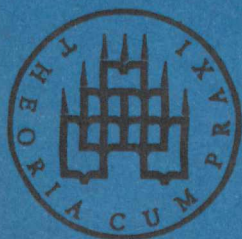


Rostocker
Mathematisches Kolloquium

Heft 34



**Wilhelm-Pieck-Universität
Rostock**

Information

Rostocker Informatik-Berichte

Diese Schriftenreihe der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock erscheint seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor:

- Heft 1 (1985) 20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung
- Heft 2 (1985) DIGRA'84
(Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)
- Heft 3 (1986) Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinatn der DDR
- Heft 4 (1986) Arbeiten aus der Sektion Informatik
- Heft 5 (1987) Beiträge des Problemseminars "Graphisch-Interaktive Systeme"

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 34

**Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik**

1988

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Gustav Burosch
(Sektionsdirektor)
Prof. Dr. Gerhard Maeß
Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Klaus-Dieter Drews
Herstellung der Druckvorlage: Dorothea Meyer
Dipl.-I. Andreas Straßburg

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Redaktionsschluß: 31. 01. 1988

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Außerdem bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR- 2500
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1988) 34

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Abteilung Wissenschaftspublizistik
Vogelsang 13/14, Telefon 369 577, Rostock, DDR-2500
Genehmigungs-Nr.:

Druck: Ostsee-Druck Rostock BT Ribnitz II-15-14 · 0,50

01000

Engel, Konrad	Das Stammbaumproblem	5
Drews, Klaus-Dieter	Angebote zu ersten Verallgemeinerungen von Sätzen der elementaren Integralrechnung	13
Labahn, Roger	More on a relation between binomial coefficients	21
Weber, Karl	On the number of stable sets in a $m \times n$ lattice	28
Engel, Konrad; Gronau, Hans-Dietrich O.F.	On $2-(6, 3, \lambda)$ -designs	37
Harnau, Walter	Mendelsohnsche Schnittzahlen und die Nichtexistenz von $5-(19, 9, 7)$ -Blockplänen	47
Dassow, Jürgen	Convexity and Simplicity of Chain Code Picture Languages	53
Dassow, Jürgen	Subregularly Controlled Derivations: Context-Free Case	61
Lau, Dietlinde	Maximale Klassen von $P_k(1)$	71
Storm, Joachim	Über ein Steuerungsproblem für endliche stochastische zellulare Systeme	78

Autorreferate von Dissertationen

Klipps, Bernd	Über Vasil'ev-Schönheim-Codes und Abbildungen auf endlichen Mengen	85
Weitendorf, Jochen	Eigenschaften des Tangentialkegels bei "äquisingulären Projektionen" algebroider Hyperflächen	87

Konrad Engel

Das Stammbaumproblem

Meinem Doktorvater Prof. G. Burosch zu seinem 50. Geburtstag und dessen Doktorvater Prof. W. Engel sowie seiner Frau H. Engel zu ihrem 60. Geburtstag gewidmet

In diesem Artikel beschäftigen wir uns mit Fragen der Übermittlung und eindeutigen Erkennung von Stammbäumen. Stammbäume sind gerichtete Wurzelbäume - d. h. Bäume mit einem ausgezeichneten Knoten, der Wurzel - bei denen die Kanten von der Wurzel weg zeigen, d. h. der Anfangsknoten auf der eindeutig bestimmten Kette vom Endknoten zur Wurzel liegt (wir verwenden die Begriffe entsprechend dem Buch /2/). In den Abbildungen sei jede Kante in Richtung des tiefergelegenen Endpunktes orientiert.

Wählt man z. B. einen festen Mathematiker, betrachtet dessen sämtliche Doktoranden, deren sämtliche Doktoranden usw. und zieht eine Kante von einem Mathematiker A zu einem Mathematiker B genau dann, wenn B Doktorand von A ist, so entsteht offenbar ein Stammbaum.

Für je zwei Knoten in einem Stammbaum $S = (V, E)$, $V = V(S)$ = Menge der Knoten, $E = E(S)$ = Menge der Kanten, kann ein Verwandtschaftsverhältnis definiert werden: Für $v, w_1, \dots, w_m,$

$x_1, \dots, x_{m+n} \in V$ und $(v, w_1), (w_1, w_2), \dots, (w_{m-1}, w_m), (v, x_1),$

$(x_1, x_2), \dots, (x_{m+n-1}, x_{m+n}) \in E$ (siehe Abb. 1) heißt w_m ein

(n,m)-Onkel von x_{m+n} ($n, m \in \mathbb{N}$, $n+m \neq 0$). Dasselbe Verwandtschaftsverhältnis wird durch " x_{m+n} ist (n,m)-Neffe von w_m " gegeben.

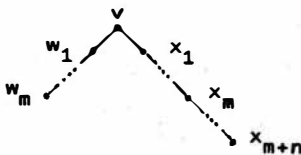


Abb.1

Ist x ein $\left\{ \begin{array}{l} (0,1)\text{-Onkel (Neffe)} \\ (1,0)\text{-Onkel (Neffe)} \\ (2,0)\text{-Onkel (Neffe)} \\ (1,1)\text{-Onkel (Neffe)} \end{array} \right\}$ von y , so heißt x auch

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bruder} \\ \text{Vater} \\ \text{Großvater} \\ \text{Onkel} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{Sohn}) \\ (\text{Enkel}) \\ (\text{Neffe}) \end{array}$ von y .

In dem in Abb. 2 dargestellten Stammbaum ist z. B. BURO Vater von KENG, WENG Großvater von KENG, GRON Bruder von KENG, NESZ Onkel von KENG und WEIT (0,2)-Onkel von KENG.

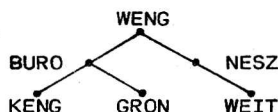


Abb. 2

Stammbäume treten außerdem auf, wenn man alle Nachkommen eines Ehepaares betrachtet, wobei man o.B.d.A. den Ehemann als Wurzel festlegt. In einem Langzeitversuch, bei dem alle zu Beginn des Artikels genannten Personen beteiligt waren, wurde verifiziert, daß es möglich ist, gleichzeitig Großvater im zuerst genannten Sinn und Vater im eben genannten Sinn ein und desselben Individuums zu sein.

Ein Stammbaum S sei nun einer Person A bekannt. Die Person B kenne jedoch nur die Knotenmenge von S , möchte aber auch die Kantenmenge, d. h. den gesamten Stammbaum, kennenlernen. A gibt dazu B mehrere Auskünfte der Form " x ist (i,j) -Onkel von y ". Sei $a(S)$ die minimale Anzahl von solchen Auskünften, so daß B den Stammbaum eindeutig ermitteln kann, d. h. S eindeutig bestimmt ist. Gesucht sind die Werte

$$m(n) := \min \{a(S) : S \text{ ist Stammbaum mit } n \text{ Knoten}\},$$

$$M(n) := \max \{a(S) : S \text{ ist Stammbaum mit } n \text{ Knoten}\}.$$

Das eben genannte Problem kann folgendermaßen modifiziert werden: Es sei die Situation von oben gegeben, jedoch kenne B auch noch die Struktur von S , d. h. einen zu S isomorphen Graphen, ohne daß der Isomorphismus bekannt ist. Beispielsweise kann B über die Struktur von S in Form einer Abbildung verfügen, bei

der die Knoten noch nicht bezeichnet wurden. Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ die Knotenmenge von S , so soll B die unbezeichneten Knoten mit v_1, \dots, v_n bezeichnen, so daß genau der richtige Stammbaum S entsteht. In zu oben analoger Weise können wir dann die Zahlen $a_G(S)$, $m_G(n)$, $M_G(n)$ definieren, und das Problem besteht in der Ermittlung von $m_G(n)$ und $M_G(n)$.

Satz 1: Es gilt $m(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ für alle $n \geq 1$.

Beweis: Wir weisen zunächst $m(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ nach. Dazu betrachten wir den in Abb. 3 gegebenen Stammbaum S .

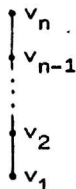


Abb. 3

Die $\lfloor n/2 \rfloor$ Auskünfte " v_{n+1-i} ist $(n-2i, 0)$ -Onkel von v_i " ($i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$) sind für B ausreichend, denn mit der ersten Auskunft über v_1 und v_n ist S eindeutig als Weg mit Anfangsknoten v_n und Endknoten v_1 festgelegt, mit der zweiten Auskunft sind entsprechend v_{n-1} und v_2 festgelegt, usw. Also gilt $m(n) \leq a(S) \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Zum Nachweis von $m(n) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ nehmen wir an, es würde einen Stammbaum S mit n Knoten und $a(S) < \lfloor n/2 \rfloor$ geben. Dann existieren zwei Knoten x und y , über die bei den entsprechenden $a(S)$ Auskünften nichts gesagt wird. Falls x und y Brüder sind und beide keine Söhne haben, sei S' der Stammbaum, der aus S dadurch entsteht, daß y zum Sohn von x gemacht wird. Andernfalls sei S' der Stammbaum, der aus S durch Vertauschung von x und y entsteht. Dann sind S und S' verschieden, und die $a(S)$ Auskünfte über S treffen gleichermaßen auf S' zu. Also kann B den Stammbaum nicht eindeutig bestimmen, ein Widerspruch. \square

Satz 2: Es gilt $M(n) = n-2$ für alle $n \geq 3$.

Beweis: Wir zeigen $M(n) \leq n-2$ für $n \geq 3$. Dazu sei S ein beliebiger Stammbaum mit n Knoten.

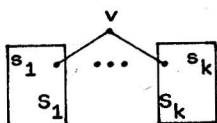


Abb. 4

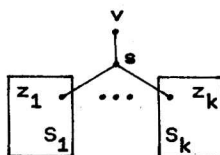


Abb. 5

1. Fall: S hat die in Abb. 4 gegebene Struktur, d. h., der Wurzelknoten v hat $k \geq 2$ Söhne s_1, \dots, s_k , die wiederum Wurzeln der Stammbäume S_1, \dots, S_k sind. Für jeden Baum S_i reichen offenbar $|V(S_i)| - 1$ Auskünfte, denn der Baum S_i hat bekanntlich $|V(S_i)| - 1$ Kanten, und diese können durch eine "Vater-Sohn-Beziehung" übermittelt werden. Fügen wir noch die Auskünfte " s_1 ist Bruder von s_i ", $i = 2, \dots, k$, hinzu, so ist der verbleibende Knoten v eindeutig als Wurzelknoten festgelegt, und S ist eindeutig bestimmt. Also gilt

$$a(S) \leq \sum_{i=1}^k (|V(S_i)| - 1) + k - 1 = \left(\sum_{i=1}^k |V(S_i)| \right) - 1 = n - 2.$$

2. Fall: S hat die in Abb. 5 gegebene Struktur, d. h., der Wurzelknoten v hat genau einen Sohn s , dieser hat $k \geq 1$ Söhne z_1, \dots, z_k , die wiederum Wurzeln der Stammbäume S_1, \dots, S_k sind. Wie oben reichen zur Festlegung von S_i , $i = 1, \dots, k$, $|V(S_i)| - 1$ Auskünfte. Mit den k Auskünften " v ist Großvater von z_1 ", $i = 1, \dots, k$, ist der verbleibende Knoten s eindeutig als Vater von z_1, \dots, z_k und Sohn von v festgelegt, und S ist eindeutig bestimmt. Also gilt

$$a(S) \leq \sum_{i=1}^k (|V(S_i)| - 1) + k = \sum_{i=1}^k |V(S_i)| = n - 2.$$

Zum Nachweis von $M(n) \geq n-2$ für $n \geq 3$, betrachten wir den in Abb. 6 gegebenen Stammbaum S und nehmen an, es gäbe eine Menge X von weniger als $n-2$ Auskünften zur eindeutigen Bestimmung von S .

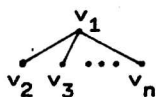


Abb. 6

Wir konstruieren folgenden ungerichteten Graphen G : Es sei $V(G) = V(S)$ und $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ genau dann, wenn in X eine Auskunft über v_i und v_j gemacht wird. Dann enthält G weniger als $n-2$ Kanten, besteht also aus mindestens drei Zusammenhangskomponenten (siehe z. B. /1, Problem 6.1/). Seien o.B.d.A. v_h, \dots, v_n die Knoten einer Zusammenhangskomponente, $h \geq 3$.

Dann können über v_h, \dots, v_n in X nur Auskünfte der Form " v_i ist Bruder von v_j ", $h \leq i, j \leq n, i \neq j$, gemacht worden sein, und die in X gemachten Auskünfte treffen genauso auf den in Abb. 7 dargestellten Stammbaum S' zu, der von S verschieden ist, ein Widerspruch. \square

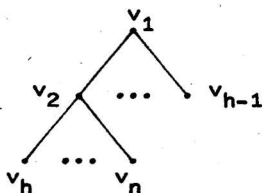


Abb. 7

Wir gehen nun zum eingangs erwähnten modifizierten Fall über, daß der Person B der Stammbaum als unnumerierter Graph vorgegeben ist.

Satz 3: Es gilt $m_G(n) = 1$ für alle $n \geq 2$.

Beweis: Für den in Abb. 6 gegebenen Stammbaum S reicht B die Auskunft " v_1 ist Vater von v_2 ", denn bei vorgegebener Struktur von S sind notwendigerweise die restlichen Knoten von S die Brüder von v_2 . \square

Die Ermittlung von $M_G(n)$ erweist sich als wesentlich schwieriger und ist uns nicht exakt gelungen. Natürlich ist $M_G(n) \leq M(n) = n-2$, da ja im modifizierten Fall B mehr Informationen besitzt. Daß $M_G(n)$ i. allg. nicht wesentlich kleiner als $M(n)$ ist, zeigt der nachstehende Satz 4, für dessen Beweis wir zunächst einige Begriffe und Bezeichnungen benötigen.

Ist G ein gerichteter Graph und f eine Funktion, $f : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$, so nennen wir G einen mit f kantenbewerteten Graphen. Der mit f kantenbewertete Graph G und der mit f' kantenbewertete Graph G' heißen zueinander bewertungsisomorph, wenn es eine bijektive Abbildung φ von $V(G)$ auf $V(G')$ gibt, so daß $(x,y) \in E(G)$ genau dann gilt, wenn $(\varphi(x), \varphi(y)) \in E(G')$ ist, und $f(x,y) = f'(\varphi(x), \varphi(y))$ für alle Kanten $(x,y) \in E(G)$ gilt. Sei $b(n,k)$ die (offenbar endliche) Anzahl aller Bewertungsisomorphieklassen in der Menge aller kantenbewerteten Graphen mit höchstens n Knoten, bei denen die Bewertungsfunktion höchstens die Werte $1, \dots, k$ annimmt.

Satz 4: Es gilt $M_G(n) \sim n$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis: Es ist zu beweisen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} M_G(n)/n = 1$ ist. Wegen

$M_G(n) \leq M(n) < n$ reicht es aus zu zeigen, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß $M_G(n) \geq (1-\varepsilon)n$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben, $k = k(\varepsilon)$ eine feste natürliche Zahl größer als $2/\varepsilon$ und $n_0(\varepsilon) = (k-1)b(k-1, (k+2)^2)$. Wir müssen zeigen, daß es für jedes $n > n_0(\varepsilon)$ einen Stammbaum S gibt, für den $a_G(S) \geq (1-\varepsilon)n$ gilt. Sei $n > n_0(\varepsilon)$ fest, $n = qk+r$, $q, r \in \mathbb{N}$, $0 < r \leq k$. Weiter sei S der in Abb. 8 gegebene Stammbaum.

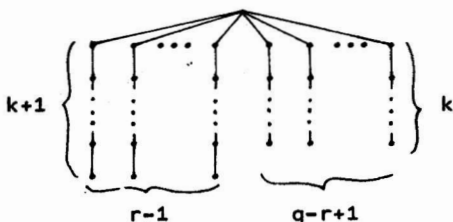


Abb. 8

Man beachte, daß $b(k-1, (k+2)^2) \geq (k+2)^2 \geq k$ ist, so daß $n > n_0(\varepsilon) \geq (k-1)k$, also $q \geq k-1 \geq r-1$ und damit $q-r+1 \geq 0$ folgt. Angenommen, es gäbe eine Menge X von weniger als $(1-\varepsilon)n$ Auskünften, so daß B den Stammbaum, also die Bezeichnung der Knoten, eindeutig bestimmen kann. Wir konstruieren folgenden kantenbewerteten Graphen G . Es sei $V(G) = V(S)$, $(x, y) \in E(G)$ genau dann, wenn in X eine Auskunft "x ist (i, j) -Onkel von y " enthalten ist, und (x, y) bekomme dann die Bewertung $(k+2)i+j$. Offenbar gilt $i, j \leq k+1$, $i+j \neq 0$, also kann man eindeutig aus einer bewerteten Kante in G auf die Auskunft zurückschließen. Somit ist X durch G eindeutig gegeben. Ferner nimmt die Bewertungsfunktion höchstens die Werte $1, \dots, (k+2)^2$ an. In G seien a_i Zusammenhangskomponenten mit genau i Knoten vorhanden, $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n i a_i = n. \quad (1)$$

Da jede Zusammenhangskomponente mit i Knoten wenigstens $i-1$ Kanten enthält, gilt

$$\sum_{i=1}^n (i-1) a_i \leq |E(G)| = |X| < n(1-\varepsilon). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$n - \sum_{i=1}^n a_i < n(1-\varepsilon),$$

also

$$-k \sum_{i=1}^{k-1} a_i - k \sum_{i=k}^n a_i < -nk\epsilon < -2n. \quad (3)$$

Wegen (1) gilt ferner

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i + k \sum_{i=k}^n a_i \leq n, \quad (4)$$

und aus Addition von (3) und (4) erhält man

$$(1-k) \sum_{i=1}^{k-1} a_i < -n, \quad \sum_{i=1}^{k-1} a_i > \frac{n}{k-1} > \frac{n_0(\delta)}{k-1} = b(k-1, (k+2)^2).$$

Somit gibt es in G mehr als $b(k-1, (k+2)^2)$ kantzenbewertete Zusammenhangskomponenten mit höchstens $k-1$ Knoten, wobei jede Bewertungsfunktion höchstens die Werte $1, \dots, (k+2)^2$ annimmt. Nach Definition von $b(k-1, (k+2)^2)$ folgt, daß es in G zwei bewertungsisomorphe Zusammenhangskomponenten K_1 und K_2 gibt. Sei $\varphi: V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ die entsprechende bijektive Abbildung und S' der Stammbaum, der aus S durch paarweise Vertauschung der Knoten x und $\varphi(x)$ für alle $x \in K_1$ entsteht. Da höchstens $k-1$ Knoten vertauscht werden, ist S' von S verschieden. Jedoch treffen die Auskünfte der Menge X genauso auf S' wie auf S zu. Damit kann S nicht eindeutig bestimmt werden, ein Widerspruch. \square

Literatur

- /1/ Lovasz, L.: Combinatorial problems and exercises.
Budapest 1979
- /2/ Walther, H., und Nägler, G.: Graphen Algorithmen Programme.
Leipzig 1987

eingegangen: 14. 08. 1987

Verfasser:

Doz. Dr. Konrad Engel
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Klaus-Dieter Drews

Angebote zu ersten Verallgemeinerungen von Sätzen der elementaren Integralrechnung

Meinem verehrten Lehrer, Prof. Dr. Wolfgang Engel, dem Förderer der Bindungen zwischen Hochschule und Schule, zum 60. Geburtstag gewidmet

Vorbemerkungen

"Das Riemannsche Integral ist eine Episode", so sagte ein kompetenter Analytiker zu mir. Gleichwohl lernen Generationen von Schülern, von Studenten, insonderheit auch Lehrerstudenten weiterhin lediglich diesen Integralbegriff kennen, und oft genug fehlen - wenn schon eine präzise Definition gegeben wird - Herleitungen für wichtige seiner Eigenschaften, hierunter evtl. auch der Nachweis, daß jedenfalls stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind. Wenn man nun für Abiturienten, Lehrerstudenten oder auch Studenten mit dem Nebenfach Mathematik die Theorie bis zu der bezeichneten Stelle behandeln kann, und an Lehrende dieser Bereiche wenden sich meine Ausführungen vorrangig, so besteht doch innerhalb solcher Grundkurse kaum die Möglichkeit, modernere Integralbegriffe (wie etwa in /1/) darzustellen oder die Riemann-Integrierbarkeit zu charakterisieren (eine elementare Ausführung ist enthalten in /2/). Vielleicht sind dahingegen erste Schritte, die Voraussetzung der Stetigkeit im ganzen Integrationsintervall abzuschwächen, vom Aufwand her möglich und zu empfehlen, weil damit mehrere Effekte erzielt werden können:

Man unterstützt das eigentliche Anliegen, nämlich ein eingehenderes Beschäftigen mit dem vorliegenden Integralbegriff, man gewinnt hierzu Übungsmaterial, und man erfaßt Funktionen, die eben nicht überall stetig sind, die aber durchaus schon in der Schule auftreten können. Für diese Zwecke enthalten nachfolgend

zusammengestellte Aussagen, die sich mit der Riemann-Integrierbarkeit und den Hauptsätzen der Differential- und Integralrechnung befassen und die natürlich bekannte mathematische Sachverhalte beinhalten, Angebote.

Zur Verständigung sind kurz einige Bezeichnungen und Vorleistungen zu klären. Es sei $I (= [a, b])$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall der reellen Zahlen. Reelle Funktionen f , die wir betrachten, seien in I , evtl. unter Ausnahme einer Menge N , definiert und seien im Definitionsbereich beschränkt, dies grundsätzlich durch die Konstante K . Ist \mathcal{Z} eine Zerlegung von I und sind in jedem dadurch gegebenen abgeschlossenen Teilintervall l_v ($v=1, \dots, k$) die Zahlen M_v, m_v obere bzw. untere Grenze von f , dann gelangt man zur Ober- und Untersumme von f

bez. \mathcal{Z} :

$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{v=1}^k M_v \mu(l_v), \quad \underline{S}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{v=1}^k m_v \mu(l_v),$$

wobei noch $\mu(l_v)$ die Länge von l_v bedeute. Gilt nun

$$\inf_{\mathcal{Z}} \overline{S}(f, \mathcal{Z}) = \sup_{\mathcal{Z}} \underline{S}(f, \mathcal{Z}),$$

so heißt f über I integrierbar im Riemannschen Sinne und der gemeinsame Wert das Riemannsche Integral $\int_a^b f(x) dx$; wir werden fortan kurz von Integrierbarkeit sowie Integral sprechen. Als Vorleistungen für das Weitere müssen u. a. folgende Aussagen bekannt sein:

- Ist f in I stetig, so ist f über I integrierbar.
- Das Riemannsche Integrabilitätskriterium: Die beschränkte Funktion f ist genau dann über I integrierbar, wenn es zu jedem positiven ϵ eine Zerlegung \mathcal{Z} von I mit $\overline{S}(f, \mathcal{Z}) - \underline{S}(f, \mathcal{Z}) < \epsilon$ gibt.
- Ist eine Funktion H in einem abgeschlossenen Intervall l stetig, existiert und verschwindet die Ableitung H' im Innern von l , so ist H in l konstant.

Möglichkeiten für die Ausnahmemenge N im Intervall I , die wir zulassen wollen, sind:

- N ist endliche Menge,

- N ist Menge mit genau einem Häufungswert,
- N ist Menge mit endlich vielen Häufungswerten,
- N ist Nullmenge (s. /4/): Zu jedem positiven ϵ gibt es endlich viele (disjunkte) offene¹⁾ Intervalle I_1, \dots, I_n , in deren Vereinigung N enthalten und deren Gesamtlänge kleiner als ϵ ist²⁾.

