

ISSN 0138 - 3248

Rostocker
Mathematisches Kolloquium

Heft 35



**Wilhelm-Pieck-Universität
Rostock**

Information

Rostocker Informatik-Berichte

ISSN 0233-0784

Diese Schriftenreihe der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock erscheint seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor:

- Heft 1 (1985) 20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung
- Heft 2 (1985) DIGRA'84
(Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)
- Heft 3 (1986) Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinatenn der DDR
- Heft 4 (1986) Arbeiten aus der Sektion Informatik
- Heft 5 (1987) Beiträge des Problemseminars "Graphisch-Interaktive Systeme"
- Heft 6 (1988) Problemseminar "Graphische Standardisierung" und Probleme der Modellierung und Simulation

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR-7010.

Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 35

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

1988

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Gustav Burosch
(Sektionsdirektor)

Prof. Dr. Gerhard Maeß

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Werner Plischke

Herstellung der Druckvorlage: Dipl.-Lehrer Andreas Straßburg

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

Universitätsplatz 1

Rostock

DDR-2500

Redaktionsschluß: 30. 05. 1988

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Außerdem bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010.

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1988) 35

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
Abteilung Wissenschaftspublizistik,
Vogelsang 13/14, Telefon 369 577, Rostock, DDR-2500
Genehmigungs-Nr.: C 765/88

Druck: Ostsee-Druck Rostock BT Ribnitz II-14 • O, 50

01000

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
Pohl, Sylke	Risk-optimum experimental design 4
Rausche, Andrea	On the existence of special block designs 13
Rosenbaum, Kurt	Die Untergruppen von halbdirekten Produkten 21
Tiedt, Gunter	Blöcke von Gruppen der p-Länge 1 31
Peters, Wolfgang	Berechnung der linearen involutorischen Halbgruppen sechster und siebenter Ordnung 45
Maeß, Gerhard	An error estimation for quadratic splines with minimal curvature 57
Möller, Peter	Zur Berechnung stabiler Oberflächenformen ferromagnetischer Flüssigkeiten 61
 Autorreferate von Dissertationen	
Racsmany, Anna	Über Fehler-korrigierende Code-konstruktionen 75
Prestin, Jürgen	Approximation in periodischen Lipschitzräumen 77
Domröse, Hartmut	Die Robustheit von Auswahlverfahren zum Indifferenzbereichsproblem gegen Nichtnormalität 79

Sylke Pohl

Risk-optimum experimental design1. Introduction

In a recent paper Rasch a.o. [1] discussed the problem of experimental design for the estimation of the unknown parameter vector ϑ occurring in the growth model

$$y_i = \vartheta_1 + \vartheta_2 \exp(\vartheta_3 x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

where $x_i \in [x_1, x_u] = B$ for each i , $\vartheta' = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$, $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ and all ε_i are additive i.i.d. random errors with $E(\varepsilon_i) = 0$ ($i = 1, \dots, N$) and $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 \sigma_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, N$).

For a given size N of the design a N -tuple $t' = (t_1, \dots, t_N)$, $t \in B^N$ was to be found which minimizes a given functional of the asymptotic variance-covariance matrix of the model. Solutions for several functionals and small N (≤ 13) obtained by the computerprogram OPTEx were presented.

Further results on this issue, analytical as well as numerical ones, were outlined in Duchrau a.o. [2]. So D-optimum designs could be given by an explicit formula (cf. Theorem 1 of that paper) and the numerical search procedure used by the authors was fast enough to encounter designs up to $N = 100$ in considerably low time. So the problem of finding optimum designs of a given size N with respect to the commonly used criterions seems to be practically solved.

But on the other hand the question how N has to be chosen remained open. The aim of the present paper is to solve this problem by using the results of [1], [2], and [3] and the concept of a two-dimensional risk-vector.

If costs for the experiments have to be taken into account there is one component of the risk which may be assumed to be proportional to their amount. In our first approach let us assume the costs to be proportional to the size N of the experimental design.

In general it may be an arbitrary function of the design, monotonous in some sense. A second component of the risk is connected with the possibility of wrong decisions because of inexact estimates for the parameters. In order to make an analytical discussion possible we assume this component to be an appropriate function of the D-criterion used in [1], [2], and [3]. Our aim is now to determine an experimental design in such a way that its risk is as near to the zero-risk as possible. Using the Euclidian norm we obtain the following results for a general class of 3- and 4-parametric growth-functions:

1. There exists an experimental design with minimal norm of the risk.
2. There is an unique local minimum¹ of the sequence of risk-norms.
3. There are at most two designs with minimal norm of the risk (if permutations are disregarded) and the difference of their sizes is one in the case of non-uniqueness.

In the last part of the paper we discuss consequences for the numerical search of optimum designs, especially we are able to give bounds for the number of steps in a search algorithm if suitable initial values are used.

2. Basic notions

If we assume a certain growth period $[x_1, x_u] = B$ for our measurements we can set up an experimental design V containing the experimental points $x_1, \dots, x_m \in B$ and the corresponding numbers of measurements n_1, \dots, n_m . We write this in a table of the form (cf. [2])

$$V : \begin{array}{ccc} x_1 & \dots & x_m \\ \hline n_1 & \dots & n_m \end{array}$$

1. We say a sequence $r(n)$ to possess an unique local minimum if there exists a number n_0 such that $r(n+1) \leq r(n)$ for $n < n_0$ and $r(n+1) \geq r(n)$ for $n > n_0$. Note that the number n_0 needs not to be defined uniquely.

and denote by $n(V) = \sum_{i=1}^m n_i$ the size of the experimental design and by $m(V)$ the size of the support of the design. For each design V the information matrix $I(V)$ is given by

$$I(V) = F'F, \text{ where } F_{ij} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} g(x_i, \theta), \quad i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, p,$$

and g is a given growth function.

Since $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ ($\hat{\theta}$ is the least-squares-estimator in the non-linear regression) is asymptotically $N(0, \Sigma)$ distributed where $\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} n \delta^2 (F'F)^{-1}$ we want to make $(F'F)^{-1}$ "as small as possible" or $F'F$ "as great as possible" in some sense. One possibility is to maximize the determinant of $F'F$, the so-called D-criterion.

A quite different demand consists in minimal $m(V)$ and $n(V)$. The following definition of a special two-dimensional risk-function $r(V)$ makes it possible to take into account the determinant of $F'F$ and the sizes of $m(V)$ and $n(V)$ as well:

$$r(V) = h(m(V), n(V), I(V)) \quad \text{with } h : N \times N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Hence r maps the set ω of all exact experimental designs in \mathbb{R}^2 . In our first approach the two components of the risk, the "cost-component" r_c and the "information-component" r_i are assumed to be a monotonously increasing function of the size $n(V)$ and a monotonously decreasing function depending on $I(V)$, respectively. It is convenient to choose r_i as a function of $\det I(V)$ because there exist explicit formulae for $\max(\det I(V))$. For this assumption the argument $m(V)$ drops out. Now we are looking for such a design for which the norm $\|r\|$ takes a minimum. The use of different norms leads to several solutions of the problem. Often $\|r\|_1 = |r_c| + |r_i|$ (cf. [4]) is used, but in this paper we take the Euclidian norm $\|r\|_2 = (r_c^2 + r_i^2)^{1/2}$.

The search for the minimum on the set ω renders more difficult by the form of this set. That's why in a first stage of minimization we consider the set ω_n of all experimental designs of the fixed size $n : \omega_n = \{V \in \omega : n(V) = n\}$.

Let $\text{Min}_{\omega} (r_c^2 + r_i^2) =: r(n)$. Hence $\text{Min}_{\omega} (r_c^2 + r_i^2) = \text{Min}_n r(n) = r_{\min}$. For the following considerations we make these premises :

- For the considered growth function with p parameters the locally D-optimum experimental design is a p -point-design for each fixed size N , that means $m(V) = p$.¹
- Because of the special importance of models with 3 or 4 parameters (quadratic and exponential regression, Gompertz-function, Richards-function) we focus our attention on $p = 3$ and $p = 4$.

Here and in the following we assume r_c to be directly proportional to the size of the design and r_i to be indirectly proportional to the geometrical mean of the eigenvalues of $\sqrt{I(V)}$:

$$\begin{aligned} r_c(n) &= bn & , & \quad b \geq 0, \\ r_i(n) &= c \{\max(\det I(V))\}^{-1/2p} & , & \quad c \geq 0. \end{aligned}$$

Using the results of [3] for $p = 3$ and by analogous considerations for $p = 4$ we obtain an explicit result for the first stage of minimization. Then

$$\begin{aligned} r(n) &= r_i^2 + r_c^2 \\ &= \begin{cases} c^2 \{\varphi_{\max} [\frac{n+1}{3}]^2 (n-2[\frac{n+1}{3}])\}^{-1/3} + b^2 n^2, & p = 3, \\ c^2 \{\varphi_{\max} [\frac{n+2}{4}]^2 [\frac{n}{4}] (n-2[\frac{n+2}{4}] - [\frac{n}{4}])\}^{-1/4} + b^2 n^2, & p = 4, \end{cases} \end{aligned}$$

with φ_{\max} being a constant depending on x_1, x_u , and the considered growth function (cf. [3]).

For the sake of simplicity we set

$$\begin{aligned} f(n) &= \begin{cases} [\frac{n+1}{3}]^2 (n-2[\frac{n+1}{3}]) & , & p = 3, \\ [\frac{n+2}{4}]^2 [\frac{n}{4}] (n-2[\frac{n+2}{4}] - [\frac{n}{4}]) & , & p = 4, \end{cases} & (1) \\ a^2 &= c^2 \varphi_{\max}^{-1/p} \quad \text{and} \quad r_{i_{\min}}(n) = a f(n)^{-1/2p}. \end{aligned}$$

3. Minimization of the risk-function

For the second part of minimization it is of interest whether the sequence $r(n)$ is convex. In this case it is easy to give an algorithm which finds an absolute minimum. The existence of this minimum is ensured by the special form of $r_{i_{\min}}^2(n)$, but this will be proved in the later theorem.

¹ Criteria for the verification of this assumption are given by Atkinson and Hunter [5] in a global sense, but only for $\downarrow = p[N/p]$. Local considerations are contained in [3].

Lemma : The sequence $\Delta r_{i_{\min}}^2(n)$ is a strictly monotonous increasing sequence for $p = 3$ and $p = 4$.

