \tau, \Delta, *)$ oder $\underline{F}'' := (F'', \zeta, \tau, \Delta, *, \nabla)$ (∇: Hinzufügen fiktiver Stellen; siehe /15/ oder /22/), so gilt Lemma 2.1, (a) nicht mehr. In /3/ ist ein Beispiel einer Algebra $\underline{F}'$, auf der unendlich viele Kongruenzen $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{K}_1$ existieren, angegeben. Für Algebren der Form $\underline{F}''$ läßt sich dagegen zeigen, daß stets nur endlich viele Nichtaritätskongruenzen auftreten können(/17/).

Mit Hilfe einer beliebigen Kongruenz $\mathfrak{K}$ aus $\mathrm{Con}_a F$ lassen sich zwei weitere Kongruenzen definieren:

$$\sigma_{n,\mathfrak{K}} := \bigcap_{\substack{\mu \in \mathrm{Con}_a F \\ \mathfrak{K}^{(n)} = \mu^{(n)}}}$$

und $\pi_{n,\mathfrak{K}}$:

$$(f^p, g^q) \in \pi_{n,\mathfrak{K}} :\Leftrightarrow p = q \wedge (\forall (f_1,g_1),\ldots,(f_p,g_p) \in \mathfrak{K}^{(n)}: (f(f_1,\ldots,f_p), g(g_1,\ldots,g_p)) \in \mathfrak{K}^{(n)})$$

(/4/), die durch $\mathfrak{K}^{(n)}$ vollständig bestimmt sind. Aus den Definitionen dieser Kongruenzen bzw. aus /4/ folgt

<u>Lemma 2.2:</u> Sei $\mathfrak{K} \in \mathrm{Con}_a F$ und [F] = F. Dann gilt

(a) $\sigma_{n,\mathfrak{K}}^{(n)} = \pi_{n,\mathfrak{K}}^{(n)} = \mathfrak{K}^{(n)}$,

(b) $\sigma_{n,\mathfrak{K}} \subseteq \sigma_{n+1,\mathfrak{K}} \subseteq \mathfrak{K} \subseteq \pi_{n+1,\mathfrak{K}} \subseteq \pi_{n,\mathfrak{K}}$,

(c) $\mathfrak{K} = \bigcap_{r \geq 1} \pi_{r,\mathfrak{K}}$. □

Eine Folgerung aus diesem Lemma und Lemma 2.1 ist

Lemma 2.3: Für jede Aritätskongruenz $\mathscr{R}$ eines Klons F über A gilt

$$\mathscr{R}_0 \subset \sigma_{|A|,\mathscr{R}} \subseteq \mathscr{R} \subseteq \pi_{2,\mathscr{R}} \subset \mathscr{R}_a. \quad \square$$

Falls A endlich ist, gibt es für $\sigma_{|A|,\mathscr{R}}$ und $\pi_{2,\mathscr{R}}$ ($\mathscr{R} \in \mathrm{Con}_a F$) nur endlich viele Möglichkeiten. Eine Folgerung aus Lemma 2.3 ist damit

Satz 2.4: Der Verband der Aritätskongruenzen eines Klons F über einer endlichen Menge hat stets nur endlich viele Atome und Dualatome. $\square$

Wir nennen eine Äquivalenzrelation μ auf $F^{(n)}$, $[F] = F$, eine n-Kongruenz, wenn eine Kongruenzrelation $\mathscr{R} \in \mathrm{Con}_a F$ mit $\mathscr{R}^{(n)} = \mu$ existiert.

Lemma 2.5: Sei F ein Klon und μ eine Äquivalenzrelation auf $F^{(n)}$. Dann ist μ genau dann eine n-Kongruenz, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall f^m \in F\ \forall (u_0,v_0),\ldots,(u_n,v_n),\ldots,(u_m,v_m) \in \mu: \qquad (1)$$
$$(f(u_1,\ldots,u_m),f(v_1,\ldots,v_m)) \in \mu$$
$$\wedge\,(u_0(u_1,\ldots,u_n),\ v_0(u_1,\ldots,u_n)) \in \mu.$$

Beweis: Falls μ eine n-Kongruenz ist, gilt offenbar (1).
μ erfülle (1). In /4/ wurde gezeigt, daß die Äquivalenzrelation

$$\pi_\mu : (f^r,g^s) \in \pi_\mu :\Leftrightarrow r = s \wedge (\forall (u_1,v_1),\ldots,(u_r,v_r) \in \mu:$$
$$(f(u_1,\ldots,u_r),g(v_1,\ldots,v_r)) \in \mu)$$

eine Kongruenzrelation von F mit $\pi_\mu^{(n)} = \mu$ ist. Damit ist μ eine n-Kongruenz von F. $\square$
Mit Hilfe von Lemma 2.1 beweist man leicht den

Satz 2.6 (/4/): Ein Klon über A, $|A| = k$, besitzt genau dann nur triviale Kongruenzen, wenn $\mathscr{R}_0^{(k)}$ und $\mathscr{R}_a^{(k)}$ die einzigen k-Kongruenzen von F sind. $\square$

Ein Verfahren, mit dem man feststellen kann, ob eine Äquivalenzrelation eine n-Kongruenz eines Klons ist, sowie weitere

Kriterien dafür, daß auf einem Klon nur triviale Kongruenzen existieren, entnehme man /4/ - /7/. Konkrete Beispiele für Klons F mit Con F = $\{\aleph_0, \aleph_a, \aleph_1\}$ findet man z. B. in /15/, /12/, /7/, /16/, Beispiele für Klons mit nichttrivialen Kongruenzen in /3/, /8/, /11/, /12/, /15/ - /17/. In den zitierten Arbeiten werden zwar anstelle von Klons $\underline{F} = (F, \zeta, \tau, \Delta, *, e_1^2)$ Algebren der Form $\underline{F}' = (F', \zeta, \tau, \Delta, *)$, oder $\underline{F}'' = (F'', \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *)$ $(F, F', F'' \subseteq P_A)$ betrachtet, jedoch lassen sich die dortigen Ergebnisse leicht auf Klons übertragen. Falls $e_1^1 \in F''$ gilt, gibt es bez. Kongruenzen keine Unterschiede zwischen F" und F.

Den bisherigen Ausführungen ist zu entnehmen, daß es auf einem Klon über einer endlichen Menge mindestens 3 bzw. 2 (falls $\aleph_a = \aleph_0$) und höchstens kontinuum-viele Kongruenzen geben kann.

Für den Fall $|A| = 2$ kann man der Arbeit /3/ von V. V. Gorlov entnehmen, daß jeder Klon über A höchstens 4 Kongruenzen besitzt (siehe auch /12/). Für $|A| \geq 3$ sind in /12/ Beispiele für Klons F_α über A mit $|\mathrm{Con}\ F| = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \cup \{\aleph_0, \tau\})$ angegeben. Die Beispiele für Klons mit abzählbar unendlich bzw. kontinuum-vielen Kongruenzen aus /12/ sind solche ohne endliche Basis. Daß auch endlich erzeugte Klons unendlich viele Kongruenzen besitzen können, zeigt der folgende Satz, womit wir auch ein Gegenbeispiel (!) zum Theorem 3.6 aus /12/ angeben.

<u>Satz 2.7:</u> Sei $m \in P^{(2)}_{\{0,1,2\}}$ und

$$m(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1, \text{ falls } (x_1,x_2) \in \{(1,2),(2,1),(2,2)\}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad (/19/).$$

Der Klon $M := [\{m\}]$ besitzt unendlich viele Kongruenzen.

<u>Beweis:</u> Für $f^n \in M$ bezeichnen wir mit $\chi(f)$ die Menge aller Tupel $\underline{a}$ aus $\{0,1,2\}^n$ mit $f(\underline{a}) \in \{1,2\}$. Weiter sei

$$K_r^{(n)} := \{f \in F^{(n)} \mid \forall N \subseteq \chi(f): (|N| \leq r \Rightarrow (\exists i: \forall (a_1,\ldots,a_n) \in N: a_i = 2)\}$$

und $K_r := \bigcup_{n \geq 1} K_r^{(n)}$. In /19/ wurde folgende Eigenschaft der Funktionen aus M bewiesen:

$$\forall f^n \in M\ \exists i : \underline{a} \in \chi(f) \Rightarrow f(\underline{a}) = a_i. \qquad (2)$$

Von der Äquivalenzrelation μ_r ($r \geq 1$) auf M

$$(f^n, g^m) \in \mu_r :\Leftrightarrow n = m \wedge (f = g \vee \{f,g\} \subseteq K_r^{(n)})$$

soll gezeigt werden, daß sie eine Kongruenz auf M ist. Bezeichnen dazu f^n, g^n, p^m, q^m gewisse Funktionen aus M mit (f,g), $(p,q) \in \mu_r$. Offenbar gilt dann $(\alpha f, \alpha g) \in \mu_r$ für $\alpha \in \{\mathcal{S}, \tau, \Delta\}$. Für den Nachweis von $(f * p, g * q) \in \mu_r$ genügt es zu zeigen, daß

$$(f \in K_r \vee p \in K_r) \wedge (f \text{ hängt wesentlich von der ersten Stelle ab}) \Rightarrow f * p \in K_r \qquad (3)$$

für beliebige $f, p \in M$ gilt. Sei also die erste Stelle der Funktion f wesentlich. Wir unterscheiden zwei Fälle:

<u>1. Fall:</u> $f \in K_r$.

Seien $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_s \in \chi(f * p)$, $1 \leq s \leq r$, $\underline{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{j,n+m-1})$, $j = 1, \ldots, s$, $p(a_{j1}, \ldots, a_{jm}) = b_j$. Wegen $f \in K_r$ ist entweder $b_1 = \ldots = b_s = 2$, oder es existiert ein $u \geq m+1$ mit $a_{1u} = \ldots = a_{su} = 2$. Falls $b_1 = \ldots = b_s = 2$ ist, so gibt es nach (2) ein v mit $1 \leq v \leq m$ und $a_{v1} = \ldots = a_{vs} = 2$. Folglich gehört $f * p$ zu K_r.

<u>2. Fall:</u> $p \in K_r$.

Da laut Voraussetzung die erste Stelle von f wesentlich ist, kann $(f^n * p^m)(\underline{a})$, $\underline{a} \in \{0,1,2\}^{n+m-1}$, nur dann Werte aus $\{1,2\}$ annehmen, wenn $p(a_1, \ldots, a_m) \in \{1,2\}$ gilt. Folglich haben wir $\chi(f * p) \subseteq \{\underline{a} \in \{0,1,2\}^{m+n-1} \mid (a_1, \ldots, a_m) \in \chi(p)\}$, woraus sich $f * p \in K_r$ ergibt. Damit ist (3) bewiesen und μ_r für beliebiges $r \geq 1$ eine Kongruenz auf dem Klon M. Die Verschiedenheit all dieser Kongruenzen μ_r kann man sich wie folgt überlegen:

Die Funktionen t^n und s^n, die durch

$$t(x_1,\dots,x_n)$$
$$= (\dots(((\dots((x_1(x_2x_1))(x_3x_1))\dots(x_nx_1))(x_3x_2))\dots(x_nx_{n-1}))$$
$$= \begin{cases} x_1 \text{ für } \underline{x} \in \{(1,2,\dots,2),(2,1,2,\dots,2),\dots,(2,\dots,2,1),(2,\dots,2)\}, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

$m(x_1,x_2) =: x_1x_2$ und

$$s(x_1,\dots,x_n) = t(m(x_1,x_1),\dots,m(x_n,x_n)) = \begin{cases} 2 \text{ für } x_1 = \dots = x_n = 2, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert sind, gehören zu M, und es gilt $(t^n,s^n) \in \mu_{n-1}$ sowie $(t^n,s^n) \notin \mu_n$ für beliebiges $n \geq 1$. Folglich gibt es auf dem Klon M unendlich viele Kongruenzen. □

3. Der Zusammenhang zwischen Klonkongruenzen auf $T(\underline{A})$ und den vollinvarianten Kongruenzen der freien Algebra abzählbaren Ranges aus $V_{\underline{A}}$

Bezeichne $\underline{A} = (A,W)$, $W \subseteq P_A$, eine Algebra, $V_{\underline{A}}$ die durch $\underline{A}$ erzeugte Varietät und $\underline{F(X)}$ (:= $(F(X),W)$) die freie Algebra abzählbaren Ranges aus $V_{\underline{A}}$. Für F(X) benutzen wir folgendes Modell:

$X = \{x_1,x_2,\dots\}$,

$$F(X) := \bigcup_{n\geq 1}\{f(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) \mid f \in T^{(n)}(\underline{A}),\ \{x_{i_1},\dots,x_{i_n}\} \subseteq X\}$$

(F(X) besteht also aus allen Termen über dem Alphabet X und den Funktionssymbolen aus $T(\underline{A}) = [W]$), und für beliebiges $w^n \in W$ und beliebige $f_i(x_{i1},\dots,x_{im_i}) \in F(X)$, $i = 1,\dots,n+1$, gelte

$$f_1(x_{11},\dots,x_{1m_1}) = f_2(x_{21},\dots,x_{2m_2})$$
$$:\Longleftrightarrow \forall a_{11},\dots,a_{2m_2} \in A : f_1(a_{11},\dots,a_{1m_1}) = f_2(a_{21},\dots,a_{2m_2}),$$
$$w(f_1(x_{11},\dots,x_{1m_1}),\dots,f_n(x_{n1},\dots,x_{nm_n})) \tag{4}$$
$$= f_{n+2}(x_{n+1,1},\dots,x_{n+1,m_{n+1}})$$
$$:\Longleftrightarrow \forall a_{11},\dots,a_{n+1,m_{n+1}} \in A : w(f_1(a_{11},\dots,a_{1m_1}),\dots,f_n(a_{n1},\dots,a_{nm})) = f_{n+1}(a_{n+1,1},\dots,a_{n+1,m_{n+1}}),$$

mit $a_{ij} = a_{lk} \Leftrightarrow x_{ij} = x_{lk}$ (/9/).

Uns interessieren hier die vollinvarianten Kongruenzen von $\underline{F(X)}$ (d. h. diejenigen Äquivalenzrelationen auf $\underline{F(X)}$, die nicht nur mit den Operationen der Algebra $\underline{F(X)}$, sondern auch mit jedem Endomorphismus von $\underline{F(X)}$ kompatibel sind), da der Verband dieser Kongruenzen antiisomorph zum Verband der Untervarietäten von $V_{\underline{A}}$ ist (/9/). Der nachfolgende Satz ist ein bekanntes Resultat der Kategorientheorie, der sich aus der Darstellung einer Varietät durch die algebraische Theorie (einer besonderen Kategorie) ergibt. Ausführliche Informationen zu diesem kategorientheoretischen Hintergrund findet man in /26/.

Satz 3.1 (/23/): Durch

$$(t(x_1,\dots,x_n),u(x_1,\dots,x_n)) \in \mathfrak{R}_F \Leftrightarrow (t,u) \in \mathfrak{R} \quad (t,\ u \in T(\underline{A}),\ n = 1,2,\dots) \tag{5}$$

wird jeder binären Relation $\mathfrak{R}_F$ auf $\underline{F(X)}$ ($\in V_{\underline{A}}$) eine Relation $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_a$ auf $T(\underline{A})$ zugeordnet und umgekehrt. Eine binäre Relation $\mathfrak{R}_F$ über F(X) ist genau dann eine vollinvariante Kongruenz von $\underline{F(X)}$, wenn die Relation $\mathfrak{R}$ über $T(\underline{A})$ eine Aritätskongruenz von $T(\underline{A})$ ist, d. h., der Verband der vollinvarianten Kongruenzen von $\underline{F(X)}$ ist isomorph zum Verband der Aritätskongruenzen von $T(\underline{A})$ bzw. antiisomorph zum Untervarietätenverband von $V_{\underline{A}}$.

Beweis: Da zu $T(\underline{A})$, falls $f \in T(\underline{A})$, auch alle Funktionen gehören, die sich von f nur durch fiktive Stellen unterscheiden, ist jede binäre Relation über F(X) wegen (4) durch die Tupel $(t(x_1,\dots,x_n),u(x_1,\dots,x_n))$ $(t,\ u \in T^{(n)}(\underline{A}),\ n = 1,2,\dots)$ vollständig charakterisiert, womit (5) eine Bijektion zwischen binären Relationen über F(X) und Aritätsrelationen über $T(\underline{A})$ beschreibt.

Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_a$ eine Kongruenzrelation über $T(\underline{A})$ und $\mathfrak{R}_F$ die nach (5) definierte Relation über F(X). Wegen $(w(t_1,\dots,t_r),w(u_1,\dots,u_r)) \in \mathfrak{R}$ für $(t_i,u_i) \in \mathfrak{R}$, $i = 1,2,\dots,r$, und beliebige $w \in W$ ist $\mathfrak{R}_F$ mit den Operationen aus W kompatibel, d. h., $\mathfrak{R}_F$ ist eine Kongruenzrelation von F(X). Vollinvariant wäre $\mathfrak{R}_F$, wenn zusätzlich für jeden Endomorphismus φ auf F(X)

aus $(t(x_1,\dots,x_n),u(x_1,\dots,x_n)) \in \mathfrak{K}_F$ stets $(\varphi(t(x_1,\dots,x_n)),\varphi(u(x_1,\dots,x_n))) \in \mathfrak{K}_F$ folgte. Sei φ ein Endomorphismus von F(X) mit $\varphi(x_i) = t_i(x_1,\dots,x_{r_i})$, $i = 1,2,\dots$, und $(t(x_1,\dots,x_n),u(x_1,\dots,x_n)) \in \mathfrak{K}_F$. Dann gilt

$$(\varphi(t(x_1,\dots,x_n)),\varphi(u(x_1,\dots,x_n))) = (t(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)),u(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))) = (t(t_1(x_1,\dots,x_{r_1}),\dots,t_n(x_1,\dots,x_{r_n})),$$

$$u(t_1(x_1,\dots,x_{r_1}),\dots,t_n(x_1,\dots,x_{r_n}))) \in \mathfrak{K}_F,$$

weil $(t(t_1,\dots,t_n),u(t_1,\dots,t_n)) \in \mathfrak{K}$ aus $(t,u) \in \mathfrak{K}$ folgt.

Daher ist $\mathfrak{K}_F$ eine vollinvariante Kongruenz auf F(X), falls $\mathfrak{K}$ eine Kongruenz von T(A) ist.

Sei $\mathfrak{K}_F$ eine vollinvariante Kongruenz von F(X) und (f^n,g^n), $(u^m,v^m) \in \mathfrak{K}$. Wir haben $(f * u,\ g * v) \in \mathfrak{K}$ und $(\alpha f,\alpha g) \in \mathfrak{K}$ für $\alpha \in \{\xi,\tau,\Delta\}$ nachzuweisen. Offenbar läßt sich jede Abbildung von X in F(X) zu einem Endomorphismus auf F(X) fortsetzen. Wir betrachten hier die Endomorphismen $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ mit

$$\varphi_1(x_1) = x_2,\ \varphi_1(x_2) = x_3,\dots,\ \varphi_1(x_{n-1}) = x_n,\ \varphi_1(x_n) = x_1,$$

$$\varphi_2(x_1) = x_2,\ \varphi_2(x_2) = x_1,\ \varphi_2(x_3) = x_2,\dots,\ \varphi_2(x_n) = x_n,$$

$$\varphi_3(x_1) = \varphi_3(x_2) = x_1,\ \varphi_3(x_3) = x_2,\dots,\ \varphi_3(x_n) = x_{n-1},$$

$$\varphi_4(x_1) = u(x_1,\dots,x_m),\ \varphi_4(x_2) = x_{m+1},\dots,\ \varphi_4(x_n) = x_{m+n-1}.$$

Da nach Voraussetzung $(f(x_1,\dots,x_n),g(x_1,\dots,x_n)) \in \mathfrak{K}_F$ gilt und $\mathfrak{K}_F$ vollinvariant ist, gehört für $i = 1,2,3,4$ das Tupel

$$(\varphi_i(f(x_1,\dots,x_n)),\varphi_i(g(x_1,\dots,x_n))) = (f(\varphi_i(x_1),\dots,\varphi_i(x_n)),g(\varphi_i(x_1),\dots,\varphi_i(x_n)))$$

$$= \begin{cases} (f(x_2,\dots,x_n,x_1),g(x_2,\dots,x_n,x_1)) & \text{für } i = 1, \\ (f(x_2,x_1,x_3,\dots,x_n),g(x_2,x_1,x_3,\dots,x_n)) & \text{für } i = 2, \\ (f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),g(x_1,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})) & \text{für } i = 3, \\ (f(u(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}), & \\ \qquad g(u(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})) & \text{für } i = 4 \end{cases}$$

zu $\mathfrak{K}_F$ und demnach $(\xi f,\xi g)$, $(\tau f,\tau g)$, $(\Delta f,\Delta g)$, $(f * u,\ g * u)$ zu $\mathfrak{K}$. Da $\mathfrak{K}_F$ außerdem mit den Operationen aus W kompatibel ist,

haben wir (wegen $(u(x_1,\dots,x_m),v(x_1,\dots,x_m)) \in \mathfrak{K}_F$)

$(g(u(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}),g(v(x_1,\dots,x_m),$

$x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})) \in \mathfrak{K}_F$

und (wegen Transitivität) auch

$(f(u(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}),g(v(x_1,\dots,x_m),$

$x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})) \in \mathfrak{K}_F$.

Somit gehört $(f * u, g * v)$ zu $\mathfrak{K}$, womit $\mathfrak{K}$ eine Kongruenz von $T(\underline{A})$ ist. Die restlichen Aussagen sind offensichtlich bzw. ergeben sich aus bekannten Sätzen der Universalen Algebra. □
Analog zum obigen Beweis und unter Verwendung von Lemma 2.5 beweist man

Satz 3.2: Sei F(n) die freie Algebra mit n Erzeugenden aus $V_{\underline{A}}$. Durch $(f(x_1,\dots,x_n),g(x_1,\dots,x_n)) \in \mu_{F(n)} \Leftrightarrow (f,g) \in \mu$ $(f, g \in T^{(n)}(\underline{A}))$ wird jeder vollinvarianten Kongruenz von F(n) eindeutig eine n-Kongruenz von $T(\underline{A})$ zugeordnet und umgekehrt. □

Aus den Sätzen 3.1, 3.2 und Abschnitt 2 lassen sich eine Reihe von Folgerungen ziehen. Zunächst eine Folgerung aus 2.4, die ein bekanntes Resultat von D. Scott aus /25/ enthält:

Satz 3.3: Der Verband der Untervarietäten von $V_{\underline{A}}$ hat für jede endliche Menge A stets nur endlich viele Atome und Dualatome. □

Man nennt eine Algebra $\underline{A}$ gleichungsmaximal, wenn $V_{\underline{A}}$ minimal ist, d. h. $V_{\underline{A}}$ nur triviale Untervarietäten besitzt bzw. auf F(X) nur die All- und die Nullkongruenz vollinvariant sind. Wegen 3.1 gilt

Satz 3.4: Eine Algebra $\underline{A}$ ist genau dann gleichungsmaximal, wenn $\mathrm{Con}_a T(\underline{A}) = \{\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_a\}$ ist.

Aus 3.2 und 2.6 folgt

Satz 3.5: Eine Algebra $\underline{A}$ mit $|A| = k$ ist genau dann gleichungsmaximal, wenn die freie Algebra $F(k) \in V_{\underline{A}}$ mit k Erzeugenden nur triviale vollinvariante Kongruenzen besitzt bzw. wenn $\mathfrak{K}_0^{(k)}, \mathfrak{K}_a^{(k)}$ die einzigen k-Kongruenzen von $T(\underline{A})$ sind. □

Mit Hilfe der von V. V. Gorlov angegebenen Methoden kann man

daher entscheiden, ob eine endliche Algebra gleichungsmaximal ist oder nicht.
Wegen 2.7 gilt der

Satz 3.6 (/20/): Die von der Murskij-Algebra $(\{0,1,2\},m)$ erzeugte Varietät hat unendlich viele Untervarietäten. □

Da in /21/ als Verschärfung von Satz 3.6 gezeigt werden konnte, daß zu der von der Murskij-Algebra erzeugten Varietät sogar überabzählbar viele Untervarietäten existieren, erhalten wir nach /21/

Satz 3.7: Auf dem Klon $[\{m\}]$ (siehe 2.7) gibt es überabzählbar viele Kongruenzen. □

Einige weitere Anwendungen von Satz 3.1 enthalten die Beweise des nächsten Abschnitts.

4. Kongruenzen von $T(\underline{A})$, die durch Kongruenzen auf $\underline{A}$ bestimmt sind

Offenbar definiert jede Kongruenz $\mathfrak{K}$ auf $P(\underline{A})$ eine Kongruenzrelation $\Theta_{\mathfrak{K}}$ auf $\underline{A}$ durch

$$(a,a') \in \Theta_{\mathfrak{K}} :\Longleftrightarrow (c^1_a, c^1_{a'}) \in \mathfrak{K} \qquad (6)$$

$(a,a' \in A)$.
Uns interessieren als nächstes diejenigen Kongruenzen von $P(\underline{A})$ bzw. $T(\underline{A})$, die durch die Kongruenzen aus Con $\underline{A}$ bestimmt sind. Sei $\Theta \in$ Con $\underline{A}$. Die durch

$$(f^n, g^m) \in \mathfrak{K}_\Theta :\Longleftrightarrow$$

$$n = m \wedge (\forall (a_1,\ldots,a_n) \in A^n : (f(a_1,\ldots,a_n), g(a_1,\ldots,a_n)) \in \Theta)$$

$(f, g \in T(\underline{A}))$ definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation auf $T(\underline{A})$, von der sich leicht nachprüfen läßt, daß sie mit den Operationen $*, \xi, \tau, \Delta$ kompatibel ist. Es gilt also

Lemma 4.1 (/24/): Die Relation $\mathfrak{K}_\Theta$ ist für beliebiges $\Theta \in$ Con $\underline{A}$ eine Kongruenz von $T(\underline{A})$. □

Mit Hilfe der Relationen $\mathfrak{K}_\Theta$ und $\Theta_{\mathfrak{K}}$ wollen wir abschließend drei Sätze beweisen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 4.1 ist

Satz 4.2: Die Algebra $\underline{A}$ ist einfach, wenn $P(\underline{A})$ nur triviale Kongruenzen besitzt. □

Die Bedingung aus Satz 4.2 ist nicht hinreichend für $|\mathrm{Con}\, P(\underline{A})| \leq 3$. So ist z. B. die Algebra $\underline{L} := (\{0,1\},+,0,1)$, wobei + die Addition mod 2 bezeichnet, einfach, aber $T(\underline{L}) = P(\underline{L})$ hat nach /3/ eine nichttriviale Kongruenz

$$\mathfrak{K}_c := \left\{(f,g) \in P(\underline{L})^2 \mid \exists a \in \{0,1\}: f = a + g\right\}.$$

Satz 4.3 (/2/): Sei $\underline{A}$ eine einfache Algebra und seien 0 und 1 zwei verschiedene Elemente aus A. Gibt es in $P(\underline{A})$ eine zweistellige Funktion φ mit $\varphi(0,x) = 0$ und $\varphi(1,x) = x$ für alle $x \in A$, so gilt $\mathrm{Con}\, P(\underline{A}) = \{\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_a, \mathfrak{K}_1\}$.

Beweis: Angenommen, auf $P(\underline{A})$ existiert eine nichttriviale Kongruenz $\mathfrak{K}$, d. h., nach 2.1. es gilt $\mathfrak{K}_0 \subsetneq \mathfrak{K} \subsetneq \mathfrak{K}_a$. Dann findet man in $P(\underline{A})$ zwei $\mathfrak{K}$-kongruente Funktionen f^n, g^n mit $f \neq g$. Folglich gibt es gewisse $a_1,\ldots,a_n \in A$, für die $a := f(a_1,\ldots,a_n) \neq g(a_1,\ldots,a_n) =: a'$ ist, woraus sich $(c_a,c_a) \in \mathfrak{K}$ ergibt. Wegen $a \neq a'$ ist die durch (6) definierte Kongruenz $\Theta_{\mathfrak{K}}$ von der Nullkongruenz verschieden. Da $\underline{A}$ einfach ist, kann $\Theta_{\mathfrak{K}}$ also nur die Allkongruenz sein. Sämtliche Konstanten aus $P^{(1)}(\underline{A})$ sind damit untereinander $\mathfrak{K}$-kongruent. Speziell haben wir $(c_0^1,c_1^1) \in \mathfrak{K}$ und folglich $(\Delta(\varphi * c_0^1), \Delta(\varphi * c_1^1)) = (c_0^1,e_1^1) \in \mathfrak{K}$. Hieraus erhält man $(c_0^1 * f,\ e_1^1 * f) = (c_0^n,f) \in \mathfrak{K}$ für eine beliebige Funktion $f^n \in P(\underline{A})$. Also gilt $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_a$, im Widerspruch zur Annahme. □

Satz 4.4.: Sei $\underline{A} = (A,W)$ eine Algebra und eine dreistellige Funktion d mit $d(x,x,y) = d(x,y,x) = d(y,x,x) = x$ Element von $P(\underline{A})$. Dann hat $P(\underline{A})$ außer $\mathfrak{K}_1$ nur Kongruenzen der Form $\mathfrak{K}_\Theta$, $\Theta \in \mathrm{Con}\, \underline{A}$.

Beweis: $\underline{A}^+ = (A,W^+)$ bezeichne die Algebra, die aus $\underline{A}$ durch Hinzunahme aller Elemente von A als konstante Operationen zu den Operationen von W entsteht. Offenbar ist $T(\underline{A}^+) = P(\underline{A})$. Hieraus folgt nach einem Lemma von B. Jonsson (/10/) für die von $\underline{A}^+$ er-

zeugte Varietät $V_{\underline{A}^+} = IP_sHS\,\underline{A}^+$. Da $\underline{A}^+$ keine echten Teilalgebren hat, gilt $V_{\underline{A}^+} = IP_sH\,\underline{A}^+$. Die subdirekt irreduziblen Algebren von $V_{\underline{A}^+}$ stimmen also mit den homomorphen Bildern von $\underline{A}^+$ überein. Nach G. Birkhoff (vgl. /9/) erhält man alle Untervarietäten von $V_{\underline{A}^+}$, indem man alle Teilmengen der Menge der subdirekt irreduziblen Algebren von $V_{\underline{A}^+}$ bildet. Dabei gilt für zwei derartige Teilmengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ stets $IP_s\mathfrak{M} \subseteq IP_s\mathfrak{N}$, d. h. $V_{\mathfrak{M}} \subseteq V_{\mathfrak{N}}$ für die von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bestimmten Untervarietäten von $V_{\underline{A}^+}$. Weiter ist $\mathrm{Id}\, V_{\mathfrak{M}} \supseteq \mathrm{Id}\, V_{\mathfrak{N}}$ für die diese Untervarietäten charakterisierenden Identitätenmengen. Zusammenfassend folgt aus den obigen Bemerkungen, daß der Verband der Untervarietäten von $V_{\underline{A}^+}$ antiisomorph zu Con $\underline{A}^+$, dem Kongruenzenverband von $\underline{A}^+$, ist. Da andererseits der Verband der Untervarietäten von $V_{\underline{A}^+}$ antiisomorph zu $\mathrm{Con}_{inv}F_{V_{\underline{A}^+}}(X)$, dem Verband der vollinvarianten Kongruenzen der freien Algebra $F_{V_{\underline{A}^+}}(X)$ abzählbaren Ranges aus $V_{\underline{A}^+}$, ist, gilt Con $\underline{A}^+ = \mathrm{Con}_{inv}F_{V_{\underline{A}^+}}(X)$. Nach Satz 3.1 ist jeder Aritätskongruenz von $P(\underline{A})$ $(= T(\underline{A}^+))$ durch (5) eine vollinvariante Kongruenz $\varkappa_F$ von $F_{V_{\underline{A}^+}}(X)$ eineindeutig zugeordnet. Der Kongruenz $\varkappa_F$ wiederum läßt sich wegen Con $\underline{A}^+ = \mathrm{Con}_{inv}F_{V_{\underline{A}^+}}(X)$ umkehrbar eindeutig eine Kongruenz Θ auf $\underline{A}^+$ zuordnen durch

$(t(a_1,\ldots,a_n),u(a_1,\ldots,a_n)) \in \Theta \Leftrightarrow (t(x_1,\ldots,x_n),u(x_1,\ldots,x_n)) \in \varkappa_F$

$(a_1,\ldots,a_n \in A^+;\ t,\ u \in P(\underline{A}^+);\ n = 1,2,\ldots)$.

Also gilt unter Verwendung von (5):

$(t^n,u^n) \in \varkappa \Leftrightarrow (t(a_1,\ldots,a_n),(u(a_1,\ldots,a_n)) \in \Theta,$

$(a_1,\ldots,a_n \in A^+;\ t,\ u \in P(\underline{A}^+);\ n = 1,2,\ldots)$.

