

# Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 31



**WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT  
ROSTOCK**

## Information

### Rostocker Informatik-Berichte

Diese Schriftenreihe der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock erscheint seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor:

- Heft 1 (1985) 20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung
- Heft 2 (1985) DIGRA'84  
(Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)
- Heft 3 (1986) Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinat der DDR
- Heft 4 (1986) Arbeiten aus der Sektion Informatik
- Heft 5 (1987) Beiträge des Problemseminars "Graphisch-Interaktive Systeme"

vorgesehen

- Heft 6 (1988) Beiträge aus der Sektion Informatik zur graphischen Standardisierung und Simulation

### Bezugsmöglichkeiten

Die Hefte der Schriftenreihe sind im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Es bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 31

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

1987

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Gustav Burosch  
(Sektionsdirektor)  
Prof. Dr. Gerhard Maeß

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Klaus-Dieter Drews  
Herstellung der Druckvorlage: Dorothea Meyer

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
Rostock  
DDR-2500

Redaktionseschluß: 30. 01. 1987

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint zweimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Es bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010

Zitat-Kurztitel: Rostock, Math. Kolloq. (1987) 31

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,  
Abteilung Wissenschaftspublizistik,  
Vogelsang 13/14, Telefon 369 577, Rostock, DDR-2500  
Genehmigungs-Nr.: C 70/87  
Druck: ODR WII II-15-14 • 0,50

Inhalt

	<u>Seite</u>
Fisher, Brian: On defining $\Gamma(-n)$ for $n = 0, 1, 2, \dots$	4
Harnau, Walter: Ein verallgemeinerter Relationenbegriff für die Algebra der mehrwertigen Logik, Teil II (Relationenpaare)	11
Schröder, Bert: Über abgeschlossene Mengen von linearen Funktionen in $P_{2p}$ ( $p$ prim, $p > 2$ )	21
Tomantschger, Kurt Walter: Representations for Solutions of Higher Order Partial Differential Equations	42
Szyszka, Uwe: Das Dirichletproblem für den polyharmonischen Operator in $C^1$ -Gebieten der Ebene	51
Herbst, Ehrhard: Ein Stabilitätsbegriff für Faltungsgleichungen	57
Roßmann, Jürgen: Über die Lösbarkeit und die Regularität der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten in gewichteten Sobolevräumen von beliebiger ganzzahliger Ordnung	65
Berg, Lothar: Ergänzungen zur Interpolation durch Exponentialpolynome	87
Berg, Lothar: Das asymptotische Verhalten einer speziellen Funktion von Binomialkoeffizienten	93
Frischmuth, Kurt: An analytical result in experimental design	95
Lorz, Udo: Verzerrungskorrigierte Punktschätzungen des Korrelationskoeffizienten - eine Simulationsstudie	102

Brian Fisher

On defining  $\Gamma(-n)$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$ 1.  $\Gamma(x)$  for  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ 

The gamma function  $\Gamma(x)$ , see for example Schwartz /1/, is usually defined for  $x > 0$  by

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (1)$$

the integral only converging for  $x > 0$ .

On integrating by parts, it easily follows from equation (1) that

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2)$$

for  $x > 0$  and this equation can be used to define  $\Gamma(x)$  for negative, non-integer values of  $x$ . Thus if  $-1 < x < 0$ , then

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

and if  $\Gamma(x)$  has been defined for  $-n < x < -n+1$ , then

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

for  $-n-1 < x < -n$ .

In the following we need the relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \left[ e^{-t} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-t)^i}{i!} \right] dt \quad (3)$$

for  $-n < x < -n+1$ . The proof can be done by induction or similar to the well known case of Riemann's zeta-function as e.g. in /2/.

2. The finite part of an integral

We will suppose that  $f(x)$  is a function for which its integral over the interval  $(\varepsilon, \infty)$  is convergent for arbitrary  $\varepsilon > 0$ , but its integral over the interval  $(0, \infty)$  is possibly divergent. We will suppose further that

$$4 \quad \int_0^{\infty} f(x) dx = a_0$$

if the integral is convergent and if the integral is divergent we will suppose that

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon^{\lambda_i} \ln^{\tau_i} \varepsilon + O(\varepsilon),$$

where  $r_i$  is a non-negative integer and  $\lambda_i \leq 0$ , ( $\lambda_i < 0$  if  $r_i = 0$ ), for  $i = 1, \dots, n$ . We then say that  $a_0$  is the finite part of the integral of  $f(x)$  over the interval  $(0, \infty)$  and write

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} f(x) dx = a_0.$$

It is obvious that the finite part of the integral is unique if it exists and

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

if the integral is convergent. As an example consider

$$f(x) = e^{-x} - 2x^{-2} + x^{-2} \ln x.$$

Then

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx = e^{\varepsilon} - \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon = 1 - \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon + O(\varepsilon)$$

and it follows that

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} f(x) dx = 1.$$

### 3. $\Gamma(-n)$ for $n = 0, 1, 2, \dots$

Let us suppose that  $-n < x < -n+1$ . Then

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt &= \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{x-1} \left[ e^{-t} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-t)^i}{i!} \right] dt \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{x+i-1} dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{x-1} \left[ e^{-t} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-t)^i}{i!} \right] dt - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!(x+i)} \varepsilon^{x+i} \end{aligned}$$

$$= \Gamma(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!(x+1)} \varepsilon^{x+i} + O(\varepsilon)$$

on using equation (3). It follows that

$$\Gamma(x) = \text{p.f.} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (4)$$

for  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ . This suggests that we define  $\Gamma(-n)$  by

$$\Gamma(-n) = \text{p.f.} \int_0^{\infty} t^{-n-1} e^{-t} dt$$

for  $n = 0, 1, 2, \dots$ , provided that the finite part of the integral exists. Equation (4) will then define  $\Gamma(x)$  for all values of  $x$ .

We will first of all prove the existence of  $\Gamma(0)$ . We have

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt &= \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} d \ln t \\ &= -e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} \ln t dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} \ln t dt - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \varepsilon^i \ln \varepsilon \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt - \ln \varepsilon + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

and it follows that

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = \Gamma'(1).$$

This proves the existence of  $\Gamma(0)$  and further

$$\Gamma(0) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad (5)$$

where  $\gamma$  denotes Euler's constant, see /1/.

Let us now assume the existence of  $\Gamma(-n+1)$  for some positive integer  $n$ .

Then

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-n-1} e^{-t} dt &= -\frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t} dt^{-n} = \frac{1}{n} \varepsilon^{-n} e^{-\varepsilon} - \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-n} e^{-t} dt \\ &= \frac{(-1)^n}{nn!} - \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-n} e^{-t} dt + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{ni!} \varepsilon^{i-n} + O(\varepsilon) \\ &= \frac{(-1)^n}{nn!} - \text{p.f.} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} t^{-n} e^{-t} dt + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{ni!} \varepsilon^{i-n} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

and it follows that

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} t^{-n-1} e^{-t} dt = \frac{(-1)^n}{nn!} - \frac{1}{n} \Gamma(-n+1).$$

The existence of  $\Gamma(-n)$  follows by induction and further

$$\Gamma(-n) + \frac{1}{n} \Gamma(-n+1) = \frac{(-1)^n}{nn!}$$

for  $n = 1, 2, \dots$ . It now follows easily by induction that

$$\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!} [\phi(n) + \Gamma(0)] = \frac{(-1)^n}{n!} [\phi(n) - \gamma] \quad (6)$$

for  $n = 1, 2, \dots$ , where

$$\phi(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Differentiating equation (2) we have

$$\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x) \quad (7)$$

for  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ . In particular we have

$$\Gamma'(n+1) = n\Gamma'(n) + \Gamma(n)$$

for  $n = 1, 2, \dots$  and it again follows easily by induction that

$$\Gamma'(n+1) = n! [\phi(n) + \Gamma'(1)] = n! [\phi(n) - \gamma]$$

for  $n = 1, 2, \dots$ . Comparing this equation with equation (6) and also using equation (5), we see that

$$\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n \Gamma'(n+1)}{(n!)^2} \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots$$

We next notice that it follows from equations (1) and (3) that

$\Gamma^{(r)}(x)$  is given by

$$\Gamma^{(r)}(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{x-1} \ln^r t e^{-t} dt, & x > 0, \\ \int_0^{\infty} t^{x-1} \ln^r t \left[ e^{-t} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-t)^i}{i!} \right] dt, & -n < x < -n+1, \\ & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

for  $r = 1, 2, \dots$ . It follows as above that we can write

$$\Gamma^{(r)}(x) = \text{p.f.} \int_0^{\infty} t^{x-1} \ln^r t e^{-t} dt \quad (8)$$

for  $x \neq 0, -1, -2, \dots$  and  $r = 1, 2, \dots$ .

We will therefore define  $\Gamma^{(r)}(-n)$  by

$$\Gamma^{(r)}(-n) = \text{p.f.} \int_0^{\infty} t^{-n-1} \ln^r t e^{-t} dt$$

for  $n = 0, 1, 2, \dots$  and  $r = 1, 2, \dots$ , provided that the finite part of the integral exists. Equation (8) will then define  $\Gamma^{(r)}(x)$  for all values of  $x$  and  $r = 1, 2, \dots$ .

In order to prove the existence of  $\Gamma^{(r)}(-n)$  we first of all assume that  $\Gamma^{(r)}(r-n)$  exists for  $r = 0, 1, \dots, n$  and some positive integer  $n$ . This is certainly true when  $n = 0$ . Then

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\infty} t^{r-n-2} \ln^r t e^{-t} dt &= \frac{1}{r-n-1} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln^r t e^{-t} dt^{r-n-1} \\ &= \frac{1}{n+1-r} e^{-\epsilon} \epsilon^{r-n-1} \ln^r \epsilon \\ &\quad + \frac{1}{n+1-r} \int_{\epsilon}^{\infty} t^{r-n-1} \ln^{r-1} t (rt^{-1} - \ln t) e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{n+1-r} [r \Gamma^{(r-1)}(r-n-1) - \Gamma^{(r)}(r-n)] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n+1-r} \frac{(-1)^i}{(n+1-r)!} \epsilon^{i+r-n-1} \ln^r \epsilon + O(\epsilon) \end{aligned}$$

by our assumption for  $r = 1, \dots, n$ . The existence of  $\Gamma^{(r)}(r-n-1)$  follows for  $r = 1, \dots, n$  and further

$$(n+1-r) \Gamma^{(r)}(r-n-1) = r \Gamma^{(r-1)}(r-n-1) - \Gamma^{(r)}(r-n) \quad (9)$$

for  $r = 1, \dots, n$ . The existence of  $\Gamma^{(-n-1)}$  has of course already

been established. Further

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\infty} t^{-1} \ln^r t e^{-t} dt &= \frac{1}{r+1} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-t} d \ln^{r+1} t \\ &= -\frac{1}{r+1} e^{-\epsilon} \ln^{r+1} \epsilon + \frac{1}{r+1} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln^{r+1} t e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{r+1} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln^{r+1} t e^{-t} dt + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{r+1} \Gamma^{(r+1)}(1) + O(\epsilon), \end{aligned}$$

proving the existence of  $\Gamma^{(r)}(0)$  for  $r = 1, 2, \dots$ , and thus the existence of  $\Gamma^{(r)}(r-n-1)$  for  $r = n+1$ . It follows by induction that  $\Gamma^{(r)}(r-n)$  exists for  $r = 0, 1, \dots, n$  and  $n = 0, 1, 2, \dots$ , or equivalently that  $\Gamma^{(r)}(-n)$  exists for  $r, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Putting  $r = 1$  in equation (9) we see that

$$\Gamma'(-n+1) = -n \Gamma'(-n) + \Gamma(-n) \quad (10)$$

for  $n = 1, 2, \dots$  and so equation (7) holds for all  $x$ , the case  $n = 0$  holding by equation (5).

It now follows easily by induction from equation (8) that

$$\Gamma'(-n) = \frac{(-1)^n}{n!} [\psi(n) - \gamma \Phi(n) + \Gamma'(0)]$$

for  $n = 1, 2, \dots$ , where

$$\psi(n) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi(i)}{i}.$$

Further

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\infty} t^{-1} \ln t e^{-t} dt &= \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-t} d \ln^2 t \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\epsilon} \ln^2 \epsilon + \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln^2 t e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma''(1) - \frac{1}{2} \ln^2 \epsilon + O(\epsilon) \end{aligned}$$

and so in fact

$$\Gamma'(0) = \frac{1}{2} \Gamma''(1) = \frac{1}{2} \left( \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right),$$

see /1/.

References

/1/ Schwartz, L.: Mathematics for the physical science.  
Reading, Mass., 1966

/2/ Titchmarsh, E. C.: The theory of functions. London 1952

received: August 5, 1986

Author:

Prof. B. Fisher  
Department of Mathematics  
The University  
Leicester  
LE1 7RH  
U.K.

Walter Harnau

Ein verallgemeinerter Relationenbegriff für die Algebra der mehrwertigen Logik, Teil II (Relationenpaare)

---

Dieser Artikel stellt die Fortsetzung von /14/ dar. Die Literaturstellen /1/ - /13/ sind ebenfalls /14/ zu entnehmen.

#### 4. Relationenpaare

Es seien  $g$  und  $g'$  Elemente aus  $R_k$  (vgl. §2 (von /14/)). Wir bezeichnen das geordnete Paar  $(g, g')$  als Relationenpaar über  $E_k$ , wenn  $g' \in g$  gilt. Dazu müssen  $g$  und  $g'$  Relationen gleicher Arität (Stellenzahl) sein, oder es muß  $g' = \emptyset$  gelten.

Wir nennen das Relationenpaar  $(g, g')$   $m$ -stellig, wenn  $g \in R_k^{(m)}$  gilt. Mit  $C_k^{(m)}$  bezeichnen wir die Menge aller  $m$ -stelligen Relationenpaare. Dabei ist  $(\emptyset, \emptyset) \in C_k^{(m)}$  für jede positive ganze Zahl  $m$ . Schließlich sei

$$C_k := \bigcup_{m \geq 1} C_k^{(m)}$$

die Menge aller endlichstelligen Relationenpaare über  $E_k$ . Es seien  $m$  und  $n$  positive ganze Zahlen,  $f \in P_k^{(n)}$  und  $(g, g')$  aus  $C_k^{(m)}$ . Wir sagen, daß die Funktion  $f$  das Relationenpaar  $(g, g')$  bewahrt, wenn für alle  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in g$  mit

$\underline{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{mi}]$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) gilt:

$$f(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{pmatrix} \in g' .$$

Wenn  $g = g'$  ist, fällt der Begriff "f bewahrt das Relationenpaar  $(g, g')$ " mit dem im §2 genannten Begriff "f bewahrt die Re-

lation  $g$  zusammen. Dementsprechend haben wir zu vereinbaren, daß das Relationenpaar  $(\emptyset, \emptyset)$  von jeder Funktion aus  $P_k$  bewahrt wird. Weiterhin ist leicht einzusehen, daß für  $g \neq \emptyset$  das Relationenpaar  $(g, \emptyset)$  von keiner Funktion aus  $P_k$  bewahrt wird. Für  $F \subseteq P_k$  bzw.  $Q \subseteq C_k$  sei  $\text{Invp}_k F$  (oder kurz  $\text{Invp} F$ ) die Menge aller Relationenpaare aus  $C_k$ , die von jeder Funktion aus  $F$  bewahrt werden, bzw.  $\text{Polp}_k Q$  (oder kurz  $\text{Polp} Q$ ) die Menge aller Funktionen aus  $P_k$ , die jedes Relationenpaar aus  $Q$  bewahren. Wenn  $f \in P_k$  und  $(g, g') \in C_k$  ist, so schreiben wir für  $\text{Invp}_k \{f\}$  bzw.  $\text{Polp}_k \{(g, g')\}$  auch kurz  $\text{Invp}_k f$  oder  $\text{Invp} f$  bzw.  $\text{Polp}_k(g, g')$  oder  $\text{Polp}(g, g')$ . Für positive ganze Zahlen  $n$  sei weiterhin  $\text{Polp}_k^{(n)} Q := (\text{Polp}_k Q)^{(n)}$  und  $\text{Invp}_k^{(n)} F := (\text{Invp}_k F)^{(n)}$  mit  $Q \subseteq C_k$  und  $F \subseteq P_k$ .

Offenbar gilt das

Lemma 1: Für alle  $Q \subseteq C_k$  ist  $\text{Polp}_k Q = \bigcup_{(g, g') \in Q} \text{Polp}_k(g, g')$ .

Lemma 2: Für alle  $Q \subseteq C_k$  ist  $\text{Polp}_k Q$  eine iterative Algebra über  $E_k$ .

Beweis: Wegen Lemma 1 genügt es zu zeigen, daß für beliebiges  $(g, g') \in C_k$  die Menge  $\text{Polp}_k(g, g')$  eine iterative Algebra über  $E_k$  ist.

Mit  $g' = \emptyset$  ist  $\text{Polp}_k(g, g') \in \{\emptyset, P_k\}$  und somit eine iterative Algebra über  $E_k$ . Im weiteren kann also  $g' \neq \emptyset$  vorausgesetzt werden. Dann ist auch  $g \neq \emptyset$ . Sei  $f \in \text{Polp}_k^{(n)}(g, g')$  und  $g \in \text{Polp}_k^{(m)}(g, g')$ . Es muß nur noch gezeigt werden (vgl. §1), daß

$$\{\zeta f, \tau f, \Delta f, \nabla f, g \circ f\} \in \text{Polp}_k(g, g')$$

gilt. Nach der Definition der Operationen  $\zeta, \tau, \Delta, \nabla$  für Funktionen aus  $P_k$  und der des Bewahrens eines Relationenpaares erhält man unmittelbar  $\{\zeta f, \tau f, \Delta f, \nabla f\} \in \text{Polp}_k(g, g')$ .

Es ist  $g \circ f \in P_k^{(m+n-1)}$  und sei nun  $a_1, a_2, \dots, a_{m+n-1} \in g$ .

Dann gilt

$(g \circ f)(x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}),$

und mit  $\underline{b} := g(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m)$  ist

$(g \circ f)(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{m+n-1}) = f(\underline{b}, \underline{a}_{m+1}, \underline{a}_{m+2}, \dots, \underline{a}_{m+n-1}) \in \rho',$  denn

aus  $g \in \text{Polp}(\rho, \rho')$  folgt  $\underline{b} \in \rho' \subseteq \rho$ , und aus  $f \in \text{Polp}(\rho, \rho')$  erhalten wir somit obige Behauptung, womit auch  $g \circ f$  in  $\text{Polp}(\rho, \rho')$  liegt, was den Beweis des Lemmas abschließt.

**Lemma 3:** Wenn  $(\rho, \rho') \in C_k$  ist, so ist  $\text{Polp}_k(\rho, \rho')$  genau dann eine Funktionenalgebra, wenn  $g = \rho'$  gilt.

**Beweis:** Wegen §2 folgt aus  $\rho = \rho'$ , daß  $\text{Polp}(\rho, \rho')$  eine Funktionenalgebra ist. Im weiteren sei  $\rho' \subset \rho$  und  $\underline{a} \in \rho \setminus \rho'$ . Dann folgt  $e_1^1(\underline{a}) = \underline{a}$  (§1) und somit  $e_1^1 \notin \text{Polp}(\rho, \rho')$ , womit in diesem Falle  $\text{Polp}(\rho, \rho')$  keine Funktionenalgebra ist, was den Beweis des Lemmas abschließt.

Wir führen jetzt einige Operationen für Relationenpaare ein. Dazu sei  $\Omega_1 := \{\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \text{pr}, \sim\}$ , wobei die Elemente von  $\Omega_1$  als Operationen über Relationen wie in §2 definiert seien. Wenn  $\omega \in \Omega_1 \setminus \{\nabla\}$  ist, so sei für das Relationenpaar  $(\rho, \rho') \in C_k$

$\omega(\rho, \rho') := (\omega\rho, \omega\rho').$

Offenbar ist  $\omega(\rho, \rho') \in C_k.$

$\nabla(\rho, \rho')$  sei für beliebiges  $(\rho, \rho') \in C_k$  wie folgt definiert:

$\nabla(\rho, \rho') := (\nabla\rho, \nabla\rho \cap \nabla\rho').$

Damit ist gesichert, daß mit  $(\rho, \rho')$  auch  $\nabla(\rho, \rho')$  in  $C_k$  liegt.

Es gilt  $\nabla(\rho, \rho') = (\nabla\rho, \nabla\rho')$  offenbar genau dann nicht, wenn  $\rho \neq \emptyset$  und  $\rho' = \emptyset$  ist. Für  $\rho \neq \emptyset$  ist  $\nabla(\rho, \emptyset) = (\nabla\rho, \emptyset)$ , und es gilt in diesem Falle  $\text{Polp}(\rho, \emptyset) = \text{Polp}(\nabla\rho, \emptyset) = \emptyset$ . In jedem anderen Falle handelt es sich bei der Operation  $\nabla$  um das Hinzufügen einer fiktiven ersten Koordinate in beiden Komponenten des Relationenpaares.

Da es sich bei den Operationen  $\zeta$  und  $\tau$  nur um das simultane Vertauschen von Zeilen und bei  $\sim$  um das Verdoppeln der ersten Zeile beider Komponenten handelt, gilt somit das

Lemma 4: Mit  $\omega \in \{\zeta, \tau, \nabla, \sim\}$  und  $(\varrho, \varrho') \in C_k$  ist

$$\text{Polp}_k(\varrho, \varrho') = \text{Polp}_k \omega(\varrho, \varrho').$$

Lemma 5: Mit  $\omega \in \{\Delta, \text{pr}\}$  und  $(\varrho, \varrho') \in C_k$  ist

$$\text{Polp}_k(\varrho, \varrho') \in \text{Polp}_k \omega(\varrho, \varrho').$$

Beweis: Falls  $\omega(\varrho, \varrho') \in \{(\emptyset, \emptyset), (\varrho, \varrho')\}$  ist, gilt offenbar die Behauptung des Lemmas.

Im weiteren sei also  $\omega(\varrho, \varrho') \neq (\emptyset, \emptyset)$ ,  $(\varrho, \varrho') \in C_k^{(m)}$ ,  $m \geq 2$

und  $f \in \text{Polp}_k^{(n)}(\varrho, \varrho')$  ( $m, n$  positive ganze Zahlen).

Für  $i = 1, 2, \dots, n$  sei  $\underline{a}_i := [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m-1, i}] \in \varrho$ .

Wir unterscheiden jetzt die beiden folgenden Fälle:

Fall 1:  $\omega = \Delta$ . Für  $i = 1, 2, \dots, n$  ist

$$\underline{a}_i := [a_{11}, a_{1i}, a_{21}, a_{2i}, \dots, a_{m-1, i}] \in \varrho \text{ und}$$

$$f(\underline{a}'_1, \underline{a}'_2, \dots, \underline{a}'_n) = \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{t1}, a_{t2}, \dots, a_{tn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix} \in \varrho',$$

wobei  $t := m-1$  sei. Wegen  $[b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] \in \Delta \varrho'$  gilt  $f \in \text{Polp}_\Delta(\varrho, \varrho')$ .

Fall 2:  $\omega = \text{pr}$ . Für  $i = 1, 2, \dots, n$  gibt es ein  $u_i \in E_k$ , so daß

$$\underline{a}_i := [u_i, a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m-1, i}] \in \varrho \text{ gilt. Es ist}$$

$$f(\underline{a}'_1, \underline{a}'_2, \dots, \underline{a}'_n) = \begin{pmatrix} f(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{t1}, a_{t2}, \dots, a_{tn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix} \in \varrho'$$

mit  $t := m-1$ . Damit folgt  $[b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] \in \text{pr} \varrho'$  und

$f \in \text{Polp}_k \text{pr}(\varrho, \varrho')$ , was den Beweis des Lemmas abschließt.

Seien  $(\varrho, \varrho'), (\mu, \mu') \in C_k$  und  $\times$  die in §2 definierte zweistellige Operation für Relationen. Wir definieren

$$(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu') := (\varrho \times \mu, \varrho' \times \mu').$$

Offenbar ist wiederum  $(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu') \in C_k$ .

**Lemma 6:** Es ist  $\text{Polp}_k \{(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu')\} = \text{Polp}_k \{(\varrho, \varrho'), (\mu, \mu')\}$ .

**Beweis:** Falls  $\emptyset \in \{\varrho, \mu\}$  gilt, ist  $(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu') = (\emptyset, \emptyset)$ .

Da  $\text{Polp}_k(\emptyset, \emptyset) = P_k$  ist, haben wir in diesem Falle den Beweis

erbracht. Im weiteren sollen also  $\varrho$  und  $\mu$  nichtleere Relationen sein. Falls  $\emptyset \in \{\varrho', \mu'\}$  gilt, ist  $(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu') = (\varrho \times \mu, \emptyset)$  und  $\varrho \times \mu \neq \emptyset$ . Somit ist hier  $\text{Polp}(\varrho \times \mu, \emptyset) = \emptyset$ . Da andererseits  $\emptyset \in \{\text{Polp}(\varrho, \varrho'), \text{Polp}(\mu, \mu')\}$  gilt, können wir jetzt sogar noch  $\emptyset \notin \{\varrho', \mu'\}$  voraussetzen.

Es sei  $(\varrho, \varrho') \in C_k^{(m)}$ ,  $(\mu, \mu') \in C_k^{(r)}$  und

$f \in \text{Polp}_k^{(n)}\{(\varrho, \varrho'), (\mu, \mu')\}$ , wobei  $m$ ,  $n$  und  $r$  positive ganze

Zahlen seien. Dann ist  $(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu') \in C_k^{(m+r)}$ . Für

$i = 1, 2, \dots, n$  sei  $[a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m+r, i}] \in \varrho \times \mu$ . Mit  $t := m+r$

gilt

$$f \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{t1}, a_{t2}, \dots, a_{tn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Wegen  $[a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}] \in \varrho$  und  $[a_{m+1, 1}, a_{m+2, 1}, \dots, a_{m+r, 1}] \in \mu$

für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt  $[b_1, b_2, \dots, b_m] \in \varrho'$  und

$[b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_{m+r}] \in \mu'$ . Folglich ist

$[b_1, b_2, \dots, b_{m+r}] \in \varrho' \times \mu'$ ,  $f \in \text{Polp}\{(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu')\}$  und das

Lemma bewiesen.

**Lemma 7:** Für  $\emptyset \notin \{\varrho, \mu\}$  ist

$$\text{Polp}_k\{(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu')\} = \text{Polp}_k\{(\varrho, \varrho'), (\mu, \mu')\}.$$

Beweis: Wegen Lemma 6 und dessen Beweis genügt es zu zeigen, daß  $\text{Polp}\{(\varrho, \varrho'), (\mu, \mu')\} \supseteq \text{Polp}\{(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu')\}$  für  $\emptyset \notin \{\varrho', \mu'\}$  gilt. Lediglich unter Zuhilfenahme der Operationen  $\text{pr}$ ,  $\zeta$  und  $\tau$  kann man aus  $(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu')$  die Relationenpaare  $(\varrho, \varrho')$  und  $(\mu, \mu')$  erzeugen. Aus den Lemmata 1, 4 und 5 folgt

$$\begin{aligned} \text{Polp}\{(\varrho, \varrho') \times (\mu, \mu')\} &\subseteq \text{Polp}(\varrho, \varrho') \cap \text{Polp}(\mu, \mu') \\ &= \text{Polp}\{(\varrho, \varrho'), (\mu, \mu')\}. \end{aligned}$$

was den Beweis des Lemmas abschließt.

Aus der Definition des Bewahrens eines Relationenpaares folgt unmittelbar das

Lemma 8: Für  $(\varrho, \varrho') \in C_k$  und  $\varrho \supseteq \varrho'' \supseteq \varrho'$  ist

$$\text{Polp}_k(\varrho'', \varrho') \supseteq \text{Polp}_k(\varrho, \varrho') \text{ und } \text{Polp}_k(\varrho, \varrho'') \supseteq \text{Polp}_k(\varrho, \varrho').$$

Definition 1: Für  $(\varrho, \varrho') \in C_k$  sei durch  $d_v(\varrho, \varrho')$  jedes  $(\varrho'', \varrho')$  und durch  $d_h(\varrho, \varrho')$  jedes  $(\varrho, \varrho'')$  mit  $\varrho \supseteq \varrho'' \supseteq \varrho'$  erzeugt.

Wir nennen  $d_v$  und  $d_h$  (einstellige) Multioperationen.

Damit gilt das

Lemma 9: Für  $F \in P_k$  ist  $\text{Invp}_k F$  gegenüber den Operationen

$\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \text{pr}, \sim$  und  $\times$  und den Multioperationen  $d_v$  und  $d_h$  abgeschlossen, und es ist  $(\emptyset, \emptyset) \in \text{Invp}_k F$ .

Wenn wir die volle Relationenpaaralgebra über  $E_k$  (eine universale Algebra)

$$C_k = [C_k; (\emptyset, \emptyset), \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \text{pr}, \sim, \times, d_v, d_h]$$

vom Typ  $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$  betrachten, deren Teilalgebren wir Relationenpaaralgebren über  $E_k$  nennen, wobei für  $Q \subseteq C_k$  mit  $\bar{Q}$  die durch  $Q$  erzeugte Relationenpaaralgebra bezeichnet sei, so besteht unser Ziel darin, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1: Es gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Wenn  $Q \subseteq C_k$  und  $F \in P_k$  ist, so ist  $\text{Polp}_k Q$  eine iterative Algebra und  $\text{Invp}_k F$  eine Relationenpaaralgebra über  $E_k$ .
- (2) Wenn  $Q$  eine Relationenpaaralgebra und  $F$  eine iterative Algebra über  $E_k$  ist, so gibt es ein  $F' \in P_k$  und ein  $Q' \subseteq C_k$  mit  $\text{Invp}_k F' = Q$  und  $\text{Polp}_k Q' = F$ .

- (3) Für  $Q, Q' \in C_k$  und  $F, F' \in P_k$  gilt stets  
 $Q \in \text{Invp}_k \text{Polp}_k Q$ ,  $F \in \text{Polp}_k \text{Invp}_k F$ ,  
wenn  $Q' \in Q$  und  $F' \in F$ , so  $\text{Polp}_k Q' \supseteq \text{Polp}_k Q$  und  
 $\text{Invp}_k F' \supseteq \text{Invp}_k F$ ,  $\text{Polp}_k \text{Invp}_k \text{Polp}_k Q = \text{Polp}_k Q$ ,  
 $\text{Invp}_k \text{Polp}_k \text{Invp}_k F = \text{Invp}_k F$ .

Mit diesem Satz ist durch Polp und Invp eine Galois-Korrespondenz zwischen den Teilmengen von  $P_k$  und denen von  $C_k$  gegeben (die iterativen Algebren und die Relationenpaaralgebren über  $E_k$  stehen in Galois-Beziehung zueinander).

Der dritte Teil dieser Arbeit wird im Beweis dieses Satzes bestehen.

Bei der Definition von  $\underline{C}_k$  traten Multioperationen auf. Will man dies umgehen, muß man die Resultate der §§ 3 (Teil I) und 4 zusammenführen. Das soll auch den Abschluß diesen zweiten Teiles bilden. An dieser Stelle sei jedoch bereits bemerkt, daß für Anwendungen der in diesem Paragraphen bereitgestellte Kalkül völlig ausreichend ist und daß der Verzicht auf die Multioperationen von rein algebraischem Interesse ist.

### 5. Relationenmatrizenpaare

Die Bezeichnungen für Relationenmatrizen bzw. Relationenpaare werden unverändert von den §§ 3 und 4 übernommen. Seien  $M$  und  $M'$  Relationenmatrizen über  $E_k$ . Wir bezeichnen  $(M, M')$  genau dann als Relationenmatrizenpaar über  $E_k$ , wenn  $(\varrho_M, \varrho_{M'})$  ein Relationenpaar über  $E_k$  ist. Die Menge aller Relationenmatrizenpaare über  $E_k$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}_k$ . Wir sagen, daß eine Funktion  $f \in P_k$  das Relationenmatrizenpaar  $(M, M') \in \mathcal{R}_k$  bewahrt, wenn  $f$  das Relationenpaar  $(\varrho_M, \varrho_{M'}) \in C_k$  bewahrt.

Für  $F \in P_k$  bzw.  $Q \in \mathcal{R}_k$  sei  $\text{Minvp}_k F$  die Menge aller Relationenmatrizenpaare aus  $\mathcal{R}_k$ , die von jeder Funktion aus  $F$  bewahrt werden, bzw.  $\text{Mpolp}_k Q$  die Menge aller Funktionen aus  $P_k$ , die jedes Relationenmatrizenpaar aus  $Q$  bewahren. Es gelten die beiden folgenden Lemmata, deren Beweise wie die entsprechenden von §4 verlaufen.

Lemma 1: Für alle  $Q \in \mathcal{R}_k$  ist  $\text{Mpolp}_k Q = \bigcap_{(M, M') \in Q} \text{Mpolp}_k \{(M, M')\}$ .

Lemma 2: Für alle  $Q \in \mathcal{M}_k$  ist  $\text{Mpolp}_k Q$  eine iterative Algebra über  $E_k$ .

Es seien  $\zeta, \tau, \bar{\zeta}, \bar{\tau}, \Delta, \nabla, \text{pr}, \sim, \times$  die in §3 eingeführten Operationen für Relationenmatrizen. Des weiteren sei für zwei beliebige Relationenmatrizen  $M$  und  $M'$  aus  $\mathcal{M}_k$  mit  $M \cap M'$  die Relationenmatrix bezeichnet, die entsteht, wenn man aus  $M'$  genau die Spalten herausstreicht, die keine Spalten von  $M$  sind. Insbesondere ist  $M \cap M' = \emptyset$ , wenn  $M$  und  $M'$  eine unterschiedliche Anzahl von Zeilen besitzen.

Wir führen einige Operationen für Relationenmatrizenpaare ein. Dazu seien  $(L, L'), (M, M') \in \mathcal{M}_k$ . Es sei

- (1)  $\omega(M, M') := (\omega M, \omega M')$  für  $\omega \in \{\zeta, \tau, \Delta, \text{pr}, \sim\}$ ,
- (2)  $\nabla(M, M') := (\nabla M, \nabla M \cap \nabla M')$ ,
- (3)  $\omega_v(M, M') := (\omega M, M')$  und  $\omega_h(M, M') := (M, \omega M')$  für  $\omega \in \{\bar{\zeta}, \bar{\tau}\}$ ,
- (4)  $(L, L') \times (M, M') := (L \times M, L' \times M')$ .

Abschließend definieren wir noch die beiden Operationen  $d_v$  und  $d_h$  für beliebiges  $(M, M') \in \mathcal{M}_k$ .

Falls  $\mathfrak{g}_{M'} \subset \mathfrak{g}_M$  ist, so entstehe  $d_v(M, M')$  aus  $(M, M')$ , indem in  $M$  die erste Spalte, die nicht in  $M'$  als Spalte vorkommt, gestrichen wird, und es sei  $d_h(M, M') := (M, M' \underline{a})$ , wobei  $\underline{a}$  die erste Spalte von  $M$  ist, die in  $M'$  nicht als Spalte vorkommt, und  $M' \underline{a}$  die Matrix ist, die aus  $M'$  entsteht, indem die Spalte  $\underline{a}$  als neue letzte Spalte angefügt wird.

Falls  $\mathfrak{g}_{M'} = \mathfrak{g}_M$  ist, so sei  $d_v(M, M') := d_h(M, M') := (M, M')$ .

Die Aussagen der folgenden vier Lemmata sind entweder offensichtlich oder ihre Beweise sind analog denen der entsprechenden Aussagen von §4.

Lemma 3: Für  $(M, M') \in \mathcal{M}_k$  und  $\omega \in \{\zeta, \tau, \bar{\zeta}_v, \bar{\zeta}_h, \bar{\tau}_v, \bar{\tau}_h, \nabla, \sim\}$  ist  $\text{Mpolp}_k \{(M, M')\} = \text{Mpolp}_k \{\omega(M, M')\}$ .

Lemma 4: Für  $(M, M') \in \mathcal{M}_k$  und  $\omega \in \{\Delta, \text{pr}, d_v, d_h\}$  ist  $\text{Mpolp}_k \{(M, M')\} \subseteq \text{Mpolp}_k \{\omega(M, M')\}$ .