Because of the non-convenient form of $f(n)$ a separate discussion for different congruence classes of n modulo p seems to be impossible to avoid. This is the reason for the restriction to $p = 3$ and $p = 4$. Let us carry out the proof for one of the possible cases.

Let $p = 3$ and $\Delta_{\mu} := \Delta r_{i_{\min}}^2(n) - \Delta r_{i_{\min}}^2(n-1)$.¹ For $\mu = 0$ it holds

$$\Delta_0 = a^2 \frac{\sqrt[3]{k^5(k-1)} - 2\sqrt[3]{k^4(k-1)(k+1)} + \sqrt[3]{k^5(k+1)}}{\sqrt[3]{k^7(k-1)(k+1)}}$$

with $k = n/3$. After some transformations and with

$$\alpha := \{(k-1)/k\}^{1/6}, \quad \beta := \{(k+1)/k\}^{1/6}$$

the numerator takes the form

$$(\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta - (\alpha\beta)^2 > 0.$$

The inequality holds because of $\alpha\beta < 1$.

In the other cases the numerator is a complete non-vanishing quadratic expression. That means $\Delta_{\mu} > 0$ for $\mu = 0, 1, 2$. Analogous considerations yield the assertion for $p = 4$.

Nevertheless we conjecture that for $p \geq 5$ analogous results hold.

It follows from the Lemma that $\Delta r(n)$ is a strict monotonously increasing sequence as well. Now we are ready to prove the

Theorem : i) There exists at least one natural number k with

$$r(k) \leq r(k-1), \quad r(k) \leq r(k+1). \quad (2)$$

ii) If the natural number k satisfies (2), so $r(k)$ is a minimum.

iii) If two natural numbers k_1 and k_2 with $k_1 < k_2$ satisfy (2), so it holds $k_2 = k_1 + 1$.

1. μ denotes the congruence class of n modulo p .

Proof : (i) With $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta r_{1 \min}^2(n) = 0$ and $\Delta r_C^2(n) = b^2(2n+1)$ it holds $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta r(n) = \infty$. Now, if $n_0 \in \mathbb{N}$ is chosen in such a way that for $n > n_0$ the inequality $\Delta r(n) > 0$ is satisfied, then $r(n) > r(n_0)$ for all $n > n_0$. Hence $\text{Min}_{n \in \mathbb{N}} r(n) = \text{Min}_{1, \dots, n_0} r(n)$

and its existence is ensured since we take a minimum over a finite set.

(ii) Assume that $k \in \mathbb{N}$ satisfies (2), i.e.

$$r(k) \leq r(k-1), \quad r(k) \leq r(k+1).$$

Hence $\Delta r(k-1) \leq 0$, $\Delta r(k) \geq 0$, and it follows from the monotony of $\Delta r(n)$

$$\Delta r(l) \begin{cases} \leq 0, & l < n \\ \geq 0, & l > n \end{cases}$$

In other words, it is $r(l) \geq r(k)$ for all l , i.e. $r(k)$ is a minimum.

(iii) Now the assumption of (iii) let be satisfied.

Then, due to the strict monotony of $\Delta r(k)$, on the one hand $\Delta r(k) > 0$ for all $k = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots$ and on the other hand $\Delta r(k_2 - 1) < 0$. Hence $k_2 - 1 \leq k_1$.

This is only possible if $k_2 = k_1$ or $k_2 = k_1 + 1$.

This completes the proof.

4. Numerical questions

Due to the Theorem the following search for the minimum $\text{Min } r(n)$ starting at an arbitrary point n_0 will be successful. According to the comparison of the risk $r(n_0)$ with its neighbours $r(n_0 - 1)$ and $r(n_0 + 1)$ the size n_0 will be increased, decreased or taken as the optimal one.

Algorithm: $s=0$;
 while $r(i)=r(i-1)$ and $i > p$ do
 begin $i=i-1$
 $s=1$
 end;
 if $s=0$ then
 begin $t=\text{sgn}(r(i)-r(i-1))$
 while $i-t \geq p$ and $r(i)-r(i-t) > 0$ do $i=i-t$
 end;
 write "optimum size $n =$ "; i

Clearly it is desirable to choose the initial value near the solution.

For the calculation of a starting value let us consider an auxiliary problem which is obtained by a modification of the function f in (1), which consists of p factors being "almost equal", i.e. the maximal difference between two of them is not greater than one. This motivates the consideration of

$$\tilde{f}(n) = (n/p)^p,$$

i.e. of p exact equal factors with the same sum as in f . This modification is closely related to an approximate experimental design. It was recently shown in [6] that an analogous approach yields good initial values for C_V -optimality in exponential regression. In our case we have obviously

$$f(n) \leq \tilde{f}(n)$$

and consequently

$$\begin{aligned} \underline{r}(n) &:= a^2 p/n + b^2 n^2 = a^2 \{\tilde{f}(n)\}^{-1/p} + b^2 n^2 \\ &\leq a^2 \{f(n)\}^{-1/p} + b^2 n^2 = r(n), \end{aligned}$$

where the equality holds iff $n \equiv 0(p)$.

Now, the minimum of $\underline{r}(n)$ is easily shown to be reached at either $\lfloor \sqrt[3]{a^2 p/2 b^2} \rfloor$ or $\lfloor \sqrt[3]{a^2 p/2 b^2} \rfloor + 1$. (3)

Let n_0 be the minimizer and n_-, n_+ the next neighbours of n_0 which are integer multiples of p (as far as n_0 itself is not a multiple of p , in this case $r(n_0) = \underline{r}(n_0) \leq r(n)$ and hence the solution is found).

Then we may conclude

$$\begin{aligned} r(n_{-i}) &\geq \underline{r}(n_{-i}) \geq r(n_-) = \underline{r}(n_-) \geq \underline{r}(n_0) \leq \underline{r}(n_+) \\ &= r(n_+) \leq \underline{r}(n_{+j}) \leq r(n_{+j}) \quad \text{for all } i, j \geq 0. \end{aligned}$$

Hence, for $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_-, n_{-1}, \dots, n_+\}$ we have

$$r(n) \geq \min\{r(n_-), r(n_+)\}.$$

As a consequence of this inequality and the Theorem we obtain the

Corollary: The minimization procedure described above with the starting value n_0 terminates at least after p steps. Hence the total minimization requires just 4 or 5 evaluations of r .

The above considerations were made under the assumption that the cost-component only depends on the size $n(V)$. The size of support $m(V)$ was dropped out. If we take into consideration the common amount for each experimental point, the cost-component of the risk gets the form

$$r_c(n, m) = b_1 n + b_2 m \quad , \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$$

We can restrict ourselves to the case $m = p$ since for a sufficiently large b_2 the optimum design satisfies $m(V) = p$. Using this we get

$$r(n) = r_{i_{\min}}^2(n) + (b_1 n + b_2 p)^2 \quad ,$$

and for the second step of the minimization we obtain analogous results as above because only the second term of $r(n)$ is shifted. This does not change the convexity of $r(n)$ and hence the theorem remains true.

Remark: Naturally, one could introduce a 3-dimensional risk-function with $b_2 m$ as the third component. The result would be the same since

$$r(n) = r_{i_{\min}}^2(n) + b^2 n^2 + b^2 p^2$$

would be obtained.

At the end we give a short example. Like in the introduction we consider the exponential regression model

$$y_i = \alpha + \beta \exp(\gamma x_i) + \epsilon_i \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad .$$

Let $N = 3$, $\beta = -50$, $\gamma = -0.07$. Then the local D-optimum design turns out to be

$$V : \frac{\begin{array}{ccc} 0 & 13.59 & 65 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}}{\quad} \quad (\text{cf. [1]}) .$$

(Note that it is independent of α .)

In this case we get (cf. [3])

$$\varphi_{\max} = \det F'F = 56928.6 \quad .$$

Now we can start the minimization of the expression :

$$r(n) = c_{\max}^2 \cdot \frac{-1/3}{\{[\frac{n+1}{3}]^2 (n-2[\frac{n+1}{3}])\}}^{-1/3} + b^2 n^2 .$$

The results for some combinations of a , b , c obtained by the described procedure are contained in the following table (the corresponding size of the minimum of $r(n)$ (cf. (3)) is underlined):

a	b	c	n	r(n)	optimum size
0.1612	0.0004	1	62 63	0.001873 0.001872	63
0.1612	0.006	1	10 11 9	0.01147 0.01151 0.01158	10

References

1. Rasch, D., Rudolph, P.R. und Schimke, E.: Optimale Versuchspläne in der nichtlinearen Regression. In: Rasch, D. (Ed.): Robustheit IV. Probleme d. angew. Statistik 13, 93-121 (1985)
2. Duchrau, P., Frischmuth, K., Rasch, D., and Schimke, E.: Optimum experimental designs in growth curve analysis. Rostock. Math. Kolloq. 30, 93-104 (1986)
3. Frischmuth, K.: On locally D-optimal experimental designs. (to appear)
4. Rasch, D. und Herrendörfer, G.: Statistische Versuchsplanung. Berlin 1982
5. Atkinson, A.C., and Hunter, W.G.: The design of experiments for parameter estimation. Technometrics 10, 2, 271-289 (1968)
6. Frischmuth, K.: An analytical result in experimental design. Rostock. Math. Kolloq. 31, 95-101 (1987)

received: March 20, 1987

revised: July 4, 1987

Author:

stud. math. Sylke Pohl
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitaetsplatz 1
 Rostock
 DDR-2500

Andrea Rausche

On the existence of special block designs

In the study of keys and minimal keys in data bases J. Demetrovics and G.O.H. Katona in [1] suggested the following interesting

Conjecture: There is a system of 3-element subsets of a $n (=3m+1)$ -element set $\{1, 2, \dots, n\}$ satisfying the following conditions:

1. Any pair of elements is contained in exactly two 3-sets.
2. The family of 3-sets can be divided into n subfamilies where the i -th subfamily is a partition of $\{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$.
3. Exactly one pair of members of two different subfamilies meets in 2 elements.

This conjecture is also interesting in view of block design theory. Therefore we will repeat the definition of the block design.

A system F of k -element subsets of a v -element set is a t - (v, k, λ) block design, if for all t -element subsets X of the v -element set there exist exactly $X_1, X_2, \dots, X_\lambda \in F$ with $X \subseteq X_i$ for $i=1, \dots, \lambda$. In a block design b is the notation for the complete number of all blocks and r represents the number with which every fixed element occurs in the block design.