Die Kongruenz $\varkappa$ ist damit von der Form $\varkappa_\Theta$. □

Literatur

/1/ Felscher, W.: Equational maps. In: Schmidt, H. A., Schütte, K., and Thiele, H.-J. (Eds.) Contributions to Mathematical Logic. Proc. Logic Colloq., Hannover 1966. 121 - 161, Amsterdam 1968

/2/ Foster, A. L.: Generalized equational maximality and primal-in-the-small algebras. Math. Z. 79, 127 - 146 (1962)

/3/ Горлов, В. В.: О конгруэнциях на замкнутых классах Поста. Мат. Заметки 13, 725 - 734 (1973)

/4/ Горлов, В. В.: О замкнутых классах к-значной логики, все конгруэнции которых тривиальны. Мат. Заметки 22, 499 - 509 (1977)

/5/ Горлов, В. В.: О замкнутых классах к-значной логики, все надклассы которых имеют только тривиальные конгруэнции. Докл. Акад. Наук СССР 234, 237-276 (1977)

/6/ Горлов, В. В.: Достаточное условие, ири котором замкнутые классы к-значной логики имеют только тривиальные конгруэнции. Мат. Сборник 110 (192), 551 - 578 (1979)

/7/ Горлов, В. В., и Лау, Д.: Об одном семействе М-классов к-значной логики и конгруэнциях на субмаксимальных классах P_3. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 18, 669 - 686 (1982)

/8/ Gorlov, V. V., and Lau, D.: Congruences on closed stes of selfdual functions in many-valued logics and on closed sets of linear functions in prime-valued logics, Közl.-MTA Szâmitástech. Automat. Kutadó Int. Budapest 29, 31 - 39 (1983)

/9/ Grätzer, G.: Universal Algebra. Princeton (N.J.) 1968

/10/ Jonsson, B.: Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scand. 21, 110 - 121 (1967)

/11/ Lau, D.: Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,1}$. Rostock. Math. Kolloq. 3, 37 - 43 (1977)

/12/ Lau, D.: Congruences on closed sets of k-valued logic. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 28, 417 - 440 (1981)

/13/ Lawvere, F. W.: Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories. In: MacLane, S. (Ed.): Report of the Midwest Category Seminar II. Lecture Notes in Math. 61, 41 - 61, Berlin 1968

/14/ Linton, F. E. J.: Some aspects of equational categories. In: Eilenberg, S., et. al. (Eds.): Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla 1965, 84-94, Berlin 1966

/15/ Мальцев, А. И.: Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика 5, 5 - 24 (1966)

/16/ Мальцев, И. А.: Конгруэнции и автоморфизмы на клетках алгебр Поста. Алгебра и Логика 11, 666 - 672 (1972)

/17/ Мальцев, И. А.: О конгруэнциях на подалгебрах итеративных алгебр. Методы Дискрет. Анализ. 29, 40 - 52 (1976)

/18/ Мальцев, И. А.: Гомоморфизмы вполне ограниченных расширений итеративных алгебр Поста. Rostock. Math. Kolloq. 11, 85 - 92 (1979)

/19/ Мутский, В. Л.: Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы тождеств. Докл. Акад. Наук СССР 163, 815 - 818 (1965)

/20/ Oates-Williams, S.: Murskii's algebra does not satisfy Min. Bull. Austral. Math. Soc. 22, 199 - 203 (1980)

/21/ Oates-Williams, S.: On the variety generated by Murskii's algebra. Algebra Universalis 18, 175 - 177 (1984)

/22/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren, Berlin 1979

/23/ Schweigert, D.: Clone equations and hyperidentities. Univ. Kaiserslautern, Preprint № 86 (1984)

/24/ Schweigert, D.: On varieties of clones. Semigroup Forum 26, 275 - 285 (1983)

/25/ Scott, D.: Equationally complete extensions of finite algebras. Indag. Math. 18, 35 - 38 (1956)

/26/ Vogel, H. J.: Kongruenzen auf Klons und vollinvariante Kongruenzen relativ freier Algebren I, in Vorbereitung

eingegangen: 09. 09. 1985

Anschrift der Verfasser:

Dr. K. Denecke
Pädagogische Hochschule
"Karl Liebknecht" Potsdam
Sektion Mathematik/Physik
Am Neuen Palais
DDR-1500 Potsdam

Dr. D. Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 29, 21 - 24 (1986) 05A10

Roger Labahn

On an interesting property of binomial coefficients

In this paper we deal with the function

$$f(n,k) := \binom{n}{k} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i},$$

defined for natural numbers $n \geq k \geq 1$. We are interested in its row- or column-zeros, i.e. in those values of n and k, for which f(n,k) and f(n,k-1) or f(n+1,k), respectively, have different signs.

The main result has an "geometrical" interpretation in Pascal's triangle: Let "+" if $f(n,k) > 0$ and "-" otherwise be substituted for every $\binom{n}{k}$. Then the "+" -domain and the "-" -domain are connected and convex regions. Here convex as usual meens convex in every row n=const. and every column k=const. Hence the sign of f(n,k) looks like that of a monotonous function, but f(n,k) is not monotonous.

Table 1 shows the first part of "Pascal's triangle" with f(n,k) instead of $\binom{n}{k}$.

The following theorem contains the exact result and bounds for the zeros.

Theorem:

a) For every $k \geq 1$ there exists a number C(k) such that

$$f(n,k) \leq 0 \Longleftrightarrow n \leq C(k).$$

It holds $k \leq C(k) \leq 3k-2$.

b) For every $n \geq 2$ there exists a number R(n) such that

$$f(n,k) \leq 0 \Longleftrightarrow k \geq R(n).$$

It holds $\lfloor (n+1)/3 \rfloor < R(n) \leq n$.

Obviously C(k) and R(n) are unique, if they exist.

Tab. 1 $f(n,k)$ for $1 \leq k \leq 6$, $1 \leq n \leq 15$

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	[0]					
2	1	-2				
3	2	[-1]	-6			
4	3	1	-7	-14		
5	4	4	-6	-21	-30	
6	5	8	[-2]	-27	-51	-62
7	6	13	6	-29	-78	-113
8	7	19	19	-23	-107	-191
9	8	26	38	[-4]	-130	-298
10	9	34	64	34	-134	-428
11	10	43	98	98	-100	-562
12	11	53	141	196	[-2]	-662
13	12	64	194	337	194	-664
14	13	76	258	531	531	[-470]
15	14	89	334	689	1062	61

Proof of the Theorem

Applying the usual rules for binomial coefficients we get for arbitrary natural $n \geq k \geq 1$:

$$f(n,k) - f(n,k+1) = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,(3k+2-n).$$

Hence it holds

$$\begin{aligned} f(n,k) - f(n,k+1) > 0 &\Longleftrightarrow n \leq 3k+1, \\ f(n,k) - f(n,k+1) < 0 &\Longleftrightarrow n \geq 3k+3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Assume now $f(3k-1,k) \leq 0$. By $f(3k-1,1) = 3k-2 > 0$ there exists a number l with $1 \leq l \leq k-1$, $f(3k-1,l) > 0$, $f(3k-1,l+1) \leq 0$. That means $f(3k-1,l) - f(3k-1,l+1) > 0$ and because of (1) it follows the contradiction $3k-1 \leq 3l+1 \leq 3k-2$. Hence we have $f(3k-1,k) > 0$.

On the other hand it holds $f(k,k) = 2 - 2^k \leq 0$. Therefore at least one number p exists, such that $k \leq p \leq 3k-2$, $f(p,k) \leq 0$, $f(p+1,k) > 0$. Let $C(k)$ be the smallest of all those p's, i.e.

$f(n,k) \leq 0$ for all $n \leq C(k)$,
but $f(C(k)+1,k) > 0$.
Now let k be fixed arbitrarily and assume that there is a number $q > C(k)$ with $f(q,k) \leq 0$. Then there also is an r with $C(k) < r < q$, $f(r,k) > 0$, $f(r+1,k) \leq 0$. That means $f(r+1,k) - f(r,k) < 0$ and by the application of the usual calculating rules we get $f(r,k-1) < 0$ and thus $f(r,k-1) - f(r,k) < 0$. Because of (1) it follows $r \geq 3k$.
By $f(r,1) = r-1 \geq 0$ there is a number m with $1 \leq m \leq k-2$ and $f(r,m) \geq 0$, $f(r,m+1) < 0$. This yields $f(r,m) - f(r,m+1) > 0$ and, again with (1) $r \leq 3m+1 \leq 3k-5$ in contradiction to the above inequality $r \geq 3k$.
Therefore it holds $f(q,k) > 0$ for every $q > C(k)$ and so C(k) has the asserted property.
We use this result to prove b) similarly.
Because of $n = 3((n+1)/3) - 1 \geq 3 \cdot \lfloor (n+1)/3 \rfloor - 1 > 3 \lfloor (n+1)/3 \rfloor - 2 \geq C(\lfloor (n+1)/3 \rfloor)$ it follows $f(n, \lfloor (n+1)/3 \rfloor) > 0$. We already mentioned $f(n,n) = 2-2^n \leq 0$. Thus R(n) can be defined as the smallest number l with $\lfloor (n+1)/3 \rfloor < l \leq n$, $f(n,l-1) > 0$, $f(n,l) \leq 0$, i.e.

$f(n,k) > 0$ for all $k < R(n)$,
but $f(n,R(n)) \leq 0$.

Now let n be fixed arbitrarily and assume that there is a number $m > R(n)$ with $f(n,m) > 0$. Then we find a j with $R(n) < j \leq m$, $f(n,j-1) \leq 0$, $f(n,j) > 0$. That means $f(n,j-1) - f(n,j) < 0$ and because of (1) $n \geq 3j$. But contradicting this we have
$3j \geq 3(R(n)+1) > 3(\lfloor (n+1)/3 \rfloor + 1) \geq 3((n+1)/3) = n+1$. Hence it holds $f(n,k) \leq 0$ for all $k \geq R(n)$.

q.e.d.

Obviously C(k) and R(n) are not independent each from the other. It is easy to see that

$R(n) \leq k \wedge R(n+1) \geq k+1 \Longrightarrow C(k) = n$,
$C(k) \leq n \wedge C(k+1) \geq n+1 \Longrightarrow R(n+1) = k+1$.

By these rules one function can be computed for special arguments if enough exact values of the other are known. It is more effective to start with C(k).

I found

$$C(k) = \begin{cases} 3k-2 & \text{for } k = 1, \\ 3k-3 & \text{for } 2 \leq k \leq 5, \\ 3k-4 & \text{for } 6 \leq k \leq 46, \end{cases}$$

but I do not know, whether this piecewise linear behaviour of C(k) continues and where the discontinuities are. It is also an open problem to find the exact coefficient c, for which $C(k) \sim ck$ holds. By the unimodality of binomial coefficients and the above results we only have $2 \leq c \leq 3$.
An application of the results of this paper can be found in /1/ and /2/.

References

/1/ Labahn, R.: Informationsflüsse auf Graphen. Diplom-Arbeit, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität, Rostock 1985, unpublished

/2/ Labahn, R.: Extremal broadcasting problems for trees. submitted to publication

received: 15. 10. 1985

Author's address:

Dipl.-Math. R. Labahn
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 29, 25 - 28 (1986) 06D05
20M14

Lothar Berg

Berichtigung der Arbeit "Distributive Verbände als relativ invertierbare Halbgruppen"

In der Arbeit /1/ wurde eine relativ invertierbare Halbgruppe konstruiert und behauptet, daß sie ein Beispiel zum Satz 3 der erwähnten Arbeit sei. Wie Frau I. Jagnow /2/ festgestellt hat, ist dies aber nicht der Fall. Im folgenden sollen daher der erwähnte Satz übersichtlicher formuliert und das Beispiel richtiggestellt werden. Zu diesem Zweck benötigen wir die

Definition: Es seien n,k zwei natürliche Zahlen mit $k \leq n+1$. Wir teilen die Menge der ganzen Zahlen in $n+1$ Äquivalenzklassen $E_0,\dots,E_n$ ein, wobei jede der Klassen E_m bei festem $m \in \{0,\dots,n\}$ die Zahl m enthält sowie alle Zahlen i der Form $i = m + kl$ mit ganzzahligem l, sofern zusätzlich eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:
Entweder $m > n-k$ und $l > 0$
oder $m < k$ und $l < 0$.
Gehören zwei Zahlen i,j derselben Äquivalenzklasse an, so nennen wir sie zueinander kongruent und schreiben

$$i \equiv j \bmod_n k. \tag{1}$$

Die Zahlen $0,1,\dots,n$ nennen wir die Repräsentanten der zugehörigen Restklassen.

Im Fall $2k \leq n$ bestehen die Äquivalenzklassen E_m mit $k \leq m \leq n-k$ nur aus der einzigen Zahl m, und im Fall $2k \leq n+1$ kann keine Zahl $i > n-k$ zu einer Zahl $j < k$ kongruent sein. Im Fall $2k \geq n+2$ sind die Äquivalenzklassen E_m mit $n-k+1 \leq m \leq k-1$ die üblichen Kongruenzklassen mod k, so daß (1) im Fall $k = n+1$ die übliche Kongruenz mod k ist.

Für Repräsentanten lassen sich eine assoziative Addition und eine Subtraktion erklären, indem im Ring der ganzen Zahlen gerechnet wird und die Ergebnisse gemäß (1) durch ihre Repräsentanten ersetzt werden. Bezüglich der Addition entsteht dabei

nach E. S. Ljapin /3/ eine zyklische Halbgruppe mit Vorperiode. Beispielsweise erhalten wir im Fall n = 4 mit k = 2 bzw. k = 3 die Kongruenzen $\mathrm{mod}_4 k$

k=2: $4 \equiv 6 \equiv 8 \equiv 10 \equiv \ldots$
$3 \equiv 5 \equiv 7 \equiv 9 \equiv \ldots$
$1 \equiv -1 \equiv -3 \equiv -5 \equiv \ldots$
$0 \equiv -2 \equiv -4 \equiv -6 \equiv \ldots$

k=3: $4 \equiv 7 \equiv 10 \equiv 13 \equiv \ldots$
$3 \equiv 5 \equiv 9 \equiv 12 \equiv \ldots$
$1 \equiv -2 \equiv -5 \equiv -8 \equiv \ldots$
$0 \equiv -3 \equiv -6 \equiv -9 \equiv \ldots,$

wobei 2 im ersten Fall zu keiner anderen Zahl kongruent ist, dagegen im zweiten zu jeder ganzen Zahl x mit $x \equiv 2 \bmod 3$, und die zugehörigen Verknüpfungstabellen lauten

k = 2

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	3
2	2	3	4	3	4
3	3	4	3	4	3
4	4	3	4	3	4

-	0	1	2	3	4
0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
2	2	1	0	1	0
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

k = 3

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	2
2	2	3	4	2	3
3	3	4	2	3	4
4	4	2	3	4	2

-	0	1	2	3	4
0	0	2	1	0	2
1	1	0	2	1	0
2	2	1	0	2	1
3	3	2	1	0	2
4	4	3	2	1	0.

Um jetzt den erwähnten Satz aufzustellen, betrachten wir l abstrakte Basiselemente $a_1, \ldots, a_l$ sowie ihre Linearkombinationen

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_l a_l, \quad b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_l a_l \qquad (2)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten. Zu jedem Basiselement a_m, $m = 1, \ldots, l$, wählen wir natürliche Zahlen n_m, k_m mit $k_m \leq n_m + 1$ und rechnen mit den jeweiligen Koeffizienten $\mathrm{mod}_{n_m} k_m$. In der Menge der Elemente (2) sei eine mit der Addition verträgliche Halbordnung erklärbar mit der Eigenschaft:

1°. Für die Elemente (2) mit Koeffizienten aus den zugehörigen Repräsentantensystemen ist genau dann $a \leq b$, wenn für $m = 1, \ldots, l$ stets $\beta_m - \alpha_m$ durch k_m teilbar ist und wenn

$$b = (\alpha_1 \vee \beta_1) a_1 + \ldots + (\alpha_m \vee \beta_m) a_m \qquad (3)$$

gilt mit $\alpha \vee \beta = \mathrm{Max}(\alpha, \beta)$.

Die Halbordnung impliziert eine möglicherweise nichttriviale Gleichheitsrelation. Aus der Eigenschaft 1° ergibt sich für jedes Element b die Existenz einer Maximaldarstellung $b = \beta_1^+ a_1 + \ldots + \beta_l^+ a_l$ im Sinne von 1° aus /1/.

Satz: Neben der Eigenschaft 1^0 sei für $m = 1,\ldots,l$ noch folgende Voraussetzung erfüllt:

2^0. Für die Summe der Elemente (2) gilt, falls $\alpha_m^+ + \beta_m^+$ für Zahlen und Repräsentanten denselben Wert hat, $(\alpha_m+\beta_m)^+ = \alpha_m^+ + \beta_m^+$.

Dann bilden die Elemente (2) eine relativ invertierbare Halbgruppe.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar durch Zurückführung auf Satz 3 von /1/, zumal die Voraussetzungen 2^0 in beiden Sätzen inhaltlich die gleichen sind und aus 1^0 auch die Eigenschaft 3^0 von /1/ folgt: Es ist stets

$$k_m a_m \neq 0, \tag{4}$$

während die Elemente pa_m für $p = 1,\ldots,k_m-1$ nicht mit dem Nullelement vergleichbar sind.

Bei dem Beispiel aus /1/ mit den Maximaldarstellungen

$$a_1 = a_1,\ a_3 = 2a_4,\ b = a_1 + 2a_4 + 2a_5$$

gilt $a_1 + a_3 = b$, so daß die Voraussetzung 2^0 verletzt ist. Schränken wir jedoch dieses Beispiel auf die ersten beiden Komponenten ein, wobei a_5 als Basiselement wegfällt, so haben wir neben den unzerlegbaren Basiselementen a_1, a_4 die Darstellungen

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + a_2 = a_2, & a_3 &= 2a_4, \\ m &= a_1 + a_2 + 2a_4 = a_2 + 2a_4, & b &= a_1 + 2a_4, \\ m' &= a_1 + a_2 + a_4 = a_2 + a_4, & b' &= a_1 + a_4, \end{aligned}$$

wobei jeweils die ersten die Maximaldarstellungen sind. In diesem Fall sind alle vorhergehenden Voraussetzungen erfüllt.

Weiterhin wird im Fall $l = 1$ durch (4) stets eine relativ invertierbare Halbgruppe erzeugt, bei der die Darstellungen (2) mit Koeffizienten aus dem Repräsentantensystem eindeutig bestimmt und damit automatisch Maximaldarstellungen sind. Entsprechendes ist auch bei beliebigem l der Fall, wenn außer den durch (4) erzeugten Halbordnungen keine weiteren Ordnungsrelationen und damit auch keine nichttrivialen Gleichheitsrelationen auftreten. Als Beispiel betrachten wir den Fall $l = 2$ mit $n_1 = 4$, $k_1 = 2$ und $n_2 = k_2 = 3$, d. h., wenn wir zur Vereinfachung $a_1 = a$ und $a_2 = b$ setzen,

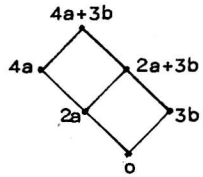
$a < 3a = 5a = 7a = \ldots$, $\quad o < 4a = 6a = 8a = \ldots$,

$b = 4b = 7b = \ldots$, $\quad 2b = 5b = 8b = \ldots$, $\quad o < 3b = 6b = 9b = \ldots$.

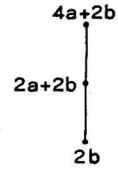
Die Ordnungsrelationen für die $5 \cdot 4 = 20$ Elemente $\alpha a + \beta b$ sind aus dem abschließend angegebenen Graphen zu entnehmen. Man kann versuchen, andere Elemente als Basiselemente auszuwählen und deren Vielfache zu benutzen, etwa

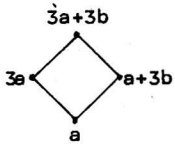
$c = a+b$, $6c = 4a+3b$, $d = a+2b$, $6d = 6c$, $e = a+3b$,
$2c = 2a+2b$, $7c = 3a+b$, $2d = 2a+b$, $7d = 5c$, $2e = 2a+3b$,
$3c = 3a+3b$, $8c = 4a+2b$, $3d = 3c$, $8d = 4c$, $3e = 3c$,
$4c = 4a+b$, $4d = 8c$, $4e = 4c$,
$5c = 3a+2b$, $9c = 3c$, $5d = 7c$, $9d = 3d$, $5e = 3e$,

wobei $6c = 6d$ und $2e$ die positiven Elemente sind. Die alten Basiselemente a,b werden dann aber trotzdem benötigt.













Literatur

/1/ Berg, L.: Distributive Verbände als relativ invertierbare Halbgruppen. Rostock. Math. Kolloq. 28, 66 - 74 (1985)

/2/ Jagnow, I.: Private Zuschrift vom 29. 10. 1985

/3/ Ljapin, E. S.: Semigroups. Providence 1963

eingegangen: 04. 11. 1985

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. L. Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 29, 29 - 32 (1986)

06A10
05A17

Ralf Mahnke

Einige Beispiele für rcc-symmetric chain Ordnungen

Im vorliegenden Artikel werden spezielle Kettenzerlegungen der Verallgemeinerung E_k^n des Booleschen Verbandes angegeben, wobei $E_k^n = \{\underline{a} = (a_1,\dots,a_n) \mid 0 \leq a_i \leq k-1\}$ ist und $(a_1,\dots,a_n) \leq (b_1,\dots,b_n)$ genau dann gilt, wenn $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1,2,\dots,n$ ist. Diese Zerlegungen können bei der Erkennung monotoner Funktionen Anwendung finden. Hierbei geht es um folgendes Problem. Gegeben seien zwei partielle Ordnungen P und Q. Aus irgendeinem Zusammenhang sei bekannt, daß eine Funktion f von P in Q monoton ist ($x \leq_P y$ impliziert $f(x) \leq_Q f(y)$. Die Funktionswerte von f seien jedoch unbekannt, und es sei aufwendig, diese zu berechnen. Deshalb werden Algorithmen gesucht, bei denen in möglichst wenig Schritten die Funktionswerte bestimmter Elemente von P berechnet werden und die Funktionswerte der restlichen Elemente von P aus der Monotonieeigenschaft gefolgert werden können. In /1/ schätzte Korobkov die notwendige Schrittzahl solcher Algorithmen für den Booleschen Verband ab. Im Anschluß ermittelte Hansel in /2/ den exakten Wert für die minimale Schrittzahl. In /3/ ist ein "bester" Algorithmus beschrieben, wenn P eine rcc-symmetric chain Ordnung ist.

Jedem Element $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n)$ des E_k^n ordnen wir den Wert $r(\underline{a}) = a_1 + \dots + a_n$ zu und bezeichnen diesen als Rang von $\underline{a}$. Eine symmetrische Kette ist eine geordnete Menge $(\underline{c}_0,\dots,\underline{c}_l)$ von paarweise vergleichbaren Elementen des E_k^n, so daß $r(\underline{c}_{i+1}) = r(\underline{c}_i) + 1$, $i = 0,\dots,l-1$, und $r(\underline{c}_0) + r(\underline{c}_l) = (k-1)n$ ist. Dabei heißt l die Länge der Kette. Der E_k^n ist nun eine rcc-symmetric chain Ordnung genau dann, wenn er sich so in symmetrische Ketten zerlegen läßt, daß folgende Komplementbedingung erfüllt ist: Für beliebige Elemente $\underline{a}_0,\dots,\underline{a}_3$ des E_k^n, die in einer Kette der Länge $l \geq 3$ der Zerlegung aufeinanderfolgen,

gibt es ein Element $\underline{b}$ des E_k^n, welches in einer Kette der Länge kleiner 1 der Zerlegung enthalten ist, so daß $\underline{a}_0 < \underline{b} < \underline{a}_2$ oder $\underline{a}_1 < \underline{b} < \underline{a}_3$ gilt.

Aus /3/ ist bereits bekannt, daß das kartesische Produkt P × Q zweier rcc-symmetric chain Ordnungen wiederum eine rcc-symmetric chain Ordnung ist. Offenbar gilt $E_k^n = E_k^1 \times \ldots \times E_k^1$. Ebenfalls wurde in /3/ bewiesen, daß E_k^2 und damit auch E_k^{2n} eine rcc-symmetric chain Ordnung ist. In derselben Arbeit wurde das Problem gestellt: Ist E_k^3 auch eine rcc-symmetric chain Ordnung? Man beachte, daß im Falle einer positiven Antwort auch E_k^n für $n > 1$ und $k \geq 1$ eine rcc-symmetric chain Ordnung ist. Durch tabellarische Angabe von entsprechenden Kettenzerlegungen beantworten wir die gestellte Frage für den E_4^3 und E_5^3 positiv (die Fälle $k = 1,2,3$ sind trivial). Weiterhin ungelöst bleibt das Problem für $k > 5$. In den beiden Tabellen sind unter den Elementen der jeweiligen Ketten noch die entsprechenden Komplemente in Klammern aufgeführt.

E_4^3:

Kette \ Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K 1					310	320				
K 2					013	113				
K 3				300	301 (310)	311	312			
K 4				120	220	230 (320)	330			
K 5				012	022 (013)	023	033			
K 6				003	103	203 (113)	213			
K 7			101	201	202 (301)	302 (203)	303	313		
K 8			020	030 (120)	130	131 (230)	231	232		
K 9			011	021	031 (022)	032	132 (033)	133		
K 10		100	200	210 (201)	211	221 (311)	321 (231)	331	332	
K 11		001	002	102 (012)	112 (202)	212	222 (312)	322	323	
K 12	000	010	110 (011)	111	121 (112)	122	123 (222)	223	233 (323)	333

E_5^3:

Kette	Rang 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
K 1							420						
K 2						131	231	331					
K 3						104	204	304					
K 4						023	024	034					
K 5					400	410	411 (420)	421	431				
K 6					220	320	330 (420)	430	440				
K 7					211	221	222 (231)	232	332				
K 8					103	203	213 (204)	214	314				
K 9					022	032 (023)	033	043 (034)	044				
K 10				201	202	302 (203)	303	403 (304)	404	414			
K 11				120	130 (220)	230	240 (330)	340	341 (440)	441			
K 12				021	031	041 (032)	042	142 (043)	143	243			
K 13				003	004	014 (104)	114	124 (214)	224	324			
K 14			110	210	310 (211)	311 (320)	321	322 (421)	422	432 (332)	442		
K 15			020	030	040 (130)	140	141 (240)	241	242 (341)	342	343		
K 16			002	012 (003)	013	113 (023)	123 (213)	223	233 (224)	234	334		
K 17		100	200	300 (201)	301	401 (302)	402	412 (403)	413	423 (414)	424	434	
K 18		010	011	111 (021)	121	122 (131)	132 (123)	133	134 (143)	144 (234)	244	344	
K 19	000	001	101 (002)	102	112 (202)	212	312 (213)	313 (322)	323	333 (423)	433 (343)	443	444

Literatur

/1/ Korobkov, V. K.: O monotonnych funkcijach algebry logiki. Problemy Kibernetiki 13, 5 - 28 (1965)

/2/ Hansel, G.: Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables. C. R. Acad. Sci. Paris 262, 1088 - 1090 (1966)

/3/ Engel, K.: Recognition of order-preserving maps. Erscheint in Order

eingegangen: 24. 10. 1984

Anschrift des Verfassers:

stud. math. R. Mahnke
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 29, 33 - 40 (1986)

04-04
10A05

Roger Labahn
Helmut Kanthack

A special realisation of set-operations

1. Introduction

Programs for computers should work fast and use only few storage. Often these two properties contradict each other, for instance if one uses sets. In general, operations on this type of data-structures are very fast, but a set-variable takes a lot of storage. An expedient is to store the characteristical vector of a set bit-wise. If the used programming language allows a bit-wise processing, logical operations can be used effectively to carry out the original set-operations. But many of the higher programming languages do not allow this and (2-Byte) integers are the smallest units, which can be used. So there is the corresponding integer available instead of the characteristical vector and the question arises, how to carry out the usual set-operations on these integer codes with arithmetical operations only. Obviously it will be very ineffective to translate them back into sets, to execute the standard operation and to code the result.

In this paper we propose a way using a modification of Euclid's algorithm to compute the code of the intersection of two sets giving in their integer code only. On this base other operations can be executed easily. PASCAL-Procedures of our algorithms are given, and in the last section we analyse some tests concerning the length of them.

This method can be applied, if one has to work with many set-type variables on a (preferably small) finite base set. Graphs and other incidence structures are important examples for this situation. We used the method for the storage and the processing of special graphs in an algorithm, testing whether a given attributed grammar is free of cycles.

2. Operations on sets

For a fixed k we consider sets with elements lying in a k-element base set N_k. For sake of simplicity we choose $N_k = \{0,\ldots,k-1\}$. Let $P(N_k)$ denote the power-set of N_k and let $B_k := \{0,\ldots,2^k-1\}$. As described in the introduction we use the code

$$x(M) = \sum_{i \in M} 2^i$$

instead of the set $M \in P(N_k)$. Obviously this mapping x is bijective and we denote its inverse mapping x^{-1} with $m: B_k \longrightarrow P(N_k)$.

Furthermore, let p_i be the i-th prime-number in their natural order, i.e. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., and let be defined:

$$T_k := \left\{ \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} : a_i \in \{0,1\} \right\}.$$

Then it is a well-known fact that $(P(N_k), \subseteq)$ and $(T_k, /)$ - ordered by inclusion and divisibility, respectively - are isomorphic lattices, namely both are isomorphic to the Boolean lattice E_2^k. The concatenation of m and this bijection is $q: B_k \longrightarrow T_k$, defined by

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i \xrightarrow{\quad q \quad} q(x) = \prod_{i=0}^{k-1} p_{i+1}^{a_i} \qquad (a_i \in \{0,1\}).$$

The following theorem shows, how all usual set-operations can be carried out using simple arithmetic operations on B_k, provided that the intersection of two sets is given. But this is done in T_k, where it appears as the determination of the Greatest Common Divisor (G.C.D.).

Theorem 1: Let $a,b \in B_k$ $(a \geq b)$ be given arbitrarily. Then it holds:

(1) $d := x(m(a) \cap m(b)) = (q(a);q(b))$, where $(r;s)$ denotes the G.C.D. of the integers r and s,

(2) $x(m(a) \cup m(b)) = a-d+b$,

(3) $x(m(a) \setminus m(b)) = a-d$,

(4) $x(m(a) \Delta m(b)) = a-d+b-d$,

(5) $x(Cm(a)) = 2^k-1-a$, where C denotes the complement in N_k,

(6.1) $m(b) \subseteq m(a) \Longleftrightarrow b = d$,

(6.2) $m(b) \subseteq m(a) \Longleftrightarrow q(b) \mid q(a)$.

Proof: (5) and (6.1) are obvious, (6.2) is the isomorphism mentioned above and (1) is a direct consequence from this and the definition of the G.C.D.

For $x,y \in B_k$ $m(x) \cap m(y) = \emptyset$ implies $m(x) \cup m(y) = m(x+y)$. (7)

We have $m(a) \setminus m(b) = C((Cm(a)) \cup m(d))$. Because of (5), (7) and $(Cm(a)) \cap m(d) = \emptyset$ it follows

$m(a) \setminus m(b) = C(m(2^k-1-a+d)) = m(a-d)$, i.e. (3) holds.

Applying (3) with d instead of b one gets (4):

$m(a) \Delta m(b) = (m(a) \setminus m(d)) \cup (m(b) \setminus m(d)) = m(a-d+b-d)$.

Similarly (2) is proved with the help of (3) and (7):

$m(a) \cup m(b) = (m(a) \setminus m(d)) \cup m(b) = m(a-d+b)$. q.e.d.

Analogously other operations can be executed.

3. Computation of the intersection

To apply Theorem 1 we have to give an effective algorithm for the computation of the code of the intersection. Using (1) we can do it by determining the G.C.D. in T_k. In this part a version of Euclid's algorithm and estimations of its length are presented.

Let r and s be natural numbers with $r \geq s > 0$ and let x mod y denote the rest $x - y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ $(y \neq 0)$. We construct the sequence

$$t_1 := r,\ t_2 := s$$

$$t_i := \min \left\{ t_{i-2} \bmod t_{i-1};\ t_{i-1} - (t_{i-2} \bmod t_{i-1}) \right\} \quad (8)$$

$$\text{for } i = 3,\ldots$$

until $t_i = 0$ occurs.

Theorem 2: The sequence $\{t_i\}$ is finite, i.e. there is a number $j \geq 2$ with $t_j = 0$, and it holds $t_{j-1} = (r;s)$.