Lemma 5: Für  $(M, M'), (L, L') \in \mathcal{M}_k$  ist

$$\text{Mpolp}_k \{(M, M'), (L, L')\} \subseteq \text{Mpolp}_k \{(M, M') \times (L, L')\}.$$

Falls außerdem  $\emptyset \notin \{M, L\}$  ist, so gilt sogar

$$\text{Mpolp}_k \{(M, M'), (L, L')\} = \text{Mpolp}_k \{(M, M') \times (L, L')\}.$$

Lemma 6: Wenn  $(M, M') \in \mathcal{M}_k$  und  $\mathfrak{g}_M \supseteq \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}_{M'}$  ist, so kann man allein durch die Operationen  $\bar{\xi}_v, \bar{\xi}_h, \bar{\tau}_v, \bar{\tau}_h, d_v, d_h$  jedes Relationenmatrizenpaar  $(L, L') \in \mathcal{M}_k$  mit  $\mathfrak{g}_L = \mathfrak{g}_M$  und  $\mathfrak{g}_{L'} = \mathfrak{g}$  und auch jedes Relationenmatrizenpaar  $(N, N') \in \mathcal{M}_k$  mit  $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}_{N'} = \mathfrak{g}_{M'}$  erzeugen.

Des weiteren ist  $(\emptyset, \emptyset) \in \text{Minvp}_k F$  für alle  $F \in P_k$ . Wenn wir die universale Algebra (die volle Relationenmatrizenpaaralgebra über  $E_k$ )

$$\mathcal{M}_k = [\mathcal{M}_k; (\emptyset, \emptyset), \xi, \tau, \bar{\xi}_v, \bar{\xi}_h, \bar{\tau}_v, \bar{\tau}_h, \Delta, \nabla, \text{pr}, \sim, \times, d_v, d_h]$$

vom Typ  $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$  betrachten, deren Teilalgebren wir Relationenmatrizenpaaralgebren über  $E_k$  nennen, so erhält man analog dem Beweis von Satz 1 von §4 den

Satz 1: Es gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Wenn  $Q \in \mathcal{M}_k$  und  $F \in P_k$  ist, so ist  $\text{Mpolp}_k Q$  eine iterative Algebra und  $\text{Minvp}_k F$  eine Relationenmatrizenpaaralgebra über  $E_k$ .
- (2) Wenn  $Q$  eine Relationenmatrizenpaaralgebra und  $F$  eine iterative Algebra über  $E_k$  ist, so gibt es ein  $F' \in P_k$  und ein  $Q' \in \mathcal{M}_k$  mit  $\text{Minvp}_k F' = Q$  und  $\text{Mpolp}_k Q' = F$ .
- (3) Für  $Q, Q' \in \mathcal{M}_k$  und  $F, F' \in P_k$  gilt stets
 
$$Q \subseteq \text{Minvp}_k \text{Mpolp}_k Q, F \subseteq \text{Mpolp}_k \text{Minvp}_k F,$$
 wenn  $Q' \subseteq Q$  und  $F' \subseteq F$ , so  $\text{Mpolp}_k Q' \supseteq \text{Mpolp}_k Q$  und  $\text{Minvp}_k F' \supseteq \text{Minvp}_k F$ ,  

$$\text{Mpolp}_k \text{Minvp}_k \text{Mpolp}_k Q = \text{Mpolp}_k Q, \text{Minvp}_k \text{Mpolp}_k \text{Minvp}_k F = \text{Minvp}_k F.$$

Mit diesem Satz ist durch  $Mp_{lp}$  und  $Minvp$  eine Galoiskorrespondenz zwischen den Teilmengen von  $P_k$  und denen von  $\mathcal{R}_k$  gegeben (die iterativen Algebren und die Relationenmatrizenpaaralgebren über  $E_k$  stehen in Galoisbeziehung zueinander).

### Literatur

/14/ Harnau, W.: Ein verallgemeinerter Relationenbegriff für die Algebra der mehrwertigen Logik, Teil I (Grundlagen). Rostock. Math. Kolloq. 28, 5 - 17 (1985)

eingegangen: 07. 11. 1986

### Verfasser:

Doz. Dr. sc. nat. W. Harnau  
Pädagogische Hochschule "K. F. W. Wander"  
Sektion Mathematik  
Wigardstraße 17, PSF 365  
Dresden  
DDR-8060

Bert Schröder

Über abgeschlossene Mengen von linearen Funktionen in  $P_{2p}$   
 ( $p$  prim,  $p > 2$ )

---

### Einleitung

Die vorliegende Arbeit möchte einen Beitrag zum Studium von Funktionenalgebren, den Algebren der Funktionen der  $k$ -wertigen Logik, leisten. Genauer: Es werden Funktionenalgebren aus linearen Funktionen weiterstudiert, für die schon eine Reihe von Resultaten vorliegen. So wurden von A. A. Salomaa in /5/ bzw. von J. Bagyinszki und J. Demetrovics in /1/ sämtliche Funktionenalgebren linearer Funktionen über Primzahllogiken ermittelt. Für den quadratfreien Fall von  $k$  zeigte Á. Szendrei in /6/, daß es nur endlich viele solcher Funktionenalgebren (bei festem  $k$ ) gibt. Weitere Ergebnisse stammen von D. Lau. Von ihr wurden z. B. sämtliche maximalen Funktionenteilalgebren der Algebra aus linearen Funktionen bestimmt.

Unser Ziel ist es, im folgenden - ausgehend von bekannten Resultaten - die submaximalen Funktionenalgebren der Algebra aus linearen Funktionen über einer  $2p$ -elementigen Menge ( $p$  prim,  $p > 2$ ) zu ermitteln. Wegen der Vielzahl von Publikationen über lineare Funktionen soll hier auf eine ausführliche Einordnung dieser Untersuchungen im Rahmen der Funktionenalgebrentheorie verzichtet werden. Weiterhin verweisen wir bei den nachfolgend nicht definierten Begriffen auf /3/.

Wie in /3/ sei  $E_k$  die Menge  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  und  $P_k$  die Menge aller  $n$ -stelligen Funktionen ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) über  $E_k$ . Als Operationen über  $P_k$  betrachten wir hier wie üblich das

- Ummunieren und Identifizieren von Variablen,
- Hinzufügen von fiktiven Variablen und
- Einsetzen von Funktionen in Funktionen

(auch ausdrückbar durch gewisse elementare Operationen  $\otimes, \otimes, \Delta, \nabla, *$ ). Den Abschluß von  $A$  ( $\notin P_k$ ) kennzeichnen wir mit  $[A]$ . Mengen  $A$  mit  $A = [A]$  heißen abgeschlossene Mengen bzw.

Teilklassen von A.

Nachfolgend wollen wir zunächst eine Zusammenstellung der häufig von uns verwendeten Bezeichnungen vornehmen, sowie einige bekannte Eigenschaften von Gruppen angeben.

Die Menge aller Teilklassen einer Teilklasse A von  $P_k$  bildet bezüglich der Operationen  $\wedge (:= \cap)$  und  $\vee (A \vee B := [A \cup B])$  für beliebige abgeschlossene Teilmengen  $A, B \subseteq P_k$  einen Verband, der mit  $\underline{V}_k(A)$  bezeichnet werden soll. Anstelle von  $\underline{V}_k(P_k)$  schreiben wir auch  $\underline{V}_k$ . Für  $f^n \in P_k$  sei  $\underline{V}_k(A, [\{f^n\}])$  (oder kürzer  $\underline{V}_k(A, f^n)$ ) der Verband aller Teilklassen von A, die die Funktion  $f^n$  enthalten. Die Menge der linearen Funktionen sei

$$L_k := \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f^n \in P_k \mid \exists a_i \in E_k : f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{k} \right\}$$

(kurz mit L bezeichnet).

Bezeichnungen für abgeschlossene Teilmengen von L sind:

$$U_q := \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f^n \in L_k \mid \exists a_0, \dots, a_n \in E_k \exists j \in \{1, \dots, n\} : \right.$$

$$\left. f(\tilde{x}) := a_0 + a_j x_j + q \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_i x_i \pmod{k} \right\},$$

$$Q_t := \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f^n \in L_k \mid \exists a_0, \dots, a_n \in E_k : f(\tilde{x}) := a_0 + t \cdot \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{k} \right\},$$

$$R_q := U_q \cup \left( \bigcup_{\substack{t \mid q, t \neq 1}} Q_t \right),$$

$$S_{xp} := \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f^n \in L_k \mid \exists a_0, \dots, a_n \in E_k : f(\tilde{x}) := a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{k} \right. \\ \left. \wedge a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \pmod{p} \right\} \text{ für Teiler } q, t, p \text{ von } k$$

und

$$T_g := L_k \cap \text{Pol } g \text{ für } \emptyset \subset g \subset E_k.$$

Folgende Eigenschaften von Funktionen aus  $T_g$  prüft man leicht nach:

**Lemma 1:** Bezeichne  $g$  eine Nebenklasse der Gruppe  $(E_k, +)$  nach einer Untergruppe  $U$ , d. h., es existiere ein  $\alpha \in E_k$  mit  $g = \alpha + U$ . Außerdem sei  $f$  durch

$$f(\vec{x}) := a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - \alpha) \text{ gegeben.}$$

Dann gilt

$$f \in T_g \iff a_0 \in g.$$

Bekanntlich ist  $G := (\{1, 3, \dots, p-2, p+2, \dots, m-1\}, \cdot \text{ mod } m)$  für  $m = 2p$  ( $p$  prim,  $p > 2$ ) eine zyklische Gruppe, die isomorph zur Multiplikationsgruppe des Restklassenkörpers mod  $p$  ist.

Deshalb existiert für jedes  $a \in G$  ein  $\alpha \in E_p$  mit  $a = t^\alpha \text{ mod } 2p$ . Die Gruppe  $\underline{G} := (\{2, 4, \dots, 2p-2\}, \cdot \text{ mod } 2p)$  ist offenbar isomorph zu  $G$ . Sei  $r_d$  die durch  $r_d(x, y, z) := x+dy-dz \text{ mod } k$  definierte Funktion, für die sich Lemma 2 aus /3/ noch etwas verschärfen läßt, falls  $k = 2p$ ,  $p > 2$  und  $p$  prim ist:

**Lemma 2:** Sei  $f(\vec{x}) = a_0 + a_1 x_1 + d \cdot \sum_{i=2}^n a_i x_i$  ( $\in L_{2p}$ ) und

$a_1 \nmid k = 1$ ,  $d \in \{2, p\}$  sowie  $da_2$  ungleich Null. Dann ist  $r_d$  eine Superposition über  $f$ .

**Beweis:** Nach dem Beweis von Lemma 2 aus /3/ können wir o.B.d.A.  $a_1 = 1$  annehmen. Wir untersuchen zwei Fälle:

**1. Fall:**  $d = p$ .

**1.1:**  $a_2 = p$ .

Wegen  $p^2 = p \text{ (mod } 2p)$  kann o.B.d.A.  $a_2 = 1$  angenommen werden. Somit erhalten wir eine Funktion, die die Voraussetzungen von Lemma 2 aus /3/ erfüllt, wonach  $r_p$  dann eine Superposition über  $f$  ist.

**1.2:**  $a_2 \neq p$ .

Offenbar erfüllt in diesem Fall  $f$  die Voraussetzungen von Lemma 2 aus /3/.

**2. Fall:**  $d = 2$ .

**2.1:**  $a_2 \in \{2, 4, \dots, 2p-2\}$ .

Die Menge aller geraden Zahlen von  $E_{2p}$  bildet bezüglich  $+\text{ mod } 2p$

eine Gruppe der Ordnung  $p$ . Wir bilden für beliebige  $i$  die Superpositionen  $f_1(x,y,z) := f(x,y,z,\dots,z)$  und  $f_i(x,y,z) := f_{i-1}(f_1(x,y,z),y,z)$ ,  $i = 2,3,\dots$ . Offenbar existiert dann ein  $i$  mit der Eigenschaft, daß  $f_i$  die Voraussetzungen von Lemma 2 aus /3/ erfüllt.

2.2:  $a_2 \in \{1,3,\dots,p-2,p+2,\dots,2p-1\}$ .

$f$  erfüllt in diesem Fall die Voraussetzungen von Lemma 2 aus /3/. ■

Wie anfangs bereits erwähnt, sind die maximalen Klassen von  $L_k$  bekannt. Nach /3/, Abschnitt 4 sind dies für  $L_{2p}$  die folgenden Klassen:

$U_p, U_2, R_{2p}, S_{xp}, S_{x2}$  und  $L_{2p} \cap \text{Pol } g$  ( $g$  Nebenklasse nach einer maximalen Untergruppe von  $(E_k, + \text{ mod } 2p)$ ). In /3/ wurde bewiesen, daß  $V_k(L,r_1)$  isomorph zum Untergruppenverband des direkten Produktes  $(E_k, +)^2$  ist. Des weiteren wurde eine Formel zur Bestimmung der Mächtigkeit dieses Teilverbandes von  $V_k(L)$  angegeben. Speziell für  $k = 2p$  ergibt sich  $|V_{2p}(L,r_1)| = 15 + 5p$ .

Da  $S_{xp}, S_{x2}$  und  $L_{2p} \cap \text{Pol } g$  ( $g$  Nebenklasse von  $(E_k, +)$  nach einer maximalen Untergruppe) genau diejenigen maximalen Klassen von  $L_{2p}$  sind, die  $r_1$  enthalten, beschränken wir uns wegen obiger Aussagen auf die Bestimmung der maximalen Klassen von  $U_2, U_p$  und  $R_{2p}$ .

### 1. Die maximalen Klassen von $U_2$

Zunächst einige Bezeichnungen für abgeschlossene Teilklassen von  $U_2 \in L_{2p}$ , von denen anschließend gezeigt wird, daß sie die maximalen Klassen von  $U_2$  sind:

$$A_1 := U_2 \cap U_p,$$

$$A_2 := Q_2 \cup [L^1],$$

$$A_3 := U_2 \cap S_{x2},$$

$$A_4 := U_2 \cap S_{xp},$$

$$A_5 := Q_2 \cup (U_2 \cap \text{Pol}(0,2,4,\dots,2p-2)),$$

$$A_{6,i} := U_2 \cap \text{Pol}(i,i+p) \text{ mit } 0 \leq i \leq p-1 \text{ und } i \in \mathbb{N}.$$

Lemma 3: Es gilt  $U_2 = [\{x+1, c_0, r_2\}]$ .

Beweis: Offenbar gilt  $\{c_0, c_1, \dots, c_{2p-1}\} \in [\{c_0, x+1\}]$ .

Da  $r_2(x, y, z) = x+2y+(k-2)z$  ist, lassen sich wegen

$r_2(x, x, c_0) = 3x$  und  $r_2(c_0, x, c_0) = 2x$  auch alle anderen einstelligen Funktionen der Form  $ax$  erzeugen, indem man (mit  $i=1$  beginnend) folgende Superpositionen bildet:  $r_2(2ix, x, c_0) = 2(i+1)x$  und  $r_2((2i+1)x, x, c_0) = (2i+3)x$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Es ist weiter

$\underline{r}_2(x_1, x_2) := r_2(x_1, x_2, c_0(x_1)) = x_1+2x_2$  eine Superposition über  $\{c_0, r_2\}$  und damit auch  $q_m(x) := (\underline{r}_2 * \underline{r}_2 * \dots * \underline{r}_2)(x_1, \dots, x_m) = x_1+2(x_2+\dots+x_m)$ . Sei jetzt  $f^n$  eine beliebige Funktion aus  $U_2$ .

Dann gilt o.B.d.A.  $f^n(x_1, \dots, x_n) = a_0+a_1x_1+2 \sum_{i=2}^n a_i x_i$ ,

$f^n(x_1, \dots, x_n) = q_n(a_0+a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n)$  und somit

$f^n \in [\{c_0, x+1, r_2\}]$ . ■

Lemma 4: Sei  $M \in U_2$ ,  $M \notin A_1$  und  $M \notin A_2$ . Dann gehört  $r_2$  zum Abschluß von  $M$ .

Beweis: Wegen  $M \notin A_1$  findet man im Abschluß von  $M$  eine Funktion  $f^n$  mit  $f(x_1, \dots, x_n) = a_0+a_1x_1+\dots+a_nx_n$ , wobei  $a_1$  und  $a_2$  ungleich Null,  $a_2, \dots, a_n$  aus der Menge der geraden Zahlen von  $E_k$  sind und im Falle  $a_1=p$  außerdem  $a_3$  ungleich Null ist. Folgende Fälle werden von uns deshalb betrachtet:

1. Fall:  $a_1 \nmid k = 1$ .

Nach Lemma 2 gilt  $r_2 \in [\{f\}]$ .

2. Fall:  $a_1$  ist gerade und ungleich Null.

Zum Abschluß von  $M$  gehört die Funktion

$f'(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_3) = a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ , wobei

$a_1$  und  $a_2$  gerade und ungleich Null sind sowie  $a_3$  gerade ist. Es existiert wegen  $M \notin A_2$  im Abschluß von  $M$  eine Funktion  $g^3$  mit  $g^3(x_1, x_2, x_3) = b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$ ,  $b_1$  ungerade,  $b_2 \neq 0$ ,  $b_2$  und

$b_3$  gerade. Nach Fall 1 können wir uns auf  $b_1 = p$  beschränken.

Dann gilt  $g'(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, f'(x_1, x_2, x_3), x_3)$

$= b'_0 + (p + b_2 a_1)x_1 + b_2 a_2 x_2 + (b_3 + b_2 a_3')x_3$ , wobei  $p + b_2 a_1$  ungerade,

$p + b_2 a_1 \neq p$  und  $b_2 a_2 \neq 0$  ist. Folglich ergibt sich auch im

Fall 2 die Behauptung aus Lemma 2.

3. Fall:  $a_1 = p$ .

Da  $f(x_1, x_1, x_2, x_3, \dots, x_3)$  die Bedingungen von Fall 1 erfüllt,

gilt auch hier, daß  $r_2$  zum Abschluß von  $M$  gehört. ■

Lemma 5: Sei  $M \in U_2$ ,  $r_2 \in [M]$  und  $M$  keine Teilmenge von  $A_3$  sowie von  $A_4$ . Dann gehört mindestens eine Konstante zu  $[M]$ .

Beweis: Wegen  $M \notin A_3$  existiert im Abschluß von  $M$  eine Funktion  $f$  mit  $f(x) := \alpha x + \beta$ ,  $\alpha$  gerade und  $\beta$  aus  $E_{2p}$ . Wir betrachten folgende Fälle:

1. Fall:  $\alpha = 0$ .

Da dann  $f = c_0$  ist, gilt die Behauptung.

2. Fall:  $\alpha$  gerade und ungleich Null.

Wegen  $M \notin A_4$  existiert ein  $g$  in  $[M]$  mit  $g(x) = ax + b$  und

$a \notin \{1, p+1\}$ .

2.1:  $\alpha \neq a$  und  $a \neq p + \alpha$ .

Sei  $r_2^{(1)}(x) := f(x)$ . Durch  $r_2^{(i+1)}(x) := r_2(r_2^{(i)}(x), g(x), f(x))$

$= (\alpha + 2i(a - \alpha))x + \beta + 2i(b - \beta)$  kann für ein gewisses  $i \geq 1$  die Konstante  $c_{\beta + 2i(b - \beta)}$  als Superposition über  $M$  erhalten werden. Das

$i$  ergibt sich aus  $\alpha + 2i(a - \alpha) = 0 \pmod{2p}$ . Diese Gleichung hat unter den angenommenen Voraussetzungen immer eine Lösung. Für  $a - \alpha$  gerade und ungleich Null folgt diese Tatsache aus den Gruppeneigenschaften von  $\underline{G}$ . Falls  $a - \alpha$  ungerade ist, kann der Beweis indirekt geführt werden. Angenommen, es existieren gewisse  $l$  und  $u$  mit  $2l(a - \alpha) = 2u(a - \alpha)$ ,  $l \neq u$ ,  $0 < l \leq p-1$  und  $0 < u \leq p-1$ .

Da  $a - \alpha$  ungerade und von  $p$  verschieden ist, existiert  $(a - \alpha)^{-1}$ . Hieraus ergibt sich dann wegen  $2l = 2u$  ein Widerspruch zur Annahme. Somit sind die  $2i(a - \alpha)$  für alle  $i$  aus  $E_p \setminus \{0\}$  paarweise verschieden, und damit gilt  $\alpha + 2j(a - \alpha) = 0$  für gewisses  $j$ .

2.2:  $a = p + \alpha$ .

Durch  $f(f(x)) = (a-p)^2 x + ((a-p)+1)\beta$  kann dieser Fall auf Fall 2.1 zurückgeführt werden, da  $\alpha \neq \alpha^2$  für  $\alpha \notin \{0, p+1\}$  gilt.

2.3:  $\alpha = a$ .

Es ist  $f(f(x)) = a^2 x + (a+1)\beta$ . Folglich ergibt sich hier die Behauptung nach Fall 2.1. ■

Lemma 6: Sei  $M \in U_2$ ,  $c_\alpha \in [M]$  für ein gewisses  $\alpha$ ,  $r_2 \in [M]$ ,  $M$  keine Teilmenge von  $A_5$  und den Mengen  $A_{6,i}$  für alle  $i$  mit  $0 \leq i \leq p-1$ . Dann sind sämtliche Konstanten von  $P_{2p}$  Superpositionen über  $M$ .

Beweis:

1. Fall:  $\alpha$  gerade.

Wegen  $M \notin A_5$  existiert eine Funktion  $f^n \in M \setminus A_5$ . Nach Lemma 1 gilt  $f(c_\alpha, \dots, c_\alpha) = c_\beta$  mit ungeradem  $\beta$ .

1.1:  $\alpha \neq \beta + p$ .

Sei  $h^{(1)}(x) := c_\alpha$ . Durch  $h^{(i+1)}(x) := r_2(h^{(i)}(x), c_\alpha(x), c_\beta(x)) = c_{\alpha+2i(\alpha-\beta)}$  für  $i = 1, 2, \dots, p-1$  erhalten wir alle geraden Konstanten und somit auch  $c_0$  und  $\frac{c_{\beta-1}}{2}$ .

Mittels  $r_2(c_\beta, \frac{c_{\beta-1}}{2}, c_0) = c_1$  und der Konstruktion

$r_2(c_1, c_{2j}, c_0) = c_{2j+1}$  für  $j = 1, 2, \dots, p$  bekommen wir auch alle ungeraden Konstanten.

1.2:  $\alpha = \beta + p$ .

Wegen  $M \notin A_{6,\alpha}$  existiert eine Funktion in  $M$ , die  $\{\alpha, \beta\}$  nicht bewahrt. Einsetzen von  $c_\alpha$  und  $c_\beta$  in diese Funktion liefert folglich eine Konstante  $c_\varepsilon$  mit  $\varepsilon \notin \{\alpha, \beta\}$ . Somit folgt die Behauptung nach Fall 1.1, da  $\beta \neq \varepsilon + p$  für gerades  $\varepsilon$  und  $\alpha \neq \varepsilon + p$  für ungerades  $\varepsilon$  ist.

2. Fall:  $\alpha$  ungerade.

Wegen  $M \notin A_5$  existiert ein  $g \in M \setminus A_5$  mit  $g(x_1, \dots, x_n) = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ , wobei  $b_0$  und  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$  ungerade sind. Folglich ist  $g(c_\alpha, \dots, c_\alpha) = c_\gamma \in [M]$ ,  $\gamma$  gerade,

und die Behauptung folgt aus Fall 1. ■

**Lemma 7:** Sei  $M \in U_2$ ,  $\{r_2, c_0, c_1, \dots, c_{2p-1}\} \in [M]$  und  $M$  keine Teilmenge von  $A_5$ . Dann gehört  $x+1$  zu  $[M]$ .

**Beweis:** Wegen  $M \notin A_5$  und  $c_0 \in [M]$  folgt die Existenz einer einstelligen Funktion  $f$  in  $[M]$  mit  $f(x) = a+bx$ , wobei  $a$  und  $b$  ungerade sind. Aus  $r_2(x, c_1(x), c_0(x)) = x+2 \in [M]$  folgt, daß alle Funktionen des Typs  $x+2n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq n < p$ ) zu  $[M]$  gehören. Da  $a$  ungerade ist, existiert eine gerade Zahl derart, daß  $a+2t = 1 \pmod{2p}$  gilt. Durch Einsetzen von  $f(x)$  in die entsprechende Funktion  $x+2t$  erhalten wir somit immer Funktionen  $1+bx \in [M]$  mit ungeradem  $b$ . Sei  $h^{(1)}(x) := bx+1$ . Wegen  $h^{(i+1)}(x) := r_2(h^{(i)}(x), x, c_0(x)) = (b+2i)x+1 \in [M]$  für  $i \geq 1, i \in \mathbb{N}$  ist für gewisses  $j$  auch  $h^{(j)}(x) = x+1 \in [M]$ . ■

Als unmittelbare Folgerung aus den Lemmata 3 - 7 ergibt sich

**Lemma 8:** Sei  $M \in U_2$  und  $M \notin B$  für beliebiges  $B \in \{A_i \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{A_{6,i} \mid 0 \leq i \leq p-1\}$ . Dann gilt  $[M] = U_2$ .

Die maximalen Klassen von  $U_2$  befinden sich also unter den zu Beginn dieses Abschnittes eingeführten Mengen. Aus der folgenden Tabelle ist zu ersehen, daß diese Klassen paarweise unvergleichbar sind (+ steht in der Tabelle für das Enthaltensein der entsprechenden Funktion in der maximalen Klasse von  $U_2$ , - für das Nichtenthaltensein).

	$x+p$	$x+1$	$(p+1)x$	$px+j$	$px+i$	$(p+1)x+py$	$(p+1)x+(p+1)y$	$r_2$
$A_1$	+	+	+	+	+	+	-	-
$A_2$	+	+	+	+	+	-	+	-
$A_3$	+	+	-	+	+	+	-	+
$A_4$	+	+	+	-	-	+	-	+
$A_5$	-	-	+	+	+	+	+	+
$A_{6,i}$	+	-	+	-	+	+		+
$A_{6,j}$	+	-	+	+	-	+		+

(mit  $i \neq j$ ).

Damit ergibt sich der

Satz 1: a) Eine Teilmenge  $M$  von  $U_2$  ist genau dann vollständig in  $U_2$ , wenn  $M \not\subseteq B$  für alle  $B \in \{A_i \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{A_{6,i} \mid 0 \leq i \leq p-1\}$  gilt.

b)  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  und  $A_{6,i}$  für  $0 \leq i \leq p-1$  sind genau die maximalen Klassen von  $U_2$ .

## 2. Die maximalen Klassen der Menge der linearen Permutationen von $P_{2p}$

---

Eine beliebige maximale Untergruppe der Gruppe  $G$  (siehe Einleitung) wollen wir in diesem Abschnitt mit  $\underline{U}_m$  bezeichnen. Sei des weiteren  $t$  ein Erzeugendenelement von  $G$ . Wie bereits erwähnt, existiert für jedes  $a \in G$  ein  $\alpha \in E_p$  mit  $a = t^\alpha \text{ mod } 2p$ .

Für alle geraden  $\alpha \in E_p$  bildet  $t^\alpha$  eine Untergruppe von  $G$ , die wir mit  $U$  bezeichnen werden. Außerdem sei

$S_{2p} := \{f(x) = ax + b \mid a \equiv 1 \pmod{2} \wedge b \in E_{2p}\}$  die Menge der linearen Permutationen von  $L_{2p}$ , ferner

$A_{1, \underline{U}_m} := \{f(x) = ax + b \mid a \in \underline{U}_m \wedge b \in E_{2p}\}$  für eine beliebige maximale Untergruppe  $\underline{U}_m$  von  $G$ ,

$A_{2, G} := \{f(x) = ax + b \mid a \in G \wedge b \in E_{2p} \wedge b \text{ gerade}\}$ ,

$A_{2, U} := \{f(x) = ax + b \in S_{2p} \mid (a \in U \Rightarrow b \text{ gerade}) \wedge (a \in G \setminus U \Rightarrow b \text{ ungerade}) \wedge b \in E_{2p}\}$  sowie

$A_{3, i} := \{f(x) = ax + (a-1)i, f(x) = ax + (a-1)i + p \mid a \in G\}$  für  $i \in E_p$ .

Folgendes Lemma prüft man leicht nach:

Lemma 9: Die Teilmengen  $A_{1, \underline{U}_m}, A_{2, G}, A_{2, U}, A_{3, i}$  von  $S_{2p}$  sind bezüglich  $x$  abgeschlossen.

Lemma 10: Es gilt  $S_{2p} = [\{tx, x+1\}]_x$ .

Beweis: Da  $\langle t \rangle = G$  ist, erhalten wir durch Superposition über  $tx$  alle Funktionen der Form  $f(x) = ax$  mit  $a \in G$ . Hieraus folgt unmittelbar  $[\{tx, x+1\}]_x = S_{2p}$ . ■

**Lemma 11:** Sei  $M$  eine Teilmenge von  $S_{2p}$  und  $M \not\subseteq A_{1, \underline{U}_m}$  für alle  $\underline{U}_m$ . Dann existiert zu jedem Erzeugendenelement  $t$  von  $G$  ein  $\alpha \in E_{2p}$  mit  $tx + \alpha \in [M]$ .

**Beweis:** Laut Voraussetzung existiert für jedes  $\underline{U}_m$  eine Funktion  $f_{\underline{U}_m}(x) = a_{\underline{U}_m}x + b_{\underline{U}_m} \in [M] \setminus A_{1, \underline{U}_m}$ , d. h., es ist  $a_{\underline{U}_m} \notin \underline{U}_m$  für jede maximale Untergruppe  $\underline{U}_m$  von  $G$ . Damit gilt  $\langle \bigcup_{\underline{U}_m} \{a_{\underline{U}_m}\} \rangle = G$ , womit  $tx + \alpha \in [M]$  folgt. ■

**Lemma 12:** Sei  $M$  eine Teilmenge von  $S_{2p}$ ,  $M \not\subseteq A$  für beliebiges

$A \in \{A_{2,G}, A_{2,U}\} \cup \bigcup_{i=0}^{p-1} A_{3,i}$  und  $tx + \alpha \in [M]$ .

Dann gehört  $x+1$  zu  $[M]$ .

**Beweis:** Sei  $f(x) = tx + \alpha$ . Mittels  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}$  erhalten wir die Funktion

$$f_n(x) = t^n x + \beta_n, \text{ wobei } \beta_n \begin{cases} \text{gerade, falls } n \text{ gerade,} \\ \in E_{2p}, \text{ falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Sei  $g(x) = ax + b$  und  $g \in M \setminus A_{2,U}$ . Wir betrachten zwei Fälle für  $a$ :

**1. Fall:**  $a \in U$  und  $b$  ungerade.

Da  $f(x) \in [M]$  ist, existiert ein  $n$  mit  $t^n a = 1 \pmod{2p}$ . Wegen  $a \in U$  muß  $n$  gerade sein. Somit gilt

$$g_1(x) := g(f_n(x)) = x + \beta_1 + b = x + b_1 \in [M] \text{ mit ungeradem } b_1.$$

**1.1:**  $b_1 \cap 2p = 1$ .

Als Superposition über  $g_1$  liegt  $x+1$  in  $[M]$ .

**1.2:**  $b_1 \cap 2p = p$ .

Wegen  $M \not\subseteq A_{3,0}$  gibt es eine Funktion  $h_1(x) = c_1x + d_1$  mit  $c_1 \in G$  und  $d_1 \notin \{0, p\}$ .

1.2.1:  $c_1 \in U$ .

Falls  $d_1$  gerade ist, läßt sich durch  $g_1(h_1(x)) = c_1x + d_1 + p$  eine Funktion mit ungeradem Absolutglied erzeugen. Somit können wir uns für  $d_1$  auf den Fall  $d_1 \cap 2p = 1$  beschränken. Analog dem obigen Verfahren finden wir ein gerades  $n$  (wegen  $c_1 \in U$ ) derart, daß zu  $[M]$  eine Funktion  $g_2$  gehört mit  $g_2(x) := h_1(f_n(x)) = x + b_2$ ,  $b_2$  ungleich  $p$  und ungerade, womit die Behauptung aus 1.1 folgt.

1.2.2:  $c_1 \notin U$ .

Aus  $c_1 \notin U$  folgt  $c_1 \neq 1$ . Da nun  $M \notin A_{3,d_1}(c_1-1)^{-1} \pmod p$  ist, existiert eine Funktion  $h_2(x) = c_2x + d_2$  in  $[M]$  mit  $c_2 \in G$  und  $d_2 \notin \{(c_2-1)d_1(c_1-1)^{-1}, (c_2-1)d_1(c_1-1)^{-1} + p\}$ .

Für  $c_2$  betrachten wir folgende Fälle:

1.2.2.1:  $c_2 \notin U$ .

Es gilt  $h_2(h_1(x)) = c_2c_1x + c_2d_1 + d_2$ . Da  $c_1$  und  $c_2$  nicht zu  $U$  gehören, muß ihr Produkt aus  $U$  sein. Ist  $c_2d_1 + d_2 \notin \{0, p\}$ , so kann wegen  $x+p \in [M]$  o.B.d.A.  $c_2d_1 + d_2$  als ungerade und ungleich  $p$  angenommen werden, womit die Behauptung aus 1.1 folgt. Im folgenden beschränken wir uns wegen  $x+p \in [M]$  auf den Fall  $c_2d_1 + d_2 = 0 \pmod{2p}$  und betrachten  $h_1(h_2(x)) = c_1c_2x + c_1d_2 + d_1$ . Nach den obigen Ausführungen bleibt auch hier der Fall  $c_1d_2 + d_1 = 0$  weiter zu untersuchen. Angenommen, es gilt  $c_2d_1 + d_2 = 0 \pmod{2p}$  und  $c_1d_2 + d_1 = 0 \pmod{2p}$ . Dann ist  $d_2(c_1-1) = d_1(c_2-1)$  und (wegen  $c_1 \neq 1$ )  $(1+p)d_2 = d_1(c_2-1)(c_1-1)^{-1}$ . Für gerades  $d_2$  gilt  $d_2 = d_1(c_2-1)(c_1-1)^{-1}$ , für ungerades  $d_2$  haben wir  $d_2 = d_1(c_2-1)(c_1-1)^{-1} + p$ . Laut Voraussetzung dürfen diese Fälle für  $d_2$  nicht auftreten, d. h., die Annahme ist falsch, womit entweder  $c_2d_1 + d_2$  oder  $c_1d_2 + d_1$  von Null verschieden ist und

die Behauptung im Fall 1.2.2.1 gilt.

1.2.2.2:  $c_2 = 1$ .

Dann ist  $h_2(x) = x + d_2$  mit  $d_2 \notin \{0, p\}$ , womit  $x+1$  in  $[M]$  liegt, weil wir uns auf  $d_2 \not\equiv 2p = 1$  wegen  $x+p \in [M]$  beschränken können.

1.2.2.3:  $c_2 \in U \setminus \{1\}$ .

Mit  $h_1(h_2(x)) = c_1 c_2 x + c_1 d_2 + d_1$  erhalten wir eine Funktion, für die  $c_1 \cdot c_2 \pmod{2p}$  nicht aus  $U$  und (weil  $c_2 \not\equiv 1 \pmod{2p}$ ) auch ungleich  $c_1$  ist. Für  $h_2(h_1(x)) = c_2 c_1 x + c_2 d_1 + d_2$  gilt dasselbe. Wegen  $x+p \in [M]$  sei außerdem o.B.d.A.  $\{c_1 d_2 + d_1, c_2 d_1 + d_2\} \in E_p$ . Angenommen, es gelte  $c_1 d_2 + d_1 = d_1 (c_2 - 1) (c_1 - 1)^{-1}$  und  $c_2 d_1 + d_2 = d_1 (c_2 - 1) (c_1 - 1)^{-1}$ . Dann folgt  $d_2 (c_1 - 1) = d_1 (c_2 - 1)$ .

In 1.2.2.1 haben wir hieraus einen Widerspruch zur Voraussetzung abgeleitet. Damit muß die Annahme falsch sein, es sind also  $c_1 d_2 + d_1$  und (oder)  $c_2 d_1 + d_2$  ungleich  $d_1 (c_2 - 1) (c_1 - 1)^{-1}$ . Somit folgt die Behauptung nach 1.2.2.1.

2. Fall:  $a \notin U$  und  $b$  gerade.

Wegen  $M \not\subseteq A_{2,G}$  liegt eine Funktion  $p(x) := p_1 x + p_2$  in  $M$  mit  $p_1 \in G$  und ungeradem  $p_2$ .

2.1:  $p_1 \in U$ .

Nach Fall 1 gilt die Behauptung.

2.2:  $p_1 \notin U$ .