Considering the first condition of the conjecture we can see that the system of 3-element sets is a 2 - $(3m+1, 3, 2)$ block design. From the second part of the conjecture it follows the partition of the totality S of blocks:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{b/m}$$

with S - totality of blocks, S_i , $i=1, \dots, b/m$ - subfamilies and b - complete number of all blocks.

Thereby every subfamily S_i , $i=1, \dots, b/m$, consists of m pairwise disjoint blocks.

The 3rd condition of the conjecture demands the strongest restrictions. Obviously, the block design is without repeated blocks.

In another paper [2] J. Demetrovics, G.O.H. Katona and Z. Füredi were able to prove that the conjecture is true for all $n = 12k+1$, i.e. $m = 4k$, and $n = 12k+4$, i.e. $m = 4k+1$. It is well known that there exist $2-(n,4,1)$ block designs for this n 's. From these designs one can derive $2-(n,3,2)$ designs with the desired properties. Replace every member F with the four 3-element subsets. The obtained set-system meets the conditions of conjecture, where the i -th subfamily is $F_i = \{f-\{i\} : i \in f \in F\}$. The conjecture is also true for $m=1$ and $m=2$ and we can find a solution very fast. The blocks will be written down in an orthogonal form:

$m=1$:
 $\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{array}$

$m=2$:
 $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 4 & 5 & 5 & 3 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 \end{array}$

For a long time the case $m=3$ was not solved. In this paper we will prove that the conjecture is not true for $m=3$.

In this case we have a $2-(10,3,2)$ block design, i.e. we have 10 subfamilies and each has 3 blocks. Without loss of generality we may assume that the first subfamily has the form

$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}$,

if we consider the set $\{0,1,2,\dots,9\}$. Otherwise it would be possible to get this first subfamily by means of permutations. If we consider the 3rd condition of the conjecture we obtain the following picture (out of zero) for the subfamilies:

1.	2.	3.	4.	5.
$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ 2 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ 3 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 2 & & 0 \\ 3 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 4 & & 0 \\ 5 & & \end{array}$
(0)				
6.	7.	8.	9.	10.
$\begin{array}{ccc} 4 & & 0 \\ 6 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 5 & & 0 \\ 6 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 7 & & 0 \\ 8 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 7 & & 0 \\ 9 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 8 & & 0 \\ 9 & & \end{array}$

The number which is not in the subfamily stands in parentheses. The place of the number zero results from the following reasons:

- 1) Because zero is absent in the first subfamily and $r=9$, zero must be contained in all other subfamilies.
- 2) In each case at most one element from $\{4,5,6\}$ and $\{7,8,9\}$, respectively, can occur in the 2nd and 3rd column of the subfamily 2. Therefore only the elements 0 and 3 are candidates for the empty places in the 2nd and 3rd column of the 2nd subfamily, i.e. zero can not occur in the first column. Analogously, we obtain the proof for the other subfamilies.

The places a, b, c and d are available for the number 3 in the 2nd subfamily:

```

1 d 0
2   b
a____

```

(c)

If the number 3 is on the place:

- a, then we obtain a contradiction to the 3rd condition of the conjecture;
- b and c, then we have no possibility for the 2nd column without a contradiction to the 3rd condition.

Hence, the number 3 stands on the place d.

In analogy to this proof in the subfamilies 3 - 10 we determine the order of the number x. Both numbers of the first column of the appropriate subfamily form together with x one column in the first subfamily.

Without loss of generality we may assume the final figure of the second subfamily. Otherwise we can apply to this subfamily the permutations over $\{4,5,6\}$ $\{7,8,9\}$ or $(47)(58)(69)$.

We obtain the next result:

1.	2.	3.	4.	5.
$\begin{array}{r} 1\ 4\ 7 \\ 2\ 5\ 8 \\ 3\ 6\ 9 \\ \hline (0) \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 3\ 0 \\ 2\ 5\ 6 \\ 4\ 7\ 8 \\ \hline (9) \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 2\ 0 \\ 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 1\ 0 \\ 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4\ 6\ 0 \\ 5 \\ \hline \end{array}$
6.	7.	8.	9.	10.
$\begin{array}{r} 4\ 5\ 0 \\ 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 5\ 4\ 0 \\ 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7\ 9\ 0 \\ 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7\ 8\ 0 \\ 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 8\ 7\ 0 \\ 9 \\ \hline \end{array}$

Now we have the following situation : u ($2 \leq u < 10$) subfamilies are determined and for the remaining $10-u$ subfamilies we only know four numbers.

For the determination of the $(u+1)$ st subfamily we use the following notation: x are the known elements:

$$\begin{array}{c} (u+1) \\ x \ x \ x \\ x \ b \ c \\ \underline{a \ d \ e} \end{array}$$

(f)

Which possibilities we have for the choice of the elements ?

1. The element a

For a it has to hold $a \in M$ with $M = \{0, 1, 2, \dots, 9\} \setminus \{\text{elements } x \text{ in the } (u+1)\text{st subfamily}\}$.

2. The elements b and c

If a is fixed, then the elements b and c are those both numbers, forming together with a one column in the first subfamily, i.e. we have two possibilities for b and c . Otherwise the 3rd condition of the conjecture would not be fulfilled.

3. The elements d and e

By construction we can see that the elements a , b and c and the known elements (out of zero) of the $(u+1)$ st subfamily in each case form one column of the first subfamily. The elements d and e must belong to the still wanting column of the first subfamily, to fulfil the 3rd condition of the conjecture.

4. The element f

f must form one column of the first subfamily together with the elements d and e . It is necessary that f was not absent in the first u subfamilies.

In exact consideration of the conditions 1.-4. we can see that there was only noted the influence of the first subfamily to the $(u+1)$ st. Up to now the subfamilies 2 to u played a non-important role, though they rule out further possible variants for the $(u+1)$ th subfamily. The causes for this are the following conditions of construction:

- a) Because of the 3rd condition of the conjecture all elements, being absent in the first u subfamilies, must be contained in the $(u+1)$ st subfamily.
- b) Because we suppose that the 3rd condition of the conjecture is fulfilled, there are some double occurring pairs of numbers. Owing to the block design characteristic they must not occur again.
- c) The $(u+1)$ st subfamily has to fulfil the 3rd condition of the conjecture with all already known subfamilies (together with the first the condition is already fulfilled by the conditions 1. to 4.).

Hence, we can determine all possible subfamilies by means of the conditions 1. to 4. and the conditions of construction. At this we apply the following simple notation:

For $\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & b & c \\ a & d & e \end{matrix}$ (the 3rd subfamily) we write now only $abcde(f)$.

(f)

In analogy we use this abbreviation for the other subfamilies, because the known elements were written down in the preceding parts.

The first both subfamilies are equal for all possible variants and so we do not repeat them again. We collect the result in the following structure because for each possible 3rd subfamily there exist several 4th subfamilies and for every 4th subfamily there exist several 5th subfamilies and so on.

The complete discussion is contained in Rausche [3].

3rd subf.	4th subf.	5th subf.	6th subf.	7th subf.
46579(8)	87954(6)	-	-	-
	89785(4)	-	-	-
	97864(5)	98731(2)	-	-
56479(8)	98756(4)	98731(2)	-	-
	87945(6)	-	-	-
	97865(4)	98731(2)	-	-
56497(8)	98764(5)	-	-	-
	64589(7)	-	-	-
	87945(6)	87932(1)	-	-
		97821(3)	-	-
		98712(3)	-	-
64579(8)	97865(4)	98712(3)	-	-
		98731(2)	-	-
	87954(6)	-	-	-
	89756(4)	-	-	-

3rd subf.	4th subf.	5th subf.	6th subf.	7th subf.
64589(7)	97864(5) 56497(8) 78954(6) 98764(5)	98721(3) - 31297(8) 12379(8) 97821(3)	- - 79813(2) 98723(1) 98723(1)	- - - - -
65479(8)	87945(6) 97865(4)	- 98721(3)	- -	- -
65498(7)	78954(6) 87945(6) 87954(6)	31297(8) 98721(3) 32197(8) 13297(8) 32197(8)	- - - - -	- - - - -
	89756(4) 89765(4) 98756(4)	32197(8) - 31297(8)	- - -	- - -
78954(6)	64589(7) 65498(7)	98721(3) 32197(8) 32197(8)	79823(1) -	- -
	89756(4) 89765(4)	98712(3) 32197(8) 32179(8)	- -	- -
	98764(5) 98756(4)	97823(1) 12379(8) 97821(3) 32179(8)	79823(1) -	- -
87945(6)	56479(8) 56497(8)	97823(1) 98732(1) - 87931(2) 97812(3) 98721(3)	- -	- -
	65479(8) 65498(7) 97865(4)	- 31297(8) 13297(8) 31297(8)	- -	- -
	98756(4)	98721(3) 31297(8) 97812(3) 98721(3)	- -	- -
87954(6)	46579(8) 64579(8) 65498(7)	- - 23197(8) 31297(8)	- -	- -
	89756(4)	23197(8) 31279(8) 87932(1)	- -	- -
	97864(5)	13297(8) 31297(8) 98721(3)	- -	- -
	98756(4)	31297(8) 97812(3) 98721(3)	- -	- -
89756(4)	64579(8) 65498(7) 78954(6) 87954(6)	- 31297(8) 31297(8) 13297(8) 32179(8) 87931(2)	- -	- -

3rd subf.	4th subf.	5th subf.	6th subf.	7th subf.
89765(4)	46579(8) 65498(7) 78954(6)	- - 31279(8)	- - 79813(2)	- - -
97864(5)	97864(5) 46579(8) 64579(8) 87954(6)	97813(2) 32179(8) 98732(1) 98712(3) 23197(8) 32197(8) 98712(3)	- - - - - - -	- - - - - - -
97865(4)	89765(4) 56479(8) 56497(8)	31279(8) 98732(1) 98721(3) 98732(1)	- - - -	- - - -
	65479(8) 87945(6)	98712(3) 23197(8) 32197(8) 98712(3)	- - - -	- - - -
98764(5)	98764(5) 56479(8) 64589(7)	- - 21379(8)	- - 98713(2)	- - -
	78954(6)	97812(3) 21379(8) 97812(3)	98713(2) 98713(2) -	- - -
98756(4)	97865(4) 46579(8) 65498(7)	- 98732(1) 32197(8) 98712(3)	- - - -	- - - -
	78954(6)	31279(8) 97813(2) 98731(2)	- - -	- - -
	87945(6)	32197(8) 97821(3) 98712(3)	- - -	- - -
	87954(6)	32197(8) 97821(3) 98712(3)	- - -	- - -
16	68	90	8	0

Thus we have proved the following

Theorem : The conjecture is not true in the case $m=3$ and so it is not true for all $(3m+1)$ -element sets.