Proof: An obvious property of the mod-operation is
$0 \leq t_{i-2} \bmod t_{i-1} < t_{i-1}$.
Because of $(t_{i-2} \bmod t_{i-1}) + (t_{i-1} - (t_{i-2} \bmod t_{i-1})) = t_{i-1}$ it follows from (8):

$$0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} t_{i-1} < t_{i-1} \quad \text{for } i = 3, \ldots . \tag{9}$$

Hence $\{t_i\}$ is strict decreasing and positive, i.e. finite. Because of the definition of $\{t_i\}$ in (8) a 0 must occur at the end. Let j be the index with $t_j = 0$.

With $v_i := \left\lfloor \frac{t_{i-2}}{t_{i-1}} \right\rfloor$ (8) implies for $i = 3, 4, \ldots, j$

$t_i \in \{t_{i-2} - v_i t_{i-1};\ (v_i+1)t_{i-1} - t_{i-2}\}$ and

$t_{i-2} \in \{t_i + v_i t_{i-1};\ (v_i+1)t_{i-1} - t_i\}$.

Therefore every divisor of t_{i-2} and t_{i-1} divides t_i and every divisor of t_i and t_{i-1} divides t_{i-2}. So we have $(r;s) \mid t_{j-1}$ and $t_{j-1} \mid (r;s)$. q.e.d.

The length L of this algorithm should be j-2, the number of the t_i which we have to determine. We will give an estimation for L now.

From (8) $t_{i-2} = \pm t_i \bmod t_{i-1}$ follows and because of (9) $t_{i-2} \geq \min \{2t_{i-1}+t_i;\ 3t_{i-1}-t_i\}$ holds. But it is by (9) $3t_{i-1}-t_i = 2t_{i-1}+t_i+(t_{i-1}-2t_i) \geq 2t_{i-1}+t_i$, i.e. $t_{i-2} \geq 2t_{i-1}+t_i$.

Let $\{F_l\}_{l=1,2,\ldots}$ be defined by

$$F_1 = 0,\ F_2 = 1,$$

$$F_{l+2} = 2F_{l+1} + F_l \quad \text{for } l = 1, 2, \ldots .$$

$\{F_l\}$ is similar to Fibonacci's sequence and has the explicit representation

$$F_l = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,((1+\sqrt{2})^{l-1} - (1-\sqrt{2})^{l-1}) \qquad (l=1,2,\ldots).$$

Because of $t_{j-1} = (r;s)$, $t_j = 0$ and the above formulas we can

conclude that $\{F_l\}_{l=1,\ldots,j-1}$ doesn't exceed $\left\{\frac{t_i}{(r;s)}\right\}_{i=j,\ldots,2}$.

This implies $\frac{t_i}{(r;s)} \geq F_{j+1-i}$ and

$$r \geq s = t_2 \geq (r;s) \cdot F_{j-1} \tag{10}$$

and so we get an a-priori-estimation of $L = j-2$ since $(r;s) \geq 1$:

$$L \leq \max\{h : F_{h+1} \leq s\}.$$

Now we restrict to the special case we are interested in. Let $L(k)$ be the maximal length of a sequence (8) for some $r,s \in T_k$. Then it holds

$$\frac{rs}{(r;s)^2} \leq \frac{rs}{(r;s)} \leq \prod_{i=1}^{k} p_k =: P_k .$$

Because of $r \geq s$ this means $\frac{s}{(r;s)} \leq \sqrt{P_k}$ and with (10) we have

$$F_{L(k)+1} \leq \sqrt{P_k} . \tag{11}$$

One can sharpen this estimation using the greatest number $s_k \in T_k$ with $s_k \leq \sqrt{P_k}$, but the effort is very small.

Using the explicit formula of F_1 we find

$$L(k) \leq \tfrac{1}{2} \log_{(1+\sqrt{2})}(8P_k) \approx \lfloor 0.567 \ln P_k + 1.18 \rfloor .$$

By the same method we get $\lfloor 1.039 \ln P_k + 1.672 \rfloor$ as an upper bound for the number of steps of the original algorithm of Euclid.

4. PASCAL-procedures

The following procedures realize the proposed algorithm. BIJ(1) generates the vector Q, which is the representation of the bijection q (comp. 2.). After that GCD computes the G.C.D. using (8). The variables K,P,Q have to be declared before:

```
VAR K: INTEGER; (* cardinality of the base set N_k *)
    P: ARRAY [1..K] OF INTEGER; (* vector of the K first
                                   prime-numbers        *)
    Q: ARRAY [Ø.. MAX] OF INTEGER; (* representation of q,
                                      Q[I] = q(i)       *)
```

(It is MAX = 2^k-1, P[1] = p_1 = 2, P[2] = p_2 = 3, ...)

```
PROCEDURE BIJ (L: INTEGER);
(* generates the bijection q *)
VAR S,T: ARRAY [Ø..K] OF INTEGER;
      I: INTEGER;
BEGIN S[Ø] := Ø;  T[Ø] := 1;
      FOR I:= Ø TO 1 DO
          BEGIN  S[L]:= 2*S[L-1] + I;
                 IF I=1
                    THEN T[L]:= T[L-1]*P[K+1-L]
                    ELSE T[L]:= T[L-1];
                 IF L=K
                    THEN Q[S[L]] := T[L]
                    ELSE BIJ(L+1)
          END
END;

FUNCTION GCD (A,B: INTEGER) : INTEGER;
(* computes the G.C.D. *)
VAR A1,B1,C: INTEGER;
BEGIN  A1:= Q[A];  B1:= Q[B];  (* translation into T_k *)
       C:= A1 MOD B1;
       WHILE C>Ø   DO          (* algorithms (8) *)
            BEGIN  IF B1-C<C  THEN  C:= B1-C;
                   A1:= B1; B1:= C; C:= A1 MOD B1
            END;
       C:=Ø;            (* determination of the origin of B1 *)
       WHILE  Q[C]<>B1  DO C:=C+1;
     GCD:= C
END;
```

5. Remarks on the application

The number $q(2^k-1) = P_k = \prod_{i=1}^{k} P_i$ is the greatest integer used in our algorithm. Since already $P_{10} > 2^{32}$ we restrict the analysis to $k \leq 9$. (The estimations of Section 3 can be used to make it more general.)

For $k \leq 9$ we were able to determine the maximum length of the algorithm (8). Table 1 compares it with the estimation (11).

Tab. 1

k		2	3	4	5	6	7	8	9
L(k)	exact	2	2	3	4	5	7	8	9
	by (11)	2	3	4	5	6	8	10	12

One can expect that the method is faster in most of the cases. Table 2 shows the relative frequencies (in %, rounded) of several values of L and the expectation $\bar{L}(k)$. For $k = 2,3,\ldots, 7$ we computed the exact values, for $k = 8, 9$ we analysed a random test of 10000 and 5000 examples, respectively.

Tab. 2

k	L									$\bar{L}(k)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	90	10								1,10
3	75	25								1,25
4	60	34	6							1,46
5	46	37	16	1						1,73
6	35	35	25	4	1					2,00
7	26	32	30	9	3	0	0			2,31
8	19	26	33	14	6	2	0	0		2,67
9	15	21	32	17	10	4	1	0	0	2,82

The proposed method can also be used if $k > 9$. For a set $M \subseteq N_k$ we divide the original characteristical vector having more than 9 components in l blocks having less than 9 components and carry out the algorithm on every block. This blocking can be done on the corresponding code $x(M)$ in B_k, for instance with the help of the operations MOD and DIV of PASCAL. If every block M_1, M_2, ... contains t components, we determine their codes by

$x(M_1) = x(M) \text{ MOD } 2^t$,

$x(M_2) = (x(M) \text{ DIV } 2^t) \text{ MOD } 2^t$,

$x(M_3) = (x(M) \text{ DIV } 2^{2t}) \text{ MOD } 2^t$

and so on.

It also can be effective to use blocks if $k \leq 9$. The block-size k' depends on the special value of k and on the available storage, because a bigger k' demands a longer vector Q. On the other hand a smaller k' demands more multiplicative operations as shown in Table 3 for $k = 8$.

Tab. 3

l	k'	number of multiplicative operations maximal	expectation (rounded)
8	1	28	28
4	2	20	17
2	4	10	7
1	8	8	3

In general we need for l blocks of k' components no more than $4(l-1) + l \cdot L(k')$, on average only $4(l-1) + l \cdot \bar{L}(k')$ multiplicative operations. The case $k' = 1$ is the simple method mentioned in the introduction: translating back into sets, use standard set-operations, code the result. It needs $4(lk'-1)$ multiplicative operations. But from Table 1 we have $L(k') \leq k'$, i.e. $4(l-1)+l \cdot L(k') \leq 4l-4+lk' = l(k'+4)-4 < 4lk'-4$ if $k' \geq 2$. Hence this simple method is indeed ineffective compared with our algorithm.

received: December 15, 1984
revised: February 13, 1985
June 25, 1985

Authors addresses:

Dipl.-Math. R. Labahn
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Dipl.-Math. H. Kanthack
Stahl- und Walzwerk
Brandenburg Organisations- und Rechenzentrum
Straße der Aktivisten
DDR-1800 Brandenburg

Rostock. Math. Kolloq. 29, 41 - 56 (1986)

28B10
06A12

Klaus Markwardt

Maß und Integral auf einheitlicher algebraischer Grundlage

Einleitung

Wie in /11/ ist der Ausgangspunkt eine spazielle halbgeordnete Struktur, die hier als Raum bezeichnet wird. Auf ihrer Grundlage können Probleme, Definitionen, Sätze und Fortsetzungsprinzipien, die in der gewöhnlichen Maßtheorie, in der Theorie der Spektralmaße und Booleschen Maße (B. Homomorphismen), in der gewöhnlichen Integrationstheorie, in der Theorie der Spektralintegrale und bez. Rieszscher Homomorphismen eine Rolle spielen, vereinheitlicht warden. Im Vergleich zu /13/ werden stärkere algebraische Voraussetzungen bez. der Ausgangsstruktur gemacht, die eine unmittelbare Auslegung bez. der in der Maß- und Integrationstheorie wesentlichen Strukturen und "Funktionale" gestatten. Die diesbezüglich größte Ähnlichkeit hinsichtlich der algebraischen Vereinheitlichung besteht zu der Arbeit /5/ von S. Brehmer. Gemeinsamkeiten und Unterschiede hinsichtlich Struktur und Anwendungsmöglichkeiten wurden in /11/ herausgearbeitet. Die ersten Anregungen erhielt ich durch L. Berg (vgl. /1/ und /3/).

Um die Darstellung hier gegenüber /11/ knapper und übersichtlicher zu gestalten, wurden das Postulat (7) zusätzlich aufgenommen, der Begriff Inhalt an eine weitere Forderung gebunden sowie die Definitionen von "Maß" und "äußerem Maß" etwas abgeändert. In der vorliegenden Arbeit geht es nur um derartige Fortsetzungen von Funktionalen, die dem Satz von Lebesgue genügen.

Wesentlich ist, daß gegenüber /11/ eine Weiterantwicklung in zweierlei Hinsicht erfolgte:
In /7/, S. 27, wird gezeigt, daß die monotone Hülle eines Booleschen Ringes einen σ-Ring darstellt. Die Verallgemeinerung dieser Aussage auf den eigentlichen Raum (vgl. Satz 4) ist ein weiterer Schritt in Richtung einer vereinheitlichten Maß- und Integrationstheorie, denn die Fortsetzung des Inhalts kann

jetzt unabhängig von der speziellen Auslegung des Raumes (Boolesche Algebra oder positiver Kegel) als Maß verifiziert werden (vgl. /11/, Satz 11.1, 11.5 und 12.3, und Satz 11 in dieser Arbeit). Diese Maße hängen dann zwar stets mit gewissen Minimalerweiterungen des Definitionsbereiches zusammen, vollständige Maße (vgl. Bemerkung 4) erhält man daraus jedoch mit äußerst geringem Aufwand. Der Vorteil derartiger Minimalfortsetzungen besteht auch darin, daß jetzt eine sinnvolle Verallgemeinerung des Satzes von Fubini möglich wird (vgl. /7/, § 35, und /6/, S. 202 - 205). Im Rahmen von /11/, wäre dies mit starken Zusatzbedingungen und einem diffizilen Beweis verbunden gewesen. Die konkrete Ausführung des letzten Gedankens erfolgt hier nicht, um den Umfang in Grenzen zu halten.

Außerdem wird die in /11/ genutzte Regularitätsdefinition (die bez. des Bildraumes eine Rolle spielt, wenn hinsichtlich der Fortsetzung der Satz von Lebesgue gelten soll) vereinfacht und etwas spezieller gefaßt. Dabei bleiben bez. der spezielleren Strukturen alle Aussagen gültig. Dies trifft auch auf die Vergleiche mit anderen Regularitätsdefinitionen zu (vgl. /5/, /12/, /13/, /16/, /17/).

1. Struktureigenschaften

Definition 1: Es sei L eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Dann soll eine halbgeordnete Menge M ein Raum über L oder kurz ein Raum heißen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: In M seien eine Addition "+" und eine Subtraktion "\" derart erklärt, daß für beliebige a, b, c $\in$ M und ein Element O aus M stets

$$a + b = b + a, \tag{1}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \tag{2}$$

$$a + O = a \tag{3}$$

gilt und

$$c \leq a + b \quad \text{äquivalent zu} \quad c \setminus a \leq b \tag{4}$$

ist. Außerdem sei für beliebige $\alpha \in L$ und beliebige $a \in M$ ein Produkt $\alpha a \in M$ definiert. Für das Einselement 1 von L und alle $\alpha, \beta \in L$ gelte dabei

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)\, a, \tag{5}$$

$$\underline{1}a = a, \tag{6}$$

$$\alpha 0 = 0. \tag{7}$$

Aus $a \leq b$ möge stets $\alpha a \leq \alpha b$ folgen. (8)

Bemerkung 1: Jede halbgeordnete Struktur $M(+, \setminus)$, die den Eigenschaften (1) bis (4) genügt, kann mit der Definition $\alpha a := a\ (\forall \alpha \in L)$ bei beliebiger Gruppe L zu einem Raum über L gemacht werden.

In /2/ wurde gezeigt, daß eine der Eigenschaft (4) genügende Subtraktion im Falle ihrer Existenz eindeutig durch die Addition bestimmt ist und ein Kriterium für die Definierbarkeit einer derartigen Subtraktion angegeben. Gegenüber /11/, Def. 5.1, wurde das Postulat (7) zusätzlich aufgenommen, um verschiedene Aussagen einfacher formulieren zu können. Der Boolesche Ring, also auch die Boolesche Algebra, der lineare geordnete Raum (die üblichen Verträglichkeitsbedingungen vorausgesetzt), der Rieszsche Raum, der positive Kegel des Rieszschen Raumes und der positive C-Verband (vgl. /5/, Def. 1 und 2) können als spezielle Räume im obigen Sinne ausgelegt werden. Die in /11/, Beispiel 4.6, formulierte Aussage, daß ein C-Verband i. allg. nicht als Fastmodul aufgefaßt werden kann, wird dort unkorrekt belegt, da die Subtraktion nicht in der Definition des C-Verbandes enthalten ist. Sie bleibt jedoch prinzipiell gültig, wie an Hand des C-Verbandes $R \cup \{+\infty\}$ (vgl. /5/) mittels /2/, Satz 1, schnell zu erkennen ist.
Die Beweise der beiden folgenden Sätze findet man in /9/, S. 56, bzw. in /11/, S. 17 und 18.

Satz 1: In jedem Raum gelten stets die Relationen

$$(a + b) \setminus b \leq a, \tag{9}$$

$$a \leq (a \setminus b) + b, \tag{10}$$

$$a \setminus 0 = a, \tag{11}$$

$$(a + b) \setminus (c + d) \leq (a \setminus c) + (b \setminus d), \tag{12}$$

$$a \setminus d \leq (a \setminus c) + (c \setminus d), \tag{13}$$

$$a \setminus (c + d) = (a \setminus c) \setminus d. \tag{14}$$

Aus $a \leq c$ und $b \leq d$ folgt stets

$$a + b \leq c + d \quad \text{und} \tag{15}$$

$$a \setminus d \leq c \setminus b. \tag{16}$$

Satz 2: Sind A, B und C Teilmengen von M, dann gilt

$$\inf A + \inf B = \inf(A+B), \tag{17}$$

$$\sup C \setminus \inf B = \sup(C\setminus B), \tag{18}$$

$$\alpha \inf B = \inf(\alpha B) \qquad (\forall \alpha \in L) \tag{19}$$

und

$$\alpha \sup C = \sup(\alpha C) \qquad (\forall \alpha \in L), \tag{20}$$

sobald die linken Seiten dieser Gleichungen existieren. Bei verbandsgeordnetem Raum sind im Falle existierender linker Seiten die Gleichungen

$$a + (b \wedge c) = (a+b) \wedge (a+c), \tag{21}$$

$$a \setminus (b \wedge c) = (a\setminus b) \vee (a\setminus c) \tag{22}$$

und

$$(a \vee b) \setminus c = (a\setminus c) \vee (b\setminus c) \tag{23}$$

stets erfüllt. Außerdem folgt dann aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ stets

$$a \vee b \leq a + b. \tag{24}$$

Eine Teilmenge A von M heißt beschränkt, wenn A in M sowohl eine obere als auch eine untere Schranke besitzt. Existieren inf A und sup A in M, so wird kurz von einer begrenzten Teilmenge gesprochen.

Definition 2: Ein Raum, in dem jede monotone und beschränkte Folge begrenzt ist, soll eigentlich genannt werden, wenn aus

$$\sup B = \inf A \text{ stets } \inf (A \setminus B) = 0 \tag{25}$$

und aus

$$b \leq a \text{ stets } a \setminus (a \setminus b) = b \text{ folgt.} \tag{26}$$

Bemerkung 2: Der geordnete Modul der reellen Zahlen R wird mit $L = R_+ \setminus \{0\}$ und der derart eingeschränkten üblichen Multiplikation ein eigentlicher Raum. Die Addition, die Subtraktion und die äußere Multiplikation können in eindeutiger Weise derart auf $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ fortgesetzt werden, daß ein Raum entsteht (vgl. /11/, S. 15 bzw. /10/, Beispiel 2). Dieser um die "uneigentlichen" Elemente $+\infty$ und $-\infty$ erweiterte Zahlenbereich genügt i. allg. weder (25) noch (26).

Satz 3: Es sei M ein eigentlicher Raum. Dann gilt stets

$$a \setminus a = 0, \tag{27}$$

und die Gleichungen

$$\inf A \setminus \sup B = \inf(A \setminus B) \tag{28}$$

sowie

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B) \tag{29}$$

sind erfüllt, sobald die Grenzen auf den linken Seiten existieren. Ist M außerdem verbandsgeordnet, so trifft die vorige Aussage auch bez. der Gleichungen

$$\sup A \wedge \sup B = \sup(A \wedge B) \tag{30}$$

und

$$\inf A \vee \inf B = \inf(A \vee B) \tag{31}$$

zu.

Beweis: Über (11) folgt (27) mit $b = 0$ aus (26). Gilt für beliebige $a \in A$ und $b \in B$ stets $x \leq a \setminus b$, so erhält man unter Verwendung von (13) und (15)
$x \leq (a \setminus \inf A) + (\inf A \setminus \sup B) + (\sup B \setminus b)$.
Aus (17) und (25) folgt $x \leq \inf A \setminus \sup B$. Wegen (16) gilt damit auch (28). Die Gleichung (29) wird wie in /9/, Satz 5, über (4), (16), (12) und (25) verifiziert. Aus (22), (24) und (27) folgt (30) über $(\sup A \wedge \sup B) \setminus (a \wedge b) \leq (\sup A \setminus a) \vee (\sup B \setminus b) \leq (\sup A \setminus a) + (\sup B \setminus b)$ in analoger Weise. Ist x eine beliebige untere Schranke von $A \vee B$, so kann über (4), (28) und (30) $(x \setminus \inf A) \wedge (x \setminus \inf B) \leq 0$ gezeigt werden. Nochmals (28) und (4) angewandt, liefert $x \leq \inf A \vee \inf B$, womit (31) gezeigt wäre.

Definition 3: Eine nichtleere Teilmenge H eines eigentlichen Raumes M heißt monoton-abgeschlossen, wenn im Falle $g_n, h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ aus $g_n \uparrow g$ [1] stets $g \in H$ und aus $h_n \downarrow h$ stets $h \in H$ folgt.

Definition 4: Ist H eine nichtleere Teilmenge eines eigentlichen Raumes M, so wird die kleinste monoton-abgeschlossene Teilmenge von M, die H umfaßt, als Abschließung von H bezeichnet und durch H_σ gekennzeichnet.

Satz 4: Es seien G ein eigentlicher Raum und H ein Teilraum von G. Dann wird die Abschließung H_σ ebenfalls ein Teilraum von G.

---

1 isotone, ordnungskonvergente Folge in M

Beweis: Für jedes $g \in G$ kennzeichnen wir mit $K(g)$ die Gesamtheit der Elemente e aus G, für die

$$\alpha e + \beta g,\ \alpha e \setminus \beta g,\ \alpha g \setminus \beta e \in H_\sigma \qquad (\forall \alpha, \beta \in L). \tag{32}$$

gilt. Aus Symmetriegründen sind die Relationen $e \in K(g)$ und $g \in K(e)$ offensichtlich äquivalent. Da H_σ monoton-abgeschlossen ist, folgt über (19), (20), (17), (18), (28) und (29), daß jedes nichtleere $K(g)$ eine monoton-abgeschlossene Teilmenge von G ist. Wegen $H \subset H_\sigma$ gilt nach (32) für jedes $g \in H$ die Relation $H \subset K(g)$. Da $K(g)$, wie zuvor feetgestellt, monoton-abgeschlossen ist, wird auch $H_\sigma \subset K(g)$ $(\forall g \in H)$ erfüllt. Aus Symmetriegründen folgt $g \in K(e)$ für alle $g \in H$ und alle $e \in H_\sigma$, was $H \subset K(e)$ $(\forall e \in H_\sigma)$ entspricht. Jedes derartige $K(e)$ ist monoton-abgeschlossen, so daß $H_\sigma \subset K(e)$ $(\forall e \in H_\sigma)$ und damit (32) für beliebige $e, g \in H_\sigma$ gilt. Mit $\alpha = \beta = 1$ folgt mittels (6) $e + g$, $e \setminus g \in H_\sigma$ $(\forall e, g \in H_\sigma)$. Wegen (27) gilt $O \in H_\sigma$, so daß mit $e = O$ auf Grund von (7) und (32) stets $\beta g \in H_\sigma$ $(\forall g \in H_\sigma)$ erfüllt ist.

Folgerung: Die Abschließung H_σ stellt den kleinsten monoton-abgeschlossenen Teilraum von G dar, der H umfaßt.

Bemerkung 3: Ist G eine σ-Algebra, beispielsweise eine Potenzmenge, und H ein Teilring von G, so wird die Abschließung von H ein σ-Ring (vgl. /7/, S. 27 ff.). Enthält H das Einselement I von G oder existiert nur eine Folge h_n aus H mit $h_n \uparrow I$, so wird H_σ eine in G grenztreu eingebettete σ-Algebra (in /16/, S. 78, als σ-regulär eingebettete Teilalgebra bezeichnet). Falls es sich bei G um einen halbgeordneten linearen Raum handelt, so wird die Abschließung eines Teilraumes ebenfalls ein Teilraum von G. Ist G der positive Kegel eines Rieszschen Raumes $\tilde{G}$ und H ein Teilraum von G (das bedeutet jetzt, daß H positiver Kegel eines Rieszschen Teilraumes $\tilde{H}$ von G ist), so wird H_σ ein zu einem monoton-abgeschlossenen Rieszschen Teilraum $\tilde{H}_\sigma$ gehöriger positiver Kegel. Daraus kann man insbesondere schlußfolgern, daß die Abschließung eines Rieszschen Teilraumes ebenfalls ein Rieszscher Teilraum ist.

Jede nach unten gerichtete Teilmenge T eines Raumes F mit $\inf T = O$ soll hier als Nullmenge von F bezeichnet werden. Mit Hilfe dieser Vereinbarung wird die folgende Regularitätsdefinition eingeführt.

Definition 5: Ein Raum F heißt regulär, wenn er unter Beibehaltung der Grenzen derart in eine halbgeordnete Menge $\overline{F}$ einbettbar ist, daß die beiden folgenden Forderungen erfüllt werden:

- Jede isotone Folge von Elementen aus F sei in $\overline{F}$ begrenzt.
- Ist F_ν eine beliebige Folge von Nullmengen ($F_\nu \subset F \; \forall \nu \in N$) und gilt in $\overline{F}$ für ein Element a aus F

$$a \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \quad (\forall f_\nu \in F_\nu), \tag{33}$$

so soll stets $a \leq 0$ folgen.

Bezüglich dieser gegenüber /11/ vereinfachten und stärkeren Regularitätsbedingung bleiben die dortigen Sätze 9.1, 9.2 und 9.3 gültig. Sie können jetzt in folgender Form ausgesprochen werden:

Satz 4: Ein Raum F, in dem jede isotone Folge nach oben begrenzt ist, wird genau dann regulär, wenn mit $F = \overline{F}$ die Eigenschaft (33) erfüllt wird.

Satz 5: Ein verbandsgeordneter, eigentlicher Raum F wird genau dann regulär, wenn für jede Folge von Nullmengen F_ν und jedes $f \in F$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

Gilt $a \leq \sup_{(n)} (f \wedge \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu)$ für beliebig ausgewählte $f_\nu \in F_\nu$, so möge stets $a \leq 0$ folgen.

Beweis: Nach der Identifizierung von $a \in F$ mit dem durch $\varphi_a(f) = f \wedge a$ gegebenen Element aus $\mathcal{F}(F, F)$ [1] wird der Beweis von Satz 9 aus /11/ übertragbar und sogar etwas zugänglicher.

Satz 6: Ein Raum, dessen Ordnung im Sinne von McShane (vgl. /13/) normal ist, erfüllt das in Definition 5 angegebene Regularitätskriterium.

Der Beweis kann hier ähnlich wie beim vorherigen Satz durch eine entsprechende Deutung der Elemente als Funktionen übertragen werden.
Die in /11/ abgeleiteten Regularitätskriterien für Boolesche Algebren, Boolesche Ringe und Rieszsche Räume bleiben gültig.

---

1 Gesamtheit der Funktionen von F in F

Die dort angeführten Beispiele erfüllen sämtlich die hier angegebene stärkere Regularitätsbedingung.

2. Inhalte und Maße

Bezüglich der weiteren Betrachtungen sollen die folgenden Festlegungen getroffen werden:

- G sei ein positiver (O ist das kleinste Element), eigentlicher Raum über L.
- F sei ein eigentlicher und regulärer Raum über der gleichen Gruppe L. In F besitze jede nach unten gerichtete und von unten beschränkte Teilmenge eine untere Grenze. (Hieraus kann über (16), (18), (26) und (28) gefolgert werden, daß auch die entsprechende duale Behauptung gilt.)

Satz 7: Ein positiver und eigentlicher Raum ist verbandsgeordnet. In ihm gelten stets die Relationen

$$a \setminus (a \setminus b) = a \wedge b, \tag{34}$$

$$a \setminus b = a \setminus (a \wedge b) \tag{35}$$

und

$$a \leq (a \setminus b) + (a \wedge b). \tag{36}$$

Jeder Teilraum ist dann auch ein Teilverband von G.

Beweis: Mit x als unterer Schranke von $\{a,b\}$ folgt unter Nutzung von (26), (16), (11), (10) und (4)

$x \leq a \setminus (a \setminus x) \leq a \setminus (a \setminus b) \leq \frac{a}{b}$, womit (34) gezeigt wäre.

Mit x als oberer Schranke von $\{a,b\}$, beispielsweise mit $x = a + b$, gilt wegen (26) und (22) $x \setminus [(x \setminus a) \wedge (x \setminus b)] = a \vee b$. G ist also ein Verband, und die Behauptung bez. des Teilverbandes folgt trivialerweise. Die Gleichung (35) entsteht unmittelbar aus (22) und (27). Ausgehend von (35) wird (36) mittels (10) nachweisbar.

Definition 6: Mit H als Teilraum von G wird eine L-homogene Funktion $\mu : H \to F$ hier ein Inhalt genannt, wenn für beliebige $g, h \in H$ stets

$$\mu(h) \geq 0 \tag{37}$$

und

$$\mu(g \setminus h) = \mu(g) \setminus \mu(g \wedge h) \text{ gilt und} \tag{38}$$

im Falle $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ aus $h_n \downarrow 0$ stets $\mu(h_n) \downarrow 0$ folgt. (39)

Geht aus $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ und $h_n \downarrow g$ stets $g \in H$ hervor, so soll der Inhalt μ ein Maß genannt werden.

Satz 8: Bezüglich jedes Inhalts $\mu : H \to F$ gelten die Behauptungen:

a) Unter der Voraussetzung von (37) und (38) ist (39) jeder der beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:
Mit $h, h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ folgt

$$\text{aus } h_n \uparrow h \text{ stets } \mu(h_n) \uparrow \mu(h) \tag{40}$$

bzw. $$\text{aus } h_n \downarrow h \text{ stets } \mu(h_n) \downarrow \mu(h). \tag{41}$$

b) Es gilt $\mu(g \wedge h) = \mu(g) \setminus \mu(g \setminus h)$ $(\forall g, h \in H)$.

c) μ ist isoton und subadditiv.

Der nachfolgende Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue (ausgesprochen für Folgen nichtnegativer Funktionen) dar (vgl. /11/, Satz 8.2 und Def. 8.4).

Satz 9: Jedes Maß $\mu : H \to F$ besitzt die Eigenschaft:
Aus $h_n \in H$ $(\forall n \in N)$ und $h_n \xrightarrow{o} g$ [1] folgt $g \in H$ und $\mu(h_n) \xrightarrow{o} \mu(g)$, sobald für die Folge h_n eine obere Schranke aus H existiert.

Definition 7: Es sei H^* ein Teilraum von G, für den
aus $h \in H^*$ und $g \leq h$ stets $g \in H^*$ folgt. (42)
Dann soll eine isotone, subadditive und L-homogene Funktion
$\mu^* : H^* \to F$ mit $\mu^*(0) = 0$ ein äußeres Maß heißen, wenn

$$g_n \uparrow g \text{ und } g \in H^* \text{ stets } \mu^*(g_n) \uparrow \mu^*(g) \tag{43}$$

zur Folge hat.

Die Fortsetzung eines Inhaltes zu einem Maß wird über die Konstruktion eines äußeren Maßes erfolgen. Dabei wird benutzt, daß jede auf einem Teilraum von G erklärte, subadditive Funktion μ wegen (36) und (4) stets der Ungleichung

$$\mu(g) \setminus \mu(g \wedge h) \leq \mu(g \setminus h) \tag{44}$$

genügt.

---

1 ordnungskonvergente Folge

Satz 10: Jeder Inhalt $\mu : H \to F$ kann bei regulärem Raum F gemäß

$$\mu^*(g) := \inf_{O(g)} \sup_{(n)} \mu(h_n) \tag{45}$$

zu einem äußeren Maß $\mu^*: H^* \to F$ fortgesetzt werden, wobei $O(g)$ die Gesamtheit der isotonen Folgen h_n aus H darstellt, für die $\sup h_n$ und $\sup \mu(h_n)$ existieren sowie $g \leq \sup h_n$ gilt. Aus $g \in G$ folgt insbesondere genau dann $g \in H^*$, wenn eine derartige Folge h_n existiert. Diese Fortsetzung μ^* besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) Für beliebige $g \in H^*$ und beliebige $h \in H$ gilt stets

$$\mu^*(g \setminus h) = \mu^*(g) \setminus \mu^*(g \wedge h). \tag{46}$$

b) Falls F verbandsgeordnet ist und bez. μ die Identität $\mu(g_1 \vee g_2) = \mu(g_1) \vee \mu(g_2)$ gilt, so wird diese auf μ^* übertragen.

Beweis: Da jetzt mit einer stärkeren Regularitätsbedingung gearbeitet wird und der Begriff äußeres Maß mit dem des $(\uparrow)$-stetigen äußeren Inhalts in /11/ übereinstimmt (vgl. /11/, Def. 10.3), folgt der erste Teil aus /11/, Satz 12.3a) und c). Damit verbleibt der Nachweis der Eigenschaften a) und b). (In /11/, Satz 12.3d) wurde b) unter der Voraussetzung bewiesen, daß F ein vollständiger Rieszscher Raum ist.)