Mit  $p(g(x)) = p_1 a x + p_1 b + p_2$  erhalten wir eine Funktion, für die die Behauptung nach Fall 1 folgt, dann  $p_1 a$  gehört zu  $U$  und  $p_1 b + p_2$  ist ungerade. ■

Als unmittelbare Folgerung aus den Lemmata 9 - 12 ergibt sich

Lemma 13: Sei  $M \subseteq S_{2p}$  und  $M \not\subseteq A$  für alle  $A \in \{A_1, U_m \mid U_m \text{ maximale Untergruppe von } G\} \cup \{A_{2,U}, A_{2,G}\} \cup \{A_{3,1} \mid 1 \in E_p\}$ . Dann gilt  $[M]_* = S_{2p}$ . ■

Die maximalen Klassen von  $S_{2p}$  befinden sich also unter den oben aufgeführten. Man prüft nun leicht nach, daß diese Klassen paarweise unvergleichbar sind. Damit ergibt sich der

Satz 2: a) Eine Teilmenge  $M$  von  $S_{2p}$  ist genau dann vollständig in  $S_{2p}$  bez.  $\ast$ , wenn  $M \neq A$  für beliebige

$$A \in \{A_{1, \underline{u}_m} \mid \underline{u}_m \text{ maximale Untergruppe von } G\} \cup \{A_{2, U}, A_{2, G}\}$$

$$\cup \{A_{3, i} \mid i \in E_p\} \text{ gilt.}$$

b)  $A_{1, \underline{u}_m}$  für alle maximalen Untergruppen  $\underline{u}_m$  von  $G$ ,  $A_{2, U}$ ,  $A_{2, G}$  sowie  $A_{3, i}$  für alle  $i \in E_p$  sind maximale Untergruppen der Gruppe  $(S_{2p}, \ast)$ , und es gibt keine weiteren. ■

### 3. Die maximalen Klassen von $U_p$

Zunächst einige Bezeichnungen für abgeschlossene Teilmengen von  $U_p$  ( $k=2p$ ):

$$B_1 := U_p \cap U_2,$$

$$B_2 := Q_p \cup [L^1],$$

$$B_3 := U_p \cap S_{\ast 2} \text{ und}$$

$$B_4 := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \mid \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in E_k \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} :$$

$$f(\tilde{x}) = a_0 + a_1 x_i + p \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j x_j \wedge a_i \notin \{0, p\}\}.$$

Für alle maximalen Untergruppen  $\underline{u}_m$  von  $G$  definieren wir

$$B_{5, \underline{u}_m} := [\{r_p\} \cup A_{1, \underline{u}_m} \cup \{f(x) = (a+p)x + b \mid a \in \underline{u}_m \wedge b \in E_{2p}\}] \cup Q_p.$$

Weiter sei

$$B_6 := [\{r_p\} \cup A_{2, G} \cup \{f(x) = (a+p)x + b \mid a \in G \wedge b \in E_{2p} \wedge b \text{ gerade}\} \\ \cup \{g(x) = cx + d \mid d \in E_{2p} \wedge d \text{ gerade} \wedge c \in \{0, p\}\}],$$

$$B_7 := [\{r_p\} \cup A_{2, G} \cup \{f(x) = (a+p)x + b + p \mid a \in G \wedge b \in E_{2p} \wedge b \text{ gerade}\} \\ \cup \{c_1, c_3, \dots, c_{2p-1}\} \cup \{g(x) = px + d \mid d \in E_{2p} \wedge d \text{ gerade}\}]$$

und für  $i \in E_p$

$$B_{8,i} := [\{r_p\} \cup A_{3,i} \cup \{f(x) = (a+p)x + b \mid a \in G, \\ \wedge b \in \{(a-1)i, (a-1)i+p\}\}] \cup Q_p.$$

Lemma 14: Sei  $M := (U_p \cap \text{Pol}(-i, -i+p)) \cup Q_p$ . Dann gilt  $M = B_{8,i}$ .

Beweis: Die Mengen  $B_{8,i}$  und  $M$  sind offenbar abgeschlossen.

Für den Nachweis von  $M \subseteq B_{8,i}$  prüft man leicht nach, daß  $r_p$  und die Funktionen aus

$A_{3,i} \cup \{f(x) = (a+p)x + b \mid a \in G \wedge b \in \{(a-1)i, (a-1)i+p\}\}$  die Menge  $\{-i, -i+p\}$  bewahren.

Zu zeigen bleibt also noch  $B_{8,i} \supseteq M$ . Für beliebiges  $i$  ist  $\{-i, -i+p\}$  eine Nebenklasse der Gruppe  $(E_{2p}, +)$  nach der Untergruppe  $(\{0, p\}, +)$ . Damit folgt nach Lemma 1, daß eine Funktion  $g^n$  aus  $M \setminus Q_p$  die folgende Bauart hat:

$$g(\tilde{x}) = a_0 + a_1(x_1+i) + p \sum_{j=2}^n a_j \cdot (x_j+i) \text{ mit } a_0 \in \{-i, -i+p\}.$$

Sei  $g_1(x) := g(x, \dots, x)$ . Für  $g_1$  gibt es die Möglichkeiten

$$g_1(x) = (i+x)a_1 + i \text{ oder}$$

$$g_1(x) = (a_1+p)x + p + a_1i - i.$$

Man kann sich schnell davon überzeugen, daß diese Funktionen immer zu  $B_{8,i}$  gehören, womit auch  $g \in B_{8,i}$  gezeigt ist. ■

Ähnlich wie in Lemma 14 kann man sich überlegen, daß

$$B_6 = U_p \cap T(0, 2, 4, \dots, 2p-2) \text{ und}$$

$$B_7 = U_p \cap T(1, 3, 5, \dots, 2p-1) \text{ gilt.}$$

Sei nachfolgend stets  $t \in E_{2p}$ ,  $t$  ungerade und  $\langle t \rangle = G$ .

Lemma 15: Es gilt  $U_p = [\{x+1, c_0, r_p, tx\}]$ .

Beweis: Offenbar sind die Konstanten Superpositionen über  $[\{c_0, x+1\}]$ . Durch  $tx$  erhalten wir alle Funktionen der Art  $ax$  mit ungeradem  $a$ ,  $a \neq p$  und  $a \in E_{2p}$ . Mittels  $r_p(ax, x, c_0(x)) = (a+p)x$  ergeben sich auch alle Funktionen  $bx$  mit geradem  $b \in E_{2p}$ .

Wegen  $r_p(c_0(x), x, c_0(x)) = px$  und  $x + \alpha \in [\{x+1\}]$  ( $\alpha \in E_{2p}$ ) gehören alle einstelligen Funktionen von  $L_{2p}$  zum Abschluß von

$\{x+1, c_0, r_p, tx\}$ . Superpositionen über  $[\{c_0, r_p\}]$  sind

$$r_p(x_1, x_2) := r_p(x_1, x_2, c_0(x_1)) = x_1 + px_2 \text{ und}$$

$$g^m(\vec{x}) := \underbrace{(r_p * r_p * \dots * r_p)}_{m-1}(x_1, \dots, x_m) = x_1 + p(x_2 + \dots + x_m).$$

Sei jetzt  $f^n$  eine beliebige Funktion aus  $U_p$ . Dann gilt

$$f^n(x_1, \dots, x_n) = g^n(a_0 + a_1x_1, a_1x_1, \dots, a_{i-1}x_{i-1}, a_{i+1}x_{i+1}, \dots, a_nx_n)$$

$$= a_0 + a_1x_1 + p \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j x_j, \text{ womit}$$

$f^n \in [\{x+1, c_0, r_p, tx\}]$  gezeigt ist. ■

**Lemma 16:** Sei  $M \in U_p$ ,  $M \not\in B_1$  und  $M \not\in B_2$ . Dann gehört  $r_p$  zum Abschluß von  $M$ .

**Beweis:** Wegen  $M \not\in B_1$  existiert ein  $f \in [M]$  mit

$$f(x) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad n \geq 2, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 = \dots = a_n = p$$

und  $n \geq 3$ , falls  $a_1$  gerade ist.

**1. Fall:**  $a_1 \cap k = 1$ .

Dann gehört  $r_p$  nach Lemma 2 zu  $[M]$ .

**2. Fall:**  $a_1 = p$ .

Sei  $f'(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_3) = a_0 + px_1 + px_2 + a_3^i x_3$  mit  $a_3^i \in \{0, p\}$ . Wegen  $M \not\in B_2$  existiert ein  $g \in [M]$  mit

$$g'(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_3) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3^i x_3,$$

$$b_1 \notin \{0, p\}, \quad b_2 = p \text{ und } b_3^i \in \{0, p\}.$$

**2.1:**  $b_1 \cap k = 1$ .

Die Behauptung folgt wie im Fall 1 aus Lemma 2.

**2.2:**  $b_1$  gerade und  $b_1 \neq 0$ .

Es ist  $g'(x_1, f'(x_1, x_2, x_3), x_3)$

$$= b_0 + (b_1 + b_2 a_1)x_1 + b_2 a_2 x_2 + (b_3^i + b_2 a_3^i)x_3. \text{ Wie man leicht nach-}$$

prüft, ist  $b_1 + b_2 a_1$  ungerade, ungleich  $p$  und teilerfremd zu  $k$ .  
Damit gilt die Behauptung nach Fall 1.

3. Fall:  $a_1$  gerade und  $a_1 \neq 0$ .

Wir bilden  $f(x_1, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$

$= a_0 + (a_1 + a_2)x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + \dots + a_nx_{n-1}$ . Nun ist  $a_1$  gerade,  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 = p$  und daher  $a_1 + a_2$  teilerfremd zu  $k$ . Somit folgt die Behauptung wieder nach Fall 1. ■

Lemma 17: Sei  $M \in U_p$ ,  $r_p \in [M]$ ,  $M \not\cong B_3$  und  $M \not\cong B_4$ . Dann gehört mindestens eine Konstante zu  $[M]$ .

Beweis: Wegen  $M \not\cong B_4$  existiert ein  $f^n$  im Abschluß von  $M$  mit  $f'(x) := f(x, \dots, x) = ax + b$ ,  $a \in \{0, p\}$  und  $b \in E_{2p}$ .

1. Fall:  $a = 0$ .

Dann gehört  $c_b$  zu  $[M]$ .

2. Fall:  $a = p$ .

Wegen  $M \not\cong B_3$  existiert ein  $g^m$  im Abschluß von  $M$  mit

$g'(x) := g(x, \dots, x) = a_1x + b_1$ , wobei  $a_1$  gerade und  $b_1 \in E_{2p}$  ist.

Wegen  $f'(g'(x)) = pb_1 + b$  gehört  $c_{pb_1+b}$  zum Abschluß von  $M$ . ■

Lemma 18: Sei  $M \not\cong A$  für alle

$A \in \{B_{5, \underline{U}_m} \mid \underline{U}_m \text{ maximale Untergruppe von } G\} \cup \{B_6, B_7\} \cup \{B_{8,1} \mid 1 \in E_p\}$ ,

$r_p \in [M]$  und  $c_\alpha \in [M]$  für ein gewisses  $\alpha \in E_{2p}$ . Dann gehören  $x+1$  und  $tx$  zu  $[M]$ , womit auch alle Konstanten von  $P_{2p}$  Funktionen aus  $[M]$  sind.

Beweis:

1. Fall:  $\alpha$  gerade.

Zuerst wollen wir zeigen, daß  $tx + \gamma$  zu  $[M]$  gehört. Da  $M \not\cong B_{5, \underline{U}_m}$

für alle maximalen Untergruppen  $\underline{U}_m$  von  $G$  ist, liegt eine Funktion  $f_{\underline{U}_m}$  in  $[M] \setminus B_{5, \underline{U}_m}$  für jede maximale Untergruppe  $\underline{U}_m$  von  $G$ ,

wobei  $f_{\underline{U}_m}(x) := a_{\underline{U}_m}x + b_{\underline{U}_m}$  mit  $a_{\underline{U}_m} \notin \{0, p\}$  gilt. Wegen

$r_p(f_{\underline{U}_m}(x), x, c_\alpha(x)) = (a_{\underline{U}_m} + p)x + b_{\underline{U}_m}$  läßt sich  $a_{\underline{U}_m}$  o.B.d.A. als

ungerade annehmen. Ist  $a_{\underline{U}_m}$  aber ungerade, so gehört es nicht zur betrachteten Untergruppe  $\underline{U}_m$  von  $G$ . Somit gehört  $f_{\underline{U}_m}$  nicht zu  $A_{1,\underline{U}_m}$  für jede maximale Untergruppe  $\underline{U}_m$  von  $G$ . Nach Lemma 11 aus Abschnitt 2 folgt dann  $tx + y \in [M]$ .

Wegen  $M \not\subseteq B_6$  gehört nach Lemma 1 eine Funktion  $f^n$  zu  $M \setminus B_6$  mit  $f(c_\alpha, c_\alpha, \dots, c_\alpha) := c_\beta$  und ungeradem  $\beta$ . Somit ist auch  $r_p(x, c_\alpha(x), c_\beta(x)) = x + p$  eine Funktion aus  $[M]$ . Für die Funktion  $f_1(x) := f(x, \dots, x) = ax + b$  sind die nachfolgenden drei Fälle möglich:

1.1:  $a \cap 2p = 1$ .

Weil  $x+p$  im Abschluß von  $M$  liegt, können wir o.B.d.A.  $b$  als ungerade annehmen. Damit gehört  $f_1(x)$  nicht zu  $A_{2,G}$ . Wegen

$r_p(f_1(x), x, c_\alpha(x)) = (a+p)x + b \in [M]$  und  $x+p \in [M]$  ist o.B.d.A. außerdem entweder  $a \in U$  und  $b$  ungerade oder  $a \in G \setminus U$  und  $b$  gerade. Somit gehört  $f_1(x)$  auch nicht zu  $A_{2,U}$ . Da  $M \not\subseteq B_{8,i}$  für jedes

$i \in E_p$  ist, gehört ein  $f_{3,i}(x) := a_{3,i}x + b_{3,i}$  zu  $[M] \setminus B_{8,i}$  mit  $a_{3,i} \notin \{0, p\}$ . Wir können auch hier wegen

$r_p(f_{3,i}(x), x, c_\alpha(x)) = (a_{3,i}+p)x + b_{3,i}$  den Koeffizienten  $a_{3,i}$  o.B.d.A. als ungerade annehmen. Dann gehört  $f_{3,i}(x)$  nicht zu  $A_{3,i}$  für alle  $i$  aus  $E_p$ .

Nach Lemma 12 aus Abschnitt 2 gilt folglich  $x+1 \in [M]$ . Somit liegen auch alle Konstanten und  $tx$  im Abschluß von  $M$ .

1.2:  $a \cap 2p = 2$ .

Wegen  $r_p(f_1(x), x, c_\alpha(x)) = (a+p)x + b$  folgt die Behauptung aus Fall 1.1.

1.3:  $a \in \{0, p\}$ .

Wegen  $M \not\subseteq B_{8,0}$  liegt ein  $f_2(x) := a_2x + b_2$  in  $[M] \setminus B_{8,0}$  mit  $\{a_2, b_2\} \not\subseteq \{0, p\}$ . Somit folgt für ein gerades  $a_2$  die Behauptung nach Fall 1.2, für ein ungerades  $a_2$  nach Fall 1.1.

## 2. Fall: $\alpha$ ungerade.

Wegen  $M \notin B_7$  gehört nach Lemma 1 eine Funktion  $g^m$  zu

$M \setminus B_7$  mit  $g(c_\alpha, c_\alpha, \dots, c_\alpha) := c_B$  und geradem  $B$ . Damit folgt die Behauptung aus Fall 1. ■

Als unmittelbare Folgerung aus den Lemmata 15 - 18 ergibt sich

Lemma 19: Sei  $M \subseteq U_p$ ,  $M \notin B_i$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ ,  $M \notin B_{5, \underline{U}_m}$  für alle maximalen Untergruppen  $\underline{U}_m$  von  $G$  und  $M \notin B_{8, i}$  für alle  $i \in E_p$ . Dann gilt  $[M] = U_p$ .

Die maximalen Klassen von  $U_p$  befinden sich also unter den zu Beginn dieses Abschnitts 3 eingeführten Klassen. Mit Hilfe des Abschnitts 2 erkennt man leicht, daß diese Klassen paarweise unvergleichbar sind.

Damit ergibt sich der

Satz 3: a) Eine Teilmenge  $M$  von  $U_p$  ist genau dann vollständig, wenn  $M \notin B_i$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ ,  $M \notin B_{5, \underline{U}_m}$  für alle maximalen Untergruppen  $\underline{U}_m$  von  $G$  und  $M \notin B_{8, i}$  für jedes  $i \in E_p$  gilt.

b)  $B_i$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ ,  $B_{5, \underline{U}_m}$  für alle maximalen Untergruppen  $\underline{U}_m$  von  $G$  sowie  $B_{8, i}$  mit  $i \in E_p$  sind maximale Klassen von  $U_p$ , und es gibt keine weiteren.

## 4. Die maximalen Klassen von $R_{2p}$

Wir führen auch in diesem Abschnitt zunächst einige Bezeichnungen für abgeschlossene Teilklassen von  $R_{2p}$  ein, für die wir dann im folgenden zeigen wollen, daß sie die maximalen Klassen von  $R_{2p}$  sind:

$$D_1 := Q_2 \cup [L^1],$$

$$D_2 := Q_p \cup [L^1],$$

$$D_{3, \underline{U}_m} := Q_2 \cup Q_p \cup [A_{1, \underline{U}_m}] \text{ für alle maximalen Untergruppen } \underline{U}_m \text{ von } G,$$

$$D_4 := Q_2 \cup Q_p \cup [A_{2, G}].$$

$D_5 := Q_2 \cup Q_p \cup [A_{2,U}]$  und

$D_{6,i} := Q_2 \cup Q_p \cup [A_{3,i}]$  für  $i \in E_p$ .

Sei  $t$  wie in Abschnitt 2 definiert.

**Lemma 20:** Es gilt  $[\{(p+1)x_1 + (p+1)x_2, px_1 + px_2, tx, x+1\}] = R_{2p}$ .

**Beweis:** Sei  $f_1(x_1, x_2) := (p+1)x_1 + (p+1)x_2$  und

$f_2(x_1, x_2) := px_1 + px_2$ .

Mit  $f_1^{(0)}(x) := f_1(x, x) = 2x$  und

$f_1^{(i)}(x) = f_1(f_1^{(0)}(x), f_1^{(i-1)}(x)) = 2(i+1)x$  für  $i \in E_p \setminus \{0\}$  erhalten

wir alle einstelligen Funktionen der Form  $ax$  mit geradem  $a$  aus  $E_{2p}$ . Wegen  $\langle t \rangle = G$  ergeben sich als Superpositionen über  $tx$  alle

Funktionen der Form  $bx$  mit  $b \cap 2p = 1$ . Weil  $f_2(x, x) = c_0(x)$

und  $f_2(x, c_0(x)) = px$  gilt, sind alle einstelligen Funktionen

aus  $L_{2p}$  Superpositionen über der Menge

$\{(p+1)x_1 + (p+1)x_2, px_1 + px_2, x+1, tx\}$ .

Eine beliebige Funktion

$f^n(x_1, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \in V_2$ ,  $n \geq 2$ , erhält man als Super-

position über  $\{f_1\} \cup L_{2p}^1$  wie folgt:

$f(x) = g(f'(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n))$ , wobei  $g(x) := x + a_0$  und

$f'(x_1, \dots, x_n) := (f_1 * f_1 * \dots * f_1)(x_1, \dots, x_n)$  ist. Analoges

gilt für beliebige Funktionen aus  $Q_p$  als Superpositionen über

$\{f_2\} \cup L_{2p}^1$ . ■

**Lemma 21:** Sei  $M \in R_{2p}$  und  $M \neq A$  für alle  $A \in \{D_{3,U_m} | U_m$  maximale

Untergruppe von  $G\} \cup \{D_4, D_5\} \cup \{D_{6,i} | i \in E_p\}$ . Dann gehören  $tx$  und

$x+1$  zu  $[M]$ .

**Beweis:** Nach Voraussetzung und den Definitionen der Mengen

$D_{3,U_m}$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  und  $D_{6,i}$  gehören zu  $[M] \cap S_{2p}$  folgende Funktionen:

$f_{1,U_m}^1 \notin A_{1,U_m}$  für beliebige maximale Untergruppen  $U_m$  von  $G$ ,

$f_2^1 \notin A_{2,G}$ ,  $f_3^1 \notin A_{2,U}$  und  $f_{4,i}^1 \notin A_{3,i}$  für  $i = 0, 1, \dots, p-1$ .

Damit folgt die Behauptung nach Abschnitt 2, Lemma 11 und 12. ■

**Lemma 22:** Sei  $M \in R_{2p}$ ,  $x+1 \in [M]$ ,  $M \not\in D_1$  und  $M \not\in D_2$ . Dann gehören die Funktionen  $(p+1)x_1 + (p+1)x_2$ ,  $px_1 + px_2$  und die Konstanten zu  $[M]$ .

**Beweis:** Sei  $f_1 \in [M] \setminus D_2$ . Dann ist o.B.d.A.

$f_1(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$  und  $0 \notin \{a, b\}$ ,  $a, b, c$  gerade und  $d$  aus  $E_{2p}$ . Durch

$$\begin{aligned} f_1'(x_1, x_2, x_3) &:= f_1(f_1(\dots f_1(x_1, x_3, x_3)\dots), x_2, x_3) \\ &= (p+1)x_1 + bx_2 + c'x_3 + d' \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1''(x_1, x_2, x_3) &:= f_1'(x_1, f_1(\dots f_1(x_3, x_2, x_3)\dots), x_3) \\ &= (p+1)x_1 + (p+1)x_2 + c''x_3 + d'' \text{ mit geraden } c', c'' \text{ und } d', d'' \\ &\text{aus } E_{2p} \text{ erhalten wir als Superposition über } x+1 \text{ eine Funktion} \\ &\text{der Form } f_1'''(x_1, x_2, x_3) = (p+1)x_1 + (p+1)x_2 + c'''x_3. \end{aligned}$$

Sei  $f_2 \in [M] \setminus D_1$ . Dann ist o.B.d.A.

$f_2(x_1, x_2, x_3) := px_1 + px_2 + ex_3 + m$ , wobei  $e \in \{0, p\}$  und  $m$  aus  $E_{2p}$  ist. Mit Hilfe von  $x+1$  erhalten wir als Superpositionen

über  $M$  die Funktionen  $f_2'(x_1, x_2, x_3) := px_1 + px_2 + ex_3$  und  $f_2''(x, x, f_1''(x, x, x)) = c_0(x)$ . Wegen  $x+1 \in [M]$  gehören damit auch alle Konstanten zu  $[M]$ . Außerdem gilt

$$f_1'''(x_1, x_2, c_0(x_1)) = (p+1)x_1 + (p+1)x_2 \text{ und}$$

$$f_2'(x_1, x_2, c_0(x_1)) = px_1 + px_2 \in [M]. \blacksquare$$

Als unmittelbare Folgerung aus den Lemmata 20 - 22 ergibt sich

**Lemma 23:** Sei  $M \in R_{2p}$  und  $M \not\in A$  für alle  $A \in \{D_1, D_2, D_4, D_5\}$

$\cup \{D_3, \bigcup_m U_m \mid \text{maximale Untergruppe von } G\} \cup \{D_{6,i} \mid i \in E_p\}$ . Dann

gilt  $[M] = R_{2p}$ . ■

Man überzeugt sich wegen der Aussagen aus Abschnitt 2 leicht davon, daß diese Klassen paarweise unvergleichbar sind. Damit ergibt sich

- Satz 4: a) Eine Teilmenge  $M$  von  $R_{2p}$  ist genau dann vollständig in  $R_{2p}$ , wenn  $M \neq A$  für alle  $A \in \{D_1, D_2, D_4, D_5\}$   $\cup \{D_3, \underline{U}_m \mid \underline{U}_m \text{ maximale Untergruppe von } G\} \cup \{D_{6,i} \mid i \in E_p\}$  gilt.
- b)  $D_1, D_2, D_4, D_5, D_3, \underline{U}_m$  für alle maximalen Untergruppen  $\underline{U}_m$  von  $G$  sowie  $D_{6,i}$  für alle  $i$  aus  $E_p$  sind die maximalen Klassen von  $R_{2p}$ , und es gibt keine weiteren. ■

#### Literatur

- /1/ Demetrovics, J., and Bagyinszki, J.: The lattice of linear classes in prime-valued logics. In: Kulikowski, J. L., et al. (Eds.): Discrete Mathematics. Banach Center Publications 7, 105 - 123, Warszawa 1982
- /2/ Lau, D.: Über die Anzahl von abgeschlossenen Mengen linearer Funktionen der  $n$ -wertigen Logik. Elektron. Informationsverarb. Kybernetik 14, 561 - 563 (1978)
- /3/ Lau, D.: Über abgeschlossene Mengen linearer Funktionen der mehrwertigen Logik. Eingereicht bei Elektron. Informationsverarb. Kybernetik.
- /4/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979
- /5/ Salomaa, A. A.: On infinitely generated sets of operations in finite algebras. Ann. Univ. Turku., Ser. AI 74, 1 - 12 (1964)
- /6/ Szendrei, Á.: On closed sets of linear operations over a finite set square-free cardinality. Elektron. Informationsverarb. Kybernetik 14, 547 - 559 (1978)

eingegangen: 26. 11. 1986

#### Verfasser:

stud. mat.-phys. B. Schröder  
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
 Sektion Mathematik  
 Universitätsplatz 1  
 Rostock  
 DDR-2500

Kurt Walter Tomantschger

## Representations for Solutions of Higher Order Partial Differential Equations

---

### Introduction

In a large number of papers the method for the representation of solutions of partial differential equations by differential operators was investigated by K. W. Bauer, St. Bergman, G. Darboux, M. Kracht, E. Kreyszig, E. Lanckau, E. Peschl and others. Especially, it was shown that each solution of second order formally hyperbolic differential equations of a special nature can be expressed by one holomorphic and one antiholomorphic function and their derivations.

Generalisations are possible in the following directions. First, one may consider second order differential equations with more than two independent variables; this was done by K. W. Bauer, St. Bergman, E. Lanckau and I. N. Vekua, to name only a few. Or, one may investigate  $n$ -th order differential equations with  $n$  independent variables. For  $n=3$  this was outlined by the present author in a previous paper /8/. These investigations will now be continued in some general cases.

A first example is the differential equation

$$w(z_1, z_2, \dots, z_n)_{z_1 z_2 \dots z_n} = 0, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

where the subscripts denote differentiation with respect to  $z_j$ . A solution is of the form

$$w = \sum_{j=1}^n f_j(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) = P(f_1, \dots, f_n). \quad (2)$$

The  $f_j$  are arbitrary holomorphic functions in  $n-1$  variables ( $z_j$  means that  $z_j$  does not appear in  $f_j(z_1, \dots, z_n)$ ). This means that any holomorphic function of  $n$  variables which is the sum of

holomorphic functions of  $n-1$  variables is a solution of (1).

A generalisation of (1) is the differential equation

$$LW = (z_1 + \dots + z_n)W(z_1, \dots, z_n)z_1z_2\dots z_n - \sum_{j=1}^n A_j W(z_1, \dots, z_n)z_1\dots z_j\dots z_n = 0 \quad (3)$$

where the  $A_j$  are complex numbers. It will be shown that the solutions are of the form

$$W = \sum_{j=1}^n E_j(f_j(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)) \quad (4)$$

where the operators  $E_j$  are given in Chapter 1.

In Chapter 2 differential equations of the type

$$w(z_1, \dots, z_n)z_1\dots z_n + \sum_{j=1}^n B_j w(z_1, \dots, z_n)z_1\dots z_j\dots z_n = 0 \quad (5)$$

are considered, where the  $B_j = B_j(z_1, \dots, z_n)$  are holomorphic functions. For a wide class of functions  $B_j$  the solutions of (5) can be expressed with the help of an operator  $F$ , which is a generalisation of the previous operator  $E_n$ .

The author is indebted to Univ. Prof. Dr. Ulrich Dieter for his support.

### 1. Polynomial operator for the differential equation (3)

For  $1 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 2$  let  $G_k$  be simply connected domains in the  $k$ -th complex plane. Furthermore, assume that

$$H = z_1 + \dots + z_n \neq 0 \text{ in } G = G_1 \times \dots \times G_n \subset \mathbb{C}^n$$

and that the differential equation (3) has solutions of the form (4), where the operators  $E_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) are defined as

$$E_j = \sum_{m_1=0}^{M_{j,1}} \dots \sum_{m_j=0}^{M_{j,j}} \dots \sum_{m_n=0}^{M_{j,n}} b_{j;m_1, \dots, m_j, \dots, m_n} \frac{\sum_{i \neq j} m_i}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_k^{m_k} \dots \partial z_j^{m_j} \dots \partial z_n^{m_n}} \quad (6)$$

and applied to arbitrary generating functions  $f_j(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)$

in  $G \setminus G_j$ . It is assumed that the coefficients

$b_{j; m_1, \dots, m_j, \dots, m_n}(z_1, \dots, z_n)$  are holomorphic in  $G$ . (Note that  $b_j$  depends on  $z_j$ ).

Taking into account that the coefficients of  $LW = 0$  are complex numbers resp. a function of  $H$  we can expect that the coefficients of  $E_j$  depend on  $H$ . If we substitute (4) into  $LW = 0$  and make comparison of the derivations of arbitrary  $f_j$  we obtain the following  $n$  ordinary differential equations for our coefficients

$$\sum_{\substack{0 \leq \varepsilon_k \leq 1 \\ 1 \leq k \leq n, k \neq j}} H^S D[H^{-A_j - S} D^{\hat{S}} b_{j; m_1 - 1 + \varepsilon_1, \dots, m_j - 1 + \varepsilon_j, \dots, m_n - 1 + \varepsilon_n}] = 0, \quad (7)$$

$$S = \varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_j A_j + \dots + \varepsilon_n A_n, \quad \hat{S} = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_n, \quad D = d/dH,$$

$$b_{j; m_1, \dots, -1, \dots, j, \dots, m_n} = b_{j; m_1, \dots, M_{j,s} + 1, \dots, j, \dots, m_n} = 0,$$

$$M_{j,s} + 1 \geq m_s \geq 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad s \neq j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad M_{j,s} \in \mathbb{N}_0.$$

The coefficients  $b_j$  can be calculated successively. It yields finally<sup>1</sup>

$$b_{j; m_1, \dots, m_j, \dots, m_n} = (-1)^R (A_j - R + 1)_R \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(A_k + 1)_{M_{j,k} - m_k}}{(M_{j,k} - m_k)!} H^{A_j - R}, \quad (8)$$

$$R = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (M_{j,r} - m_r), \quad A_j \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq m_s \leq M_{j,s}, \quad 1 \leq s \leq n, \quad s \neq j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

We can show that (7) is identically satisfied by (8).

So it remains to determine  $M_{j,k}$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $k=1, \dots, j, \dots, n$ .

For this the differential operators  $E_j$ , defined in (6), are reconsidered. They can be conceived as polynomials in the variables  $\partial/\partial z_k$ ,  $k=1, \dots, j, \dots, n$ . Hence, the just determined  $b_j$  must break off.

<sup>1</sup> Here  $(c)_0 = 1$ ,  $(c)_n = c(c+1)\dots(c+n-1)$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Let us select

$$m_s - 1 + \varepsilon_s = \begin{cases} 0 & \text{with } \varepsilon_s = 1, m_s = 0 & \text{if } s = k \\ M_{j,s} & \text{with } \varepsilon_s = 0, m_s = M_{j,s} + 1 & \text{if } s \neq k \end{cases}, \quad k=1, \dots, j, \dots, n, s \neq j$$

in (7). The  $S$  and  $\hat{S}$  are also determined by the just defined  $\varepsilon_s$ . Furthermore, by using (8), we substitute

$${}^b j; M_{j,1}, \dots, M_{j,j}, \dots, M_{j,k-1}, 0, M_{j,k+1}, \dots, M_{j,n}$$

into (7). This gives finally

$$A_k + M_{j,k} + 1 = 0 \quad (9a)$$

$$\text{or } A_j - M_{j,k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, k = 1, \dots, j, \dots, n. \quad (9b)$$

From these breaking off conditions arises that the  $A_j$  must be integer numbers.

Evidently (9a) yields  $M_{j,k} =: M_k$  for  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, k, \dots, n$ , and  $A_k = -M_k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . We replace  $M_k$  by  $M_k - 1$ . The relation  $A_j = M_{j,k} =: N_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, j, \dots, n$  can be found from (9b).

Finally, with (3), (4), (6), (8) and the last results we get the following representation theorem.

**Theorem 1:** For  $1 \leq j \leq n$ ,  $n \geq 2$  let  $G_j$  be simply connected domains in the  $j$ -th complex plane. Let  $f_j(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)$  resp.  $f_j^*(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)$  be arbitrary holomorphic functions in  $G \setminus G_j$ . Furthermore, assume that  $H = z_1 + \dots + z_n \neq 0$  in  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \subset \mathbb{C}^n$ . Then it holds:

The differential equation

$$LW = HW_{z_1 \dots z_n} + \sum_{j=1}^n M_j W_{z_1 \dots z_j \dots z_n} = 0, \quad M_j \in \mathbb{N}$$

resp.

$$L^*W^* = HW^*_{z_1 \dots z_n} - \sum_{j=1}^n N_j W^*_{z_1 \dots z_j \dots z_n} = 0, \quad N_j \in \mathbb{N}_0$$

possesses solutions of the form

$$W = \sum_{j=1}^n E_j f_j \quad \text{resp.} \quad W^* = \sum_{j=1}^n E_j^* f_j^*$$

with

$$E_j = \sum_{\substack{m_s=0 \\ 1 \leq s \leq n, s \neq j}}^{M_s-1} (-1)^{n-1+T} H^{n-1-M_j-T} \frac{(M_j-n+T)!}{(M_j-1)!} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \binom{M_k-1}{m_k} \frac{\partial^{m_k}}{\partial z_k^{m_k}}$$

resp.

$$E_j^* = \sum_{\substack{m_s=0 \\ 1 \leq s \leq n, s \neq j}}^{N_j} \frac{(-1)^{(n-1)N_j-\hat{T}} N_j!}{\Gamma(\hat{T}-(n-2)N_j+1)} H^{\hat{T}-(n-2)N_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \binom{N_j+N_k-m_k}{N_k} \frac{\partial^{m_k}}{\partial z_k^{m_k}}$$

Here the notations

$$T = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (M_k - m_k) \quad \text{and} \quad \hat{T} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n m_k, \quad 1 \leq j \leq n,$$

are used.  $\Gamma(x)$  denotes the Gamma Function.

## 2. A generalisation

In Chapter 1 we introduced the differential operators  $E_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $n \geq 2$  defined in (6). Further, we want to generalise these polynomial operators. For simplicity we only do this for  $j=n$ .

Again,  $G_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 2$ , are simply connected domains;

$G = G_1 \times \dots \times G_n \subset \mathbb{C}^n$  is again our poly domain.

The most general partial differential operator is of the form

$$F = \sum_{m_1=0}^{M_1} \dots \sum_{m_{n-1}=0}^{M_{n-1}} C_{m_1, \dots, m_{n-1}} (d_1 \partial / \partial z_1)^{m_1} \dots (d_{n-1} \partial / \partial z_{n-1})^{m_{n-1}}.$$

It is assumed that  $C_{m_1, \dots, m_{n-1}}(z_1, \dots, z_n)$  resp.  $d_k(z_k)$  is holomorphic in  $G$  resp.  $G_k$ ,  $d_k(z_k)$  should not vanish in  $G_k$ .

First of all, let us consider the results of Theorem 1, strictly speaking, the coefficients of  $E_n$ . Therefore, we set

$$C_{m_1, \dots, m_{n-1}} = c_{m_1, \dots, m_{n-1}} \tau^{\mu + m_1 + \dots + m_{n-1}}, \quad n \geq 2, \quad \mu \in \mathbb{Z}$$

where

$$c_{m_1, \dots, m_{n-1}} \in \mathbb{C}; \quad c_{0,0,\dots,0} \neq 0 \quad \text{and} \quad \tau = \tau(z_1, \dots, z_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad G.$$

Now we ask for all differential equations

$$w_{z_1 \dots z_n} + \sum_{j=1}^n B_j(z_1, \dots, z_{n-1}) w_{z_1 \dots z_j \dots z_n} = 0 \quad (10)$$

which possess solutions of the form  $w = Ff$ . For  $1 \leq j \leq n$  let  $B_j$  be holomorphic functions in  $G$ . Furthermore, it is assumed that the generating function  $f(z_1, \dots, z_{n-1})$  is arbitrary holomorphic in  $G \setminus G_n$ .

If we substitute  $w = Ff$  into (10) and make comparison of the derivations of arbitrary  $f$ , we obtain

$$\sum_{\substack{\varepsilon_k=0 \\ 1 \leq k \leq n-1}} \prod_{r=1}^{n-1} d_r^{\varepsilon_r-1} c_{m_1-1+\varepsilon_1, \dots, m_{n-1}-1+\varepsilon_{n-1}} \sum_{N_j} \left[ \frac{1}{i!} \frac{\partial}{\partial z_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial z_{j_i}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(i-1)!} B_{j_1} \frac{\partial}{\partial z_{j_2}} \dots \frac{\partial}{\partial z_{j_i}} \right] \tau^{\mu + \sum_{r=1}^{n-1} (m_r-1) + \varepsilon_r} = 0, \quad (11)$$

$K := \{k \mid \varepsilon_k = 1\}$ ,  $N_j = \{(j_1, \dots, j_i) \mid j_r \in K \cup \{n\}, j_p \neq j_q \text{ for } p \neq q\}$ ,

$i = 1 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ .

Defining  $m_s = M_s + 1$ ,  $1 \leq s \leq n-1$  for (11) it follows immediately that

$$B_n = -(\mu + M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1})(\log \tau)_{z_n}. \quad (12)$$

Using this result equation (11) with  $m_s = 0$ ,  $m_r = M_r + 1$ ,

$r = 1, \dots, s, \dots, n-1$ ,  $s = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $m_p \neq m_q$  for  $p \neq q$  yields

$$B_s = (M_s + 1)(\log \tau)_{z_s} - (\log \tau_{z_n})_{z_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n-1. \quad (13)$$

Set  $m_s = M_s$ ,  $m_r = M_r + 1$ , where  $r=1, \dots, s, \dots, n-1$ ,  $s=1, 2, \dots, n-1$ ,  $m_p \neq m_q$  for  $p \neq q$  in (11). Hence, we have

$$(\mu + M_1 + \dots + M_{n-1})^{M_s} c_{M_1, \dots, M_{n-1}} \tau_{z_s} = \frac{1}{d_s(z_s)} c_{M_1, \dots, M_{s-1}, M_s-1, M_{s+1}, \dots, M_{n-1}}, \quad s=1, \dots, n-1,$$

thus determining the function  $\tau(z_1, \dots, z_n)$ . We define

$$d_s(z_s) := 1/\tilde{\Phi}'_s(z_s). \text{ Finally, } \tau = \tilde{\Phi}'_1(z_1) + \tilde{\Phi}'_2(z_2) + \dots + \tilde{\Phi}'_n(z_n).$$

By (12) and (13) it follows immediately that the coefficients  $B_s$  have necessarily the form

$$B_n = -(\mu + M_1 + \dots + M_{n-1}) \tilde{\Phi}'_n / (\tilde{\Phi}'_1 + \dots + \tilde{\Phi}'_n),$$

$$B_s = (M_s + 1) \tilde{\Phi}'_s / (\tilde{\Phi}'_1 + \dots + \tilde{\Phi}'_n), \quad s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Consequently, we can calculate our coefficients by (11). We

$$\text{obtain } c_{m_1, \dots, m_{n-1}} = \prod_{1 \leq k \leq n-1} \binom{M_k}{m_k} \frac{c_{0,0,\dots,0}}{(\mu+1)_{m_1+\dots+m_{n-1}}},$$

$\mu \notin \{-1, -2, \dots, -(M_1 + \dots + M_{n-1})\}$ . This leads to

**Theorem 2:** a) The differential equation (10)

$$w(z_1, \dots, z_n)_{z_1 \dots z_n} + \sum_{j=1}^n B_j(z_1, \dots, z_n) w(z_1, \dots, z_n)_{z_1 \dots z_{j-1} z_{j+1} \dots z_n} = 0$$

possesses a solution of the form

$$w = \sum_{\substack{m_s=0 \\ 1 \leq s \leq n-1}}^{M_s} c_{m_1, \dots, m_{n-1}} \tau^{\mu+m_1+\dots+m_{n-1}} \left( \prod_{k=1}^{n-1} \left( d_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right) f, \quad n \geq 2, \quad (14)$$

$0 \neq d_k(z_k)$  holomorphic in  $G_k$ ,  $f(z_1, \dots, z_{n-1})$  arbitrary holomorphic in  $G \setminus G_n$ ,  $c_{m_1, \dots, m_{n-1}} \in \mathbb{C}$ ,  $c_{0,0,\dots,0} \neq 0$ ,  $\tau(z_1, \dots, z_n) \neq 0$  in  $G$ ,  $\mu \in \mathbb{Z}$  if, and only if

$$B_n = -(\mu + M_1 + \dots + M_{n-1}) \tilde{\Phi}'_n / (\tilde{\Phi}'_1 + \dots + \tilde{\Phi}'_n),$$

$$B_s = (M_s + 1) \tilde{\Phi}'_s / (\tilde{\Phi}'_1 + \dots + \tilde{\Phi}'_n), \quad s = 1, 2, \dots, n-1,$$

where

- (i)  $\Phi_k(z_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , holomorphic in  $G_k$ ,  
 (ii)  $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n (\Phi_1 + \dots + \Phi_n) \neq 0$  in  $G$ ,  
 (iii)  $\mu \in \{-1, -2, \dots, -(M_1 + \dots + M_{n-1})\}$ .

b) The solution (14) of the differential equation

$$w_{z_1 \dots z_n} + \sum_{j=1}^{n-1} (M_j + 1) \frac{\Phi_j}{\Phi_1 + \dots + \Phi_n} w_{z_1 \dots z_j \dots z_n} - (\mu + M_1 + \dots + M_{n-1}) \frac{\Phi_n}{\Phi_1 + \dots + \Phi_n} w_{z_1 \dots z_{n-1}} = 0$$

can be represented in the form

$$w = \sum_{\substack{m_s=0 \\ 1 \leq s \leq n-1}}^{M_s} \prod_{k=1}^{n-1} \binom{M_k}{m_k} \frac{(\Phi_1 + \dots + \Phi_n)^{\mu + m_1 + \dots + m_{n-1}}}{(\mu + 1)_{m_1 + \dots + m_{n-1}}} \left( \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\Phi_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \right)^{m_k} \right) f,$$

$f(z_1, \dots, z_{n-1})$  arbitrary holomorphic in  $G \setminus G_n$ .

### References

- /1/ Bauer, K. W.: Über eine der Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + n(n+1)w = 0$  zugeordnete Funktionentheorie. Bonner Math. Schriften 23 (1965)  
 /2/ Bauer, K. W.: Über die Lösungen der elliptischen Differentialgleichung  $(1 + z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \lambda w = 0$ . J. Reine Angew. Math. 221, Teil I: 48 - 84, Teil II: 176 - 196 (1966)  
 /3/ Bauer, K. W.: Über eine Klasse homogener partieller Differentialgleichungen gerader Ordnung. Arch. Math. 18, 430 - 437 (1967)  
 /4/ Bauer, K. W., und Peschl, E.: Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung  $(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0$  in der Nähe isolierter Singularitäten. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München 1965

- /5/ Bergman, St.: Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations. Berlin 1961
- /6/ Darboux, G.: Leçons sur la théorie general des surfaces. 2. Aufl., Paris 1915
- /7/ Lanckau, E.: Zur Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen mittels parameterabhängiger Bergman-Operatoren. Nova Acta Leopoldina (N.F.) 201, Bd. 36, Leipzig 1971
- /8/ Tomantschger, K. W.: Differential operators for a class of linear partial differential equations of third order. Bull. App. Math. (in press)
- /9/ Vekua, I. N.: New Methods for Solving Elliptic Equations. Amsterdam 1967

received: October 17, 1986

Author:

Dr. K. W. Tomantschger  
Institut für Mathematik der  
Technischen Universität Graz  
Kopernikusgasse 24  
A-8010 Graz, Österreich

Uwe Szyszka

Das Dirichletproblem für den polyharmonischen Operator in  $C^1$ -Gebieten der Ebene

---

S. Agmon untersuchte in /1/ das Dirichletproblem für elliptische Differentialgleichungen der Ordnung  $2m$  ohne Terme niedriger Ordnung in beschränkten, einfach-zusammenhängenden  $C^{1,\beta}$ -Gebieten ( $\beta > 1/2$ ) der Ebene und Randwerten aus  $\dot{C}_{m-1,\alpha}$  - auf diese Randwerte kommen wir später noch einmal kurz zurück - und zeigte die Möglichkeit der Darstellung der Lösung als Vielfachschichtpotential.

In der Arbeit /2/ von J. Cohen und J. Gosselin wurde diese Problemstellung für  $L^p$ -Randwerte und  $C^1$ -Gebiete im Falle des biharmonischen Operators untersucht.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist, die für den biharmonischen Operator von Cohen und Gosselin gewonnenen Ergebnisse (für den Laplaceoperator sind die entsprechenden Resultate schon länger bekannt) auf den Fall des polyharmonischen Operators auszudehnen.

Definition 1: Ein Gebiet  $\Omega$  ist ein  $C^1$ -Gebiet, falls für jeden Punkt  $P \in \partial\Omega$  ein Kreis  $B(P, \delta)$  mit dem Mittelpunkt  $P$  und dem Radius  $\delta$  und ein Koordinatensystem  $x, y$  des  $\mathbb{R}^2$  in  $P$  so existieren, daß in Abhängigkeit von diesem Koordinatensystem

$$\Omega \cap B(P, \delta) = \{(x, y) : y > \Phi(x), x \in \mathbb{R}^1\} \cap B(P, \delta), \quad \Phi \in C_0^1(\mathbb{R}^1) \text{ und} \\ \Phi(0) = \Phi'(0) = 0 \text{ gilt.}$$

Es gilt dann, falls  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  beschränkt, einfach-zusammenhängend und ein  $C^1$ -Gebiet ist: Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert eine endliche Oberdeckung des Randes durch Kreise  $B(P_j, \delta_j), P_j \in \partial\Omega$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) mit

$$\Omega \cap B(P_j, \delta_j) = \{(x, y) : y > \Phi_j(x)\} \cap B(P_j, \delta_j), \quad \Phi_j \in C_0^1(\mathbb{R}^1), \quad \Phi_j(0) \\ = \Phi_j'(0) = 0 \text{ und } \|\Phi_j\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

**Definition 2:** Eine Funktion  $f$ , die auf dem Rand  $\partial\Omega$  definiert ist, gehört zum Raum  $L^p_1(\partial\Omega)$ , falls für jede obige Überdeckung des Randes und für jede zugehörige Zerlegung der Einheit

$\{\psi_j\}_{j=1}^n$  die Funktionen  $\tilde{\psi}_j \tilde{f} := \psi_j(x, \Phi_j(x)) f(x, \Phi_j(x))$  eine

Distributionenableitung besitzt, die in  $L^p(\mathbb{R}^1)$  liegt.

Wir definieren folgende Norm in  $L^p_1(\partial\Omega)$ :

$$\|f\|_{p,1} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^n \left\| \frac{d^i}{dx^i} (\tilde{\psi}_j \tilde{f}) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$$

Mittels dieser beiden Definitionen können wir unser Ergebnis im folgenden Satz zusammenfassen.

**Satz:** Sei  $1 < p < \infty$  und  $\Omega$  ein einfach-zusammenhängendes beschränktes  $C^1$ -Gebiet. Außerdem sei  $\dot{g} = (g_{ij})_{0 \leq i+j \leq m-1} \in B^p(\partial\Omega)$

$= \{ \dot{g}: g_{ij} \in L^p_1(\partial\Omega) \text{ für } 0 \leq i+j \leq m-2, g_{ij} \in L^p(\partial\Omega) \text{ für } i+j=m-1 \text{ und}$

$$\frac{dg}{ds} = g_{i+1,j} \frac{dx}{ds} + g_{i,j+1} \frac{dy}{ds} \text{ für } 0 \leq i+j \leq m-2 \}$$

Dann existiert eine Funktion  $u$  mit

$$\Delta^m u = 0 \text{ in } \Omega$$

und  $\dot{u}(x) := (D^{i,j} u)_{0 \leq i+j \leq m-1}(x) \rightarrow g(p)$  f. ü. für  $x \rightarrow p$  nicht-tangential, komponentenweise. Die Funktion  $u$  kann als Vielfachschichtpotential dargestellt werden.

Die Bezeichnung "nicht-tangential" heißt, daß die Annäherung an den Rand, wie bei  $L^p$ -Randwerten üblich, innerhalb gewisser "Kegel", die über dem Rand definiert sind, erfolgt.

Die Idee der Arbeit mit verträglichen Randwerten geht auf S. Agmon zurück. Agmon untersuchte dabei in der Arbeit [1] hölderstetige Randwerte  $f_{ij} \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$  bzw.  $C^\alpha(\partial\Omega)$ , und entsprechend ist auch der Raum  $\dot{C}_{m-1,\alpha}(\partial\Omega)$  definiert. Die Idee der Definition des Vielfachschichtpotentials ergibt sich aus der Greenschen Formel, die man durch partielle Integration der Bilinearform

$$B^m[u, v] = (-1)^m \iint_{\Omega} (\partial_x + i\partial_y)^m u \cdot (\partial_x - i\partial_y)^m v \, dx \, dy \quad (u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2))$$

erhält.

Ersetzen wir nun die Funktionen  $\partial_x^r \partial_y^s u$  durch unsere Dichtefunktionen  $f_{ij}$  und die Funktion  $v$  durch die Fundamentallösung des polyharmonischen Operators, so erhalten wir - es wurden zuerst die Ableitungen nach  $x$  und danach die partiellen Ableitungen nach  $y$  von  $u$  auf  $v$  übertragen - das Vielfachschichtpotential. Es hat dann folgendes Aussehen:

$$(Vf)(x) = \int_{\partial\Omega} A_1^m[\dot{f}(Q), F^m(x-Q)] \, dy(Q) + A_2^m[\dot{f}(Q), F^m(x-Q)] \, dx(Q)$$

mit den Bilinearformen

$$A_1^m[\dot{f}(Q), F^m(x-Q)] = \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m-1-\nu} (-1)^{\mu+\nu+1} \binom{m}{\nu} f_{\mu, \nu}(Q) \operatorname{Re} \left\{ (-i)^\nu M^m(\partial_x^Q, \partial_y^Q) \right. \\ \left. \cdot (\partial_x^Q)^{m-1-\mu-\nu} F^m(x-Q) \right\}$$

und

$$A_2^m[\dot{f}(Q), F^m(x-Q)] = \sum_{\tau=0}^{m-1} (-1)^\tau f_{0, \tau} \operatorname{Re} \left\{ M^{m-\tau}(\partial_x^Q, \partial_y^Q) M^m(\partial_x^Q, \partial_y^Q) \right\} F^m(x-Q),$$

$$\text{mit} \quad M^m(\xi, \eta) = (\xi - i\eta)^m,$$

$$M^{m-1}(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{m-1}{\nu} (-i)^{m-\nu} \xi^\nu \eta^{m-1-\nu},$$

wobei  $F^m(x-Q)$  die Fundamentallösung von  $\Delta^m$  mit dem Pol  $x$  und dem variablen Punkt  $Q$  ist. Eine mögliche Darstellung der Fundamentallösung, wie sie von S. Agmon angegeben wurde, ist die Schreibweise als Integral in der komplexen Ebene. Es ist

$$F^m(x-Q) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_y \frac{[(x-\xi) + (y-\eta)\zeta]^{2m-2} \log [(x-\xi) + (y-\eta)\zeta]}{(2m-2)! (\zeta^2 + 1)^m} \, d\zeta \right\},$$

wobei  $X = (x, y), Q = (\xi, \eta)$  und  $\gamma$  eine rektifizierbare, einfach-zusammenhängende Kurve in der oberen Halbebene ist, die den Punkt  $i$  im Innern enthält.

Nach diesen umfangreichen Vorbetrachtungen sei einiges zum Beweis des obigen Satzes gesagt. Der Beweis folgt in groben Zügen dem von Cohen und Gosselin in [2]. Wir zeigen zuerst, daß

$$\lim_{X \in \Omega, X \rightarrow P \in \partial \Omega} \dot{u}(X) = (I+H)\dot{f}(P) \text{ f. ü. ist.} \quad (1)$$

Wiederum erfolgt der Grenzübergang nicht-tangential.  $H$  ist ein kompakter Operator von  $B^p(\partial \Omega)$  in  $B^p(\partial \Omega)$ . Die Gleichung (1) ist so zu verstehen, daß für  $0 \leq i+j \leq m-1$  gilt:

$$\lim_{X \in \Omega, X \rightarrow P \in \partial \Omega} (D^{i,j} \dot{V}f)(X) = (f_{i,j} + H_{i,j}f)(P) \text{ f. ü. und}$$

$$H_{i,j}: B^p(\partial \Omega) \rightarrow L^p_1(\partial \Omega) \text{ kompakt, } 0 \leq i+j \leq m-2,$$

$$B^p(\partial \Omega) \rightarrow L^p(\partial \Omega) \text{ kompakt, } i+j \leq m-1.$$

Dabei entstehen die Operatoren  $H_{i,j}$ , falls wir in  $D^{i,j} \dot{V}f(X)$  formal den Übergang von  $X \in \Omega$  nach  $P \in \partial \Omega$  vollziehen ( $0 \leq i+j \leq m-2$ ). Im Fall  $i+j = m-1$  sind es Linearkombinationen dieser Operatoren. Die Integrale  $H_{i,j} \dot{f}$  existieren dabei im Sinne des Cauchyschen Hauptwerts. Bei der Untersuchung dieser Operatoren ist natürlich stets lokal zu arbeiten.

Beim Beweis der Aussage (1) spielen die Untersuchungen von gewissen Maximaloperatoren eine zentrale Rolle. Insofern ist auch das folgende Lemma für diesen Beweis von zentraler Bedeutung.

Lemma:

$$\text{Sei } U_*^m(a, f)(x) = \sup_{\epsilon > 0} \int_{|x-y| > \epsilon} f(y) R(\tilde{\Phi}_1(x, y), \tilde{\Phi}_2(x, y)) \frac{t^m(x, y)}{|x-y|^2} dy$$

$$\text{mit } t^m(x, y) = \int_x^y a(t) \left(\frac{y-t}{x-y}\right)^m \left(\frac{\tilde{\Phi}(y) - \tilde{\Phi}(t)}{y-t}\right)^n dt,$$

$$\tilde{\Phi}_i(x, y) = \frac{\tilde{\Phi}_i(x) - \tilde{\Phi}_i(y)}{x-y}, \quad i = 1, 2, \quad a \in L^p(\mathbb{R}^1), \quad f \in L^q(\mathbb{R}^1), \quad (p, q > 1),$$

$$\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 \in C^1_0(\mathbb{R}^1), \quad \|\tilde{\Phi}\|_\infty, \|\tilde{\Phi}_1\|_\infty, \|\tilde{\Phi}_2\|_\infty \leq m_0.$$

$R(\xi, \eta)$  sei analytisch in  $\xi^2 + \eta^2 \leq 2m_0^2$ , und es sei  $R(\xi, \eta) = R(-\xi, -\eta)$ . Dann gilt:

$$\|U^m(a, f)\|_r \leq C \|a\|_p \|f\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1/r.$$

Dieser Satz wurde in der Diplomarbeit /4/ bewiesen. Er stellt für den eindimensionalen Fall eine Erweiterung des Satzes 4 in /3/ dar. Dort wurden Aussagen für Integraloperatoren mit einem

Faktor der Gestalt  $t^m(x, y) = \int_x^y a(t) dt$  gemacht. Natürlich ist

dieses Lemma in dieser Form sehr auf unser Problem zugeschnitten. Es wurden in der Arbeit keine Versuche gemacht, hier eine umfassendere Aussage zu formulieren. Wir bemerken aber an dieser Stelle, daß für den Fall  $R=1$ ,  $a=1$  und  $m=n=0$  die oben untersuchten Operatoren die Riesz-Transformationen sind, die ausgiebig in der Literatur untersucht sind.

Wir kommen nun auf unsere in (1) gemachte Aussage zurück und haben insbesondere, daß  $(I+H)$  Fredholmoperator ist und außerdem unser Dirichletproblem auf folgende Integralgleichung zurückgeführt werden kann (exakt handelt es sich natürlich um ein System von Integralgleichungen):

$$(I+H)\dot{f} = \dot{g}. \quad (2)$$

Um nun zu zeigen, daß die Lösung unseres Dirichletproblems stets als Vielfachschichtpotential darstellbar ist, ist zu zeigen, daß obige Integralgleichung stets auflösbar ist. Nach einem Fredholmschen Satz genügt es zu zeigen, daß für beliebige

$$\dot{\theta} \in \text{Ker}(I+H^*) \text{ stets } \dot{\theta} \in (B^p)^* \text{ gilt.} \quad (3)$$

Es ist klar, daß

$$(B^p)^* = L^q(\partial\Omega) \frac{m}{2^{(m+1)}} // (B^p)^\perp \text{ der Dualraum ist } (1/p+1/q=1) \text{ mit}$$

$$\langle \dot{\theta}, \dot{f} \rangle = \sum_{i+j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \theta_{ij}(Q) f_{ij}(Q) ds(Q) \text{ für } \dot{\theta} \in (B^p)^* \text{ und } \dot{f} \in B^p(\partial\Omega).$$

Zum Beweis der Aussage (3) führen wir ein Potential  $W$  über  $(B^p)^*$  ein. Es ist

$$\dot{W}(x) = \sum_{0 \leq i+j \leq m-1} \int_{\partial\Omega} \theta_{ij}(P) (D^{i,j})^P F^m(x-P) ds(P).$$

Man kann zeigen, daß  $W$  über  $(B^p)^*$  eindeutig definiert ist und daß für beliebige  $\dot{\theta} \in \text{Ker}(I+H^*)$  und  $f \in C^m(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$

$$\langle \dot{\theta}, (-I+H)\dot{f} \rangle = \text{Re} \iint_{\Omega} M^m(f) \overline{M^m(W)} dx dy = 0 \text{ gilt. Dabei ist } \dot{f} \text{ die}$$

Einschränkung der partiellen Ableitungen  $D^{1,j}f$  auf den Rand  $\partial\Omega$  ( $0 \leq i+j \leq m-1$ ). Aus diesem Ergebnis erhält man sofort die Aussage (3), da die Menge  $\{\dot{f}: f \in C^m(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})\}$  dicht in  $B^p(\partial\Omega)$  ist.

Bemerkung: Diese Arbeit faßt die Ergebnisse der Diplomarbeit /4/ des Autors zusammen, und war in dieser Form Inhalt eines Vortrages auf der "Conference on Analytical and Numerical Treatment of Differential and Integral Equations", die vom 29. September bis 3. Oktober 1986 in Frankfurt/Oder stattfand.

#### Literatur

- /1/ Agmon, S.: Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane. *Comm. Pure Appl. Math.* 10, 179 - 239 (1957)
- /2/ Cohen, J., and Gosselin, J.: The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a  $C^1$  domain in the plane. *Indiana Univ. Math. J.* 32, 5, 635 - 685 (1983)
- /3/ Calderon, A. P., Calderon, C. P., Fabes, E., Jodeit, M., and Riviere, N. M.: Applications of the Cauchy integral along Lipschitz curves. *Bull. Amer. Math. Soc.* 84, 287 - 290 (1978)
- /4/ Szyszka, U.: Das Dirichletproblem für den polyharmonischen Operator in  $C^1$ -Gebieten in der Ebene. Diplomarbeit, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1986

eingegangen: 24. 11. 1986

#### Verfasser:

Dipl.-Math. U. Szyszka  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
Rostock  
DDR-2500

Ehrhard Herbst

Ein Stabilitätsbegriff für Faltungsgleichungen0. Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine Aussage über die Stabilität von abgeschlossenen Mengen unter Verwendung allgemeiner Kerne  $K$ . Von Deny /1/ wurden ausgehend von diesen Kernen  $K$  Räume  $\mathcal{W}$  von Distributionen endlicher Energie definiert. Deny hat gezeigt, daß der Raum  $\mathcal{W}_E$  von Distributionen endlicher Energie mit Träger in der abgeschlossenen Menge  $E \subset \mathbb{R}^d$  ein vollständiger Teilraum von  $\mathcal{W}$  ist. Hier wird die Frage aufgeworfen, unter welchen Bedingungen an die Menge  $E$  die Distributionen aus  $\mathcal{W}_E$  im Raum  $\mathcal{W}$  durch Distributionen approximiert werden können, deren Träger in einer Teilmenge von  $E$  enthalten ist. Abgeschlossene Mengen, für die das möglich ist, heißen stabil. Wir können zeigen, daß Mengen, die die Segmenteigenschaft besitzen, stabil sind. Es ist bisher nicht gelungen, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium der Stabilität, wie sie von Hedberg /2/, Polking /4/ und anderen für spezielle Kerne mittels des Kapazitätsbegriffes formuliert und bewiesen wurden, zu finden.

Im ersten Abschnitt werden wesentliche Bezeichnungen und Begriffe bereitgestellt, während der zweite Abschnitt die Stabilitätsaussage enthält. Im dritten Abschnitt werden Anwendungsmöglichkeiten auf Faltungsgleichungen angedeutet.

1. Bezeichnungen und Begriffe

Wir betrachten über dem euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) den Raum  $\mathcal{F}$  der unendlich oft differenzierbaren, schnell fallenden Funktionen und den Raum  $\mathcal{S}'$  der temperierten Distributionen mit den üblichen Topologien. Die Anwendung der Distribution  $T$  auf die Funktion  $\varphi \in \mathcal{F}$  wird durch  $\langle T, \varphi \rangle$  bezeichnet. Die Funktionen seien komplexwertig, die Räume linear über dem Körper der komplexen Zahlen. Die Fouriertransformation einer Lebesgue-inte-

grierbaren Funktion  $f$  wird durch

$$Ff(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i xy} f(y) dy$$

und die Fouriertransformierte einer temperierten Distribution  $T$  durch

$$\langle FT, \varphi \rangle = \langle T, F\varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

erklärt. Grundlegend für die weiteren Betrachtungen ist eine Distribution  $K \in \mathcal{S}'$ , der Kern. Von dieser Distribution wird vorausgesetzt, daß sie den folgenden Bedingungen genügt (vgl. /1/):

- (A<sub>1</sub>) Die Fouriertransformierte  $FK = \mathcal{K}$  von  $K$  ist eine positive Funktion, d. h. eine Lebesgue-fast-überall erklärte, lokal integrierbare Funktion mit Träger im gesamten Raum  $\mathbb{R}^d$  ( $\text{supp } \mathcal{K} = \mathbb{R}^d$ ).
- (A<sub>2</sub>) Es gibt eine positive ganze Zahl  $m$ , so daß die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathcal{K}(x)}{(1+r^2)^m} dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathcal{K}(x)(1+r^2)^m} dx \quad \text{endlich sind.}$$

Dabei ist  $r^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2$  der Abstand des Punktes

$x = (x_1, \dots, x_d)$  zum Ursprung.

Von Deny /1/ stammt die folgende

**Definition:** Eine temperierte Distribution  $T$  heißt von endlicher Energie, wenn ihre Fouriertransformierte  $FT = \mathcal{T}$  eine Funktion ist, die der Ungleichung

$$\|T\| = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (1.1)$$

genügt. Die reelle Zahl  $\|T\|$  heißt Energie von  $T$ . Den Raum der Distributionen endlicher Energie bezeichnen wir mit  $\mathcal{W}$ .

Im Gegensatz zu Deny /1/ benötigen wir eine zusätzliche Voraussetzung an den Kern  $K \in \mathcal{S}'$ :

(A<sub>3</sub>) Für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $\varphi$  mit kompaktem Träger ( $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ) gilt  $\varphi T \in \mathcal{W}$  für alle  $T \in \mathcal{W}$ .

Die Bedingung (A<sub>3</sub>) ist erfüllt, wenn alle  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  Fouriermultiplikatoren für Funktionen darstellen, die mit dem Gewicht  $\mathcal{K}$  quadratisch integrierbar sind. Handelt es sich bei dem Kern  $K \in \mathcal{Y}$  um spezielle Differentialoperatoren (z. B. den biharmonischen Operator), so läßt sich diese Bedingung leicht nachprüfen. Dem Autor sind Kriterien für andere Kerne nur in Spezialfällen bekannt (vgl. Sawyer /5/, Kurtz /3/).

Einen Beweis der folgenden Aussage findet man bei Deny /1/.

- Satz:
1. Eine Distribution  $T \in \mathcal{W}$  mit kompaktem Träger ist genau dann identisch Null, wenn ihre Energie Null ist.
  2. Der Raum  $\mathcal{W}$  der Distributionen endlicher Energie ist vollständig in der Norm (1.1).
  3. Aus der Konvergenz von  $(T_n)$  gegen  $T$  in der Norm (1.1) folgt die Konvergenz von  $(T_n)$  gegen  $T$  im Raum  $\mathcal{S}'$ .
  4. Der Raum  $\mathcal{W}_E$  der Distributionen endlicher Energie mit Träger in der abgeschlossenen Menge  $E \subset \mathbb{R}^d$  ist vollständig.

Eine abgeschlossene Menge  $E \subset \mathbb{R}^d$  nennen wir normal, wenn der Rand von  $E$  mit dem Rand des Innern von  $E$  übereinstimmt:

$\partial E = \partial(\text{int}(E))$ . Im folgenden nehmen wir die abgeschlossenen Mengen  $E$  stets als normal an.

Wir betrachten zwei Folgen  $(E_n^{(1)})$  und  $(E_n^{(2)})$  ( $n \geq 1$ ) abgeschlossener Mengen mit den Eigenschaften

$$(i)_1 \quad E \subset E_{n+1}^{(1)} \subset \text{int}(E_n^{(1)}) \quad (n \geq 1),$$

$$(ii)_1 \quad E = \bigcap_{n \geq 1} E_n^{(1)},$$

$$(i)_2 \quad E_n^{(2)} \subset \text{int}(E_{n+1}^{(2)}) \subset E_{n+1}^{(2)} \subset \text{int}(E) \quad (n \geq 1),$$

$$(ii)_2 \quad \text{int}(E) = \bigcup_{n \geq 1} E_n^{(2)}.$$

Anhand dieser Mengenfolgen definieren wir zwei abgeschlossene Teilräume  $\mathcal{W}_E(1)$  und  $\mathcal{W}_E(2)$  des Raumes  $\mathcal{W}$ :

$$\mathcal{W}_E(1) = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{W}_{E_n}(1) \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_E(2) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{W}_{E_n}(2)}, \quad \text{wobei die Ab-}$$

schließung im Raum  $\mathcal{W}$  gebildet wird. Es gilt dann der

Hilfssatz:  $\mathcal{W}_E(2) \subset \mathcal{W}_E = \mathcal{W}_E(1)$ .

Darauf baut der Begriff der Stabilität auf, den wir wie folgt erklären:

Definition: Die abgeschlossene Menge  $E$  heißt stabil bezüglich  $K$  (oder kurz stabil), wenn  $\mathcal{W}_E(2) = \mathcal{W}_E$  gilt.

## 2. Ergebnis

Satz: Besitzt die abgeschlossene Menge  $E = \mathbb{R}^d \setminus \Omega = \Omega^c$  einen kompakten Rand und genügt sie der Segmenteigenschaft, d. h., gibt es für alle Punkte  $a \in \partial E$  eine Umgebung  $U = U(a)$  sowie einen von Null verschiedenen Vektor  $b = b(a)$  derart, daß  $x + tb \in \Omega$  ( $0 < t < 1$ ) für alle  $x \in \overline{\Omega} \cap U$  gilt, so ist die Menge  $E$  für alle Kerne  $K$  stabil.

Beweis: Wir zeigen, daß jede Distribution  $T \in \mathcal{W}_E$  durch Distributionen aus  $\mathcal{W}_E(2)$  approximiert werden kann. Wegen der Kompaktheit des Randes  $\partial E$  kann man eine endliche Überdeckung durch offene Kugeln  $B_{r_j}(x_j) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_j| < r_j\}$  und dazugehörige Vektoren  $b_j \neq 0$  so finden, daß

1. für  $B_{r_j}(x_j)$ ,  $b_j$  die Segmenteigenschaft erfüllt ist und
2.  $\partial E \subset \bigcup_{j=1}^N B_{r_j}(x_j)$  gilt.

Zu dieser Überdeckung wählen wir eine Zerlegung der Einheit  $(\varphi_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $K_j = \text{supp } \varphi_j \subset B_{r_j}(x_j)$  und  $\sum \varphi_j(x) = 1$

auf der Menge  $\bigcup_{\frac{1}{2}} B_r(x_j)$ . Nach Voraussetzung gilt dann

$\varphi_j T \in \mathcal{W}$  für alle  $T \in \mathcal{W}$ . Für vorgegebenes  $T \in \mathcal{W}_E$  haben wir

$T = (T - \sum \varphi_j T) + \sum \varphi_j T = T_0 + \sum T_j$ . Dabei ist der erste Summand  $T_0$  der rechten Seite eine Distribution aus  $\mathcal{W}_E(2)$ . Wir

zeigen nun, daß jede Distribution  $T_j \in \mathcal{W}_E$  durch Distributionen

$S_{j,t}$  ( $0 < t < 1$ ) aus  $\mathcal{W}_E(2)$  approximiert werden kann. Ohne Be-

schränkung der Allgemeinheit können wir  $\|T_j\| > 0$  annehmen. Die Distributionen  $S_{j,t}$  werden wie folgt erklärt:

$$\langle S_{j,t}, \varphi(x) \rangle = \langle T_j(x), \varphi(x - tb_j) \rangle.$$

Dann gilt

$$(i) \text{FS}_{j,t}(x) = \text{FT}_j(x) e^{2\pi i t b_j x} = \mathcal{F}_j(x) e^{2\pi i t b_j x} \quad \text{und}$$

(ii)  $\text{supp } S_{j,t} \subset \text{int}(E)$  für hinreichend kleines  $t > 0$ , also

$$S_{j,t} \in \mathcal{W}_E(2).$$

Die Aussage (i) läßt sich durch eine einfache Rechnung überprüfen. Zum Beweis von (ii) sei  $\varphi \in C_0^\infty((K_j \cap E)^c)$ . Dann gilt

$$0 = \langle T_j, \varphi \rangle = \langle S_{j,t}(x), \varphi(x + tb_j) \rangle = \langle S_{j,t}, \varphi \rangle \quad \text{mit}$$

$\varphi(x) = \varphi(x - tb_j)$ . Für  $x \in K_j \cap E$  gilt sodann  $\varphi(x) = 0$ , also

haben wir  $\varphi(x) = 0$  für alle  $x \in (K_j \cap E) - tb_j = \{y - tb_j : y \in K_j \cap E\}$ .

Es sei  $1 > t_j > 0$  so gewählt, daß  $(K_j \cap E) - tb_j \subset B_r(x_j)$  für alle

$0 < t \leq t_j$  gilt. Dann besteht die Inklusion  $(K_j \cap E) - tb_j \subset \text{int}(E)$ .

Würde nämlich  $x \in \bar{\Omega} \cap [(K_j \cap E) - tb_j]$  gelten, so bedeutet das

einerseits  $x = y - tb_j$  für ein  $y \in K_j \cap E = K_j \setminus \Omega$  und anderer-

seits  $x \in \bar{\Omega} \cap B_r(x_j)$ . Daraus folgt wegen der Segmenteigen-

schaft  $x + tb_j = y \in \Omega$  und somit ein Widerspruch.

Ist nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so bleibt  $\|S_{j,t} - T_j\| < \varepsilon$  für genü-

gend kleines  $0 < t \leq t_j$  zu zeigen. Für meßbare Mengen  $M \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$\int_M \mathcal{K}(x) |F_{T_j}(x) - FS_{j,t}(x)|^2 dx = \int_M \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x) - \tau_j(x) e^{2\pi i t b_j x}|^2 dx$$

$$= \int_M \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x)|^2 |1 - e^{2\pi i t b_j x}|^2 dx \leq 4 \int_M \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x)|^2 dx.$$

Daraus folgt die Existenz einer positiven Zahl  $R$  derart, daß für alle  $0 < t < 1$ ,  $b_j \in \mathbb{R}^d$  die Ungleichung

$$\int_{B_R^c} \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x)|^2 |1 - e^{2\pi i t b_j x}|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ erfüllt ist.}$$

Für festes  $j$  können wir eine positive Zahl  $t_j^{(1)} \leq t_j$  so finden, daß für alle  $0 < t < t_j^{(1)}$  und alle  $x \in B_R$  die Beziehung

$$|1 - e^{2\pi i t b_j x}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2 \|\mathcal{T}_j\|^2}$$

besteht. Wir erhalten dann

$$\|S_{j,t} - T_j\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x)|^2 |1 - e^{2\pi i t b_j x}|^2 dx$$

$$= \int_{B_R} \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x)|^2 |1 - e^{2\pi i t b_j x}|^2 dx$$

$$+ \int_{B_R^c} \mathcal{K}(x) |\mathcal{T}_j(x)|^2 |1 - e^{2\pi i t b_j x}|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

und damit die Behauptung.

### 3. Anwendung auf Faltungsgleichungen

Über die Beziehung  $U = \mathcal{K} \cdot \mathcal{T}$  für  $T \in \mathcal{W}$  führt Dely /1/ das Potential einer Distribution  $T$  endlicher Energie ein:  $U = U^T = U_K^T = K * T$ . Darüber hinaus wird in /1/ für zwei Distributionen endlicher Energie  $T_1, T_2$  das Skalarprodukt wie folgt erklärt:

$$(T_1, T_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x) \mathcal{T}_1(x) \overline{\mathcal{T}_2(x)} dx.$$

Es gelten die üblichen Beziehungen  $(T_1, T_2) = \overline{(T_2, T_1)}$ ,  
 $(T_1, T_1) = \|T_1\|^2$ ,  $\|T_1 + T_2\|^2 = \|T_1\|^2 + \|T_2\|^2 + 2 \operatorname{Re} (T_1, T_2)$  so-  
 wie die Schwarzsche Ungleichung  $|(T_1, T_2)| \leq \|T_1\| \|T_2\|$ . Darüber

hinaus besteht im Fall  $T_2 = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  die Gleichung

$(T_1, T_2) = \langle U^{T_1}, \overline{\varphi} \rangle$ . Mit anderen Worten: Die Potentiale bilden  
 im gewissen Sinne den Dualraum zu  $\mathcal{W}$ .