It remains to decide whether or not designs of our problem exist for $n = 19, 22, 31, 34, \dots$, more precisely for $n = 12m+7$ and $n = 12m+10, m \geq 1$.

References

1. Demetrovics, J., and Katona, G.O.H.: Extremal combinatorial problems in relational data base. Lecture Notes in Comput. Sci. 117, 110-119 (1981)
2. Demetrovics, J., Füredi, Z., and Katona, G.O.H.: Minimum matrix representation of closure operations. Discrete Appl. Math. 11, 115-128 (1985)
3. Rausche, A.: Über die Existenz spezieller Blockpläne. Diplomarbeit, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald 1987

received: December 18, 1987

Author:

Dipl.-Math. Andrea Rausche
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Sektion Mathematik
Friedrich-Ludwig-Jahn-Straße 15a
Greifswald
DDR-2200

Kurt Rosenbaum

Die Untergruppen von halbdirekten Produkten

Herrn Prof. Dr. G. Pazderski zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Ist G eine beliebige Gruppe, so kann man alle Untergruppen von G im allgemeinen nicht ohne weiteres angeben. Trivial ist der Fall, daß G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n ist. Hier gibt es zu jedem Teiler d von n genau eine Untergruppe der Ordnung d . Wenn $G = H \times N$ das direkte Produkt zweier Gruppen H und N ist, so ist jede Untergruppe U von G ein subdirektes Produkt aus einer Untergruppe H_1 von H mit einer Untergruppe N_1 von N und umgekehrt ([1], Satz 5.5.1).

Ziel dieser Arbeit ist es, dieses Ergebnis auf halbdirekte Produkte zu verallgemeinern. Es seien H und N (nicht notwendig endliche) Gruppen und

$$G = H \ltimes N$$

das halbdirekte Produkt von H mit N bezüglich des Homomorphismus

$$\alpha: H \rightarrow \text{Aut } N$$

von H in die Automorphismengruppe von N . Die Multiplikation in G ist gegeben durch

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 \overset{h_2}{n_2})$$

für alle $h_1, h_2 \in H$ und $n_1, n_2 \in N$. Dabei bedeutet n^h die Wirkung des dem Element $h \in H$ bei α zugeordneten Automorphismus $\alpha(h)$ auf das Element n , also

$$n^h = n^{\alpha(h)}.$$

Wir zeigen den folgenden

Satz: Eine nichtleere Teilmenge U des halbdirekten Produktes $G = H \ltimes N$ bezüglich des Homomorphismus $\alpha: H \rightarrow \text{Aut } N$ ist dann und nur dann eine Untergruppe von G , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Die Menge $H_1 = \{ h : h \in H \wedge (h, n) \in U \}$ der ersten Komponenten der Elemente von U ist eine Untergruppe von H . Die Menge $H_{10} = \{ h : h \in H_1 \wedge (h, 1) \in U \}$ der ersten Komponenten, für die $(h, 1) \in U$ gilt, ist eine Untergruppe von H_1 .
- 2) Die Menge $N_1 = \{ n : n \in N \wedge (h, n) \in U \}$ der zweiten Komponenten der Elemente von U besteht aus (nicht notwendig allen) Linksnebenklassen von N nach N_{10} . Dabei ist $N_{10} = \{ n : n \in N \wedge (1, n) \in U \}$ eine Untergruppe von N , die aus allen zweiten Komponenten mit $(1, n) \in U$ besteht.
- 3) Es gibt eine eindeutige Abbildung φ von der Menge aller Rechtsnebenklassen von H_1 nach H_{10} in die Menge der Linksnebenklassen von N nach N_{10} vermöge

$$\varphi(H_1 h) = \varphi(\bar{h}) = n N_{10}$$

mit den Eigenschaften

- (1) $n N_{10} = N_{10}^{h_n}$,
- (2) $\varphi(\overline{h_1 h_2}) = \varphi(\bar{h}_1)^{h_2} \varphi(\bar{h}_2)$.

Wenn H_1 eine Untergruppe von H , H_{10} eine Untergruppe von H_1 und N_{10} eine Untergruppe von N ist mit

$$(H_1 : H_{10}) \leq (N : N_{10})$$

und wenn Bedingung 3) erfüllt ist, so bildet die Menge aller Paare

$$(h', n') \text{ mit } h' \in H_{10} h \text{ und } n' \in n N_{10}$$

der sich bei der Abbildung φ eindeutig entsprechenden Rechts- bzw. Linksnebenklassen nach H_{10} bzw. nach N_{10} eine Untergruppe U von G . Mit der Angabe von H_1 , H_{10} , N_1 und N_{10} allein ist die Untergruppe U noch nicht festgelegt. Verschie-

denen eineindeutigen Abbildungen φ (im Falle des direkten Produktes also verschiedenen Isomorphismen von H_1/H_{10} auf N_1/N_{10}) entsprechen im allgemeinen verschiedene Untergruppen von G . Dabei gilt Eigenschaft (1) nicht notwendig elementweise.

2. Beweis des Satzes

Wir zeigen zunächst, daß die genannten drei Bedingungen notwendig sind. Um später den Spezialfall des direkten Produktes (Folgerung 1) einordnen zu können, schließen sich jeweils entsprechende Bemerkungen an.

2.1. Die drei Bedingungen sind notwendig.

Im folgenden sei U stets eine beliebige Untergruppe des halbdirekten Produktes $G = H \ltimes N$ der Gruppen H und N bezüglich des Homomorphismus $\alpha : H \rightarrow \text{Aut } N$. Mit H_1 , H_{10} , N_1 und N_{10} bezeichnen wir die im Satz festgelegten Mengen. Unmittelbar klar ist

Bedingung 1.

Die Menge $H_1 = \{ h : h \in H \wedge (h, n) \in U \}$ der ersten Komponenten der Elemente von U ist eine Untergruppe von H . Weiter ist $H_{10} = \{ h : h \in H_1 \wedge (h, 1) \in U \}$ eine Untergruppe von H_1 .

Bemerkung 1.

- Die Untergruppe H_{10} ist im allgemeinen kein Normalteiler von H_1 .
- Wenn H_{10} im Kern des Homomorphismus $\alpha : H \rightarrow \text{Aut } N$ liegt, dann ist H_{10} ein Normalteiler von H_1 .
- Aus $H_{10} \trianglelefteq H_1$ folgt im allgemeinen nicht $H_{10} \subseteq \ker \alpha$.

Bedingung 2.

Die Menge $N_{10} = \{ n : n \in N \wedge (1, n) \in U \}$ der zweiten Komponenten der Elemente von U , für die $(1, n) \in U$ gilt, ist eine Untergruppe von N . Die Menge $N_1 = \{ n : n \in N \wedge (h, n) \in U \}$ der zweiten Komponenten der Elemente von U besteht aus (nicht notwendig allen) Linksnebenklassen von N nach N_{10} .

Beweis: Mit $n_1, n_2 \in N_{10}$ ist offenbar auch $n_1 n_2^{-1} \in N_{10}$.

Es seien nun $n \in N_1$ und $n_1 \in N_{10}$. Dann ist auch $nn_1 \in N_1$, denn mit $(h, n) \in U$ und $(1, n_1) \in U$ ist auch

$$(h, n)(1, n_1) = (h, nn_1) \in U.$$

Bemerkung 2.

- a) Die Teilmenge N_1 ist im allgemeinen keine Untergruppe von N .
b) Wenn $H_1 \subseteq \ker \alpha$, dann ist N_1 eine Untergruppe von N und N_{10} ein Normalteiler von N_1 . Die schwächere Bedingung $H_{10} \subseteq \ker \alpha$ (Bemerkung 1b) ist dafür nicht ausreichend.
c) Bedingung b) ist nicht umkehrbar, d.h. aus $N_{10} \trianglelefteq N_1$ und $N_1 \subseteq N$ folgt im allgemeinen nicht $H_1 \subseteq \ker \alpha$.

Dem Nachweis der Bedingung 3 stellen wir drei Hilfssätze voran.

Lemma 1: Wenn zwei Elemente (h_1, n) und (h_2, n) aus U dieselbe zweite Komponente haben, dann liegen h_1 und h_2 in derselben Rechtsnebenklasse von H_1 nach H_{10} . Umgekehrt liegen mit $(h_1, n) \in U$ auch alle (h_2, n) in U , für die h_1 und h_2 in derselben Rechtsnebenklasse von H_1 nach H_{10} liegen.

Beweis: 1. Mit $(h_1, n) \in U$ und $(h_2, n) \in U$ ist offenbar auch

$$(h_1, n)(h_2, n)^{-1} = (h_1 h_2^{-1}, 1) \in U, \quad \text{also} \quad h_1 h_2^{-1} \in H_{10}.$$

Elemente aus verschiedenen Rechtsnebenklassen von H_1 nach H_{10} können daher nicht dieselbe zweite Komponente haben.

2. Wenn h_1 und h_2 in derselben Rechtsnebenklasse von H_1 nach H_{10} liegen und $(h_1, n) \in U$ ist, dann ist wegen $h_1 h_2^{-1} \in H_{10}$, also $(h_1 h_2^{-1}, 1) \in U$, auch

$$(h_1 h_2^{-1}, 1)^{-1} (h_1, n) = (h_2, n) \in U.$$

Lemma 2: Die Untergruppe H_{10} liegt im Normalisator $N_G(N_{10})$ der Untergruppe N_{10} in G .

Beweis: Mit $h \in H_{10}$ und $n \in N_{10}$, also $(h, 1) \in U$ und $(1, n) \in U$, gilt für das Produkt

$$(h, 1)^{-1} (1, n) (h, 1) = (1, n^h) \in U,$$

also $n^h \in N_{10}$. Damit ist $N_{10}^h \subseteq N_{10}$, und hieraus folgt die Gleichheit $N_{10}^h = N_{10}$.