Mit Teilmengen M von I (vorrangig $M = I \setminus N$ oder $M = I$) benutzen wir noch folgende Begriffsbildungen: Die Funktion f heiße M-stetig, wenn f (mindestens) in M definiert sowie an jeder Stelle von M stetig ist; die Funktion F heiße M-Stammfunktion von f, wenn F in I definiert, in M differenzierbar ist und für x aus M stets $F'(x) = f(x)$ gilt. Sicher ist es lästig, sich an diese letzten, nur für unsere Zwecke eingeführten Bezeichnungen zu gewöhnen, jedoch ermöglichen sie kurze unmißverständliche Formulierungen.

Mengen mit endlich vielen Hufungswerten als Ausnahmemengen

Für die Ausnahmemenge N setzen wir in diesem Abschnitt voraus, daß sie endlich viele Häufungswerte besitzt. Wir behandeln damit gleichzeitig die ersten beiden oben für N angegebenen Möglichkeiten, für die die Beweisvereinfachungen sofort ersichtlich sind.

Die l Häufungswerte seien durch (disjunkte) offene Intervalle

I_1, \dots, I_l mit $\sum_{v=1}^l \mu(I_v) < \frac{\epsilon}{8K}$ überdeckt. Außerhalb dieser Intervalle liegen nur endlich viele Punkte von N, ihre Anzahl sei m,

die durch weitere m (disjunkte) offene Intervalle I_{l+1}, \dots, I_n

(mit $n := l+m$) so überdeckt seien, daß $\sum_{v=1}^n \mu(I_v) < \frac{\epsilon}{4K}$ ist.

Satz 1: Die beschränkte Funktion f sei $I \setminus N$ -stetig. Dann ist f integrierbar über I.

Beweis: Die Menge $I \setminus \bigcup_{v=1}^n I_v$ besteht aus endlich vielen abgeschlossenen Intervallen (oder isolierten Punkten), und über jedes dieser Intervalle ist f wegen der Stetigkeit integrierbar. Nach dem Riemann-Kriterium existiert daher eine Zerlegung Z^*

von $I \setminus \bigcup_{v=1}^n I_v$, so daß (für alle Intervalle zusammengenommen)

$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}^*) - \underline{S}(f, \mathcal{Z}^*) < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Die Endpunkte der Teilintervalle von \mathcal{Z}^* (sowie die genannten isolierten Punkte) liefern eine Zerlegung \mathcal{Z} von I ; es bestehen die Ungleichungen

$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Z}^*) + K \sum_{v=1}^n \mu(I_v),$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{Z}) \geq \underline{S}(f, \mathcal{Z}^*) - K \sum_{v=1}^n \mu(I_v)$$

und folglich

$$\overline{S}(f, \mathcal{Z}) - \underline{S}(f, \mathcal{Z}) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2K \sum_{v=1}^n \mu(I_v) < \epsilon,$$

womit - wiederum nach dem Riemann-Kriterium - die Integrierbarkeit von f über I nachgewiesen ist.

Eine $I \setminus N$ -stetige Funktion f ist damit auch über jedes Teilintervall von I integrierbar, und man gewinnt $I \setminus N$ -Stammfunktionen von f :

Satz 2: Die beschränkte Funktion f sei $I \setminus N$ -stetig. Dann ist

$F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ($x \in I$) eine $I \setminus N$ -Stammfunktion von f , die

I -stetig (sogar I -Lipschitz-stetig) ist.

Beweis: Die für beliebige x_1, x_2 aus I bestehende Aussage

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq K |x_2 - x_1|$$

bedeutet, daß F einer Lipschitz-Bedingung in I genügt, d. h. I -Lipschitz-stetig ist. Für $x \in I \setminus N$ werde

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt$$

gebildet. Der Integrand rechts ist bei $t = x$ stetig (mit dem

Funktionswert 0), und damit gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß er für $|h| < \delta$ absolut kleiner als ϵ ist. Für $|h| < \delta$ folgt nunmehr $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \epsilon = \epsilon$, und dies beweist $F'(x) = f(x)$ für jeden Punkt x aus $I \setminus N$. Ist die Funktion f nicht nur in x , sondern auch noch in einer ganzen Umgebung von x stetig, d. h., liegt x nicht in N und ist kein Häufungspunkt von N , so folgt $F'(x) = f(x)$ auch sofort aus dem Satz (manchmal Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung genannt), daß bei einem Integranden, der im ganzen Integrationsintervall stetig ist, die Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze den Wert des Integranden an der oberen Grenze ergibt. Bei endlicher Menge N kann man diese Vereinfachung benutzen.

Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung über die Berechnung von Integralen mittels Stammfunktionen kann man hier nun nicht mit beliebigen $I \setminus N$ -Stammfunktionen von f formulieren, denn an Stellen von N können diese Stammfunktionen Sprünge besitzen, so daß zwei solche Funktionen nicht in ganz I um dieselbe Konstante zu differenzieren brauchen. Wir fordern darum I -Stetigkeit für die $I \setminus N$ -Stammfunktionen von f .

Satz 3: Sei f eine in $I \setminus N$ definierte Funktion. Je zwei $I \setminus N$ -Stammfunktionen von f , die I -stetig sind, differenzieren um eine Konstante.

Beweis: Sind F und G zwei I -stetige $I \setminus N$ -Stammfunktionen von f , so sei $H := G - F$ gesetzt. Die Funktion H ist I -stetig, auf $I \setminus N$ existiert und verschwindet H' ; in abgeschlossenen Intervallen von I , die Punkte von N höchstens als Randpunkte enthalten, ist H daher konstant, und diese Konstanten stimmen an isolierten Punkten von N notwendig überein. Für jeden Häufungswert p von N gilt damit, daß H links und rechts jeder beliebig kleinen Umgebung von p jeweils konstant ist, links- und rechtsseitiger Grenzwert in p sind ebendiese Konstanten. Wegen der Stetigkeit von H in p müssen die Konstanten übereinstimmen, und so ergibt sich schließlich, daß H über ganz I konstant ist. Nunmehr folgt in geläufiger Weise der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz 4: Die beschränkte Funktion f sei $I \setminus N$ -stetig, und F sei eine $I \setminus N$ -Stammfunktion von f , die I -stetig ist. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Auch $\varphi(x) := \int_a^x f(t) dt$ ($x \in I$) ist nach Satz 2 eine

I -stetige $I \setminus N$ -Stammfunktion von f . Nach Satz 3 gilt daher

$\varphi(x) = F(x) + C$, und man folgert $C = -F(a)$ sowie die Behauptung $\varphi(b) = F(b) - F(a)$.

Nullmengen als Ausnahmemengen

In diesem Abschnitt sei als Ausnahmemenge N eine Nullmenge zugelassen, worunter natürlich auch die bisher für N behandelten Möglichkeiten fallen, was jedoch darüber hinaus entschiedene Verallgemeinerungen gestattet. Ein besonders eindrucksvolles Beispiel einer Nullmenge ist die Cantorsche perfekte Menge P_0 (s. z. B. /3/, S. 50), die sogar die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Satz 1' dieses Abschnitts ist der wörtlich übernommene Satz 1, und auch sein Beweis wurde schon so formuliert, daß er hier unverändert Gültigkeit hat, wenn zu vorgegebenem positiven ϵ die n Intervalle I_1, \dots, I_n , welche die Menge N überdecken, so ge-

wählt werden, daß $\sum_{v=1}^n \mu(I_v) < \frac{\epsilon}{4K}$ gilt.

Satz 2' ist der einschließlich Beweis ebenso übernommene Satz 2, wobei im folgenden die in Satz 2 ausgesagte I -Lipschitz-Stetigkeit der Funktion F Bedeutung erlangt.

Für die Formulierung des Hauptsatzes reicht die I -Stetigkeit einer $I \setminus N$ -Stammfunktion jetzt nicht! Paradoxerweise und der Anschauung kaum zugänglich besitzt z. B. die auf der offenen Cantorschen Menge G_0 (der Komplementärmenge der erwähnten Menge P_0) definierte (konstante) Funktion $f = 0$ eine $[[0,1]]$ -stetige (und monotone) $[[0,1]] \setminus P_0$ -Stammfunktion F mit $F(0) = 0$, $F(1) = 1$

(s. /3/, S. 239), und damit ist $\int_0^1 f(x) dx = 0 \neq F(1) - F(0)$.

Wir setzen darum nunmehr die I-Lipschitz-Stetigkeit der I\N-Stammfunktionen von f voraus. Am Rande sei eine in der Maßtheorie bewiesene Verallgemeinerung vermerkt, daß nämlich auch die absolute Stetigkeit der I\N-Stammfunktionen von f, wobei überdies N als Menge vom Maß Null zugelassen ist, für die angestrebten Aussagen hinreicht (/3/, Kapitel IX).

Satz 3': Sei f eine in I\N definierte Funktion. Je zwei I\N-Stammfunktionen von f, die I-Lipschitz-stetig sind, differieren um eine Konstante.

Beweis (nach /4/): Sind F und G zwei I-Lipschitz-stetige I\N-Stammfunktionen von f, so können wir (mit einer gemeinsamen Konstanten L) voraussetzen, daß für x, y aus I stets sowohl $|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$ als auch $|G(x) - G(y)| \leq L|x - y|$ gilt. Ist wiederum $H := G - F$, so folgt $|H(x) - H(y)| \leq 2L|x - y|$. Die Nullmenge N werde zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ überdeckt durch n disjunkte (offene) Intervalle I_ν mit den jeweiligen Endpunkten a_ν und b_ν : $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$,

und es sei $\sum_{\nu=1}^n \mu(I_\nu) < \frac{\epsilon}{2L}$.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt x aus I. Im Fall $a \leq x \leq a_1$ ergibt sich sofort $H(x) = H(a)$, denn für $a \neq a_1$ verschwindet die Ableitung H' im Intervall von a bis a_1 . Im Fall $a_k \leq x \leq a_{k+1}$ (oder = b, $k \geq 1$) können wir die Induktionsvoraussetzung machen, daß H von a bis einschließlich a_k konstant ist. Wir setzen noch $b'_k := b_k$, für den Fall $b_k < x$, $b'_k := x$, für $x \leq b_k$.

Es gilt $H(x) = H(x) - H(b'_k) + H(b'_k) - H(a_k) + H(a_k)$, und hierin ist $H(x) - H(b'_k) = 0$, denn für $b'_k \neq x$ verschwindet H' von b'_k bis x, und ferner folgt aus

$$|H(b'_k) - H(a_k)| \leq 2L|b'_k - a_k| \leq 2L\mu(I_k) < \epsilon$$

auch $H(b'_k) - H(a_k) = 0$. Somit erhalten wir $H(x) = H(a_k)$, d. h. die Konstanz von H in ganz I.

Der nachfolgende Hauptsatz läßt sich mit den in den Sätzen 2'

und 3' zusammengestellten Aussagen ganz analog zu Satz 4 beweisen.

Satz 4': Die beschränkte Funktion f sei $I \setminus N$ -stetig, und F sei eine $I \setminus N$ -Stammfunktion von f , die I -Lipschitz-stetig ist.

Dann gilt
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Soweit die beabsichtigte Zusammenstellung einer Abfolge dieser Sätze und ihrer Beweise. Vielleicht vermittelt der Überblick auch Einsichten in den Sinn gewisser getroffener Voraussetzungen, und wenn Gelegenheit bestehen sollte, einige Anfänge zu unterrichten, so lassen sich anschließende Verallgemeinerungen zu Übungen nutzen, aber spezielle Aufgaben wird der interessierte Leser für seine Zwecke jederzeit selbst formulieren.

Literatur

- /1/ Belkner, H., und Brehmer, S.: Lebesguesche Integrale. Berlin 1984
- /2/ Drews, K.-D.: Didaktische Überlegungen zu einem Teilgebiet des Grundkurses Mathematik für Lehrerstudenten. Rostock. Math. Kolloq. 24, 99 - 114 (1983)
- /3/ Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1961
- /4/ Ostrowski, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band III. 2. Aufl. Basel 1967

Anmerkungen

- 1) An Randpunkten von I seien sie halbgeschlossen.
- 2) Im Unterschied zu Mengen vom (Lebesgueschen) Maß Null werden hier nicht abzählbar viele Intervalle, sondern lediglich endlich viele zur Oberdeckung zugelassen.

eingegangen: 09. 10. 1987

Verfasser:

Dr. Klaus-Dieter Drews
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Roger Labahn

More on a relation between binomial coefficients

This paper is dedicated to my teacher Prof. Gustav Burosch on the occasion of his 50. birthday

We present the solution of a problem, which we already dealt with in /3/: Determine the zeros of

$$f(n,k) := \binom{n}{k} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i},$$

where $n \geq k \geq 2$ are integers. More precisely: For any fixed k we look for those values of n , for which $f(n,k)$ and $f(n+1,k)$ have different signs.

The main result of /3/ was that for any $k \geq 1$ there exists a number $C(k)$, such that

$$f(n,k) \geq 0 \text{ iff } n \leq C(k).$$

i. e. $f(n,k)$ has a uniquely determined zero for any fixed k . However, we were not able to determine $C(k)$ exactly, particularly the given lower bound needed to be improved.

The question for the asymptotic behaviour of $C(k)$ has been answered by L. Berg in /1/ with the help of analytic methods: for $k \rightarrow \infty$, $C(k) \sim 3k$. This can be proved on several ways, which will be presented in a joined paper with S. L. Bezrukov among some other related results.

The following theorem contains the final exact solution.

Theorem 1:

$$C(k) = \begin{cases} 3k-3 & \text{if } 2 \leq k \leq 5, \\ 3k-4 & \text{if } k \geq 6. \end{cases}$$

It should be mentioned that already in 1986 H.-J. Fischer (Technical University Karl-Marx-Stadt) informed the author in a private letter that he had proved the statement for sufficiently large k . Unfortunately, his proof has not been published. 21

Proof of the Theorem

Instead of the difference we consider the quotient

$$g(n,k) := \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}}{\binom{n}{k}}.$$

Obviously, $f(n,k) \leq 0$ iff $g(n,k) \geq 1$.

We start with some recurrence formulas for $g(n,k)$.

Proposition 1: For $k < n$,

$$a) g(n,k+1) = \frac{k+1}{n-k} \cdot (g(n,k)+1),$$

$$b) g(n,k) = 2 \cdot \frac{n-k}{n} \cdot g(n-1,k) - \frac{k}{n}.$$

Proof: a) Since $g(n,k+1) = \frac{1}{\binom{n}{k+1}} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$ and $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$,

$$g(n,k+1) = \frac{1}{\frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}} \cdot \left[\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{k} \right] = \frac{k+1}{n-k} \cdot \left[\frac{1}{\binom{n}{k}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + 1 \right].$$

b) By the recurrence formula for binomial coefficients we have

$$g(n,k) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] + \binom{n-1}{0} \right\}, \text{ since } \binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1.$$

Therefore

$$\begin{aligned} g(n,k) &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i} + \frac{1}{\binom{n}{k}} \cdot \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n-1}{i} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i} + \frac{1}{\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n-1}{i}, \end{aligned}$$

and by definition

$$g(n,k) = \frac{n-k}{n} \cdot g(n-1,k) + \frac{k}{n} \cdot g(n-1,k-1). \quad (1)$$

From a) we get by a simple calculation:

$$g(n-1, k-1) = \frac{n-k}{k} \cdot g(n-1, k) - 1,$$

and using this in (1):

$$g(n, k) = \frac{n-k}{n} \cdot g(n-1, k) + \frac{n-k}{n} \cdot g(n-1, k) - \frac{k}{n}.$$

q.e.d.

Repeated application of these equalities yields

Proposition 2: For $k \geq 3$, $n \geq k+2$,

$$g(n, k) = 4 \frac{k(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)} [2g(n-3, k-1) + 1] - \frac{k}{n} (2 \cdot \frac{n-k}{n-1} + 1).$$

Proof: At first we use Proposition 1b) three times:

$$\begin{aligned} g(n, k) &= 2 \cdot \frac{n-k}{n} \cdot g(n-1, k) - \frac{k}{n} \\ &= 2 \cdot \frac{n-k}{n} \left[2 \cdot \frac{n-k-1}{n-1} \cdot g(n-2, k) - \frac{k}{n-1} \right] - \frac{k}{n} \\ &= 4 \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \cdot g(n-2, k) - 2 \cdot \frac{k(n-k)}{n(n-1)} - \frac{k}{n} \\ &= 4 \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \left[2 \cdot \frac{n-k-2}{n-2} \cdot g(n-3, k) - \frac{k}{n-2} \right] \\ &\quad - \frac{k}{n} (2 \cdot \frac{n-k}{n-1} + 1). \end{aligned}$$

Now we introduce $g(n-3, k-1)$ instead of $g(n-3, k)$ with the help of Proposition 1a):

$$\begin{aligned} g(n, k) &= 4 \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)} \left[2(n-k-2) \cdot \frac{k}{n-k-2} \cdot (g(n-3, k-1) + 1) - k \right] \\ &\quad - \frac{k}{n} (2 \cdot \frac{n-k}{n-1} + 1) \\ &= 4 \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)} \left[2k \cdot g(n-3, k-1) + k \right] - \frac{k}{n} (2 \cdot \frac{n-k}{n-1} + 1). \end{aligned}$$

q.e.d.

Because we are interested in the relation between $g(n, k)$ and 1 for $n = 3k - 3$ and $n = 3k - 4$, let us consider now

$$h_a(k) := g(3k-a, k) - 1, \text{ where } 3 \leq a \leq 4.$$

Then obviously,

$$f(3k-a, k) \leq 0 \text{ iff } g(3k-a, k) \geq 1 \text{ iff } h_a(k) \geq 0.$$

For $k \geq 3$ Proposition 2 gives us a recurrence formula of the type

$$h_a(k) = p_a(k) \cdot h_a(k-1) + q_a(k), \quad (2)$$

and $p_a(k)$ and $q_a(k)$ can be computed easily:

$$p_a(k) = \frac{8k(2k-a)(2k-a-1)}{(3k-a)(3k-a-1)(3k-a-2)}, \quad (3)$$

$$q_a(k) = \frac{12k(2k-a)(2k-a-1)}{(3k-a)(3k-a-1)(3k-a-2)} - \frac{2k(2k-a)}{(3k-a)(3k-a-1)} - \frac{k}{3k-a} - 1 \quad (4)$$

$$= \frac{(20-5a)k^2 - (8+13a)k + (a^3+3a^2+2a)}{(3k-a)(3k-a-1)(3k-a-2)}.$$

According to our assertion we should investigate the cases $a = 3$ and $a = 4$. Let us start with the last one.

Proposition 3: For $k \geq 5$, $h_4(k) > 0$.

Proof: From formula (3) we get

$$p_4(k) = \frac{16}{3} \cdot \frac{k(2k-5)}{(3k-4)(3k-5)} = \frac{32}{27} \cdot \left(1 + \frac{\frac{9}{2}k - 20}{(3k-4)(3k-5)}\right),$$

and therefore

$$p_4(k) > \frac{32}{27} \text{ for } k \geq 5.$$

The computation of $q_4(k)$ from (4) yields

$$q_4(k) = \frac{-60k + 120}{(3k-4)(3k-5)(3k-6)} = -\frac{20}{(3k-4)(3k-5)},$$

i. e. $q_4(k) < 0$ since $k \geq 5$ was supposed.

Assume that there is a $k_0 \geq 5$ with $h_4(k_0) \leq 0$. Because of the above inequalities we get from our recurrence formula (2) $h_4(k_0+1) < 0$, and furthermore by induction for all $k \geq k_0 + 1$:

$$h_4(k) < \left(\frac{32}{27}\right)^{k-(k_0+1)} \cdot h_4(k_0+1).$$

By $\frac{32}{27} > 1$ and $h_4(k_0+1) < 0$ this means $h_4(k) \rightarrow -\infty$, if $k \rightarrow \infty$, but then also $g(3k-4, k) \rightarrow -\infty$ in contradiction to the definition of $g(n, k)$. Hence we proved the positivity of $h_4(k)$ for $k \geq 5$.

q. e. d.

Similarly we proceed in the other case.

Proposition 4: For $k \geq 7$, $h_3(k) < 0$.

Proof: We have

$$p_3(k) = \frac{8k(2k-3)(2k-4)}{(3k-3)(3k-4)(3k-5)} = \frac{32}{27} \left[1 + \frac{(9k-20)^2 - 40}{6(3k-3)(3k-4)(3k-5)} \right]$$

from (3), i. e. $p_3(k) > \frac{32}{27}$ for $k \geq 3$.

Equation (4) yields

$$q_3(k) = \frac{5k^2 - 47k + 60}{(3k-3)(3k-4)(3k-5)},$$

and therefore $q_3(k) > 0$ for $k \geq 8$.

Assume that there is any $k_0 \geq 7$ with $h_3(k) \geq 0$. Because of the above inequalities we get from our recurrence formula (2) $h_3(k_0+1) > 0$, and furthermore by induction for all $k \geq k_0+1$:

$$h_3(k) > \left(\frac{32}{27}\right)^{k-(k_0+1)} \cdot h_3(k_0+1).$$

Again by $\frac{32}{27} > 1$ and $h_3(k_0+1) > 0$ this means $h_3(k) \rightarrow +\infty$,

and consequently

$$g(3k-3, k) \rightarrow +\infty \text{ if } k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

On the other hand we may apply an estimation for the sum of binomial coefficients from /2/, p. 276:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{3k-3}{i} \leq \frac{(3k-3) - (k-1)}{(3k-3) - 2(k-1)} \cdot \binom{3k-3}{k-1} = \frac{2k-2}{k-1} \cdot \binom{3k-3}{k-1} = 2 \cdot \frac{k}{2k-2} \cdot \binom{3k-3}{k-1}.$$

Hence $g(3k-3, k) \leq \frac{k}{k-1} \leq 2$ for any k . Since this contradicts (5), our assumption turns out to be false.

q. e. d.

Now we are able to prove the original Theorem. For $2 \leq k \leq 6$, the statement can be verified with the help of the values for $f(n, k)$ given in /3/, Tab. 1. For $k > 6$ we have $h_3(k) < 0 < h_4(k)$ by Propositions 3 and 4, i. e.

$$f(3k-4, k) < 0 < f(3k-3, k) \quad (6)$$

and therefore

$$C(k) = 3k-4.$$

q.e.d.

We should remark that we even proved $f(n,k) \neq 0$ for any n and k by (6) and the results of /3/.

On the continuous case

Originally we were interested in the "discrete" zeros of $f(n,k)$, but now we are able to extend our investigations to the continuous case, too. For this we consider $f(n,k)$ for natural $k \geq 2$ and real $n \geq k$, and ask for the values of n with

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} = \binom{n}{k}, \text{ i. e. } f(n,k) = 0 \text{ and } g(n,k) = 1.$$

The following statements are true for any fixed $k \geq 6$.

As at first H.-J. Fischer mentioned in his private correspondence with the author,

$$g(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!(n-k)!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} \cdot \frac{1}{(n-i)\dots(n-k+1)}$$

is monotone decreasing in n . Furthermore it is continuous, and by Propositions 3 and 4 we have $g(3k-4,k) > 1 > g(3k-3,k)$. Hence there is exactly one value n with $g(n,k) = 1$, let us denote it by $c(k)$. The above inequality yields

$$3k-4 < c(k) < 3k-3 \text{ for all } k \geq 6.$$

But moreover the following statement holds.

Theorem 2: For $k \rightarrow \infty$, $c(k) - (3k-4) \rightarrow 0$.

Proof: We shall prove that for any real a with $3 \leq a < 4$ and sufficiently large k , $c(k) < 3k-a$. To do this we use our recurrence formula (2) for an arbitrarily fixed a ($3 \leq a < 4$).

By (3), for $k \rightarrow \infty$ we have

$$p_a(k) \rightarrow \frac{32}{27} > 1.$$

Since $a < 4$, the quadratic term in the numerator of the fraction in (4) has a positive coefficient. Hence for sufficiently

large k , this numerator becomes positive.