Aus $\{h_n\} \in O(g)$ und $h \in H$ folgt

$\sup \mu(h_n \setminus h) = \sup \mu(h_n) \setminus \sup \mu(h_n \wedge h)$. Hieraus entsteht über (45) die Ungleichung $\mu^*(g \setminus h) \leq \sup \mu(h_n) \setminus \mu^*(g \wedge h)$. Da diese für beliebige Oberdeckungen gilt, folgt

$\mu^*(g \setminus h) \leq \mu^*(g) \setminus \mu^*(g \wedge h)$. Wegen (44) ist demzufolge die Beziehung (46) richtig. Mit $\{h_{1n}\} \in O(g_1)$ erhält man unter der Voraussetzung von b) $\sup \mu(h_{1n} \vee h_{2n}) = \sup \mu(h_{1n}) \vee \sup \mu(h_{2n})$, woraus sofort $\mu^*(g_1 \vee g_2) \leq \inf \{\sup \mu(h_{1n}) \vee \sup \mu(h_{2n})\}$ entsteht. Damit folgt aus (31) die Ungleichung

$\mu^*(g_1 \vee g_2) \leq \mu^*(g_1) \vee \mu^*(g_2)$, und wegen der Isotonie gilt die entgegengesetzte trivialerweise.

Satz 11: Jeder Inhalt $\mu : H \to F$ kann bei regulärem Raum F zu einem Maß $\mu_\sigma : H^*_\sigma \to F$ fortgesetzt werden. Gilt bez. μ die Identität $\mu(g \vee h) = \mu(g) \vee \mu(h)$, so wird diese auf μ_σ übertragen.

Beweis: Ausgehend von dem nach Satz 10 gebildeten äußeren Maß $\mu^* : H^* \to F$, das μ fortsetzt, soll ein Element h aus G meßbar genannt werden, wenn (46) für beliebige $g \in H^*$ gilt. Die Gesamtheit der meßbaren Elemente H^*_m bildet eine monoton-abgeschlossene Teilmenge von G, denn aus $h_n \in H^*_m$ und $h_n \uparrow h$ bzw. $h_n \downarrow h$ folgt wegen (42), (43), (16), (18), (28) und (30) die Ungleichung $\mu^*(g \setminus h) \leq \mu^*(g) \setminus \mu^*(g \wedge h)$, und die entgegengesetzte ist wegen (44) für das subadditive μ^* stets erfüllt.

Nach Satz 4 und Satz 10a) ist damit die Relation $H_\sigma \subset H^*_m$ für den kleinsten monoton-abgeschlossenen und H umfassenden Raum H_σ gültig. Die Einschränkung von μ^* auf $H^*_\sigma = H_\sigma \cap H^*$ liefert ein Maß, das die geforderten Eigenschaften besitzt. Bezüglich der letzten Aussage in Satz 11 ist Satz 10b) heranzuziehen.

Bemerkung 4: Falls es darum geht, ein vollständiges Maß (d. h., aus $\mu(h) = 0$ und $h \geq g$ folgt stets, daß g zum Definitionsbereich des Maßes gehört) zu erhalten, so kann μ_σ in eindeutiger Weise als Maß auf die Gesamtheit der Elemente h aus G fortgesetzt werden, zu denen jeweils Elemente $h', h'' \in H^*_\sigma$ mit $h' \leq h \leq h''$ und $\mu^*_\sigma(h'' \setminus h') = 0$ existieren.

Beispiel 1: Es seien G eine σ-vollständige und F eine vollständige Boolesche Algebra (vgl. /16/, S. 77). Im Falle $\alpha a := a$ $(\forall \alpha \in L)$ und $I \in H$ (Einselement der Booleschen Algebra) wird H genau dann eine Teilalgebra von G, wenn H ein Teilraum von G ist. Der Begriff Inhalt ist unter diesen Umständen gleichbedeutend mit der Definition des auf einer Teilalgebra H erklärten σ-stetigen Booleschen Homomorphismus, dessen Werte in F liegen. Falls die Boolesche Algebra regulär ist, so kann dieser gemäß Satz 11 zu einem auf einer σ-regulär eingebetteten Teilalgebra H^*_σ von G erklärten und σ-stetigen Booleschen Homomorphismus fortgesetzt werden (vgl. /16/, S. 78 und 131). Dabei ist jede im Sinne von Kantorovic "reguläre" Algebra (vgl. /16/, S. 167 und 172) wegen Satz 4 auch regulär im Sinne von Defi-

nition 5. Für vollständige Boolesche Algebren stimmt der hier angegebene Regularitätsbegriff mit der von Matthes genutzten $\aleph_0$-Regulatität überein (vgl. /12/, S. 331). Derartige Boolesche Maße (innerhalb der Analysis) gehen auf Sobolev zurück und wurden ausgehend von einer Spektralschar auf einer Booleschen Algebra in R konstruiert (vgl. /17/, S. 312 ff., und /11/, S. 73 - 74). Die durch Vulich in /17/, S. 320, angegebene Regularitätsdefinition stellt ebenfalls einen Spezialfall von Definition 5 dar, so daß die Resultate dort sich unmittelbar aus Satz 11 ableiten lassen. Falls L auf der Booleschen Algebra G eine Gruppe von Automorphismen vermittelt und der Inhalt μ bez. dieser invariant ist, also stets $\mu(\alpha h) = \mu(h)$ gilt, so wird auch das gemäß Satz 11 konstruierte Boolesche Maß μ_G invariant. Letzteres wird offensichtlich, wenn wir die Boolesche Algebra F mit $\alpha a := a$ ($\forall \alpha \in L$, $\forall a \in F$) per Definition zu einem Raum über L machen.

Beispiel 2: Es sei G eine Potenzmenge (oder allgemeiner eine vollständige Boolesche Algebra) und F ein (verträglich) geordneter Modul, in dem jede nach unten gerichtete und von unten beschränkte Teilmenge eine untere Grenze besitzt. Diese an F gestellten Eigenschaften sowie die in Definition 5 angegebene Regularitätsdefinition werden insbesondere durch den linearen Raum der beschränkten selbstadjungierten Operatoren des Hilbertraumes erfüllt (vgl. /11/, S. 44 und 78, /8/, S. 369 ff., bzw. /17/, S. 298). Mit $\mu : H \longrightarrow F$ liegt bei $L = \{I\}$ genau dann ein Inhalt vor, wenn μ eine auf einem Booleschen Teilring erklärte, positive, disjunkt additive und bez. monotoner Folgen stetige Funktion ist. Diese kann bei regulärem F zu einem Maß fortgesetzt werden. Damit können speziell reellwertige Inhalte (für die (39) gilt) und Spektralmaße "abgeschlossen" werden (vgl. /6/, S. 184). Diese Spektralmaße können übrigens stets auch als Boolesche Homomorphismen gedeutet werden (vgl. /11/, S. 81 und 82).

Beispiel 3: Es sei $\tilde{G}$ ein Rieszscher Raum (beispielsweise der Raum aller über einer Grundmenge X erklärten reellwertigen Funktionen) und F ein halbgeordneter linearer Raum ($L = R_+ \setminus \{0\}$), der im obigen Sinne vollständig und regulär ist. Dann entspricht

jeder auf einem Rieszschen Teilraum $\tilde{H}$ von $\tilde{G}$ erklärten, isotonen, linearen und bez. monotoner Folgen stetigen Funktion $\tilde{\mu} : \tilde{H} \to F$ in eineindeutiger Weise ein Inhalt $\mu : H \to F$. Hierbei ist G der als Raum über L interpretierte positive Kegel von $\tilde{G}$ (vgl. Bemerkung 1), H ein Teilraum von G und damit der positive Kegel von $\tilde{H}$. Der Satz 11 gewährleistet die Fortsetzung von μ zu einem Maß und damit auch eine Abschließung von $\tilde{\mu}$, für die der Satz von Lebesgue gilt. Bezüglich der Anwendungen sei hier auf die Abschließung reellwertiger Elementarintegrale des auf einer reellen Verbandsalgebra erklärten, σ-positiven Spektralintegrals (vgl. /6/, S. 163 ff.) und des damit zusammenhängenden Rieszschen Homomorphismus (vgl. /11/, S. 74 ff. und /17/, S. 324) hingewiesen.
Unter den obigen Voraussetzungen wird $\tilde{\mu}$ genau dann ein **Rieszscher Homomorphismus**, wenn μ die im zweiten Teil von Satz 11 angegebene Identität erfüllt. Falls μ ein im obigen Sinne eingeschränktes Spektralintegral ist, kann mittels Satz 11 sogar gezeigt werden, daß auch bez. der Fortsetzung die Identitäten

$$\int f^2 \, d\nu = \left(\int f \, d\nu \right)^2 \quad \text{und} \quad \int \sqrt{f} \, d\nu = \sqrt{\int f \, d\nu}$$

gelten (vgl. /11/, S. 77 ff.). Hierzu muß L lediglich als die durch $q : f \to f^2$ bzw. $q : T \to T^2$ erzeugte Gruppe von Transformationen und F als geeigneter zweiter Kommutant eines Systems von Operatoren angesetzt werden. Eine triviale Folgerung hieraus wird die Aussage, daß die Fortsetzung von $\tilde{\mu}$ multiplikativ ist.

Vor kurzem erhielt ich Hinweise auf die mir bisher unbekannten Arbeiten /15/ und /18/. In /18/ geht es um additive Mengenfunktionen, die auf einem Körper von Teilmengen eines kompakten Raumes X definiert sind und deren Wertebereich im positiven Kegel eines Dedekind-vollständigen Vektorverbandes liegt. Regularitätsaussagen und die σ-Additivität werden aus Eigenschaften des Bildraumes gewonnen, die mit Hilfe von Verbandsoperationen formulierbar sind. Der Autor hat die Arbeiten von Matthes (vgl. /12/) fortgeführt. Die Betrachtungen können im Sinne von Bei-

spiel 2 hier eingeordnet werden.

Bezüglich /15/ wäre zu betonen, daß es ausschließlich um die Fortsetzung reellwertiger Maße und Integrale geht. Um hinsichtlich des Definitionsbereiches von Maß und Integral einheitlich vorzugehen, arbeitet Riečan mit einem relativ σ-vollständigen Verband H, der σ-stetig ist. Letzteres bedeutet, daß

$$\text{mit } a_n \uparrow a \text{ stets auch } a_n \wedge b \uparrow a \wedge b \,, \tag{47}$$

$$\text{und mit } a_n \downarrow a \text{ stets auch } a_n \vee b \downarrow a \vee b \tag{48}$$

gelten soll.

In H wird weiter die Existenz einer Addition "+" und einer Subtraktion "-" vorausgesetzt und diesbezüglich eine große Anzahl von Eigenschaften postuliert (vgl. ebenda S. 223 - 224, 227 und 229). Hinsichtlich des komplizierten Systems auf S. 229 ist in /15/ selbst die Rede von einer großen Zahl von Eigenschaften, die wenig elegant sind. Bezüglich der beiden grundsätzlichen algebraischen Systeme auf S. 223 - 224 und auf S. 229 können die bei Riečan formulierten Postulate vollständig aus der durch (1) bis (4) und Definition 2 erklärten Struktur abgeleitet werden, wenn 0 als kleinstes Element vorausgesetzt wird. Im Unterschied zu /15/ werden in /5/, /11/ und hier die benötigten Eigenschaften nicht nur aufgelistet, sondern innerhalb einer relativ einfachen verallgemeinerten algebraischen Struktur deduktiv gewonnen.

Für wertvolle Anregungen und die anhaltende Unterstützung möchte ich Herrn Prof. Dr. L. Berg recht herzlich danken.

Literatur

/1/ Berg, L.: Analysis in geordneten, kommutativen Halbgruppen mit Nullelement. Nova Acta Leopoldina Neue Folge Nr. 219, Bd. 43, Halle 1975

/2/ Berg, L.: Über die Struktur der endlichen relativ invertierbaren, kommutativen Halbgruppen. Math. Nachr. 117, 229 - 234 (1984)

/3/ Berg, L.: Introduction of integrals in ordered abelian semigroups with zero element. In: Flachsmeyer, J., Frolik, Z., and Terpe, F. (Eds.): Proceedings Conference Topology and Measure I, Part 1, 13 - 22, Greifswald 1978

/4/ Berg, L.: Distributive Verbände als relativ invertierbare Halbgruppen, Rostock. Math. Kolloq. 28, 66 - 74 (1985)

/5/ Brehmer, S.: Algebraic Characterisation of Measure and Integral by the Method of Carathéodory. In: Flachsmeyer, J., Frolik, Z., and Terpe, F. (Eds.): Proceedings of the Conferenc Topology and Measure I, Part 1, 23 - 53, Greifswald 1978

/6/ Brehmer, S.: Hilberträume und Spektralmaße. Berlin 1979

/7/ Halmos, P. R.: Measure Theory. New York 1950

/8/ Luxemburg, W. A., and Zaanen, A. C.: Riesz Spaces I. Amsterdam 1971

/9/ Markwardt, K.: Analysis in relativ invertierbaren Halbgruppen. Wiss. Z. Hochsch. Arch. u. Bauwesen Weimar 26, 55 - 58 (1979)

/10/ Markwardt, K.: Relativ invertierbare Halbgruppen und pseudometrische Räume. Wiss. Z. Hochsch. Arch. u. Bauwesen Weimar (im Druck)

/11/ Markwardt, K.: Eine teilweise geordnete Halbstruktur als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer Analysis. Dissertation (A), Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1982

/12/ Matthes, K.: Über eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen Integralbegriffes, IV. Mitteilung. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin Math.-Natur. Reihe 8, 331 - 338 (1958/59)

/13/ McShane, E. J.: Order-preserving Maps and Integration-processes. Princeton 1953

/14/ Mikusiński, J.: The Bochner-Integral. Basel 1978

/15/ Riečan, B.: On the unified measure and integration theory. Acta Fac. Rerum Natur Univ. Comenian. Math. XXXV, 219 - 237 (1979)

/16/ Vladimirov, D. A.: Boolesche Algebren. Berlin 1972

/17/ Vulich, B. S.: Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces. Groningen 1967

/18/ Wright, J. D. Maitland: Measures with values in partially ordered spaces: regularity and σ-additivity. In: Measure theory. Proc. Conf., Oberwolfach 1975. Lecture Notes in Math. 541, 267 - 276, Berlin 1976

eingegangen: 18. 03. 1985

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. K. Markwardt
Hochschule für Architektur und
Bauwesen Weimar
Sektion Rechentechnik und Datenverarbeitung
Wissenschaftsbereich Mathematik/Mechanik
Karl-Marx-Platz 2
DDR-5300 Weimar

Rostock. Math. Kolloq. 29, 57 - 60 (1986)

35A35
35F15

Iris Grinda

Zur Anwendung eines Ergebnisses der Potentialtheorie auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

Aus der Potentialtheorie ist folgendes Resultat bekannt:
Sei G ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet im R^n und S eine glatte Fläche innerhalb G. Wir betrachten die Funktionenmenge

$$L_v(G) = \left\{u: \Delta u = 0 \text{ in } G,\ u|_{\partial G} = g \in C^{1,\alpha}(\partial G),\ g = 0 \text{ auf } \partial G \backslash V\right\},$$

wobei V ein Teilstück des Randes mit einem nichtleeren Inneren ist. $L_v(S)$ sei der Raum der Einschränkungen von $L_v(G)$ auf S. Unter diesen Voraussetzungen liegt $L_v(S)$ dicht in C(S), d. h., jede auf S gegebene stetige Funktion kann gleichmäßig durch die Einschränkungen harmonischer Funktionen aus $L_v(G)$ approximiert werden (s. G. Wildenhain /3/). Erstmalig wurde eine solche Problematik von H. Beckert in /1/ betrachtet.

Wir werden dieses Resultat benutzen, um stetige Funktionen auf Mannigfaltigkeiten im Innern einer Kugel durch Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{grad} v_0 &= 0 \end{aligned}$$

zu approximieren. Zunächst geben wir Randbedingungen an, die die Lösung eindeutig definieren.
Dazu schreiben wir das System in etwas anderer Gestalt auf, indem wir zwei reelle Variable bzw. Funktionen zu einer komplexen zusammenfassen. Wir bekommen so

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial w_1}{\partial z^*} - \frac{\partial w_2}{\partial t} &= 0, \\ 2\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei sich die komplexen Differentiationen darstellen als

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Satz 1: Das System (1) ist immer und eindeutig lösbar bei Vorgabe folgender Randwerte auf der Kugel G um den Ursprung:

w_2 aus $C^{1,\alpha}(\partial G)$, $0 < \alpha < 1$,

Re w_1 aus $C^{\alpha}(\partial G_o)$,

Im w_1 in $P \in \partial G_o$.

G_o bezeichnet dabei die Projektion von G auf die Ebene $t = 0$.
Die Lösung $w = (w_1, w_2)$ gehört zur Funktionenklasse $C^{\alpha}(\overline{G}) \cap C^{\infty}(G)$.

Beweis: Da jede Lösung von (1) harmonische Komponenten besitzt, ist w_2 bereits durch die Randwerte eindeutig bestimmt; w_2 ergibt sich als Poissonintegral und gehört zu $C^{1,\alpha}(\overline{G}) \cap C^{\infty}(G)$.
Die zweite Gleichung des Systems liefert dann

$$w_1(z,t) = -2 \int_0^t \frac{\partial w_2}{\partial z}\, dt + F(z,z^*).$$

Das Integral auf der rechten Seite gehört zu $C^{\alpha}(\overline{G}) \cap C^{\infty}(G)$, wie eine leichte Rechnung zeigt.
Setzen wir diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein, ergibt sich

$$2 \frac{\partial F}{\partial z^*} - 4 \int_0^t \frac{\partial^2 w_2}{\partial z \partial z^*}\, dt = \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Berücksichtigen wir, daß $4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ und daß $\Delta w_2 = 0$ ist, so folgt weiter

$$2 \frac{\partial F}{\partial z^*} + \int_0^t \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}\, dt = \frac{\partial w_2}{\partial t}$$

und schließlich

$$\frac{\partial F}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial w_2}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

Durch Anwendung des T_{G_o} - Operators aus der Theorie der komplexen Funktionen erhalten wir

$$F(z,z^*) = T_{G_o}\left[\frac{1}{2} \frac{\partial w_2}{\partial t}\bigg|_{t=0}\right] + H(z)$$

mit $T_{G_0}[f](z) = -\frac{1}{\pi}\int_{G_0}\frac{f(\xi,\eta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta.$

$T_{G_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial w_2}{\partial t}\Big|_{t=0}\right]$ ist aus $C^{1,\alpha}(\overline{G_0}) \cap C^{\infty}(G_0)$. H(z) stellt eine in G_0 holomorphe Funktion dar. Insgesamt haben wir bis jetzt für w_1 erhalten:

$$w_1(z,t) = -2\int_0^t \frac{\partial w_2}{\partial z}\,dt + T_{G_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial w_2}{\partial t}\Big|_{t=0}\right] + H(z). \qquad (2)$$

Die bereits bekannten Terme auf der rechten Seite gehören zu $C^{\alpha}(\overline{G}) \cap C^{\infty}(G)$. Außerdem sind uns noch Re w_1 auf ∂G_0 (aus $C^{\alpha}(\partial G_0)$) und Im w_1 in $P \in \partial G_0$ bekannt.

Wir können daraus Re H auf ∂G_0 (aus $C^{\alpha}(\partial G_0)$) und Im H in $P \in \partial G_0$ berechnen. Aus diesen Randwerten erhalten wir eindeutig die holomorphe Funktion H, wobei H zur Klasse $C^{\alpha}(\overline{G_0})$ gehört (s. W. Tutschke /2/).

Wir haben also aus den gegebenen Randdaten einen eindeutig bestimmten Vektor $w = (w_1, w_2) \in C^{\alpha}(\overline{G}) \cap C^{\infty}(G)$ erhalten. Wie eine leichte Nachrechnung zeigt, ist w auch tatsächlich Lösung von (1).

Dieses Ergebnis verwenden wir jetzt, um stetige Funktionen auf gewissen Mannigfaltigkeiten zu approximieren. Dazu sei

$$K(G) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{Re}\ w_1, w_2)\colon w = (w_1, w_2) \text{ Lösung von (1) in } G, \\ w_2\big|_{\partial G} = g \in C^{1,\alpha}(\partial G),\ g = 0 \text{ auf } \partial G \setminus V, \\ \mathrm{Re}\ w_1\big|_{\partial G_0} = h \in C^{\alpha}(\partial G_0),\ h = 0 \text{ auf } \partial G_0 \setminus V_0 \end{array} \right\},$$

wobei V und V_0 Teilstücke von ∂G bzw. ∂G_0 mit nichtleerem Innern sind. S_1 und S_2 seien glatte Flächen in G und S_0 eine glatte Kurve in G_0. Mit $K(S_0, S_1, S_2)$ bezeichnen wir alle diejenigen reellen Funktionentripel, die sich aus den Elementen von K(G) ergeben, indem man Re w_1 auf S_0, Re w_2 auf S_1 und Im w_2 auf S_2 einschränkt. Es gilt folgende Aussage:

Satz 2: $K(S_0,S_1,S_2)$ liegt dicht in $C(S_0) \times C(S_1) \times C(S_2)$, d. h., jedes Tripel von reellen stetigen Funktionen, dessen erste Komponente auf S_0 und dessen andere Komponenten auf S_1 bzw. S_2 erklärt sind, kann gleichmäßig durch die Einschränkungen von Funktionen aus $K(G)$ approximiert werden.

Beweis: Die auf S_0, S_1 und S_2 gegebenen Funktionen seien $\tilde{h}$, $\tilde{g}_1$ bzw. $\tilde{g}_2$. Da $L_v(G)$ in $C(S_i)$, $i = 1,2$, dicht liegt, kann g so gewählt werden, daß

$$\sup_{S_1} |\operatorname{Re} w_2 - \tilde{g}_1| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{S_2} |\operatorname{Im} w_2 - \tilde{g}_2| < \varepsilon$$

gilt für beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Aus dem so bestimmten w_2 ergibt sich zunächst w_1 nach der Gleichung (2) mit noch unbekannter holomorpher Funktion $H(z)$.

Anstelle von (2) schreiben wir der Kürze halber

$$w_1(z,t) = f(z,t) + H(z), \qquad f \in C^{\alpha}(\overline{G}).$$

Aus $\operatorname{Re} w_1|_{\partial G_0} = h \in C^{\alpha}(\partial G_0)$, $h = 0$ auf $\partial G_0 \setminus V_0$ erhalten wir

$$\operatorname{Re} H|_{\partial G_0} = h - \operatorname{Re} f|_{\partial G_0} \quad \text{bzw.} \quad (\operatorname{Re} H - u)|_{\partial G_0} = h,$$

wenn u die in G_0 harmonische Funktion mit den Randwerten $\operatorname{Re} f|_{\partial G_0}$ bezeichnet. Da $L_{V_0}(G_0)$ in $C(S_0)$ dicht liegt, kann h so gewählt werden, daß

$$\sup_{S_0} |(\operatorname{Re} H - u) - (\tilde{h} - u|_{S_0} - \operatorname{Re} f|_{S_0})| = \sup_{S_0} |\operatorname{Re} w_1 - \tilde{h}| < \delta$$

gilt für beliebig kleines $\delta > 0$.

Literatur

/1/ Beckert, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. 139, 255 - 264 (1960)

/2/ Tutschke, W.: Partielle Differentialgleichungen. Teubner-Texte zur Math., Band 27, Leipzig 1983

/3/ Wildenhain, G.: Eine Bemerkung zur gleichmäßigen Approximation durch Lösungen elliptischer Gleichungen. Rostock. Math. Kolloq. 24, 63 - 70 (1983)

eingegangen: 13. 02. 1985

Anschrift der Verfasserin:

Dipl.-Math. I. Grinda
Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg Sektion Mathematik
Universitätsplatz 6
DDR-4010 Halle

Rostock. Math. Kolloq. 29, 61 - 77 (1986)

35J25
35A35

Gert Wanka
Johanna Wanka

Approximationsprobleme bei Randkontaktaufgaben I (elliptische Probleme)

Die hier zu betrachtende Problemstellung gehört in diejenige Gruppe von Approximationsproblemen der mathematischen Physik, die erstmalig 1960 von H. Beckert in das Interesse mathematischer Untersuchungen gerückt worden ist. In physikalisch-anschaulicher Formulierung geht es dabei beispielsweise um die Aufgabenstellung, eine längs einer Fläche im Inneren eines Körpers vorgegebene bzw. gewünschte Temperaturverteilung im Sinne einer geeigneten Metrik durch die sich längs der Fläche einstellende Temperaturverteilung bei Veränderung der Temperatur an der Körperoberfläche (etwa in einem gewissen Teilgebiet der Oberfläche, einem "Steuerfenster") zu approximieren. Diese unter gewissen Voraussetzungen für das Dirichletproblem elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung von H. Beckert in der Arbeit /2/ behandelten Approximationsaufgaben - mit dem Resultat: beliebig genaue Approximierbarkeit von längs der nichtgeschlossenen Fläche Γ vorgegebenen $L_2(\Gamma)$-Funktionen in der Metrik des $L_2(\Gamma)$, also Dichtheit in $L_2(\Gamma)$ - wurden in der darauffolgenden Zeit von verschiedenen Autoren in unterschiedlichen Richtungen verallgemeinert betreffs etwa Art der Randwertprobleme (unterschiedliche Differentialgleichungen und Randbedingungen) und deren Lösungsverhalten, Art der auf Γ betrachteten Funktionenräume sowie Gestalt der Fläche Γ (das Gebiet Ω des Randwertproblems zerlegend oder nicht, Glattheit). Hierzu seien folgende Autoren und eine Auswahl von Arbeiten genannt:
Göpfert /4/, /5/, Anger /1/, Wildenhain /13/, /14/, /15/, G. Wanka /8/, /11/.
Zwecks umfassenderer Information sei auf die Arbeit von Göpfert, J. und G. Wanka /6/ verwiesen, welche eine ausführliche Literaturzusammenstellung zum betrachteten Problemkreis enthält.

Während den bisherigen Betrachtungen Randwert- bzw. Randanfangswertprobleme zugrunde gelegt wurden, sollen in dieser Arbeit derartige Approximationsprobleme bei sogenannten Randkontaktproblemen untersucht werden. Als physikalischer Hintergrund können dabei Randwertprobleme für Körper mit stückweise konstanten Materialkonstanten angesehen werden, also etwa Wärmeleitungsprobleme für Medien mit stückweise konstanten Wärmeleitkoeffizienten. An den Trennflächen der homogenen Teilkörper mit den unterschiedlichen Materialeigenschaften treten physikalisch bedingte Übergangs- oder Kontaktbedingungen auf; beim Problem der Wärmeleitung sind dies etwa der stetige Durchgang der Temperatur sowie des Wärmeflusses durch die Trennfläche. Die unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten beiderseits der Trennfläche haben dann einen Sprung der Normalableitung der Temperatur auf der Trennfläche zur Folge. Ähnliche Probleme treten bei stückweise homogenen Körpern etwa in der Elektrostatik oder der Elastizitätstheorie auf. Im folgenden betrachten wir ein allgemeines Randkontaktproblem für eine allgemeine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung. Nach der Definition des Randkontaktproblems im ersten Abschnitt und der Zusammenstellung der nachfolgend für die Approximationsuntersuchungen benötigten Resultate im zweiten Abschnitt, gehen wir im dritten Abschnitt zur Untersuchung der Approximationsprobleme selbst über.
In einem Teil II werden wir in einer weiteren Arbeit auf Randanfangskontaktprobleme und entsprechende Approximationseigenschaften bei parabolischen Gleichungen eingehen.

1. Randkontaktproblem (RKP)

Gegeben sei ein beschränktes offenes Gebiet $D_o \subset R^m$, $m \geq 2$, in welches eine endliche Anzahl von beschränkten offenen Gebieten $D_1,\dots,D_s$ eingebettet sei (vgl. Abb. 1):

$$D = \bigcup_{i=o}^{s} D_i \cup T \quad \text{mit} \quad D_i \cap D_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j,$$

$$T_j = \partial D_j \cap \partial D_o, \quad T = \bigcup_{j=1}^{s} T_j.$$

Weiter werde gesetzt

$$\underline{D} = \bigcup_{i=o}^{s} D_i,\ \overline{D} = D \cup \partial D,\ R_i = \partial D \cap \partial D_i,\ i = 0,\dots,s,\ \text{und}$$

es sei $\partial D_i \cap \partial D_j = \emptyset$ für $i,j \neq 0,\ i \neq j,\ R = \bigcup_{i=o}^{s} R_i = \partial D$.
Sämtliche auftretenden Randflächen R_j und T_j (bzw. Kurven im R^2) seien aus der Klasse $C^{(2,\lambda)}$ (Ljapunovflächen). Die Normalen ν auf ∂D bzw. T_j seien bez. D bzw. D_j äußere Normalen.

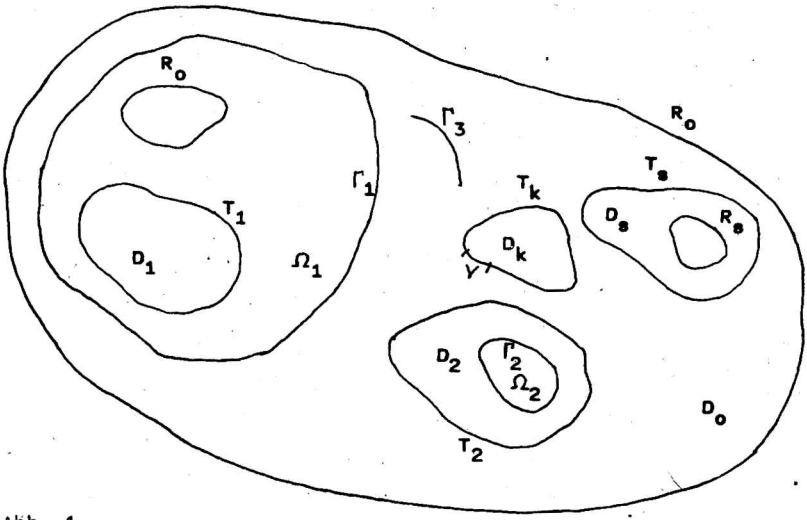


Abb. 1

Wir betrachten die elliptische Differentialgleichung

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,\ f \in C^{(0,\lambda)}(D_i), \quad (1)$$

in D_i, $i = 0,\dots,s$, wobei $a_{ik} \in C^{(2,\lambda)}$, $b_i \in C^{(1,\lambda)}$, $c \in C^{(0,\lambda)}$, $0 < \lambda \leq 1$, im Abschluß $\overline{D}$ von D sein mögen; u werde in D_i mit u_i bezeichnet.

Hinzu kommen die Dirichletschen Randbedingungen

$$u_{|\partial D} = \varphi, \quad \varphi \in C^{(1,\mu)}(\partial\Omega), \tag{2}$$

sowie die Kontaktbedingungen

$$(\eta_o u_o - \eta_j u_j)_{T_j} = \psi_j, \quad \psi_j \in C^{(1,\lambda)}(T_j), \tag{3}$$

$$(\gamma_o \frac{\partial u_o}{\partial \nu} - \gamma_j \frac{\partial u_j}{\partial \nu} + \lambda_j u_j)_{T_j} = \pi_j, \quad j = 1, \ldots, s, \quad \pi_j \in C^{(0,\mu)}(T_j), \tag{4}$$

mit $\eta_o, \eta_j > 0$ und konstant auf T_j, $\gamma_o, \gamma_j > 0$,

$\gamma_o, \gamma_j \in C^{(0,\mu_1)}(T_j)$, $\mu_1 > \frac{1}{2}$, $\lambda_j \in C^{(0,\mu_2)}$, $0 < \mu_2 \leq 1$,

$e_i = (b_i - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}) \in C^{(1,\lambda)}(\overline{D})$, ν äußere Konormale auf T_j bez. D_j. Die Grenzwerte von u_o bzw. u_j auf T_j mögen mit $(u_o)_{T_j}$ bzw. $(u_j)_{T_j}$ bezeichnet werden, so daß die Bedingung (3) eigentlich $\eta_o(u_o)_{T_j} - \eta_j(u_j)_{T_j} = \psi_j$ lautet, wir aber vereinbaren wollen, sie in der obigen Form zu schreiben. In analogem Sinne sei (4) zu verstehen, wobei noch entsprechende Grenzwerte der Konormalenableitungen beiderseits der Trennflächen T_j auftreten. Wir betrachten Lösungen $u_i \in C^2(D_i) \cap C(\overline{D}_i)$.

Bemerkungen:

a) Für $Lu = \Delta u = 0$, $\eta_o = \eta_j = 1$, $\psi_j, \pi_j, \lambda_j = 0$, γ_o, γ_j jeweils konstante Wärmeleitkoeffizienten in D_o bzw. D_j, beschreibt das Randkontaktproblem (1) bis (4) eingangs erwähntes stationäres Wärmeleitungsproblem für einen Körper D mit stückweise konstanten Wärmeleitkoeffizienten.

b) Bei den angekündigten Approximationsproblemen wird es im 3. Abschnitt um Approximation von Funktionen längs Flächen im Gebietsinneren durch Variation der Inhomogenitäten ψ_j und π_j in den Kontaktbedingungen (3), (4) gehen.