Lemma 3: Wenn zwei Elemente (h, n_1) und $(h, n_2) \in U$ dieselbe erste Komponente haben, dann liegen n_1 und n_2 einerseits in derselben Linksnebenklasse von N nach N_{10} , und zwar ist mit $(h, n_1) \in U$ auch $(h, n_2) \in U$ für alle $n_2 \in n_1 N_{10}$. Andererseits liegen n_1 und n_2 in derselben Rechtsnebenklasse von N nach N_{10}^h . Mit $(h, n_1) \in U$ ist auch $(h, n_2) \in U$ für alle $n_2 \in N_{10}^h n_1$. Falls $(h, n) \in U$, so gilt $n N_{10} = N_{10}^h n$.

Beweis: 1. Aus $(h, n_1) \in U$ und $(h, n_2) \in U$ folgt

$$(h, n_1)^{-1}(h, n_2) = (1, n_1^{-1}n_2) \in U,$$

also $n_1^{-1}n_2 \in N_{10}$. Wenn umgekehrt n_1 und n_2 in derselben Linksnebenklasse von N nach N_{10} liegen und $(h, n_1) \in U$ ist, dann ist wegen $n_1^{-1}n_2 \in N_{10}$ auch

$$(h, n_1)(1, n_1^{-1}n_2) = (h, n_2) \in U.$$

2. Aus $(h, n_1) \in U$ und $(h, n_2) \in U$ folgt aber auch

$$(h, n_1)(h, n_2)^{-1} = (1, (n_1 n_2^{-1})^{h^{-1}}) \in U,$$

also $n_1 n_2^{-1} \in N_{10}^h$. Wenn schließlich n_1 und n_2 in derselben Rechtsnebenklasse nach N_{10}^h liegen und $(h, n_1) \in U$ gilt, dann ist wegen $n_2 n_1^{-1} \in N_{10}^h$, also $(n_2 n_1^{-1})^{h^{-1}} \in N_{10}$, sicher

$$(1, (n_2 n_1^{-1})^{h^{-1}})(h, n_1) = (h, n_2) \in U.$$

3. Wir zeigen nun $n N_{10} = N_{10}^h n$, falls $(h, n) \in U$. Es sei $n_1 \in n N_{10}$, also $n_1 = n n'$ mit $n' \in N_{10}$. Dann ist neben $(h, n) \in U$ auch $(1, n') \in U$, und wir haben

$$(h, n)(1, n')(h, n)^{-1} = (1, (n n'^{-1})^{h^{-1}}) \in U,$$

also $n_1 \in N_{10}^h n$. Damit ist $n N_{10} \subseteq N_{10}^h n$, und hieraus folgt die Gleichheit $n N_{10} = N_{10}^h n$.

Es können also bei festem $h \in H_1$ nur solche Linksnebenklassen nN_{10} von N nach N_{10} als zweite Komponenten von h auftreten, die gleichzeitig Rechtsnebenklassen $N_{10}^h n$ von N nach N_{10}^h sind. In Anwendung von Lemma 1 und Lemma 3 können wir nun genau beschreiben, wie die Rechtsnebenklassen von H_1 nach H_{10} gewissen Linksnebenklassen von N nach N_{10} zugeordnet werden.

Bedingung 3.

Jede Rechtsnebenklasse von H_1 nach H_{10} wird eineindeutig auf eine Linksnebenklasse von N nach N_{10} abgebildet. Ist $(h, n) \in U$, so wird diese Abbildung φ vermittelt durch

$$\varphi : \bar{h} = H_{10}h \longrightarrow nN_{10} = \varphi(\bar{h}).$$

Dabei sind die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

- (1) $nN_{10} = N_{10}^h n$,
 (2) $\varphi(\overline{h_1 h_2}) = \varphi(\bar{h}_1) {}^{h_2} \varphi(\bar{h}_2)$.

Mit $(h, n) \in U$ liegen auch alle Paare (h_1, n_1) in U , wobei h_1 alle Elemente der Rechtsnebenklasse $H_{10}h$ und n_1 (unabhängig von h_1) alle Elemente der Linksnebenklasse nN_{10} durchläuft.

Beweis: Nach Lemma 1 und Lemma 3 entsprechen die Rechtsnebenklassen von H_1 nach H_{10} eineindeutig gewissen Linksnebenklassen von N nach N_{10} . Dabei ist die Eigenschaft (1) erfüllt.

Um auch Eigenschaft (2) zu zeigen, betrachten wir zwei beliebige Elemente (h_1, n_1) und (h_2, n_2) aus der Untergruppe U . Nach der Multiplikationsvorschrift in der Gruppe G ist

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 {}^{h_2} n_2).$$

Mit $\bar{h}_1 = H_{10}h_1$, $\bar{h}_2 = H_{10}h_2$, $\overline{h_1 h_2} = H_{10}h_1 h_2$ sowie

$\varphi(\bar{h}_1) = n_1 N_{10}$, $\varphi(\bar{h}_2) = n_2 N_{10}$ ist sowohl

$$\varphi(\overline{h_1 h_2}) = n_1 {}^{h_2} n_2 N_{10} \quad \text{als auch}$$

$$\varphi(\bar{h}_1) {}^{h_2} \varphi(\bar{h}_2) = (n_1 N_{10}) {}^{h_2} (n_2 N_{10}) = n_1 {}^{h_2} n_2 N_{10}.$$

Bemerkung 3.

- a) Wenn H_1 im Kern des Homomorphismus $\alpha : H \rightarrow \text{Aut } N$ liegt, dann ist die Abbildung φ ein Isomorphismus der Faktorgruppe H_1/H_{10} auf die Faktorgruppe N_1/N_{10} .
- b) Die Bedingung a) ist nicht umkehrbar, d.h., aus $H_1/H_{10} \cong N_1/N_{10}$ folgt nicht notwendig $H_1 \subseteq \ker \alpha$.
- c) Die Eigenschaften (1) und (2) sind unabhängig.

2.2. Die Bedingungen sind hinreichend.

Es sei $G = H \ltimes N$ das halbdirekte Produkt der Gruppen H und N bezüglich des Homomorphismus $\alpha : H \rightarrow \text{Aut } N$. Wir wählen eine Untergruppe H_1 von H , eine Untergruppe H_{10} von H_1 und eine Untergruppe N_{10} von N derart, daß der Index $(H_1:H_{10})$ nicht größer als der Index $(N:N_{10})$ ist. Jeder Rechtsnebenklasse $H_{10}h$ ordnen wir genau eine Linksnebenklasse nN_{10} zu. Das ergibt unsere Abbildung

$$\varphi : H_{10}h \rightarrow nN_{10}.$$

Verschiedenen Rechtsnebenklassen von H_1 und H_{10} entsprechen verschiedene Linksnebenklassen von N nach N_{10} . Wenn nun die Eigenschaften (1) und (2) aus Bedingung 3 erfüllt sind, so bildet die Menge aller Paare (h_1, n_1) mit $h_1 \in H_1h = \bar{h}$ und $n_1 \in nN_{10} = N_{10}^{\bar{h}} = \varphi(\bar{h})$ bezüglich der in G betrachteten Multiplikation eine Untergruppe U von G .

Vorbereitend bemerken wir, daß wegen $(h, 1) \in U$ aus (1) sofort die Eigenschaft

$$H_{10} \subseteq N_G(N_{10}) \quad (1')$$

folgt. Der Beweis unseres Satzes ist beendet, wenn wir zeigen, daß mit $(h_1, n_1), (h_2, n_2) \in U$ auch stets $(h_1, n_1)(h_2, n_2)^{-1} \in U$ ist.

1. Fall: Wenn $h_1, h_2 \in H_{10}$ und $n_1, n_2 \in N_{10}$, so ist

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2)^{-1} = (h_1 h_2^{-1}, (n_1 n_2^{-1})^{h_2^{-1}}) \in U, \quad \text{denn } h_1 h_2^{-1} \in H_{10},$$

und wegen $n_1 n_2^{-1} \in N_{10} = N_{10}^{h_2}$ (Eigenschaft (1')) ist auch

$$(n_1 n_2^{-1})^{h_2^{-1}} \in N_{10}.$$

Wir erhalten sogar, daß die Menge aller Paare (h, n) mit $h \in H_{10}$ und $n \in N_{10}$ eine Untergruppe von U ist.

2. Fall: Wenn h_1, h_2 in derselben Rechtsnebenklasse von H_1 nach H_{10} (und n_1 und n_2 aus derselben Linksnebenklasse von N nach N_{10}) sind, dann ist

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2)^{-1} = (h_1 h_2^{-1}, (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1}) \in U,$$

denn $h_1, h_2^{-1} \in H_{10}$, und es genügt wegen 1. zu zeigen, daß $(n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1} \in N_{10}$ ist. Das ist aber der Fall, denn wegen

$$n_1 N_{10} = n_2 N_{10} = N_{10} n_2 = N_{10} n_1$$

ist $n_1 n_2^{-1} \in N_{10}^{h_2}$ (Eigenschaft (1')), also $(n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1} \in N_{10}$.

3. Fall: Wenn h_1, h_2 in verschiedenen Rechtsnebenklassen von H_1 nach H_{10} (und n_1, n_2 in verschiedenen Linksnebenklassen von N nach N_{10}) liegen, dann wird wieder

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2)^{-1} = (h_1 h_2^{-1}, (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1}) \in U,$$

denn unter zusätzlicher Benutzung von Eigenschaft (2) ergibt sich einerseits

$$\overline{(h_1 h_2^{-1})} = (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1} N_{10}$$

und andererseits

$$\varphi(h_1) h_2^{-1} \varphi(h_2^{-1}) = (n_1 N_{10}) h_2^{-1} (n_2^{-1}) h_2^{-1} N_{10} = (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1} N_{10}.$$

Damit ist unser Satz endgültig bewiesen.

3. Folgerungen

Unser Ergebnis enthält bekannte Resultate als Spezialfälle.

Folgerung 1 (Subdirekte Produkte): Ist $G = H \times N$ das direkte Produkt zweier Gruppen, so ist jede Untergruppe U von G ein subdirektes Produkt aus einer Untergruppe $H_1 \subseteq H$ mit einer Untergruppe $N_1 \subseteq N$ und umgekehrt.

Das bedeutet: Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G = H \times N$ ist dann und nur dann eine Untergruppe von G , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Die Menge H_1 der ersten Komponenten der Elemente von U ist eine Untergruppe von H . Die Menge H_{10} der ersten Komponenten $h \in H_1$, für die $(h, 1) \in U$ ist, bildet einen Normalteiler von H_1 .
- 2) Die Menge N_1 der zweiten Komponenten der Elemente von U ist eine Untergruppe von N . Die Menge N_{10} der zweiten Komponenten $n \in N_1$ mit $(1, n) \in U$ ist ein Normalteiler von N_1 .
- 3) Es besteht ein Isomorphismus $H_1/H_{10} \cong N_1/N_{10}$.