Altogether we showed the existence of a number k_a such that for all $k \geq k_a$,

$$p_a(k) > p_a, \text{ where } p_a \text{ is a constant greater than 1, and}$$

$$q_a(k) > 0.$$

Now we may conclude as for $a=3$ in the proof of Proposition 4.

This yields

$$h_a(k) < 0 \text{ and } g(3k-a, k) < 1,$$

i. e. finally

$$c(k) < 3k-a \text{ for } k \geq k_a.$$

q.e.d.

Remark: Considering (2) with (3) and (4) as an asymptotic equation for $k \rightarrow \infty$ we immediately get $h_a(k) \sim \frac{a-4}{k}$.

From this the assertion also follows.

Acknowledgement

I thank Prof. G. Burosch for his suggestion to investigate this problem. Moreover, I'm indebted to J. Prestin for many helpful discussions on the results, and to Prof. L. Berg for his remarks to the paper.

References

- /1/ Berg, L.: Das asymptotische Verhalten einer speziellen Funktion von Binomialkoeffizienten. Rostock, Math. Kolloq. 31, 93 - 94 (1987)
- /2/ Gavrilov, G. P., i Sapoženko, A. A.: Sbornik zadač po diskretnoj matematike (Russ.), Moskau, 1977
- /3/ Labahn, R.: On an interesting property of binomial coefficients. Rostock, Math. Kolloq. 29, 21 - 24 (1986)

received: August 18, 1987

Author:

Dipl.-Math. Roger Labahn
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Kerl Weber

On the number of stable sets in an $m \times n$ lattice

Dedicated to my former teacher Professor Dr. Gustav Burosch on his fiftieth birthday

Some bounds for the numbers $\mathcal{X}(m,n)$ of stable sets in a rectangular $m \times n$ lattice are given.

1. A stable set in a graph $G = (V,E)$ is a set $S \subseteq V$ of vertices which are pairwise non-adjacent. The numbers $\mathcal{X}_k(n) = \binom{n+1-k}{k}$ of stable k -sets in the n -path P_n are given by the so-called Lem-
me of Kaplensky. Burosch suggested the determination of the number of stable k -sets in other graphs G . Engel /2/ proved some results in this direction. Our aim is the evaluation or estimation, respectively, of the numbers $\mathcal{X}(m,n)$ of all stable sets in the integer lattice $L_{m,n} = P_m \times P_n$ with vertex set $\{(i,j): 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ and edges joining pairs (i,j) and (k,l) whenever $|i-k| + |j-l| = 1$.

The corresponding problem for the n -cube graph Q_n was posed by the author already in 1977 and solved independently by Koršunov and Sapoženko (see /3/).

2. Define $\mathcal{X}(n) := \mathcal{X}(1,n)$ as the number of all stable sets in the n -path. Counting the empty set as a stable set we get the following recursion

$\mathcal{X}(n+2) = \mathcal{X}(n+1) + \mathcal{X}(n)$, $n = 1, 2, \dots$, $\mathcal{X}(1) = 2$, $\mathcal{X}(2) = 3$.
An immediate consequence of this recursion is

Theorem 1: For each $n = 1, 2, \dots$,

$$\mathcal{X}(n) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

As a corollary we have the relation

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Note that, by Theorem 1,

$$\mathcal{X}(n) \sim \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = 1.1708\dots(1.6180\dots)^n.$$

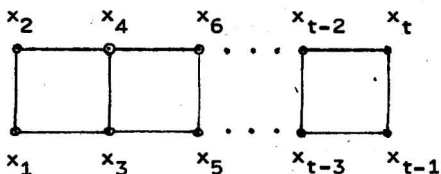
Remark: The sequence $\binom{n-k}{k}$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, was investigated by Tanny and Zuker (see /4/). It follows, for example, from /4/ that

$$\max_k \binom{n+1-k}{k} = \binom{n+1-k_0}{k_0},$$

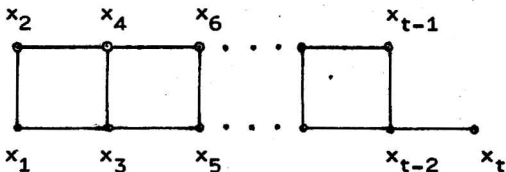
where $k_0 = x$ or $x + 1$ with $x = \lfloor \frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) (n+1) \rfloor$.

$$\text{Hence, } \binom{n+1-k_0}{k_0} \sim \sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{2\pi}} \frac{\mathcal{X}(n)}{\sqrt{n}}.$$

3. Now we evaluate the numbers $\mathcal{X}(2, n)$. Denote by $R(t)$ the number of stable sets T in the following graphs:



if t is even,



if t is odd.

Clearly, $\mathcal{X}(2, n) = R(2n)$. Setting $t = 2n + 1$ and considering the cases $x_{2n+1} \notin T$, or $x_{2n+1} \in T$ and $x_{2n} \notin T$, or $x_{2n+1} \in T$ and

$x_{2n} \notin T$, we obtain the recursion

$$R(2n+1) = R(2n) + R(2n-2) + R(2n-3).$$

Analogously, for $t = 2n$ by considering the cases $x_{2n} \notin T$ or $x_{2n} \in T$, respectively, we deduce

$$R(2n) = R(2n-1) + R(2n-3), \quad n \geq 2,$$

$$R(1) = 2, \quad R(2) = 3, \quad R(3) = 5.$$

It follows

$$R(2n+1) = R(2n-1) + 3R(2n-3) + R(2n-5), \quad n \geq 3.$$

Hence,

$$R(2n+1) = \left(1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)(1+\sqrt{2})^n + \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)(1-\sqrt{2})^n.$$

Theorem 2: $\mathcal{X}(2, n) \sim c_2 (\sqrt{1+\sqrt{2}})^{2n}$, where $c_2 = (1+\sqrt{2})/2$.

By Theorem 2, $\mathcal{X}(2, n) \sim 1.2071\dots(1.5537\dots)^{2n}$.

Table 1: $\mathcal{X}(m, n)$ and $\mathcal{X}(m, n)^{1/mn}$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5
1	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1.7320}$	$\frac{5}{1.7099}$	$\frac{8}{1.6817}$	$\frac{13}{1.6702}$
2		$\frac{7}{1.6265}$	$\frac{17}{1.6035}$	$\frac{41}{1.5907}$	$\frac{99}{1.5833}$
3			$\frac{63}{1.5846}$	$\frac{227}{1.5715}$	$\frac{827}{1.5649}$

$m \backslash n$		6	7	8	9	10
1		$\frac{21}{1.6610}$	$\frac{34}{1.6549}$	$\frac{55}{1.6502}$	$\frac{89}{1.6466}$	$\frac{144}{1.6437}$
2		$\frac{239}{1.5783}$	$\frac{577}{1.5748}$	$\frac{1393}{1.5721}$	$\frac{3363}{1.5701}$	$\frac{8119}{1.5684}$
3		$\frac{2999}{1.5601}$	$\frac{10897}{1.5568}$	$\frac{39561}{1.5543}$	$\frac{143677}{1.5524}$	$\frac{521721}{1.5508}$

4. In a similar manner as this is done in the previous section we get $\mathcal{X}(3,n) = S(3n)$, where the sequence S is defined by

$$\begin{aligned} S(1) &= 2, S(2) = 3, S(3) = 5, S(4) = 8, S(5) = 12, S(6) = 17, \\ S(3n+1) &= S(3n) + S(3n-1) - S(3n-2) + S(3n-3) + S(3n-4), \\ S(3n+2) &= S(3n+1) + S(3n) - S(3n-1) + S(3n-2), \\ S(3n+3) &= S(3n+2) + S(3n+1) - S(3n) + S(3n-1) - S(3n-4), \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

These recursions are used for the calculation of $\mathcal{X}(3,n)$ for $n \leq 10$ (cf. Table 1: $\mathcal{X}(m,n)$ is the upper number in the cell (m,n) of Table 1, the lower number is $\mathcal{X}(m,n)^{1/mn}$).

5. In this section we derive lower and upper bounds for the numbers $\mathcal{X}(m,n)$. For a vertex set $X \subseteq L_{m,n}$ the neighbour set $N(X)$ is the set of vertices $x \in L_{m,n} - X$ being adjacent to a vertex in X . Suppose mn is even and let A be a stable set of $L_{m,n}$ with cardinality $mn/2$. Then

$$\mathcal{X}(m,n) = \sum_{r=0}^{mn/2} \sum_{\substack{X \in A \\ |X|=r}} 2^{mn/2 - |N(X)|} = 2^{mn/2} \sum_{r=0}^{mn/2} \sum_{\substack{X \in A \\ |X|=r}} 2^{-|N(X)|}$$

is obvious.

Case 1: If $m = 1$ then $|X| = r$ implies $r \leq |N(X)| \leq 2r$.

Hence,

$$\mathcal{X}(n) \leq 2^{n/2} \sum_{r=0}^{n/2} \binom{n/2}{r} 2^{-r} = 3^{n/2} < 1.74^n$$

and

$$\mathcal{X}(n) \geq 2^{n/2} \sum_{r=0}^{n/2} \binom{n/2}{r} 2^{-2r} = (5/2)^{n/2} > 1.58, \quad (1)$$

i. e. $1.58^n < \mathcal{X}(n) < 1.74^n$.

Case 2: If $m = 2$ then $|X| = r$ implies $r \leq |N(X)| \leq 3r$.

Hence, arguing as above,

$$1.5^{2n} < \mathcal{X}(2,n) < 1.74^{2n}.$$

Case 3: If $m \geq 3$ then $|X| = r$ implies $r \leq |N(X)| \leq 4r$ and, consequently,

$$1.45^{mn} < \mathcal{X}(m,n) < 1.74^{mn}.$$

Without proof we mention that the same bounds are true if $mn \neq 1$ is odd. So we have

Theorem 3: For $mn > 1$,

$$1.45^{mn} < \chi(m, n) < 1.74^{mn}.$$

6. By Jensen's inequality we get a slight improvement of the lower bounds in the previous section. Clearly,

$$\frac{1}{\binom{mn/2}{r}} \sum_{\substack{X \subseteq A \\ |X|=r}} 2^{-|N(X)|} \quad \text{is the expectation}$$

$E(2^{-|N(X)|})$ of $2^{-|N(X)|}$ over all r -sets $X \subseteq A$.

Since the function $f(x) = 2^{-x}$ is convex we have,

by Jensen's inequality, $E(2^{-|N(X)|}) \geq 2^{-E(|N(X)|)}$.

Hence, in the lower bounds of the previous section we may replace $\max \{|N(X)|\}$ by $E(|N(X)|)$. Unfortunately, for $n = 2k$ and $m \geq 2$ this expectation

$$E(|N(X)|) = \frac{1}{\binom{km}{r}} \left\{ 2 \left[\binom{km}{r} - \binom{km-2}{r} \right] + (n+m-4) \left[\binom{km}{r} - \binom{km-3}{r} \right] \right. \\ \left. + (k-1)(m-2) \left[\binom{km}{r} - \binom{km-4}{r} \right] \right\},$$

although easily computed¹⁾, is not very comfortable for numerical interpretation.

For $m = 1$, n even, we get

$$E(|N(X)|) = \frac{1}{\binom{n/2}{r}} \left\{ \binom{n/2-1}{r-1} + (n/2-1) \left[\binom{n/2}{r} - \binom{n/2-2}{r} \right] \right\} = 2r - \frac{2r^2}{n},$$

and, for example, in this case instead of (1) we have

$$\chi(n) \geq 2^{n/2} \sum_{r=0}^{n/2} \binom{n/2}{r} 2^{-2r+2r^2/n} > 2^{n/2} \binom{n/2}{n/10} 2^{-n/5+n/10} \\ > 2^{n/2} \cdot 1.28^{n/2} = 1.6^n$$

for sufficiently large n .

7. From Section 5 we know that $1.45 < \alpha(m,n)^{1/mn} < 1.74$ for $mn > 1$. Hence, there exists

$$\alpha_m := \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha(m,n)^{1/mn}$$

for each fixed $m = 1, 2, \dots$.

Theorem 4: For each fixed $m = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(m,n)^{1/mn} = \alpha_m$$

exists.

Proof: Note that $n = (t+1)s-1$ implies that

$$\alpha(m,n) \geq \alpha(m,t)^s \tag{2}$$

(see Fig. 1).

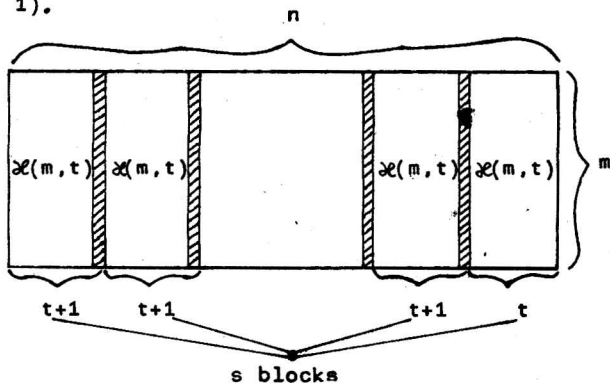


Fig. 1

Fix $\varepsilon > 0$ and let the integer t such that

$$(\alpha_m - \varepsilon)^{1-1/t} \geq \alpha_m - 2\varepsilon \text{ and } \alpha(m,t)^{1/mt} \geq \alpha_m - \varepsilon.$$

Henceforth t is fixed. Now if n is sufficiently large then

$(t+1)s - 1 \leq n \leq (t+1)(s+1) - 1$ for a certain integer $s \geq t^2 + 1$.

Hence, by (2),

$$\alpha(m,n) \geq \alpha(m, (t+1)s-1) \geq \alpha(m,t)^s = [\alpha(m,t)^{1/mt}]^{mts} > (\alpha_m - \varepsilon)^{mts}$$

and consequently

$$\alpha(m,n)^{1/mn} \geq (\alpha_m - \varepsilon)^{ts/n} \geq \alpha_m - 2\varepsilon$$

since $ts/n \geq 1-1/t$ may easily be derived via

$(t+1)(s+1) - 1 = ts + s + t > n$; i.e. $ts/n > 1 - (s+t)/n$,
and $(s+t) \cdot t = (t+1)s - 1 - (s-t^2-1) \leq n$. \square

From Sections 2,3 and 5 we know that $\mathcal{X}_1 = (1+\sqrt{5})/2$
 $= 1.6180\dots$, $\mathcal{X}_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1.5537\dots$ and $1.45 \leq \mathcal{X}_m \leq 1.74$ for
 $m \geq 3$. (Compare also the numbers $\mathcal{X}(m,n)^{1/mn}$ in the cells (m,n)
of Table 1.)

8. We will improve the upper bound for \mathcal{X}_m , $m \geq 3$, using the
estimation

$$\mathcal{X}_m \leq \mathcal{X}_{m-r}^{\frac{m-r}{m}} \mathcal{X}_r^{\frac{r}{m}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

which follows immediately from $\mathcal{X}(m,n) \leq \mathcal{X}(m-r,n) \mathcal{X}(r,n)$,

i. e. $\mathcal{X}(m,n)^{1/mn} \leq \mathcal{X}(m-r,n)^{1/n(m-r)} \mathcal{X}(r,n)^{1/rn}$.

For fixed m and $n \rightarrow \infty$ we get (3).

It follows, for example, $\mathcal{X}_3 \leq \mathcal{X}_2^{2/3} \mathcal{X}_1^{1/3} < 1.575$; $\mathcal{X}_4 \leq \mathcal{X}_2$

< 1.554 , $\mathcal{X}_5 \leq \mathcal{X}_4^{4/5} \mathcal{X}_1^{1/5} < 1.567$ etc. We summarize these re-
sults in Table 2 and remember the lower bound $\mathcal{X}_m \geq 1.45$, $m \geq 3$.

Table 2: Upper bounds for \mathcal{X}_m

m	3	4	5	6	7	8	9	10	≥ 11
$\mathcal{X}_m \leq$	1.575	1.554	1.567	1.554	1.563	1.554	1.561	1.554	1.560

9. Theorem 5: The limit

$$\mathcal{X} := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}(n,n)^{1/n^2}$$

exists, and $1.45 \leq \mathcal{X} \leq 1.554$.

Proof: By Theorem 3, $1.45 < \mathcal{X}(n,n)^{1/n^2} < 1.74$, and so there
exists

$$\mathcal{X} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}(n,n)^{1/n^2}$$

(and in particular $\mathcal{X} \geq 1.45$). The proof that \mathcal{X} is also the limit goes along the same line as the proof of Theorem 4. Fix $\varepsilon > 0$ and choose the integer t so that

$$\mathcal{X}(t, t)^{1/t^2} \geq \mathcal{X} - \varepsilon \text{ and } (\mathcal{X} - \varepsilon)^{1-2/t} \geq \mathcal{X} - 2\varepsilon.$$

Then, for each sufficiently large n (i.e. $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon, t)$) we find an $s \geq t^2 + 1$ such that

$$(t+1)s - 1 \leq n < (t+1)(s+1) - 1.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(n, n) &\geq \mathcal{X}((t+1)s - 1, (t+1)s - 1) \geq \mathcal{X}(t, t)^{s^2} \\ &= (\mathcal{X}(t, t)^{1/t^2})^{s^2 t^2} \geq (\mathcal{X} - \varepsilon)^{s^2 t^2} \end{aligned}$$

and

$$\mathcal{X}(n, n)^{1/n^2} \geq (\mathcal{X} - \varepsilon)^{s^2 t^2 / n^2} \geq (\mathcal{X} - \varepsilon)^{1-2/t} \geq \mathcal{X} - 2\varepsilon$$

since $st/n > 1 - 1/t$ as we have shown above and consequently $(st/n)^2 > 1 - 2/t$.

Moreover, we have the following bounds for \mathcal{X} :

$$\mathcal{X}_m^{m/(m+1)} \leq \mathcal{X} \leq \mathcal{X}_m, \quad (4)$$

$m = 1, 2, \dots$. Indeed, fix $t = 1, 2, \dots$, $s = 1, 2, \dots$ and let $n = (t+1)s - 1$. Then, by (2),

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(n, n) &\geq \mathcal{X}(n, t)^s \text{ and so } \mathcal{X}(n, n)^{1/n^2} \geq \mathcal{X}(n, t)^{s/n^2} = (\mathcal{X}(n, t)^{1/nt})^{st/n} \\ &= (\mathcal{X}(n, t)^{1/nt})^{(n+1)t/n(t+1)}, \text{ whence } \mathcal{X} \geq \mathcal{X}_t^{t/(t+1)} \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On the other hand, $\mathcal{X}(n, n) \leq \mathcal{X}(n, t+1)^s$ (cf. Fig. 1), and thus

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(n, n)^{1/n^2} &\leq \mathcal{X}(n, t+1)^{s/n^2} = (\mathcal{X}(n, t+1)^{1/n(t+1)})^{(t+1)s/n} \\ &= (\mathcal{X}(n, t+1)^{1/n(t+1)})^{(n+1)/n}. \end{aligned}$$

Hence, it follows $\mathcal{X} \leq \mathcal{X}_{t+1}$ if n tends to infinity.

The lower bound in (4) does not give any improvement of the lower bound for \mathcal{X} , but from the upper bound we conclude $\mathcal{X} \leq 1.554$ (cf. Table 2). \square

References

- /1/ Abbott, H. L., and Hanson, D.: A lattice path problem. *Ars Combin.* 6, 163 - 178 (1978)
- /2/ Engel, K.: Über zwei Lemmata von Kaplansky. *Rostock. Math. Kolloq.* 9, 5 - 26 (1978)
- /3/ Koršunov, A. D., and Sapoženko, A. A.: On the number of codes with distance 2 (Russ.). *Problemy Kibernet.* 40, 111 - 130 (1983)
- /4/ Tanny, S. M., and Zuker, M.: On a unimodal sequence of binomial coefficients. *Discrete Math.* 9, 78 - 89 (1974)

Remark

- 1) For a given vertex $x \in L_{m,n} - A$ one has to count the number of sets $X \subseteq A, |X| = r$, with $x \in N(X)$. In $L_{m,n} - A$ there are two vertices x with $N(\{x\}) = 2$, $n+m - 4$ vertices x with $N(\{x\}) = 3$ and the remaining $(k-1)(m-2)$ vertices x with $N(\{x\}) = 4$.

received: September 18, 1987

Author:

Doz. Dr. Karl Weber
Ingenieurhochschule für Seefahrt
Bereich Mathematik
Richard-Wagner-Straße
Warnemünde
DDR-2530

Konrad Engel
Hans-Dietrich O.F. Gronau

On 2-(6,3, λ) designs

Dedicated to our teacher Professor Dr. G. Burosch on the occasion of his 50. birthday

1. Introduction

A 2-(6,3, λ) design is a system of (not necessarily distinct) triples (called blocks) of a 6-element set K (say $K = \{1, 2, \dots, 6\}$) such that every pair of K appears exactly in λ blocks. A 2-(6,3, λ) design is called indecomposable (or elementary) if and only if there is no subsystem of the design which is a 2-(6,3, λ') design with $0 < \lambda' < \lambda$.

It is well-known and trivial that 2-(6,3, λ) designs exist for even λ only. So let λ throughout be even. An example of a 2-(6,3, λ)-design is (the columns are the blocks)

$$B = \begin{pmatrix} 1111122233 \\ 2234434545 \\ 3565646656 \end{pmatrix}$$

In 1979 G. Burosch /1/ proved the following

Theorem 1: There is exactly one indecomposable 2-(6,3, λ) design up to isomorphism, namely B .

This strong result has many consequences. For an application see /2/. Theorem 1 gives a principal possibility to construct all 2-(6,3, λ) designs: Take $(\lambda/2)$ designs, each isomorphic to B . This construction is not unique and does not give good bounds for the number of 2-(6,3, λ) designs.

In this paper we shall give another explicit representation of all 2-(6,3, λ) designs which is unique and enables us to determine the number of such designs. It also allows us to give a short proof of Theorem 1.

2. The representation

Let $x_{123}, x_{124}, \dots, x_{456}$ denote the number of blocks 123, 124, ..., 456 in a design, respectively. So, every $2-(6, 3, \lambda)$ design can be described by an incidence vector $(x_{123}, x_{124}, \dots, x_{456})^T$ of length $\binom{6}{3} = 20$ with nonnegative integral entries. Furthermore, the variables satisfy the $\binom{6}{2} = 15$ equations

$$\begin{aligned} x_{123} + x_{124} + x_{125} + x_{126} &= \lambda && \text{(according to 12),} \\ x_{123} + x_{134} + x_{135} + x_{136} &= \lambda && \text{(according to 13),} \\ &\dots\dots\dots && \\ x_{156} + x_{256} + x_{356} + x_{456} &= \lambda && \text{(according to 56).} \end{aligned} \quad (I)$$

On the other hand, if we have a solution of (I) in nonnegative integers, then this solution describes a $2-(6, 3, \lambda)$ design. The system (I) can be solved by standard methods.

For convenience we introduce $a = x_{123}$, $b = x_{236}$, $c = x_{346}$, $d = x_{456}$, $e = x_{156}$. The system (I) is equivalent to the following system (II). So we have

Theorem 2: Every $2-(6, 3, \lambda)$ design corresponds uniquely to a vector

$$\underline{x}_\lambda(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} x_{123} \\ x_{124} \\ x_{125} \\ x_{126} \\ x_{134} \\ x_{135} \\ x_{136} \\ x_{145} \\ x_{146} \\ x_{156} \\ x_{234} \\ x_{235} \\ x_{236} \\ x_{245} \\ x_{246} \\ x_{256} \\ x_{345} \\ x_{346} \\ x_{356} \\ x_{456} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda/2 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \quad (II)$$

with integers a, b, c, d, e satisfying

$$\begin{aligned}
 0 &\leq a, b, c, d, e \leq \lambda/2, \\
 a &\leq c + d \leq a + \lambda/2, \\
 b &\leq d + e \leq b + \lambda/2, \\
 c &\leq e + a \leq c + \lambda/2, \\
 d &\leq a + b \leq d + \lambda/2, \\
 e &\leq b + c \leq e + \lambda/2.
 \end{aligned}
 \tag{III}$$

The equivalence of the system of inequalities (III) and the fact that all 20 variables are nonnegative can be verified easily.