Die Projektion von  $T \in \mathcal{W}$  auf den abgeschlossenen Teilraum  $\mathcal{W}_E$   
 bezeichnen wir mit  $T'$  (manchmal auch mit  $T'_E$ ). Es gelten dann

die Beziehungen  $\|T - T'\| = \inf \{ \|S - T\| : S \in \mathcal{W}_E \}$ ,

$(T - T', S) = 0$  für alle  $S \in \mathcal{W}_E$  und  $(T', S) = (T, S') = (T', S')$  für  
 alle  $T, S \in \mathcal{W}$ . Über die Potentiale gilt die folgende Aussage  
 (Deny /1/).

**Satz:** Im Innern  $\operatorname{int}(E)$  der abgeschlossenen Menge  $E \subset \mathbb{R}^d$  sind  
 die Potentiale  $U^T$  und  $U^{T'}$  identisch.

Die Inverse  $\mathcal{D} = \frac{1}{\mathcal{X}}$  ist nach Voraussetzung die Fouriertransfor-  
 mierte einer Distribution  $D \in \mathcal{S}'$ , und man kann  $D * K = \delta$  schrei-  
 ben (Deny /1/). Für das Potential  $U = K * T$  einer Distribution  $T$   
 endlicher Energie kann dann  $J = D * U$  geschrieben werden. Mit  
 anderen Worten:  $T$  ist das  $D$ -Potential einer Distribution  $U$ .  
 Es gilt weiter  $\|T\|_K = \|U\|_D$ .

Daraus folgt (vgl. /1/): Konvergiert  $(T_n)$  in der Norm bezüglich  
 $K$  gegen  $T$ , so konvergiert  $(U^{T_n})$  in der Norm bezüglich  $D$  gegen  
 $U^T$ , und  $(U^{T_n})$  konvergiert gegen  $U^T$  in  $\mathcal{S}'$  (wegen Punkt 3 des  
 Satzes aus Abschnitt 1).

Wir betrachten den Raum  $\mathcal{U}$  der Potentiale  $U = K * T$  von Distri-  
 butionen endlicher Energie mit der Norm bezüglich  $D$  und darin  
 das folgende Problem: Gegeben ist eine (nichtleere) abgeschlos-  
 sene Menge  $E \subset \mathbb{R}^d$  und eine Distribution  $U \in \mathcal{U}$ . Gesucht ist eine  
 Distribution  $R \in \mathcal{U}$  derart, daß  $U = R$  in  $\operatorname{int}(E)$  und  $D * R = 0$  in  
 $E^c$  gilt.

Dieses Problem steht in gewissem Zusammenhang mit dem feinen Dirichlet-Problem (vgl. Schulze/Wildenhain /6/). Eine Lösung ist unmittelbar durch die Projektion gegeben: Für  $U = K * T$  löst  $R = K * T_E$  das Problem.

Der Begriff der Stabilität besagt nun, daß Lösungen des Problems  $D * R = 0$  für die Menge  $E$  durch Lösungen des Problems  $D * R = 0$  in einer Umgebung von  $E$  in der Norm bezüglich  $D$  approximiert werden können.

### Literatur

- /1/ Deny, J.: Les potentiels d'énergie finie. Acta Math. 82, 107 - 183 (1950)
- /2/ Hedberg, L. I.: Spectral synthesis and stability in Sobolevspaces. In: Benedetto, J. J. (Ed.): Euclidean harmonic analysis, Proc. of Seminars at the Univ. of Maryland 1979. Lecture Notes in Math. 779, 73 - 103, Berlin 1980
- /3/ Kurtz, D. S.: Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted  $L^p$  spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 259, 235 - 254 (1980)
- /4/ Polking, J. C.: Approximation in  $L^p$  by solutions of elliptic partial differential equations. Amer. J. Math. 94, 1231 - 1244 (1972)
- /5/ Sawyer, E.: Multipliers of Besov and power-weighted  $L^2$  spaces. Indiana Univ. Math. J. 33, no. 3, 353 - 366 (1984)
- /6/ Schulze, B.-W., und Wildenhain, G.: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin 1977

eingegangen: 04. 11. 1986

### Verfasser:

Dr. E. Herbst  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
Rostock  
DDR-2500

Jürgen Roßmann

Über die Lösbarkeit und die Regularität der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten in gewichteten Sobolevräumen von beliebiger ganzzahliger Ordnung

---

### Einleitung

Es sei  $G$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) mit stückweise glattem Rand  $\partial G = \bigcup_{j=1}^T \Gamma_j \cup M$ , wobei  $M$  eine  $(n-2)$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\partial G$  und  $\Gamma_j$  ( $j=1, \dots, T$ ) glatte zusammenhängende  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß  $G$  in einer Umgebung eines jeden Punktes  $\zeta \in M$  diffeomorph zu einem zweiflächigen Winkel

$$D_\zeta = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = (y_1, y_2) \in K_\zeta, z = (z_1, \dots, z_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

mit  $K_\zeta = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} < \infty, |\omega| < \frac{1}{2} \omega_0(\zeta)\}$  ( $\omega$  ist der polare Winkel in der  $(y_1, y_2)$ -Ebene) ist.

In  $G$  betrachten wir die Randwertaufgabe

$$Lu = L(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \text{ in } G, \quad (1)$$

$$B_k^{(j)} u = B_k^{(j)}(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq m_{jk}} b_{k;\alpha}^{(j)}(x) D^\alpha u = g_k^{(j)} \text{ auf } \Gamma_j \quad (2)$$

( $k=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, T$ ), wobei  $L$  elliptisch in  $G$  ist und die Randoperatoren  $B_1^{(j)}, \dots, B_m^{(j)}$  für  $j=1, \dots, T$  normale Systeme bilden, die  $L$  auf  $\Gamma_j$  überdecken. Die Koeffizienten  $a_\alpha$  und  $b_{k;\alpha}^{(j)}$  werden der Einfachheit halber als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt.

In [5] wurde eine Fredholmtheorie für Randwertaufgaben der Gestalt (1), (2) in der Klasse der gewichteten Sobolevräume

$V_{p,\beta}^1(G)$  entwickelt, die als Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{G} \setminus M)$  bez.

der Norm

$$\|u\|_{V_{p,B}^1(G)} = \left( \int_G \sum_{|\alpha| \geq 1} r^{p(B(z)-1+|\alpha|)} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} \quad (3)$$

definiert sind. Hier ist  $l$  eine nichtnegative ganze Zahl,  $1 < p < \infty$ ,  $r = \text{dist}(x, M)$ ,  $z$  der zu  $x$  nächste Punkt auf  $M$  und  $B$  eine beliebig oft differenzierbare reellwertige Funktion auf  $M$ .  $V_{p,B}^{l-1/p}(\Gamma_j)$  ( $l \geq 1$ ) bezeichnet wie üblich den Raum der Spuren von Funktionen aus  $V_{p,B}^1(G)$  auf  $\Gamma_j$  mit der Norm

$$\|u\|_{V_{p,B}^{l-1/p}(\Gamma_j)} = \inf \left\{ \|v\|_{V_{p,B}^1(G)} : v \in V_{p,B}^1(G), v|_{\Gamma_j} = u \right\}. \quad (4)$$

Darüber hinaus wurden in /5/ Regularitätseussagen für die Lösung  $u \in V_{p,B}^{1+2m}(G)$  der Aufgabe (1), (2) bewiesen. Derartige Aussagen sind für Gleichungen 2. Ordnung z. B. auch in /2/, /3/, /8/ erhalten worden.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Verallgemeinerung der Ergebnisse aus /5/ auf den Fall dar, daß  $l$  beliebig ganzzahlig ist. Die Beweise einiger Hilfsaussagen werden hier z. T. nur angedeutet. Ausführlich sind alle Beweise im Fall  $p=2$  in /7/ dargestellt. Entscheidend ist hierbei die Untersuchung elliptischer Randwertaufgaben in einem zweiflächigen Winkel. Von dort läßt sich beispielsweise die Fredholm'eigenschaft mittels der Konstruktion eines Regularisators aus lokalen Regularisatoren (vgl. z. B. /9/) leicht auf die Randwertaufgabe (1), (2) übertragen.

### 1. Funktionenräume im zweiflächigen Winkel

$D = K \times R^{n-2} = \{x = (y, z) \in R^n : y = (y_1, y_2) \in K, z = (z_1, \dots, z_{n-2}) \in R^{n-2}\}$   
 mit  $K = \{y = (y_1, y_2) \in R^2 : 0 < r = |y| < \infty, |\omega| < \frac{1}{2} \omega_0\}$  ( $\omega$  ist der polare Winkel in der  $y$ -Ebene) sei ein zweiflächiger Winkel im  $R^n$  mit den Seitenflächen

$\Gamma^\pm = \gamma^\pm \times R^{n-2} = \{x = (y, z) \in R^n : y \in \gamma^\pm := \{y : \omega = \pm \frac{1}{2} \omega_0\}, z \in R^{n-2}\}$  und der Kante  $M = \overline{\Gamma^+} \cap \overline{\Gamma^-}$ . Für den Innenwinkel  $\omega_0$  von  $D$  gelte  $0 < \omega_0 < 2\pi$ .

Analog zu (3), (4) seien  $V_{p,\beta}^1(D)$  ( $l \geq 0$ ) die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{V_{p,\beta}^1(D)} = \left( \int_D \sum_{|\alpha| \leq l} r^{p(\beta(z)-l+|\alpha|)} |D^\alpha u(y,z)|^p dy dz \right)^{1/p}$$

und  $V_{p,\beta}^{1-1/p}(\Gamma^\pm)$  ( $l \geq 1$ ) der Raum der Spuren von Funktionen aus  $V_{p,\beta}^1(D)$  auf  $\Gamma^\pm$ . Hierbei ist  $\beta$  entweder eine glatte reellwertige Funktion oder eine reelle Konstante. Für  $l < 0$  werde  $V_{p,\beta}^1(D)$  als Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{V_{p,\beta}^1(D)} = \sup_v (u,v)_D \|v\|_{V_{q,-\beta}^{-1}(D)}$$

und  $V_{p,\beta}^{1-1/p}(\Gamma^\pm)$  als Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Gamma^\pm)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{V_{p,\beta}^{1-1/p}(\Gamma^\pm)} = \sup_v |(u,v)_{\Gamma^\pm}| \|v\|_{V_{q,-\beta}^{-1+1-1/q}(\Gamma^\pm)}$$

$(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (u,v)_D = \int_D u \bar{v} dx, (u,v)_{\Gamma^\pm} = \int_{\Gamma^\pm} u \bar{v} d\sigma)$  definiert, wobei

das Supremum über alle Funktionen  $v \in V_{q,-\beta}^{-1}(D)$  bzw.

$v \in V_{q,-\beta}^{-1+1-1/q}(\Gamma^\pm)$ ,  $v \neq 0$ , gebildet wird.

In Anlehnung an /6/ (s. auch /10/) definieren wir den Raum  $\tilde{V}_{p,\beta}^1(D)$  für beliebiges ganzzahliges  $l$  als Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{\tilde{V}_{p,\beta}^1(D)} = \|u\|_{V_{p,\beta}^1(D)} + \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{2m-1} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial \nu_{\pm}^k} \right\|_{V_{p,\beta}^{1-k-1/p}(\Gamma^\pm)}; \quad (5)$$

$\frac{\partial}{\partial \nu_{\pm}}$  ist hierbei die Ableitung in der Richtung der Außennormalen zu  $\Gamma^\pm$ .

Im weiteren seien  $\xi_\nu \in C^\infty(\bar{D})$  reellwertige Funktionen, die nur von  $r = |y|$  abhängen, mit  $\text{supp } \xi_\nu \subset \{x \in \bar{D} : 2^{\nu-1} < r < 2^{\nu+1}\}$ ,

$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \zeta_{\nu} = 1$  und  $|D_{\gamma}^{\alpha} \zeta_{\nu}| < c_{\alpha} 2^{-\nu|\alpha|}$ , wobei  $c_{\alpha}$  unabhängig von  $\nu$  ist.

Das folgende Lemma wurde in /5/ für  $l \geq 0$  bzw.  $l \geq 1$  bewiesen, läßt sich aber auch auf den Fall  $l \leq 0$  übertragen (s. /7/).

**Lemma 1.1:** Die Normen  $\|\cdot\|_{V_{p,B}^1(D)}$  und  $\|\cdot\|_{V_{p,B}^{1-1/p}(\Gamma^{\pm})}$  sind für beliebiges ganzzahliges  $l$ ,  $p \in (1, \infty)$  und  $B \in R$  äquivalent zu den Normen

$$\|u\| = \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|\zeta_{\nu} u\|_{V_{p,B}^1(D)}^p \right)^{1/p} \text{ bzw.}$$

$$\|u\| = \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|\zeta_{\nu} u\|_{V_{p,B}^{1-1/p}(\Gamma^{\pm})}^p \right)^{1/p}.$$

Entsprechend gilt (s. /7/)

**Lemma 1.2:** Die Norm  $\|\cdot\|_{V_{p,B}^1(D)}$  ist für beliebiges ganzzahliges  $l$ ,  $p \in (1, \infty)$  und  $B \in R$  äquivalent zur Norm

$$\|u\| = \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \|\zeta_{\nu} u\|_{\tilde{V}_{p,B}^1(D)}^p \right)^{1/p}.$$

Völlig analog zu /6/ (s. auch /10/) läßt sich das folgende Lemma beweisen (/7/).

**Lemma 1.3:** Es sei  $L$  ein homogener Operator der Ordnung  $k \leq 2m$  mit konstanten Koeffizienten und  $B$  ein homogener Randoperator auf  $\Gamma^+$  oder  $\Gamma^-$  der Ordnung  $\ell \leq 2m-1$  mit konstanten Koeffizienten. Dann gelten für beliebiges ganzzahliges  $l$ ,  $p \in (1, \infty)$  und  $B \in R$  die Abschätzungen

$$\|Lu\|_{V_{p,B}^{1-k}(D)} \leq c \|u\|_{\tilde{V}_{p,B}^1(D)}, \quad \|Bu\|_{V_{p,B}^{1-\ell-1/p}(\Gamma^{\pm})} \leq c \|u\|_{\tilde{V}_{p,B}^1(D)}$$

für alle  $u \in C_0^{\infty}(\bar{D} \setminus M)$ , wobei die Konstante  $c$  unabhängig von  $u$  ist.

Mit Hilfe von Lemma 1.3 lassen sich  $L$  und  $B$  als stetige Abbildungen von  $\tilde{V}_{p,B}^1(D)$  in  $V_{p,B}^{1-k}(D)$  bzw.  $V_{p,B}^{1-\ell-1/p}(\Gamma^{\pm})$  definieren.

Ist nämlich  $u \in \tilde{V}_{p,B}^1(D)$  gegeben, dann kann man eine Folge  $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  mit  $\|u - u_n\|_{\tilde{V}_{p,B}^1(D)} \rightarrow 0$  wählen. Nach Lemma 1.3 kon-

vergieren die Folgen  $\{Lu_n\}$  und  $\{Bu_n\}$  in  $V_{p,B}^{1-k}(D)$  bzw.

$V_{p,B}^{1-k-1/p}(\Gamma^\pm)$ , und man kann

$$Lu := \lim_{n \rightarrow \infty} Lu_n, \quad Bu := \lim_{n \rightarrow \infty} Bu_n$$

setzen. Die Grenzwerte sind offenbar unabhängig von der ausgewählten Folge  $\{u_n\}$ .

**Bemerkung 1.1:** Die Voraussetzung in Lemma 1.3, daß  $L$  und  $B$  homogene Operatoren mit konstanten Koeffizienten sind, ist nur dann wesentlich, wenn wir zulassen, daß der Träger von  $u$  unbeschränkt ist. In dem Fall, daß der Träger von  $u$  in einer vorgegebenen beschränkten Menge enthalten ist, kann diese Voraussetzung weggelassen werden.

Das folgende Lemma ist in /5/ für den Fall  $l \geq 0$  bewiesen worden.

**Lemma 1.4:**  $N_j^+$  und  $N_j^-$  seien homogene Randoperatoren mit konstanten Koeffizienten der Ordnung  $j$  ( $j=0,1,\dots,2m-1$ ), die auf  $\Gamma^+$  bzw.  $\Gamma^-$  normale Systeme bilden. Dann existiert zu beliebig vorgegebenen Funktionen  $g_j^\pm \in V_{p,B}^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)$  ( $j=0,1,\dots,2m-1$ ;  $l$  ganzzahlig,  $p \in (1,\infty)$ ,  $B \in \mathbb{R}$ ) eine Funktion  $u \in \tilde{V}_{p,B}^1(D)$  mit  $N_j^\pm u = g_j^\pm$  auf  $\Gamma^\pm$ . Die Abbildung  $\{g_0^+, \dots, g_{2m-1}^+, g_0^-, \dots, g_{2m-1}^-\} \rightarrow u$  ist dabei stetig in den angegebenen Räumen.

**Beweis:** Wegen der Dichtheit von  $C_0^\infty(\Gamma^\pm)$  in  $V_{p,B}^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)$  genügt es, die Behauptung für Funktionen  $g_j^\pm \in C_0^\infty(\Gamma^\pm)$  zu zeigen.

Es seien  $\zeta_\nu$  die vor Lemma 1.1 definierten Funktionen. Setzt man  $\zeta'_\nu(x) = \zeta_\nu(2^\nu x)$ ,  $g_{j\nu}^\pm(x) = g_j^\pm(2^\nu x)$ , dann liegt der Träger von  $\zeta'_\nu g_{j\nu}^\pm$  in  $\{x \in \bar{D} : \frac{1}{2} < r < 2\}$ . Nach /6/, /10/ existieren deshalb Funktionen  $v_\nu \in C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  mit dem Träger in  $\{x \in \bar{D} : \frac{1}{2} < r < 2\}$ ,

die den Gleichungen  $N_j^\pm v_\nu = \zeta_\nu^\pm g_{j\nu}^\pm$  auf  $\Gamma^\pm$  genügen  
 ( $j=0,1,\dots,2m-1$ ). Für die Funktionen  $v_\nu$  gilt die a priori-  
 Abschätzung

$$\|v_\nu\|_{\tilde{W}_p^1(D)}^p \leq c \sum_{\pm} \sum_{j=0}^{2m-1} \|\zeta_\nu^\pm g_{j\nu}^\pm\|_{W_p^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)}^p, \quad (6)$$

wobei  $c$  unabhängig von  $\nu$  ist.

Aus der Gleichung  $N_j^\pm v_\nu = \zeta_\nu^\pm g_{j\nu}^\pm$  folgt nach der Koordinaten-  
 transformation  $x = 2^{-\nu} x'$

$$N_j^\pm(D_{x'}) u_\nu(x') = \zeta_\nu^\pm(x') g_j^\pm(x') \text{ auf } \Gamma^\pm \quad (7)$$

mit  $u_\nu(x') = 2^{j\nu} v_\nu(2^{-\nu} x')$ . Ferner ist

$$\|\zeta_\nu^\pm g_{j\nu}^\pm\|_{W_p^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)}^p \leq c 2^{\nu(-n+p1-pj-p\beta)} \|\zeta_\nu^\pm g_j^\pm\|_{V_{p,\beta}^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)}^p,$$

$$\|u_\nu\|_{\tilde{V}_{p,\beta}^1(D)}^p \leq c 2^{\nu(n-p1+pj+p\beta)} \|v_\nu\|_{\tilde{W}_p^1(D)}^p,$$

woraus sich nach (6)

$$\|u_\nu\|_{\tilde{V}_{p,\beta}^1(D)}^p \leq c \sum_{\pm} \sum_{j=0}^{2m-1} \|\zeta_\nu^\pm g_j^\pm\|_{V_{p,\beta}^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)}^p$$

mit einer von  $\nu$  unabhängigen Konstanten  $c$  ergibt.

Setzt man  $u = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} u_\nu$ , dann gilt  $N_j^\pm u = g_j^\pm$  auf  $\Gamma^\pm$   
 ( $j=0,\dots,2m-1$ ), und nach Lemma 1.1 und Lemma 1.2 ist

$$\|u\|_{\tilde{V}_{p,\beta}^1(D)} \leq c \sum_{\pm} \sum_{j=0}^{2m-1} \|g_j^\pm\|_{V_{p,\beta}^{1-j-1/p}(\Gamma^\pm)},$$

womit Lemma 1.4 bewiesen ist.

Lemma 1.4 gestattet es uns nun völlig analog zu /6/, /10/, eine  
 äquivalente Norm in  $\tilde{V}_{p,\beta}^1(D)$  anzugeben.

**Lemma 1.5:** L sei ein beliebiger homogener elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  mit konstanten Koeffizienten. Dann ist die Norm (5) für beliebiges ganzzahliges  $l$ ,  $p \in (1, \infty)$  und  $B \in \mathbb{R}$  äquivalent zur Norm

$$\|u\| = \|u\|_{V_{p,B}^1(D)} + \|Lu\|_{V_{p,B}^{1-2m}(D)}, \quad (8)$$

d. h., der Raum  $\tilde{V}_{p,B}^1(D)$  fällt mit der Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  bez. der Norm (8) zusammen.

## 2. Die Aufgabe für homogene Operatoren mit konstanten Koeffizienten im zweiflächigen Winkel

Wir betrachten in  $D$  die Randwertaufgabe

$$L(D_x)u = L(D_y, D_z)u = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D_x^\alpha u = f \text{ in } D, \quad (9)$$

$$B_k^\pm(D_x)u = B_k^\pm(D_y, D_z)u = \sum_{|\alpha|=m_k^\pm} b_{k;\alpha}^\pm D_x^\alpha u = g_k^\pm \text{ auf } \Gamma^\pm \quad (10)$$

( $k=1, \dots, m$ ). Dabei sei  $L$  ein homogener elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  mit konstanten Koeffizienten, und  $\{B_k^+\}_{k=1}^m, \{B_k^-\}_{k=1}^m$  seien normale Systeme von homogenen Randoperatoren der Ordnung  $m_k^\pm < 2m$ , die  $L$  auf  $\Gamma^+$  bzw.  $\Gamma^-$  überdecken, mit ebenfalls konstanten Koeffizienten.

Der Operator  $A = (L, B_1^+, \dots, B_m^+, B_1^-, \dots, B_m^-)$  der Randwertaufgabe (9), (10) stellt für alle ganzzahligen  $l$ ,  $p \in (1, \infty)$  und  $B \in \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung

$$\tilde{V}_{p,B}^1(D) \rightarrow V_{p,B}^{1-2m}(D) \times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m V^{1-m_k^\pm-1/p}(\Gamma^\pm)$$

dar.

Als Analogon zu Satz 4.1 aus /5/ erhält man zunächst die folgende Regularitätsaussage (s. /7/).

**Lemma 2.1:** Sei  $u \in \tilde{V}_{p,\beta}^1(D)$  Lösung der Randwertaufgabe (9), (10),

und es gelte  $f \in V_{p,\beta+s}^{1-2m+s}(D)$ ,  $g_k^\pm \in V_{p,\beta+s}^{1-m_k^\pm+s-1/p}(\Gamma^\pm)$  mit einer nichtnegativen ganzen Zahl  $s$ .

Dann ist  $u \in \tilde{V}_{p,\beta+s}^{1+s}(D)$ , und es gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_{\tilde{V}_{p,\beta+s}^{1+s}(D)} \leq c(\|u\|_{V_{p,\beta}^1(D)} + \|f\|_{V_{p,\beta+s}^{1-2m+s}(D)} + \sum_{\pm} \sum_{k=1}^m \|g_k^\pm\|_{V_{p,\beta+s}^{1-m_k^\pm+s-1/p}(\Gamma^\pm)}).$$

Für alle  $u, v \in C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$  gilt die Greensche Formel

$$(Lu, v)_D + \sum_{\pm} \sum_{k=1}^m (B_k^\pm u, T_k^\pm v)_{\Gamma^\pm} = (u, L^*v)_D + \sum_{\pm} \sum_{k=1}^m (S_k^\pm u, C_k^\pm v). \quad (11)$$

Dabei sind  $C_k^\pm$ ,  $S_k^\pm$  und  $T_k^\pm$  homogene Randoperatoren der Ordnung  $\mu_k^\pm$ ,  $2m-1-\mu_k^\pm$  bzw.  $2m-1-m_k^\pm$  mit konstanten Koeffizienten;

$\{B_k^\pm\}_{k=1}^m \cup \{S_k^\pm\}_{k=1}^m$  und  $\{C_k^\pm\}_{k=1}^m \cup \{T_k^\pm\}_{k=1}^m$  bilden Dirichletsysteme

der Ordnung  $2m$  auf  $\Gamma^\pm$ , wobei die Operatoren  $C_k^\pm$ ,  $T_k^\pm$  eindeutig durch  $B_k^\pm$  und  $S_k^\pm$  bestimmt sind (s. z. B. /4/). Man überzeugt

sich leicht davon, daß (11) auch für alle  $u \in \tilde{V}_{p,\beta}^1(D)$ ,

$v \in \tilde{V}_{q,-\beta}^{2m-1}(D)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) gilt. Dann wird  $(\varphi, \psi)_D$  bzw.  $(\varphi, \psi)_{\Gamma^\pm}$  als duale Paarung von  $\varphi$  und  $\psi$  aufgefaßt. Wir setzen im weiteren voraus, daß der Operator  $A$  einen Isomorphismus

$$V_{2,\beta}^{2m}(D) \rightarrow V_{2,\beta}^0(D) \times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m V_{2,\beta}^{2m-m_k^\pm-1/2}(\Gamma^\pm) \quad (12)$$

darstellt. Diese Voraussetzung ist nach /5/ äquivalent dazu, daß der Operator  $A^*$  der formal adjungierten Aufgabe

$$L^*u = f \text{ in } D, \quad C_k^\pm u = g_k^\pm \text{ auf } \Gamma^\pm \quad (k=1, \dots, m)$$

einen Isomorphismus

$$V_{2, -B+2m}^{2m} \rightarrow V_{2, -B+2m}^0 \times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m V_{2, -B+2m}^{2m-\mu_k^{\pm}-1/2} (\Gamma^{\pm})$$

darstellt. Man kann zur obigen Voraussetzung aber auch eine äquivalente Formulierung für die Aufgabe

$$L(D_Y, \eta)u = f \text{ in } K, B_k^{\pm}(D_Y, \eta)u = g_k^{\pm} \text{ auf } \Gamma^{\pm} \quad (k=1, \dots, m), \quad (13)$$

die aus (9), (10) durch die Fouriertransformation  $z \rightarrow \eta$  entsteht, angeben. Dazu schreiben wir die Operatoren  $L(D_Y, 0)$ ,  $B_k^{\pm}(D_Y, 0)$  in der Form

$$L(D_Y, 0) = r^{-2m} \mathcal{L}(\omega, D_{\omega}, rD_r), \quad B_k^{\pm}(D_Y, 0) = r^{-m k} \beta_k^{\pm}(\omega, D_{\omega}, rD_r)$$

und bezeichnen mit  $\mathcal{U}(\lambda)$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) den Operator der parameterabhängigen elliptischen Randwertaufgabe (s. /1/)

$$\mathcal{L}(\omega, D_{\omega}, \lambda) u(\omega) = \varphi(\omega) \quad \text{für } |\omega| < \frac{1}{2} \omega_0,$$

$$\beta_k^{\pm}(\omega, D_{\omega}, \lambda) u(\omega) = \psi_k^{\pm} \quad \text{für } \omega = \pm \frac{1}{2} \omega_0.$$

Nach /5/ ist  $A$  genau dann ein Isomorphismus (12), wenn

- (i) keine Eigenwerte von  $\mathcal{U}(\lambda)$  auf der Geraden  $\text{Im } \lambda = B+1-2m$  liegen,
- (ii) Kern und Kokern des Operators

$$\mathcal{A}(\eta) : E_{2, B}^{2m}(K) \rightarrow E_{2, B}^0(K) \times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m E_{2, B}^{2m-m_k^{\pm}-1/2}(\gamma^{\pm})$$

der Aufgabe (13) für alle  $\eta$  mit  $|\eta| = 1$  trivial sind.

Dabei ist  $E_{2, B}^1(K)$  die Vervollständigung von  $C_0^{\infty}(K \setminus \{0\})$  bez. der Norm

$$\|u\|_{E_{2, B}^1(K)} = \left( \int_K \sum_{|\alpha| \leq 1} (r^{2B} + r^{2(B-1+|\alpha|)}) |D^{\alpha} u(y)|^2 dy \right)^{1/2},$$

und  $E_{2, B}^{1-1/2}(\gamma^{\pm})$  sind die entsprechenden Spurräume.

Es sei bemerkt, daß aus (i) die Fredholmeigenschaft für  $\mathcal{A}(\eta)$  folgt. In diesem Fall sei  $\lambda_- < \text{Im } \lambda < \lambda_+$  der breiteste Streifen der komplexen Ebene, der die Gerade  $\text{Im } \lambda = B+1-2m$  enthält und in dem keine Eigenwerte von  $\mathcal{U}(\lambda)$  liegen.

**Satz 2.1:** Die Bedingungen (i) und (ii) seien erfüllt, und es gelte  $\lambda_- < \lambda - 1 + 2/p < \lambda_+$ . Dann stellt A einen Isomorphismus

$$\tilde{V}_{p,\lambda}^1(D) \rightarrow V_{p,\lambda}^{1-2m}(D) \times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m V_{p,\lambda}^{1-m_k^{\pm}-1/p}(\Gamma^{\pm}) \quad (14)$$

dar.

**Beweis:** Für  $l \geq 2m$  wurde der Satz bereits in /5/ bewiesen, so daß wir uns auf den Fall  $l < 2m$  beschränken können.

1. Wir beweisen zunächst die Ungleichung

$$\|u\|_{\tilde{V}_{p,\lambda}^1(D)} \leq c (\|Lu\|_{C_{p,\lambda}^{1-2m}(D)} \sum_{\pm} \sum_{k=1}^m \|B_k^{\pm} u\|_{V_{p,\lambda}^{1-m_k^{\pm}-1/p}(\Gamma^{\pm})}) \quad (15)$$

für alle  $u \in \tilde{V}_{p,\lambda}^1(D)$ .

Es sei  $u$  eine beliebige Funktion aus  $\tilde{V}_{p,\lambda}^1(D)$ . Nach Lemma 1.4 existiert eine Funktion  $u_1 \in \tilde{V}_{p,\lambda}^1(D)$  mit  $B_k^{\pm} u_1 = B_k^{\pm} u$  auf  $\Gamma^{\pm}$

$$(k=1, \dots, m) \text{ und } \|u_1\|_{\tilde{V}_{p,\lambda}^1(D)} \leq c \sum_{\pm} \sum_{k=1}^m \|B_k^{\pm} u\|_{V_{p,\lambda}^{1-m_k^{\pm}-1/p}(\Gamma^{\pm})}$$

wobei  $c$  unabhängig von  $u$  ist.

a)  $l < 0$ :

Da  $u_2 := u - u_1 \in \tilde{V}_{p,\lambda}^1(D) \subset V_{p,\lambda}^1(D)$  ist, existiert eine Funktion  $w$  aus dem Dualraum  $V_{q,-\lambda}^{-1}(D)$  mit

$$|(u_2, w)_D| \geq \frac{1}{2} \|u_2\|_{V_{p,\lambda}^1(D)} \|w\|_{V_{q,-\lambda}^{-1}(D)}$$

Aus den Bedingungen (i) und (ii) folgt nach /5/ die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung  $v \in V_{q,-\lambda}^{-1+2m}(D)$  der Aufgabe

$$L^*v = w \text{ in } D, \quad C_k^{\pm} v = 0 \text{ auf } \Gamma^{\pm} \quad (k=1, \dots, m),$$

und es gilt  $\|v\|_{V_{q,-\lambda}^{-1+2m}(D)} \leq c \|w\|_{V_{q,-\lambda}^{-1}(D)}$ .

Bei Anwendung der Greenschen Formel (11) erhält man

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u_2\|_{V_{p,\infty}^1(D)} \|w\|_{V_{q,\infty}^{-1}(D)} \leq |(u_2, w)_D| = |(u_2, L^* v)_D| \\
& = |(Lu_2, v)_D| \leq \|Lu_2\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)} \|v\|_{V_{q,\infty}^{-1+2m}(D)} \\
& \leq c \|Lu_2\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)} \|w\|_{V_{q,\infty}^{-1}(D)}, \text{ d. h.} \\
& \|u_2\|_{V_{p,\infty}^1(D)} \leq c \|Lu_2\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)} \text{ und damit} \\
& \|u\|_{\tilde{V}_{p,\infty}^1(D)} \leq c (\|u\|_{V_{p,\infty}^1(D)} + \|Lu\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)}) \\
& \leq c (\|u_1\|_{V_{p,\infty}^1(D)} + \|u_2\|_{V_{p,\infty}^1(D)} + \|Lu\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)}) \\
& \leq c (\|Lu\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)} + \sum_{\pm} \sum_{k=1}^m \|B_k^{\pm} u\|_{V_{p,\infty}^{1-m_k^{\pm}-1/p}(\Gamma^{\pm})}).
\end{aligned}$$

b)  $0 \leq l < 2m-1$ :

Im Unterschied zu a) wählen wir wegen  $u_2 = u - u_1 \in \tilde{V}_{p,\infty}^1(D) \subset V_{p,\infty}^0(D)$  eine Funktion  $w \in V_{q,\infty}^{0,-\infty+1}(D)$  mit

$$|(u_2, w)_D| \geq \frac{1}{2} \|u_2\|_{V_{p,\infty}^0(D)} \|w\|_{V_{q,\infty}^{0,-\infty+1}(D)}.$$

Analog zu a) erhält man zunächst

$$\|u_2\|_{V_{p,\infty}^0(D)} \leq c \|Lu_2\|_{V_{p,\infty}^{-2m}(D)} \leq c \|Lu_2\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)},$$

woraus nach Lemma 2.1

$$\|u_2\|_{\tilde{V}_{p,\infty}^1(D)} \leq c \|Lu_2\|_{V_{p,\infty}^{1-2m}(D)}$$

folgt. Damit ist (15) für beliebiges ganzzahliges  $l$  bewiesen. Aus (15) folgt wiederum die Eindeutigkeit der Lösung und die Abgeschlossenheit des Wertebereichs von  $A$ .

2. Wir zeigen nun, daß für alle  $f \in V_{p,\infty}^{1-2m}(D)$ ,  $g_k^{\pm} \in V_{p,\infty}^{1-m_k^{\pm}-1/p}(\Gamma^{\pm})$  eine Lösung  $u \in \tilde{V}_{p,\infty}^1(D)$  existiert.

Wegen Lemma 1.4 können wir uns dabei auf den Fall homogener Randbedingungen ( $g_k^{\pm} = 0$ ) beschränken. Sei  $\{f_n\}$  eine Folge von

Funktionen aus  $C_0^\infty(\bar{D} \setminus M)$ , die in  $V_{p, \infty}^{1-2m}(D)$  gegen  $f$  konvergiert.

Nach /5/ existieren Lösungen  $u_n \in V_{p, \infty}^{2m}(D) \subset \tilde{V}_{p, \infty}^1(D)$  der Aufgaben

$$Lu_n = f_n \text{ in } D, B_k^\pm u_n = 0 \text{ auf } \Gamma^\pm \quad (k=1, \dots, m).$$

Die Funktionen  $u_n$  bilden dabei wegen (15) eine Cauchy-Folge in  $\tilde{V}_{p, \infty}^1(D)$ , und der Grenzwert  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  der Folge  $\{u_n\}$  ist Lösung

der Gleichungen  $Lu = f$  in  $D$ ,  $B_k^\pm u = 0$  auf  $\Gamma^\pm$  ( $k=1, \dots, m$ ).

Der Satz ist hiermit bewiesen.

Der folgende Satz stellt ebenfalls eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses aus /5/ dar.

**Satz 2.2:** Die Bedingungen (i) und (ii) seien erfüllt, und es gelte  $\lambda_- < \infty_j - 1_j + 2/p_j < \lambda_+$  ( $j=1, 2$ ).