Für den Beweis genügt der Hinweis, daß das halbdirekte Produkt im Spezialfall $\alpha : H \rightarrow 1$ (identischer Automorphismus von N) in das direkte Produkt übergeht. Dann ist trivialerweise stets $H_1 \subseteq \ker \alpha = H$.

Folgerung 2 (Diedergruppe): Die Diedergruppe

$D_n = \langle h, a : h^2 = a^n = 1, hah = a^{-1} \rangle$ der Ordnung $2n$ ist das halbdirekte Produkt der zyklischen Gruppe $H = \{1, h\} \cong Z_2$ mit der zyklischen Gruppe $N = \langle a \rangle \cong Z_n$ bezüglich des Homomorphismus

$$\alpha : h \rightarrow \alpha(h) : a \rightarrow a^h = a^{-1}.$$

Es gibt zwei Arten von Untergruppen der Gruppe D_n .

- 1) Jede Untergruppe N_{10} von N kann als Untergruppe von D_n aufgefaßt werden, nämlich als die Menge aller Paare $(1, n_0)$ mit $n_0 \in N_{10}$.
- 2) Es sei N_{10} eine beliebige Untergruppe von N und nN_{10} eine feste Nebenklasse von N nach N_{10} . Dann bilden die Paare $(1, n_0)$ und (h, nn_0) für alle $n_0 \in N_{10}$ eine Untergruppe von D_n .

Andere Untergruppen der Diedergruppe D_n gibt es nicht. Die Anzahl aller Untergruppen von D_n ist daher gleich $d(n) + 6(n)$. Dabei bezeichnet $d(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n , $6(n)$ die Summe der Teiler von n .

Literatur:

1. Hall, M.: The Theory of Groups. New York 1959

eingegangen: 30. 11. 1987

revidierte Fassung: 27. 04. 1988

Verfasser:

Prof. Dr. Kurt Rosenbaum
Pädagogische Hochschule "Dr. Theodor Neubauer"
Sektion Mathematik/Physik
Nordhäuser Straße 63
Erfurt
DDR-5064

Gunter Tiedt

Blöcke von Gruppen der p-Länge 1

Meinem Lehrer Prof. Dr. G. Pazderski zum 60. Geburtstag gewidmet

0. Einleitung

Eine Frage, die man in der modularen Darstellungstheorie behandelt, ist, wie sich die Blöcke einer Gruppe \mathcal{G} bestimmen lassen. Dabei verstehen wir unter einem Block der Gruppe \mathcal{G} ein primitives Idempotent vom Zentrum des Gruppenrings $Z(K\mathcal{G}) = (K\mathcal{G})^{\mathcal{G}}$ von \mathcal{G} . Die Charakteristik des Körpers K teile die Gruppenordnung. Außerdem setzen wir häufig bestimmte Zerfällungseigenschaften für K voraus. Der 1. Abschnitt enthält allgemeine Aussagen über die Struktur der Blöcke von Gruppen, die bestimmte Forderungen erfüllen. Es werden Gruppen betrachtet, welche einen p -Normalteiler \mathcal{P} derart besitzen, daß

$$C_{\mathcal{G}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{N}$$

gilt, wobei \mathcal{P}_0 eine abelsche p -Untergruppe und \mathcal{N} einen p' -Normalteiler bezeichnen.

Im 2. Abschnitt bestimmen wir die Blöcke von Gruppen des Typs $\mathcal{G} = \mathcal{A} \rtimes \mathcal{N}$, wobei \mathcal{A} eine abelsche p -Untergruppe und \mathcal{N} ein Hallischer Normalteiler von \mathcal{G} sind. Dabei werden als Spezialfälle unter anderem die Rédei-Gruppen und einige Diedergruppen untersucht.

Der 3. Abschnitt behandelt eine Gruppe der $3'$ -Länge 2 für $p=3$. In allen Abschnitten werden zu den Blöcken die Defektgruppen bestimmt.

1. Zur Konstruktion von Blöcken

Definiton: Die primitiven Idempotente von $Z(K\mathfrak{Q}) = (K\mathfrak{Q})^{\mathfrak{Q}}$ heißen Blöcke von \mathfrak{Q} .

Da die Blöcke von \mathfrak{Q} im Zentrum des Gruppenrings liegen und die Summen der Konjugiertheitsklassen von \mathfrak{Q} eine Basis für das Zentrum bilden, haben die Blöcke b_i folgende Gestalt:

$$b_i = \sum_{j=0}^1 a_j c_j \quad \text{mit} \quad a_j \in K, \quad c_j = \sum_{G \in c_j} G.$$

Dabei sind die c_j für $j = 0, 1, \dots, l$ die Konjugiertheitsklassen von \mathfrak{Q} .

Hilfssatz 1: Die Gruppe \mathfrak{Q} besitze einen p -Normalteiler \mathfrak{P} derart, daß

$$C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_0 \times \mathfrak{N},$$

wobei \mathfrak{P}_0 eine abelsche p -Untergruppe und \mathfrak{N} ein p' -Normalteiler von $C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P})$ ist. Dann ist \mathfrak{N} auch Normalteiler von \mathfrak{Q} .

Beweis: $\mathfrak{N} = O_p(C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P}))$ ist charakteristisch in $C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P})$. Weil \mathfrak{P} Normalteiler in \mathfrak{Q} ist, gilt das auch für $C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P})$. Das liefert die Behauptung. ■

Wegen Hilfssatz 1 ist folgende Definition gerechtfertigt.

Definition: Zwei Charaktere χ und χ' von \mathfrak{N} heißen konjugiert in \mathfrak{Q} , falls $\chi(H) = \chi(H^G)$ für alle $H \in \mathfrak{N}$ und ein geeignetes $G \in \mathfrak{Q}$ gilt.

Hilfssatz 2: Sei χ ein irreduzibler Charakter von \mathfrak{Q} und α ein Automorphismus von \mathfrak{Q} . Dann ist χ' mit $\chi'(G) := \chi(\alpha(G))$ ein irreduzibler Charakter von \mathfrak{Q} , eventuell derselbe wie χ .

Beweis: Sei \mathfrak{S} eine zu χ gehörende irreduzible Darstellung und $\mathfrak{S}'(G) := \mathfrak{S}(\alpha(G))$.

Dann haben wir $\mathfrak{S}'(GH) = \mathfrak{S}(\alpha(GH)) = \mathfrak{S}(\alpha(G)\alpha(H)) = \mathfrak{S}'(G)\mathfrak{S}'(H)$ für alle $G, H \in \mathfrak{Q}$. Also ist \mathfrak{S}' eine Darstellung von \mathfrak{Q} und χ' der zugehörige Charakter.

Angenommen, \mathfrak{S}' wäre reduzibel, d.h., nach geeigneter Basiswahl

würde gelten

$$\mathfrak{S}'(G) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}'_1(G) & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}'_2(G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1(\alpha(G)) & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_2(\alpha(G)) \end{pmatrix}$$

Ersetzt man hier G durch $\alpha^{-1}(G)$, so erhält man, daß \mathfrak{S} reduzibel ist, was einen Widerspruch liefert. ■

Es ist leicht zu überprüfen, daß das Konjugiertsein von irreduziblen Charakteren eine Äquivalenzrelation ist. Also zerfällt die Menge der irreduziblen Charaktere von \mathfrak{H} in Transitivitätsgebiete T_0, T_1, T_2, \dots , wobei zwei irreduzible Charaktere genau dann in demselben Gebiet liegen, wenn sie unter \mathfrak{Q} konjugiert sind. T_0 sei immer das Transitivitätsgebiet, in welchem der Einscharakter liegt.

Satz 1: Die Gruppe \mathfrak{Q} besitze einen p -Normalteiler \mathfrak{P} , so daß $C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_0 \times \mathfrak{H}$, wobei \mathfrak{P}_0 eine abelsche p -Untergruppe und \mathfrak{H} ein p' -Normalteiler von $C_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{P})$ ist. Außerdem sei K Zerfällungskörper von \mathfrak{Q} und habe die Charakteristik p . Dann sind

$$b_i = \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|T_i|} \sum_{G \in \mathfrak{H}} \chi(G^{-1})G, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

die Blöcke von \mathfrak{Q} in $K\mathfrak{Q}$. Speziell ist

$$b_0 = \frac{1}{|T_0|} \sum_{H \in \mathfrak{H}} H \quad \text{der Hauptblock von } \mathfrak{Q}.$$

Beweis: Aus [4], Lemma 2.5, folgt, daß die Blöcke von \mathfrak{Q} in $K\mathfrak{H}$ liegen und daß $b_0 = \frac{1}{|T_0|} \sum_{H \in \mathfrak{H}} H$ der Hauptblock von \mathfrak{Q} ist.

Außerdem weiß man, daß alle primitiven zentralen Idempotente von $K\mathfrak{H}$ die Gestalt

$$e_{\chi} = \frac{\chi(E)}{|T_i|} \sum_{G \in \mathfrak{H}} \chi(G^{-1})G$$

haben, wobei χ ein irreduzibler Charakter von \mathfrak{H} ist. Also sind die $b_i = \sum_{\chi \in T_i} e_{\chi}$ als Summen der primitiven Idempotente e_{χ}

in $K\mathfrak{H}$ ebenfalls Idempotente in $K\mathfrak{Q}$.

Für $G \in \mathfrak{Q}$ ist

$$b_i^G = \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|T_i|} \sum_{H \in \mathfrak{H}} \chi(H^{-1})H^G$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|G|} \sum_{H \in G^{-1}} \chi((H^{-1})^{G^{-1}})H \\
&= \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|G|} \sum_{H \in G} \chi((H^{-1})^{G^{-1}})H \\
&= \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|G|} \sum_{H \in G} \chi'(H^{-1})H \\
&= \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi'(E)}{|G|} \sum_{H \in G} \chi'(H^{-1})H \\
&= b_i.
\end{aligned}$$

Dabei sind χ und χ' wegen Hilfssatz 2 unter \mathcal{G} konjugierte Charaktere. Mit χ ist auch χ' in T_i und $\chi(E) = \chi'(E)$.

Also sind die b_i zentrale Idempotente.