Moreover, a variable equals 0 iff in the corresponding inequality equality holds.

The bijection between the $2-(6,3,\lambda)$ designs and the solutions of the system (III) allows us to find simply all designs and offers us elegant listings.

It is worth to remark that the construction of the design can be described as follows: Take $\lambda/2$ times B. Then apply a times the replacement of the blocks 124, 136, 256, 345 by 126, 134, 245, 356, b times the replacement of the blocks 136, 145, 235, 246 by 135, 146, 236, 245, etc.

3. Proof of Theorem 1

The design B and all other $2-(6,3,2)$ designs are indecomposable, by $\lambda = 2$. Nandi /4/ proved that all $2-(6,3,2)$ designs are isomorphic to B. The incidence vector of B is $\underline{x}_2(0,0,0,0,0)$, see (II). Let a $2-(6,3,\lambda)$ design A with $\lambda \geq 4$ be given. We shall prove that A is decomposable. Let the incidence vector of A be denoted by \underline{y} . If A contains all triples then it contains also B. Without loss of generality we may assume that $456 \notin A$, i.e., $d = 0$. By the same argument there must be at least one triple more, not contained in A.

It can be verified easily that variables of complementary sets sum up to $\lambda/2$, i.e., not both sets can be missing in A. Note $x_{123} = \lambda/2 - d = \lambda/2$. If the intersection of any two of the triples missing in A contains exactly one element, then these are at most four sets which are of the structure uvw, uxy, vxz, wyz , what can be verified easily. W.l.o.g. we may assume that these sets are 124, 135, 236, 456. Hence, the variables of all the other sets are positive, i.e., $\underline{x}_2(0,0,0,0,0) < \underline{y}$ (componentwise) and $B \subset A$.

It remains the case that there are sets missing in A which intersect in two elements. W.l.o.g. let $346, 456 \notin A$, i.e., $c = d = 0$. From (III) it follows $a = 0$ as well as $b = e$ ($b \leq e$ and $e \leq b$). If $b = e < \lambda/2$, then (II) yields $x_2(0,0,0,0,0) < y$ and $B \subset A$. If $b = e = \lambda/2$, then $y = x_1(0, \lambda/2, 0, 0, \lambda/2) = (\lambda/2) * x_2(0,1,0,0,1)$, i.e., $x_2(0,1,0,0,1) < y$ and $B' \subset A$, where B' results from B by the application of the permutation (46). ■

4. The number of 2-(6,3, λ) designs

Let $\varphi(\lambda)$ denote the number of 2-(6,3, λ) designs. By Theorem 2, $\varphi(\lambda)$ equals the number of integer solutions of the system (III). Using a computer we determined $\varphi(\lambda)$ for small values of λ :

λ	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\varphi(\lambda)$	12	73	284	835	2036	4347	8408	15069	25420	40821

Theorem 3: We have

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{128} \lambda^5 + \frac{5}{64} \lambda^4 + \frac{35}{96} \lambda^3 + \frac{15}{16} \lambda^2 + \frac{17}{12} \lambda + 1.$$

Proof: We only have to prove that $\varphi(\lambda)$ is a polynomial in λ of degree at most 5, because then the first 6 values of λ determine $\varphi(\lambda)$ uniquely. We need some preparations. Let A be an integer ($r \times s$)-matrix, \underline{b} a vector of s integers, and $\underline{1}$ the vector consisting of s ones. Further let C be any set in \mathbb{R}^s .

For the system

$$\begin{aligned} Ax &\leq \underline{b} + n * \underline{1}, \\ x &\in C \end{aligned} \tag{IV}$$

and for $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ we define $L_I(n)$ as the set of integer solutions of (IV) for which equality holds in the i -th row if $i \in I$ (equality is possible also in other rows).

Lemma 1: The number of integer solutions of (IV), i.e., $|L_\emptyset(n)|$ is a polynomial in n of degree at most d , if $|L_I(n)|$ is a polynomial in n of degree at most $d-1$ for all $I \subseteq \{1, \dots, r\}$ with $I \neq \emptyset$.

Proof: We only have to prove that $|L_\emptyset(n)| - |L_\emptyset(n-1)|$ is a polynomial in n of degree at most $d-1$. Obviously,
 $L_\emptyset(n-1) = L_\emptyset(n) \setminus (L_{\{1\}}(n) \cup \dots \cup L_{\{r\}}(n))$. By inclusion - exclusion and the supposition it follows

$$\begin{aligned}
 |L_\emptyset(n)| - |L_\emptyset(n-1)| &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, r\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} |L_I(n)| \\
 &= \text{polynomial in } n \text{ of} \\
 &\quad \text{degree at most } d-1. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Let $n = \lambda/2$. We will apply Lemma 1 to the system (III):

$$\begin{aligned}
 a &\leq n, & (1) \\
 b &\leq n, & (2) \\
 c &\leq n, & (3) \\
 d &\leq n, & (4) \\
 e &\leq n, & (5) \\
 c + d - a &\leq n, & (6) \\
 d + e - b &\leq n, & (7) \\
 e + a - c &\leq n, & (8) \\
 a + b - d &\leq n, & (9) \\
 b + c - e &\leq n, & (10)
 \end{aligned} \tag{III}$$

$$(a, b, c, d, e)^T \in C$$

where $C \subseteq \mathbb{R}^5$ is defined by

$$\begin{aligned}
 a, b, c, d, e &\geq 0, \\
 c + d - a &\geq 0, \\
 d + e - b &\geq 0, \\
 e + a - c &\geq 0, \\
 a + b - d &\geq 0, \\
 b + c - e &\geq 0.
 \end{aligned}$$

This system has a cyclic and symmetric structure, so we can reduce the investigations in several ways. In the following let $I \subseteq \{1, \dots, 5\}$, $J \subseteq \{6, \dots, 10\}$ and let $L_{I \cup J} = L_{I \cup J}(n)$ be the set of integer solutions of (III) having equality in the inequalities with numbers from $I \cup J$. For $I = \{i_1, \dots, i_t\}$ let $I + 1 = \{i_1+1, \dots, i_t+1\}$ (modulo 5 with representants $1, \dots, 5$), $6 - I = \{6-i_1, \dots, 6-i_t\}$, and for $J = \{j_1, \dots, j_t\}$ let $J + 1 = \{j_1+1, \dots, j_t+1\}$ (modulo 5 with representants $6, \dots, 10$), $11 - J = \{11-j_1, \dots, 11-j_t\}$.

Lemma 2 (cyclic shifting and reflection): We have

$$|L_{I \cup J}| = |L_{(I+1) \cup (J+1)}| = |L_{(6-I) \cup (11-J)}|.$$

Proof: Obviously $(a, b, c, d, e)^T \in L_{I \cup J}$ iff $(b, c, d, e, a)^T \in L_{(I+1) \cup (J+1)}$ iff $(e, d, c, b, a)^T \in L_{(6-I) \cup (11-J)}$. ■

Let the functions f and g be defined by

$$\begin{array}{cccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(i) & 6 & 9 & 7 & 10 & 8 \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{cccccc} j & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ g(j) & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{array},$$

for $I = \{i_1, \dots, i_t\}$ let $f(I) = \{f(i_1), \dots, f(i_t)\}$, and let $g(J)$ be defined analogously.

Lemma 3 (exchange): We have

$$|L_{I \cup J}| = |L_{g(J) \cup f(I)}|.$$

Proof: If we set

$$\begin{aligned} \alpha &= c + d - a, \\ \beta &= e + a - c, \\ \gamma &= b + c - e, \\ \delta &= d + e - b, \\ \epsilon &= a + b - d, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} a &= \gamma + \delta - \alpha, \\ c &= \delta + \epsilon - \beta, \\ e &= \epsilon + \alpha - \gamma, \\ b &= \alpha + \beta - \delta, \\ d &= \beta + \gamma - \epsilon. \end{aligned}$$

Obviously, $(a, b, c, d, e)^T \in L_{I \cup J}$ iff $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)^T \in L_{g(J) \cup f(I)}$. ■

Proof of Theorem 3 (continued): Because of Lemma 1 we only have to prove that $L_{I \cup J}$ is a polynomial in n of degree at most 4. By Lemma 2 it is enough to consider some special cases for I , and on account of Lemma 3 we may assume $|I| \geq |J|$.

Case 1: $|I| \geq 2$.

1.1: $\{1, 2\} \subseteq I$. Then (III) is equivalent to

$$\begin{aligned} a &= b = d = n, \\ 0 &\leq c = e \leq n. \end{aligned}$$

Consequently,

$$|L_{I \cup J}| = \begin{cases} n + 1, & \text{if } 3, 5 \notin I \text{ and } 6, 7 \notin J, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1.2: $\{2, 4\} \subseteq I$. Then (III) is equivalent to

$$\begin{aligned} b &= d = n, \\ 0 &\leq a, c, e \leq n, \\ e + a - c &\leq n, \\ e - c &\geq 0, \\ a - c &\geq 0. \end{aligned}$$

If $1, 3$ or $5 \in I$, then we may apply 1.1. If $7 \in J$ or $9 \in J$, then $e = n$ or $a = n$, and we may also apply 1.1. So let $1, 3, 5 \notin I$ (hence $I = \{2, 4\}$) and $7, 9 \notin J$.

1.2.1: $J = \emptyset$. Then

$$|L_{I \cup J}| = \sum_{c=0}^n \sum_{a=c}^n (n - a + 1) = \sum_{c=0}^n (n - c + 2) = \binom{n+3}{3}.$$

1.2.2: $J = \{6\}$. Then (III) is equivalent to

$$\begin{aligned} b &= d = n, \\ 0 &\leq a = c \leq e = n. \end{aligned} \text{ Hence}$$

$$|L_{I \cup J}| = \sum_{e=0}^n (e + 1) = \binom{n+2}{2}.$$

1.2.3: $J = \{8\}$. Then (III) is equivalent to

$$\begin{aligned} b &= d = n, \\ 0 &\leq a, c, e \leq n, \\ e + a - c &= n. \end{aligned} \text{ Hence}$$

$$|L_{I \cup J}| = \sum_{e=0}^n (e + 1) = \binom{n+2}{2}.$$

The cases $J = \{10\}$, $\{6, 8\} \subseteq J$ and $\{8, 10\} \subseteq J$ can be reduced by Lemma 2 and 3 to 1.2.2 and 1.1, respectively. So it remains only

1.2.4: $J = \{6, 10\}$. Then (III) is equivalent to

$$0 \leq a = c = e \leq n. \text{ Hence}$$

$$|L_{I \cup J}| = n + 1.$$

By Lemma 2, Case 1 is settled completely.

Case 2: $|I| = 1$, $|J| = 1$. Let w.l.o.g. (Lemma 2) $I = \{3\}$, i.e., $c = n$.

2.1: $J = \{6\}$. Then (III) is equivalent to

$$\begin{aligned} c &= n, c + d - a = n, a = d, \\ 0 &\leq b, d, e \leq n, \\ d + e - b &\leq n, \\ d + e &\geq n, \\ e - b &\geq 0. \text{ Hence} \end{aligned}$$

$$|L_{I \cup J}| = \sum_{e=0}^n \sum_{b=0}^e (b+1) = \sum_{e=0}^n \binom{e+2}{2} = \binom{n+3}{3}.$$

2.2: $J = \{7\}$. Then (III) is equivalent to

$$\begin{aligned} c &= n, e = n + b - d, \\ 0 &\leq b \leq d \leq a \leq n. \text{ Hence} \end{aligned}$$

$$|L_{I \cup J}| = \binom{n+3}{3}.$$

2.3: $J = \{8\}$. Then $e = a = c = n$, and we may apply the results of Case 1.

The cases $J = \{9\}$ and $J = \{10\}$ can be reduced to 2.2 and 2.1 by Lemma 3. Hence also Case 2 is settled completely.

Case 3: $|I| = 1$, $|J| = 0$. Let w.l.o.g. $I = \{1\}$, i.e., $a = n$. Then (III) is equivalent to

$$a = n, \tag{2}$$

$$b \leq n, \tag{3}$$

$$c \leq n, \tag{4}$$

$$d \leq n, \tag{5}$$

$$e \leq n, \tag{6}$$

$$d + e - b \leq n, \tag{7}$$

$$b + c - e \leq n, \tag{8}$$

$$c + d \geq n, \tag{9}$$

(V)

$$(b, c, d, e)^T \in C',$$

where $C' \subseteq \mathbb{R}^4$ is defined by

$$\begin{aligned} b, c, d, e &\geq 0, \\ c - e &\geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$d - b \geq 0. \quad (9)$$

Let (V') and (V'') be the systems which can be obtained from (V) by omitting the inequality (11) resp. by replacing the inequality (11) by

$$c + d \leq -1 + n. \quad (11'')$$

Let $L'(n)$ and $L''(n)$ be the sets of integer solutions of (V') and (V'') , respectively. Then $L_{\{1\}}(n) = L'(n) \setminus L''(n)$ and

$$|L_{\{1\}}(n)| = |L'(n)| - |L''(n)|.$$

It remains only to show that $|L'(n)|$ and $|L''(n)|$ are polynomials in n of degree at most 4. This can be done again by using Lemma 1. We have to change some (but at least one) of the inequalities of (V') resp. (V'') into equalities and have to check whether the number of integer solutions is a polynomial in n of degree at most 3. It can be verified easily that equality in one of the inequalities (2), (3), (4), (5), (7), (10) implies inequality (11) (note also (8) and (9)), hence, by supposition of at least one equality, (V) and (V') are equivalent, and we may apply the results of the preceding cases which yield polynomials in n of degree at most 3 (note also the equality $a = n$). Furthermore, equality in (V'') is only possible for (11''), and with $c + d = -1 + n$ the system (V'') is equivalent to

$$0 \leq b, d, e \leq n - 1,$$

$$b \leq d,$$

$$e + d \leq n - 1,$$

and the number of integer solutions of this systems is given by

$$\sum_{e=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{n-1-e} (d+1) = \sum_{e=0}^{n-1} \binom{n-e+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

Now all cases are settled, and Theorem 3 is proved. ■

Finally we mention that the number $\varphi^*(\lambda)$ of nonisomorphic $2-(6,3,\lambda)$ designs is bounded by polynomials in λ of degree 5 because of $\frac{1}{6!} \varphi(\lambda) \leq \omega^*(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$. Again using a computer Pietsch /5/ found for small values of λ the exact values of $\varphi^*(\lambda)$; only the values of $\lambda \leq 14$ were known before (see Gronau /3/):

λ	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\varphi^*(\lambda)$	1	4	6	13	19	34	49	76	105	153

References

- /1/ Burosch, G.: Über die Anzahl elementarer BUB der vollständigen $(6,3)$ -Familie. Rostock. Math. Kolloq. 11, 5-11 (1979)
- /2/ Burosch, G., Gronau, H.-D.O.F., and Rasch, D.: A short proof of a theorem of Hedayat and Khosrovshahi on $2-(6,3,\lambda)$ designs. Rostock. Math. Kolloq. 30, 63-66 (1986)
- /3/ Gronau, H.-D.O.F.: A survey of results on the number of $t-(v,k,\lambda)$ designs. Ann. Discrete Math. 26, 209-220 (1985)
- /4/ Nandi, H.K.: Enumeration of nonisomorphic solutions of balanced incomplete block designs. Sankhya 7, 305-312 (1946)
- /5/ Pietsch, C.: Personal communication. January 1988

received: November 2, 1987

revised: December 18, 1987

Authors:

Doz. Dr. Konrad Engel
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitätsplatz 1
 Rostock
 DDR-2500

Prof. Dr. Hans-Dietrich O.F. Gronau
 Ernst-Moritz-Arndt-Universität
 Sektion Mathematik
 F.-L.-Jahn-Straße 15a
 Greifswald
 DDR-2200

Walter Harnau

Mendelsohnsche Schnittzahlen und die Nichtexistenz von 5-(19, 9, 7)-Blockplänen

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. Dr. Gustav Burosch zum
50. Geburtstag gewidmet

Ein t -(v, k, λ)-Blockplan (BP) B ist ein System von (nicht notwendig paarweise voneinander verschiedenen) k -elementigen Teilmengen (genannt Blocks) einer v -elementigen Menge V , in dem jede t -elementige Teilmenge von V Teilmenge von genau λ Blocks von B ist. Ein Blockplan B heißt einfach oder wiederholungsfrei, wenn seine Blocks paarweise voneinander verschieden sind.

Damit ein t -(v, k, λ)-BP existieren kann, muß für $j = 0, 1, \dots, t$

$$\lambda \binom{v-j}{k-j} \binom{v-t}{k-t}^{-1} \in \mathbb{N} \text{ (natürliche Zahlen)} \quad (+)$$

gelten. Wenn die Frage nach der Existenz von t -(v, k, λ)-BP gestellt ist, so sei bereits abgesichert, daß die dafür notwendige Bedingung (+) erfüllt ist.

Es sei B ein t -(v, k, λ)-BP und b ein Block in ihm. Dann bezeichnet $n_i(b) := |\{b' \in B: |b \cap b'| = i\}|$ für $i = 0, 1, \dots, k$ die i -te Schnittzahl von b . Dabei ist $\widehat{n}_k(b)$ von Null verschieden. N.S. Mendelsohn zeigte in [3], daß diese $n_i(b)$ folgende Gleichungen erfüllen:

$$\sum_{i=j}^k \binom{i}{j} n_i(b) = \lambda \binom{k}{j} \binom{v-j}{k-j} \binom{v-t}{k-t}^{-1} \quad (j = 0, 1, \dots, t).$$

Das heißt also, wenn ein t -(v, k, λ)-BP B existiert und $b \in B$ ist, dann muß $(n_0(b), n_1(b), \dots, n_k(b)) \in \mathbb{N}^{k+1}$ Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$G(j) : \sum_{i=j}^k \binom{i}{j} x_i = c \binom{k}{j} \binom{v-j}{k-j} \quad (j = 0, 1, \dots, t) \quad (M)$$

mit $c = \lambda \binom{v-t}{k-t}^{-1}$ sein.

Wir formen jetzt das LGS (M) mit dem Gaußschen Eliminations-

verfahren äquivalent um und bestimmen seine allgemeine Lösung über der Menge der reellen Zahlen. Dazu ersetzen wir in (M) für $j = 0, 1, \dots, t-1$ die Gleichung $G(j)$ durch die Gleichung

$$G'(j) : G(j) + \sum_{i=j+1}^t (-1)^{i-j} \binom{i}{j} G(i) = \sum_{i=j}^t (-1)^{i-j} \binom{i}{j} G(i).$$

Für natürliche Zahlen r, i, j mit $r \geq i \geq j$ gelten die beiden folgenden Beziehungen für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{i}{j} \binom{r}{i} = \binom{r}{j} \binom{r-j}{i-j}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{r}{j} = (-1)^i \binom{r-1}{i}. \quad (2)$$

In $G'(j)$ bestimmen wir jetzt den Koeffizienten a_{jr} von x_r für $r = 0, 1, \dots, k$. Offenbar ist $a_{jr} = 0$ für $r < j$ und $a_{jj} = 1$. Im weiteren sei $r > j$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $r \leq t$. Hier gilt mit (1)

$$\begin{aligned} a_{jr} &= \sum_{i=j}^r (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{r}{i} = \binom{r}{j} \sum_{i=j}^r (-1)^{i-j} \binom{r-j}{i-j} \\ &= \binom{r}{j} \sum_{i=0}^{r-j} (-1)^i \binom{r-j}{i} = 0, \quad \text{da } r-j > 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Fall 2: $r > t$. Wir erhalten jetzt mit (1) und (2)

$$\begin{aligned} a_{jr} &= \sum_{i=j}^t (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{r}{i} = \binom{r}{j} \sum_{i=0}^{t-j} (-1)^i \binom{r-j}{i} \\ &= (-1)^{t-j} \binom{r}{r} \binom{r-j-1}{t-j} = (-1)^{t-j} \binom{r}{j} \binom{r-j-1}{r-t-1}. \end{aligned}$$

Abschließend ermitteln wir die rechte Seite a_j von $G'(j)$. Es ist

$$\begin{aligned} a_j &= c \sum_{i=j}^t (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{k}{i} \binom{v-i}{k-i} = c \binom{k}{j} \sum_{i=j}^t (-1)^{i-j} \binom{k-j}{i-j} \binom{v-i}{v-k} \\ &= c \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{t-j} (-1)^i \binom{k-j}{i} \binom{v-j-i}{v-k}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G'(j) &: x_j + \sum_{r=t+1}^k (-1)^{t-j} \binom{r}{j} \binom{r-j-1}{r-t-1} x_r \\ &= c \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{t-j} (-1)^i \binom{k-j}{i} \binom{v-j-i}{v-k} \quad (j = 0, 1, \dots, t) \end{aligned} \quad (M')$$

ein zu (M) äquivalentes LGS, von dem man unmittelbar die allgemeine Lösung über der Menge der reellen Zahlen ablesen kann. Also haben wir

Satz 1: Die Mendelsohnschen Schnittzahlen erfüllen das Gleichungssystem

$$n_j(b) + \sum_{r=t+1}^k (-1)^{t-j} \binom{r}{j} \binom{r-j-1}{r-t-1} n_r(b) \\ = \frac{\lambda \binom{k}{j}}{\binom{k-t}{j}} \sum_{i=0}^{t-j} (-1)^i \binom{k-j}{i} \binom{v-j-i}{v-k} \quad (j = 0, 1, \dots, t).$$

Wir wenden uns jetzt dem Nachweis der Nichtexistenz von 5-(19,9,7)-BP zu. Wegen (+) ist 7 das kleinste positive ganze λ , für das ein 5-(19,9, λ)-BP existieren kann. Die allgemeine Lösung von (M) über der Menge der reellen Zahlen ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned} x_0 &= -152 + s_6 + 6s_7 + 21s_8 + 56s_9, \\ x_1 &= 900 - 6s_6 - 35s_7 - 120s_8 - 315s_9, \\ x_2 &= -2160 + 15s_6 + 84s_7 + 280s_8 + 720s_9, \\ x_3 &= 2940 - 20s_6 - 105s_7 - 336s_8 - 840s_9, \\ x_4 &= -1764 + 15s_6 + 70s_7 + 210s_8 + 504s_9, \\ x_5 &= 882 - 6s_6 - 21s_7 - 56s_8 - 126s_9, \\ x_6 &= s_6, \quad x_7 = s_7, \quad x_8 = s_8, \quad x_9 = s_9 \\ & (s_6, s_7, s_8, s_9 \text{ beliebig reell}). \end{aligned}$$

Da uns für Blockpläne nur die Schnittzahlösungen interessieren, müssen alle x_i nichtnegative ganze Zahlen sein, wobei wegen $k=9$ sogar $x_9 > 0$ gelten muß, und somit folgt aus den Bedingungen für $x_1, x_2, x_6, x_7, x_8, x_9$:

$$\begin{aligned} s_6, s_7, s_8, s_9 &\in \mathbb{N}, & (i) \\ s_9 &> 0, & (ii) \\ 6s_6 + 35s_7 + 120s_8 + 315s_9 &\leq 900, & (iii) \\ 15s_6 + 84s_7 + 280s_8 + 720s_9 &\geq 2160. & (iv) \end{aligned}$$

Wir multiplizieren (iii) mit 5 und (iv) mit -2. Diese beiden so erhaltenen Ungleichungen können addiert werden und führen zu:

$$7s_7 + 40s_8 + 135s_9 \leq 180. \quad (v)$$

Wegen (i), (ii) und (v) muß $s_9 = 1$ gelten. Es können also höchstens wiederholungsfreie (einfache) 5-(19,9,7)-BP existieren. Damit werden (iii), (iv) und (v) zu

$$\begin{aligned} 6s_6 + 35s_7 + 120s_8 &\leq 585, & (vi) \\ 15s_6 + 84s_7 + 280s_8 &\geq 1440, & (vii) \\ 7s_7 + 40s_8 &\leq 45. & (viii) \end{aligned}$$

Aus (i) und (viii) folgt $s_8 \in \{0,1\}$.