Ist  $u \in \tilde{V}_{p_1, \infty_1}^1(D)$  Lösung der Aufgabe (9), (10) mit

$$f \in \bigcap_{j=1}^2 V_{p_j, \infty_j}^{1_j-2m}(D), \quad g_k^\pm \in \bigcap_{j=1}^2 V_{p_j, \infty_j}^{1_j-m_k^\pm-1/p_j}(\Gamma^\pm), \text{ dann ist}$$

$$u \in \tilde{V}_{p_2, \infty_2}^{1_2}(D).$$

**Beweis:** Es sei  $1_j' = \max(1_j, 2m)$ . Nach /5/ (Satz 7.2) bildet  $A^{-1}$

den Raum  $C_0^\infty(\bar{D} \setminus M) \times C_0^\infty(\Gamma^+)^m \times C_0^\infty(\Gamma^-)^m$  in  $\bigcap_{j=1}^2 V_{p_j, \infty_j}^{1_j'}(D)$

und damit auch in den Raum  $\tilde{V}_{p_1, \infty_1}^{1_1}(D) \cap \tilde{V}_{p_2, \infty_2}^{1_2}(D)$  ab. Ist nun

$$u \in \tilde{V}_{p_1, \infty_1}^{1_1}(D), \quad Lu = f \in \bigcap_{j=1}^2 V_{p_j, \infty_j}^{1_j-2m}(D),$$

$$B_k^\pm u = g_k^\pm \in \bigcap_{j=1}^2 V_{p_j, \infty_j}^{1_j-m_k^\pm-1/p_j}(\Gamma^\pm) \quad (k=1, \dots, m), \text{ so existieren Folgen}$$

$$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset C_0^\infty(\bar{D} \setminus M), \quad \{g_{k\nu}^\pm\}_{\nu=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Gamma^\pm) \text{ mit}$$

$$\|f - f_\nu\|_{V_{p_j, \infty_j}^{1_j-2m}(D)} \rightarrow 0, \quad \|g_k^\pm - g_{k\nu}^\pm\|_{V_{p_j, \infty_j}^{1_j-m_k^\pm-1/p_j}(\Gamma^\pm)} \rightarrow 0 \text{ für } \nu \rightarrow \infty \quad (j=1, 2).$$

Die Lösungen  $u_\nu$  der Aufgaben

$$Lu_\nu = f_\nu \text{ in } D, B_k^\pm u_\nu = g_k^\pm \text{ auf } \Gamma^\pm \quad (k=1, \dots, m)$$

gehören zum Raum  $\tilde{V}_{p_1, \alpha_1}^{1,1}(D) \cap \tilde{V}_{p_2, \alpha_2}^{1,2}(D)$ , und  $\{u_\nu\}$  ist nach

Satz 2.1 Fundamentalfolge sowohl in  $\tilde{V}_{p_1, \alpha_1}^{1,1}(D)$  als auch in

$\tilde{V}_{p_2, \alpha_2}^{1,2}(D)$ . Folglich liegt  $u = \lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu$  in  $\bigcap_{j=1}^2 \tilde{V}_{p_j, \alpha_j}^{1,j}(D)$ , womit

der Satz bewiesen ist.

Bemerkung 2.1: Aus den Sätzen 2.1, 2.2 folgt unmittelbar, daß  $A$  für  $\lambda_- < \alpha_j - 1_j + 2/p_j < \lambda_+$  ( $j=1, 2$ ) einen Isomorphismus

$$\text{von } \bigcap_{j=1}^2 \tilde{V}_{p_j, \alpha_j}^{1,j}(D) \text{ auf } \bigcap_{j=1}^2 (V_{p_j, \alpha_j}^{1,j-2m}(D) \times \prod V_{p_j, \alpha_j}^{1,j-m_k^\pm-1/p_j}(\Gamma^\pm))$$

darstellt.

### 3. Die Aufgabe im beschränkten Gebiet $G$

Analog zu Abschnitt 1 definieren wir  $V_{p,B}^1(G)$  und  $V_{p,B}^{1-1/p}(\Gamma_j)$  für

$l \geq 0$  bzw.  $l \geq 1$  als Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{G} \setminus M)$  bzw.  $C_0^\infty(\Gamma_j)$

bez. der Normen (3), (4). Für  $l \leq 0$  ist  $V_{p,B}^1(G)$  die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{G} \setminus M)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{V_{p,B}^1(G)} = \sup_v |(u,v)_G| \|v\|_{V_{q,-B}^{-1}}^{-1}$$

und  $V_{p,B}^{1-1/p}(\Gamma_j)$  die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Gamma_j)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{V_{p,B}^{1-1/p}(\Gamma_j)} = \sup_v |(u,v)_{\Gamma_j}| \|v\|_{V_{q,-B}^{-1+1/q}(\Gamma_j)}$$

$(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ , wobei das Supremum über alle Funktionen  $v \in V_{q,-B}^{-1}(G)$ , bzw.  $v \in V_{q,-B}^{-1+1-1/p}(\Gamma_j)$ ,  $v \neq 0$ , gebildet wird.

Entsprechend sei  $\tilde{V}_{p,B}^1(G)$  für beliebiges ganzzahliges  $l$  die Ver-

vollständigkeit von  $C_0^\infty(\bar{G} \setminus M)$  bez. der Norm

$$\|u\|_{\tilde{V}_{p,B}^1(G)} = \|u\|_{V_{p,B}^1(G)} + \sum_{j=1}^T \sum_{k=0}^{2m-1} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial \nu_j^k} \right\|_{V_{p,B}^{1-k-1/p}(\Gamma_j)}$$

$\frac{\partial}{\partial \nu_j}$  ist hierbei die Ableitung in der Richtung der Außennormalen zu  $\Gamma_j$ . Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit der

folgenden Einbettungen:

$$V_{p,B}^1(G) \subset V_{p,B}^{1-1/p}(G), \quad V_{p,B}^{1-1/p}(\Gamma_j) \subset V_{p,B'}^{1-1/p}(\Gamma_j),$$

$$\tilde{V}_{p,B}^1(G) \subset \tilde{V}_{p,B'}^{1-1/p}(G),$$

falls  $B' \geq B-1$  ist.

Gilt  $B' > B-1$ , dann sind diese Einbettungen sogar kompakt (s. /7/). Wir betrachten jetzt die Randwertaufgabe (1), (2) im beschränkten Gebiet  $G$  mit dem stückweise glatten Rand

$\partial G = \bigcup_{j=1}^T \Gamma_j \cup M$ . Es sei  $\zeta \in \overline{\Gamma_{i_+}(\zeta)} \cap \overline{\Gamma_{i_-}(\zeta)}$  ( $i_{\pm}(\zeta) \in \{1, \dots, T\}$ )

ein beliebiger Punkt auf  $M$ . Die Tangentialhalbebenen  $\Gamma_{\zeta}^+$  und  $\Gamma_{\zeta}^-$  zu den an  $\zeta$  angrenzenden "Seitenflächen"  $\Gamma_{i_+}(\zeta)$  bzw.  $\Gamma_{i_-}(\zeta)$  durch den Punkt  $\zeta$  begrenzen dann einen zweiflächigen Winkel  $D_{\zeta}$  mit der Kante  $M_{\zeta}$ . Der Aufgabe (1), (2) werde für jeden Punkt  $\zeta \in M$  die Randwertaufgabe

$$L_0(\zeta; D_x)u = \sum_{|\alpha|=2m} a_{\alpha}(\zeta) D_x^{\alpha} u = \varphi(x) \text{ in } D_{\zeta}, \quad (16)$$

$$B_{k_0}^{(i_{\pm}(\zeta))}(\zeta; D_x)u = \sum_{|\alpha|=m} b_{k;\alpha}^{(i_{\pm}(\zeta))}(\zeta) D_x^{\alpha} u = 0 \text{ auf } \Gamma_{\zeta}^{\pm} \quad (17)$$

( $k=1, \dots, m$ ) zugeordnet.

Durch die Transformation in die lokalen kartesischen Koordinaten  $(y, z) = (y_1, y_2, z_1, \dots, z_{n-2})$ , wobei  $z_1, \dots, z_{n-2}$  Koordinaten in der Richtung der Kante  $M_{\zeta}$  sind, geht (16), (17) über in die Aufgabe

$$L_0(\zeta; D_y, D_z)u = \varphi'(x) \text{ in } D_{\zeta}, \quad (18)$$

$$B_{ko}^{(i\pm)}(\zeta; D_Y, D_Z)u = 0 \text{ auf } \Gamma_\zeta^\pm \quad (k=1, \dots, m). \quad (19)$$

Wie in Abschnitt 2 bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}(\zeta; \lambda)$  den Operator der parameterabhängigen elliptischen Randwertaufgabe

$$\mathcal{L}(\zeta; \omega, D_\omega, \lambda)u(\omega) = \varphi(\omega) \text{ für } |\omega| < \frac{1}{2} \omega_0(\zeta),$$

$$\mathcal{B}_k^{(i\pm)}(\zeta; \omega, D_\omega, \lambda)u(\omega) = \varphi_k^\pm \text{ für } \omega = \pm \frac{1}{2} \omega_0(\zeta) \quad (k=1, \dots, m),$$

wobei  $\mathcal{L}(\zeta; \omega, D_\omega, \lambda)$  und  $\mathcal{B}_k^{(i\pm)}(\zeta; \omega, D_\omega, \lambda)$  durch die Mellintrans-

formation  $r = |\gamma| \rightarrow \lambda$  aus  $r^{2m} L_0(\zeta; D_Y, 0)$  bzw.  $r^{i_\pm, k} B_{ko}^{(i\pm)}(\zeta; D_Y, 0)$  entstehen.

Im folgenden sei  $B$  eine glatte reellwertige Funktion auf  $M$ , die die Eigenschaft hat, daß die Aufgabe (16), (17) für alle  $\zeta \in M$ ,  $\varphi \in V_{2, B(\zeta)}^0(D_\zeta)$  eindeutig lösbar in  $V_{2, B(\zeta)}^{2m}(D_\zeta)$  ist. Diese Voraussetzung ist nach /5/ äquivalent zu den Bedingungen (i), (ii) aus dem 2. Abschnitt. Aus ihr folgt insbesondere, daß keine Eigenwerte von  $\mathcal{L}(\zeta; \lambda)$  auf der Geraden  $\text{Im} \lambda = B(\zeta) + 1 - 2m$  liegen.  $\lambda_-(\zeta) < \text{Im} \lambda < \lambda_+(\zeta)$  bezeichne dann den breitesten Streifen der komplexen Ebene, der diese Gerade enthält und in dem keine Eigenwerte von  $\mathcal{L}(\zeta; \lambda)$  liegen.

**Satz 3.1:** Es sei  $\varkappa = B + 1 - 2m + 1 - 2/p$ , wobei  $l$  eine beliebige ganze Zahl und  $p \in (1, \infty)$  sei. Dann ist der Operator

$$\mathcal{A}: \tilde{V}_{p, \varkappa}^1(G) \rightarrow V_{p, \varkappa}^{1-2m}(G) \times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m V_{p, \varkappa}^{1-m_j k - 1/p}(\Gamma_j)$$

der Aufgabe (1), (2) Fredholmsch.

**Beweis:**  $\{\mathcal{U}_\nu\}_{\nu=1, \dots, T, \dots, T'}$  sei eine endliche Überdeckung von  $G$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{U}_\nu \cap \Gamma_\nu \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{U}_\nu \cap M = \emptyset$ ,  $\mathcal{U}_\nu \cap \Gamma_\mu = \emptyset$  für  $\nu=1, \dots, T$ ;  $\mu \neq \nu$ .
- $\mathcal{U}_\nu \cap M \neq \emptyset$  für  $\nu \geq T+1$ .
- Die Gebiete  $\mathcal{U}_{T+1}, \dots, \mathcal{U}_T$  sind genügend klein.

Ferner seien  $\varphi_\nu, \psi_\nu$  ( $\nu=1, \dots, T'$ ) Funktionen aus  $C^\infty(\bar{G})$  mit  $\text{supp } \varphi_\nu \subset \text{supp } \psi_\nu \subset \mathcal{U}_\nu$ ,  $\varphi_\nu \psi_\nu = \varphi_\nu$ ,  $\sum \varphi_\nu = 1$  sowie  $S_j$  ( $j=1, \dots, T$ ) glattberandete Gebiete mit  $\text{supp } \psi_j \subset \bar{S}_j \subset \bar{G}$ .

Wir setzen die Koeffizienten von  $B_k^{(j)}$  ( $j=1, \dots, T$ ;  $k=1, \dots, m$ ) außerhalb von  $\Gamma_j \cap \partial S_j$  so auf den ganzen Rand  $\partial S_j$  von  $S_j$  fort, daß die Normalität und die Gültigkeit der Shapiro-Lopatinskij-Bedingung für die Randbedingungen auf  $\partial S_j$  erhalten bleiben. Seien

$$A_j : \tilde{W}_p^1(S_j) \rightarrow W_p^{1-2m}(S_j) \times \prod_{k=1}^m W_p^{1-m_j k - 1/p}(\partial S_j) \quad (j=1, \dots, T)$$

die Operatoren der Randwertaufgaben

$$Lu = f \text{ in } S_j, B_k^{(j)}u = g_k \quad (k=1, \dots, m) \text{ auf } \partial S_j.$$

Nach /6/, /10/ existieren zu  $A_j$  rechte Regularisatoren, d. h.

$$\text{Operatoren } R_j : W_p^{1-2m}(S_j) \times \prod_{k=1}^m W_p^{1-m_j k - 1/p}(\partial S_j) \rightarrow \tilde{W}_p^1(S_j)$$

mit  $A_j R_j = I + T_j$ , wobei  $T_j$  vollstetige Operatoren in

$$W_p^{1-2m}(S_j) \times \prod_{k=1}^m W_p^{1-m_j k - 1/p}(\partial S_j) \text{ sind.}$$

Um einen lokalen Regularisator in  $\mathcal{U}_\nu$  ( $\nu \in \{T+1, \dots, T'\}$ ) zu konstruieren, fixieren wir einen Punkt  $\zeta \in \mathcal{U}_\nu \cap M$ . Wir nehmen dabei o. B. d. A. an, daß  $G \cap \mathcal{U}_\nu = D_\zeta \cap \mathcal{U}_\nu$  ist. Ansonsten läßt sich  $G \cap \mathcal{U}_\nu$  durch einen Diffeomorphismus in  $D_\zeta \cap \mathcal{U}'_\nu$  überführen, wobei  $\mathcal{U}'_\nu$  ebenfalls eine Umgebung von  $\zeta$  ist.

Im folgenden sei  $\chi \in C^\infty(\bar{R}_+)$  eine Ausschneidungsfunktion mit  $\text{supp } \chi \subset [0, 1)$ ,  $\chi = 1$  in  $[0, \frac{1}{2})$ , und  $\varepsilon$  sei eine genügend kleine positive reelle Zahl. Wir definieren dann die Operatoren  $L_\varepsilon^{(\nu)}$  und  $B_{k, \varepsilon}^{(i, \nu)}$  durch die Gleichungen

$$L_{\varepsilon}^{(\nu)} u = \chi\left(\frac{|x-\zeta|}{\varepsilon}\right) r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} L(x, D) (r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)} u) \\ + \left(1 - \chi\left(\frac{|x-\zeta|}{\varepsilon}\right)\right) L_0(\zeta; D) u,$$

$$B_{k, \varepsilon}^{(i_{\pm}, \nu)} u = \chi\left(\frac{|x-\zeta|}{\varepsilon}\right) r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} B_k^{(i_{\pm})}(x, D) (r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)} u) \\ + \left(1 - \chi\left(\frac{|x-\zeta|}{\varepsilon}\right)\right) B_{k_0}^{(i_{\pm})}(\zeta; D) u.$$

Für  $|x-\zeta| < \frac{\varepsilon}{2}$  stimmen  $L_{\varepsilon}^{(\nu)}$  und  $B_{k, \varepsilon}^{(i_{\pm}, \nu)}$  mit den Operatoren  $r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} L(x, D) r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)}$  bzw.  $r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} B_k^{(i_{\pm})}(x, D) r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)}$

und für  $|x-\zeta| > \varepsilon$  mit den Operatoren  $L_0(\zeta; D)$  bzw.  $B_{k_0}^{(i_{\pm})}(\zeta; D)$  überein.

Da die Norm von  $L_0(\zeta; D) - L_{\varepsilon}^{(\nu)}$  und  $B_{k_0}^{(i_{\pm})} - B_{k, \varepsilon}^{(i_{\pm}, \nu)}$  (als lineare stetige Operatoren  $\tilde{V}_{p, \alpha(\zeta)}^1(D_{\zeta}) \rightarrow V_{p, \alpha(\zeta)}^{1-2m}(D_{\zeta})$  bzw.

$\tilde{V}_{p, \alpha(\zeta)}^1(D_{\zeta}) \rightarrow V_{p, \alpha(\zeta)}^{1-m_i_{\pm}, k^{-1/p}}(\Gamma_{\zeta}^{\pm})$ ) für kleines  $\varepsilon$  ebenfalls klein

wird, existiert zu beliebigen Funktionen  $f \in V_{p, \alpha}^{1-2m}(G)$ ,

$g_k^{\pm} \in V_{p, \alpha}^{1-m_i_{\pm}, k^{-1/p}}(\Gamma_{\pm}^{\pm})$  mit dem Träger in  $\mathcal{U}_{\nu}$  eine Funktion

$v_{\nu} \in \tilde{V}_{p, \alpha(\zeta)}^1(D_{\zeta})$ , die Lösung der Gleichungen

$$L_{\varepsilon}^{(\nu)} v_{\nu} = r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} f \text{ in } D_{\zeta},$$

$$B_{k, \varepsilon}^{(i_{\pm}, \nu)} v_{\nu} = r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} g_k^{\pm} \text{ auf } \Gamma_{\zeta}^{\pm}$$

ist. Die Funktion

$$u_{\nu} = R_{\nu}(f, g_1^+, \dots, g_m^+, g_1^-, \dots, g_m^-) := r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)} v_{\nu}$$

genügt folglich den Gleichungen

$$Lu_{\nu} = f \text{ in } G \cap \mathcal{U}_{\nu}, B_k^{(i_{\pm})} u_{\nu} = g_k^{\pm} \text{ auf } \Gamma_{\pm}^{\pm} \cap \mathcal{U}_{\nu} \quad (k=1, \dots, m).$$

Damit erhält man mit

$$R(f, g) = R(f, g_1^+, \dots, g_m^+, g_1^-, \dots, g_m^-) := \sum_{\nu=1}^{T'} \varphi_\nu \cdot R_\nu(\varphi_\nu f, \varphi_\nu g)$$

einen rechten Regularisator für  $\mathcal{A}$ . (In  $\varphi_\nu g$  sind alle diejenigen Komponenten  $\varphi_\nu g_k^{(j)}$  wegzulassen, für die  $\mathcal{U}_j \cap \Gamma_\nu = \emptyset$  ist.) Analog konstruiert man einen linken Regularisator.

Aus Satz 2.2 erhält man entsprechend die folgende Regularitätsaussage für die Lösung der Aufgabe im beschränkten Gebiet.

**Satz 3.2:** Es sei  $u \in \tilde{V}_{p, \alpha}^1(G)$  ( $\alpha = \beta + 1 - 2m + 1 - 2/p$ ) Lösung der Randwertaufgabe (1), (2) mit den rechten Seiten  $f \in V_{p, \alpha}^{1', -2m}(G)$ ,

$g_k^{(j)} \in V_{p, \alpha}^{1'-m_j k - 1/p'}(\Gamma_j)$ , wobei  $\alpha'$  eine glatte reellwertige Funktion auf  $M$  ist, die der Ungleichung  $\lambda_- < \alpha' - 1' + 2/p' < \lambda_+$  genügt. Dann ist  $u \in \tilde{V}_{p, \alpha'}^1(G)$ .

**Beweis:** Wir setzen zunächst voraus, daß der Träger von  $u$  in einer hinreichend kleinen Umgebung  $\mathcal{U}_\gamma$  eines festen Kantenpunktes  $\zeta$  liegt. O. B. d. A. können wir dann annehmen, daß  $G \cap \mathcal{U}_\gamma = D_\zeta \cap \mathcal{U}_\gamma$  und  $\alpha - \alpha'$  auf  $M \cap \mathcal{U}_\gamma$  konstant ist, denn es

ist  $u \in \tilde{V}_{p, \alpha}^1(G) \subset \tilde{V}_{p, \alpha + \delta}^1(G)$ , wobei sich die positive reellwertige Funktion  $\delta \in C^\infty(M)$  so wählen läßt, daß  $\alpha + \delta - \alpha'$  auf  $M \cap \mathcal{U}_\gamma$  konstant ist und die Aufgabe (16), (17) für  $\varphi \in V_{2, B(\zeta) + \delta(\zeta)}^0(D_\zeta)$

eindeutig lösbar in  $V_{2, B(\zeta) + \delta(\zeta)}^{2m}(D_\zeta)$  ist. Die Operatoren  $L_\zeta^{(\nu)}$  und  $B_{k, \zeta}^{(i, \pm, \nu)}$  seien wie im Beweis von Satz 3.1 definiert.

Setzt man  $v = r^{\alpha(z) - \alpha(\zeta)} u$ , dann ist  $v \in \tilde{V}_{p, \alpha(\zeta)}^1(D_\zeta)$ , und es gilt

$$L_\zeta^{(\nu)}(x, D)v = r^{\alpha(z) - \alpha(\zeta)} f \quad \text{in } D_\zeta, \quad (20)$$

$$B_{k, \zeta}^{(i, \pm, \nu)}(x, D)v = r^{\alpha(z) - \alpha(\zeta)} g_k^{(i, \pm)} \quad \text{auf } \Gamma_\zeta^\pm \quad (k=1, \dots, m) \quad (21)$$

mit  $r_{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} f \in V_{p,\alpha(\zeta)}^{1-2m}(D_{\zeta}) \cap V_{p',\alpha'(\zeta)}^{1'-2m}(D_{\zeta})$ ,

$$r_{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} g_k^{(i_{\pm})} \in V_{p,\alpha(\zeta)}^{1-m_{i_{\pm}},k-1/p}(\Gamma_{\zeta}^{\pm}) \cap V_{p',\alpha'(\zeta)}^{1'-m_{i_{\pm}},k-1/p'}(\Gamma_{\zeta}^{\pm}).$$

Dabei denken wir uns  $u$ ,  $f$  und  $g_k^{(i_{\pm})}$  außerhalb von  $\mathcal{U}_V$  durch 0 auf  $D_{\zeta}$  bzw.  $\Gamma_{\zeta}^{\pm}$  fortgesetzt.

Da der Operator der Aufgabe

$$L_0(\zeta; D)u = f \text{ in } D_{\zeta}, B_{k0}^{(i_{\pm})}(\zeta; D)u = g_k^{\pm} \text{ auf } \Gamma_{\zeta}^{\pm} \quad (k=1, \dots, m)$$

nach Bemerkung 2.1 einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{p,\alpha(\zeta)}^1(D_{\zeta}) \cap \tilde{V}_{p',\alpha'(\zeta)}^1(D_{\zeta}) &\rightarrow (V_{p,\alpha(\zeta)}^{1-2m}(D_{\zeta}) \cap V_{p',\alpha'(\zeta)}^{1'-2m}(D_{\zeta})) \\ &\times \prod_{\pm} \prod_{k=1}^m (V_{p,\alpha(\zeta)}^{1-m_{i_{\pm}},k-1/p}(\Gamma_{\zeta}^{\pm}) \cap V_{p',\alpha'(\zeta)}^{1'-m_{i_{\pm}},k-1/p'}(\Gamma_{\zeta}^{\pm})) \end{aligned}$$

darstellt, gilt dies auch für den Operator der Aufgabe

(20), (21). Folglich ist  $v \in \tilde{V}_{p',\alpha'(\zeta)}^1(D_{\zeta})$  und damit

$u \in \tilde{V}_{p',\alpha'}^1(G)$ . In dem Fall, daß  $u$  einen beliebigen Träger in  $G$  hat, erhält man die Behauptung des Satzes mittels einer genügend feinen Zerlegung der Einheit.

**Lemma 3.1:** Es seien  $\{N_k^{(j)}(x, D)\}_{k=0}^{2m-1}$  ( $j=1, \dots, T$ ) Dirichletsysteme

der Ordnung  $2m$  auf  $\Gamma_j$ , wobei  $\text{ord} N_k^{(j)} = k$  sei und die Koeffizienten von  $N_k^{(j)}$  als glatt vorausgesetzt werden. Ferner sei  $\alpha$

eine beliebige glatte reellwertige Funktion auf  $M$ ,  $p \in (1, \infty)$

und  $l$  eine beliebige ganze Zahl. Dann existiert zu beliebig vorgegebenen Funktionen  $g_k^{(j)} \in V_{p,\alpha}^{1-k-1/p}(\Gamma_j)$  eine Funktion

$u \in \tilde{V}_{p,\alpha}^1(G)$  mit  $N_k^{(j)}u = g_k^{(j)}$  auf  $\Gamma_j$  für  $k=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, T$ .

Dabei ist

Dabei ist

$$\|u\|_{\tilde{V}_{p,\alpha}^1(G)} \leq c \sum_{j=1}^T \sum_{k=0}^{2m-1} \|g_k^{(j)}\|_{\tilde{V}_{p,\alpha}^{1-k-1/p}(\Gamma_j)}$$

mit einer von den Funktionen  $g_k^{(j)}$  unabhängigen Konstanten  $c$ .

Beweis: Wir nehmen wieder o. B. d. A. an, der Träger der Funktionen  $g_k^{(j)}$  liege in einer genügend kleinen Umgebung eines festen Punktes  $\zeta \in M$ , und  $G$  stimme in dieser Umgebung mit dem zweiflächigen Winkel  $D_\zeta$  überein.

Wie im Beweis von Satz 3.1 definieren wir die Operatoren  $N_{k,\varepsilon}^{(j,\zeta)}$  durch die Gleichung

$$N_{k,\varepsilon}^{(j,\zeta)}(x,D)u = \chi\left(\frac{|x-\zeta|}{\varepsilon}\right) r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} N_k^{(j)}(x,D) \cdot (r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)}u) \\ + \left(1 - \chi\left(\frac{|x-\zeta|}{\varepsilon}\right)\right) N_{k0}^{(j)}(\zeta;D)u.$$

Nach Lemma 1.4 existiert eine Rechtsinverse zum Operator

$$\left\{ N_{k0}^{(i_\pm, \zeta)}(\zeta;D) \right\}_{k=0}^{2m-1}, \text{ die den Produktraum}$$

$$\prod_{\pm} \prod_{k=0}^{2m-1} \tilde{V}_{p,\alpha(\zeta)}^{1-k-1/p}(\Gamma_\zeta^\pm) \text{ stetig in } \tilde{V}_{p,\alpha(\zeta)}^1(D_\zeta) \text{ abbildet.}$$

Für genügend kleines  $\varepsilon$  existiert solch eine stetige Rechtsinverse somit auch für den Operator

$$\left\{ N_{k,\varepsilon}^{(i_\pm, \zeta)}(x,D) \right\}_{k=0}^{2m-1}, \text{ d. h.,}$$

es existiert eine Funktion  $v \in \tilde{V}_{p,\alpha(\zeta)}^1(D_\zeta)$  mit

$$N_{k,\varepsilon}^{(i_\pm, \zeta)}(x,D)v = r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} g_k^{(i_\pm)} \text{ auf } \Gamma_{i_\pm}$$

für  $k=0,1,\dots,2m-1$ .

Da  $N_{k,\varepsilon}^{(i_\pm, \zeta)}$  für  $|x-\zeta| < \frac{\varepsilon}{2}$  mit dem Operator

$r^{\alpha(z)-\alpha(\zeta)} N_k^{(i_\pm)}(x,D) r^{\alpha(\zeta)-\alpha(z)}$  übereinstimmt und der Träger von

$v$  für hinreichend kleine Träger der Funktionen  $g_k^{(i)}$  in einer  $\frac{\delta}{2}$ -Umgebung von  $\zeta$  liegt, genügt die Funktion  $u = r^{\alpha(\zeta) - \alpha(z)} v$  den Gleichungen

$$N_k^{(j)}(x, D)u = g_k^{(j)} \text{ auf } \Gamma_j,$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Mit Hilfe von Lemma 3.1 läßt sich wieder völlig analog zu /6/, /10/ der folgende Satz beweisen.

**Satz 3.3:** Die Norm  $\|\cdot\|_{V_{p,\alpha}^1(G)}$  ist für beliebiges ganzzahliges

$l$ ,  $p \in (1, \infty)$  und beliebige reellwertige Funktionen  $\alpha \in C^\infty(M)$  äquivalent zur Norm

$$\|u\| = \|u\|_{V_{p,\alpha}^1(G)} + \|Lu\|_{V_{p,\alpha}^{1-2m}(G)}, \quad (22)$$

d. h.,  $\tilde{V}_{p,\alpha}^1(G)$  stimmt mit der Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{G} \setminus M)$  bez. der Norm (22) überein.

### Literatur

- /1/ Agranovič, M. S., und Višik, M. I.: Elliptische Aufgaben mit Parameter und parabolische Aufgaben allgemeiner Gestalt. Uspechi Mat, Nauk 19, 3, 53 - 161 (1964)
- /2/ Grisvard, P.: Boundary value problems in non-smooth domains. University of Maryland, lecture notes 19 (1980)
- /3/ Kondratjev, V. A.: Über die Glattheit der Lösung des Dirichletproblems für elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung in stückweise glatten Gebieten. Diferencial'nye Uravnenija 6, 10, 1831 - 1843 (1970)
- /4/ Lions, J.-L., und Magenes, E.: Inhomogene Randwertaufgaben und ihre Anwendungen. Moskau 1971

- /5/ Maz'ja, V. G., und Plamenevskij, B. A.:  $L_p$ -Abschätzungen der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten. Trudy Moskov. Mat. Obšč. 37, 49 - 93 (1978)
- /6/ Rojtberg, J. A., und Sheftel, S. G.: Der Satz über Homöomorphismen für elliptische Systeme und seine Anwendungen. Mat. Sb. (N. S.) 78, 3, 446 - 472 (1969)
- /7/ Roßmann, J.: Elliptische Randwertaufgaben in Gebieten mit Kanten. Dissertation (A), Wilhelm-Pieck-Universität, Rostock 1984
- /8/ Solonnikov, V. A., und Zajaczkowski, W.: Ober das Neumannproblem für elliptische Gleichungen 2. Ordnung in Gebieten mit Kanten. Krajevyje zadači mat. fiziki i smešnyje voprosy teorii funkzi 15, Zapiski naučnych seminarov LOMI (Leningrad) 127, 7 - 48 (1983)
- /9/ Volevič, L. R.: Lösbarkeit von Randwertaufgaben für allgemeine elliptische Systeme. Mat. Sb. (N. S.) 68, 3, 373 - 416 (1965)
- /10/ Wildenhain, G.: Darstellung von Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen, Berlin 1981

eingegangen: 22. 08. 1986

Verfasser:

Dr. J. Roßmann  
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
 Sektion Mathematik  
 Universitätsplatz 1  
 Rostock  
 DDR-2500

Lothar Berg

Ergänzungen zur Interpolation durch Exponentialpolynome

In /1/ wurde das Problem behandelt, durch  $n+2$  Punkte im  $\mathbb{R}^2$

$$(t_i, z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \quad (1)$$

mit  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$  Exponentialpolynome der Form

$$E(t) = e^{xt} \sum_{j=0}^n y_j t^j \quad (2)$$

mit reellen Koeffizienten  $x, y_0, \dots, y_n$  zu legen, d. h. das System

$$E(t_i) = z_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \quad (3)$$

zu lösen. Wie Herr K. Frischmuth festgestellt hat, sind aber die Bemerkungen auf S. 540 von /1/ über die Anzahl der Lösungen in verschiedenen Teilgebieten nicht allgemeingültig. Sie gelten nämlich im allgemeinen nur dann, wenn man  $x$  auf eine Umgebung der Stelle  $x = \xi$  beschränkt. Im folgenden sollen daher nach einer etwas abgeänderten Darstellung der lokalen Aussagen aus /1/ einige ergänzende globale Aussagen gemacht werden.

1. Lokale Aussagen

Hilfssatz: Es sei  $A$  eine Matrix mit 1 Spalten und dem Maximalrang  $\text{Rg } A = 1$ , das Gleichungssystem  $A\underline{y} = \underline{b}$  sei lösbar. Die Matrix  $A_j$  entstehe aus  $A$ , indem die  $j$ -te Spalte durch  $\underline{b}$  ersetzt wird, und es sei  $\text{Rg } A_j = 1-1$ . Dann verschwindet die  $j$ -te Komponente des Lösungsvektors  $\underline{y}$ . Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der erwähnten  $j$ -ten Komponente  $\text{Rg } A_j = 1-1$ .

1 Außerdem muß es dort im Beispiel 1<sup>o</sup> richtig  $z_2 = 1/3$  heißen.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ergibt sich unmittelbar aus der Cramerschen Regel, wenn man sie auf ein geeignetes Teilsystem von  $l$  Gleichungen anwendet, da die Zählerdeterminante stets verschwindet und der Rang von  $A_j$  nicht kleiner als  $l-1$  sein kann.

Wir schreiben jetzt (3) unter Beachtung von (2) in der Form

$$\sum_{j=0}^n t_i^j y_j = z_i e^{-x t_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (4)$$

Die Lösbarkeitsbedingung für dieses System lautet offenbar

$$\det(1, t_1, \dots, t_1^n, z_1 e_1) = 0 \quad (5)$$

mit  $e_1 = e^{-x t_1}$ , wobei es zu jeder Lösung  $x$  der nichtlinearen Gleichung (5) einen eindeutig bestimmten Lösungsvektor  $\underline{y}$  des bezüglich  $\underline{y}$  linearen Systems (4) gibt.

Satz 1: Ist  $x$  eine  $(k+1)$ -fache Lösung der Gleichung (5), so gilt für die zugehörige Lösung von (4)

$$y_{n-k+1} = y_{n-k+2} = \dots = y_n = 0, \quad y_{n-k} \neq 0 \quad (6)$$

und umgekehrt.

Beweis: Für eine  $(k+1)$ -fache Lösung  $x$  von (5) gilt

$$\det(1, t_1, \dots, t_1^n, z_1 t_1^v e_1) = 0 \quad (7)$$

für  $v = 0, 1, \dots, k$ . Dies bedeutet, daß alle Spaltenvektoren  $(z_1 t_1^v e_1)$  Linearkombinationen der Spaltenvektoren  $(1), \dots, (t_1^n)$  sind. Andererseits ergibt sich für  $k > 0$  aus dem Fall  $v = 0$  durch Multiplikation der  $i$ -ten Zeile mit  $t_1^v$ , daß die  $(z_1 t_1^v e_1)$  auch Linearkombinationen der Vektoren  $(t_1^v), \dots, (t_1^{n+v})$  sind. Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $(1), \dots, (t_1^{n+k})$  folgt daraus, daß jeder Spaltenvektor  $(z_1 t_1^v e_1)$  von  $(t_1^v), \dots, (t_1^n)$

und daher  $(z_1 e_1)$  von  $(1), \dots, (t_1^{n-k})$  linear abhängig ist, wenn wir in der  $i$ -ten Zeile  $t_1^v$  kürzen und  $v = k$  maximal wählen. Nach dem Hilfssatz ergeben sich jetzt sofort die Gleichungen in der Behauptung (6).

Umgekehrt folgt nach dem Hilfssatz aus  $y_\mu = 0$ , daß  $(z_1 e_1)$  von  $(1), \dots, (t_1^{\mu-1}), (t_1^{\mu+1}), \dots, (t_1^n)$  linear abhängig ist und daher, falls  $y_\mu = 0$  für alle  $\mu$  mit  $n-k < \mu \leq n$  gilt, bereits von  $(1), \dots, (t_1^{n-k})$ . Dies bedeutet aber (7) für  $v = 0, \dots, k$ , so daß der Satz bewiesen ist, wenn wir uns  $k$  in jedem Fall maximal gewählt denken.

Entwickeln wir die in (5) auftretende Determinante nach der letzten Spalte, so erkennen wir in Übereinstimmung mit dem Kollor aus /1/, daß die Gleichung (5) und damit auch die Interpolationsaufgabe (3) in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $x$  unlösbar wird, wenn  $k$  ungerade ist und irgendein  $z_1$  mit einem fest gewählten  $i$  etwas vergrößert bzw. verkleinert wird.

## 2. Globale Aussagen

Die Gleichung (5) hat bekanntlich im Reellen höchstens  $n+1$  Lösungen. Gilt für 1 Indizes  $z_1 = 0$ , so hat (5) nur noch höchstens  $n+1-1$  Lösungen. Dabei ist zu beachten, daß bei Beschränkung auf reelle Lösungen  $x$  auch die Lösungen mit negativem  $e^{-x}$  wegfallen. Im folgenden heben wir nicht mehr besonders hervor, daß wir uns auf reelle Zahlen beschränken. Außerdem nehmen wir stets an, daß  $z_{n+1} > 0$  ist.