2. Lösbarkeit, adjungiertes Randkontaktproblem und Lösungsdarstellung

Existenz und Eindeutigkeitsaussagen bezüglich des zugrunde gelegten RKP gewinnt man auch unter schwächeren als den gemachten Glattheitsvoraussetzungen (vgl. /9/) an die auftretenden Funktionen (Koeffizienten der Differentialgleichung und in den Kontaktbedingungen) bzw. Gebietsränder. Für die Lösungsdarstellungen bzw. den Nachweis der Existenz entsprechender Greenscher Funktionen bzw. die Behandlung sogenannter adjungierter RKP erweisen sich aber vorerst stärkere Glattheitsvoraussetzungen als erforderlich. Bevor wir eine Greensche Lösungsdarstellung notieren, mit der wir dann im dritten Abschnitt arbeiten, soll unserem RKP ein sogenanntes adjungiertes RKP zugeordnet werden, mit dessen Hilfe wir eine Greensche Funktion definieren. Dieses homogene RKP besteht im Auffinden einer Funktion v aus den Bedingungen:

$$L^* v = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv = 0 \text{ in } \underline{D}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_0} v_0 - \frac{1}{\gamma_j} v_j\right)_{T_j} = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{a}{\eta_0} \frac{\partial v_0}{\partial \nu} - \frac{a}{\eta_j} \frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \tilde{\lambda}_j v_j\right)_{T_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{7}$$

$$\text{mit } \tilde{\lambda}_j = \left(\frac{1}{\eta_j} - \frac{\gamma_0}{\eta_0 \gamma_j}\right) b + \frac{a}{\eta_j \gamma_j} \lambda_j,$$

$$v|_{\partial D} = 0 \quad (v_i \in C^2(D_i) \cap C(\overline{D}_i)). \tag{8}$$

Dabei sei wieder $v = v_i$ in D_i, $i = 0, \ldots, s$, definiert, und in den Kontaktbedingungen treten wie oben die Grenzwerte von v bzw. $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ beiderseits der Trennfläche T_j, d. h. bezüglich der Gebiete D_0 und D_j, auf und sind mit den entsprechenden Indizes versehen.

Weiterhin seien die Funktionen a und b auf T_j durch

$$a = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cos(\nu, x_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$ ν Einheitsnormalenvektor auf T_j, $\cos(\nu, x_k)$ Richtungskosinus von ν bezüglich der Koordinatenachse x_k, bzw. $b = \sum_{i=1}^{m} e_i \cos(\nu, x_i)$ definiert.

Die adjungierten Kontaktbedingungen sind gerade so definiert worden, daß bekannte Zusammenhänge zwischen Randwert- und adjungiertem Randwertproblem möglichst erhalten bleiben (vgl. /10/). Bezüglich genauerer Untersuchungen dieser Zusammenhänge bzw. der Lösbarkeit insbesondere dieses adjungierten RKP vgl. ebenda.

Im weiteren setzen wir die eindeutige Lösbarkeit des RKP (1), ..., (4) voraus. Insbesondere fordern wir für die Eindeutigkeit, daß das homogene RKP zu (1), ..., (4) nur die triviale Lösung $u = 0$ besitzt. Für $c \not\equiv 0$, $\lambda_j \not\equiv 0$ ist dies erfüllt. Andernfalls gibt es einen Eigenraum der Dimension $n \geq 0$. Die Existenz einer Lösung von (1), ..., (4) ist z. B. dann gesichert, wenn das Dirichletproblem bezüglich des Gebietes D_0 oder die s Dirichletprobleme bezüglich $D_1, \ldots, D_s$ eindeutig lösbar sind in der Klasse der Funktionen $u \in C^2(D_i) \cap C(\overline{D}_i)$ (vgl. /10/).

Unter unseren Glattheitsvoraussetzungen an das Gebiet D sowie die Koeffizienten der Differentialgleichung existiert für den formal-adjungierten Differentialoperator L^* eine Fundamentallösung $\psi(x,y)$ bez. y in $\overline{D}$, welche bez. y hölderstetig differenzierbar auf ∂D fortsetzbar ist (vgl. /10/).

Für die Greensche Funktion machen wir nun den Ansatz

$$G(x,y) = \eta_i \psi(x,y) - R(x,y), \quad x \in \underline{D}, \; y \in D_i, \quad i = 0, \ldots, s, \tag{9}$$

mit dem mittels folgender Definition der Greenschen Funktion zu bestimmenden regulären Anteil R(x,y):

$$L_y^* G(x,y) = 0, \quad x \in \underline{D}, \; y \in \underline{D}, \; x \neq y, \tag{10}$$

$$G(x,y)|_{\partial D} = 0, \quad x \in \underline{D}, \; y \in \partial D, \tag{11}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_0(y)}\, G_0(x,y) - \frac{1}{\gamma_j(y)}\, G_j(x,y)\right)_{T_j} = 0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{a(y)}{\eta_0(y)}\,\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial \nu_y} - \frac{a(y)}{\eta_j(y)}\,\frac{\partial G_j(x,y)}{\partial \nu_y} + \tilde{\lambda}_j(y)\right)_{T_j} = 0, \tag{13}$$

$$x \in \underline{D},\ y \in T_j,\quad j = 1,\ldots,s.$$

Dabei ist $G(x,y) = G_i(x,y)$ für $x \in \underline{D}$, $y \in D_i$, $i = 0,\ldots,s$. Der Index y bei L_y^* soll kenntlich machen, daß es sich um die Anwendung von L^* bezüglich y handelt. Ferner sei ν_y die Konormale im Punkt $y \in T_j$, und die auftretenden Ableitungen in dieser Richtung mögen sich ebenfalls auf y beziehen.

Aus den Bedingungen und der gestellten Eindeutigkeitsforderung ergibt sich mittels potentialtheoretischer Überlegungen (vgl. /10/) die Existenz der Greenschen Funktion. Mit deren Hilfe gewinnt man unter Benutzung der Greenschen Formeln eine Lösungsdarstellung für Lösungen aus der Klasse $C^2(D_i) \cap C^1(\overline{D}_i)$ von (1), ..., (4) in der Form

$$\begin{aligned} u(x) = -\frac{1}{\eta_i}\Bigg\{ & \int_D G(x,y) f(y)\,dy + \int_{\partial D} a(y)\,\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\,\varphi(y)\,d\sigma(y) \\ & + \sum_{j=1}^{s} \int_{T_j} \Big[G_0(x,y)\,\frac{a(y)}{\gamma_0(y)}\,\pi_j(y) - \frac{1}{\eta_0}\,\big(a(y)\,\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial \nu_y} \\ & - b(y) G_0(x,y)\big)\,\psi_j(y)\,d\sigma(y)\Big]\Bigg\}, \quad x \in D_i,\ i = 0,\ldots,s. \end{aligned} \tag{14}$$

3. Approximation

Bezüglich der Lage der Fläche Γ, auf der vorgegebene Funktionen approximiert werden mögen, sind bei Randkontaktproblemen im Gegensatz zu Randwertproblemen verschiedene Konstellationen möglich. Γ kann im Gebiet D_0 liegen, aber auch in den Einschlüssen $D_1,\ldots,D_s$, bzw. bei geschlossenem Γ kann diese Fläche verschiedene Einschlüsse umschließen. Wir wollen $\Gamma \cap T = \emptyset$ annehmen. Wir betrachten ein beliebiges offenes Teilgebiet

(bez. der auf T induzierten Euklidischen Topologie des R^m) $V \subset T_k$. Bezüglich der Approximationsflächen Γ wollen wir folgenden konkreten Fall vor Augen haben (der die wesentlichen Möglichkeiten beinhaltet): $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$, sei aufgebaut aus einer Fläche Γ_1, welche geschlossen ist und Randteile R_o sowie Einschlüsse D_i, $i = 1, \ldots, s$, etwa D_1 umfaßt; Γ_3 sei eine nicht geschlossene Fläche in D_o; in einem Einschluß, etwa D_2, sei die geschlossene Fläche Γ_2 enthalten. Alle einzelnen Bestandteile von Γ seien (m-1)-dimensionale Flächen und aus der Klasse $C^{(1,\lambda)}$. Auf den Flächen von Γ sei eine Normale vorgegeben, die bei geschlossenen Flächen äußere Normale sei (vgl. Abb. 1). T_k möge von keiner geschlossenen Fläche aus dem System Γ eingeschlossen werden.

Durch Variation der Kontaktbedingungen ψ_k und π_k auf V im Rahmen der Voraussetzungen soll eine längs Γ vorgegebene quadratintegrable Funktion bezüglich der L^2-Norm approximiert werden. Das innerhalb Γ_1 gelegene Teilgebiet von D werde mit Ω_1 bezeichnet, analog das von Γ_2 umschlossene Teilgebiet mit Ω_2.

Das homogene adjungierte RKP (5), ..., (8) für das Gebiet Ω_1 anstelle von D habe genau n_1 linear unabhängige Eigenlösungen $v^1, \ldots, v^{n_1}$ mit $v_i^1 = v^1$ in D_i und $v_i^1 \in C^2(\Omega_1 \cap D_i) \cap C^1(\overline{\Omega_1 \cap D_i})$. Entsprechend habe das homogene adjungierte Dirichletproblem für Ω_2 genau n_2 linear unabhängige Eigenlösungen $w^1, \ldots, w^{n_2}$, für welche dann auf Grund der Glattheitsvoraussetzungen an Γ_2 bzw. $\partial\Omega_2$ und an die Koeffizienten der Differentialgleichung $w^i \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\overline{\Omega_2})$ gilt (/7/). Wir fassen $L_2(\Gamma)$ als Produktraum $L_2(\Gamma) = (L_2(\Gamma_1), L_2(\Gamma_2), L_2(\Gamma_3))$ auf. Der von den Konormalenableitungen der Eigenlösungen

$a \frac{\partial v^1}{\partial \nu}, \ldots, a \frac{\partial v^{n_1}}{\partial \nu}$ aufgespannte n_1-dimensionale Raum besitzt ein mit $H_{\Gamma_1} = L_2(\Gamma_1) - \left\langle a \frac{\partial v^1}{\partial \nu}, \ldots, a \frac{\partial v^{n_1}}{\partial \nu} \right\rangle_{\Gamma_1}$ bezeichnetes ortho-

gonales Komplement. Analog sei $H_{\Gamma_2} = L_2(\Gamma_2) - \left\langle a \frac{\partial w^1}{\partial \nu}, \ldots, \frac{\partial w^{n_2}}{\partial \nu} \right\rangle_{\Gamma_2}$

das orthogonale Komplement des von $a \frac{\partial w^1}{\partial \nu}, \ldots, a \frac{\partial w^{n_2}}{\partial \nu}$ aufgespannten n_2-dimensionalen Unterraumes von $L_2(\Gamma_2)$.

Satz 1: Unter den voranstehend aufgeführten Voraussetzungen liegen die auf Γ eingeschränkten Lösungen des Randkontaktproblems (1), ..., (4) bei Variation der Kontaktvorgaben ψ_k, π_k längs eines beliebigen offenen Teilgebietes $V \subset T_k$ dicht im Hilbertraum $H_\Gamma \subset L_2(\Gamma)$ mit $H_\Gamma = (H_{\Gamma_1}; H_{\Gamma_2}; L_2(\Gamma_3))$.

Bemerkung: Der Satz gilt sinngemäß für eine beliebige endliche Anzahl von einzelnen Flächenstücken von Γ. Innerhalb einer geschlossenen Fläche des Systems Γ sei keine weitere Fläche von Γ enthalten. Falls sich das Variationsgebiet V der Kontaktvorgaben innerhalb einer geschlossenen Fläche Γ^* von Γ befindet (war oben ausgeschlossen worden), so können innerhalb Γ^* noch weitere Flächen von Γ auftreten, jedoch nicht außerhalb Γ^*. Die nicht geschlossenen Flächen aus Γ können auch glatte Flächen der Dimension $d < m-1$ (vgl. /2/) sein. Ebenfalls kann man die Glattheitsvoraussetzungen zumindest für Teile von Γ des Types Γ_2 und Γ_3 noch wesentlich abschwächen. Weiterhin können die Resultate noch bezüglich gleichmäßiger Approximation stetiger Funktionen längs Γ verschärft werden. Die Vorgehensweise hierfür orientiert sich an /8/ bzw. /6/. Ein entsprechender Satz kann ebenfalls für die Approximation durch Variation der Randbedingungen bewiesen werden.

Beweis: Es genügt, die Kontaktvorgaben ψ_j und π_j, $j = 1, \ldots, s$, außerhalb $V \subset T_k$ gleich Null zu wählen und ebenfalls die rechte Seite f der Differentialgleichung und die Randvorgaben φ identisch Null anzunehmen (Linearität und Superpositionsprinzip). $\mathfrak{L}_\Gamma$ sei die bei Variation der Kontaktbedingungen entstehende Linearmannigfaltigkeit der auf Γ eingeschränkten Lösungen. Gemäß unserer Behauptung machen wir den Ansatz

$$0 = \langle h,u\rangle_{H_\Gamma} = \int_\Gamma h(x)\ u(x)d\sigma(x),\ u \in \mathcal{L}_\Gamma, \tag{15}$$

und haben das Verschwinden von h in H_Γ zu zeigen (bzw. $h \in H_\Gamma^\perp$ bezüglich $L_2(\Gamma)$).
Wir setzen in (15) für u die Greensche Lösungsdarstellung (14) unter Beachtung der obigen Bemerkungen bezüglich φ_j, π_j, f und φ ein:

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} h(x)\Big\{-\frac{1}{\eta_0}\int_V G_0(x,y)\,\frac{a(y)}{\gamma_0(y)}\,\pi_k(y)d\sigma(y)\\
&+\frac{1}{\eta_0}\int_V \frac{1}{\eta_0}\Big(a(y)\,\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial \nu_y} - b(y)G_0(x,y)\Big)\,\varphi_k(y)d\sigma(y)\Big\}d\sigma(x)\\
&+\int_{\Gamma_2} h(x)\Big\{-\frac{1}{\eta_2}\int_V G_0(x,y)\,\frac{a(y)}{\gamma_0(y)}\,\pi_k(y)d\sigma(y)\\
&+\frac{1}{\eta_2}\int_V \frac{1}{\eta_0}\Big(a(y)\,\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial \nu_y} - b(y)G_0(x,y)\Big)\,\varphi_k(y)d\sigma(y)\Big\}d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge und geeignetem Zusammenfassen und Umformen entsteht

$$\begin{aligned}
0 = &\int_V \pi_k(y)\Big\{\frac{a(y)}{\gamma_0(y)}\Big[-\frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} G_0(x,y)h(x)d\sigma(x)\\
&\qquad -\frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2} G_0(x,y)h(x)d\sigma(x)\Big]\Big\}d\sigma(y)\\
&-\int_V \varphi_k(y)\Big\{\frac{1}{\eta_0}\Big[-\frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3}\Big(a(y)\,\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial \nu_y} - b(y)G_0(x,y)h(x)d\sigma(x)\\
&-\frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2}\Big(a(y)\,\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial \nu_y} - b(y)G_0(x,y)\Big)h(x)d\sigma(x)\Big]\Big\}d\sigma(y).
\end{aligned} \tag{16}$$

Da π_k und ψ_k unabhängig voneinander beliebig variieren, so müssen die Ausdrücke in beiden geschweiften Klammern verschwinden. Wir definieren ein Potential

$$A(y) = -\frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} G(x,y)h(x)d\sigma(x) - \frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2} G(x,y)h(x)d\sigma(x), \quad (17)$$

wobei wieder mit der Bezeichnung $A(y) = A_i(y)$ für $y \in D_i$, $i = 0,\ldots, s$, gearbeitet werden soll.

Dann bedeutet das Verschwinden des Ausdrucks in der ersten geschweiften Klammer von (16) gerade

$$A_0(y) = 0 \quad \text{für} \quad y \in V. \quad (18)$$

Den Term in der zweiten geschweiften Klammer formen wir nach Multiplikation mit η_0 noch etwas um:

$$0 = a(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\Big[-\frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} G_0(x,y)h(x)d\sigma(x) - \frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2} G_0(x,y)h(x)d\sigma(x)\Big]$$

$$- b(y)\Big[-\frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} G_0(x,y)h(x)d\sigma(x) - \frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2} G_0(x,y)h(x)d\sigma(x)\Big]$$

$$= a(y)\frac{\partial A_0(y)}{\partial\nu_y} - b(y)A_0(y), \quad y \in V.$$

Mit (18) gilt also

$$\frac{\partial A_0(y)}{\partial\nu_y} = 0 \quad \text{für} \quad y \in V. \quad (19)$$

Außerdem genügt wegen (10) $A(y)$ der Differentialgleichung

$$L^*A(y) = 0 \quad \text{für} \quad y \in \underline{D}\setminus\Gamma. \quad (20)$$

Somit genügt $A(y)$ einem Cauchyschen Anfangswertproblem längs V. Unter unseren Voraussetzungen gilt der Unitätssatz von Cordes /3/ und wir haben $A(y) \equiv 0$ in $D_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$.

Aus der Darstellung (9) sieht man, daß $A(y)$ ein Greensches Potential mit einer Fundamentallösung ψ als wesentlichem Kernbe-

standteil ist. A(y) hat deshalb die wesentlichen Eigenschaften eines Potentials der einfachen Schicht, insbesondere genügen die Grenzwerte der Konormalenableitungen beiderseits der Belegungsfläche Γ einer Sprungrelation, die sich unmittelbar aus derjenigen des Einfachschichtpotentials ergibt (vgl. /7/):
Fast überall auf Γ_3 gilt

$$\left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu_y}\right)^{(\pm)} = (\pm)\,\frac{h(y)}{2a(y)} - \frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\,h(x)\,d\sigma(x) - \frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\,h(x)\,d\sigma(x). \tag{21}$$

In "$(\pm)$" bedeutet das "+" den Grenzwert der Ableitung auf der Seite der Fläche Γ, welche positiv orientiert ist, d. h., auf die man sieht, wenn man entgegen der vereinbarten Normalenrichtung auf die Fläche schaut, "-" bezeichnet den Grenzwert auf der anderen Seite der Fläche.
Wegen $A(y) = 0$ in einer Umgebung von Γ_3 gilt auch
$\left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu_y}\right)^{(\pm)} = 0$ auf Γ_3. Aus (21) resultiert für die Differenz
der Grenzwerte $0 = \left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu_y}\right)^{+} - \left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu_y}\right)^{-} = \frac{h(y)}{a(y)}$,
mithin resultiert für fast alle $y \in \Gamma_3$ wegen $a(y) > 0$

$$h(y) = 0. \tag{22}$$

Nun betrachten wir A(y) in einer Umgebung der geschlossenen Fläche $\Gamma_1 \subset D_0$. $A(y) \equiv 0$ in $D_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Gamma_1)$ impliziert
$\left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu}\right)^{+} = 0$ für $y \in \Gamma_1$. Auf Γ_1 gilt ebenfalls (21) und folglich
für fast alle $y \in \Gamma_1$

$$\left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu}\right)^{+} = 0 = \frac{h(y)}{2a(y)} - \frac{1}{\eta_0}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\,h(x)\,d\sigma(x) - \frac{1}{\eta_2}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\,h(x)\,d\sigma(x). \tag{23}$$

Gleichung (23) ist als eine inhomogene schwach singuläre (wegen der Singularität von G) Integralgleichung auffaßbar. Das inhomogene stetige Glied ist

$$\frac{2a(y)}{\eta_2} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} h(x) d\sigma(x),$$

wenn man (23) noch mit 2a(y) multipliziert.

Eine L^2-Lösung von (23) ist dann insbesondere stetig. Damit geht A(y) stetig durch Γ_1 hindurch (vgl. Einfachschichtpotential mit stetiger Belegungsdichte in /7/) und die Sprungrelation gilt überall auf Γ_1:

$$(A(y))^- = (A(y))^+ = 0, \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu}\right)^- = \left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu}\right)^+ - \frac{h(y)}{a(y)} = -\frac{h(y)}{a(y)}. \tag{25}$$

Nun betrachten wir noch das Verhalten von A(y) auf den Trennflächen T_j, $j = 1,\ldots, s$. Mittels (17) und der Definition der Greenschen Funktion (vgl. (9)-(13)) überzeugt man sich davon, daß für $y \in T_j$, $j = 1,\ldots, s$, gilt:

$$\frac{1}{\gamma_0(y)} A_0(y) - \frac{1}{\gamma_j(y)} A_j(y) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{a(y)}{\eta_0} \frac{\partial A_0(y)}{\partial \nu} - \frac{a(y)}{\eta_j} \frac{\partial A_j(y)}{\partial \nu} + \tilde{\lambda}_j A_j(y) = 0. \tag{27}$$

Somit genügt A(y) bezüglich des von Γ_1 eingeschlossenen Teilgebiets Ω_1 von D einem homogenen adjungierten Randkontaktproblem (vgl. (20), (24), (26), (27)). Für A(y) gilt

$A(y) \in C^2(\Omega_1 \cap D_i) \cap C^1(\overline{\Omega_1 \cap D_i})$, wobei bei der von uns gewählten Gebietskonstellation $i = 0,1$ ist und speziell $\Omega_1 \cap D_1 = D_1$ gilt.

Dies sieht man folgendermaßen: Durch Iteration der zunächst oben als stetig nachgewiesenen Lösung der Integralgleichung (23) ergibt sich, daß h sogar hölderstetig ist, da das Integral über Γ_1 mit stetiger Dichte h(vgl. /7/) diese Eigenschaft hat und das inhomogene Glied ebenfalls hölderstetig ist als Konor-

malenableitung eines Greenschen Potentials mit Belegungsfläche Γ_2 auf einer Ljapunovfläche ($\Gamma_1 \in C^{(1,\lambda)}$) im Regularitätsgebiet dieses Potentials. Wegen des Satzes (vgl. /7/), daß ein Potential der einfachen Schicht mit hölderstetiger Dichte auf die Belegungsfläche stetig fortsetzbare erste Ableitungen beiderseits der Belegungsfläche besitzt, trifft dies offensichtlich auch auf A(y) nach (17) zu. Für die übrigen Randteile von $\Omega_1 : \partial D \cap \partial\Omega_1$, sowie für die Trennfläche T_1 trifft diese stetig differenzierbare Fortsetzbarkeit von A(y) auf Grund dieser Eigenschaft der Greenschen Funktion (unter unseren Voraussetzungen an das Randkontaktproblem) zu. A(y) ist folglich eine Linearkombination der vorausgesetzten n_1 Eigenlösungen $v^1, \ldots, v^{n_1}$ des homogenen adjungierte RKP bezüglich Ω_1:

$$A(y) = \sum_{p=1}^{n_1} \alpha_p \, v^p(y), \quad y \in \Omega_1, \quad \alpha_p \in R,$$

(25) impliziert für $y \in \Gamma_1$

$$\left(\frac{\partial A(y)}{\partial \nu}\right)^- = \sum_{p=1}^{n_1} \alpha_p \frac{\partial v^p(y)}{\partial \nu} = - \frac{h(y)}{a(y)}.$$

Da laut Ansatz (15) $h \in H_\Gamma$ orthogonal zu $a \frac{\partial v^p}{\partial \nu}$ auf Γ_1 ist (im Sinne des Skalarproduktes von $L_2(\Gamma_1)$), folgt $\alpha_p = 0$, $p = 1, \ldots, n_1$, d. h. $h \equiv 0$ auf Γ_1.

Nun ist noch $A(y) = - \frac{1}{\eta_2} \int_{\Gamma_2} G(x,y) h(x) d\sigma(x)$ in einer Umgebung von Γ_2 zu betrachten. Wegen $A(y) \equiv 0$ in D_o und (26) folgt $A_2(y) = 0$ und aus (27) $\frac{\partial A_2(y)}{\partial \nu} = 0$ für $y \in T_2$. Wir wenden erneut den Unitätssatz für dieses Anfangswertproblem an und schließen auf $A(y) \equiv 0$ für $y \in D_2 \setminus \overline{\Omega}_2$. Jetzt können wir bezüglich der geschlossenen Fläche Γ_2 analoge Überlegungen wie oben bei Γ_1 durchführen und $h \equiv 0$ auf Γ_2 folgern, womit der Satz bewiesen ist.

Abschließend soll noch nach der Möglichkeit der Approximation bei Variation nur einer Kontaktvorgabe gefragt werden. Nehmen wir also an, daß nur π_k auf $V \subset T_k$ variiert wird, während alle anderen Vorgaben einschließlich ψ_j, $j=1,\ldots,s$, o.B.d.A. identisch verschwinden mögen. Wieder vom Ansatz (15) ausgehend erhält man (16) mit $\psi_k=0$, d. h., es resultiert nur (18), jedoch nicht (19). Die Gültigkeit von (18) allein reicht jedoch nicht aus, um wie oben auf $A(y) \equiv 0$ in $D_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ zu schließen. Variiert man jedoch π_k auf ganz $T_k (V=T_k)$, so wird $A_0(y) = 0$ auf T_k und mittels (26) auch $A_k(y) = 0$ für $y \in T_k$. Wir setzen nun noch $D_k \cap \Gamma = \emptyset$ voraus. Wegen $L^*A(y) = 0$ in D_k und $A(y) = 0$ für $y \in R_k$ (vgl. (11) und (17)) ist $A(y)$ in D_k Lösung des homogenen adjungierten Dirichletproblems (mit den entsprechenden Glattheitseigenschaften bis zum Rand wie oben, d. h. $A_k(y) \in C^2(D_k) \cap C^1(\overline{D}_k)$). Nehmen wir als weitere Voraussetzung die Eindeutigkeit des Dirchletproblems (und damit auch des adjungierten Dirichletproblems) bezüglich D_k an, so muß $A(y)$ in D_k verschwinden. Auf Grund der Kontaktbedingungen (26), (27) ergeben sich (18) und (19), und der weitere Beweis verläuft wie bei Satz 1. Somit haben wir den

Satz 2: Unter den Voraussetzungen von Satz 1, der Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems für D_k, sowie der Bedingung $D_k \cap \Gamma = \emptyset$ liegen die auf Γ eingeschränkten Lösungen des RKP (1), ..., (4) bei Variation nur der Kontaktvorgaben π_k auf ganz T_k dicht in H_Γ.

Bemerkungen:

a) Unter einer gewissen Zusatzvoraussetzung betreffs der Eigenlösungen des homogenen adjungierten Dirichletproblems bezüglich D_k kann man sich bei Satz 2 von der Voraussetzung der Eindeutigkeit der Lösung des Dirchletproblems für D_k befreien.

b) Ein dem Satz 2 entsprechender Satz kann auch gezeigt werden, wenn die andere Kontaktbedingung ψ_k auf ganz T_k variiert und die übrigen Vorgaben, insbesondere π_k, verschwinden.

$A(y)$ genügt dann bezüglich D_k einem homogenen gemischten Problem mit dritten Randbedingungen auf T_k und ersten Randbedingungen auf R_k. Unter der Voraussetzung der Eindeutigkeit der Lösung dieses gemischten Problems folgt dann wieder $A(y) \equiv 0$ in D_k und wie oben die Dichtheitsaussage gemäß Satz 2.

Literatur

/1/ Anger, G.: Eindeutigkeitssätze und Approximationssätze für Potentiale II. Math. Nachr. 50, 229 - 244 (1971)

/2/ Beckert, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletproblems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. 139, 255 - 264 (1960)

/3/ Cordes, H. O.: Über die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. IIa 1956, 239 - 258

/4/ Göpfert, A.: L_2-Approximationssätze - eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Nachr. 31, 1 - 24 (1966)

/5/ Göpfert, A.: Eine Anwendung des Unitätssatzes von Ito-Yamabe. Beiträge Anal. 1, 29 - 41 (1976)

/6/ Göpfert, A., Wanka, G., und Wanka, J.: Approximation durch Lösungen partieller Differentialgleichungen. Einger. bei Z. Anal. Anwendungen

/7/ Miranda, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. Berlin 1970

/8/ Wanka, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Beiträge Anal. 17, 19 - 29 (1981)

/9/ Wanka, G.: Ein Existenztheorem für eine Klasse von allgemeinen Dirichletschen Randkontaktproblemen bei linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Nachr. 110, 215 - 229 (1983)

/10/ Wanka, G.: Randkontakt- und Approximationsprobleme bei linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dissertation, Merseburg 1980

/11/ Wanka, G.: Approximationsprobleme bei linearen elliptischen Randwertaufgaben höherer Ordnung. Einger. bei Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg

/12/ Wanka, J.: Lösung von Kontakt- und Steuerproblemen mit potentialtheoretischen Mitteln. Dissertation, Merseburg 1980

/13/ Wildenhain, G.: Approximation in Sobolev-Räumen durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung. Rostock. Math. Kolloq. 22, 43 - 56 (1983)

/14/ Wildenhain, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order I. Z. Anal. Anwendungen 2(6), 511 - 521 (1983)

/15/ Wildenhain, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order II. Math. Nachr. 113, 225 - 235 (1983)

eingegangen: 26. 06. 1985

Anschrift der Verfasser:

Dr. G. Wanka
Dr. J. Wanka
Technische Hochschule "Carl Schorlemmer"
Leuna-Merseburg
Sektion Mathematik
Otto-Nuschke-Straße
DDR-4200 Merseburg

Rostock. Math. Kolloq. 29, 78 - 98 (1986)

46E35
35J40

Jürgen Roßmann

Über zwei Klassen von gewichteten Sobolevräumen in ebenen Gebieten mit Ecken und Anwendungen auf elliptische Randwertaufgaben

0. Einleitung

In der Theorie der elliptischen Randwertaufgaben in Gebieten mit konischen Ecken werden vielfach gewichtete Sobolevräume verwendet. In den Arbeiten /1/, /2/, /3/, /4/ z. B. werden zuerst die Lösbarkeit und die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Klasse der gewichteten Sobolevräume $V^l_{p,\beta}(G)$ untersucht. Diese Klasse enthält aber i. allg. nicht die gewöhnlichen Sobolevräume $W^l_p(G)$, und es ist i. allg. nicht trivial, die Ergebnisse von den Räumen $V^l_{p,\beta}(G)$ auf die Räume $W^l_p(G)$ zu übertragen. Deshalb ist es von Interesse, den Zusammenhang zwischen den Räumen $V^l_{p,\beta}(G)$ und $W^l_{p,\beta}(G)$ zu untersuchen, wobei $W^l_{p,\beta}(G)$ eine Klasse von gewichteten Sobolevräumen darstellt, die die gewöhnlichen Sobolevräume $W^l_p(G) = W^l_{p,o}(G)$ enthält.
Für $\beta = s-2/p$ $(s=1,\dots,l-1)$ ist dieser Zusammenhang z. B. in /5/ untersucht. Im Fall $p = 2$ ist dort aber gerade der interessante Fall $\beta = 0$ ausgeschlossen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich deshalb mit dem Zusammenhang zwischen den Räumen $V^l_{p,\beta}(G)$ und $W^l_{p,\beta}(G)$ für $\beta = s-2/p$ $(s=1,\dots,l-1)$.

1. Bezeichnungen, Definitionen

r,ω seien Polarkoordinaten im R^2. Dann ist
$K = K_{\omega_o} = \{x \in R^2 : 0 < r < \infty,\ 0 < \omega < \omega_o\}$ $(0 < \omega_o < 2\pi)$ ein unendlicher Keil mit der Ecke im Koordinatenursprung und den Seiten
$\gamma^+ = \{x \in R^2 : \omega = \omega_o\}$, $\gamma^- = \{x \in R^2 : \omega = 0\}$.