Für $s_8 = 1$ ist $s_7 = 0$ ((i) und (viii)), (vi) bzw. (vii) ergeben mit (i) $s_6 \leq 77$ bzw. $s_6 \geq 78$. Folglich muß $s_8 = 0$ sein.

Wegen (i) und (viii) ist $s_7 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Mit $s_7 = 6$ erhalten wir aus (i) und (vi) bzw. (vii) $s_6 \leq 62$ bzw. $s_6 \geq 63$. Damit kann auch nicht $s_7 = 6$ gelten.

Wieder nur (i), (vi) und (vii) ausnutzend, erhalten wir, daß es höchstens für $(s_6, s_7, s_8, s_9) \in \{(68,5,0,1), (74,4,0,1), (80,3,0,1), (85,2,0,1), (91,1,0,1), (96,0,0,1), (97,0,0,1)\}$ Lösungen von (M) für 5-(19,9,7)-BP geben kann. Aus der allgemeinen Lösung von (M) erhält man für diese Wertekombinationen von s_6, s_7, s_8, s_9 die in Tabelle 1 angegebenen Lösungen L_1, L_2, \dots, L_7 .

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
L_1	2	2	0	215	110	243	68	5	0	1
L_2	2	1	6	200	130	228	74	4	0	1
L_3	2	0	12	185	150	213	80	3	0	1
L_4	1	5	3	190	155	204	85	2	0	1
L_5	1	4	9	175	175	189	91	1	0	1
L_6	0	9	0	180	180	180	96	0	0	1
L_7	1	3	15	160	195	174	97	0	0	1

Tabelle 1

Wenn es also einen 5-(19,9,7)-BP B gibt, so muß für jedes $b \in B$ ($n_0(b), n_1(b), \dots, n_9(b)$) mit einer der Lösungen L_1, L_2, \dots, L_7 übereinstimmen.

Wir werden jetzt die Annahme, daß es einen 5-(19,9,7)-BP gibt, zum Widerspruch führen. Dazu nehmen wir eine Fallunterscheidung vor, wobei o.B.d.A. $V = \{1,2, \dots, 19\}$ gesetzt sei.

Wir nehmen an, daß ein 5-(19,9,7)-BP B und in ihm ein c existiert, wobei wir stets o.B.d.A. $c = \{1,2, \dots, 9\}$ setzen können.

Fall 1: $n_0(c) = 2$. Damit gibt es o.B.d.A. in B , da B wiederholungsfrei sein muß, $x = \{10,11, \dots, 18\}$ und $y = \{11,12, \dots, 19\}$. Wegen $|x \cap y| = 8$ ist $n_8(x) \geq 1$. Da aber in L_1, L_2, \dots, L_7 stets $x_8 = 0$ gilt, kann dieser Fall nicht eintreten.

Für jedes $b \in B$ muß somit ($n_0(b), n_1(b), \dots, n_9(b)$) mit einer der Lösungen L_4, L_5, L_6, L_7 übereinstimmen, wobei insbesondere $n_1(b) \geq 3$ und $n_7(b) \leq 2$ gilt.

Fall 2: $n_0(c) = 1$. O.B.d.A. ist $x = \{10,11, \dots, 18\} \in B$. Da $n_1(c) \geq 3$ ist, gibt es $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ in B mit $|c \cap z_i| = 1$ ($i = 1,2,3$). Für $i = 1,2,3$ ist $|z_i \cap \{10,11, \dots, 19\}| = 8$,

folglich gilt $7 \leq |x \cap z_1| \leq 8$ und wegen $n_8(x) = 0$ sogar $|x \cap z_1| = 7$, woraus $n_7(x) \geq 3$ folgt, womit wir auch hier einen Widerspruch erhalten haben, da $n_7(b) \leq 2$ für alle $b \in B$ gelten muß.

Falls also ein 5-(19,9,7)-BP B existiert, muß für alle $b \in B$ $(n_0(b), n_1(b), \dots, n_9(b))$ mit L_6 übereinstimmen. Dies ist der letzte noch verbleibende Fall.

Fall 3: Hier muß insbesondere $n_0(c) = 0$ und $n_1(c) = 9$ gelten. Es seien b_1, b_2, \dots, b_9 die 9 Blocks aus B mit $|c \cap b_i| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, 9$). Für alle diese $b_i := \{\alpha_i, \beta_{i2}, \beta_{i3}, \dots, \beta_{i9}\}$ kann $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ und $\beta_{ij} \in \{10, 11, \dots, 19\}$ ($j \in \{2, 3, \dots, 9\}$) gesetzt werden. Es ist $8 \geq |b_i \cap b_j| \geq 6$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ und $i \neq j$), woraus $|b_i \cap b_j| = 6$ folgt, da in L_6 $x_7 = x_8 = 0$ gilt. Damit ist $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Folglich kann o.B.d.A. $\alpha_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) und $b_1 = \{1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ gesetzt werden. Damit $|b_1 \cap b_2| = 6$ wird, muß $\{18, 19\} \subset b_2$ gelten. Somit kann o.B.d.A. $b_2 = \{2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19\}$ gewählt werden. Nun ist $|b_1 \cap b_3| = 6$ und $|b_2 \cap b_3| = 6$ nur zu realisieren, wenn $\{18, 19\} \subset b_3$ und $\{16, 17\} \subset b_3$ gilt. Damit ist o.B.d.A. $b_3 = \{3, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19\}$.

Analog kann man o.B.d.A. $b_4 = \{4, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ und $b_5 = \{5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ setzen.

Jetzt muß auch $|b_i \cap b_6| = 6$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ gelten, woraus der Reihe nach $\{18, 19\} \subset b_6$, $\{16, 17\} \subset b_6$, $\{14, 15\} \subset b_6$, $\{12, 13\} \subset b_6$ bzw. $\{10, 11\} \subset b_6$ folgt. Damit ist $|b_6| \geq 10$ und b_6 kein Block von B . Wir haben also auch im letzten Fall einen Widerspruch erhalten und nachfolgenden Satz bewiesen.

Satz 2: Es gibt keinen 5-(19,9,7)-BP.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 1: Es gibt keinen 6-(20,10,7)-BP.

Abschließend seien noch zwei Bemerkungen gestattet.

1. Bereits im Jahre 1985 beschäftigte sich E. Köhler /2/ mit der Frage der Existenz von 5-(19,9,7)-BP. Dabei beschränkte er sich auf den Fall einfacher (wiederholungsfreier) Blockpläne und bestimmte die nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Mendelsohnschen Schnitzzahlgleichungen über die Erzeugung von Gray-Codes. Er führte dabei einen Computerbeweis, der darüber hinaus sehr umständlich erscheint.

Der danach von ihm geführte Beweis der Nichtexistenz anhand der Lösungen der Schnitzzahlgleichungen ist falsch, denn es wird

folgende Behauptung benutzt (s.a. /1/):

Wenn B ein einfacher t - (v, k, λ) -BP ist und b und b' zwei beliebige Blocks in ihm, so ist $n_i(b) = n_i(b')$ für alle $i = 0, 1, \dots, k$.

Das folgende Beispiel eines einfachen 2 - $(9, 4, 6)$ -BP, dessen Blocks die Spalten der Tabelle 2 sind, widerlegt diese Behauptung.

```
1111111111111111111122222222222233333355556
22222233333444443333344444444444666677
355678556675567755668556785566777888
467899897986898979789687997989889999
```

Tabelle 2

Für $a = \{1, 2, 3, 4\}$ und $b = \{6, 7, 8, 9\}$ ist $n_0(a) = 5$ und $n_0(b) = 1$. Deshalb wurde der Nichtexistenznachweis nach Auffinden der Lösungen der Schnitzzahlgleichungen hier so ausführlich dargestellt.

2. H.-D.O.F. Gronau, ebenfalls ein Schüler von Prof. Dr. G. Burrosch, verdanke ich den Hinweis, daß sich der Nachweis der Nichtexistenz von 5 - $(19, 9, 7)$ -BP auch auf den nicht wiederholungsfreien Fall übertragen läßt.

Literatur

- /1/ Harnau, W.: Bemerkungen zu einem Beweis der Nichtexistenz einiger Blockpläne (I). Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. "Karl Friedrich Wilhelm Wander" Dresden (im Druck)
- /2/ Köhler, E.: Über den allgemeinen Gray-Code und die Nichtexistenz einiger t -designs. In: Bodendiek, R., Schumacher, H., und Walther, G. (Eds.): Graphen in Forschung und Unterricht: Festschrift K. Wagner. S. 102 - 111, Bad Salzdetfurth 1985
- /3/ Mendelsohn, N. S.: Intersection numbers of t -designs. In: Mirsky, L. (Ed.): Studies in Pure Mathematics. pp. 145-150, New York 1971

eingegangen: 18. 9.1987

revidierte Fassung: 4.12.1987

Verfasser:

Doz. Dr. sc. nat Walter Harnau
Pädagogische Hochschule "K. F. W. Wander"
Sektion Mathematik
Wigardstraße 17, PSF 365
Dresden
DDR-8060

Jürgen Dassow

Convexity and Simplicity of Chain Code Picture Languages

Dedicated to Prof. Dr. W. Engel on the occasion of his sixtieth birthday

0. Introduction

In order to draw a picture by a plotter or on the screen of a computer the basic commands are often the following ones:

"go and draw one unit line segment to the left of (to the right of, upwards from, downwards from) the current point".

Then the work of the plotter and also the resulting picture can be described as a sequence of these elementary commands. If we abbreviate the commands by l, r, u, d, respectively, each picture can be described by a word over the alphabet {l,r,u,d}, and conversely, each word over {l,r,u,d} describes a picture. Therefore languages over {l,r,u,d} can be considered as descriptions of sets of pictures and vice versa. Thus, given a language generating device, we can regard the set of pictures corresponding to the generated language. Such sets of pictures are called chain code picture languages in /3/ and the subsequent papers /4/, /5/. In these papers chain code picture languages are studied from the formal language theory point of view. Pictures can be also considered as graphs, and in /1/ graph-theoretic properties of picture languages are investigated.

In this paper we are interested in the geometric properties convexity and simplicity. Especially, we study the problem whether or not all (some) pictures of a given language are convex (simple).

1. Definitions

First we recall some notions from isothetic geometry. We assume that all objects are in the plane which has an embedded Cartesian coordinate system.

An isothetic (straight) line is a straight line parallel to either the x-axis or the y-axis. An isothetic line segment is a segment of an isothetic line; note that also a point is an isothetic line segment by this definition. An isothetic curve is a connected sequence of isothetic line segments. Figure 1 shows some isothetic curves.

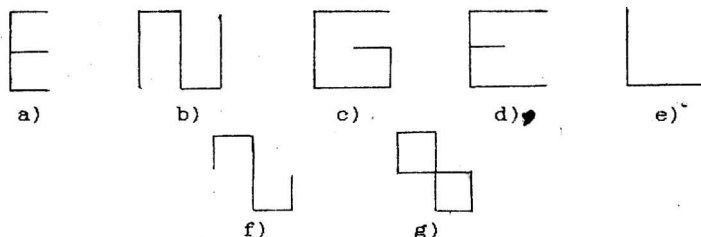


Figure 1

An isothetic curve is called simple if self-intersections only occur at endpoints of line segments and no more than two segments intersect at each endpoint.

The curves b), c), e), and f) of Figure 1 are simple, and a), d), g) are not simple.

An isothetic curve is called convex iff for any isothetic line the intersection with the isothetic curve is empty, a line segment or the union of two disjoint line segments.

We use the definition of convexity since in the sequel we shall consider non-Jordan curves which do not allow to define the outer and inner part of the plane, and thus we cannot use the usual definition that the line segment between two inner points consists only of inner points. Obviously, for closed simple curves our definition and the usual one are equivalent.

The curves e) and g) of Figure 1 are convex, in contrast to a), b), c), d), f) which are not convex.

If p and q are two curves, we write $p \sim q$ if there is a translation τ such that $\tau(p) = q$. Clearly, \sim is an equivalence relation. By $[p]$ we denote the equivalence class of p . We now formalize the concept of a picture language.

Let $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ where \mathbb{Z} denotes the set of integers. Then we set

$$\begin{aligned} u((m, n)) &= (m, n+1), & d((m, n)) &= (m, n-1), \\ r((m, n)) &= (m+1, n), & l((m, n)) &= (m-1, n). \end{aligned}$$

By $[z, b(z)]$ with $z \in \mathbb{Z}^2$, $b \in \{r, l, u, d\}$ we denote the line segment connecting the points z and $b(z)$ in the Cartesian plane. We now define inductively the drawn picture associated with a word w by

$$\begin{aligned} \text{dpic}(\lambda) &= (\emptyset, (0,0)) && (\lambda \text{ denotes the empty word}), \\ \text{if } \text{dpic}(w) &= (p, z) \text{ then } \text{dpic}(wb) = (p \cup [z, b(z)], b(z)) \end{aligned}$$

(intuitively, we start the drawing in the point $(0,0)$; the first component is the picture, the second component gives the end-point of the drawing).

Since we are interested in the picture itself independent of its place in the plane and its drawing, we define the basic picture by

$$\text{bpic}(w) = [p] \quad \text{if} \quad \text{dpic}(w) = (p, z) \quad \text{for some } z.$$

For instance with $w = \text{ldrl dr}$ and $v = \text{urlddr l ur}$ different drawn picture are associated, but the associated basic picture is the same for these two words and it is shown in Figure 1 a).

Let G be a phrase-structure-grammar such that its language $L(G) \subseteq \{u, d, r, l\}^*$. Then we set

$$B(G) = \{\text{bpic}(w) : w \in L(G)\},$$

and we call it the picture language generated by G . Further, a set B of pictures is called a regular (linear, context-free, etc.) picture language if there is a regular (linear, context-free, etc.) grammar G such that $B = B(G)$.

Obviously, each picture of a picture language is an isothetic curve. In this paper we are interested in two problems with respect to a geometric property A :

- Is it decidable whether or not all pictures generated by a given grammar have the property A ?
- Does there exist a picture with property A in the picture language generated by a grammar ?

We shall partially solve these problems with respect to the properties convexity and simplicity.

Throughout this paper we assume that the reader is familiar with the basic knowledge on formal languages (see e.g. [2]).

2. Results

For the sake of completeness we recall shortly the Post Correspondence Problem. Let V be an alphabet which consists of at least two letters. Further let

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{and} \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

be two sets of non-empty words of cardinality $n > 10$. Then we ask whether or not there exists a sequence i_1, i_2, \dots, i_k such that

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}.$$

It is well-known (see /2/) that it is undecidable whether or not such a sequence exists.

Theorem 1: For linear grammars G , it is undecidable whether or not the language $B(G)$ contains a convex picture.

Proof: The proof consists in a reduction of the problem of the existence of a convex picture to the Post Correspondence Problem. Let h and g be the homomorphisms defined by

$$\begin{aligned} h(a) &= \text{urdur}, & h(b) &= \text{urld}, \\ g(a) &= \text{lduld}, & g(b) &= \text{dlrdl}. \end{aligned}$$

Note that $h(x)$ and $g(x)$ for $x \in \{a, b\}$ are the same picture; they are drawn in reverse direction.

Now let $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ be an instance of the Post Correspondence Problem over the alphabet $\{a, b\}$. With it we associate the linear grammar

$$G_{U, V} = (\{S\}, \{u, d, r, l\}, P, S)$$

with

$$P = \{S \rightarrow h(u_i) S g(v_i^R) : 1 \leq i \leq n\} \cup \{S \rightarrow \text{urld}\}$$

(w^R denotes the mirror image (reversal) of w). The generated words are of the following form

$$\begin{aligned} w &= h(u_{i_1}) h(u_{i_2}) \dots h(u_{i_p}) \text{urld} g(v_{i_p}^R) g(v_{i_{p-1}}^R) \dots g(v_{i_1}^R) \\ &= h(u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p}) \text{urld} g((v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_p})^R). \end{aligned}$$

Assume that there is a solution of the Post Correspondence Problem for the given instance. Then, for some sequence i_1, i_2, \dots, i_p , we get

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p} = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_p}$$

and then

$$h(u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p}) \text{ur} \quad \text{and} \quad \text{ld} g((v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_p})^R)$$

define the same picture but drawn in reverse direction, and consequently, the picture associated with w has the form shown in Figure 2.

In this figure we assume that the word $u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_p}$ starts with ab and ends with b^2a^2 .

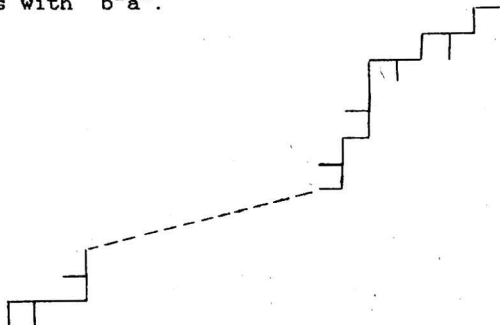


Figure 2

Figure 2 contains all subpictures associated with the possible words of length 2. Thus it is easy to see that $\text{bpic}(w)$ is a convex curve.

Moreover, let i_1, i_2, \dots, i_p be a sequence which is not a solution of the instance. Then the following holds

$u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_p} = w_1zw_2$ and $v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_p} = w_1'z'w_2'$
 where $z, z' \in \{a, b\}$, $z \neq z'$. Then the associated picture

$$h(w_1zw_2)\text{urldg}(w_2^R)g(z')g(w_1'^R)$$

has the form shown in Figure 3, and one can see that it is not convex.

Thus $B(G)$ contains a convex picture if and only if the corresponding instance U, V of the Post Correspondence Problem has a solution, and the existence of a solution of the Post Correspondence Problem is undecidable.

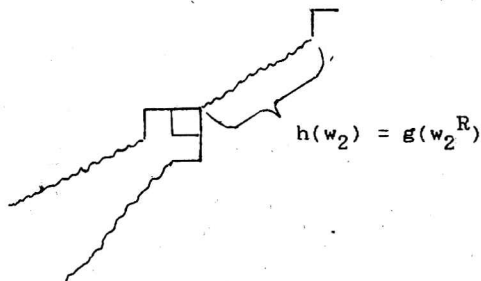


Figure 3

- Theorem 2:** i) For context-free grammars G , it is decidable whether or not all pictures of $B(G)$ are simple.
- ii) For linear grammars G , it is undecidable whether or not $B(G)$ contains a simple picture.

Proof: i) From the definition of simplicity, it is easy to see that a picture is simple if and only if it does not contain the pictures

$$p_1 = +, \quad p_2 = \text{P}, \quad p_3 = -, \quad p_4 = \perp, \quad p_5 = \top$$

as subpictures. By [3], Theorem 5.3, for context-free grammars G , it is decidable whether or not a picture q is a subpicture of $B(G)$, i.e., q is a subpicture of some picture p of $B(G)$. Thus we can decide whether or not some p_i , $1 \leq i \leq 5$, is a subpicture of $B(G)$. If the answer is positive, $B(G)$ contains a non-simple picture. If the answer is negative, all pictures of $B(G)$ are simple.

ii) We repeat the proof of Theorem 1 but we use the homomorphisms h and g given by

$$h(a) = r, \quad h(b) = u, \quad g(a) = l, \quad g(b) = d.$$

Then we obtain that the instance U, V has a solution if and only if there is a simple picture in $B(G)$, and thus we get the desired undecidability.

We say that a picture language B is a stripe language iff there are rational numbers k , d_1 , and d_2 such that for any basic picture p of B there is a drawn picture $q \in [p]$ such that any point (a, b) belonging to q satisfies

$$ka + d_1 \leq b \leq ka + d_2,$$

i.e., all pictures of B can be placed in the stripe between the two lines $y = kx + d_1$ and $y = kx + d_2$.

In [4] it is shown that it is decidable for context-free grammars whether or not they generate a stripe language. The next theorem shows that the restriction to stripe languages leads to decidability of all problems we are interested in.

Theorem 3: Let \mathcal{C} be the class of context-free grammars G such that $B(G)$ is a stripe language. The following problems are decidable for elements of \mathcal{C} :

- i) Decide whether or not all pictures of $B(G)$ are convex.
- ii) Decide whether or not $B(G)$ contains a convex picture.
- iii) Decide whether or not $B(G)$ contains a simple picture.

Proof: We give the proof only for i); the proofs of ii) and iii) follow the same basic ideas, the necessary obvious modifications are left to the reader.

We slice the stripe into pieces of width $d > 0$ which are parallel to the y -axis. Clearly, there is only a finite number of different pieces if we consider them as pictures. With every piece we associate a letter such that different pieces correspond to different letters. Let V be the alphabet of these letters. Since any picture can be considered as a sequence of pieces where we read the pieces from left to right, with any picture we can associate a word over V which is obtained as the sequence of the letters associated with the pieces of the picture. Thus every picture language B can be mapped on a (string) language L over V .

In /5/ it is proved that, for a context-free grammar G , the language L_G which corresponds to $B(G)$ is a context-free (string) language and that L_G can be constructed effectively. Now let $G \in \mathcal{C}$, and let $k, d_1, d_2, d_1 > d_2$, be the parameters of the stripe in which $B(G)$ is placed.

Case 1: $k \neq 0$. Then, clearly, any line parallel to the y -axis intersects the stripe only in points belonging to one piece, and any line parallel to the x -axis intersects the stripe in at most $r = \lceil \{(d_1 - d_2) / kd\} + 1 \rceil$ consecutive pieces. Let U_1 be the set of letters associated to such pieces which are not convex if they are considered as a picture, and let U_2 be the set of all words of length r which correspond to r consecutive pieces which are not convex if they are considered as one picture. Now it is obvious that $B(G)$ contains only convex pictures iff no word of L_G contains a letter of U_1 and no word of L_G contains a subword of U_2 , i.e., iff

$$LG = L_G \cap (V^*U_1V^* \cup V^*U_2V^*)$$

is empty. Since LG is also context-free and the emptiness of context-free languages is decidable, it is decidable whether or not $B(G)$ contains only convex pictures.

Case 2: $k = 0$. First we check as in Case 1 whether or not lines parallel to the y -axis have more than two line segments in common to the picture. If the answer is positive, $B(G)$ contains a non-convex picture, and the proof is finished. Thus in the sequel we consider only the case that the answer is negative. Let s be a rational number such that $d_1 \geq s \geq d_2$ and that $2s$ is an integer. Then we say that a point (a, s) , where a is an integer, is a convexity point of the picture p if it belongs

to p and $(a - 1/2, s)$ does not belong to p (i.e., (a, s) belongs only to a vertical line or in (a, s) starts a horizontal line, and thus this point contributes to a line segment in the intersection with the line $y = s$). Obviously, the picture language $B(G)$ contains only convex pictures iff, for any s with the above properties, any picture of $B(G)$ contains at most 2 convexity points.

Now let U_i^s be the set of letters associated with pieces which have i convexity points (a, s) . Clearly, $0 \leq i \leq d$ holds. Thus $B(G)$ contains only convex pictures iff the intersection of L_G with

$$\bigcup_s \left(\bigcup_{d \leq i \leq 3} V^* U_i^{s_1} V^* U_i^{s_2} V^* U_i^{s_1} V^* U_i^{s_2} V^* U_i^{s_1} V^* U_i^{s_2} V^* U_i^{s_1} V^* U_i^{s_2} V^* U_i^{s_1} V^* U_i^{s_2} V^* \right)$$

where the union is taken over all s such that $d_1 \geq s \geq d_2$ and $2s$ is an integer, is empty. Again, this is a decidable property.