Wir betrachten jetzt das Gleichungssystem

$$e^{u_1 t} P_1(t_1) = P_0(t_1), \dots, e^{u_m t} P_m(t_1) = P_0(t_1) \quad (8)$$

für  $i = 0, \dots, n+1$ , wobei die  $u_j$  für  $j = 1, \dots, m$  mit  $m \geq 1$  gegebene, paarweise verschiedene Zahlen sind, und die  $P_j(t)$  Polynome vom Grad  $p_j$  für  $j = 0, 1, \dots, m$ . Wählen wir

$$\sum_{j=0}^m p_j = m(n+1), \quad (9)$$

so ist die Anzahl der Koeffizienten der Polynome um 1 größer als die Anzahl  $m(n+2)$  der Gleichungen, und das homogene System (8) ist stets nichttrivial lösbar. Bei gegebenem  $x_0$  hat dann (3) mit  $z_1 = e^{x_0 t} P_0(t_1)$  die Lösungen  $E_j(t) = e^{x_j t} P_j(t)$  mit  $x_j = u_j + x_0$  für  $j = 0, \dots, m$  und  $u_0 = 0$ . Nach Satz 1 ist jedes  $x_j$  mindestens eine  $l_j$ -fache Lösung von (5) mit  $l_j = n+1 - p_j$ . Wegen (9) ist daher die Anzahl aller Lösungen von (5) mindestens gleich

$$\sum_{j=0}^m l_j = (m+1)(n+1) - \sum_{j=0}^m p_j = n+1, \quad (10)$$

und da (5) höchstens  $n+1$  Lösungen besitzt, ist jedes  $x_j$  genau eine  $l_j$ -fache Lösung, und dies sind alle Lösungen.

Satz 2: Sind unter den vorhergehenden Annahmen alle  $l_j$  für  $j = 0, \dots, m$  gerade, so hat das Interpolationsproblem (3) mit  $z_1 = e^{x_0 t} P_0(t_1) + (-1)^i \delta_i$  und  $\delta_i \geq 0$  für  $i = 0, \dots, m+1$  keine Lösung, wenn mindestens eine Ungleichung scharf ist.

Beweis: Entwickeln wir die in (5) auftretende Determinante nach der letzten Spalte, so hat der Koeffizient von  $z_1$  das Vorzeichen  $(-1)^{n+1+i} = (-1)^i$ , da eine Vandermondesche Determinante mit der Größe nach geordneten Argumenten stets positiv ist und  $n+1$  wegen (10) ebenfalls gerade ist. Der Koeffizient von  $z_{n+1}$  ist positiv, so daß die linke Seite von (5) für  $x \rightarrow -\infty$  gegen  $+\infty$  strebt. Da keine Nullstellen ungerader Ordnung auftreten, ist die linke Seite von (5) stets nichtnegativ. Eine Vergrößerung von einem  $z_1$  mit geradem Index bzw. eine Verkleinerung bei ungeradem Index bedeutet daher eine Vergrößerung der linken Seite von (5), so daß diese Gleichung dann wie behauptet unlösbar wird.

Mit den  $l_j$  und  $n+1$  sind auch alle  $p_j = n+1 - l_j$  gerade. Die  $p_j$  kann man aber nicht beliebig vorgeben, da (9) sonst unlösbar sein könnte, wohl aber die  $l_j$ . Wählen wir etwa alle  $l_j = 2$  und

für  $m$  eine beliebige natürliche Zahl, so folgt aus (10), daß  $n = 2m+1$  ist und daher  $p_j = n-1 = 2m$  für alle  $j$  in Übereinstimmung mit Satz 1.

Es sei noch bemerkt, daß man von (8) einen Zusammenhang zur Approximation von  $e^{ut}$  durch rationale Funktionen  $P_0(t)/P(t)$  herstellen kann, vgl. etwa G. Meinardus /2/.

Zu den vorhergehenden Betrachtungen soll abschließend der Fall  $m = 0$  ergänzt werden, in dem (5) eine einzige Lösung  $x$  hat, deren Vielfachheit wieder als maximal angenommen werden soll, d. h. als  $n+1$ , und außerdem als gerade. Nach Satz 1 ist  $y_1 = \dots = y_n = 0$ , so daß nach (4) dann

$z_i = z_0 e^{xt_i}$  ist für  $i = 1, \dots, n+1$ . Jetzt lassen sich die vorhergehenden Überlegungen wiederholen, so daß die Aussagen von Satz 2 sinngemäß auch im Fall  $m = 0$  mit  $P_0(t) = z_0$  gelten. Die Aussagen lassen sich auch auf die Fälle übertragen, wo die Anzahl der Lösungen von (5) nicht maximal und wo  $z_{n+1} \neq 0$  ist.

### 3. Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall  $n = 3$ ,  $y_0 = z_0 = 1$ ,  $x_0 = 0$  und  $t_i = 1$  für  $i = 0, 1, \dots, 4$ . Eliminieren wir die  $y_i$  aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + y_1 + y_2 + y_3 &= z_1 e^{-x}, \\ 1 + 2y_1 + 4y_2 + 8y_3 &= z_2 e^{-2x}, \\ 1 + 3y_1 + 9y_2 + 27y_3 &= z_3 e^{-3x}, \\ 1 + 4y_1 + 16y_2 + 64y_3 &= z_4 e^{-4x}, \end{aligned}$$

so entsteht die Gleichung

$$z_4 e^{-4x} - 4z_3 e^{-3x} + 6z_2 e^{-2x} - 4z_1 e^{-x} + 1 = 0$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} (z_4 - 1)e^{-4x} - 4(z_3 - 1)e^{-3x} + 6(z_2 - 1)e^{-2x} - 4(z_1 - 1)e^{-x} \\ + (1 - e^{-x})^4 = 0. \end{aligned}$$

In Übereinstimmung mit den vorhergehenden Ausführungen ist

hieraus ersichtlich, daß der Fall

$$z_1 \leq 1, \quad z_2 \geq 1, \quad z_3 \leq 1, \quad z_4 \geq 1$$

nur für  $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$  und  $x = 0$  möglich ist.

Beim analogen Beispiel mit  $n = 2$  folgt dagegen aus

$$1 + y_1 + y_2 = z_1 e^{-x},$$

$$1 + 2y_1 + 4y_2 = z_2 e^{-2x},$$

$$1 + 3y_1 + 9y_2 = z_3 e^{-3x}$$

die Gleichung

$$z_3 e^{-3x} - 3z_2 e^{-2x} + 3z_1 e^{-x} = 1$$

und nach Umformung

$$(z_3 - 1)e^{-3x} - 3(z_2 - 1)e^{-2x} + 3(z_1 - 1)e^{-x} = (1 - e^{-x})^3,$$

so daß hier die Lösbarkeit in der Umgebung von  $z_1 = z_2 = z_3$  nicht eingeschränkt wird, was auch das zweite Zahlenbeispiel aus /1/ bestätigt.

#### Literatur

/1/ Berg, L.: Interpolation by special exponential polynomials.  
Z. Anal. Anwendungen 4, 537 - 541 (1985)

/2/ Meinardus, G.: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin 1964

eingegangen: 04. 08. 1986

#### Verfasser:

Prof. Dr. L. Berg  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
Rostock  
DDR-2500

Lothar Berg

### Das asymptotische Verhalten einer speziellen Funktion von Binomialkoeffizienten

---

In der Arbeit R. Labahn /2/ wird die Funktion

$$f(n, k) = \binom{n}{k} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \quad (1)$$

für ganzzahlige Argumente mit  $1 \leq k \leq n$  untersucht und die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Nullstellen von (1) gestellt. In der vorliegenden Note wird im Fall  $n = c(k+1)$  mit  $c > 2$  und  $k \rightarrow \infty$  eine asymptotische Darstellung für die Funktion (1) aufgestellt, aus der das gewünschte asymptotische Verhalten der Nullstellen gefolgert werden kann.

Zunächst leiten wir für (1) eine Integraldarstellung her. Auf Grund der Cauchyschen Koeffizientenformel für holomorphe Funktionen gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int (1+z)^n z^{-k-1} dz$$

sowie

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} = \frac{1}{2\pi i} \int (1+z)^n z^{-k} \frac{dz}{1-z},$$

wenn etwa über einen positiv orientierten Kreis um den Nullpunkt mit einem kleineren Radius als 1 integriert wird. Durch Subtraktion erhalten wir für  $n = cs$  mit  $s = k+1$

$$f(cs, s-1) = \frac{1}{2\pi i} \int (1+z)^{cs} z^{-s} \frac{1-2z}{1-z} dz. \quad (2)$$

Der Sattelpunkt von  $g(z) = c \ln(1+z) - \ln z$  liegt an der Stelle  $z_0 = 1/(c-1)$  und ist für  $c > 2$  kleiner als 1. Deshalb kann er als Radius des Integrationskreises gewählt werden, und die bekannte Sattelpunktmethode

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{sg(z)} h(z) dz \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi sg''(z_0)}} e^{sg(z_0)} h(z_0), \quad s \rightarrow \infty.$$

(vgl. etwa /1/, Satz 25.2) liefert wegen  $g''(z_0) = (c-1)^3/c$  und  $h(z_0) = (c-3)/(c-2)$

$$f(cs, s-1) \sim \sqrt{\frac{c}{2\pi s(c-1)^3}} \left[ \frac{c^c}{(c-1)^{c-1}} \right]^s \frac{c-3}{c-2}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Da die rechte Seite von (3) an der Stelle  $c = 3$  ihr Vorzeichen wechselt, müssen die Nullstellen von  $f(n, k)$  die folgende asymptotische Darstellung besitzen:

$$n \sim 3k, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Im Fall  $c = 3$  mit  $z_0 = 1/2$  ist (3) wie üblich nach Weglassung des Faktors  $c-3$  als  $o$ -Relation zu interpretieren. Um auch in diesem Fall zu einer scharfen asymptotischen Darstellung zu gelangen, wenden wir die Formel (25.14) aus /1/ in der Spezialisierung

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{sg(z)} h(z) dz \sim \frac{-1}{\sqrt{8\pi (sg''(z_0))^3}} e^{sg(z_0)} h''(z_0), \quad s \rightarrow \infty,$$

an und erhalten wegen  $g''(1/2) = 8/3$  und  $h''(1/2) = -16$

$$f(3s, s-1) \sim \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi s^3}} \left(\frac{27}{4}\right)^s, \quad s \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Da die genauen Begründungen der Aussagen (3) und (5) Standardüberlegungen sind, soll hier darauf verzichtet werden. Statt dessen sei lediglich noch der Fall  $s = 5$  als Zahlenbeispiel angeführt, wo die rechte Seite von (5) gerundet gleich 918.569 ist, während die linke Seite nach /2/ den Wert 689 besitzt. Der relative Fehler  $1/3$  ist zwar verhältnismäßig groß, aber 5 ist ja auch noch eine relativ kleine Zahl.

#### Literatur

- /1/ Berg, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen, Berlin 1968  
 /2/ Labahn, R.: On an interesting property for binomial coefficients, Rostock, Math. Kolloq. 29, 21 - 24 (1986)

eingegangen: 18. 08. 1986

Verfasser:  
 Prof. Dr. L. Berg  
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
 Sektion Mathematik  
 Universitätsplatz 1  
 Rostock  
 DDR-2500

Kurt Frischmuth

An analytical result in experimental design1. Introduction

In a previous paper /1/ Duchrau a.o. listed the commonly used criteria for optimal experimental designs and described a considerably fast algorithm for the calculation of those designs. A further acceleration of the search procedure may be expected, if the initial guess is made in a more sophisticated way. To this end an auxiliary restricted minimization problem is to be solved, and it turns out that this new optimization can be done very easily. Indeed, the number of unknowns in the auxiliary problem does not exceed five. However, in the present paper our aim is to derive an analytical solution for  $C_\gamma$ -optimality and a certain class of three-parameter growth functions. For this class containing the model of exponential regression as a most important case we discussed the D-criterion in /2/. The  $C_\gamma$ -criterion seems to be much more complicated to handle with, since the quotient of some determinant and the D-criterion is to be minimized. However, from known numerical results /3/ we luckily guessed a feature of the solution, which enabled us to get the minimizer analytically. Afterwards we prove that our guess was right end, moreover, the only possible one. The minimizer of the auxiliary problem, the so-called locally  $C_\gamma$ -optimal discrete experimental design, is even of some interest for itself. But our main interest is in finding exact optimal designs. The presented method fails to yield such designs, since differential calculus is used in an essential way. Nevertheless, a comparison of known exact optimal designs (cf. /3/) with the present results suggests that we have found a proper way for the choice of starting values.

## 2. The criterion

We start with the information matrix

$$M = \frac{\sigma^2}{n} F^T F$$

with  $F = \begin{pmatrix} z(x_1) \\ \vdots \\ z(x_n) \end{pmatrix}$  and the rows defined by

$z(x) := \nabla_y g(x, \mathcal{V}_0)$ . We assume the given growth function

$$g : [x_1, x_U] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

and  $\mathcal{V}_0$  to fulfil

- i)  $z_1(x) \equiv \text{const.}$

- ii)  $z_2 : [x_1, x_U] \rightarrow [t_1, t_U]$  is a bijection.

- iii) There exists a strictly convex smooth function  $\mathfrak{z} : [t_1, t_U] \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$z_3(x) = \mathfrak{z}(z_2(x)),$$

where  $z_1, z_2, z_3$  are the components of  $z$ .

For designs with a three-point support containing  $x_1$  and  $x_U$  the following formula is true (cf. /2/)

$$|M| = n_1 \cdot n_m \cdot n_U \cdot \varphi(x_m). \quad (1)$$

Here  $x_m$  is the remaining point of the support and  $n_1, n_m$  and  $n_U$  are the corresponding frequencies.  $\varphi : [x_1, x_U] \rightarrow \mathbb{R}^+$  is strictly concave due to iii), further we have  $\varphi(x_1) = \varphi(x_U) = 0$ . Hence  $\varphi$  takes its unique maximum in  $(x_1, x_U)$ . Now,  $C_{\mathcal{Y}}$ -optimality consists in minimizing the third entry on the diagonal of  $M^{-1}$ . We obtain

$$C_{\mathcal{Y}} \begin{pmatrix} x_1 & x_m & x_U \\ n_1 & n_m & n_U \end{pmatrix} = \frac{1}{|M|} |F_{\mathcal{Y}}^T F_{\mathcal{Y}}|, \quad (2)$$

where  $F_{\mathcal{Y}}$  is obtained from  $F$  by rejecting the third column. Con-

sequently, denoting  $\varphi \cdot z_2 =: \psi$ ,

$$C_{\mathcal{Y}} \begin{pmatrix} x_1 & x_m & x_u \\ n_1 & n_m & n_u \end{pmatrix} = \frac{n_1 n_m (t_m - t_1)^2 + n_m n_u (t_m - t_u) + n_1 n_u (t_1 - t_u)^2}{n_1 n_m n_u \psi(t_m)}. \quad (3)$$

As restrictions we have  $x_m \in [x_1, x_u]$  and  $n_1 + n_m + n_u = n$ ,

$n_1, n_m, n_u$  being positive integers,  $n \geq 3$  given.

Now, the objective function for the auxiliary problem is obtained by dropping the restriction that  $n_1, n_m$  and  $n_u$  be integers.

Denoting  $\frac{n_1}{n} = \lambda_1, \frac{n_u}{n} = \lambda_u, t := \frac{t_m - t_1}{t_u - t_1}$ , and  $h(t) = \psi(t_m)$  we get

$$\frac{n}{(t_u - t_1)^2} \tilde{C}_{\mathcal{Y}} = f(t, \lambda_1, \lambda_u) := \frac{\lambda_1(1 - \lambda_1 - \lambda_u)t^2 + \lambda_u(1 - \lambda_1 - \lambda_u)(1 - t)^2 + \lambda_1 \lambda_u}{\lambda_1 \lambda_u (1 - \lambda_1 - \lambda_u) h(t)}. \quad (4)$$

Hence the following optimization problem is stated

$$f(t, \lambda_1, \lambda_u) \stackrel{!}{P} \underset{P}{\text{Min}}, \quad (5)$$

$$P = \{(t, \lambda_1, \lambda_u) \mid t \in [0, 1], \lambda_1 \in (0, 1), \lambda_1 + \lambda_u \in (\lambda_1, 1)\}. \quad (6)$$

### 3. Conditions for a minimum

The necessary conditions for a local extremum of  $f$  are rather cumbersome, and at the first glance there is little hope to solve them analytically. However, numerical experience suggests that the solution makes the denominator of  $f$  a maximum with respect to  $t$  and the numerator a minimum, simultaneously. Let us assume this for a while as a working hypothesis.

The maximum of the denominator with respect to  $t$  is uniquely determined from  $h'(t) = 0$ . Denoting the solution by  $t_0$ , the minimum condition for the numerator reads

$$\lambda_1 t_0 = \lambda_u (1 - t_0) \quad (7)$$

or equivalently

$$t_0 = \frac{\lambda_u}{\lambda_1 + \lambda_u}, \quad 1 - t_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_u}. \quad (8)$$

So, if there is a solution satisfying our above working hypothesis, then it is contained in the common curve of the surfaces

$$t = t_0 \text{ and } \frac{\lambda_1}{\lambda_u} = \frac{1 - t_0}{t_0}.$$

We parametrize this curve by  $\lambda := \lambda_1 + \lambda_u$  and substitute (8) into  $f$ .

We obtain along the curve

$$f(t, \lambda_1, \lambda_u) = \frac{\lambda_1 \lambda_u}{(\lambda_1 + \lambda_u)^2} \frac{\lambda^2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_u)(\lambda_1 + \lambda_u)}{\lambda_1 \lambda_u (1 - \lambda_1 - \lambda_u) h(t)} = \frac{1}{h(t)} \frac{1}{\lambda(1-\lambda)}. \quad (9)$$

Consequently,  $f$  takes its minimum along the curve for  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Hence the solution is given by

$$t = t_0 = h^{-1}(0), \quad \lambda_1 = \frac{1-t}{2}, \quad \lambda_u = \frac{t}{2}, \quad (10)$$

provided our hypothesis was true.

#### 4. Verification and uniqueness

We know that the derivatives of  $f$  in the directions  $(1,0,0)$  and  $(0,1,1)$  vanish. Thus it remains to show that the derivative in an arbitrary independent direction vanishes, too. We choose the direction  $(0,1,0)$  of  $\lambda_1$ , keeping  $t$  and  $\lambda$  fixed. We obtain after some transformations

$$h(t) \frac{d}{d\lambda_1} f \Big|_{\substack{t=\text{const} \\ \lambda=\text{const}}} = \frac{t^2}{(\lambda - \lambda_1)^2} - \frac{(1-t)^2}{\lambda_1^2}. \quad (11)$$

Substituting (10) into this relation we infer that indeed

$\frac{d}{d\lambda_1} f = 0$ . Furthermore, the last equality (11) implies

$$\frac{df}{d\lambda_1} \Big|_{\substack{t=\text{const} \\ \lambda=\text{const}}} = 0 \quad \text{iff} \quad \frac{t}{\lambda_u} = \frac{1-t}{\lambda_1}, \quad (12)$$

but this in turn is equivalent to our working hypothesis. Consequently, the relations (10) are necessary and sufficient for  $\nabla f$  to vanish.

Now a discussion of  $\partial P$  is in order. The domain  $P$  is bounded by the surfaces  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_u = 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_u = 1$ . Regarding the original form of  $f$ , we see that the denominator vanishes, while the numerator is nonzero, if exactly one of the above equations holds. We omit the details of the proof that  $f$  tends to infinity for arbitrary convergence of the argument to  $\partial P$ .

Now we can state the main result as an obvious consequence of the above considerations.

**Theorem:** If the conditions i), ii) and iii) hold, then the relations (10) describe the absolute minimum of the auxiliary problem (5), (6). The solution is unique.

**Remark 1:** Analogous considerations yield locally  $C_\alpha$ - and  $C_\beta$ -optimal discrete experimental designs provided appropriate modifications of i), ii) and iii) are true.

**Remark 2:** The assumptions ii) and iii) may be weakened. It suffices to assume i) and

- ii')  $\varphi$  takes a unique maximum at  $x_m \in (x_1, x_u)$ ,
- iii')  $z_2(x_1) < z_2(x_m) < z_2(x_u)$  or  
 $z_2(x_1) > z_2(x_m) > z_2(x_u)$ .

## 5. Example

For the growth function  $g(x, \gamma) = \alpha + \beta \exp(\gamma x)$ ,  $\gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma < 0$  we have

$$z(x) = (1, \beta \cdot \exp(\gamma x), \beta \cdot x \cdot \exp(\gamma x)). \quad (13)$$

Hence  $z_3(x) = x \cdot z_2(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot \ln \frac{z_2}{\beta} \cdot z_2(x)$ . The assumptions i) and ii) are fulfilled, iii) holds with  $x$  defined by

$$x(\xi) = \xi \cdot \gamma^{-1} (\ln \xi - \ln \beta).$$

The derivative  $x'(\xi) = \gamma^{-1} (\ln \xi - \ln \beta + 1)$  is obviously increasing. After some less interesting calculations the minimum of the corresponding  $f$  is found at

$$t = \frac{\exp\left(\gamma \frac{x_u \exp(\gamma x_u) - x_1 \exp(\gamma x_1)}{\exp(\gamma x_u) - \exp(\gamma x_1)} - 1\right) - \exp(\gamma x_1)}{\exp(\gamma x_u) - \exp(\gamma x_1)} \quad (14)$$

and  $\lambda_1, \lambda_u$  from (10).

In /3/ the interval  $[x_1, x_u] = [0, 65]$  and

$\gamma_0 = -0.03$  ( $-0.05, -0.07, -0.09$ ) were chosen. For these parameters we obtain

$t$	0.573179	(0.604008, 0.620358, 0.62766)
$\lambda_1$	0.213411	(0.197996, 0.189821, 0.18617)
$\lambda_m$	0.5	(0.5, 0.5, 0.5)
$\lambda_u$	0.286589	(0.302004, 0.310179, 0.31383)

In table 1 we compare the values  $\lambda_u n, \lambda_1 n$  with the optimum designs for several choices of  $n$  (cf. /3/). In the last column the optimum  $x_m$ -values are given. From our formulae we obtain  $x_m = 22.5516$ , ( $\gamma_0 = -.03$ ).

$n$	$\lambda_1 n$	$n_1$	$\lambda_u n$	$n_u$	$x_m$
3	.64	1	.86	1	21.96
4	.85	1	1.15	1	21.72
5	1.07	1	1.43	1	21.59
6	1.28	1	1.71	2	23.72
7	1.49	2	2.01	2	21.82
8	1.70	2	2.29	2	21.72
9	1.92	2	2.58	3	22.84
10	2.13	2	2.87	3	22.87
11	2.34	2	3.15	3	22.90
12	2.56	3	3.44	3	21.72
13	2.77	3	3.73	4	22.53.

Table 1

In all cases but one rounding gives already the optimum frequencies. Further it is worthwhile to remark that with increasing  $n$  the approximation of  $x_m$  does not become worse. Hence the overall cost of the algorithm from /1/ with the actual initial guess may be expected to behave in a desirable manner.

## References

- /1/ Duchrau, P., Frischmuth, K., Rasch, D., and Schimke, E.:  
Optimum experimental designs in growth curve analysis.  
Rostock. Math. Kolloq. 30, 93 - 104 (1986)
- /2/ Frischmuth, K.: On locally D-optimal experimental designs.  
(to appear)
- /3/ Rasch, D., Rudolph, E., and Schimke, E.: Optimale Versuchs-  
pläne in der nichtlinearen Regression. In: Rasch, D.  
(ed.): Robustheit IV. Probleme der angewandten Sta-  
tistik 13, 93 - 121 (1985)

received: 05. 01. 1987

## Author:

Dr. K. Frischmuth  
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
Sektion Mathematik  
Universitätsplatz 1  
Rostock  
DDR-2500

Udo Lorz

## Verzerrungskorrigierte Punktschätzungen des Korrelationskoeffizienten - eine Simulationsstudie

---

### Zusammenfassung

Für den Korrelationskoeffizienten der zweidimensionalen Normalverteilung wird eine Punktschätzung angegeben, die eine geringere Verzerrung als der Stichprobenkorrelationskoeffizient besitzt. Dazu wird die Jackknife-Methode angewendet. Durch geeignete Linearkombinationen des Stichprobenkorrelationskoeffizienten und der Jackknife-Schätzung werden sowohl die Verzerrung als auch die Varianz weiter verringert.

### 1. Einleitung

Sei  $\underline{z}_n = (z_1, \dots, z_n)'$  eine Zufallsstichprobe vom Umfang  $n \geq 2$ . Die Vektoren  $\underline{z}_i = (x_i, y_i)'$ ,  $i=1, \dots, n$ , mögen einer zweidimensionalen Normalverteilung  $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$  folgen. Die übliche Punktschätzung für den Korrelationskoeffizienten  $\rho$  ist der Stichprobenkorrelationskoeffizient

$$r_n = r(\underline{z}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}}.$$

Diese Schätzung ist konsistent, jedoch nur asymptotisch erwartungstreu. Nach [2] gilt

$$E(r_n) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}, \rho^2\right) \cdot \rho. \quad (1)$$

Dabei bezeichnet  $F$  die konfluente hypergeometrische Funktion.

Entwickelt man (1) nach Potenzen von  $\frac{1}{n}$ , so ergibt sich

$$E(\underline{r}_n) = \rho + a(\rho) \left( \frac{a_1(\rho)}{n} + \frac{a_2(\rho)}{n^2} + \frac{a_3(\rho)}{n^3} \right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2)$$

für  $n \rightarrow \infty$  mit

$$a(\rho) = \rho(1-\rho^2), \quad a_1(\rho) = -\frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$a_2(\rho) = -\frac{3}{8}(3\rho^2+1), \quad a_3(\rho) = -\frac{3}{16}(25\rho^4-2\rho^2+1). \quad (4)$$

Auch im folgenden beziehen sich alle asymptotischen Entwicklungen auf  $n \rightarrow \infty$ .

Für das zweite Moment des Stichprobenkorrelationskoeffizienten gilt nach /2/

$$E(\underline{r}_n^2) = 1 - (1-\rho^2) \frac{n-2}{n-1} F(1,1, \frac{n+1}{2}, \rho^2). \quad (5)$$

Mit (2) ergibt sich nach Entwicklung von (5) für die Varianz dieser Schätzung

$$V(\underline{r}_n) = (1-\rho^2)^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{11\rho^2+2}{2n^2} + \frac{75\rho^4-2\rho^2+2}{2n^3} \right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (6)$$

Die Varianz ist im unkorrelierten Fall maximal und beträgt

$$V(\underline{r}_n) = \frac{1}{n-1}.$$

Deshalb ist die Verwendung dieser Punktschätzung erst für Stichprobenumfänge  $n \geq 30$  zu empfehlen.

Für die Schiefe  $\gamma_1(\underline{r}_n)$  bzw. den Exzeß  $\gamma_2(\underline{r}_n)$  gilt nach /2/

$$\gamma_1(\underline{r}_n) = -\frac{6\rho}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ bzw.}$$

$$\gamma_2(\underline{r}_n) = \frac{6(12\rho^2-1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nach (2) ergibt sich für die Verzerrung des Stichprobenkorrelationskoeffizienten

$$B(\underline{r}_n) = a(\rho) \left( \frac{a_1(\rho)}{n} + \frac{a_2(\rho)}{n^2} + \frac{a_3(\rho)}{n^3} \right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (7)$$

## 2. Jackknife-Schätzung

Durch die Anwendung der Jackknife-Methode kann die Verzerrung

einer gegebenen Schätzung verringert werden. Diese Methode geht auf M. Quenouille (1956) zurück. Für  $n \geq 3$  sei

$$\underline{z}_{n-1}^{(i)} = (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)', \quad i=1, \dots, n,$$

jene Teilstichprobe von  $\underline{z}_n$  vom Umfang  $n-1$ , bei der die  $i$ -te Komponente fehlt. Dann ist

$$r_{n-1}^{(i)} = r(\underline{z}_{n-1}^{(i)}), \quad i=1, \dots, n,$$

der auf dieser Zufallsstichprobe basierende Stichprobenkorrelationskoeffizient und die Jackknife-Schätzung nach /1/ durch

$$\underline{J}_n = n \cdot r_n - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n r_{n-1}^{(i)}$$

definiert. Für die Verzerrung dieser Punktschätzung für  $\rho$  gilt nach (7), (3) und (4)

$$B(\underline{J}_n) = a(\rho) \left( \frac{a_2'(\rho)}{n^2} + \frac{a_3'(\rho)}{n^3} \right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (8)$$

mit

$$a_2'(\rho) = -a_2(\rho) = \frac{3}{8} (3\rho^2 + 1)$$

und

$$a_3'(\rho) = -(a_2(\rho) + 2a_3(\rho)) = \frac{3}{8} (25\rho^4 + \rho^2 + 2).$$

Die Varianz, die Schiefe und der Exzeß dieser Schätzung lassen sich auf Grund der auftretenden Abhängigkeiten nur durch Simulation ermitteln.

### 3. Linearkombinationen der Schätzungen

Wir wollen davon ausgehen, daß für Stichprobenumfänge  $n \geq 30$  bei den Verzerrungen (7) und (8) der Schätzungen  $r_n$  und  $\underline{J}_n$  die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Deshalb berücksichtigen wir vorerst nur die Glieder bis einschließlich der Ordnung  $n^{-2}$ .

Die Verzerrung der Jackknife-Schätzung ist betragsmäßig stets kleiner als die Verzerrung des Stichprobenkorrelationskoeffizienten. Mit wachsendem Stichprobenumfang kommt dieser Effekt noch stärker zur Ausprägung. Beide Verzerrungen sind als Funktionen von  $\rho$  antisymmetrisch. Sie besitzen jedoch umgekehrtes

Vorzeichen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit der Linearkombination der beiden Schätzungen zur weiteren Verringerung der Verzerrung. Für  $n \geq 3$ ,  $1 \leq i \leq 8$  und  $c, c_n^{(i)} \in [0,1]$  setzen wir

$$\underline{L}_n^{(i)} = c_n^{(i)} \cdot \underline{r}_n + (1 - c_n^{(i)}) \cdot \underline{J}_n$$

und

$$b_n(c, g) = c \cdot a(g) \left( \frac{a_1(g)}{n} + \frac{a_2(g)}{n^2} \right) + (1-c) a(g) \frac{a_2'(g)}{n^2}. \quad (9)$$

Dann gilt nach (7) und (8) für die Verzerrung der Schätzungen

$$\underline{L}_n^{(i)}$$

$$B(\underline{L}_n^{(i)}) = b_n(c_n^{(i)}, g) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Für die Wahl der Koeffizienten  $c_n^{(i)}$  wollen wir uns auf die folgenden vier Kriterien stützen.

1. Kriterium:

$$b_n(c_n^{(1)}, g) \equiv 0.$$

Daraus ergibt sich als Lösung  $c_n^{(1)}$  dieser Gleichung

$$c_n^{(1)} = c_n^{(1)}(g) = \frac{1}{2 + d_1(g) \cdot n} \quad \text{mit} \quad d_1(g) = \frac{4}{3(3g^2 + 1)}.$$

Da der Koeffizient  $c_n^{(1)}$  vom unbekanntem Parameter  $g$  abhängt, setzen wir bei der Schätzung  $\underline{L}_n^{(1)}$  an Stelle von  $g$  die Jackknife-Schätzung  $\underline{J}_n$  ein. Dadurch wird auch der Koeffizient  $c_n^{(1)}$  zufällig, und alle Momente der Schätzung  $\underline{L}_n^{(1)}$  lassen sich nur durch Simulation ermitteln.

2. Kriterium:

Wir wollen den Betrag der Verzerrung minimieren, suchen also die Lösung  $c_n^{(2)}$  der Gleichung

$$\sup_{g \in (0,1)} |b_n(c_n^{(2)}, g)| = \inf_{c \in [0,1]} \sup_{g \in (0,1)} |b_n(c, g)|.$$

Es gilt

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{2 + d_2 \cdot n} \quad \text{mit} \quad d_2 = 0,621341.$$

### 3. Kriterium

Für die Minimierung der Verzerrung im Mittel

$$\int_0^1 |b_n(c_n^{(3)}, g)| dg = \inf_{c \in [0,1]} \int_0^1 |b_n(c, g)| dg$$

läßt sich die Lösung  $c_n^{(3)}$  nicht in geschlossener Form angeben.

Tabelle 1 enthält für verschiedene Stichprobenumfänge die Koeffizienten  $c_n^{(3)}$ .

### 4. Kriterium:

Sollen die negative und die positive Verzerrung im Mittel

gleich groß sein, so verwenden wir die Lösung  $c_n^{(4)}$  der Gleichung

$$\int_0^1 b_n(c_n^{(4)}, g) dg = 0.$$

Sie besitzt die Gestalt

$$c_n^{(4)} = \frac{1}{2+d_4} \cdot n \quad \text{mit } d_4 = \frac{2}{3}.$$

Für die Schätzungen  $\underline{L}_n^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, 4$ , lassen sich Varianz,

Schiefe und Exzeß wieder nur durch Simulation bestimmen. Die

Koeffizienten  $c_n^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, 4$ , unterscheiden sich nur gering-

fugig voneinander. Mit wachsendem Stichprobenumfang werden die-

se Unterschiede noch geringer. Der Koeffizient  $c_n^{(4)}$  erhält

durch seine besonders einfache Gestalt eine gewisse Vorzugsstel-

lung. Will man auch für kleine Stichprobenumfänge ( $n < 30$ ) Li-

nearkombinationen entsprechend den vier gewählten Kriterien

bilden, so ist es sinnvoll, in (9) auch die Glieder der Ordnung

$n^{-3}$  der Verzerrungen (7) und (8) einzubeziehen. Für den ent-

sprechend dem ersten Kriterium gewählten Koeffizienten  $c_n^{(5)}$  er-

gibt sich dann

$$c_n^{(5)} = c_n^{(5)}(g) = \frac{a_2(g) \cdot (n+1) + 2a_3(g)}{a_1(g) \cdot n^2 + a_2(g) \cdot (2n+1) + 3a_3(g)}, \quad (10)$$

und nach Einsetzen von (3) und (4) in (10) erhalten wir

$$c_n^{(5)}(\rho) = \frac{(3\rho^2+1)n+25\rho^4+\rho^2+2}{\frac{4}{3}n^2+2(3\rho^2+1)n+\frac{5}{2}(15\rho^4+1)}.$$

An Stelle des unbekanntem Parameters  $\rho$  ist wieder eine geeignete Punttschätzung für  $\rho$  einzusetzen. Die gemäß dem zweiten bzw. dritten Kriterium bestimmten Koeffizienten  $c_n^{(6)}$  bzw.  $c_n^{(7)}$  lassen sich nicht in geschlossener Form angeben. Tabelle 1 enthält diese Koeffizienten für verschiedene Stichprobenumfänge. Der Koeffizient  $c_n^{(8)}$  - entsprechend dem vierten Kriterium gewählt - hat die einfache Gestalt

$$c_n^{(8)} = \frac{24n+78}{16n^2+48n+105}.$$

Man kann wieder feststellen, daß die Koeffizienten  $c_n^{(i)}$ ,  $i = 6, 7, 8$ , nur geringfügig voneinander abweichen.

#### 4. Simulation

Durch die Simulation soll einerseits überprüft werden, ob in (7) und (8) die Glieder bis einschließlich der Ordnung  $n^{-2}$  bzw.  $n^{-3}$  eine gute Approximation der Verzerrung  $B(\underline{r}_n)$  bzw.  $B(\underline{j}_n)$  ergeben. Damit wäre (9) als Grundlage für Kriterien zur Linearkombination der beiden Schätzungen bestätigt, und die Schätzungen  $\underline{L}_n^{(1)}$  würden in guter Näherung die dem jeweiligen Auswahlkriterium für den Koeffizienten  $c_n^{(i)}$  entsprechenden Eigenschaften besitzen. Insbesondere ist die Verzerrung der Schätzungen  $\underline{L}_n^{(1)}$ ,  $i = 1, 5$ , zu ermitteln. Andererseits ist die Varianz als wichtiges Beurteilungskriterium aller Schätzungen zu bestimmen. Die Schätzung weiterer analytisch nicht ableitbarer statistischer Maßzahlen durch die Simulation soll Aussagen über die Verteilung der Schätzungen ermöglichen.