Wir definieren den Raum $V^l_{p,\beta}(K)$ $(1 < p < \infty,\ \beta \in R)$ als Vervollständigung von $C_o^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ bez. der Norm

$$\|u\|_{V^l_{p,\beta}(K)} = \Big(\int_K \sum_{|\alpha| \le l} r^{p(\beta-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^p \, dx\Big)^{1/p}$$

$(D^\alpha = D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2}$, $D_{x_j} = \partial/i\partial x_j)$ und den Raum $W^l_{p,\beta}(K)$ als Menge aller Funktionen aus $W^l_{p,loc}(K)$, für die die Norm

$$\|u\|_{W^l_{p,\beta}(K)} = \Big(\int_K r^{p\beta} \sum_{|\alpha| = l} |D^\alpha u|^p \, dx\Big)^{1/p}$$

existiert. Entsprechend definieren wir $W^l_{p,\beta}(R_+)$ $(R_+ = (0,\infty))$ als Raum mit der Norm

$$\|u\|_{W^l_{p,\beta}(R_+)} = \Big(\int_{R_+} r^{p\beta} \sum_{j=0} |D_r^j u(r)|^p \, dr\Big)^{1/p}.$$

Für $l \ge 1$ seien $V^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma^\pm)$ und $W^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma^\pm)$ wie üblich die Räume der Spuren von Funktionen aus $V^l_{p,\beta}(K)$ bzw. $W^l_{p,\beta}(K)$ auf den Seiten γ^+ bzw. γ^-, versehen mit den Normen

$$\|u\|_{V^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma^\pm)} = \inf \left\{ \|v\|_{V^l_{p,\beta}(K)} : v \in V^l_{p,\beta}(K),\ v|_{\gamma^\pm} = u \right\},$$

$$\|u\|_{W^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma^\pm)} = \inf \left\{ \|v\|_{W^l_{p,\beta}(K)} : v \in W^l_{p,\beta}(K),\ v|_{\gamma^\pm} = u \right\}.$$

Die Norm in $V^{l-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ ist dabei äquivalent zur Norm

$$\|u\| = \Bigg(\sum_{j=0}^{l-1} \int_{R_+} r^{p(\beta-l+j)+1} |u^{(j)}(r)|^p \, dr + \int_{R_+} \int_{R_+} \left| r^\beta u^{(l-1)}(r) - \varrho^\beta u^{(l-1)}(\varrho) \right|^p \frac{dr\, d\varrho}{|r-\varrho|^p} \Bigg)^{1/p} \tag{1}$$

(s. /6/). Hierbei bezeichnet $u^{(j)}(r)$ die Funktion $\frac{d^j u(r)}{dr^j}$.

Lemma 1: Die Norm $\|\cdot\|_{W^{l-1/p}_{p,\beta}(R_+)}$ ist äquivalent zur Norm

$$u = \Big(\sum_{j=0}^{l-1} \Big(\int_0^1 r^{p\beta+1} |u^{(j)}(r)|^p \, dr + \int_1^\infty r^{p\beta} |u^{(j)}(r)|^p \, dr \Big) + \int_0^\infty \int_0^r r^{p\beta} \varrho^{-p} |u^{(l-1)}(r+\varrho) - u^{(l-1)}(r)|^p \, d\varrho \, dr \Big)^{1/p}. \tag{2}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt ähnlich wie der von Satz 2.2 aus /7/.

1. Es sei $u \in W^1_{p,\beta}(K)$ und f die Spur von u auf γ^-.

O. B. d. A. sei $\omega_0 < \pi/2$. Dann ist für $\varrho < x_1$

$$f(x_1) - f(x_1+\varrho) = u(x_1,0) - u(x_1, \varrho \tan\omega_0) + u(x_1, \varrho\tan\omega_0) - u(x_1+\varrho, \varrho\tan\omega_0) + u(x_1+\varrho, \varrho\tan\omega_0) - u(x_1+\varrho, 0).$$

Dabei ist

$$u(x_1,0) - u(x_1, \varrho\tan\omega_0) = \tan\omega_0 \int_0^1 u_{|2}(x_1, s\varrho\tan\omega_0)\, ds$$

(mit $v_{|j}(x_1,\dots,x_n)$ bezeichnen wir die Ableitung der Funktion v nach der j-ten Variablen). Aus der Hölderschen Ungleichung folgt damit

$$\int_{R_+} \int_0^{x_1} x_1^{p\beta} \varrho^{-p} |u(x_1,0) - u(x_1, \varrho\tan\omega_0)|^p \, d\varrho \, dx_1$$

$$\le c \int_{R_+} \int_0^{x_1} x_1^{p\beta} \int_0^1 s^{(p-1)/2} |u_{|2}(x_1, s\varrho\tan\omega_0)|^p \, ds \, d\varrho \, dx_1$$

$$\le c' \int_{R_+} \int_0^{x_1\tan\omega_0} r^{p\beta} |u_{|2}(x_1,x_2)|^p \, dx_2 dx_1,$$

denn in K ist $x_1 \le r \le x_1 (\cos\omega_0)^{-1}$. Analog erhält man

$$\int_{R_+} \int_0^{x_1} x_1^{p\beta} \varrho^{-p} |u(x_1, \varrho\tan\omega_0) - u(x_1+\varrho, \varrho\tan\omega_0)|^p \, d\varrho \, dx_1$$

$$\le c \|u\|^p_{W^1_{p,\beta}(K)} \text{ und}$$

$$\int_{R_+}\int_{0}^{x_1} x_1^{p\beta}\varrho^{-p}|u(x_1+\varrho,\varrho\tan\omega_0)-u(x_1+\varrho,0)|^p\,d\varrho\,dx_1$$

$$\leq c\|u\|^p_{W^1_{p,\beta}(K)},\ \text{d. h.}$$

$$\int_{R_+}\int_{0}^{x_1} x_1^{p\beta}\varrho^{-p}|f(x_1)-f(x_1+\varrho)|^p\,d\varrho\,dx_1 \leq c\|u\|^p_{W^1_{p,\beta}(K)}.$$

Ferner ist

$$\int_0^1 x_1^{p\beta+1}|f(x_1)|^p dx_1 = \frac{1}{\tan\omega_0}\int_0^1\int_0^{x_1\tan\omega_0} x_1^{p\beta}|u(x_1,0)|^p dx_2 dx_1$$

$$\leq c\int_0^1\int_0^{x_1\tan\omega_0} x_1^{p\beta}(|u(x_1,x_2)|^p+|u(x_1,x_2)-u(x_1,0)|^p)\,dx$$

$$\leq c\int_K r^{p\beta}|u|^p\,dx + c\int_0^1 x_1^{p\beta}\int_0^{x_1\tan\omega_0}\Big|\int_0^{x_2} u_{|2}(x_1,t)dt\Big|^p\,dx_2dx_1$$

$$\leq c\int_K r^{p\beta}|u|^p dx$$

$$+ c'\int_0^1\int_0^{x_1\tan\omega_0} x_1^{p\beta}((x_1\tan\omega_0)^p-t^p)|u_{|2}(x_1,t)|^p dt dx_1$$

$$\leq c''\|u\|^p_{W^1_{p,\beta}(K)}$$

und entsprechend

$$\int_1^\infty x_1^{p\beta}|f(x_1)|^p\,dx_1 = \frac{1}{\tan\omega_0}\int_1^\infty\int_0^{\tan\omega_0} x_1^{p\beta}|u(x_1,0)|^p\,dx_2\,dx_1$$

$$\leq c\int_1^\infty\int_0^{\tan\omega_0} x_1^{p\beta}(|u(x_1,x_2)|^p+|u_{|2}(x_1,x_2)|^p)\,dx_2\,dx_1$$

$$\leq c\|u\|^p_{W^1_{p,\beta}(K)},$$

d. h., die Norm (2) von f läßt sich nach oben durch die Norm von u abschätzen.

Die entsprechenden Abschätzungen für $l>1$ erhält man analog.

2. Es sei nun $f \in W_{p,\beta}^{l-1/p}(\gamma^-)$. Dann definieren wir

$$u(x_1,x_2) = \psi(x_2) \int_0^1 f(x_1+sx_2)\, K(s)\, ds,$$

wobei K eine Funktion aus $C_0^\infty(R)$ mit supp $K \subset (0,1)$, $\int_0^1 K(s)\, ds = 1$ und $\psi \in C_0^\infty(\overline{R_+})$ eine Ausschneidungsfunktion mit supp $\psi \subset [0,2)$ und $\psi = 1$ in $(0,1)$ seien. Dann ist

$$\int_0^\infty \int_0^{\min(1,x_1)} x_2^{-p}\, x_1^{p\beta} |u(x_1,x_2) - f(x_1)|^p\, dx_2 dx_1$$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^{x_1} x_2^{-p}\, x_1^{p\beta} \Big| \int_0^1 (f(x_1+sx_2) - f(x_1))\, K(s)\, ds \Big|^p\, dx_2\, dx_1$$

$$\leq c \|f\|^p_{W_{p,\beta}^{1-1/p}(\gamma^-)}, \text{ d. h., f ist Spur von u auf } \gamma^-.$$

Unter Ausnutzung der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \int_0^1 f(x_1+sx_2)\, K(s)\, ds \Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_R f^{(l-1)}(t)\, x_2^{-1} \Big(\frac{t-x_1}{x_2}\Big)^{\alpha_2} K\Big(\frac{t-x_1}{x_2}\Big)\, dt$$

$$= \int_R (f^{(l-1)}(t) - f^{(l-1)}(x_1)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{1}{x_2} \Big(\frac{t-x_1}{x_2}\Big)^{\alpha_2} K\Big(\frac{t-x_1}{x_2}\Big)\, dt$$

$$= \sum_{\mu+\nu \leq l} \frac{c_{\mu\nu}}{x_2} \int_0^1 (f^{(l-1)}(x_1+sx_2) - f^{(l-1)}(x_1)) s^\mu K^{(\nu)}(s)\, ds$$

für $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = l-1$ erhält man

$$\int_{K_{\pi/4}} r^{p\beta} |D^\alpha u|^p\, dx \leq c \|f\|^p_{W_{p,\beta}^{l-1/p}(R_+)} \quad \text{für } |\alpha| = l.$$

Ferner ist

$$\int_{K_{\pi/4}} r^{p\beta} |D^{\alpha} u|^p \, dx$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{l-1} \left(\int_0^1 x_1^{p\beta+1} |f^{(j)}(x_1)|^p \, dx_1 + \int_1^{\infty} x_1^{p\beta} |f^{(j)}(x_1)|^p \, dx_1 \right)$$

für $|\alpha| = l-1$, d. h. $u \in W^l_{p,\beta}(K_{\pi/4})$.

Da sich jede Funktion $u \in W^l_{p,\beta}(K_{\pi/4})$ zu einer Funktion aus $W^l_{p,\beta}(K_{\omega_o})$ fortsetzen läßt, ist Lemma 1 hiermit vollständig bewiesen.

Lemma 2: Der Raum $W^l_{p,\beta+1/p}(R_+)$ ist stetig in den Raum $W^{l-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ eingebettet.

Beweis: Offenbar ist

$$\sum_{j=0}^{l-1} \left(\int_0^1 r^{p\beta+1} |u^{(j)}(r)|^p \, dr + \int_1^{\infty} r^{p\beta} |u^{(j)}(r)|^p \, dr \right)$$

$$\leq \|u\|^p_{W^l_{p,\beta+1/p}(R_+)} .$$

Ferner erhält man

$$\int_0^{\infty} \int_0^r r^{p\beta} |u^{(l-1)}(r+\varrho) - u^{(l-1)}(r)|^p \varrho^{-p} \, d\varrho \, dr$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^r r^{p\beta} \left| \int_0^1 u^{(l)}(r+t\varrho) \, dt \right|^p d\varrho \, dr$$

$$\leq c \int_0^1 \int_0^{\infty} \int_{\varrho}^{\infty} (r+t\varrho)^{p\beta} |u^{(l)}(r+t\varrho)|^p \, dr \, d\varrho \, dt$$

$$= c \int_0^1 \int_0^{\infty} \int_0^{r/(t+1)} r^{p\beta} |u^{(l)}(r)|^p \, d\varrho \, dr \, dt \leq c \|u\|^p_{W^l_{p,\beta+1/p}(R_+)},$$

woraus die Aussage des Lemmas folgt.

Wir führen nun den folgenden Integraloperator $\mathcal{K}$ ein:

$$(\mathcal{K} g)(r) = \int_1^2 g(tr)\, K(t)\, dt,$$

wobei $K \in C_0^\infty(R)$ eine Funktion mit supp $K \subset (1,2)$ und $\int_1^2 K(t)\, dt = 1$ ist.

Lemma 3: Ist $g \in W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$, dann ist $v = \mathcal{K} g \in \bigcap_{\nu=0}^{\infty} W^{1+\nu}_{p,\beta+\nu+1/p}(R_+)$, und es gilt

$$\|v\|_{W^{1+\nu}_{p,\beta+\nu+1/p}(R_+)} \leq c \|g\|_{W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)} \quad \text{für } \nu = 0,1,\ldots \text{ sowie}$$

$$\int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |v(r) - g(r)|^p\, dr \leq c \|g\|^p_{W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)}.$$

Beweis: 1. Es ist $\frac{d^k v(r)}{dr^k} = \int_0^\infty g(t) \frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{1}{r} K\left(\frac{t}{r}\right)\right) dt$

$$= \int_r^{2r} (g(t) - g(r)) \frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{1}{r} K\left(\frac{t}{r}\right)\right) dt \quad \text{für } k \geq 1,$$

denn es gilt $\int_0^\infty \frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{1}{r} K\left(\frac{t}{r}\right)\right) dt = \frac{d^k}{dr^k} \int_1^2 K(t)\, dt = 0.$

Da $\left|\frac{d^k}{dr^k} \left(\frac{1}{r} K\left(\frac{t}{r}\right)\right)\right| = \left|\sum_{j=0}^{k} a_j\, t^j\, r^{-(k+1+j)}\, K^{(j)}\left(\frac{t}{r}\right)\right| \leq c\, r^{-k-1}$

für $t \leq 2r$ ist, erhält man nach der Hölderschen Ungleichung

$$\int_0^\infty r^{p(\beta-1+k)+1} |v^{(k)}(r)|^p\, dr \leq c \int_0^\infty \int_r^{2r} r^{p(\beta-1)} |g(t)-g(r)|^p\, dt\, dr$$

$$\leq c \int_0^\infty r^{p\beta} \int_0^r \varrho^{-p} |g(r+\varrho) - g(r)|^p\, d\varrho\, dr \quad \text{für } k \geq 1.$$

2. Analog erhält man

$$\int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |v(r)-g(r)|^p\, dr$$

$$= \int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} \left| \int_r^{2r} (g(t) - g(r))\, K(t)\, dt \right|^p dr$$

$$\leq c \int_0^\infty r^{p\beta} \int_0^r \varrho^{-p} |g(r+\varrho)-g(r)|^p\, d\varrho\, dr,$$

 womit das Lemma bewiesen ist.

Bemerkung 1: Faßt man $\mathfrak{X}g$ als Funktion über K auf, indem man $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ setzt, dann ist $\mathfrak{X}g \in \bigcap_{\nu=0} W^{1+\nu}_{p,\beta+\nu}(K)$.

2. Der Zusammenhang zwischen den Räumen $W^1_{p,\beta}(K)$ und $V^1_{p,\beta}(K)$

Es sei u eine beliebige Funktion aus $W^1_{p,\beta}(K)$. Wir verwenden der Einfachheit halber den gleichen Buchstaben u für diese Funktion, wenn wir sie in Polarkoordinaten r, ω schreiben, und definieren

$$\mathring{u}(r) = \frac{1}{\omega_o} \int_0^{\omega_o} u(r,\omega)\, d\omega.$$

Lemma 4: Ist $u \in W^1_{p,\beta}(K)$, dann ist $\mathring{u} \in W^1_{p,\beta+1/p}(R_+) \subset W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$, und es gilt

$$\int_K r^{p(\beta-1)} |u(x) - \mathring{u}(r)|^p \, dx \le c \|u\|^p_{W^1_{p,\beta}(K)}.$$

Beweis: Die Aussage $\mathring{u} \in W^1_{p,\beta+1/p}(R_+)$ folgt aus der Gleichung

$$\frac{\partial^j}{\partial r^j} = \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} (\cos\omega)^\nu (\sin\omega)^{j-\nu} \frac{\partial^j}{\partial x_1^\nu \partial x_2^{j-\nu}}.$$

Ferner ist $\int_K r^{p(\beta-1)} |u(x) - \mathring{u}(r)|^p \, dx$

$$= \int_K r^{p(\beta-1)} \Big| \frac{1}{\omega_o} \int_0^{\omega_o} (u(r,\omega) - u(r,\varphi))\, d\varphi \Big|^p dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{\omega_o} r^{p(\beta-1)+1} \Big| \frac{1}{\omega_o} \int_0^{\omega_o} \Big(\int_\varphi^\omega \frac{\partial u(r,\psi)}{\partial \psi} \, d\psi \Big) d\varphi \Big|^p d\omega\, dr$$

$$\le c \int_0^\infty \int_0^{\omega_o} r^{p(\beta-1)+1} \Big| \frac{\partial u(r,\psi)}{\partial \psi} \Big|^p d\psi\, dr \le c \cdot \int_K r^{p\beta} |\nabla u|^p \, dx.$$

2.1. Der Fall l=1

Nach Lemma 4 existiert zu jeder Funktion $u \in W^1_{p,\beta}(K)$ eine Funktion $\mathring{u} \in W^1_{p,\beta+1/p}(R_+) \subset W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$, so daß $u - \mathring{u} \in V^1_{p,\beta}(K)$ ist,

wenn man $\mathring{u}$ als Funktion über K auffaßt. Aus Lemma 3 folgt dann auch $u - \mathcal{K}\mathring{u} \in V^1_{p,\beta}(K)$.

Wir führen nun folgende Äquivalenzrelation im Raum $W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ ein:

$$f \overset{\beta}{\sim} g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |f(r) - g(r)|^p \, dr < \infty .$$

Satz 1: Zu jeder Funktion $u \in W^1_{p,\beta}(K)$ existiert eine Funktion $u_o \in W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$, so daß

$$u - \mathcal{K}u_o \in V^1_{p,\beta}(K)$$

ist, wenn man $\mathcal{K}u_o$ als Funktion über K auffaßt. Die Funktion u_o aus dieser Darstellung ist dabei eindeutig bestimmt bis auf die Äquivalenzrelation $\overset{\beta}{\sim}$.

Beweis: Die Existenz einer solchen Funktion u_o ist bereits nachgewiesen. Wir beweisen die Eindeutigkeit. Sind u_o und v_o zwei Funktionen aus $W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ mit $u - \mathcal{K}u_o \in V^1_{p,\beta}(K)$ und $u - \mathcal{K}v_o \in V^1_{p,\beta}(K)$, dann ist $\mathcal{K}(u_o - v_o) \in V^1_{p,\beta}(K)$ und damit nach Lemma 3 $\int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |u_o(r) - v_o(r)|^p \, dr < \infty$, d. h. $u_o \overset{\beta}{\sim} v_o$. Ist andererseits $u - \mathcal{K}u_o \in V^1_{p,\beta}(K)$ und $u_o \overset{\beta}{\sim} v_o$, dann folgt aus Lemma 3 auch $u - \mathcal{K}v_o \in V^1_{p,\beta}(K)$, und der Satz ist bewiesen.

Bemerkung 2: Wir betrachten den Raum der durch die Äquivalenzrelation $\overset{\beta}{\sim}$ in $W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ gebildeten Äquivalenzklassen in den verschiedenen Fällen $\beta \leq -2/p$, $\beta > -2/p+1$, $-2/p < \beta < -2/p+1$ und $\beta = -2/p+1$.

a) $\beta \leq -2/p$ oder $\beta > -2/p+1$.

Für $g \in W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ folgt dann aus der Hardyschen Ungleichung (s. z. B. /9/) $\mathcal{K}g \in W^1_{p,\beta+1/p}(R_+) \subset W^o_{p,\beta-1+1/p}(R_+)$, woraus sich nach Lemma 3 $\int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |g(r)|^p \, dr < \infty$ ergibt, d. h., es ist $g \overset{\beta}{\sim} 0$.

Der Raum der durch $\overset{\beta}{\sim}$ gebildeten Äquivalenzklassen hat also die Dimension 0, und man kann in Satz 1 die Funktion u_0 durch 0 ersetzen.

b) $-2/p < \beta < -2/p+1$.
In diesem Fall existiert zu jeder Funktion $g \in W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ eine Konstante $c = g(0) = (\mathcal{X}g)(0)$, für die nach der Hardyschen Ungleichung

$$\int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |(\mathcal{X}g)(r) - c|^p \, dr < \infty$$

und damit nach Lemma 3 $\int_0^\infty r^{p(\beta-1)+1} |g(r) - c|^p \, dr < \infty$,
d. h. $g \overset{\beta}{\sim} c$ ist.
Der Raum der durch $\overset{\beta}{\sim}$ gebildeten Äquivalenzklassen hat also die Dimension 1, und man kann in Satz 1 die Funktion u_0 durch den Wert von u an der Stelle x=0 ersetzen.

c) $\beta = -2/p+1$.
Der Raum der durch $\overset{\beta}{\sim}$ in $W^{1-1/p}_{p,\beta}(R_+)$ gebildeten Äquivalenzklassen hat die Dimension ∞, denn die Funktion

$$u_1(r) = \chi(r) \log|\log r|,$$
$$u_2(r) = \chi(e\, r) \log\log|\log r|,$$
$$u_3(r) = \chi(e^e\, r) \log\log\log|\log r|,$$
$$\vdots$$

($\chi \in C_0^\infty(\overline{R_+})$ ist hierbei eine Ausschneidungsfunktion mit $\operatorname{supp}\chi \subset [0,1)$, $\chi = 1$ in $(0,\frac{1}{2})$)
gehören zu verschiedenen linear unabhängigen Äquivalenzklassen.

2.2. Der Fall $l > 1$

Nach /5/ liegt für $\beta \neq -2/p$ oder $\beta > l-2/p$ jede Funktion u aus $W^l_{p,\beta}(K)$ auch in $V^l_{p,\beta}(K)$. Für $s-2/p < \beta < s+1-2/p$ $(s=0,1,\ldots,l-1)$ existieren Konstanten

$$c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x_1^i \partial x_2^j}\Big|_{x=0} \quad (i+j \leq l-s-1), \text{ so daß } u - \sum_{i+j=0}^{l-s-1} c_{ij} \frac{x_1^i}{i!} \frac{x_2^j}{j!} \in V^l_{p,\beta}(K)$$

ist.

Wir betrachten nun den Fall $\beta = s-2/p$ mit $s \in \{1,\dots,l\}$.
Für $i+j \leq l-s-1$ existieren dann nach /5/ die Werte

$$c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x_1^i \, \partial x_2^j}\Big|_{x=o}.$$ Wie in 2.1 definieren wir

$$\mathring{u}_{ij}(r) = \frac{1}{\omega_o} \int_0^{\omega_o} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x_1^i \, \partial x_2^j} \, d\omega.$$

Lemma 5: Es sei $u \in W^l_{p,s-2/p}(K)$ $(s \in \{1,\dots,l\})$. Dann gilt für $\mu+\nu \leq l$ stets

$$\int_K r^{p(s-2/p-l+\mu+\nu)} \Big| \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^\mu \, \partial x_2^\nu} - \sum_{i+j=o}^{l-s-1-\mu-\nu} c_{i+\mu,j+\nu} \frac{x_1^i \, x_2^j}{i! \, j!} - \sum_{i+j=l-s-\mu-\nu} (\mathcal{K}\mathring{u}_{i+\mu,j+\nu})(r) \frac{x_1^i \, x_2^j}{i! \, j!} \Big|^p dx \leq c \|u\|^p_{W^l_{p,s-2/p}(K)} \qquad (3)$$

(im Fall $\mu+\nu > l-s$ entfallen die beiden Summen in (3)).

Beweis: Aus $u \in W^l_{p,s-2/p}(K)$ folgt zunächst nach der Hardyschen Ungleichung $u \in W^{l-s+j}_{p,j-2/p}(K)$ für $j = 1,\dots,s$, d. h., (3) gilt für $\mu+\nu > l-s$.
Für $\mu+\nu = l-s$ gilt nach Lemma 3 und Lemma 4

$$\int_K r^{-2} \Big| \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^\mu \, \partial x_2^\nu} - \mathcal{K}\mathring{u}_{\mu\nu} \Big|^p dx \leq c \Big\| \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^\mu \, \partial x_2^\nu} \Big\|^p_{W^1_{p,1-2/p}(K)}$$

$$\leq c \|u\|^p_{W^l_{p,s-2/p}(K)}.$$

Wir nehmen nun dan, (3) sei für $\mu+\nu = k$ $(k \leq l-s)$ bewiesen, und beweisen diese Ungleichung dann für $\mu+\nu = k-1$.
Für $\mu+\nu = l-s-1$ nimmt

$$A := \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^\mu \, \partial x_2^\nu} - \sum_{i+j-o}^{l-s-1-\mu-\nu} c_{i+\mu,j+\nu} \frac{x_1^i \, x_2^j}{i! \, j!} - \sum_{i+j=l-s-\mu-\nu} \mathcal{K}\mathring{u}_{i+\mu,j+\nu} \frac{x_1^i \, x_2^j}{i! \, j!}$$

an der Stelle $x_1 = x_2 = 0$ den Wert 0 an. Nach der Hardyschen Ungleichung gilt dann

$$\int_K r^{p(s-2/p-l+\mu+\nu)} |A|^p \, dx \leq c \int_K r^{p(s-2/p-l+\mu+\nu+1)} |\nabla A|^p \, dx.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung erhält man dabei unter Benutzung von Lemma 3

$$\int_K r^{p(s-2/p-1+\mu+\nu+1)} |\nabla A|^p \, dx \leq c(\|u\|^p_{W^1_{p,s-2/p}(K)} + \|u\|^p_{W^{1-s+1}_{p,1-2/p}(K)}),$$

d. h. $\int_K r^{p(s-2/p-1+\mu+\nu)} |A|^p \, dx \leq c \|u\|^p_{W^1_{p,s-2/p}(K)}$, womit das Lemma bewiesen ist.

Satz 2: Es sei $u \in W^1_{p,s-2/p}(K)$ $(s \in \{1,\dots,1\})$. Dann existieren Konstanten c_{ij} $(i+j \leq 1-s-1)$ und Funktionen $u_{ij} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$ $(i+j=1-s)$ derart, daß

$$u - \sum_{i+j=0}^{1-s-1} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} - \sum_{i+j=1-s} (\mathcal{K} u_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} \in V^1_{p,\beta}(K)$$

ist. Die Konstanten c_{ij} aus dieser Darstellung sind dabei eindeutig bestimmt $\left(c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x_1^i \, \partial x_2^j}\Big|_{x=0}\right)$, während die Funktionen u_{ij} eindeutig bestimmt sind bis auf die Äquivalenzrelation $\overset{1-2/p}{\sim}$ $(u_{ij} \overset{1-2/p}{\sim} \mathring{u}_{ij})$.

Beweis: Die Existenz solcher Konstanten c_{ij} und Funktionen u_{ij} folgt bereits aus Lemma 5. Um die Eindeutigkeit zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß die Funktion

$$v = \sum_{i+j=0}^{1-s-1} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \sum_{i+j=1-s} (\mathcal{K} u_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!}$$

mit $u_{ij} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$ genau dann in $V^1_{p,s-2/p}(K)$ liegt, wenn $c_{ij} = 0$ und $u_{ij} \overset{1-2/p}{\sim} 0$ ist. Aus $v \in V^1_{p,s-2/p}(K)$ folgt $\frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^\mu \, \partial x_2^\nu} \in V^s_{p,s-2/p}(K) \subset V^0_{p,-2/p}(K)$ für $\mu+\nu = 1-s$. Unter Benutzung von Lemma 3 erhält man hieraus $u_{\mu\nu} \overset{1-2/p}{\sim} 0$ für $\mu+\nu = 1-s$ und damit $\sum_{i+j=1-s} (\mathcal{K} u_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} \in V^1_{p,s-2/p}(K)$.

Mittels vollständiger Induktion kann man nun analog beweisen, daß für $i+j \leq l-s-1$ stets $c_{ij} = 0$ ist, falls $v \in V^l_{p,s-2/p}(K)$ gilt.
Aus $c_{ij} = 0$ und $u_{ij} \overset{1-2/p}{\sim} 0$ folgt andererseits leicht $v \in V^l_{p,s-2/p}(K)$. Der Satz ist damit bewiesen.

3. Der Zusammenhang zwischen den Räumen der Randwerte

Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang zwischen den Räumen $W^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma^{\pm})$ und $V^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma^{\pm})$ im Fall $\beta = s-2/p$ für $s = 1,\dots,l$.
Es sei $u \in W^{l-1/p}_{p,s-2/p}(\gamma^+)$. Dann existiert eine Funktion $v \in W^l_{p,s-2/p}(K)$ mit $v = u$ auf γ^+. Nach Satz 2 ist

$$v = \sum_{i+j=o}^{l-s-1} d_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\,j!} - \sum_{i+j=l-s} (\mathcal{K} v_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\,j!} + v'$$

mit $d_{ij} = \text{const.}$, $v_{ij} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$, $v' \in V^l_{p,s-2/p}(K)$, d. h.

$$u(r) = v(r\cos\omega_o, r\sin\omega_o) = \sum_{i+j=o}^{l-s-1} d_{ij} \cos^i\omega_o \sin^j\omega_o \frac{r^{i+j}}{i!\,j!}$$

$$+ \sum_{i+j=l-s} (\mathcal{K} v_{ij})(r) \cos^i\omega_o \sin^j\omega_o \frac{r^{i+j}}{i!\,j!} + v'$$

$$= \sum_{k=o}^{l-s-1} c_k \frac{r^k}{k!} + (\mathcal{K} u_{l-s})(r) \frac{r^{l-s}}{(l-s)!} + v' \qquad (4)$$

mit $c_k = \sum_{i=o}^{k} \binom{k}{i} d_{i,k-i} \cos^i\omega_o \sin^{k-i}\omega_o$,

$$u_{l-s} = \sum_{i=o}^{l-s} \binom{l-s}{i} v_{i,l-s-i} \cos^i\omega_o \sin^{l-s-i}\omega_o.$$

Satz 3: Es sei $u \in W^{l-1/p}_{p,s-2/p}(R_+)$ $(s \in \{1,\dots,l\})$. Dann existieren Konstanten $c_1,\dots,c_{l-s-1}$ und eine Funktion $u_{l-s} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$ derart, daß

$$u - \sum_{k=o}^{l-s-1} c_k \frac{r^k}{k!} (\mathcal{K} u_{l-s})(r) \frac{r^{l-s}}{(l-s)!} \in V^{l-1/p}_{p,s-2/p}(R_+) \qquad (5)$$

ist.

Die Konstanten c_k aus dieser Darstellung sind dabei eindeutig durch u bestimmt ($c_k = u^{(k)}(0)$ für $k = 0,1,\dots,l-s-1$), während die Funktion u_{l-s} eindeutig bestimmt ist bis auf die Äquivalenzrelation $\overset{1-2/p}{\sim}$ ($u_{l-s} \overset{1-2/p}{\sim} \overset{\circ}{u}{}^{(l-s)}$).

Beweis: Die Existenz der Konstanten c_k und der Funktion u_{l-s} ist bereits bewiesen, s. (4). Wir haben noch zu zeigen, daß aus (5) $c_k = u^{(k)}(0)$ und $u_{l-s} \overset{1-2/p}{\sim} u^{(l-s)}$ folgt.

Aus (5) und (1) folgt zunächst

$$\int_0^\infty r^{p(s-l+k)-1} \Big| u^{(k)}(r) - \frac{d^k}{dr^k}\Big(\sum_{j=0}^{l-s-1} c_j \frac{r^j}{j!} + (\mathcal{K}u_{l-s})(r)\frac{r^{l-s}}{(l-s)!}\Big)\Big|^p \, dr < \infty \tag{6}$$

für $k = 0,1,\dots,l-s$. Unter Berücksichtigung von Lemma 3 erhält man hieraus für $k = l-s$

$$\int_0^\infty r^{-1} |u^{(l-s)}(r) - u_{l-s}(r)|^p \, dr < \infty, \text{ d. h. } u_{l-s} \overset{1-2/p}{\sim} u^{(l-s)}.$$

Für $k < l-s$ folgt aus (6)

$$\int_0^\infty r^{p(s-l+k)-1} \Big| u^{(k)}(r) - c_k - \sum_{j=k+1}^{l-s-1} c_j \frac{r^{j-k}}{(j-k)!} - \frac{d^k}{dr^k}(\mathcal{K}u_{l-s})(r)\frac{r^{l-s}}{(l-s)!}\Big|^p \, dr < \infty,$$

d. h. $\int_0^1 r^{-1-\varepsilon} |u^{(k)}(r) - c_k|^p \, dr < \infty$, wobei ε eine genügend kleine positive Zahl ist. Folglich ist $u^{(k)}(0) = c_k$, womit der Satz bewiesen ist.

4. Gewichtete Sobolevräume in beschränkten ebenen Gebieten mit Ecken

Es sei nun G ein beschränktes ebenes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂G. Die Ecken von G bezeichnen wir mit $E_1,\dots,E_n$.

Dann ist $\partial G \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ Vereinigung von n glatten Kurvenbögen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Dabei verbinde γ_i E_i mit E_{i+1} für $i = 1, \ldots, n-1$ bzw. E_n mit E_1 für $i = n$. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Seiten sei von 0 verschieden. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß die Seiten γ_i in einer ε-Umgebung der Ecken E_j mit Geraden übereinstimmen.