Acknowledgement. The author is grateful to K. Engel whose comments improved the paper.

References

- /1/ Dassow, J.: Graph-theoretic properties of chain code picture languages. (submitted for publication)
- /2/ Hopcroft, J.E., and Ullman, J.D.: Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. Reading, 1979
- /3/ Maurer, H.A., Rozenberg, G., and Welzl, E.: Using string languages to describe picture languages. Inform. and Control 54, 155-185 (1983)
- /4/ Sudborough, I.H., and Welzl, E.: Complexity and decidability for chain code picture languages. Theoret. Comput. Sci. 36, 173-202 (1985)
- /5/ Welzl, E.: Chain Code Picture Languages. Dissertation, Technische Universität Graz 1983

received: September 8, 1987

revised : December 23, 1987

Author:

Prof. Dr. sc. nat. Jürgen Dassow
 Technische Universität Otto von Guericke Magdeburg
 Sektion Mathematik
 FSF 124
 Magdeburg
 DDR-3010

Jürgen Dassow

Subregularly Controlled Derivations: Context-Free Case

Dedicated to Prof. Dr. G. Burosch on the occasion of his fiftieth birthday

0. Introduction

It is a well-known fact that context-free grammars - the most investigated grammar type - are not able to cover all phenomena of programming languages or natural languages. Therefore a lot of regulating mechanisms have been introduced in the last two decades in order to enlarge the generative power (see e.g. [1]). One of these mechanisms is the use of a control language, i.e. only such derivations are allowed where the sequence of applied productions - considered as a word - belongs to the control language. In most cases regular control languages are considered since the increase of the generative capacity by context-free control languages is already too large.

Further, it is known that regular control languages have the same power as some other regulating mechanisms, e.g. matrices and programs. If one considers these mechanisms in terms of control languages one can see that only special regular control languages are used. Thus it is a natural problem to study the generative power of context-free derivations controlled by subsets of the set of regular languages.

This paper is a first step in this direction. We consider nilpotent, combinational, definite, non-counting, power-separating, commutative, and multi-entry languages for the control. We prove that besides the case of commutative languages the generated language family coincides with either the family of context-free languages or the family obtained by control with (general) regular languages. For commutative languages we obtain a properly intermediate family.

1. Definitions

Let V be an alphabet (i.e. a finite non empty set). Then by $V^*(V^+)$ we denote the set of all (non empty) words over V , and a language over V is a subset of V^* . Especially, we say that a language L over V is

- regular iff it can be constructed by a finite number of applications of the operations union, product and Kleene-star from the sets $\{x\}$ for $x \in V$, \emptyset , and $\{\lambda\}$ (λ denotes the empty word),
- combinational iff it can be represented in the form $L = V^*A$ for some finite non-empty subset $A \subseteq V$,
- definite iff it can be represented in the form $L = A \cup V^*B$ where A and B are finite subsets of V^* ,
- nilpotent iff L is finite or $V^* \setminus L$ is finite,
- commutative iff, for any natural number $n \geq 1$ and for any permutation π of $\{1, 2, \dots, n\}$, $a_1 a_2 \dots a_n \in L$ for $a_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, implies $a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(n)} \in L$,
- suffix-closed (or a multiple-entry language) iff $xy \in L$ for some $x, y \in V^+$ implies $y \in L$,
- non-counting iff there is an integer $k \geq 1$ such that, for any $x, y, z \in V^*$, $xy^k z \in L$ if and only if $xy^{k+1}z \in L$,
- power-separating iff for any $x \in V^*$ there is a natural number $m \geq 1$ such that either $J_x^m \cap L = \emptyset$ or $J_x^m \subseteq L$ for $J_x^m = \{x^n : n \geq m\}$.

It is obvious that combinational, definite, and nilpotent languages are regular, whereas non-regular languages of the other above mentioned types exist.

By REG, COMB, DEF, NIL, COMM, MUL, NC, PS we denote the families of all regular, combinational, definite, nilpotent, regular commutative, regular suffix-closed, regular non-counting, regular power-separating languages, respectively. The relations between these language families are investigated e.g. in /4/ and /12/ and can be given by Diagram 1 where an arrow from X to Y denotes $X \subseteq Y$, $X \neq Y$, and if two families are not connected by a sequence of equidirected arrows then they are incomparable. Characterizations of the above language families by automata and by congruence relations and further properties of them are given e.g. in the papers /2, 3, 11, 8, 6, 10/.

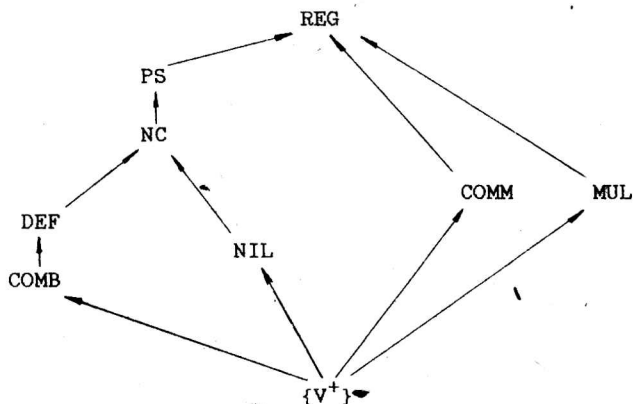


Diagram 1

- A context-free grammar is a quadruple $G = (V_N, V_T, P, S)$ where
- V_N and V_T are disjoint alphabets of nonterminals and terminals, respectively,
 - P is a finite set of rules (or productions) of the form $A \rightarrow z$ with $A \in V_N$, $z \in (V_N \cup V_T)^+$,
 - $S \in V_N$.

With each rule of P we associate a label in such a way that different rules have different labels. By M we denote the set of labels.

We say that y is directly derived from x by application of the production $A \rightarrow z$ with label p iff $x = x_1Ax_2$ for some $x_1, x_2 \in (V_N \cup V_T)^*$ and $y = x_1zx_2$, and this is denoted by $x \xrightarrow{p} y$. The language $L(G)$ generated by the context-free grammar G is defined as the set of all words $w \in V_T^*$ for which a derivation

$$D: S \xrightarrow{p_1} w_1 \xrightarrow{p_2} w_2 \xrightarrow{p_3} \dots \xrightarrow{p_r} w_r = w \quad (1)$$

exists. By \mathfrak{z} we denote the family of all context-free languages.

In (1) the word $p_1p_2\dots p_r$ over M is called the control word of the derivation D . One of the mechanisms in order to enlarge the power of context-free grammars is to impose restrictions on the control words. Let $G = (V_N, V_T, P, S)$ be a context-free grammar whose rules are labelled by M and let C be a language over M . Then we define the language $L(G, C)$ as the set of all words w such that there is a derivation D of the

form (1) with $p_1 p_2 \dots p_r \in C$. C is called the control language. Obviously, $L(G) = L(G, M^+)$.

Let X be a family of languages. Then we set

$$\mathfrak{L}(X) = \{L(G, C) : G \text{ is a context-free grammar and } C \in X\}.$$

Clearly, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\{M^+ : M \text{ is alphabet}\})$. In some papers the family $\mathfrak{L}(\text{REG})$ is studied intensively (see /1/ and /9/ for related results). Especially it is proved that \mathfrak{L} is a proper subfamily of $\mathfrak{L}(\text{REG})$ and that $\mathfrak{L}(\text{REG})$ coincides with some families which are defined by imposing other mechanisms on context-free grammars. In the following sections we study the relations between \mathfrak{L} and $\mathfrak{L}(X)$ or $\mathfrak{L}(X)$ and $\mathfrak{L}(Y)$ for language families defined above. We start with the following obvious fact.

Lemma 1: Let X and Y be language families such that $X \subseteq Y$. Then $\mathfrak{L}(X) \subseteq \mathfrak{L}(Y)$.

2. Control by nilpotent and definite languages

The following lemma is taken from /13/, a diploma thesis supervised by the author.

Lemma 2: $\mathfrak{L}(\text{NIL}) = \mathfrak{L}$.

Proof: i) By Lemma 1 and Diagram 1, we obtain $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}(\text{NIL})$.

ii) Let C be a finite language. Then $L(G, C)$ is also finite for any context-free grammar G , and since finite languages are context-free we get $L(G, C) \in \mathfrak{L}$.

Now let C be a language such that $C' = M^+ \setminus C$ is finite and let G be a context-free grammar. We define L' as the set of all words z with the property that any derivation of z from the axiom of G has a control word in C' . L' is finite and $L(G, C) = L(G) \setminus L'$. Since the subtraction of a finite language from a context-free language gives a context-free language, we obtain $L(G, C) \in \mathfrak{L}$.

Thus, for any context-free grammar G and any nilpotent language C , $L(G, C) \in \mathfrak{L}$ and therefore $\mathfrak{L}(\text{NIL}) \subseteq \mathfrak{L}$.

Lemma 3: $\mathfrak{L}(\text{DEF}) = \mathfrak{L}$.

Proof: i) Again, by Lemma 1 and Diagram 1, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}(\text{DEF})$.

ii) Let $C = A \cup M^*B$ and let G be a context-free grammar.

Then

$$L(G, C) = L(G, A \cup M^*B) = L(G, A) \cup L(G, M^*B).$$

Since A is finite we know $L(G, A) \in \mathfrak{L}$ from the proof of Lemma 2. Furthermore, because the family of context-free languages is closed under union it is sufficient to show that $L(G, M^*B) \in \mathfrak{L}$ in order to prove $L(G, C) \in \mathfrak{L}$ and thus also $\mathfrak{L}(\text{DEF}) \subseteq \mathfrak{L}$.

B is finite and therefore there is a finite set U of words u over V_N such that there is a derivation

$$D_u: u \xrightarrow{P_1} u_1 \xrightarrow{P_2} \dots \xrightarrow{P_r} u_r = u' \in V_T^*$$

with $P_1 P_2 \dots P_r \in B$. Moreover, if $u = A_1 A_2 \dots A_k$ then $u' = z_1 z_2 \dots z_k$ and there are derivations

$$A_i \xrightarrow{P_{j_1}} z'_{j_1} \xrightarrow{P_{j_2}} \dots \xrightarrow{P_{j_{k_i}}} z'_{j_{k_i}} = z_i,$$

and therefore it is easy to construct a generalized sequential machine $M = (Z, V_N, V_T, f, g, z_0)$ (where Z, V_N, V_T are the alphabet of states, the input and output alphabet, respectively, f is the transition function, g is the output function and z_0 is the initial state) which maps u to u' by mapping A_i to z_i . Now we extend M to

$$M' = (Z, V_N, V_T, f', g', z_0)$$

by setting

$$f'(z, a) = \begin{cases} f(z, a) & \text{for } a \in V_N, \\ z & \text{for } a \in V_T, \end{cases}$$

$$g'(z, a) = \begin{cases} g(z, a) & \text{for } a \in V_N, \\ a & \text{for } a \in V_T. \end{cases}$$

Let $ST(G)$ be the set of all sentential forms of G , i.e. the set of all words over $V_N \cup V_T$ which can be derived from the axiom in some steps. It is well-known that $ST(G)$ is also context-free. Then also

$$L' = ST(G) \cap \{x_1 A_1 x_2 A_2 \dots x_k A_k x_{k+1} : A_1 A_2 \dots A_k \in U, x_i \in V_T^*\}$$

is context-free, and it is easy to see that the image of L' under the mapping induced by M' is $L(G, M^*B)$. By the closure

of \mathcal{L} under mappings of generalized sequential machines we obtain $L(G, M^*B) \in \mathcal{L}$.

Corollary 4 (/13/): $\mathcal{L}(\text{COMB}) = \mathcal{L}$.

Proof: By Diagram 1, Lemma 1, and Lemma 3, we get

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{M^+ : M \text{ is an alphabet}\}) \subseteq \mathcal{L}(\text{COMB}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DEF}) = \mathcal{L}.$$

3. Control by non-counting and suffix-closed languages

Lemma 5: $\mathcal{L}(\text{NC}) = \mathcal{L}(\text{REG})$.

Proof: i) By Lemma 1 and Diagram 1, $\mathcal{L}(\text{NC}) \subseteq \mathcal{L}(\text{REG})$ holds.

ii) For the proof of the converse inclusion we need some facts on matrix grammars. A matrix grammar is a quadruple $G = (V_N, V_T, N, S)$ where V_N and V_T are disjoint alphabets, $S \in V_N$, and N is a finite set of finite sequences of context-free rules, i.e.

$$N = \{m_1, m_2, \dots, m_r\},$$

$$m_i = (A_{j_1, i} \rightarrow z_{j_1, i}, A_{j_2, i} \rightarrow z_{j_2, i}, \dots, A_{j_{k_i}, i} \rightarrow z_{j_{k_i}, i}),$$

where $A_{j_s, i} \in V_N$, $z_{j_s, i} \in (V_N \cup V_T)^+$ for $1 \leq i \leq r$, $1 \leq s \leq k_i$.

Again, we associate labels with the rules in the matrices, and if $A_{j_s, i} \rightarrow z_{j_s, i}$ in m_i is labelled by p_{j_s} , we describe the

matrix m_i by $m_i = p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_{k_i}}$. Then the language $L(G)$

generated by the matrix grammar G can be described by control sets as follows: Let $G' = (V_N, V_T, P, S)$ be the context-free grammar where P is the set of all rules occurring in the matrices of N . Then $L(G) = L(G', N^+)$. For matrix grammars the following normal form exists: V_N is the union of two disjoint sets $V_N^{(1)}$ and $V_N^{(2)}$, N contains only matrices of length 2, i.e. $m = pq$ for any matrix $m \in N$, and the productions labelled by p rewrite a letter of $V_N^{(1)}$, and the productions labelled by q replace a letter of $V_N^{(2)}$. Further it is known that the family of languages generated by matrix grammars coincides with $\mathcal{L}(\text{REG})$. Combining these facts we obtain: for any context-free grammar G and any regular language C , there is a context-free grammar G' and a set $N = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ such that $m_i = p_i q_i$, $p_i \neq q_j$ for all $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ and

$L(G, C) = L(G', N^+)$. We now prove that N^+ is non-counting and thus $L(G, C) \in \mathfrak{X}(\text{NC})$ which implies $\mathfrak{X}(\text{REG}) \subseteq \mathfrak{X}(\text{NC})$.

Let $xy^2z \in N^+$. Then $y = m_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_r}$ or $y = qm_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_r}p$ has to hold (since for $y = m_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_r}p$ we get $x = m_{j_1}m_{j_2}\dots m_{j_s}$ and thus $xy^2z \notin N^+$ because p is the

$(2s+2r+2)^{\text{nd}}$ letter in xy^2z but in an even position in a word in N^+ only letters of type q_i are possible, and an analogous argument forbids $y = qm_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_r}$). If $y = m_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_r}$, then $x = m_{j_1}m_{j_2}\dots m_{j_s}$, $z = m_{k_1}m_{k_2}\dots m_{k_t}$, and

$$xy^3z = m_{j_1}\dots m_{j_s}m_{i_1}\dots m_{i_r}m_{i_1}\dots m_{i_r}m_{i_1}\dots m_{i_r}m_{k_1}\dots m_{k_t} \in N^+.$$

If $y = qm_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_r}p$, then $x = m_{j_1}m_{j_2}\dots m_{j_s}p'$ and $z = q'm_{k_1}m_{k_2}\dots m_{k_t}$ where $p'q \in N$, $pq \in N$, and $pq' \in N$ by

$xy^2z \in N^+$. Therefore

$$xy^3z = m_{j_1}\dots m_{j_s}p'qm_{i_1}\dots m_{i_r}pqm_{i_1}\dots m_{i_r}pqm_{i_1}\dots m_{i_r}pq'm_{k_1}\dots m_{k_t}$$

is an element of N^+ . Thus $xy^2z \in N^+$ implies $xy^3z \in N^+$. The converse implication can be proved analogously. This proves that N^+ is non-counting.

Corollary 6: $\mathfrak{X}(\text{PS}) = \mathfrak{X}(\text{REG})$.

The following lemma is taken from [7], a diploma thesis supervised by the author.

Lemma 7: $\mathfrak{X}(\text{MUL}) = \mathfrak{X}(\text{REG})$.

Proof: i) Again, by Lemma 1 and Diagram 1, we get $\mathfrak{X}(\text{MUL}) \subseteq \mathfrak{X}(\text{REG})$.

ii) Let $L \in \mathfrak{X}(\text{REG})$. Then $L = L(G, C)$ for some context-free grammar $G = (V_N, V_T, P, S)$ and some regular language C . Then we consider the context-free grammar

$$G' = (V_N \cup \{S'\}, V_T, P \cup \{S' \rightarrow S\}, S')$$

and we add the label t associated with $S' \rightarrow S$. Then it is clear that $L(G, C) = L(G', \{t\}C)$.

Further, for a language K over V , let

$$\text{Suff}(K) = \{y : xy \in K \text{ for some } x \in V^*, y \in V^+\}.$$

It is well-known that $\text{Suff}(K)$ is regular for a regular language K . Obviously,

$$\text{Suff}(\{t\}C) = \{t\}C \cup \text{Suff}(C).$$

Since all words of $\text{Suff}(C)$ begin with a letter different from t , they cannot be used as control words since any correct derivation in G' has to start with an application of $S' \rightarrow S$ which is the only rule in order to rewrite the axiom S' . Thus

$$\begin{aligned} L(G', \text{Suff}(\{t\}C)) &= L(G', \{t\}C) \cup L(G', \text{Suff}(C)) \\ &= L(G', \{t\}C). \end{aligned}$$

Clearly, $\text{Suff}(\{t\}C)$ is suffix-closed by definition, and hence

$$L(G, C) = L(G', \text{Suff}(\{t\}C)) \in \mathfrak{L}(\text{MUL}).$$

This proves $\mathfrak{L}(\text{REG}) \subseteq \mathfrak{L}(\text{MUL})$.

4. Control by commutative languages

Lemma 8: $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{L}(\text{COMM}) \not\subseteq \mathfrak{L}(\text{REG})$.

Proof: i) $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}(\text{COMM})$ follows from the commutativity of all languages of the form M^+ for some alphabet M . We now prove the existence of a non-context-free language in $\mathfrak{L}(\text{COMM})$.

We consider the context-free grammar $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ with the set P consisting of the following rules with their labels:

$$\begin{array}{llll} p_1: S \rightarrow AB, & p_2: A \rightarrow aAb, & p_3: B \rightarrow cB, & p_4: A \rightarrow ab, \\ p_5: B \rightarrow c. & & & \end{array}$$

Then

$$L(G, \{p_1(p_2p_3)^n p_4 p_5 : n \geq 0\}) = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\},$$

and this is the classical example of a non-context-free language.

By $\#_x(w)$ we denote the number of occurrences of the letter x in the word w . Now let

$$C = \{w : \#_{p_1}(w) = \#_{p_4}(w) = \#_{p_5}(w) = 1, \#_{p_2}(w) = \#_{p_3}(w)\}.$$

Clearly, C is a commutative language. But with respect to the grammar G only the words with the following properties can be control words: they begin with p_1 ; after p_4 and p_5 no application of p_2 and p_3 , respectively, is possible. Thus the control words for derivation in G which belong to C are of the form

$$\begin{aligned} w_1 &= P_1 w_1 P_4 w_2 P_5, \quad \#_{P_2}(w_2) = 0, \quad \#_{P_2}(w_1) = \#_{P_3}(w_1 w_2) \\ \text{or} \\ v &= P_1 v_1 P_5 v_2 P_4, \quad \#_{P_3}(v_2) = 0, \quad \#_{P_3}(v_1) = \#_{P_2}(v_1 v_2). \end{aligned}$$

Moreover, the order of the rewritings of A and B can be permuted without changing the terminal word obtained by the corresponding derivations. Hence the control words $P_1 w_1 P_4 w_2 P_5$

$(P_1 v_1 P_5 v_2 P_4)$ and $P_1 (P_2 P_3)^n P_4 P_5$ where $n = \#_{P_2}(w_1)$ $(P_1 (P_2 P_3)^m P_4 P_5$ where $m = \#_{P_3}(v_1)$, respectively) describe derivations

generating the word $a^n b^n c^n$ ($a^m b^m c^m$, respectively).

Therefore

$$L(G, C) = L(G, \{P_1 (P_2 P_3)^n P_4 P_5 : n \geq 0\}) = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$$

which is not context-free.

ii) $\mathcal{L}(\text{COMM}) \subseteq \mathcal{L}(\text{REG})$ follows by Lemma 1 and Diagram 1. We now prove the strictness of the inclusion.

Let $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Then the Parikh vector of a word w over V is defined as

$$p(w) = (\#_{a_1}(w), \#_{a_2}(w), \dots, \#_{a_n}(w))^T.$$

A language L is called semilinear iff the set

$$p(L) = \{p(w) : w \in L\}$$

can be represented as a finite union of sets of the form

$$\{\underline{a} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{b}_i : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$$

where \underline{a} and \underline{b}_i , $1 \leq i \leq n$, are elements of \mathbb{N}^n (\mathbb{N} denotes the set of non-negative integers).

In /5/ it is shown that languages of the form $L(G, C)$, where C is a commutative language, are semilinear (more precisely, in /5/ it is proved for a special case, but there it is only used that $p^{-1}(p(L)) = L$ holds for this language, and this is valid for all commutative languages). On the other hand, it is known that $\mathcal{L}(\text{REG})$ contains some non-semilinear languages (see e.g. /1/). Thus the inclusion $\mathcal{L}(\text{COMM}) \subseteq \mathcal{L}(\text{REG})$ is strict.

In accordance with M. Jantzen (see /5/) we conjecture that $\mathcal{L}(\text{COMM})$ equals the family of vector languages (see /1/, /5/). Summarizing our results we obtain

Theorem 9: $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\text{NIL}) = \mathfrak{L}(\text{COMB}) = \mathfrak{L}(\text{DEF}) \subsetneq \mathfrak{L}(\text{COMM})$
 $\subsetneq \mathfrak{L}(\text{NC}) = \mathfrak{L}(\text{FS}) = \mathfrak{L}(\text{MUL}) = \mathfrak{L}(\text{REG})$.