Nun untersuchen wir die Primitivität. Es sei $b_i = b_{i1} + b_{i2}$, $b_{i1} \cdot b_{i2} = 0$ und $(b_{ij})^G = b_{ij}$ für alle $G \in \mathcal{G}$ und $j = 1, 2$. Da die Blöcke von \mathcal{G} in $(K\mathbb{Q})^{\mathcal{G}}$ liegen, kann man annehmen, daß auch b_{i1} und b_{i2} aus $(K\mathbb{Q})^{\mathcal{G}}$ sind. Wenn \mathbb{M} die Menge der irreduziblen Charaktere von \mathbb{Q} und $a_\chi, b_\chi \in K$ sind, so gilt

$$b_{i1} \sum_{\chi \in \mathbb{M}} a_\chi e_\chi, \quad b_{i2} = \sum_{\chi \in \mathbb{M}} b_\chi e_\chi.$$

Für jeden Charakter χ aus \mathbb{M} folgt wegen $b_{i1}b_{i2} = 0$ sicher $a_\chi = 0$ oder $b_\chi = 0$. Wegen $(b_{ij})^2 = b_{ij}$ für $j = 1, 2$ ist $a_\chi, b_\chi \in \{0, 1\}$.

Wir haben $a_\chi, b_\chi = 0$, falls $\chi \notin T_i$, denn b_i ist die Summe einiger e_χ mit $\chi \in T_i$. Nun müssen b_{i1} und b_{i2} aber auch zentrale Idempotente sein. Daraus folgt $b_i = b_{i1}$ und $b_{i2} = 0$ oder $b_i = b_{i2}$ und $b_{i1} = 0$.

Also sind die b_i zentrale primitive Idempotente von $K\mathbb{Q}$. Die Summe aller so konstruierten Blöcke b_i von \mathcal{G} bezeichnen wir mit $v(b_i)$. Dann ist

$$v(b_i) = \sum_{\chi \in \mathbb{M}} e_\chi = E,$$

und deshalb gibt es keine weiteren Blöcke von \mathcal{G} . ■

Folgerung 1: Sei \mathcal{G} eine Gruppe mit normaler p -Sylowgruppe \mathcal{P} und K Zerfällungskörper von $\mathbb{K} := O_p(C_{\mathcal{G}}(\mathcal{P}))$ mit der Charakteristik p . Dann sind

$$b_i = \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|\mathbb{K}|} \sum_{H \in \mathcal{H}} \chi(H^{-1})H, \quad i = 0, 1, \dots,$$

die Blöcke von \mathcal{G} in K , wobei die T_i Transitivitätsgebiete unter \mathcal{G} konjugierter Charaktere sind.

Speziell ist

$$b_0 = \frac{1}{|\mathbb{K}|} \sum_{H \in \mathcal{H}} H \text{ der Hauptblock von } \mathcal{G}.$$

Beweis: Es ist $\mathcal{P}_0 := \mathcal{P} \cap C_{\mathcal{G}}(\mathcal{P})$ eine normale abelsche p -Sylowgruppe von $C_{\mathcal{G}}(\mathcal{P})$. Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus gibt es ein p -Komplement \mathbb{K} in $C_{\mathcal{G}}(\mathcal{P})$. Da \mathcal{P}_0 durch \mathbb{K} zentralisiert wird, haben wir $C_{\mathcal{G}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0 \times \mathbb{K}$. Aus Satz 1 folgt die Behauptung. ■

Folgerung 2: Sei \mathcal{G} eine p -nilpotente Gruppe mit abelscher p -Sylowgruppe \mathcal{P} und K Zerfällungskörper von $O_p(\mathcal{G})$ mit der Charakteristik p . Dann haben die Blöcke von \mathcal{G} in K folgende Gestalt:

$$b_i = \sum_{\chi \in T_i} \frac{\chi(E)}{|O_p(\mathcal{G})|} \sum_{G \in O_p(\mathcal{G})} \chi(G^{-1})G, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Insbesondere ist

$$b_0 = \frac{1}{|O_p(\mathcal{G})|} \sum_{G \in O_p(\mathcal{G})} G \text{ der Hauptblock von } \mathcal{G}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 1 mit $\mathcal{P} = \mathcal{G}$. ■

2. Blöcke von p -nilpotenten Gruppen

In diesem Abschnitt wollen wir die Blöcke einiger p -nilpotenter Gruppen bestimmen.

Satz 1: Sei $\mathcal{Q} = \langle A, B \mid A^p = B^q = E, B^A = B^r \rangle$ mit $r^p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \not\equiv 1 \pmod{q}$ und $q \equiv 1 \pmod{p}$. Außerdem sei ϵ eine primitive q -te Einheitswurzel, und k_v durchlaufe ein Vertretersystem für die Nebenklassen der aus r erzeugten Untergruppen in der primen Restklassengruppe modulo q . Dann sind

$$b_o = \sum_{i=1}^q B^i \quad \text{und} \quad b_v = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{p-1} \epsilon^{k_v(q-i)} (B^i)^j A^j$$

die Blöcke von \mathcal{Q} in $K\mathcal{Q}$. Die Defektgruppe von b_o ist eine p -Sylowgruppe von \mathcal{Q} . Die Defektgruppe der anderen b_i ist ϵ .

Beweis: Es ist $O_p(\mathcal{Q}) = \langle B \rangle$. Aus Abschnitt 1 folgt, daß

$$b_o = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q B^i \quad \text{und} \quad b_v = \sum_{\chi \in T_v} \frac{\chi(E)}{q} \sum_{i=1}^q \chi(B^{-i}) B^i$$

die Blöcke von \mathcal{Q} in $K\mathcal{Q}$ sind. Da $\text{Char } K = p$ und $q \equiv 1 \pmod{p}$ sowie $\chi(E) = 1$ ist, gilt

$$b_o = \sum_{i=1}^q B^i \quad \text{und} \quad b_v = \sum_{\chi \in T_v} \sum_{i=1}^q \chi(B^{-i}) B^i.$$

Hierbei bezeichnen die T_v wie früher die Transitivitätsgebiete unter \mathcal{Q} konjugierter Charaktere von $\langle B \rangle$. Die irreduziblen Charaktere χ_k der zyklischen Gruppe $\mathcal{B} := \langle B \rangle$ sind definiert durch $\chi_k(B^i) = \epsilon^{ik}$ für $k = 0, 1, \dots, q-1$, wobei ϵ eine primitive q -te Einheitswurzel ist. Der Einscharakter χ_0 wird bei der Bildung von b_o verwendet. Sei also jetzt $k > 0$. Dann sind $\chi_k(B)$ und $\chi_k(B^A) = \chi_k(B^r) = \chi_k(B)$ verschieden. Also wird durch $\{ \chi_k(B^A^j) \mid j = 0, 1, 2, \dots, p-1 \}$ ein Transitivitätsgebiet konjugierter Charaktere beschrieben. Die Charaktere χ_t und χ_s sind konjugiert genau dann, wenn ein j mit $t \equiv sr^j \pmod{q}$ existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn s und t in derselben Nebenklasse der aus r erzeugten Untergruppe in der primen Restklassengruppe modulo q liegen. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} b_v &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^q \chi_{k_v}((B^{-i})^j) B^i = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^q \chi_{k_v}(B^{-i})(B^i)^j A^j \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^q \epsilon^{k_v(q-i)} (B^i)^j A^j. \end{aligned}$$

Da b_o der Hauptblock ist, hat er als Defektgruppe eine p -Sylowgruppe. Es wird kein erzeugendes Element aus $\langle B \rangle$ bei Konjugation mit A festgelassen, denn ist $(B^i)^A = B^i$, dann gilt $B^{i(r-1)} = E$ und wegen $1 \not\equiv r \pmod{q}$ auch $i = 0$.

Da $\text{ord } A = p$ ist und das Konjugieren mit A einen Automorphismus auf $\langle B \rangle$ erzeugt, hat dieser Automorphismus die Ordnung p .

Es ist $C_{\mathcal{Q}}(A^j) = \langle A \rangle$ für $j = 1, 2, \dots, p-1$ und somit $\text{Br}_{\langle A^j \rangle} b_i = 0$ für $i \neq 0$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Satz 2: Sei $\mathcal{Q} = \langle A, B \mid A^2 = B^n = E, B^A = B^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$, wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist. Außerdem sei ϵ eine primitive n -te Einheitswurzel. Dann haben die Blöcke von \mathcal{Q} in $K\mathcal{Q}$ für den Fall $\text{Char } K = 2$ folgende Gestalt:

$$b_0 = \sum_{i=1}^n B^i, \quad b_j = \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon^{ij} (B^i + B^{-i}), \quad j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Die Defektgruppe von b_0 ist die 2-Sylowgruppe von \mathcal{Q} . Die Defektgruppe der anderen Blöcke ist \ast .

Beweis: Es ist $O_p(\mathcal{Q}) = \langle B \rangle$, und da n eine ungerade Zahl ist, gilt auch $C_{\mathcal{Q}}(\langle B \rangle) = \langle B^j \rangle$ für $j = 1, 2, \dots, n-1$. Wie früher haben wir

$$b_0 = \sum_{i=1}^n B^i \quad \text{und} \quad B_j = \sum_{\chi \in T} \sum_{j=1}^n \chi(B^{-i}) B^i,$$

wobei T_j Transitivitätsgebiete unter \mathcal{Q} konjugierter irreduzibler Charaktere von $\langle B \rangle$ sind. Die Werte der irreduziblen Charaktere von $\langle B \rangle$ sind $\chi_k(B) = \epsilon^k$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$. Sie sind also durch ihren Wert bei B auf ganz $\langle B \rangle$ bestimmt. Wegen $\chi_k(B^A) = \chi_k(B^{-1}) = \epsilon^{-k} = \chi_{n-k}(B)$ sind χ_k und χ_{n-k} konjugiert. Weil $\text{ord } A = 2$ und n ungerade ist, sind unter den Charakteren χ_k mit $k \neq 0$ immer zwei Charaktere konjugiert. Damit gilt

$$\begin{aligned} b_j &= \sum_{i=1}^n (\chi_j(B^{-i}) + \chi_{n-j}(B^{-i})) B^i = \sum_{i=1}^n \chi_j(B^{-i}) (B^i + B^{-i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \chi_j(B^i) (B^i + B^{-i}) = \sum_{i=1}^n \epsilon^{ij} (B^i + B^{-i}) \end{aligned}$$

$$\text{für } j = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}.$$

Die Aussage über die Defektgruppen folgt wegen $C_{\mathcal{Q}}(B^j) = \langle B \rangle$ für $j = 1, 2, \dots, n-1$ wie früher. ■

Definition: Nichtabelsche Gruppen, deren sämtliche echte Untergruppen abelsch sind, heißen einstufig nichtabelsche Gruppen oder Rédei-Gruppen.