Analog zu 1. definieren wir den Raum $V^l_{p,\beta}(G)$ als Vervollständigung von $C_0^\infty(\overline{G} \setminus \cup E_j)$ bez. der Norm

$$\|u\|_{V^l_{p,\beta}(G)} = \left(\int_G \sum_{|\alpha| \le l} \varrho^{p(\beta-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}$$

und den Raum $W^l_{p,\beta}(G)$ als Menge aller Funktionen aus $W^l_{p,loc}(G)$, für die die Norm

$$\|u\|_{W^l_{p,\beta}(G)} = \left(\int_G \sum_{|\alpha| = l} \varrho^{p\beta} |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}$$

kleiner als unendlich ist. Hierbei ist $\varrho = \mathrm{dist}(x, \cup E_j)$. $V^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma_j)$ und $W^{l-1/p}_{p,\beta}(\gamma_j)$ bezeichnen wieder die Räume der Spuren von Funktionen aus $V^l_{p,\beta}(G)$ bzw. $W^l_{p,\beta}(G)$ auf γ_j.

O. B. d. A. sei $E_1 = 0$. $\psi_i \in C_0^\infty(\overline{G})$ seien Ausschneidungsfunktionen mit $\psi_i(x) = 1$ für $\mathrm{dist}(x, E_i) < \varepsilon/2$, $\psi_i(x) = 0$ für $\mathrm{dist}(x, E_i) > \varepsilon$. Dann gelten folgende Sätze:

Satz 2': Es sei $u \in W^l_{p,\beta}(G)$ mit $s-2/p < \beta \neq s+1-2/p$ $(s \in \{0,1,\ldots,l-1\})$. Dann existieren Konstanten c_{ij} und Funktionen $u_{ij} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$ derart, daß

$$\psi_1 u - \psi_1 \sum_{i+j=0}^{l-s-1} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} \in V^l_{p,\beta}(G) \text{ für } s-2/p < \beta < s+1-2/p \text{ bzw.}$$

$$\psi_1 u - \psi_1 \left(\sum_{i+j=0}^{l-s-2} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \sum_{i+j=l-s-1} (\mathfrak{F} u_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!}\right) \in V^l_{p,\beta}(G)$$

für $\beta = s+1-2/p$ ist. Die Konstanten c_{ij} sind dabei eindeutig durch u bestimmt, während die Funktionen u_{ij} eindeutig bestimmt sind bis auf die Äquvalenzrelation $\overset{1-2/p}{\sim}$. Ein entsprechendes Ergebnis gilt auch für die Funktionen $\psi_2 u, \ldots, \psi_n u$.

Satz 3': Es sei $u \in W_{p,\beta}^{l-1/p}(\gamma_1)$ mit $s-2/p < \beta \leq s+1-2/p$ ($s \in \{0,1,\ldots,l-1\}$). Dann existieren Konstanten c_k und eine Funktion $u_{l-s-1} \in W_{p,1-2/p}^{1-1/p}(R_+)$ derart, daß

$$\psi_1|_{\gamma_1} u - \psi_1|_{\gamma_1} \sum_{k=0}^{l-s-1} c_k \frac{r^k}{k!} \in V_{p,\beta}^{l-1/p}(\gamma_1) \quad \text{für } s-2/p < \beta < s+1-2/p$$

bzw.

$$\psi_1|_{\gamma_1} u - \psi_1|_{\gamma_1} \Big(\sum_{k=0}^{l-s-2} c_k \frac{r^k}{k!} + (\mathcal{K} u_{l-s-1})(r) \frac{r^{l-s-1}}{(l-s-1)!} \Big) \in V_{p,\beta}^{l-1/p}(\gamma_1)$$

für $\beta = s+1-2/p$ ist. Dabei sind c_k und u_{l-s-1} wieder eindeutig bzw. eindeutig bis auf $\overset{1-2/p}{\sim}$ bestimmt.

Wir geben nun zwei Anwendungen für elliptische Randwertaufgaben an. Gegeben sei die elliptische Randwertaufgabe

$$Lu = \sum_{\mu+\nu \leq 2m} a_{\mu\nu}(x) \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^{\mu} \partial x_2^{\nu}} = f \quad \text{in } G, \tag{7}$$

$$B_{jq} u = \sum_{\mu+\nu \leq m_{jq}} b_{jq\mu\nu}(x) \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x_1^{\mu} \partial x_2^{\nu}} = g_{jq} \quad \text{auf } \gamma_j \tag{8}$$

$$(j=1,\ldots,n;\ q=1,\ldots,m).$$

Satz 4: Die Funktion $u \in W_{p,\beta}^{l+2m}(G)$ sei Lösung der Aufgabe (7), (8), und es gelte $f \in W_{p,\beta+k}^{l+k}(G)$, $g_{jq} \in W_{p,\beta+k}^{l+k+2m-m_{jq}-1/p}(\gamma_j)$. Dann ist $u \in W_{p,\beta+k}^{l+k+2m}(G)$.

Beweis: Es genügt, den Satz für $k = 1$ zu beweisen. Durch vollständige Induktion erhält man die Aussage des Satzes dann auch für beliebiges k. Wir können uns ferner auf den Fall $s-2/p < \beta \leq s+1-2/p$ mit $s \in \{0,1,\ldots,l+2m-1\}$ beschränken, denn

für $\beta \leq -2/p$ und $\beta > l+2m-2/p$ ist $W^{l+2m}_{p,\beta}(G) = V^{l+2m}_{p,\beta}(G)$, und Satz 4 folgt bereits aus /4/.

Es sei zunächst $\beta = s+1-2/p$. Nach Satz 2' haben $\psi_1 u$ und $\psi_1 f$ die Gestalt

$$\psi_1 u = \psi_1 \sum_{i+j=o}^{l+2m-s-2} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \psi_1 \sum_{i+j=l+2m-s-1} \mathcal{K} u_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + u'$$

mit $u' \in V^{l+2m}_{p,\beta}(G)$, $u_{ij} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$ und

$$\psi_1 f = \psi_1 \sum_{i+j=o}^{l-s-2} c'_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \psi_1 \sum_{i+j=l-s-1} (\mathcal{K} f_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + f'$$

mit $f' \in V^{l+1}_{p,\beta+1}(G)$, $f_{ij} \in W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$. Damit erhält man

$$Lu' = L(\psi_1 u) + L(\psi_1 \sum_{i+j=o}^{l+2m-s-2} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \psi_1 \sum_{i+j=l+2m-s-1} \mathcal{K} u_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!})$$

$$= \psi_1 f + \psi_1 \Big(\sum_{i+j=o}^{l-s-1} d_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \sum_{i+j=l-s-1} \mathcal{K} v_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!}\Big) + f''$$

mit $f'' \in V^{l+1}_{p,\beta+1}(G)$. Hierbei sind d_{ij} gewisse Konstanten, die sich aus den Koeffizienten c_{ij} und $a_{\mu\nu}$ ergeben, und v_{ij} sind Funktionen aus $W^{1-1/p}_{p,1-2/p}(R_+)$. Dabei wurde berücksichtigt, daß alle Terme, die Ableitungen von ψ_1 enthalten, in der Umgebung der Ecken verschwinden und daß die Funktionen $x_1^i x_2^j$ bzw. $(\mathcal{K} u_{\mu\nu})(r)\, x_1^i x_2^j$ für $i+j \geq l-s$ zu $V^{l+1}_{p,\beta+1}(G)$ gehören. Unter Benutzung der Darstellung für $\psi_1 f$ erhält man

$$Lu' = \psi_1 \Big(\sum_{i+j=o}^{l-s-2} (c'_{ij}+d_{ij}) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \sum_{i+j=l-s-1} (\mathcal{K} f_{ij}+d_{ij}+\mathcal{K} v_{ij}) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!}\Big)$$

$$+ f' + f''.$$

Da $Lu'-f'-f'' \in V^{l}_{p,\beta}(G)$ ist, muß nach Satz 2 $c'_{ij} + d_{ij} = 0$ für $i+j \leq l-s-2$ und $f_{ij} + d_{ij} + v_{ij} \overset{1-2/p}{\sim} 0$ für $i+j = l-s-1$ sein. Man erhält also $Lu' \in V^{l+1}_{p,\beta+1}(G)$.

Analog ist $B_{jq}u' \in V_{p,\beta+1}^{l+1+2m-m_{jq}-1/p}(\gamma_j)$, woraus nach /4/

$u' \in V_{p,\beta+1}^{l+1+2m}(G)$, d. h. $\psi_1 u \in W_{p,\beta+1}^{l+1+2m}(G)$ folgt. Entsprechend ist

$\psi_j u \in W_{p,\beta+1}^{l+1+2m}(G)$ für $j = 2,\ldots,n$ und damit auch $u \in W_{p,\beta+1}^{l+1+2m}(G)$.

Der Beweis für den Fall $s-2/p < \beta < s+1-2/p$ verläuft völlig analog.

Wir untersuchen nun folgende Frage:

Gegeben seien Funktionen $g_{jq} \in W_{p,\beta}^{l-m_{jq}-1/p}(\gamma_j)$ $(j=1,\ldots,n;$ $q=1,\ldots,m;$ $l \geq \max m_{jq}+1)$. Welche Bedingungen müssen an diese Funktionen gestellt werden, damit eine Funktion $u \in W_{p,\beta}^{l}(G)$ existiert mit $B_{jq}u = g_{jq}$ auf γ_j für $j = 1,\ldots,n;$ $q = 1,\ldots,m$.

Dieses Problem ist lokaler Natur, es genügt also, die Frage zu untersuchen, wann eine Funktion $u \in W_{p,\beta}^{l}(G)$ existiert mit

$$B_{iq}u = \psi_i\, g_{iq} \text{ auf } \gamma_i,\ B_{jq}u = \psi_i\, g_{jq} \text{ auf } \gamma_j \quad (q=1,\ldots,m),$$

wobei $\overline{\gamma}_i \cap \overline{\gamma}_j = E_i$ sei (o.B.d.A. $i = 1$, $j = n$).

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, daß die Operatoren B_{jq} nur aus ihren Hauptteilen bestehen und ihre Koeffizienten konstant sind.

Für $\beta \leq -2/p$ und $\beta > 1-2/p$ brauchen nach /6/ keine zusätzlichen Bedingungen an die Funktionen g_{jq} gestellt zu werden.

Es sei nun $\beta = s+1-2/p$ $(s \in \{0,1,\ldots,l-1\})$. Dann hat jede Funktion $u \in W_{p,\beta}^{l}(G)$ die Darstellung

$$u = \sum_{i+j=0}^{l-s-2} c_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + \sum_{i+j=l-s-1} (\mathcal{K}u_{ij})(r) \frac{x_1^i x_2^j}{i!\, j!} + u'$$

mit $u' \in V_{p,\beta}^{l}(G)$, $u_{ij} \in W_{p,1-2/p}^{1-1/p}(R_+)$. Damit erhält man

$$B_{jq}u = \sum_{i+i'=0}^{l-s-2-m_{jq}} \Big(\sum_{\mu+\nu=m_{jq}} b_{jq\mu\nu} c_{i+\mu,i'+\nu} \Big) \frac{x_1^i x_2^{i'}}{i!\, i'!} + \sum_{i+i'=l-s-1-m_{jq}} \Big(\sum_{\mu+\nu=m_{jq}} b_{jq\mu\nu} \mathcal{K}u_{i+\mu,i'+\nu} \Big) \frac{x_1^i x_2^{i'}}{i!\, i'!} + u'_{jq} \tag{9}$$

mit $u'_{jq} \in V^{l-m_{jq}}_{p,\beta}(G)$ (u'_{jq} enthält auch solche Terme, in denen Ableitungen von $\mathcal{K}u_{ii}$, als Faktoren auftreten).

Schreibt man die Funktionen $\psi_1 g_{1q}$ und $\psi_1 g_{nq}$ in der Form

$$\psi_1 g_{jq} = \sum_{k=0}^{l-s-2-m_{jq}} g_{jq}^{(k)}(0)\,\frac{r^k}{k!} + \mathcal{K} g_{jq}^{(l-s-1-m_{jq})}\,\frac{r^{l-s-1-m_{jq}}}{(l-s-1-m_{jq})!} + g'_{jq}$$

mit $g'_{jq} \in V^{l-m_{jq}-1/p}_{p,\beta}(\gamma_j)$, dann führen die Gleichungen $B_{1q}u|_{\gamma_1} = \psi_1\, g_{1q}$ und $B_{nq}u|_{\gamma_1} = \psi_1\, g_{nq}$ (die Spuren auf γ_1 bzw. γ_n in einer Umgebung von E_1 erhält man, indem man in (9) $x_1 = r$, $x_2 = 0$ bzw. $x_1 = r\cos\omega_o$, $x_2 = r\sin\omega_o$ setzt) nach Satz 3 zu einem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{\mu+\nu=m_{1q}} b_{1q\mu\nu}\, c_{k+\mu,\nu} = g_{1q}^{(k)}(0) \quad (k=0,1,\ldots,l-s-2-m_{1q}),$$

$$\sum_{i=0}^{k}\Big(\sum_{\mu+\nu=m_{nq}} b_{nq\mu\nu}\binom{k}{i}\cos^i\omega_o \sin^{k-i}\omega_o\, c_{i+\mu,k-i+\nu} = g_{nq}^{(k)}(0) \quad (k=0,1,\ldots,l-s-2-m_{nq}),\tag{10}$$

$$\sum_{\mu+\nu=m_{1q}} b_{1q\mu\nu}\, u_{l-s-1-m_{1q}+\mu,\nu} \overset{1-2/p}{\sim} g_{1q}^{(l-s-1-m_{1q})},$$

$$\sum_{i=0}^{l-s-1-m_{nq}}\ \sum_{\mu+\nu=m_{nq}} b_{nq\mu\nu}\binom{l-s-1-m_{nq}}{i}\cos^i\omega_o \sin^{l-s-1-m_{nq}}\omega_o\, u_{i+\mu,l-s-1-m_{nq}-i+\nu} \overset{1-2/p}{\sim} g_{nq}^{(l-s-1-m_{nq})}\tag{10'}$$

($q=1,\ldots,m$) mit den Unbekannten c_{ij} und u_{ij}.

Als Verträglichkeitsbedingung zwischen den Funktionen g_{1q} und g_{nq} erhält man also die Forderung, daß das Gleichungssystem (10), (10') lösbar ist. Im Fall $s-2/p < \beta < s+1-2/p$ stehen dabei anstelle von (10') Gleichungen der Form (10). Die Verträglichkeitsbedingungen lassen sich selbst wieder als lineare Beziehungen zwischen den Werten $g_{jq}^{(k)}(0)$ ($k=0,1,\ldots,l-s-2-m_{jq}$) bzw. den Funktionen $g_{jq}^{(l-s-1-m_{jq})}$ schreiben. Aus der Lösbarkeit der

Aufgabe $B_{jq}u = g_{jq}$ auf γ_j $(j=1,\dots,n;\ q=1,\dots,m)$ in der Klasse der Räume $V^1_{p,\beta}(G)$ (s. /6/) folgt, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Beispiel: Gegeben seien die Funktionen $g_1 \in W_2^{1/2}(\gamma_1)$ und $g_n \in W_2^{3/2}(\gamma_n)$. Wir stellen die Frage, unter welchen Bedingungen eine Funktion $u \in W_2^2(G)$ existiert mit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial u}{\partial x_2} = g_1 \text{ auf } \gamma_1,\ u = g_n \text{ auf } \gamma_n.$$

Das Gleichungssystem (10), (10') hat in diesem Fall die Gestalt

$$c_0 = g_n(0),$$

$$u_{01} \overset{Q}{\sim} g_1,$$

$$u_{01} \sin \omega_0 + u_{10} \cos \omega_0 \overset{Q}{\sim} g_n'.$$

Im Fall $\omega_0 \neq \pi/2$, $\omega_0' \neq 3\pi/2$ treten also keine Verträglichkeitsbedingungen auf, und im Fall $\omega_0 = \pi/2$ bzw. $\omega_0 = 3\pi/2$ erhält man die Bedingung $g_1 \overset{Q}{\sim} g_n'$ bzw. $g_1 \overset{Q}{\sim} -g_n'$, was gleichbedeutend ist mit

$$\int_0^\delta r^{-1} |g_1(r) - g_n'(r)|^2 \, dr < \infty \text{ bzw.}$$

$$\int_0^\delta r^{-1} |g_1(r) + g_n'(r)|^2 \, dr < \infty.$$

Hierbei ist δ eine beliebig kleine positive reelle Zahl.
Zu derartigen Ergebnissen gelangte auch P. Grisvard in /8/.

Literatur

/1/ Kondratjev, W. A.: Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen in Gebieten mit konischen oder Winkelecken. (russ.) Trudy Moskov. Mat. Obšč. 26, 209 - 292 (1967)

/2/ Kondratjev, W. A., und Olejnik, O. A.: Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen in nichtglatten Gebieten. (russ.) Uspechi Mat. Nauk 38, 2 (230) (1983)

/3/ Maz'ja, W. G., und Plamenevskij, B. A.: Über die Koeffizienten in der Asymptotik von Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit konischen Punkten. (russ.) Math. Nachr. 76, 29 - 60 (1977)

/4/ - , -: Abschätzungen in L_p und Hölderklassen und das Maximumprinzip von Miranda/Agmon für Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit singulären Randpunkten. (russ.) Math. Nachr. 81, 25 - 82 (1978)

/5/ - , -: Gewichtete Räume mit inhomogenen Normen und Randwertaufgaben in Gebieten mit konischen Punkten. (russ.) Vorträge der Tagung "Elliptische Differentialgleichungen", 10. - 16. 10. 1977, Rostock 1978

/6/ - , -: L_p-Abschätzungen von Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten. (russ.) Trudy Moskov. Mat. Obšč. 37, 49 - 93 (1978)

/7/ Zajaczkowskij, W., und Solonnikow, W. A.: Über das Neumannproblem für elliptische Gleichungen 2. Ordnung in Gebieten mit Kanten. (russ.) Sapiski naučnych seminarov LOMI 127, Leningrad (1983)

/8/ Grisvard, P.: Boundary value problems in non-smooth domains. University of Maryland, Lecture notes 19 (1980)

/9/ Kufner, A.: Weighted Sobolev spaces. Leipzig 1980

eingegangen: 11. 09. 1985

Anschrift des Verfassers:

Dr. J. Roßmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 29, 99 - 111 (1986)

60F05
60G55

Udo Lorz

Sekundärgrößen Poissonscher Punktprozesse - Grenzwertsätze und Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit

1. Poissonsche Punktprozesse

Sei (X,d) ein vollständiger separabler metrischer Raum und $\mathfrak{X}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von X. Mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir den Ring der beschränkten Mengen $B \in \mathfrak{X}$. N sei die Menge der Maße Λ auf dem meßbaren Raum $(X,\mathfrak{X})$, die auf $\mathfrak{B}$ endlich sind. Mit M bezeichnen wir die Menge der ganzzahligen Maße $\varphi \in N$. Weiterhin sei $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ und $\mathfrak{M}$ die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von M, so daß für alle $B \in \mathfrak{B}$ die Abbildungen

$$p_B : M \to \mathbb{N} \text{ mit } p_B(\varphi) = \varphi(B) \tag{1.1}$$

meßbar sind. Ist P ain Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem meßbaren Raum $(M,\mathfrak{M})$, so heißt der Wahrscheinlichkeitsraum $(M,\mathfrak{M},P)$ Punktprozeß. Der meßbare Raum $(X,\mathfrak{X})$ wird als Phasenraum des Punktprozesses $(M,\mathfrak{M},P)$ bezeichnet.
Ein Punktprozeß $(M,\mathfrak{M},P_\Lambda)$ heißt Poissonscher Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß $\Lambda \in N$, falls für jedes $B \in \mathfrak{B}$ die Zufallsgröße p_B Poisson-verteilt mit dem Parameter $\Lambda(B)$ ist und für $n = 1,2,\ldots$ sowie beliebige disjunkte Mengen $B_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1,\ldots,n$, die Zufallsgrößen $p_{B_1},\ldots,p_{B_n}$ unabhängig sind. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_Λ heißt Poissonsches Verteilungsgesetz mit dem Intensitätsmaß Λ.

2. Sekundärgrößen Poissonscher Punktprozesse

Für einen meßbaren Raum $(C,\mathfrak{C})$ sei $L_0(\mathfrak{C})$ der Vektorraum der $(\mathfrak{L},\mathfrak{R})$-meßbaren Funktionen $m : C \to \mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wobei $\mathfrak{R}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Satz 2.1: Sei $(M, \mathfrak{M}, P_\Lambda)$ ein Poissonscher Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß Λ auf dem Phasenraum $(X, \mathfrak{X})$, und es gelte $\Lambda(X) < \infty$. Dann wird durch

$$[S(m)](\varphi) := \int_X m(x)\,\varphi(dx) \quad \text{für } m \in L_0(\mathfrak{X}) \tag{2.1}$$

eine lineare Abbildung von $L_0(\mathfrak{X})$ in $L_0(\mathfrak{M})$ definiert, und die charakteristische Funktion von S(m) hat die Gestalt:

$$f_{S(m)}(t) = \exp\left(\int_X (\exp(it\,m(x)) - 1)\,\Lambda(dx)\right).$$

Beweis: Wegen $\Lambda(X) < \infty$ ist $\varphi(X)$ P_Λ-f.s. endlich. Somit ist S(m) P_Λ-f.s. eine endliche Summe und die Definition von S korrekt. Die Linearität von S ist offensichtlich.
Aus $S(m) = p_B \in L_0(\mathfrak{M})$ (vgl. (1.1)) für $m = I_B$, $B \in \mathfrak{B}$, der üblichen Approximation, dem Satz von B. Levy und der Linearität von S folgt $S(m) \in L_0(\mathfrak{M})$ für alle $m \in L_0(\mathfrak{X})$. Für $m = I_B$, $B \in \mathfrak{B}$, ist $S(m) = p_B$ Poisson-verteilt mit dem Parameter $\Lambda(B)$, und die charakteristische Funktion hat die Gestalt

$$f_{S(m)}(t) = \exp(\Lambda(B)(\exp(it) - 1))$$

$$= \exp\left(\int_X (\exp(it\,I_B(x)) - 1)\,\Lambda(dx)\right).$$

Sei nun m eine einfache Funktion, d. h.

$$m = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot I_{B_j} \quad \text{mit } b_j \in \mathbb{R} \text{ und } B_j \in \mathfrak{B} \text{ für } j = 1,\ldots,n,$$

und o.B.d.A. gelte für $i \neq j$ $B_i \cap B_j = \emptyset$. Dann ist

$S(m) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot p_{B_j}$, d. h. Linearkombination unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsgrößen p_{B_j} mit dem Parameter $\Lambda(B_j)$, $j = 1,\ldots,n$. Für die charakteristische Funktion von S(m) gilt somit:

$$f_{S(m)}(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{P_{B_j}}(b_j t)$$

$$= \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \int_X (\exp(itb_j \cdot I_{B_j}(x)) - 1)\, \Lambda(dx)\Big)$$

$$= \exp\Big(\int_X (\exp(it \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot I_{B_j}(x)) - 1)\, \Lambda(dx)\Big).$$

Sei nun $m \in L_0(\mathcal{X})$ beliebig. Dann exisitert eine Folge $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L_0(\mathcal{X})$ einfacher Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} m_n(x) = m(x)$ für alle $x \in X$. Da $S(m)$ P_Λ -f.s. eine endliche Summe ist, gilt $S(m) = \lim_{n\to\infty} S(m_n)$ P_Λ-f.s., und die Folge der Verteilungsgesetze von $S(m_n)$ konvergiert für $n\to\infty$ schwach gegen das Verteilungsgesetz von $S(m)$. Somit gilt für die charakteristische Funktion

$$f_{S(m)}(t) = \lim_{n\to\infty} f_{S(m_n)}(t)$$

$$= \exp\Big(\lim_{n\to\infty} \int_X (\exp(it\, m_n(x)) - 1)\, \Lambda(dx)\Big),$$

und aufgrund von $|\exp(it\, m_n(x)) - 1| \leq 2$ für alle $x \in X$ und $n = 1,2,\ldots$ sowie $\Lambda(X) < \infty$ folgt mit Hilfe des Satzes von Lebesgue die Behauptung. q.e.d.

Für $m \in L_0(\mathcal{X})$ wird $S(m)$ als Sekundärgröße des Poissonschen Punktprozesses $(M, \mathfrak{M}, P_\Lambda)$ bezeichnet.

3. Unbegrenzt teilbare Verteilungsgesetze

Satz 3.1 (vgl. /3/): Ein Verteilungsgesetz P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ ist genau dann unbegrenzt teilbar (u.t.), wenn seine charakteristische Funktion in der Form

$$f(t) = \exp\Big(ict + \int_{\mathbb{R}} g(t,x)\, G(dx)\Big) \qquad (3.1)$$

dargestellt werden kann, wobei $c \in \mathbb{R}$, G ein endliches Maß ist und

$g(t,x) = (\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \frac{1+x^2}{x^2}$ gilt mit

$g(t,0) := -\frac{t^2}{2}$.

Jedes u.t. Verteilungsgesetz P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist somit durch das Tupel (c,G) in eindeutiger Weise bestimmt. Das endliche Maß G auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ wird als kanonisches Maß bezeichnet. Die Darstellung (3.1) heißt Levy-Chintschin-Formel.

Lemma 3.1: Für jedes $m \in L_0(\mathfrak{X})$ ist das Verteilungsgesetz der Sekundärgröße S(m) u. t. mit dem Tupel (c,G), wobei

$$c = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, H(dx) \text{ und } G(B) = \int_B x \cdot h(x)\, H(dx) \tag{3.2}$$

für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt. Dabei ist

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ und } H = \Lambda \circ m^{-1}. \tag{3.3}$$

Beweis: Wegen $|h(x)| \leq 1$ bzw. $|x \cdot h(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren die Integrale in (3.2). Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus den Sätzen 2.1. und 3.1. q.e.d.

Satz 3.2 (vgl. /3/): Sei Y eine reelle Zufallsgröße mit $E(Y^2) < \infty$. Das Verteilungsgesetz P von Y ist genau dann u.t., wenn seine charakteristische Funktion in der Form

$$f(t) = \exp(idt + \int_{\mathbb{R}} k(t,x)\, K(dx)) \tag{3.4}$$

dargestellt werden kann, wobei $d \in \mathbb{R}$, K ein endliches Maß ist und

$$k(t,x) = (\exp(itx) - 1 - itx) \frac{1}{x^2} \text{ gilt mit} \tag{3.5}$$

$$k(t,0) := -\frac{t^2}{2}. \tag{3.6}$$

Ist das Verteilungsgesetz P einer Zufallsgröße Y mit $E(Y^2) < \infty$ u. t., so ist P in eindeutiger Weise durch das Tupel (d,K) bestimmt, wobei (vgl. /3/, S. 83)

$$d = E(Y) \text{ und } K(\mathbb{R}) = V(Y) \tag{3.7}$$

ist. Das endliche Maß K auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ heißt wiederum kanonisches Maß, und die Darstellung (3.4) wird als Kolmogoroff-Formel bezeichnet.

Lemma 3.2: Für $m \in L_0(\mathcal{X})$ gelte $E(S^2(m)) < \infty$. Dann ist das u.t. Verteilungsgesetz der Sekundärgröße S(m) durch das Tupel (d,K) mit

$$d = \int_{\mathbb{R}} x\, H(dx) \text{ und } K(B) = \int_B x^2\, H(dx) \text{ für alle } B \in \mathcal{R} \tag{3.8}$$

(vgl. (3.3)) eindeutig bestimmt.

Beweis: Das kanonische Maß K aus der Kolmogoroff-Formel (3.4) berechnet sich (vgl. /3/, S. 83) durch

$$K(B) = \int_B (1+x^2)\, G(dx) = \int_B x^2\, H(dx) \text{ für alle } B \in \mathcal{R}$$

aus dem kanonischen Maß G der Levy-Chintschin-Formel (3.1) für die Darstellung der charakteristischen Funktion von S(m).

Insbesondere gilt in (3.7)

$$E(S(m)) = d = \int_{\mathbb{R}} x\, H(dx) = \int_X m(x)\, \Lambda(dx) =: e_1(m) \text{ und} \tag{3.9}$$

$$V(S(m)) = K(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} x^2\, H(dx) = \int_X m^2(x)\, \Lambda(dx) =: e_2(m). \tag{3.10}$$

q.e.d.

Die Existenz von $E(S^2(m))$ ist also äquivalent zur Existenz von $e_2(m)$.

4. Grenzwertsätze

Als Grenzverteilung schwach konvergenter Folgen u.t. Verteilungsgesetze sind nur u.t. Verteilungsgesetze möglich. Das Verteilungsgesetz δ_a auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, wobei wir für alle $B \in \mathcal{R}$ $\delta_a(B) := I_B(a)$ setzen, ist u. t. und durch das Tupel $(c,G) = (a,\mathcal{O})$ charakterisiert. Dabei bezeichnet $\mathcal{O}$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Die Standard-Normalverteilung N(0,1) ist ebenfalls u.t. und durch $(c,G) = (d,K) = (0,\delta_0)$ eindeutig bestimmt. Mit dem Grenzwertsatz für u.t. Verteilungsgesetze wird somit sowohl ein

schwaches Gesetz der großen Zahlen als auch ein zentraler Grenzwertsatz beweisbar.

Für $n = 1,2,\ldots$ sei $(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_n})$ ein Poissonscher Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß Λ_n auf dem Phasenraum $(X_n, \mathfrak{X}_n)$, und es gelte jeweils $\Lambda_n(X_n) < \infty$. Die Sekundärgrößen $S_n(m_n) \in L_0(\mathfrak{M}_n)$ seien analog zu (2.1) für $m_n \in L_0(\mathfrak{X}_n)$, $n = 1,2,\ldots$, definiert. Das u.t. Verteilungsgesetz P_n von $S_n(m_n)$ ist durch (c_n, G_n) charakterisiert, wobei c_n und G_n analog zu (3.2) mit $H_n = \Lambda_n \circ m_n^{-1}$ in (3.3) definiert sind. Weiterhin sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist das u.t. Verteilungsgesetz von $a_n S_n(m_n)$ durch (c_n', G_n') mit $H_n' = \Lambda_n \circ (a_n m_n)^{-1}$ bestimmt.

Die folgenden Grenzwertsätze ergeben sich unmittelbar aus dem Grenzwertsatz für u.t. Verteilungsgesetze (/3/).

Satz 4.1: Die Folge der Sekundärgrößen $a_n S_n(m_n)$, $n = 1,2,\ldots$, konvergiert genau dann für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n' = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(a_n x)\, H_n(dx) = a \text{ und} \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_{\mathbb{R}} x\, h(a_n x)\, H_n(dx) = 0. \tag{4.2}$$

Satz 4.2: Die Folge der Verteilungsgesetze von $a_n S_n(m_n) - c_n'$, $n = 1,2,\ldots$, konvergiert genau dann für $n \to \infty$ schwach gegen $N(0,1)$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_{\mathbb{R}} x\, h(a_n x)\, H_n(dx) = 1 \text{ und} \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_{(-\infty, y)} x\, h(a_n x)\, H_n(dx) = I_{(0,\infty)}(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Nun wollen wir uns einem wichtigen Spezialfall zuwenden und für $m_n \in L_0(\mathfrak{X}_n)$ die Existenz von $e_2(m_n)$ (vgl. (3.10)), $n = 1,2,\ldots$, fordern. Somit ist P_n durch (d_n, K_n) eindeutig bestimmt, wobei

d_n und K_n analog zu (3.8) definiert sind. Wir setzen für $n = 1,2,\ldots$:

$$a_n := (K_n(\mathbb{R}))^{-1/2} \text{ und } T_n := a_n(S_n(m_n) - d_n). \tag{4.5}$$

Satz 4.3: Für $n = 1,2,\ldots$ und $m_n \in L_0(\mathcal{X}_n)$ gelte $e_2(m_n) < \infty$. Dann ist für die schwache Konvergenz der Folge der u.t. Verteilungsgesetze Q_n von T_n für $n \to \infty$ gegen $N(0,1)$ und $\lim_{n\to\infty} V(T_n) = 1$ notwendig und hinreichend, daß für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 \int_{(|x| > \frac{\varepsilon}{a_n})} x^2 \, H_n(dx) = 0. \tag{4.6}$$

Beweis: Wegen $T_n = S_n(a_n m_n) - a_n d_n$, ist Q_n durch $(d_n' - a_n d_n, K_n')$ $= (0, K_n')$ charakterisiert. Mit (4.5) ist für $n = 1,2,\ldots$ $K_n'(\mathbb{R}) = 1$, und aus der Lindeberg-Bedingung (4.6) folgt aufgrund des Grenzwertsatzes für u.t. Verteilungsgesetze bei existierendem zweiten Moment die Behauptung des Satzes. q.e.d.