References

- /1/ Dassow, J., and Paun, Gh.: Regulated Rewriting in Formal Language Theory. Berlin, 1988
- /2/ Geeseq, F., and Peak, I.: Algebraic Theory of Automata. Budapest, 1972
- /3/ Gill, A., and Kou, L.T.: Multiple-entry finite automata. J. Comput. System Sci. 9, 1-19 (1974)
- /4/ Havel, I.: The theory of regular events II. Kybernetika 5, 520-544 (1969)
- /5/ Jantzen, M.: A note on vector grammars. Inform. Process. Lett. 8, 32-33 (1979)
- /6/ McNaughton, R., and Papert, S.: Counter-Free Automata. Cambridge, 1971
- /7/ Missal, D.: Subregulär gesteuerte kontext-freie Grammatiken. Diplomarbeit, Technische Universität Otto von Guericke Magdeburg 1988
- /8/ Perles, M., Rabin, M.O., and Shamir, E.: The theory of definite automata. IEEE Trans. Electronic Computers 12, 233-243 (1963)
- /9/ Salomaa, A.: Formal Languages. New York, 1973
- /10/ Shyr, H.J., and Thierrin, G.: Power-separating regular languages. Math. Systems Theory 8, 90-95 (1974)
- /11/ Thierrin, G.: Some properties of the languages accepted by multiple-entry finite automata. Manuscript, The University of Western Ontario 1977
- /12/ Wiedemann, B.: Vergleich der Leistungsfähigkeit endlicher determinierter Automaten. Diplomarbeit, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1978
- /13/ Meyer, K.: Kontext-freie Ableitungen mit subregulären Kontrollsprachen. Diplomarbeit, Technische Hochschule Otto von Guericke Magdeburg 1986

received: September 9, 1987

revised : December 23, 1987

Author:

Prof. Dr. sc. nat. Jürgen Dassow
Technische Universität Otto von Guericke Magdeburg
Sektion Mathematik
PSF 124
Magdeburg
DDR-3010

Dietlinde Lau

Maximale Klassen von $P_k(1)$

Prof. G. Burosch zu seinem 50. Geburtstag gewidmet

Sei $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, $P_k^n = \{f^n \mid f^n: E_k^n \rightarrow E_k\}$ und $P_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^n$. Für $A \subseteq P_k$ und $2 \leq l < k$ bezeichne $A(1)$ die Menge aller Funktionen aus A , die höchstens l verschiedene Werte annehmen. Durch $A[1]$ kennzeichnen wir die Menge derjenigen Funktionen f aus A , deren Wertebereich $W(f)$ genau l Elemente enthält. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, sämtliche maximalen Klassen von $P_k(1)$ zu ermitteln, die als Durchschnitte von $P_k(1)$ mit maximalen Klassen von P_k beschreibbar sind. Sämtliche maximalen Klassen von P_k wurden in /7/ bestimmt. Wir übernehmen im weiteren die Bezeichnungen aus /7/, die auch in /4/ nachzulesen sind, sowie einige aus /3/. Abweichend von /7/ bzw. /4/ bezeichnen wir den Abschluß einer Menge A ($\subseteq P_k$) mit $[A]$ anstatt mit \bar{A} . Außerdem sei

$$L_k := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \in P_k(1) \mid \exists f_0, f_1, \dots, f_n \in P_k^1: \\ f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \bmod 2)\} \quad (/1/),$$

$$P_{k,E} := \{f \in P_k \mid W(f) \subseteq E\} \quad (E \subseteq E_k) \text{ und } P_{k,1} := P_{k,E_1}.$$

Für eine erste Grobbeschreibung der maximalen Klassen von $P_k(1)$ benötigen wir den

Satz 1: Sei $f \in P_k[1]$ eine Funktion, die für $l \geq 3$ von mindestens zwei Variablen wesentlich abhängt und für $l = 2$ nicht zu L_k gehört. Dann gilt $[P_k(1)]^1 \cup \{f\} = P_k(1)$.

Beweis: Als Superposition über $P_k(1)^1 \cup \{f\}$ erhält man offenbar eine Funktion

$$f' \in \begin{cases} P_{k,1} \setminus \text{pr}^{-1}(\text{Pol}_1 \cup \{1\}) & \text{für } 1 \geq 3, \\ P_{k,2} \setminus \text{pr}^{-1}L_2 & \text{für } 1 = 2. \end{cases}$$

Mit Hilfe des Vollständigkeitskriteriums für $P_{k,1}$ aus /3/ folgt hieraus $P_{k,1} \subseteq [P_k(1)]^1 \cup \{f\}$. Unsere Behauptung ergibt sich somit aus $P_k(1) = \{f * g \mid f \in P_k(1)^1 \wedge g \in P_{k,1}\}$. ■

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 1 ist der

Satz 2: Die einzige maximale Klasse von $P_k(1)$, die $P_k(1)^1$ enthält, ist

$$Z := \begin{cases} L_k & \text{für } 1 = 2, \\ [P_k(1)^1] \cup P_k(1-1) & \text{für } 2 \leq 1 \leq k-1. \end{cases}$$

Analog zu den Überlegungen aus /7/ beweist man den

Satz 3: Für jede von Z verschiedene maximale Klasse A von $P_k(1)$ existiert eine h -äre Relation e mit $1 \leq h \leq k$ und $A = (\text{Pol } e)(1)$.

Nach /7/ wären damit mögliche maximale Klassen gewisse Mengen der Form $(\text{Pol } e)(1)$ mit $e \in \mathbb{M}_k \cup \mathbb{U}_k \cup \mathbb{O}_k \cup \mathbb{Z}_k \cup \mathbb{J}_k \cup \mathbb{K}_k$ (siehe /4/). Wir werden im folgenden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Maximalität solcher Klassen in $P_k(1)$ angeben.

Satz 4 (/2/): $(\text{Pol } e)(1)$ ist für $e \in \mathbb{M}_k$ genau dann in $P_k(1)$ maximal, wenn jede 1-elementige Teilmenge von \mathbb{E}_k bez. e ein größtes und ein kleinstes Element besitzt.

Lemma 1: Sei $k = p^m$, p prim, $m \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}_k$ und $f \in \text{Pol}_k \lambda$. Dann ist der Wertebereich von f eine Nebenklasse einer gewissen Untergruppe U von $(\mathbb{E}_k, +)$ ($(\mathbb{E}_k, +, *)$ sei der zu λ gehörende Körper), genauer gilt $W(f) = f(0, \dots, 0) + U$. Außerdem ist $|W(f)| = p^i$ für ein gewisses i mit $1 \leq i \leq m$.

Der Beweis ergibt sich aus der Darstellung der Funktionen aus $\text{Pol}_k \lambda$ (/7/ oder /6/) und Eigenschaften des Galoisfeldes. ■

Satz 5: Für jedes $e \in \mathcal{U}_k \cup \mathcal{X}_k$ ist $(\text{Pol } e)(1)$ nicht maximal in $P_k(1)$.

Beweis: Sei zunächst $e_s \in \mathcal{U}_k$, $k = L \cdot p$, p prim, $L \in \mathbb{N}$, und s zerfalle in Zyklen der Primzahllänge p . Aus der Darstellung (4) in /4/ für Funktionen aus $\text{Pol } e_s$ ist ablesbar, daß es keine Funktionen in $\text{Pol } e_s$ gibt, deren Wertebereich N die Eigenschaften

$$\emptyset \neq N \cap \{a_{r,0}, a_{r,1}, \dots, a_{r,p-1}\} \subsetneq \{a_{r,0}, a_{r,1}, \dots, a_{r,p-1}\}$$

für ein gewisses $r \in \{1, 2, \dots, L\}$ und $|N| = 1$ besitzt. Folglich ist $(\text{Pol } e_s)(1)$ eine echte Teilmenge von $P_k(1) \setminus P_{k,N}[1]$, womit $(\text{Pol } e_s)(1)$ in $P_k(1)$ nicht maximal sein kann.

Sei nun $\lambda \in \mathcal{X}_k$, $k = p^m$, p prim und $m \geq 1$.

Nach Lemma 1 gilt für $1 < p$ offenbar $(\text{Pol } \lambda)(1) = P_k(1)$ sowie $(\text{Pol } \lambda)(1) \subsetneq P_k(p^i) \subsetneq P_k(1)$ für $p^i < 1 < p^{i+1}$ ($1 \leq i \leq m-1$).

Falls $1 = p^i$ ($1 \leq i \leq m-1$), so gehören zu $(\text{Pol } \lambda)(1)$ keine Funktionen mit dem Wertebereich $N := \{0, a_1, a_2, \dots, a_{1-2}, b\}$, wobei $b \notin \langle \{0, a_1, \dots, a_{1-2}\} \rangle$, $|\langle \{0, a_1, \dots, a_{1-2}\} \rangle| = 1-1$ ist und $\langle \dots \rangle$ den Abschluß bez. + des Körpers $(\mathbb{E}_k, +, *)$ und 0 das neutrale Element von $(\mathbb{E}_k, +)$ bezeichnet. Diese Aussage ergibt sich aus $|\langle \{0, a_1, \dots, a_{1-2}, b\} \rangle| > 1$ und Lemma 1.

Folglich können Mengen der Form $(\text{Pol } \lambda)(1)$ in $P_k(1)$ nicht maximal sein. ■

Satz 6: Für jedes $e \in \mathcal{U}_k$ ist $(\text{Pol } e)(1)$ maximal in $P_k(1)$.

Beweis: Für jedes $e \in \mathcal{U}_k$ ist offenbar $(\text{Pol } e)(1)$ eine echte Teilklasse von $P_k(1)$. Sei $f^n \in P_k(1) \setminus \text{Pol } e$, d.h. es gibt gewisse $r_1, \dots, r_n \in e$ mit $f(r_1, \dots, r_n) \notin e$. Das Einsetzen gewisser einstelliger Funktionen aus $(\text{Pol } e)(1)$ in f liefert als Superposition über $(\text{Pol } e)(1) \cup \{f\}$ eine einstellige Funktion f' , die e nicht bewahrt. O.B.d.A. sei $W(f') = \{a, b\}$. Mit Hilfe von f' lassen sich alle Funktionen h_α mit

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} a & \text{für } x = \alpha, \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\alpha \in \mathbb{E}_k$ konstruieren. Bezeichne nun g eine beliebige m -stellige Funktion aus $P_k(1)$, von der wir $g \in [(\text{Pol } e)(1) \cup \{f\}]$ zeigen wollen. Dazu benötigen wir noch einige Bezeichnungen.

Q sei eine Matrix vom Typ $(k^m, m \cdot (k+1))$, deren Zeilen folgendermaßen beschrieben werden können:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_m, h_0(x_1), h_1(x_1), \dots, h_{k-1}(x_1), h_0(x_2), \dots \\ & \dots, h_{k-1}(x_2), \dots, h_0(x_m), h_1(x_m), \dots, h_{k-1}(x_m)) \end{aligned}$$

Die Zeilen der Matrix Q sind so gewählt, daß sich für zwei beliebige verschiedene Zeilen $(a_1, a_2, \dots, a_{(k+1)m})$ und $(b_1, b_2, \dots, b_{(k+1)m})$ stets ein i mit $(a_i, b_i) \notin e$ finden läßt. Folglich gibt es eine $(k+1)m$ -stellige Funktion H_g in $(\text{Pol } e)(1)$, für die

$$\begin{aligned} & H_g(x_1, \dots, x_m, h_0(x_1), \dots, h_{k-1}(x_1), h_0(x_2), \dots \\ & \dots, h_{k-1}(x_2), \dots, h_0(x_m), \dots, h_{k-1}(x_m)) = g(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

gilt. Also ist g eine Superposition über $(\text{Pol } e)(1) \cup \{f\}$. ■

Satz 7: Sei $e \in \mathcal{C}_k^h$ ($1 \leq h \leq k-1$). Dann ist $(\text{Pol } e)(1)$ genau dann in $P_k(1)$ maximal, wenn

(a) $h = 1$ ist und es eine 1-elementige Menge $\{a_0, \dots, a_{1-1}\}$ gibt mit

$$e = \pi_k^h \setminus \{(a_s(0), \dots, a_s(h-1)) \mid s \text{ Permutation auf } E_1\},$$

oder wenn

(b) $h < 1$ ist und für jede 1-elementige Menge E aus E_k ein zentrales Element $c \in E$ existiert, d.h., $(a_0, \dots, a_{h-2}, c) \in e$ für beliebige $a_0, \dots, a_{h-2} \in E$ gilt.

Beweis: Offensichtlich stimmt $(\text{Pol } e)(1)$ für $e \in \mathcal{C}_k^h$ genau dann mit $P_k(1)$ überein, wenn $h > 1$ ist. Wir haben also nur den Fall $1 \leq h \leq 1$ zu untersuchen.

Sei e eine h -äre Relation aus \mathcal{C}_k mit der Eigenschaft, daß eine gewisse 1-elementige Menge $E \subset E_k$ kein zentrales Element besitzt. Wir zeigen, daß hieraus

$$(\text{Pol } e)(1) \subsetneq P_k(1) \setminus P_{k,E}[1] \quad (1)$$

folgt. Angenommen, $(\text{Pol } e)(1)$ enthält eine Funktion f , deren Wertebereich E ist. Ferner bezeichne c ein zentrales Element von e , und es sei $f(c, c, \dots, c) = a$. Da a kein zentrales Element von E ist, findet man gewisse $a_1, \dots, a_{h-1} \in E$ mit $(a, a_1, \dots, a_{h-1}) \notin e$.

Hieraus und aus $f(c, c, \dots, c) = a$ läßt sich leicht $f \notin \text{Pol } e$ herleiten. Also ist (1) richtig. Offenbar gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn e die Bedingung (a) erfüllt. Folglich sind die Klassen $(\text{Pol } e)(1)$, $e \in \mathcal{L}_k$, die nicht den Bedingungen unseres Satzes genügen, nicht maximal in $P_k(1)$. Die Maximalität der verbliebenen Klassen des Typs $(\text{Pol } e)(1)$, $e \in \mathcal{L}_k$, in $P_k(1)$ beweist man analog zu (9.3.1. - 9.3.5) in /7/. ■

Satz 8: Sei $e \in \mathcal{S}_k^h$, d.h., e ist homomorphes Urbild einer h -adischen elementaren Relation ξ_m ($3 \leq h \leq k$, $m \geq 1$). Dann ist $(\text{Pol } e)(1)$ genau dann in $P_k(1)$ maximal, wenn $l = h$ ist.

Beweis: Die Bezeichnungen und Darstellungen für Funktionen aus $\text{Pol } e$ mit $e \in \mathcal{S}_k$ seien wie in /4/, § 4 gewählt.

Da offenbar $(\text{Pol } e)(1) = P_k(1)$ für $e \in \mathcal{S}_k$ genau dann gilt, wenn $h > 1$ ist, genügt es, den Fall $3 \leq h \leq 1$ zu untersuchen. Zunächst soll gezeigt werden, daß es für $h^u \leq v < h^{u+1}$ ($1 \leq u \leq m-1$, $v \neq h$) nicht zu jeder v -elementigen Menge $E \subseteq E_{h^m}$ Funktionen in $\text{Pol}_{h^m} \xi_m$ mit dem Wertebereich E gibt. Sei

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^u s_i(x_{a_i}^{(t_i)}) h^i \quad (2)$$

($\{a_0, \dots, a_u\} = \{1, \dots, n\}$; $t_0, \dots, t_u \in E_m$; s_1, \dots, s_u Permutationen auf E_h). Diese Funktion gehört nach 4.1 aus /4/ zu $\text{Pol } \xi_m$, und sie nimmt genau

$$h \mid \{(t_i, a_i) \mid i \in E_{u+1}\} \quad (3)$$

verschiedene Werte an. Ferner gilt

$$\begin{aligned} (\exists a, b \in W(f): a^{(i)} = b^{(i)} \wedge a^{(j)} \neq b^{(j)}) \\ \Rightarrow (t_i, a_i) \neq (t_j, a_j). \end{aligned} \quad (4)$$

Bezeichne nun E eine v -elementige Teilmenge von $E_{h^{u+1}}$, die für $u = 1$ die Menge

$$\varepsilon := \left\{ \sum_{i=0}^{u-1} a_i h^i + a_0 h^u \mid a_0, \dots, a_{h-1} \in E_1 \right\} \cup \{h^u\}$$

und für $u \neq 1$ die Menge $\varepsilon \setminus \{0\}$ enthalte. Angenommen, es existiert in $\text{Pol } \xi_m$ eine Funktion f mit $W(f) = E$. Nach Lemma 4.1 aus /4/ muß f durch eine gewisse Formel des Typs (2) beschrieben werden können. Die Menge ε bzw. $\varepsilon \setminus \{0\}$ ist so konstruiert, daß

für zwei beliebige $i, j \in E_{u+1}$ mit $i \neq j$ sich stets $a, b \in E$ mit $a^{(i)} = b^{(i)}$ und $a^{(j)} \neq b^{(j)}$ finden lassen. Hieraus und aus (3) folgt $|W(f)| = h^{u+1} > v$, im Widerspruch zu unserer Annahme $|W(f)| = v$.

Man prüft leicht nach, daß sich für $l \neq h$ immer gewisse u, v ($h^u \leq v < h^{u+1}$, $1 \leq u \leq m-1$, $v \neq h$) und eine l -elementige Menge E' mit $q(E') = E$ finden lassen, wobei E die oben angegebenen Eigenschaften besitzt. Anhand der in /4/ angegebenen Beschreibung der Funktionen aus $\text{Pol } e$ kann man sich leicht überlegen, daß es in $(\text{Pol } e)(l)$ keine Funktionen mit dem Wertebereich E' gibt. Folglich ist $(\text{Pol } e)(l)$ für $l \neq h$ nicht maximal in $P_k(l)$.

Sei jetzt $l = h$. Offenbar ist dann $(\text{Pol } e)(l) \neq P_k(l)$. Für den Nachweis der Maximalität von $(\text{Pol } e)(l)$ in $P_k(l)$ bezeichne g eine beliebige Funktion aus $P_k(l) \setminus \text{Pol } e$. Eine Superposition über $(\text{Pol } e)(l) \cup \{g\}$ ist dann eine gewisse einstellige Funktion g' , für die ein Tupel $(b_0, \dots, b_{h-1}) \in e \setminus \mathcal{U}_k^h$ mit $g'(b_i) = r(i)$ für alle $i \in E_h$ existiert. Wegen $P_k, \{b_0, \dots, b_{h-1}\} \subseteq (\text{Pol } e)(l)$ gilt folglich

$$P_{k, r(E_h)} = g'(P_{k, \{b_0, \dots, b_{h-1}\}}) \subseteq [(\text{Pol } e)(l) \cup \{g\}].$$

Offensichtlich gibt es in $(\text{Pol } e)(l)$ für $l = h$ Funktionen, die auf allen Tupeln aus $(r(E_h))^n$ alle Werte einer beliebigen h -elementigen Menge aus E_k annehmen. Hieraus und aus dem oben Gezeigten läßt sich ohne Schwierigkeiten $[(\text{Pol } e)(l) \cup \{g\}] = P_k(l)$ folgern. ■

Bezeichne $\mathcal{M}_k(l)$, $\mathcal{L}_k(l)$ bzw. $\mathcal{Z}_k(l)$ die Menge aller Relationen aus \mathcal{M}_k , \mathcal{L}_k bzw. \mathcal{Z}_k , die den Bedingungen aus Satz 4, Satz 7 bzw. Satz 8 genügen. Für $k = 3$ und $l = 2$ haben wir durch die oben durchgeführten Untersuchungen sämtliche 13 maximalen Klassen von $P_k(l)$ bestimmt. Es gilt nämlich der

Satz 9 (/5/): Eine Menge $M \subseteq P_3(2)$ ist genau in $P_3(2)$ vollständig, wenn sie keine Teilmenge der Klassen $(\text{Pol } e)(2)$ ($e \in \mathcal{M}_3(2) \cup \mathcal{L}_3(2) \cup \mathcal{U}_3$) und L_3 ist.

Dieser Spezialfall läßt vermuten, daß mit den oben durchgeführten Untersuchungen bereits sämtliche maximalen Klassen von $P_k(l)$ bestimmt wurden.

Literatur

- /1/ Бурле, Г.А.: Классы k -значной логики, содержащие все функции одной переменной. Дискрет. анализ 10, 3-7 (1967)
- /2/ Колпаков, В.И.: Подалгебры монотонных функций в алгебрах Поста. Дискрет. анализ 24, 30-45 (1974)
- /3/ Lau, D.: Prävollständige Klassen von $P_{(k,1)}$. Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 11, 624-628 (1975)
- /4/ Lau, D.: Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k -wertigen Logik. Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24, 79-96 (1978)
- /5/ Lau, D.: Eigenschaften gewisser abgeschlossener Klassen in Postschen Algebren. Dissertation A, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1977
- /6/ Pöschel, R. und Kalužnin, L.A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979
- /7/ Rosenberg, I.G.: Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Rozprawy Československé Akad. Ved Rada Mat. Prirod. Ved 80, 3-93 (1970)

eingegangen: 19.10.1987

Verfasser:

Dr. sc. nat. Dietlinde Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Joachim Stogm

Ober ein Steuerungsproblem für endliche stochastische zellulare Systeme

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. Dr. G. Burosch aus Anlaß seines 50. Geburtstags in Dankbarkeit gewidmet

1. Modellbeschreibung

Stochastische zellulare Systeme (SZS) (vgl. z. B. /1/, /2/) stellen abstrakte Modelle zahlreicher real existierender Systeme (z. B. biologische Zellkomplexe, homogene mikroelektronische Strukturen u. a.) dar, die sich durch eine große Anzahl gleichartiger, in Form eines regelmäßigen n -dimensionalen Gitters angeordneter Elemente (Zellen) auszeichnen. Jede Zelle steht dabei mit einer gewissen Teilmenge aller Zellen (Nachbarzellen) in Wechselwirkung und ändert ihren Zustand in Abhängigkeit von den Zuständen dieser Nachbarzellen zufällig. Nehmen wir an, daß die Zellen externe Ein- und Ausgänge besitzen, so wird es möglich, das zufällige Übergangeverhalten des gesamten Systems durch Steuerung zu verändern.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf endliche SZS mit parallelem Eingang $\alpha = \langle V, N, (X, Z, Y, P, \varphi), \dot{p}_0 \rangle$. V ist dabei eine beschränkte Teilmenge des d -dimensionalen Punktgitters \mathbb{Z}^d und wird als Systemraum bezeichnet. In jedem Punkt $v \in V$ befindet sich eine stochastische Zelle von demselben Typ (X, Z, Y, P, φ) . X, Z, Y sind endliche Mengen mit $Y \subset \mathbb{R}$ und bezeichnen entsprechend Eingabe-, Zustands- und Ausgabealphabet der Zelle. Jede Zelle $v \in V$ besitzt einen externen Ein- und Ausgang und ist mit den Zellen ihrer Nachbarschaft $N(v)$ gekoppelt. Die Art der Kopplung ist für alle Zellen dieselbe und wird durch den Nachbarschaftsindex $N = \{n_0, n_1, \dots, n_s\}$ beschrieben mit

$n_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $n_1 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, $i = 1, \dots, s$. Die Nachbarschaft einer Zelle v ist dann durch $N(v) = \{v, v+n_1, \dots, v+n_s\}$ bestimmt. Es bezeichnen $\dot{Z} := \{\dot{z} : v \rightarrow z\}$ und $\dot{X} := \{\dot{x} : v \rightarrow x\}$ ent-

sprechend die Menge aller Zustands- bzw. Eingabekonfigurationen des Systems. Dabei geben $\dot{z}[v]$, $\dot{x}[v]$ und $\dot{z}_{N(v)}$ jeweils den Zustand und das Eingabesignal der Zelle v bzw. die Gesamtheit aller Zustände der Nachbarschaft $N(v)$ an, wenn sich das System in dem (globalen) Zustand \dot{z} befindet und das (globale) Eingabesignal \dot{x} erhält. Das lokale Übergangsverhalten einer Zelle wird durch den (lokalen) stochastischen Kern $P(\cdot|\cdot)$ von $\dot{Z}_N \times X$ nach Z beschrieben. Hierbei ist $\dot{Z}_N := \{\dot{z}_N = (z_0, z_1, \dots, z_s) : z_0 \in Z, z_i \in Z \cup \{\Lambda\}, i = 1, \dots, s\}$ und Λ ein "Leerzustand". Seine Einführung ergibt sich aus der Gleichförmigkeit der Kopplung und der Beschränktheit des Systemraumes. Es wird vereinbart, daß $\dot{z}[v+n_i] = \Lambda$ für $v + n_i \notin V, 1 \leq i \leq s$, gesetzt wird. Ferner ist $\varphi : Z \rightarrow Y$ eine reellwertige Ausgabefunktion (Kostenfunktion) und \dot{p}_0 eine Initialverteilung auf \dot{Z} .