##### 4.1. Entwurf

Zur Erzeugung von  $N(0,1)$ -verteilten Zufallszahlen konnten die Unterprogramme ZZGD und NVO1 genutzt werden, die vom Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf-Rostock der Akademie der

Landwirtschaftswissenschaften zur Verfügung gestellt wurden. Die damit generierten Zufallszahlen besitzen hinreichend gute Eigenschaften. Ausgehend von zwei Zufallszahlen  $u_i$  und  $v_i$  wurden für alle betrachteten  $\rho$ -Werte gemeinsam Realisierungen  $z_i = (x_i, y_i)'$  gemäß

$$x_i = \sigma_1 u_i + \mu_1 \quad \text{und}$$

$$y_i = \sigma_2 \rho \cdot u_i + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \cdot v_i + \mu_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

erzeugt. Da die Erwartungswerte  $\mu_j$  und die Varianzen  $\sigma_j^2$  keinen Einfluß auf den Schätzwert  $r_n$  besitzen, konnten  $\mu_j = 0$  und  $\sigma_j^2 = 1$ ,  $j = 1, 2$ , gesetzt werden. Der Stichprobenkorrelationskoeffizient ist als Funktion von  $\rho$  nicht antisymmetrisch. Deshalb wurde bei der Auswahl der  $\rho$ -Werte das gesamte Intervall  $(-1, +1)$  für den Korrelationskoeffizienten berücksichtigt. Die Werte  $\rho_j = -1 + \frac{j}{10}$ ,  $j = 1, \dots, 19$ , wurden äquidistant gewählt. In die Simulation wurden außer dem Stichprobenkorrelationskoeffizienten  $r_n$  und der Jackknife-Schätzung  $\underline{J}_n$  die Linearkombinations-Schätzungen  $\underline{L}_n^{(1)}$ ,  $\underline{L}_n^{(4)}$  und  $\underline{L}_n^{(8)}$  einbezogen. Diese Auswahl wurde getroffen, da für die Schätzungen  $\underline{L}_n^{(1)}$ ,  $i = 2, 3, 4$  bzw.  $i = 6, 7, 8$ , im wesentlichen jeweils die gleichen Resultate zu erwarten sind. Die Schätzung  $\underline{L}_n^{(5)}$  scheidet aufgrund des für praktische Zwecke zu komplizierten Koeffizienten  $c_n^{(5)}$  aus. Für die Simulation wurden die Stichprobenumfänge 5, 10, 20, 30 und 50 ausgewählt. Auf der Grundlage von  $N$  generierten Realisierungen einer Zufallsstichprobe vom Umfang  $n$  wurde für jede der fünf Schätzungen die Verzerrung, die Varianz, die Schiefe und der Exzeß in üblicher Weise geschätzt. Auf eine Schätzung der quadratischen Abweichung konnte verzichtet werden, da das Quadrat der Verzerrung im Vergleich zur Varianz verschwindend gering ist und die quadratische Abweichung somit im wesentlichen mit der Varianz übereinstimmt. Bei jeder Simulation wurde ein anderer Startwert für den Zufallszahlengenerator verwendet.

#### 4.2. Versuchsplanung

Entsprechend der Zielstellung der Simulation sind hinreichende Genauigkeitsforderungen an die Schätzungen der Verzerrungen  $B(\underline{r}_n)$  und  $B(\underline{j}_n)$  zu formulieren. Diese Anforderungen sollen mindestens mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 erfüllt sein.

Durch Voruntersuchungen wurde die naheliegende Vermutung bestätigt, daß auch die Varianz der Jackknife-Schätzung für  $g = 0$  maximal ist. Deshalb genügt es, die erforderliche Anzahl  $N$  von Wiederholungen der zu erzeugenden Realisierungen einer Zufallsstichprobe vom Umfang  $n$  für den unkorrelierten Fall zu berechnen. Da die Verzerrungen  $B(\underline{r}_n)$  und  $B(\underline{j}_n)$  mit wachsenden Stichprobenumfang  $n$  kleiner werden, ist es sinnvoll, die Genauigkeitsforderungen  $d_n$  und  $d'_n$  an der Stelle  $g = 0$  in Abhängigkeit von der betragsmäßig maximalen Verzerrung festzulegen. Deshalb setzen wir

$$d_n \approx \sup_{g \in (-1, +1)} |B(\underline{r}_n)| \cdot 0,1$$

und analog

$$d'_n \approx \sup_{g \in (-1, +1)} |B(\underline{j}_n)| \cdot 0,1.$$

Für  $g = 0$  sind die Schätzungen  $\underline{r}_n$  und  $\underline{j}_n$  erwartungstreu. Als näherungsweise Lösung der Ungleichung

$$P\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{r}_n\right| \leq d_n\right) \geq 0,9$$

ergibt sich unter Verwendung von  $V(\underline{r}_n) = \frac{1}{n-1}$  für  $g = 0$

$$N \geq \frac{u_{0,95}^2}{d_n^2(n-1)}$$

und analog für

$$P\left(\left|\frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'} \underline{j}_n\right| \leq d'_n\right) \geq 0,9$$

die näherungsweise Lösung

$$N' \geq \frac{u_{0,95}^2}{(d'_n)^2} \cdot V(\underline{j}_n).$$

Dabei bezeichnet  $u_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der Standard-Normalverteilung. Für die Varianz  $V(\underline{j}_n)$  wurden die Schätzwerte aus Voruntersu-

chungen mit 10000 Wiederholungen verwendet. Tabelle 2 enthält für die ausgewählten Stichprobenumfänge die Genauigkeitsforderungen  $d_n$  bzw.  $d'_n$  und die erforderlichen Anzahlen  $N$  bzw.  $N'$  von Wiederholungen. Die Simulationen wären mit  $N^* = \max \{N, N'\}$  Wiederholungen durchzuführen. Das ist aber nur für den Stichprobenumfang  $n = 5$  praktisch realisierbar. Deshalb wurde der folgende Ausweg gewählt. Die Genauigkeitsforderungen  $d_n$  bzw.  $d'_n$  wurden beibehalten und die Anzahl der Wiederholungen entsprechend einer zumutbaren Rechenzeit von höchstens 250 Minuten CPU-Zeit für den Großrechner EC 1056 festgelegt. Nach je 10000 Wiederholungen wurden die Zwischenresultate ausgedruckt. Für die Auswertung wurden die Ergebnisse verwendet, die den Genauigkeitsvorgaben möglichst gut genügen. In Tabelle 2 sind die Anzahlen  $N$  von Wiederholungen aufgeführt, mit denen diese Ergebnisse erzielt wurden. Weiterhin sind die näherungsweise berechneten Wahrscheinlichkeiten  $1-\alpha$  angegeben, mit denen die verwendeten Ergebnisse auftreten.

#### 4.3 Auswertung und Ergebnisse

Die Genauigkeitsforderungen  $d_n$  und  $d'_n$  wurden für  $n = 5, 10$  vollständig und für  $n = 20, 30$  teilweise erfüllt. Für  $n = 50$  konnten die Genauigkeitsvorgaben nicht erreicht werden. Schon für den Stichprobenumfang  $n = 5$  ergibt sich eine sehr gute Approximation der Verzerrung des Stichprobenkorrelationskoeffizienten durch die Glieder bis einschließlich der Ordnung  $n^{-3}$  in (7). Für  $n = 10$  liefern bereits die ersten beiden Glieder eine sehr gute Näherung für  $B(\underline{r}_n)$ . Die Verzerrung der Jackknife-Schätzung läßt sich erst ab  $n = 10$ , für  $n = 5$  nur im Intervall  $(-0,7, +0,7)$  gut durch die ersten drei Glieder der Entwicklung (8) annähern. Will man auf das kubische Glied zur Approximation verzichten, so ist ein Stichprobenumfang von mindestens  $n = 20$  erforderlich. Für  $n \geq 30$  können die Glieder bis einschließlich der Ordnung  $n^{-2}$  in (7) und (8) als hinreichend genaue Approximation der Verzerrungen  $B(\underline{r}_n)$  und  $B(\underline{J}_n)$  angesehen werden.

Die Verzerrung der Jackknife-Schätzung ist für alle Werte  $\rho_j \neq 0$  betragsmäßig um ein Vielfaches kleiner als die Verzerrung des Stichprobenkorrelationskoeffizienten. Die Linearkombinations-Schätzungen wiederum weisen gegenüber der Jackknife-Schätzung für fast alle Werte  $\rho_j \neq 0$  betragsmäßig eine kleinere Verzerrung auf.

Die relativ geringe Schrittweite von 0,1 zwischen den Werten  $g_j, j = 1, \dots, 19$ , erlaubt eine genaue Beurteilung der Eigenschaften der Schätzungen im ganzen Intervall  $(-1, +1)$ . Die Schätzung  $\underline{L}_n^{(1)}$  ist bezüglich der betragsmäßig maximalen Verzerrung die beste Schätzung. Es folgen  $\underline{L}_n^{(8)}$  und  $\underline{L}_n^{(4)}$ , die etwa gleich gut sind, dann  $\underline{J}_n$  und mit deutlichem Abstand  $\underline{r}_n$ . Für  $n = 30$  beträgt das Verhältnis der Zahlenwerte in etwa 1:1,5:1,7:3,5:48. Bezüglich der mittleren Verzerrung ergibt sich die gleiche Reihenfolge der Schätzungen. Das Verhältnis der Zahlenwerte ist hier ähnlich.

Die Schätzung  $\underline{L}_n^{(8)}$  besitzt für  $|g| \geq 0,6$  eine geringere Verzerrung als die Schätzung  $\underline{L}_n^{(4)}$ . Für  $|g| \leq 0,5$  ist es umgekehrt. Mit wachsendem Stichprobenumfang unterscheiden sich die Schätzungen  $\underline{L}_n^{(4)}$  und  $\underline{L}_n^{(8)}$  in ihren Eigenschaften immer weniger. Für sehr kleine Stichprobenumfänge  $n < 10$  weist die Schätzung  $\underline{L}_n^{(4)}$  für  $|g| \leq 0,4$  betragsmäßig die kleinste Verzerrung aller betrachteten Schätzungen auf.

Die Glieder bis einschließlich der Ordnung  $n^{-3}$  in (6) ergeben bereits für  $n = 5$  eine gute Approximation der Varianz des Stichprobenkorrelationskoeffizienten. Die Varianzen der betrachteten Schätzungen haben als Funktionen von  $g$  eine sehr ähnliche Gestalt und sind in guter Näherung symmetrisch in  $g$ . Bezüglich der Varianz und damit auch bezüglich der quadratischen Abweichung ist der Stichprobenkorrelationskoeffizient die beste und die Jackknife-Schätzung die schlechteste der betrachteten Schätzungen. Die Varianzen  $V(\underline{L}_n^{(i)})$ ,  $i = 1, 4, 8$ , sind größer als  $V(\underline{r}_n)$  und kleiner als  $V(\underline{J}_n)$ , wobei nur geringfügige Unterschiede zwischen den Schätzungen  $\underline{L}_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 4, 8$ , bestehen.

Für wachsenden Stichprobenumfang nähern sich die Varianz der Jackknife-Schätzung und mit ihr auch die Varianzen der Linearkombinations-Schätzungen der Varianz des Stichprobenkorrelationskoeffizienten. Für  $n = 20$  ist die Varianz  $V(\underline{J}_n)$  um höchstens 7 % und für  $n = 30$  um höchstens 4 % größer als die Varianz  $V(\underline{r}_n)$ .

Die Verteilungen der fünf Schätzungen sind einander sehr ähnlich. Dafür sprechen die Schätzwerte, die für die Schiefe und den Exzeß der Schätzungen erhalten wurden. Für  $n \geq 20$  unterscheiden sich die Zahlenwerte nur noch geringfügig voneinander. Das trifft insbesondere auf die Jackknife-Schätzung und die Linearkombinations-Schätzung zu. Die Schätzwerte für die Schiefe und den Exzeß der Schätzungen weisen für  $\rho$  nahe  $-1$  auf steilgipflige, linkssteile und rechtsschiefe Verteilungen, für  $\rho$  nahe Null auf leicht flachgipflige, annähernd symmetrische Verteilungen und für  $\rho$  nahe  $+1$  wieder auf steilgipflige, jetzt jedoch rechtssteile und linksschiefe Verteilungen hin. Mit wachsendem Stichprobenumfang nähern sich die Schätzwerte für Schiefe und Exzeß Null an.

Wir wollen die Ergebnisse zusammenfassen:

1. Für Stichprobenumfänge  $n \geq 20$  besitzt die Jackknife-Schätzung  $\underline{J}_n$  bei einer geringfügig größeren Varianz eine wesentlich geringere Verzerrung als der Stichprobenkorrelationskoeffizient.
2. Die Schätzung  $\underline{L}_n^{(1)}$  mit den zufälligen Koeffizienten  $c_n^{(1)}(\underline{J}_n)$  ist die beste der betrachteten Linearkombinations-Schätzungen. Sie hat gegenüber der Jackknife-Schätzung eine mehrfach geringere Verzerrung und auch eine kleinere Varianz, die aber immer noch geringfügig größer als die Varianz des Stichprobenkorrelationskoeffizienten ist. Für kleine Stichprobenumfänge  $n < 20$  sollte wegen der kleineren Varianz die Schätzung  $\underline{r}_n$  an Stelle des unbekanntes Parameters  $\rho$  in den Koeffizienten  $c_n^{(1)}(\rho)$  eingesetzt werden.
3. Für sehr kleine Stichprobenumfänge  $n < 10$  und für  $|\rho| \leq 0,4$  besitzt die Schätzung  $\underline{L}_n^{(4)}$  die geringste Verzerrung. Die Varianz dieser Schätzung ist aber bis zu 40 % größer als die Varianz des Stichprobenkorrelationskoeffizienten.

Dem Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf-Rostock sei für die Bereitstellung von Software und die Gewährung von Rechenzeit zur Programmerstellung gedankt. Insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. D. Rasch und Herrn Dipl.-Math. E. Schimke für ihre Unterstützung und ihre Hinweise.

## Literatur

- /1/ Gray, H. L., Watkins, T. A., and Schucany, W. R.: On the jackknifing statistic and its relation to UMVU estimators in the normal case. *Comm. Statist.* 2, 285-326 (1973)
- /2/ Kendall, M., and Stuart, A.: The advanced theory of statistics, Vol. II; Distribution theory. London 1962
- /3/ Olkin, I., and Pratt, J. W.: Unbiased estimation of certain correlation coefficients. *Ann. Math. Statist.* 29, 201 - 211 (1958)

## Anhang

Tabelle 1

n	$c_n^{(3)}$	$c_n^{(6)}$	$c_n^{(7)}$
5	0,1909	0,2885	0,2610
10	0,1160	0,1591	0,1384
15	0,0831	0,1080	0,0932
20	0,0647	0,0814	0,0702
25	0,0530	0,0652	0,0563
30	0,0448	0,0543	0,0470
40	0,0343	0,0407	0,0352
50	0,0278	0,0325	0,0282

Tabelle 2

n	$d_n$	N	$d'_n$	N'	N*	1- $\alpha$
5	$6 \cdot 10^{-3}$	18 792	$3 \cdot 10^{-3}$	115 848	250 000	0,167
10	$3 \cdot 10^{-3}$	33 408	$5 \cdot 10^{-4}$	1 408 373	140 000	0,618
20	$1 \cdot 10^{-3}$	142 423	$1 \cdot 10^{-4}$	15 221 391	30 000	0,002
30	$7 \cdot 10^{-4}$	190 432	$5 \cdot 10^{-5}$	38 966 760	30 000	0,063
50	$4 \cdot 10^{-4}$	345 157	$2 \cdot 10^{-5}$	142 060 000	30 000	0,887

**Tabelle 3** Verzerrung

n=5	$\rho$	$\underline{r}_n$	$\underline{J}_n$	$N^* = 250\ 000$		$(\cdot 10^{-3})$
				$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	
-0,9	30,8464	-28,2366	-8,4673	-17,1866	-12,5612	
-0,8	45,3613	-28,2828	-3,7814	-14,4274	-8,6996	
-0,7	51,3738	-24,5438	0,3961	-10,2347	-4,3528	
-0,6	51,7545	-19,6626	3,5200	-6,2488	-0,6846	
-0,5	48,1914	-15,0718	5,2159	-3,2245	1,7305	
-0,4	41,7957	-10,9421	5,8548	-1,0297	3,1019	
-0,3	33,1676	-7,5260	5,3251	0,1307	3,3064	
-0,2	22,9625	-4,8914	3,9071	0,3804	2,5718	
-0,1	11,7586	-2,4922	1,9818	0,1037	1,3048	
0,0	0,1947	-0,2651	-0,1052	-0,1127	-0,0999	
0,1	-11,2508	2,2811	-2,0083	-0,2480	-1,3322	
0,2	-22,2195	5,0749	-3,5329	-0,0881	-2,1846	
0,3	-32,3642	7,9193	-4,8301	0,3452	-2,7703	
0,4	-41,1658	11,1071	-5,5205	1,3323	-2,7609	
0,5	-47,9065	14,7074	-5,3698	3,0064	-1,8944	
0,6	-51,7241	18,9731	-3,9835	5,7893	0,1942	
0,7	-51,4399	23,5903	-1,0623	9,4674	3,6264	
0,8	-45,5744	27,4521	3,2292	13,7835	8,0606	
0,9	-31,0360	27,2981	7,7973	16,3185	11,7958	

n=10	$\rho$	$\underline{r}_n$	$\underline{J}_n$	$N^* = 140\ 000$		$(\cdot 10^{-3})$
				$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	
-0,9	11,0927	-4,1470	-1,3873	-2,3885	-1,9290	
-0,8	17,7929	-4,9550	-1,0787	-2,3302	-1,6443	
-0,7	21,2030	-4,5912	-0,4498	-1,6149	-0,8371	
-0,6	22,1039	-3,8809	0,0729	-0,8827	-0,0991	
-0,5	21,0939	-3,0318	0,4712	-0,2480	0,4794	
-0,4	18,6064	-2,1627	0,7381	0,2337	0,8600	
-0,3	15,0063	-1,3483	0,8668	0,5388	1,0320	
-0,2	10,6142	-0,5977	0,8889	0,6960	1,0340	
-0,1	5,7135	0,1302	0,8655	0,7744	0,9428	
0,0	0,5556	0,8420	0,8119	0,8089	0,8003	
0,1	-4,6223	1,5313	0,7309	0,8213	0,6357	
0,2	-9,5701	2,1914	0,6351	0,8343	0,5527	
0,3	-14,0123	2,8559	0,5740	0,9095	0,5249	
0,4	-17,6634	3,5658	0,6034	1,1163	0,6295	
0,5	-20,2165	4,3374	0,7699	1,5043	0,9235	
0,6	-21,3137	5,1250	1,0950	2,0744	1,4347	
0,7	-20,5247	5,7272	1,5062	2,6981	2,0250	
0,8	-17,3073	5,7818	1,8478	3,1177	2,4736	
0,9	-10,8901	4,4994	1,7136	2,7237	2,2293	

**Tabelle 3** Verzerrung (Fortsetzung)

n=20	N* = 30 000					(.10 <sup>-3</sup> )
	g	r <sub>n</sub>	J <sub>n</sub>	L <sub>n</sub> <sup>(1)</sup>	L <sub>n</sub> <sup>(4)</sup>	
-0,9	5,1300	-0,38966	0,17452	-0,02968	0,02293	
-0,8	8,4456	-0,45123	0,35774	0,12900	0,21379	
-0,7	10,2517	-0,41544	0,45140	0,28025	0,38192	
-0,6	10,8306	-0,33807	0,47796	0,39032	0,49677	
-0,5	10,4169	-0,25382	0,45352	0,44210	0,54381	
-0,4	9,2186	-0,18370	0,38908	0,42950	0,51911	
-0,3	7,4247	-0,12984	0,29985	0,36285	0,43485	
-0,2	5,2056	-0,08700	0,19923	0,25817	0,30862	
-0,1	2,7180	-0,04641	0,09869	0,13382	0,16016	
0,0	0,1045	0,00361	0,00945	0,01019	0,01115	
0,1	-2,4944	0,07404	-0,05947	-0,09347	-0,11795	
0,2	-4,9477	0,17024	-0,10474	-0,16354	-0,21232	
0,3	-7,1213	0,28939	-0,13003	-0,19391	-0,26455	
0,4	-8,8693	0,42723	-0,13736	-0,17907	-0,26768	
0,5	-10,0282	0,58522	-0,11696	-0,10695	-0,20811	
0,6	-10,4169	0,76026	-0,05461	0,03132	-0,07522	
0,7	-9,8416	0,92069	0,04854	0,21880	0,11622	
0,8	-8,0927	0,97075	0,14849	0,37966	0,29327	
0,9	-4,9254	0,73540	0,15715	0,36622	0,31227	

n=30	N* = 30 000					(.10 <sup>-3</sup> )
	g	r <sub>n</sub>	J <sub>n</sub>	L <sub>n</sub> <sup>(1)</sup>	L <sub>n</sub> <sup>(4)</sup>	
-0,9	3,0451	-0,36467	-0,11643	-0,20968	-0,19402	
-0,8	5,0670	-0,49648	-0,14236	-0,24359	-0,21804	
-0,7	6,2124	-0,49605	-0,12196	-0,19112	-0,16031	
-0,6	6,6118	-0,43270	-0,08688	-0,11250	-0,08015	
-0,5	6,3908	-0,34902	-0,05537	-0,04267	-0,01172	
-0,4	5,6690	-0,26935	-0,03695	0,00058	0,02785	
-0,3	4,5581	-0,20449	-0,03435	0,01199	0,03386	
-0,2	3,1617	-0,15560	-0,04510	-0,00481	0,01042	
-0,1	1,5772	-0,11821	-0,06415	-0,04115	-0,03336	
0,0	-0,1020	-0,08574	-0,08610	-0,08648	-0,08656	
0,1	-1,7839	-0,05147	-0,10628	-0,13022	-0,13818	
0,2	-3,3748	-0,00887	-0,12023	-0,16186	-0,17732	
0,3	-4,7777	0,04866	-0,12260	-0,17073	-0,19289	
0,4	-5,8903	0,12545	-0,10850	-0,14799	-0,17562	
0,5	-6,6048	0,21920	-0,07665	-0,09092	-0,12232	
0,6	-6,8100	0,31682	-0,03184	-0,00710	-0,03983	
0,7	-6,3859	0,39254	0,01528	0,08443	0,05330	
0,8	-5,2030	0,40991	0,05296	0,15478	0,12900	
0,9	-3,1175	0,31677	0,06681	0,16000	0,14490	

Tabelle 4      Varianz

n=5	N* = 250 000				
g	$\underline{r}_n$	$\underline{j}_n$	$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	$\underline{L}_n^{(8)}$
-0,9	0,0302	0,0577	0,0416	0,0477	0,0441
-0,8	0,0720	0,1190	0,0949	0,1035	0,0979
-0,7	0,1123	0,1776	0,1474	0,1577	0,1505
-0,6	0,1484	0,2309	0,1956	0,2073	0,1986
-0,5	0,1793	0,2771	0,2377	0,2504	0,2404
-0,4	0,2048	0,3156	0,2729	0,2863	0,2753
-0,3	0,2247	0,3459	0,3005	0,3146	0,3027
-0,2	0,2388	0,3676	0,3203	0,3348	0,3223
-0,1	0,2472	0,3807	0,3322	0,3470	0,3341
0,0	0,2499	0,3851	0,3362	0,3510	0,3380
0,1	0,2470	0,3808	0,3323	0,3470	0,3341
0,2	0,2386	0,3676	0,3203	0,3348	0,3223
0,3	0,2247	0,3459	0,3006	0,3146	0,3027
0,4	0,2051	0,3157	0,2730	0,2865	0,2754
0,5	0,1798	0,2772	0,2380	0,2506	0,2407
0,6	0,1488	0,2312	0,1961	0,2077	0,1990
0,7	0,1127	0,1778	0,1478	0,1580	0,1508
0,8	0,0725	0,1192	0,0953	0,1038	0,0982
0,9	0,0305	0,0576	0,0419	0,0477	0,0443

n=10	N* = 140 000				
g	$\underline{r}_n$	$\underline{j}_n$	$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	$\underline{L}_n^{(8)}$
-0,9	0,0068	0,0072	0,0069	0,0070	0,0070
-0,8	0,0212	0,0228	0,0220	0,0223	0,0222
-0,7	0,0382	0,0420	0,0407	0,0411	0,0409
-0,6	0,0552	0,0618	0,0601	0,0606	0,0603
-0,5	0,0711	0,0807	0,0787	0,0791	0,0787
-0,4	0,0848	0,0975	0,0951	0,0955	0,0950
-0,3	0,0960	0,1112	0,1086	0,1089	0,1083
-0,2	0,1041	0,1214	0,1186	0,1188	0,1182
-0,1	0,1091	0,1276	0,1248	0,1249	0,1242
0,0	0,1107	0,1297	0,1269	0,1270	0,1263
0,1	0,1091	0,1276	0,1248	0,1250	0,1243
0,2	0,1040	0,1214	0,1186	0,1188	0,1182
0,3	0,0958	0,1111	0,1086	0,1088	0,1082
0,4	0,0846	0,0972	0,0949	0,0953	0,0948
0,5	0,0708	0,0804	0,0783	0,0788	0,0783
0,6	0,0549	0,0615	0,0598	0,0603	0,0598
0,7	0,0378	0,0416	0,0403	0,0408	0,0405
0,8	0,0210	0,0226	0,0218	0,0221	0,0219
0,9	0,0068	0,0072	0,0068	0,0070	0,0069

**Tabelle 4** Varianz (Fortsetzung)

n=20		N* = 30 000			
$g$	$\underline{r}_n$	$\underline{J}_n$	$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	$\underline{L}_n^{(8)}$
-0,9	0,00247	0,00237	0,00237	0,00237	0,00237
-0,8	0,00834	0,00823	0,00820	0,00822	0,00822
-0,7	0,01590	0,01602	0,01596	0,01599	0,01599
-0,6	0,02400	0,02459	0,02448	0,02452	0,02451
-0,5	0,03185	0,03305	0,03291	0,03295	0,03293
-0,4	0,03888	0,04075	0,04058	0,04060	0,04058
-0,3	0,04468	0,04719	0,04700	0,04699	0,04696
-0,2	0,04897	0,05199	0,05180	0,05177	0,05173
-0,1	0,05157	0,05493	0,05474	0,05468	0,05464
0,0	0,05239	0,05586	0,05568	0,05560	0,05557
0,1	0,05141	0,05476	0,05456	0,05451	0,05447
0,2	0,04868	0,05168	0,05149	0,05145	0,05142
0,3	0,04430	0,04678	0,04659	0,04658	0,04656
0,4	0,03845	0,04030	0,04013	0,04015	0,04012
0,5	0,03141	0,03258	0,03244	0,03248	0,03246
0,6	0,02358	0,02413	0,02402	0,02406	0,02406
0,7	0,01555	0,01562	0,01556	0,01559	0,01559
0,8	0,00812	0,00796	0,00794	0,00796	0,00796
0,9	0,00240	0,00228	0,00228	0,00228	0,00228

n=30		N* = 30 000			
$g$	$\underline{r}_n$	$\underline{J}_n$	$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	$\underline{L}_n^{(8)}$
-0,9	0,00146	0,00140	0,00141	0,00141	0,00141
-0,8	0,00506	0,00497	0,00496	0,00497	0,00497
-0,7	0,00986	0,00983	0,00982	0,00983	0,00983
-0,6	0,01515	0,01530	0,01528	0,01529	0,01529
-0,5	0,02039	0,02079	0,02075	0,02076	0,02076
-0,4	0,02515	0,02584	0,02580	0,02581	0,02580
-0,3	0,02914	0,03012	0,03007	0,03007	0,03006
-0,2	0,03213	0,03335	0,03330	0,03328	0,03328
-0,1	0,03400	0,03535	0,03531	0,03529	0,03528
0,0	0,03464	0,03604	0,03599	0,03597	0,03596
0,1	0,03402	0,03537	0,03532	0,03530	0,03529
0,2	0,03218	0,03336	0,03332	0,03330	0,03330
0,3	0,02919	0,03013	0,03009	0,03009	0,03008
0,4	0,02520	0,02586	0,02582	0,02582	0,02582
0,5	0,02044	0,02081	0,02077	0,02078	0,02078
0,6	0,01521	0,01533	0,01530	0,01532	0,01532
0,7	0,00992	0,00987	0,00986	0,00987	0,00987
0,8	0,00510	0,00500	0,00500	0,00500	0,00500
0,9	0,00147	0,00142	0,00142	0,00142	0,00142

Fortsetzung von Tabelle 4 auf Seite 120

**Tabelle 5** Schiefe

**1. Stichprobenkorrelationskoeffizient  $r_n$**

$g$	$n=5$	$n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=50$
-0,9	3,602	2,331	1,451	1,125	0,818
-0,8	2,324	1,750	1,198	0,951	0,704
-0,7	1,715	1,381	0,990	0,807	0,600
-0,6	1,316	1,094	0,813	0,676	0,502
-0,5	1,015	0,860	0,658	0,554	0,401
-0,4	0,767	0,659	0,517	0,438	0,320
-0,3	0,553	0,479	0,384	0,326	0,235
-0,2	0,360	0,312	0,258	0,218	0,152
-0,1	0,177	0,152	0,134	0,112	0,070
0,0	-0,000	-0,003	0,012	0,008	-0,011
0,1	-0,179	-0,158	-0,111	-0,096	-0,092
0,2	-0,363	-0,316	-0,236	-0,199	-0,172
0,3	-0,558	-0,481	-0,364	-0,305	-0,253
0,4	-0,772	-0,659	-0,496	-0,414	-0,335
0,5	-1,018	-0,858	-0,635	-0,532	-0,418
0,6	-1,317	-1,089	-0,786	-0,660	-0,505
0,7	-1,719	-1,373	-0,954	-0,803	-0,595
0,8	-2,339	-1,754	-1,153	-0,960	-0,694
0,9	-3,625	-2,377	-1,411	-1,134	-0,804

**2. Jackknife-Schätzung  $J_n$**

$g$	$n=5$	$n=10$	$n=20$	$n=30$	$n=50$
-0,9	0,934	2,052	1,462	1,148	0,827
-0,8	1,253	1,677	1,224	0,980	0,716
-0,7	1,140	1,368	1,020	0,834	0,612
-0,6	0,969	1,099	0,840	0,699	0,513
-0,5	0,794	0,871	0,680	0,573	0,418
-0,4	0,621	0,671	0,533	0,453	0,328
-0,3	0,458	0,490	0,395	0,337	0,241
-0,2	0,301	0,320	0,263	0,225	0,156
-0,1	0,147	0,157	0,135	0,116	0,072
0,0	-0,003	-0,002	0,009	0,007	-0,010
0,1	-0,153	-0,159	-0,118	-0,100	-0,092
0,2	-0,306	-0,319	-0,248	-0,208	-0,174
0,3	-0,462	-0,487	-0,381	-0,318	-0,256
0,4	-0,626	-0,667	-0,520	-0,432	-0,339
0,5	-0,799	-0,864	-0,554	-0,553	-0,424
0,6	-0,978	-1,086	-0,818	-0,686	-0,511
0,7	-1,166	-1,343	-0,988	-0,832	-0,601
0,8	-1,315	-1,656	-1,190	-0,990	-0,699
0,9	-1,100	-2,077	-1,458	-1,157	-0,808

**Tabelle 6 Exzeß**

**1. Stichprobenkorrelationskoeffizient  $r_n$**

g	n=5	n=10	n=20	n=30	n=50
-0,9	18,689	9,820	3,782	2,490	1,243
-0,8	6,763	4,855	2,391	1,597	0,877
-0,7	3,132	2,730	1,500	1,057	0,606
-0,6	1,406	1,474	0,887	0,667	0,389
-0,5	0,421	0,683	0,463	0,371	0,217
-0,4	-0,193	0,173	0,165	0,148	0,084
-0,3	-0,583	-0,164	-0,045	-0,016	-0,014
-0,2	-0,825	-0,380	-0,185	-0,130	-0,080
-0,1	-0,958	-0,500	-0,265	-0,200	-0,118
0,0	-0,999	-0,539	-0,292	-0,229	-0,131
0,1	-0,955	-0,501	-0,267	-0,219	-0,119
0,2	-0,820	-0,383	-0,189	-0,169	-0,084
0,3	-0,575	-0,170	-0,052	-0,073	-0,023
0,4	-0,185	0,164	0,149	0,080	0,065
0,5	0,426	0,672	0,431	0,306	0,184
0,6	1,410	1,448	0,826	0,627	0,341
0,7	3,168	2,700	1,392	1,064	0,546
0,8	6,888	4,990	2,282	1,628	0,816
0,9	18,964	10,555	3,933	2,430	1,181

**2. Jackknife-Schätzung  $J_n$**

g	n=5	n=10	n=20	n=30	n=50
-0,9	11,786	10,351	3,828	2,606	1,279
-0,8	5,437	5,282	2,489	1,711	0,914
-0,7	2,935	3,042	1,595	1,145	0,632
-0,6	1,570	1,684	0,958	0,728	0,406
-0,5	0,722	0,822	0,510	0,408	0,225
-0,4	0,159	0,266	0,189	0,168	0,087
-0,3	-0,207	-0,099	-0,038	-0,008	-0,014
-0,2	-0,443	-0,333	-0,191	-0,129	-0,083
-0,1	-0,574	-0,466	-0,279	-0,203	-0,122
0,0	-0,615	-0,511	-0,308	-0,233	-0,135
0,1	-0,572	-0,473	-0,282	-0,221	-0,123
0,2	-0,441	-0,347	-0,196	-0,165	-0,086
0,3	-0,207	-0,116	-0,046	-0,059	-0,023
0,4	0,164	0,242	0,174	0,106	0,068
0,5	0,730	0,782	0,480	0,349	0,190
0,6	1,587	1,605	0,897	0,691	0,349
0,7	3,002	2,913	1,494	1,154	0,553
0,8	5,643	5,258	2,474	1,747	0,825
0,9	12,444	11,060	4,438	2,533	1,197

**Tabelle 4** Varianz (Fortsetzung)

p	N* = 30 000				
	$\underline{r}_n$	$\underline{j}_n$	$\underline{L}_n^{(1)}$	$\underline{L}_n^{(4)}$	$\underline{L}_n^{(8)}$
-0,9	0,00080	0,00078	0,00079	0,00079	0,00079
-0,8	0,00283	0,00279	0,00279	0,00279	0,00279
-0,7	0,00559	0,00556	0,00556	0,00556	0,00556
-0,6	0,00868	0,00870	0,00870	0,00870	0,00870
-0,5	0,01179	0,01189	0,01188	0,01188	0,01188
-0,4	0,01465	0,01485	0,01484	0,01484	0,01484
-0,3	0,01708	0,01738	0,01737	0,01737	0,01737
-0,2	0,01892	0,01930	0,01930	0,01929	0,01929
-0,1	0,02007	0,02051	0,02050	0,02050	0,02050
0,0	0,02047	0,02093	0,02092	0,02092	0,02092
0,1	0,02009	0,02054	0,02053	0,02052	0,02052
0,2	0,01895	0,01935	0,01934	0,01933	0,01933
0,3	0,01712	0,01743	0,01742	0,01742	0,01742
0,4	0,01469	0,01490	0,01489	0,01489	0,01489
0,5	0,01181	0,01192	0,01191	0,01192	0,01192
0,6	0,00869	0,00872	0,00871	0,00872	0,00872
0,7	0,00559	0,00556	0,00556	0,00556	0,00556
0,8	0,00283	0,00279	0,00279	0,00279	0,00279
0,9	0,00080	0,00078	0,00078	0,00078	0,00078

eingegangen: 18. 07. 1986

Verfasser:

Dipl.-Math. U. Lorz  
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock  
 Sektion Mathematik  
 Universitätsplatz 1  
 Rostock  
 DDR-2500

## Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linkebündig zu schreiben. Eine Auenahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und die Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Kostock, Math. Kolloq. / Leerzeile / Vorname Name / Leerzeile / Titel der Arbeit / 1 Zeilenumschaltung / Unterreichung / Leerzeile. Der Text der Arbeit ist einspaltig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen / Zwischenüberschrift / Unterreichung (ohne Zeilenumschaltung) / 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperrn möglich. Anmerkungen wie Setz, Definition, Bemerkung, Beweis u. s. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Setzpiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben einzuplanen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgewählten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- /8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reicherdt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum, Leerzeile/ Verfasser: Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Ort/ Land-Postleitzahl.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags von Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

## Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

- Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg ISSN 0518-3189
- Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge ISSN 0138-3299
- Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte ISSN 0232-3066
- Rostocker Mathematisches Kolloquium ISSN 0138-3248
- Rostocker Philosophische Manuskripte ISSN 0557-3599
- Rostocker Physikalische Manuskripte ISSN 0138-3140
- Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte ISSN 0138-3191
- Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerikawissenschaften ISSN 0458-7944
- Erziehungswissenschaftliche Beiträge ISSN 0138-2373
- Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus ISSN 0138-3396
- Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock ISSN 0232-539X
- Beiträge zur Geschichte der FDJ ISSN 0233-0830
- Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus ISSN 0233-0636
- Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogik ISSN 0233-0539
- Rostocker Informatik-Berichte ISSN 0233-0784
- Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen ISSN 0233-0687
- Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft ISSN 0233-0644
- Rostocker Universitätsreden

## Bezugsmöglichkeiten

Die Hefte sind im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Es bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010