5. Eine Abschätzung des Abstandes der Verteilungsfunktionen eines u.t. Verteilungsgesetzes und der Standard-Normalverteilung

Sei $BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten Lipschitz-stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Für $f \in BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \text{ und } p_L(f) := \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R} \\ x\neq y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm und p_L eine Halbnorm auf $BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ist. Mit der Norm (vgl. /2/)

$$\|f\|_{BL} := \|f\|_\infty + p_L(f) \text{ für } f \in BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$$

wird $(BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{BL})$ zu einem Banach-Raum.

$BL_{\mathbb{C}}^*(\mathbb{R})$ sei der duale Raum von $BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ und die Norm auf $BL_{\mathbb{C}}^*(\mathbb{R})$ durch

$$\|a\|_{BL}^* = \inf\left\{c > 0 : |\langle f,a\rangle| \le c \cdot \|f\|_{BL} \text{ für alle } f \in BL_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\right\}$$

für $a \in BL_{\mathbb{C}}^*(\mathbb{R})$ definiert.

Jedes endliche signierte Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ erzeugt vermöge

$$\langle f, a_\mu \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx) \text{ für } f \in BL_c(\mathbb{R})$$

ein Funktional $a_\mu \in BL_c^*(\mathbb{R})$. Im folgenden werden wir a_μ mit dem erzeugenden signierten Maß μ identifizieren.

Lemma 5.1: Für die durch (3.5) und (3.6) definierte Funktion $k(t,x)$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$k(t,.) \in BL_c(\mathbb{R}) \text{ und } \|k(t,.)\|_{BL} \leq \frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{3}. \tag{5.1}$$

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x > 0$

$$\exp(itx) - 1 - itx = (it)^2 \int_0^x \int_0^y \exp(itz)\, dz\, dy$$

und analog für $x < 0$:

$$\exp(itx) - 1 - itx = (it)^2 \int_x^0 \int_y^0 \exp(itz)\, dz\, dy.$$

Mit (3.6) folgt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |k(t,x)| = \frac{t^2}{2}.$$

Der Real- und Imaginärteil von $k(t,x)$ sind partiell nach x differenzierbar, und es gilt für $t \in \mathbb{R}$ bzw. $x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}(k(t,x)) = \frac{t^3}{x^3} \int_0^x \int_0^y z \sin(tz)\, dz\, dy.$$

Durch analoge Betrachtungen für $x < 0$ erhalten wir:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}(k(t,x)) \right| \leq \frac{|t|^3}{6}. \tag{5.2}$$

In gleicher Weise ergibt sich für $t \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Im}(k(t,x)) \right| = \frac{|t|^3}{6}. \tag{5.3}$$

Seien nun $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ beliebig. Dann können wir unter Verwendung des Mittelwertsatzes und (5.2) bzw. (5.3) abschätzen:

$$\left|\frac{k(t,x)-k(t,y)}{x-y}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\mathrm{Re}(k(t,x))-\mathrm{Re}(k(t,y))}{x-y}\right| + \left|\frac{\mathrm{Im}(k(t,x))-\mathrm{Im}(k(t,y))}{x-y}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Re}(k(t,z_1))\right| + \left|\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Im}(k(t,z_2))\right| \leq \frac{|t|^3}{3}\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Weiterhin gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß K auf $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ und jedes $\varepsilon>0$ die Abschätzung

$$\|K - \delta_0\|^*_{BL} \leq 2\,K(|x|>\varepsilon) + \varepsilon. \tag{5.4}$$

Satz 5.1: F(x) bzw. f(t) seien die Verteilungsfunktion bzw. die charakteristische Funktion einer reellen Zufallsgröße Y mit $E(Y^2)<\infty$, die ein u.t. Verteilungsgesetz P besitzt, und es gelte E(Y) = 0 sowie V(Y) = 1. P sei durch (0,K) mit $K(\mathbb{R}) = 1$ bestimmt. Weiterhin bezeichnen $\Phi(x)$ bzw. $\varphi(t)$ die Verteilungsfunktion bzw. charakteristische Funktion von N(0,1). Dann gilt für $\|K - \delta_0\|^*_{BL} < 1$ die Abschätzung

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq \|K - \delta_0\|^*_{BL} \cdot C(\|K - \delta_0\|^*_{BL}) \text{ mit} \tag{5.5}$$

$$C(N) = \inf_{N<a<1} \left(\frac{1}{\pi(1-a)} + \frac{\sqrt{2\pi}}{3\pi(1-a)^{3/2}} + \frac{16}{\pi\sqrt{2\pi}\,(a-N)}\right)$$

für $0 \leq N < 1$.

Beweis: Wir benutzen die grundlegende Abschätzung von Esseen (vgl. /7/, S. 297):

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|\frac{f(t)-\varphi(t)}{t}\right| dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,T} \tag{5.6}$$

für alle $T>0$ und schätzen unter Verwendung von (5.1) und der Ungleichung $|\exp(z) - 1| \leq |z|\exp(|z|)$ für alle $z\in\mathbb{C}$ ab:

$$\int_0^T \left| \frac{f(t) - \varphi(t)}{t} \right| dt$$

$$= \int_0^T \frac{\exp(-\frac{t^2}{2})}{t} \left| \exp(\langle k(t,.), K - \delta_0 \rangle) - 1 \right| dt$$

$$\leq \|K - \delta_0\|_{BL}^* \int_0^T (\tfrac{t}{2} + \tfrac{t^2}{3}) \exp(\|K - \delta_0\|_{BL}^* \cdot (\tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{3}) - \tfrac{t^2}{2}) \, dt$$

$$\leq N \cdot \int_0^T (\tfrac{t}{2} + \tfrac{t^2}{3}) \exp(-\tfrac{t^2}{2}(1-a)) \, dt \text{ für}$$

$$N := \|K - \delta_0\|_{BL}^*, \; 0 \leq N < a < 1 \text{ und } T := \tfrac{3}{2}(\tfrac{a}{N} - 1)$$

$$\leq N \cdot \left(\frac{1}{2(1-a)} + \frac{\sqrt{2\pi}}{6(1-a)^{3/2}} \right) \text{ für alle } a \in (N,1).$$

Nach Einsetzen in (5.6) ergibt sich die Behauptung des Satzes. q.e.d.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte der Funktion C(N) (aufgerundet) zusammengefaßt:

N	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0001	0.0
C(N) ≤	5.88	5.54	5.291	5.262	5.239	5.2332	5.23263 .

Da die Funktion C(N) für $N \to 0$ monoton fallend ist, kann in Anwendungen der Abschätzung ab einer bestimmten Stelle eine geeignete Konstante für sie gesetzt werden. So ist zum Beispiel die Abschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \tilde{\Phi}(x)| \leq 5.88 \, \|K - \delta_0\|_{BL}^* \text{ für } \|K - \delta_0\|_{BL}^* \leq 0.1$$

möglich.

6. Ein Beispiel

Für $n = 1,2,\ldots$ seien $P_{\Lambda_{i,n}}$ Poissonsche Verteilungsgesetze auf $(M_n, \mathfrak{M}_n)$ mit den Intensitätsmaßen $\Lambda_{i,n}$, $i = 1,2$, auf den Pha-

senräumen $(X_n, \mathfrak{X}_n)$. Die Intensitätsmaße $\Lambda_{1,n}$ und $\Lambda_{2,n}$ seien äquivalent, und es gelte $\Lambda_{i,n}(X_n) < \infty$, $i = 1,2$. Dann sind auch $P_{\Lambda_{1,n}}$ und $P_{\Lambda_{2,n}}$ äquivalent (/4/), und die Dichte D_n von $P_{\Lambda_{1,n}}$ bez. $P_{\Lambda_{2,n}}$ hat die Gestalt (/1/)

$$D_n(\varphi_n) = \exp([S_n(l_n)](\varphi_n) + \Lambda_{2,n}(X_n) - \Lambda_{1,n}(X_n)),$$

mit $l_n(x) = \ln p_n(x) \in L_0(\mathfrak{X}_n)$ und $p_n(x) = \frac{d\Lambda_{1,n}}{d\Lambda_{2,n}}(x)$. Die Zufallsgröße

$$L_n : (M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{2,n}}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \text{ mit } L_n = \ln D_n$$

heißt Log-Likelihood-Quotient von $P_{\Lambda_{1,n}}$ bez. $P_{\Lambda_{2,n}}$. Das Verteilungsgesetz P_n von L_n ist u.t. und durch (c_n, G_n) mit

$$c_n = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, H_n(dx) + \Lambda_{2,n}(X_n) - \Lambda_{1,n}(X_n)$$

$$= \int_{X_n} (h(l_n) + 1 - p_n)\, d\Lambda_{2,n}$$

und G_n wie in (3.2) mit $H_n = \Lambda_{2,n} \circ l_n^{-1}$ in (3.3) charakterisiert. In /5/ wurde gezeigt, daß L_n nicht normalverteilt sein kann. Da L_n bis auf eine Konstante eine Sekundärgröße von $(M_n, \mathfrak{M}_n, P_{\Lambda_{2,n}})$ ist, können die Grenzwertsätze 4.1. und 4.2. mit

$$c_n' = a_n \int_{X_n} \left(\frac{l_n}{1 + a_n^2 l_n^2} + 1 - p_n\right) d\Lambda_{2,n}$$

zur Anwendung gebracht werden.

Um zu einem konkreten Anwendungsbeispiel sowohl des Satzes 4.3. als auch des Satzes 5.1. zu gelangen, wählen wir eine monoton wachsende Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ und setzen für $n = 1,2,\ldots$ $X_n = [-z_n, +z_n]$ bzw. $\mathfrak{X}_n = X_n \cap \mathfrak{R}$. $\Lambda_{2,n}$ sei das Lebesgue-Maß auf $(X_n, \mathfrak{X}_n)$ und $\Lambda_{1,n}$ durch die Dichte $p_n(x) = \exp(x) \cdot I_{X_n}(x)$ bez. $\Lambda_{2,n}$ gegeben. Somit sind $P_{\Lambda_{1,n}}$ und

$P_{\Lambda_{2,n}}$ äquivalent und der Log-Likelihood-Quotient L_n hat die Gestalt

$$L_n = S_n(l_n) + 2z_n - \exp(z_n) + \exp(-z_n).$$

Da $e_2(l_n) = \frac{2}{3} z_n^3$ gilt (vgl. (3.10)), ist das Verteilungsgesetz P_n durch das Tupel (d_n, K_n) mit (vgl. (3.9))

$$d_n = e_1(l_n) + \Lambda_{2,n}(X_n) - \Lambda_{1,n}(X_n) = 2z_n - \exp(z_n) + \exp(-z_n)$$

und K_n wie in (3.8) gegeben. Setzen wir entsprechend (4.5) $a_n = wz_n^{-3/2}$ $(w = \sqrt{\frac{3}{2}})$, so ist die Lindeberg-Bedingung (4.6) erfüllt, und die Folge der Verteilungsgesetze Q_n von $T_n = a_n(L_n - d_n)$ konvergiert für $n \to \infty$ schwach gegen $N(0,1)$. Das Verteilungsgesetz Q_n ist durch $(0, K_n')$ bestimmt, wobei K_n' wie in (3.8) mit $H_n' = \Lambda_{2,n} \circ (a_n l_n)^{-1}$ definiert ist. Insbesondere gilt stets $K_n'(\mathbb{R}) = V(T_n) = 1$. Nach (5.4) gilt $\|K_n' - \delta_0\|_{BL}^* \leq wz_n^{-1/2}$, wobei $\varepsilon_n = wz_n^{-1/2}$ gewählt wurde. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 5.1. bez. T_n für alle $n \geq n_0$ mit $z_{n_0} > 1.5$ erfüllt. Sei $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion von T_n, dann gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq wz_n^{-1/2} \cdot C(wz_n^{-1/2}) \text{ für } n \geq n_0$$

$$\leq \begin{cases} 7.21 \cdot z_n^{-1/2} & \text{für } z_n \geq 150, \\ 6.79 \cdot z_n^{-1/2} & \text{für } z_n \geq 600. \end{cases}$$

In der Testtheorie haben diese Aussagen die folgende Bedeutung. Für $n = 1,2,\ldots$ kann für das Testproblem mit den einfachen Hypothesen $H_0 : P_{\Lambda_{2,n}}$ und $H_A : P_{\Lambda_{1,n}}$ aufgrund des Fundamentallemmas von Neyman-Pearson jeweils der beste Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ konstruiert werden. Da die Folge $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Verteilungsgesetze der Teststatistiken T_n unter der Nullhypothese für $n \to \infty$ schwach gegen $N(0,1)$ konvergiert, kann der kritische Bereich asymptotisch bestimmt und die Abweichung vom Fehler erster Art α mit Hilfe der Ungleichung (5.5) abgeschätzt werden.

Literatur

/1/ Brown, M.: Statistical Analysis of non-homogeneous Poisson Processes. In: Lewis, P. A. W. (Ed.): Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications, pp. 67 - 89, New York 1972

/2/ Dudley, R. M.: Convergence of laws on metric spaces, with a view to statistical testing. Lecture Notes Series, No. 45, Aarhus Universitet 1976

/3/ Gnedenko, B. V., und Kolmogoroff, A. N.: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Berlin 1959

/4/ Liese, F.: Eine informationstheoretische Bedingung für die Äquivalenz unbegrenzt teilbarer Punktprozesse. Math. Nachr. 70, 183 - 196 (1976)

/5/ Liese, F.: Hellinger Integrals, Error Probabilities and Contiguity of Gaussian Processes with Independent Increments and Poisson Processes. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 21, 297 - 312 (1985)

/6/ Линьков, Ю. Н.: Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия и проверка гипотез для неоднородных процессов Пуассона. В кн.: Теория случайных процессов, Наукова Думка вып. 8, стр. 81 - 100, Киев 1980

/7/ Loève, M.: Probability Theory, Vol. 1. New York 1977

eingegangen: 18. 11. 1985

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. U. Lorz
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 29, 112 - 120 (1986) 73E10

Kurt Frischmuth

Iterationsverfahren zur Lösung eines Problems der nichtlinearen Mechanik

1. Einführung

Zahlreiche numerische Probleme führen auf eine Fixpunktgleichung

$$\varphi(x) = x \tag{1}$$

mit $\varphi: B \to B$,

wobei B ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik ϱ sei. Unter der Voraussetzung, daß die Abbildung φ kontrahierend ist, d. h.

$$\exists L < 1 \ \forall x_1, x_2 \in B \quad \varrho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < L\varrho(x_1, x_2), \tag{2}$$

läßt sich eine Lösung von (1) als Grenzwert der rekursiv definierten Folge

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = \varphi(x_n), \\ &x_0 \text{ - beliebige Startnäherung} \end{aligned} \tag{3}$$

bestimmen. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie die Konvergenz der Folge von Näherungslösungen (3) gegen diese exakte Lösung sind in diesem Fall gesichert.
Oft erweist es sich jedoch, daß die Folge (3) nur sehr langsam konvergiert (L nahe 1), oder daß die Bedingung (2) überhaupt nicht erfüllt ist. Im letzteren Fall ist es im allgemeinen schwierig, Aussagen über die Konvergenz der durch (3) definierten Folge oder über die Lösungsmenge von (1) zu gewinnen.
Wenn es gelingt, in B einen bezüglich φ invarianten Unterraum B_0 zu finden,

$$\varphi(B_0) \subset B_0,$$

und zu zeigen, daß die gesuchte Lösung x zu B_0 gehört, kann man (1) durch ein unter Umständen erheblich einfacher zu lösendes Fixpunktproblem

$$\varphi|_{B_0}(x) = x, \ \varphi|_{B_0} : B_0 \to B_0 \tag{1'}$$

ersetzen.

In einer Reihe von Arbeiten führten Wiebeck und Metschkow das Problem der elasto-plastischen Profilbiegung auf eine Fixpunktgleichung vom Typ (1) zurück und diskutierten die Konvergenz der Folge (3) (/1/ - /4/). Für Profile mit Rechteckquerschnitt wurde gezeigt, daß (2) für größere Krümmungen verletzt ist, und die numerischen Ergebnisse weisen darauf hin, daß die Folge (3) in solchen Fällen divergiert. Gleiches ergab sich auch bei einigen anderen Querschnitten.
Im genannten Beispiel ist

$$B = C([z_{min}, z_{max}], R),$$

und x aus B ist die Distribution der plastischen Dehnungsanteile über der Profilhöhe. Die Funktion $\varphi : B \to B$ hat eine recht verwickelte Struktur, man kann jedoch eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit $B_o := \varphi(B)$ in B finden, die unter φ invariant ist und alle Lösungen von (1) enthält. Damit reduziert sich das Ausgangsproblem auf die Lösung einer eindimensionalen Fixpunktgleichung (1'), die auf ein Nullstellenproblem

$$f(\alpha) = 0 \qquad (1")$$

zurückgeführt werden kann. Hierbei ist α ein Parameter der Mannigfaltigkeit B_o.

Die Gleichung (1") wird im weiteren mit einem modifizierten Sekantenverfahren gelöst. Die speziellen Eigenschaften von f lassen auf Eindeutigkeit der Lösung und globale Konvergenz des Verfahrens schließen.

2. Biegung elasto-plastischer Profile

Unter gewissen physikalischen Voraussetzungen (/1/) verschwinden bei der reinen Profilbiegung sämtliche Komponenten des Deformationstensors bis auf $\varepsilon_{xx} =: \varepsilon$, wobei die x-Achse mit der Schwereachse des Profils zusammenfalle. Wenn die Biegung innerhalb der x-z-Ebene erfolgt, ist die nichtverschwindende Komponente eine lineare Funktion von z. Das nichtlineare Materialverhalten werde durch eine monoton nichtfallende, ungerade stetige Funktion

$$\sigma : R \to R$$

beschrieben. Im allgemeinen existiert ein Intervall $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, in dem σ homogen ist mit dem Anstieg E (Youngscher Modul). Im einfachsten Fall nimmt man an, σ sei für $\varepsilon > \varepsilon_0$ linear mit einem Anstieg $P \ll E$, z. B. $P = 0$ für ideal plastisches Material. Sonst kann σ auch in anderer geeigneter Weise an experimentelle Daten angepaßt werden. Wir setzen voraus, daß σ keine lineare Funktion ist.
Mittels σ und E definieren wir den plastischen Deformationsanteil

$$\varepsilon_p(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E} . \tag{4}$$

Bevor wir die Funktion φ aus (1) für den Fall der Profilbiegung nach /1/ definieren, sei noch der geometrische Zusammenhang

$$\beta = K\,(1+\alpha) \tag{5}$$

erwähnt, wobei K die Krümmung der Schwereachse und α und β Absolutglied bzw. Linearkoeffizient der linearen Funktion

$$\varepsilon = \alpha + \beta z \tag{6}$$

bezeichnen. Für lineares σ oder für symmetrische Profile gilt $\alpha = 0$, woraus sich der bekannte Spezialfall $\varepsilon = Kz$ ergibt.

Die Berechnung des elasto-plastischen Spannungs- und Deformationszustandes wurde in /1/ auf die "Methode der elastischen Lösungen" Iljuschins zurückgeführt. In Anlehnung an die Bezeichnungen dieser Arbeit definieren wir für $x \in B$:

$$\begin{aligned} K_3(x) &= -E \int_{z_{min}}^{z_{max}} x(z)\, b(z)\, dz, \\ K_5(x) &= -E \int_{z_{min}}^{z_{max}} z\, x(z)\, b(z)\, dz, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei b(z) die Breite des Profils in der Höhe z ist. Weiter sei

$$Ma\,(u,v) = -\frac{KK_4}{K_1}\, u + v + KK_4 \tag{8}$$

mit den Konstanten

$$K_1 = E \int_{z_{min}}^{z_{max}} b(z)\, dz,$$

$$K_4 = E \int_{z_{min}}^{z_{max}} z^2\, b(z)\, dz. \tag{9}$$

Nun sei

$$\alpha(u) = -\frac{1}{K_1} u,\ \beta(u,v) = \frac{1}{K_4} (Ma(u,v) - v). \tag{10}$$

Jetzt können wir $\varphi : B \to B$ definieren durch

$$\varphi(x)(z) = \varepsilon_p(\alpha(K_3(x)) + \beta(K_3(x), K_4(x))z). \tag{11}$$

Die Funktion x repräsentiert hierbei die Verteilung der plastischen Dehnung über der Profilhöhe. In /1/ - /3/ wurde diese als Grenzwert der Folge (3) bestimmt, wobei als Startwert zunächst $x \equiv 0$ und für größere Krümmungen die Lösung aus dem jeweils letzten Lastschritt verwendet wurde.

3. Das neue Iterationsverfahren

Im folgenden untersuchen wir den Bildraum $B_o = \varphi(B)$ und die Abbildung $\varphi|_{B_o} : B_o \to B_o$. Dazu bemerken wir zunächst, daß sich die Berechnung von $\varphi(x)$ etwas vereinfachen läßt, denn es gilt (vgl. (5)

$$\beta = \frac{1}{K_4} \left(-\frac{KK_4}{K_1} u + v + KK_4 - v\right) = K - \frac{K}{K_1} u = K\left(1 - \frac{1}{K_1} u\right) = K(1+\alpha)$$

und folglich

$$\varphi(x)(z) = \varepsilon_p(\alpha(K_3(x)) + K(1+\alpha(K_3(x)))z).$$

Aus dieser Formel erkennt man die Gestalt von B_o

$$B_o = \left\{ x \in B : \exists \alpha \in R\ \forall z \in [z_{min}, z_{max}]\ x(z) = \varepsilon_p(\alpha + K(1+\alpha)z) \right\}.$$

Es bietet sich an, B_o durch α zu parametrisieren:

$$X(\alpha)(z) = \varepsilon_p(\alpha + K(1+\alpha)z).$$

Für $x \neq 0$ ist diese Parametrisierung auf Grund der Nichtlinearität von σ eineindeutig, für $x \equiv 0$ setzen wir $\alpha = 0$.
Mit dem so definierten $\mathcal{A} : B_o \to R$, $X \circ \mathcal{A} = id_{B_o}$,
können wir zum Fixpunktproblem

$$\alpha = \mathcal{A}(\varphi(X(\alpha))) \tag{12}$$

übergehen. Hierbei ist x dann und nur dann Fixpunkt von (3), wenn $\alpha = \mathcal{A}(x)$ Fixpunkt von (12) ist. Somit wird die Aufgabenstellung eindimensional.
Für die effektive Lösung des reduzierten Problems benutzen wir das folgende

Lemma 1: Ein Parameter α ist Fixpunkt von (12) genau dann, wenn

$$f(\alpha) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha + K(1+\alpha)z)b(z)\,dz = 0$$

gilt.

Beweis: Offenbar gilt $\mathcal{A}(\varphi(X(\alpha)) = \alpha(K_3(X(\alpha)))$, der Parameter α ist also genau dann Fixpunkt von (12), wenn er Fixpunkt von

$$\alpha = \alpha(K_3(X(\alpha))) \tag{13}$$

ist. Unter Verwendung der Definitionen (10), $(7)_1$ und (4) für die Funktionen α, K_3 und ε_p erhalten wir

$$\alpha = -\frac{1}{K_1}\left[-E\int_{z_{min}}^{z_{max}} X(\alpha)\,b(z)\,dz\right],$$

$$= -\frac{1}{K_1}\left[-E\int_{z_{min}}^{z_{max}} \left[\alpha + K(1+\alpha)z - \frac{\sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)}{E}\right]b(z)dz\right],$$

$$= \frac{E}{K_1}\int_{z_{min}}^{z_{max}} [\alpha + K(1+\alpha)z]b(z)dz - \frac{1}{K_1}\int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)b(z)dz.$$

Nun ist aber $\int_{z_{min}}^{z_{max}} z\, b(z)\, dz = 0$ auf Grund der Wahl des Koordinatensystems, und nach $(9)_1$ ist $E \int_{z_{min}}^{z_{max}} b(z)dz = K_1$. Somit ist (13) äquivalent zu

$$\alpha = \alpha - \frac{1}{K_1} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)\, b(z)\, dz$$

und damit zu $f(\alpha) = 0$, w.z.b.w.

Lemma 2: Die Funktion f ist monoton wachsend.

Beweis: Es gilt $\alpha + K(1+\alpha)z = Kz + \alpha(1+Kz)$. Da $|Kz|$ aus geometrischen Gründen stets wesentlich kleiner als Eins bleibt, ist $\alpha + K(1+\alpha)z$ für jedes z eine streng monoton (linear) wachsende Funktion von α. Da σ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, gilt dasselbe auch für

$$f(\alpha) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)\, b(z)\, dz.$$

Lemma 3: Es gelte $f(\alpha) = 0$, und σ sei in einem Intervall $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Dann ist f in einer Umgebung der Stelle α streng monoton wachsend.

Beweis: Aus $f(\alpha) = 0$ folgt, daß $\alpha+K(1+\alpha)z$ als Funktion von z im Intervall $[z_{min}, z_{max}]$ eine Nullstelle besitzt, in deren Umgebung der Integrand streng monoton wächst.

Folgerung 1: Das Ausgangsproblem (1) hat höchstens eine Lösung. Aus dem Beweis von Lemma 2 ersieht man ferner, daß der Integrand für genügend große (kleine) α für alle z positiv (negativ) wird.

Folgerung 2: Jedes der Probleme (1), (12), (13) hat eine eindeutig bestimmte Lösung.

4. Numerische Realisierung

Es bietet sich an, die Gleichung

$$f(\alpha) = 0 \tag{14}$$

mit einem modifizierten Sekantenverfahren zu lösen. Falls im Iterationsverlauf eine Verschlechterung der Funktionswerte eintritt, läßt sich auf Grund obengenannter Eigenschaften von f durch Dämpfung globale Konvergenz sichern. Dadurch entfällt die Notwendigkeit, die gewünschte Endkrümmung in Teillastschritten aufzubringen. Bei einer Reihe von Testrechnungen konvergierte das Verfahren stets recht schnell, obwohl die Startwerte fest vorgegeben waren. Weiterhin ist der Aufwand pro Iterationsschritt im Vergleich zum ursprünglichen Iterationsverfahren geringer (vgl. /5/). Eine detaillierte Programmbeschreibung sowie Beispielrechnungen sind ebenfalls in /5/ enthalten. Hier sei nur noch kurz auf eine für die Wahl der Abbruchschranke wichtige Abschätzung hingewiesen. Ziel der Untersuchung ist letztlich die Berechnung des Momentes

$$Ma = \int_{z_{min}}^{z_{max}} z\sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)b(z)\,dz.$$

Es sei nun $\tilde{\alpha}$ eine Näherung der Nullstelle α mit $|f(\tilde{\alpha})| < \delta$. Für den mit Hilfe von $\tilde{\alpha}$ berechneten Näherungswert

$$\tilde{Ma} = \int_{z_{min}}^{z_{max}} z\sigma(\tilde{\alpha}+K(1+\tilde{\alpha})z)b(z)\,dz$$

gilt

$$\tilde{Ma} = \int_{z_{min}}^{z_{max}} z(\sigma(\alpha+K(1+\alpha)z) + \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z))b(z)\,dz$$

$$= Ma + z_{min}\int_{z_{min}}^{z_o} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)b(z)dz + z_{max}\int_{z_o}^{z_{max}} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)b(z)dz$$

mit $z_o \in [z_{min}, z_{max}]$.

Somit erhält man

$$|\widetilde{Ma} - Ma| \leq \max\{-z_{min}, z_{max}\} \left(\left|\int_{z_{min}}^{z_o} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)b(z)dz\right| + \left|\int_{z_o}^{z_{max}} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)b(z)dz\right|\right).$$

Nun hat aber

$$\Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) := \sigma(\tilde{\alpha}+K(1+\tilde{\alpha})z) - \sigma(\alpha+K(1+\alpha)z)$$

auf Grund der vorausgesetzten Monotonie der Funktion σ und wegen $|K\,z|<1$ keinen Vorzeichenwechsel in $[z_{min}, z_{max}]$. Für $\tilde{\alpha} < \alpha$ gilt im gesamten Intervall $\Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) < 0$, für $\tilde{\alpha} > \alpha$ gilt $\Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z) > 0$. Das erlaubt es, weiter abzuschätzen:

$$\begin{aligned} |\widetilde{Ma} - Ma| &\leq \max\{-z_{min}, z_{max}\} \left|\int_{z_{min}}^{z_{max}} \Delta\sigma(\alpha,\tilde{\alpha},z)\,b(z)dz\right| \\ &= \max\{-z_{min}, z_{max}\}\,|f(\tilde{\alpha}) - f(\alpha)| \\ &= \max\{-z_{min}, z_{max}\}\,|f(\tilde{\alpha})| < h \cdot \delta, \end{aligned} \tag{15}$$

wobei $h = z_{max} - z_{min}$ die Höhe des Profils bezeichnet.

Für die in /5/ untersuchten Profilhöhen (≤ 1000 mm) und die Größenordnung der Momente ($> 10^5$ Nm) genügte auf Grund der Abschätzung (15) als Abbruchkriterium

$$|f(\tilde{\alpha})| < 100,$$

um einen relativen Fehler unter 0.1 % zu garantieren. Ungleichung (15) erlaubt also eine recht bequeme Beurteilung der Ergebnisse, da sie nicht auf den Fehler der Berechnung von $\tilde{\alpha}$, sondern nur auf das Residuum $f(\tilde{\alpha})$ zurückgreift. In /1/ wurde im Vergleich dazu als Abbruchkriterium

$$|x - \varphi(x)| < \varepsilon$$

verwendet, welches ohne zusätzliche Überlegungen keine Angaben über den Fehler bei der Berechnung von Ma gestattet.

5. Schlußbemerkung

Das hier vorgestellte Verfahren läßt sich auch physikalisch recht einleuchtend begründen, denn man erkennt in Gleichung (14)

unschwer die Gleichgewichtsbedingung für die Längskraft. Es ging hier aber auch um den Nachweis der Äquivalenz des neuen und des alten Verfahrens, d. h. insbesondere darum, daß bei der Vereinfachung keine Lösungen verlorengehen. Darüber hinaus kann man auf ähnliche Art auch einige analoge Aufgaben lösen bzw. vereinfachen, etwa bei Wirken von zusätzlichen Längskräften. Abschließend muß darauf hingewiesen werden, daß man auf Grund der Eigenschaften des numerischen Verfahrens Momente für beliebige Krümmungen berechnen kann und somit Gefahr läuft, den Anwendungsbereich des physikalischen Modells zu verlassen.

Literatur

/1/ Wiebeck, E., und Metschkow, B.: Iterationsverfahren zur Berechnung der elastisch-plastischen Biegung von Profilen. Fertigungstechnik und Betrieb 26, 4 (1976)

/2/ Wiebeck, E., und Metschkow, B.: Zu einigen Erfahrungen bei der Behandlung elastisch-plastischer Probleme. Schriftenreihe IH für Seefahrt 4 (1977)

/3/ Wiebeck, E., und Metschkow, B.: Zu einigen Konvergenzproblemen bei der rechnerischen Erfassung physikalischer Nichtlinearitäten. Schiffbauforschung 17, 5/6 (1978)

/4/ Metschkow, B.: Zur Entwicklung von Berechnungsalgorithmen für die Erfassung physikalischer Nichtlinearitäten. Vortrag auf dem 3. wiss. Kolloquium der Abt. Math./Nat. der IHS Wismar am 3. und 4. 5. 1979

/5/ Flemmig, U.: Numerische Analyse der elasto-plastischen Profilbiegung. Jahresarbeit an der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock (1985)

eingegangen: 01. 06. 1985

Anschrift des Verfassers:

Dr. K. Frischmuth
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 . Rostock

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq. /Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. ä. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparentpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

/8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1958

/9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)

/10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193 - 204. Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers:/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

- Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg ISSN 0518-3189
- Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge ISSN 0138-3299
- Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte ISSN 0232-3066
- Rostocker Mathematisches Kolloquium ISSN 0138-3248
- Rostocker Philosophische Manuskripte ISSN 0557-3599
- Rostocker Physikalische Manuskripte ISSN 0138-3140
- Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte ISSN 0138-3191
- Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerikawissenschaften ISSN 0458-7944
- Erziehungswissenschaftliche Beiträge ISSN 0138-2373
- Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus ISSN 0138-3396
- Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock ISSN 0232-539X
- Beiträge zur Geschichte der FDJ ISSN 0233-0830
- Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus ISSN 0233-0636
- Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogik ISSN 0233-0539
- Rostocker Informatik-Berichte ISSN 0233-0784
- Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen ISSN 0233-0687
- Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft ISSN 0233-0644

Bezugsmöglichkeiten

Die Hefte sind im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Tauschstelle, DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Es bestehen beschränkte Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR-2500 Rostock, Vogelsang 13/14
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, DDR-7010 Leipzig, Leninstraße 16.