Unter Verwendung der in der Theorie der Steuerung stochastischer Prozesse üblichen Terminologie (vgl. z. B. /3/) interpretieren wir \dot{X} als Steuerraum, \dot{Z} als Zustandsraum und $H_t := \dot{Z} \times \dot{X} \times \dot{Z} \times \dots \times \dot{Z}$ ($2t+1$ Faktoren) als Menge der Vorgesichten bis zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Die reellwertigen Ausgabesignale jeder Zelle werden als Kosten interpretiert. Das stochastische Bewegungsgesetz von \mathcal{A} ist unabhängig von Vergangenheit und Zeit und wird durch den (globalen) stochastischen Kern $\dot{P} : \dot{Z} \times \dot{X} \times \dot{Z} \rightarrow [0, 1]$ bestimmt, wobei

$$\dot{P}(\dot{z}'|\dot{z}, \dot{x}) = \prod_{v \in V} P(\dot{z}'[v]|\dot{z}_{N(v)}, \dot{x}[v]), \dot{z}, \dot{z}' \in \dot{Z}, \dot{x} \in \dot{X}$$

ist. Unter einer (randomisierten) Strategie $\sigma = (\nu_t)_{t \in \mathbb{N}}$ verstehen wir eine Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\nu_t(\cdot|h_t)$ auf \dot{X} , $h_t \in H_t$. Markov-Strategien werden durch Verteilungen der Form $\nu_t(\cdot|\dot{z}_t)$ erzeugt. Eine Strategie mit $\nu_t \equiv \nu$, $t \in \mathbb{N}$, heißt stationär.

Wir nehmen an, daß in dem endlichen SZS \mathcal{A} alle m Zellen ($m = |V|$) in geeigneter Weise durchnummeriert sind. Fassen wir die einzelnen reellwertigen Kosten bez. jeder Zelle zu einem Vektor zusammen, so können wir die m -Vektorfunktion $\dot{\Phi} : \dot{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\dot{\Phi}(\dot{z}) = (\varphi(\dot{z}[1]), \varphi(\dot{z}[2]), \dots, \varphi(\dot{z}[m]))$, $\dot{z} \in \dot{Z}$, definieren,

welche die (vektorwertigen) Kosten des Systems \mathcal{A} angibt, wenn es sich im Zustand \dot{z} befindet.

2. Existenz B-optimaler Strategien

Sei $\mathcal{A} = \langle V, N, (X, Z, Y, P, \varphi), \dot{p}_0 \rangle$ ein SZS mit parallelem Eingang, wie es in Abschnitt 1. beschrieben wurde. Wird auf \mathcal{A} eine Strategie $\sigma = (v_t)_{t \in \mathbb{N}}$ angewendet, so bezeichne $\dot{p}_{t, \sigma}(\cdot)$ die im Zeitpunkt t eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \dot{Z} . Der in jeder Zelle $v \in V$ durch σ erzeugte (lokale) Zustandsprozeß mit Werten in Z kann durch die lokalen Verteilungen $v_{p_{t, \sigma}(\cdot)}$ auf Z beschrieben werden. Diese ergeben sich aus den globalen Verteilungen $\dot{p}_{t, \sigma}(\cdot)$ durch Bildung der Randverteilungen mit Hilfe der Beziehung

$$v_{p_{t, \sigma}(z)} = \sum_{\substack{\dot{z} \in \dot{Z}: \\ \dot{z}[v]=z}} \dot{p}_{t, \sigma}(\dot{z}), \quad z \in Z. \quad (1)$$

Für jede Zelle $v \in V$ können wir dann die Folge zufälliger Kosten $(\varphi(\dot{z}_t[v]))_{t \in \mathbb{N}}$ betrachten, wobei \dot{z}_t der (zufällige) globale Zustand des Systems \mathcal{A} ist. Alle Zellen von V seien durchnummeriert. Dann setzen wir $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ und bilden bez. jeder Zelle $v_i \in V$ die mittleren Kosten $W^{(1)}(\sigma, t) :=$

$E_{\sigma}(\varphi(\dot{z}_t[v_i]) | \dot{p}_0)$. Dabei bezeichnet E_{σ} den durch die Strategie σ erzeugten Erwartungswertoperator.

Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ ein gegebener Bereich. Eine Strategie σ^* heißt B-optimal, wenn ein $t_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $t \geq t_0$

$$\dot{W}(\sigma^*, t) = (W^{(1)}(\sigma^*, t), \dots, W^{(m)}(\sigma^*, t)) \in B$$

ist.

Für eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\cdot | \dot{z})$ auf \dot{X} sei

$$W(\dot{z}) = \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{F}(\dot{z}, \dot{x}) \cdot \pi(\dot{x} | \dot{z}), \quad \dot{z} \in \dot{Z}. \quad (2)$$

wobei $\dot{F}(\dot{z}, \dot{x}) = \sum_{\dot{z}' \in \dot{Z}} \dot{\Phi}(\dot{z}') \cdot \dot{P}(\dot{z}' | \dot{z}, \dot{x})$ ist. Man zeigt leicht,

daß $\dot{W}(\dot{\sigma}, t) = (w^{(1)}(\dot{\sigma}, t), \dots, w^{(m)}(\dot{\sigma}, t)) = \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \dot{\Phi}(\dot{z}) \cdot \dot{p}_{t, \dot{\sigma}}(\dot{z})$ ist.

Daraus erhalten wir eine weitere Darstellung von $\dot{W}(\dot{\sigma}, t)$ in der Form

$$\dot{W}(\dot{\sigma}, t) = \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \dot{W}_t(\dot{z}) \cdot \dot{p}_{t-1, \dot{\sigma}}(\dot{z}). \quad (3)$$

In der Tat gilt

$$\dot{W}(\dot{\sigma}, t) = \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \dot{\Phi}(\dot{z}) \cdot \dot{p}_{t, \dot{\sigma}}(\dot{z}) = \sum_{\dot{z}' \in \dot{Z}} \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \dot{\Phi}(\dot{z}') \cdot \dot{p}_{\dot{z}\dot{z}'}(\mathcal{I}_t) \cdot \dot{p}_{t-1, \dot{\sigma}}(\dot{z}),$$

wobei $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_t(\cdot | \dot{z}_t)$ die durch $\dot{\sigma} = (\mathcal{I}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \dot{X} und

$\dot{p}_{\dot{z}\dot{z}'}(\mathcal{I}_t) = \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{P}(\dot{z}' | \dot{z}, \dot{x}) \cdot \tilde{\mathcal{I}}_t(\dot{x} | \dot{z})$ ist. Somit ergibt sich mit-

tels (2)

$$\begin{aligned} \dot{W}(\dot{\sigma}, t) &= \sum_{\dot{z}' \in \dot{Z}} \left[\sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \dot{\Phi}(\dot{z}') \cdot \left(\sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{P}(\dot{z}' | \dot{z}, \dot{x}) \cdot \mathcal{I}_t(\dot{x} | \dot{z}) \right) \cdot \dot{p}_{t-1, \dot{\sigma}}(\dot{z}) \right] \\ &= \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \left[\sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \left(\sum_{\dot{z}' \in \dot{Z}} \dot{\Phi}(\dot{z}') \cdot \dot{P}(\dot{z}' | \dot{z}, \dot{x}) \right) \cdot \mathcal{I}_t(\dot{x} | \dot{z}) \right] \cdot \dot{p}_{t-1, \dot{\sigma}}(\dot{z}) \\ &= \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \left[\sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{F}(\dot{z}, \dot{x}) \cdot \mathcal{I}_t(\dot{x} | \dot{z}) \right] \cdot \dot{p}_{t-1, \dot{\sigma}}(\dot{z}) \\ &= \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \dot{W}_t(\dot{z}) \cdot \dot{p}_{t-1, \dot{\sigma}}(\dot{z}). \end{aligned}$$

Ferner bezeichne $K(\dot{z})$, $\dot{z} \in \dot{Z}$, die konvexe Hülle der Menge

$\dot{W}_z := \{ \dot{F}(\dot{z}, \dot{x}) : \dot{x} \in \dot{X} \}$ von Punkten des \mathbb{R}^m . Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer B-optimalen stationären Markqw-Strategie an.

Satz: Sei $\mathcal{O} = \langle V, N, (X, Z, Y, P, \varphi), \dot{p}_0 \rangle$ ein SZS mit der Eigenschaft $P(z'|z, x) > 0$ für alle $z, z' \in Z, x \in X$. B sei eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^m , und es gelte $K(\dot{z}) \cap B \neq \emptyset$ für jedes $\dot{z} \in \dot{Z}$. Dann existiert eine stationäre randomisierte Strategie σ^* , die B -optimal ist.

Beweis: Sei $\dot{z} \in \dot{Z}$ beliebig, dann existiert nach Voraussetzung wenigstens ein Punkt $q_{\dot{z}} \in K(\dot{z}) \cap B$, der wegen $q_{\dot{z}} \in K(\dot{z})$ als konvexe Linearkombination

$$q_{\dot{z}} = \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \lambda_{\dot{z}, \dot{x}} \cdot \dot{F}(\dot{z}, \dot{x})$$

mit $\lambda_{\dot{z}, \dot{x}} \geq 0, \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \lambda_{\dot{z}, \dot{x}} = 1$ dargestellt werden kann. Wir definieren nun eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi^*(\cdot | \dot{z})$ auf \dot{X} durch $\pi^*(\dot{x} | \dot{z}) = \lambda_{\dot{z}, \dot{x}}, \dot{x} \in \dot{X}$. Da eine solche Verteilung für jedes \dot{z} angegeben werden kann, ist somit die Existenz einer randomisierten Entscheidungsfunktion $\pi^* : \dot{Z} \rightarrow \mathcal{M}(\dot{X})$ ($\mathcal{M}(\dot{X})$ - Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf \dot{X}) nachgewiesen, für die

$$\bar{W}(\dot{z}) = \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{F}(\dot{z}, \dot{x}) \cdot \pi^*(\dot{x} | \dot{z}) \in K(\dot{z}) \cap B, \dot{z} \in \dot{Z},$$

gilt, d. h., es ist insbesondere $\bar{W}(\dot{z}) \in B, \dot{z} \in \dot{Z}$. Wird die stationäre Strategie $\sigma^* = (\pi^*)^\infty$ auf \mathcal{O} angewendet, so ist der globale Zustandsprozeß eine homogene Markovkette mit der Übergangsmatrix

$$\dot{P}(\pi^*) = \|\dot{p}_{1j}(\pi^*)\|, \text{ wobei } \dot{p}_{1j}(\pi^*) = \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{P}(\dot{z}_j | \dot{z}_1, \dot{x}) \cdot \pi^*(\dot{x} | \dot{z}_1),$$

$\dot{z}_1, \dot{z}_j \in \dot{Z}$, ist. Wegen $P(z'|z, x) > 0$ für alle $z, z' \in Z, x \in X$, folgt unmittelbar aus

$$\dot{P}(\dot{z}' | \dot{z}, \dot{x}) = \prod_{v \in V} P(\dot{z}'[v] | \dot{z}[v], \dot{x}[v]),$$

daß die Markovkette $[\dot{p}_0, \dot{P}(\pi^*)]$ irreduzibel ist. Man zeigt

leicht, daß sie auch aperiodisch ist. Wegen der Endlichkeit des Zustandsraumes \dot{Z} besitzt die Markovkette daher eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung $\mu_{\sigma^*} \in \mathcal{M}(\dot{Z})$.

Die Folge \dot{p}_{t, σ^*} der globalen Zustandsverteilungen konvergiert unabhängig von der Initialverteilung \dot{p}_0 gegen diese stationäre Verteilung μ_{σ^*} . Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{p}_{t, \sigma^*}(\dot{z}) = \mu_{\sigma^*}(\dot{z})$, $\dot{z} \in \dot{Z}$, und der Stationarität von σ^* folgt aus (3)

$$\begin{aligned} \hat{W}(\sigma^*) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}(\sigma^*, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \bar{W}_t(\dot{z}) \cdot \dot{p}_{t-1, \sigma^*}(\dot{z}) \\ &= \sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \bar{W}(\dot{z}) \cdot \mu_{\sigma^*}(\dot{z}), \end{aligned} \quad (4)$$

wobei $\bar{W}_t(\dot{z}) = \bar{W}(\dot{z}) = \sum_{\dot{x} \in \dot{X}} \dot{F}(\dot{z}, \dot{x}) \cdot \pi^*(\dot{x} | \dot{z})$ ist. Wir bilden nun

die konvexe Hülle der Punktmenge $\{\bar{W}(\dot{z}) \in \mathbb{R}^m : \dot{z} \in \dot{Z}\}$ und betrachten dazu das entsprechende Simplex S . Auf Grund von

$\mu_{\sigma^*}(\dot{z}) \geq 0$ mit $\sum_{\dot{z} \in \dot{Z}} \mu_{\sigma^*}(\dot{z}) = 1$ stellt die rechte Seite in (4)

eine konvexe Linearkombination der Punkte $\bar{W}(\dot{z})$, $\dot{z} \in \dot{Z}$ dar, und

folglich gilt $\hat{W}(\sigma^*) \in S$. Weiter oben wurde $\bar{W}(\dot{z}) \in B$ für jedes $\dot{z} \in \dot{Z}$ gezeigt. Aus der Tatsache, daß B konvex ist, folgt daher

$S \subseteq B$, und somit ist $\hat{W}(\sigma^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}(\sigma^*, t) \in B$, was zu zeigen war.

Literatur

- /1/ Hoffmann, R., und Merker, R.: Zur Theorie stochastischer zellulärer Systeme. Z. Elektr. Inform. Energietechn. 12, 28 - 37 (1982)

- /2/ Storm, J.: Über die Steuerung stochastischer zellularer Systeme. Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. "Karl Friedrich Wilhelm Wander" Dresden 18, 29 - 37 (1984)
- /3/ Müller, P. H., und Nollau, V. (Eds.): Steuerung stochastischer Prozesse. Berlin 1984

eingegangen: 14. 09. 1987

Verfasser:

Dr. Joachim Storm
Pädagogische Hochschule "K. F. W. Wander"
Dresden
Sektion Mathematik
Wigardstraße 17
Dresden
DDR-8060

Bernd Klipps

Ober Vasil'ev-Schönheim-Codes und Abbildungen auf endlichen Mengen

Autorreferat der Dissertation A

In der Arbeit wird folgendes Problem untersucht:

C sei ein Teilraum des n -dimensionalen Vektorraums F_q^n über dem Galoisfeld F_q . Mit $\text{Map}(C, F_q)$ sei die Menge aller Abbildungen von C in F_q bezeichnet. Man bestimme die Anzahl der Klassen gewisser Äquivalenzrelationen auf $\text{Map}(C, F_q)$.

Diese Aufgabenstellung verallgemeinert Untersuchungen, die seit Beginn der fünfziger Jahre zur Klassifizierung der Funktionen der q -wertigen Logik geführt wurden (Polya, Slepian, Jablonskij, Harrison).

Ausgangspunkt der Arbeit ist jedoch ein kodierungstheoretisches Problem, die Klassifizierung perfekter Codes. Es wird die Klasse der Vasil'ev-Schönheim-Codes eingeführt. Es sind dies diejenigen im allgemeinen nichtlinearen perfekten 1-Fehler-korrigierenden Codes, die durch mehrfaches Anwenden der Methode von Vasil'ev (1962, $q=2$) und Schönheim (1968, $q>2$) auf lineare Hammingcodes entstehen. Neben Ergebnissen zur Darstellung und Dekodierung dieser Codes wird die Äquivalenz von Vasil'ev-Schönheim-Codes zurückgeführt auf die Äquivalenz von Abbildungen, die zur Konstruktion der Codes benötigt werden.

Diese Äquivalenzrelation wird in folgender allgemeiner Form untersucht. Ist $C \subseteq F_q^n$ ein linearer Teilraum, so heißen die Abbildungen $f, g \in \text{Map}(C, F_q)$ äquivalent, wenn

$$f(c) = \mu \cdot g(\varphi(c) + a) + \tau + l(c) \text{ für alle } c \in C$$

bezüglich eines Automorphismus φ auf C , $a \in F_q^n$, $\mu \in F_q \setminus \{0\}$, $\tau \in F_q$ und einer linearen Abbildung $l \in \text{Map}(C, F_q)$ erfüllt ist.

Probleme dieses Typs werden in der Abzähltheorie von Polya-de Bruijn behandelt, Die obige Relation läßt sich jedoch nicht in diese Theorie einordnen, da zusätzlich zur Permutation der Elemente des Definitions- und Wertebereichs die Addition linearer Funktionen erlaubt ist. Dennoch führt das übliche Vorgehen der Polya-de Bruijn-Theorie auch hier zum Ziel. Mittels des Burnside-Lemmas wird die Berechnung der Anzahl der Äquivalenzklassen auf die Bestimmung des Zyklenzeigers der auf C wirkenden Permutationsgruppe und (im Unterschied zur Polya-de Bruijn-Theorie) der Mächtigkeiten gewisser Mengen linearer Funktionen reduziert. Für die Bestimmung der Zyklenzeiger und der Mächtigkeiten werden Algorithmen hergeleitet. Schließlich werden asymptotische Aussagen über die Anzahl der Äquivalenzklassen gewonnen.

Abschließend werden die Ergebnisse auf die Fälle $C = F_q^n$ (Funktionen der q -wertigen Logik) und $C = \text{Hammingcode}$ (Vasil'ev-Schönheim-Codes) angewendet. In Erweiterung bekannter Resultate werden Anzahlaussagen für Anfangswerte sowie asymptotische Aussagen über die Anzahl der Äquivalenzklassen hergeleitet.

eingereicht: 05. 04. 1984

verteidigt: 13. 09. 1984

Gutachter: Prof. Dr. G. Burosch (Rostock),
Dr. G. O. H. Katona (Budapest),
Doz. Dr. J. Dassow (Magdeburg).

Verfasser:

Dr. Bernd Klipps
VEB Düngemittelwerk Rostock
PSF 2542
Rostock 42
DDR-2500

Jochen Weitendorf

Eigenschaften des Tangentialkegels bei "äquisingulären Projektionen" algebroider Hyperflächen

Autorreferat der Dissertation A

In dieser Arbeit wird der Begriff Äquisingularität, so wie er von Zariski definiert wurde, untersucht. Diese Untersuchungen erfolgen über einem Grundkörper k mit der Charakteristik 0, der algebraisch abgeschlossen ist.

Bei der Betrachtung der Singularitäten wird die monoidale Transformation zur Auflösung benutzt, die so gewählt wird, daß keine wesentlichen Bestandteile ins Unendliche transformiert werden. Dieser Auflösungsprozeß bricht nach endlich vielen Schritten ab, so daß nur noch einfache Punkte vorliegen. Alle singulären Punkte der Varietät V , die durch die Gleichung $f(x_1, \dots, x_{r+1}) = f_n(x_1, \dots, x_{r+1}) + f_{n+1}(x_1, \dots, x_{r+1}) + \dots = 0$ dargestellt wird, sind Verzweigungspunkte.

Ein Punkt P_0 wird kritischer Punkt einer Projektion π genannt, wenn wenigstens einer der Punkte von V , der in P_0 projiziert wird, ein Verzweigungspunkt ist. Die Menge aller kritischen Punkte heißt kritische Varietät.

Aus der Menge aller möglichen Projektionen werden die herausgesucht, bei denen die reduzierte Diskriminante eine Äquisingularität vom Dimensionstyp 1 besitzt. Solche Projektionen werden äquisinguläre Projektionen genannt. Es wird gezeigt, daß monoidale Transformationen und äquisinguläre Projektionen miteinander vertauschbar sind.

Eine aussagekräftige Größe für die Eigenschaften algebroider Varietäten ist der Tangentialkegel.

Ist die Varietät V durch die Gleichung

$$f(x, y, z, w) = x^r + a_2(y, z, w)x^{r-2} + \dots + a_r(y, z, w) = 0$$

gegeben, so gilt für die kritische Varietät V_0 die Gleichung

$$\Delta^x f(y,z,w) = g(y,z,w) = y^s + b_2(z,w)y^{s-2} + \dots + b_s(z,w) = 0;$$

$\Delta^x f$ ist die x-Diskriminante von f. W und W_0 seien zulässige Untervarietäten auf V bzw. V_0 (d. h. äquiviel fach und einfach) mit den Gleichungen $x = y = z = 0$ bzw. $y = z = 0$. Dann ergeben sich für die Tangentialkegel die folgenden Gleichungen:

$$T_V(P) : F(x,y,z) = 0 \quad (F \text{ Anfangsform vom Grad } r \text{ von } f),$$

$$T_{V_0}(P) : G(y,z) = 0 \quad (G \text{ Anfangsform vom Grad } s \text{ von } \Delta^x f).$$

Die Punkte $Q \in T^{-1}(P)$ heißen Ausnahmepunkte, wenn $T^{-1}(V)$ nicht äquisingulär vom Dimensionstyp 1 bei Q bezüglich $T^{-1}(W)$ ist. Hierbei ist T die monoidale Transformation $T: V^* \rightarrow V$ mit den Gleichungen

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = z, \quad w' = w.$$

Die endlich vielen Tangentialrichtungen von $(\Delta^x f)_0 = 0$ heißen Ausnahmerichtungen.

Wegen der Bildung von $\Delta^x f$ über die x-Diskriminante von $f(x,y,z,w)$ gilt stets $s \geq r(r-1)$. Für den Fall $s > r(r-1)$ wird gezeigt, daß die Ausnahmerichtungen von $T^{-1}(V)$ den Tangentialrichtungen der äquisingulären Projektion entsprechen. Im Fall $s = r(r-1)$ gilt dies nur für gewisse Tangentialrichtungen.

Es werden Eigenschaften des Tangentialkegels für den Fall bewiesen, daß zwischen der Varietät V und der Untervarietät W eine Fläche F derart existiert, daß F als zulässiges Zentrum der Aufblasung von W auf V genutzt werden kann. Für den Fall, daß solch ein F nicht existiert, werden Vermutungen aufgestellt.

eingereicht: 31. 08. 1985

verteidigt: 04. 04. 1986

Gutachter: Prof. Dr. W. Engel (Rostock),
Dr. D. Neßelmann (Rostock),
Dr. B. Renschuch (Potsdam).

Verfasser:

Dr. Jochen Weitendorf
Bezirkskabinett für Unterricht
und Weiterbildung
Weinbergstr. 15
Schwerin
DDR-2786

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linkebündig zu schreiben. Eine Avenue hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock Math. Kolloq. / Leerzeile / Vorname Name / Leerzeile / Titel der Arbeit / 1 Zeilenumschaltung / Unterstreichung / Leerzeile. Der Text der Arbeit ist einzeilbündig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen / Zwischenüberschrift / Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung) / 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Lemma u. e. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. a. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzpiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben, Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben einzusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- /8/ Żeriski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebras.
Princeton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine
Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur
Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt, H. (Ed.):
C. F. Gauß, Gedenkbund anlässlich des 100. Todestages.
S. 193 - 204. Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen: bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum / Leerzeile / Anschrift des Verfassers / Titel Initialen der Vornamen Name / Institution / Struktureinheit / Straße Hausnummer / Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lassen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

- | | |
|--|----------------|
| - Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg | ISSN 0518-3189 |
| - Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge | ISSN 0138-3299 |
| - Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte | ISSN 0232-3066 |
| - Rostocker Mathematisches Kolloquium | ISSN 0138-3248 |
| - Rostocker Philosophische Manuskripte | ISSN 0557-3599 |
| - Rostocker Physikalische Manuskripte | ISSN 0138-3140 |
| - Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte | ISSN 0138-3191 |
| - Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerika-wissenschaften | ISSN 0458-7944 |
| - Erziehungswissenschaftliche Beiträge | ISSN 0138-2373 |
| - Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus | ISSN 0138-3396 |
| - Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock | ISSN 0232-539X |
| - Beiträge zur Geschichte der FDJ | ISSN 0233-0830 |
| - Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus | ISSN 0233-0636 |
| - Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogik | ISSN 0233-0539 |
| - Rostocker Informatik-Berichte | ISSN 0233-0784 |
| - Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen | ISSN 0233-0687 |
| - Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft | ISSN 0233-0644 |
| - Rostocker Universitätsreden | |

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500
 - Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR-7010
- Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR - 2500, zu beziehen.