Rédei hat in seinen Arbeiten nachgewiesen, daß diese Gruppen entweder p -Gruppen sind, oder die Ordnung $p^m q^r$ haben, wobei p, q verschiedene Primzahlen sind, $m, r \in \mathbb{N}$ und r die Ordnung von q modulo p ist. Im zweiten Fall handelt es sich um Gruppen der Gestalt

$$\mathcal{G} = \langle A \rangle \rtimes \mathcal{K},$$

wobei $\text{ord } A = p^m$ und \mathcal{K} eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung q^r ist. Man kann eine Basis B_0, \dots, B_{r-1} von \mathcal{K} so wählen, daß

$$B_0^A = B_1,$$

$$B_1^A = B_2$$

⋮

$$B_{r-2}^A = B_{r-1}$$

$$B_{r-1}^A = (B_0)^{-c_0} (B_1)^{-c_1} \dots (B_{r-1})^{-c_{r-1}},$$

wobei c_i die Koeffizienten eines irreduziblen Faktors des Polynoms $\frac{x^p-1}{x-1}$ über $\text{GF}(p)$ sind.

Satz 3: Die Blöcke der Rédei-Gruppen im Körper k sind wie folgt bestimmt:

- Wenn \mathcal{G} eine p -Gruppe ist, so ist $b_0 = E$ der einzige Block von \mathcal{G} , und dieser hat die Defektgruppe $\mathfrak{d} = \mathcal{G}$.
- Wenn \mathcal{G} nicht Primzahlpotenzordnung hat, so bezeichnen wir mit $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{r-1}$ paarweise nicht konjugierte irreduzible Charaktere von \mathcal{K} . Dann sind

$$b_0 = \sum_{B \in \mathcal{K}} B \quad \text{und} \quad b_i = \sum_{B \in \mathcal{K}} \chi_i(B^{-1}) (B + B^A + \dots + B^{A^{p-1}})$$

für $i = 1, \dots, \frac{q^r-1}{p}$ die Blöcke von \mathcal{G} .

Die Defektgruppe von b_0 ist $\langle A \rangle$, und die Defektgruppe der anderen Blöcke ist $\langle A^p \rangle$.

Beweis: a) Die Behauptung folgt aus [4], Lemma 2.6.

b) Wie im Beweis von Satz 1 erhalten wir

$$b_0 = \sum_{B \in \mathfrak{K}} B \quad \text{und} \quad b_i = \sum_{\chi \in T_i} \sum_{B \in \mathfrak{K}} \chi(B^{-1})B \quad \text{für } i = 1, 2, \dots,$$

wobei T_i Transitivitätsgebiete untereinander konjugierter Charaktere von \mathfrak{K} sind. χ sei ein irreduzibler Charakter von \mathfrak{K} ungleich dem Einscharakter.

Angenommen, es existiert ein j mit $0 < j < p$, so daß $\chi(B) = \chi(B^{A^j})$ für alle $B \in \mathfrak{K}$ gilt, dann wäre auch $\chi(B) = \chi(B^A)$, denn jedes j mit obiger Eigenschaft erzeugt die ganze zyklische Restklassengruppe modulo p . Wegen $\chi(B_k) = \chi(B_k^A)$ für $k = 1, 2, \dots, r-1$ gilt

$$\chi(B_0) = \chi(B_1) = \dots = \chi(B_{r-1}) = \chi((B_0')^{-c_0} \dots (B_{r-1}')^{-c_{r-1}}).$$

Weil \mathfrak{K} eine abelsche Gruppe ist, sind die Charaktere von \mathfrak{K} bekannt. O.B.d.A. sei $\chi(B_0) = \varepsilon^k$, wobei ε eine primitive q -te Einheitswurzel ist und $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < q$ gilt.

Wir erhalten $-c_0 - c_1 - \dots - c_{r-1} \equiv 1 \pmod{q}$ und damit $q \mid (1 + c_0 + c_1 + \dots + c_{r-1})$. Aus

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = (x^r + \dots + c_1 x + c_0)(f(x))$$

folgt mit $x = 1$ offenbar $q \mid \sum_{i=0}^{p-1} 1 = p$.

Das heißt aber, nur für den Einscharakter χ_0 kann $\chi_0(B) = \chi_0(B^{A^j})$ gelten für alle $B \in \mathfrak{K}$ und festes j mit $0 < j < p$.

Bei Rédei-Gruppen sind alle echten Untergruppen abelsch, also auch $\mathfrak{H} = \langle A^p, \mathfrak{K} \rangle$, und deshalb ist $B^{A^p} = B$ für alle $B \in \mathfrak{K}$. Also liegen in jedem Transitivitätsgebiet T_i genau p irreduzible Charaktere von \mathfrak{K} . Da es außer dem Einscharakter q^{r-1} irreduzible Charaktere von \mathfrak{K} gibt, existieren genau $s = \frac{q^r - 1}{p}$ verschiedene Transitivitätsgebiete. Wenn χ_1, \dots, χ_s ein System untereinander nicht konjugierter Charaktere bilden, so sind

$$b_i = \sum_{B \in \mathfrak{B}} (\chi_i(B^{-1}) + \chi_i(B^{-A}) + \dots + \chi_i(B^{-A^{p-1}})) B$$

$$= \sum_{B \in \mathfrak{B}} \chi_i(B^{-1}) (B + \dots + B^{A^{p-1}})$$

für $i = 1, 2, \dots, \frac{q^r-1}{p}$ die vom Hauptblock verschiedenen Blöcke von \mathfrak{Q} .

Wegen $C_{\langle A \rangle}(\mathfrak{K}) = E$, $C_{\langle A^p \rangle}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$ und $a_E = 0$ in $b_i = \sum_{B \in \mathfrak{B}} a_E B$ gilt die Aussage über die Defektgruppen. ■

Bemerkung: Um ein System von nicht konjugierten Charakteren von \mathfrak{K} zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen:

Auf Grund von Satz 1 kann man sich auf den Fall $r > 1$ beschränken. Alle maximalen Untergruppen von \mathfrak{K} haben die Ordnung q^{r-1} . Ihre Anzahl ist (nach B. Huppert [2], III, Hilfssatz 8.5b, S. 311) bestimmt durch $\frac{q^r-1}{q-1}$, und es gilt $p \mid \frac{q^r-1}{q-1}$, da

$q^r \equiv 1 \pmod{p}$ und $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Der Normalisator einer maximalen Untergruppe von \mathfrak{K} in \mathfrak{Q} hat den Index p . Es gibt also unter \mathfrak{Q} jeweils p verschiedene konjugierte maximale Untergruppen. Man wähle ein System $\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_t$ von nicht konjugierten maximalen Untergruppen aus. Es gilt $t = \frac{q^r-1}{(q-1)p}$. Man setze

$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_i \times \langle B_i \rangle$ für $i = 1, \dots, t$, wobei B_i ein Element aus dem Komplement von \mathfrak{K}_i bezeichne. Verstehen wir unter ϵ eine primitive q -te Einheitswurzel, so ist durch $\chi_{ij}(B) := 1$ für $B \in \mathfrak{K}_i$ und $\chi_{ij}(B_i) := \epsilon^j$ für $i = 1, \dots, t$ und $j = 1, \dots, q-1$ ein System von $\frac{q^r-1}{q}$ paarweise nicht konjugierten irreduziblen

Charakteren von \mathfrak{K} definiert. Wegen $\ker \chi_{ij} = \mathfrak{K}_i$ können χ_{ij} und χ_{kl} für $i \neq k$ nicht unter \mathfrak{Q} konjugiert sein, da andernfalls ihre Kerne konjugiert sein müßten, was nicht der Fall ist. Es gilt nämlich $\ker \chi_{ij}^G = \mathfrak{K}_i^{G-1}$. Die Charaktere χ_{ij} und χ_{ik} sind für $j \neq k$ aber offensichtlich nicht konjugiert.

3. Die Blöcke einer nicht p -nilpotenten Gruppe

In diesem Abschnitt werden wir die Blöcke einer Gruppe \mathfrak{Q} untersuchen, welche die Quaternionengruppe als Normalteiler enthält. Dabei sei die Quaternionengruppe \mathfrak{Q} definiert durch

$$\mathfrak{Q} = \langle B_1, B_2 \mid B_1^2 = B_2^2, B_2^4 = E, (B_2)^{B_1} = B_2^{-1} \rangle.$$

Satz 1: Sei $\mathcal{G} = \text{GL}(2,3)$. Es gilt $\mathcal{G} = \langle A_1 \rangle \ltimes \langle A_2 \rangle \ltimes \mathcal{Q}$ mit

$$\begin{aligned} A_1^2 &= A_2^3 = E, & A_1^{-1} A_2 A_1 &= A_2^{-1}, \\ A_2^{-1} B_1 A_2 &= B_2, & A_1^{-1} B_1 A_1 &= B_2^{-1}, \\ A_2^{-1} B_2 A_2 &= B_1 B_2, & A_1^{-1} B_2 A_1 &= B_1^{-1}. \end{aligned}$$

Die Gruppe \mathcal{Q} hat die Konjugiertheitsklassen

$$\begin{aligned} c_1 &= \{ E \}, \\ c_2 &= \{ B_1^2 \}, \\ c_3 &= \{ B_1, B_2, B_1 B_2, B_1^3, B_2^3, B_1 B_2^3 \}, \\ c_4 &= \{ A_2, A_2 B_1, A_2 B_2, A_2 B_1 B_2, A_2^2 B_1^3, A_2^2, A_2^2 B_2^3, A_2^2 B_1 B_1^3 \}, \\ c_5 &= \{ A_2^2 B_1^2, A_2^2 B_1, A_2^2 B_2, A_2^2 B_1 B_2, A_2^2 B_1^2, A_2^2 B_1^3, A_2^2 B_2^3, A_2^2 B_1 B_2^3 \}, \\ c_6 &= \{ A_1, A_2 A_1, A_2^2 A_1, B_1 B_2 A_1, B_1 B_2^3 A_1, B_2^2 A_1, A_2 B_2^2 A_1, \\ & \quad A_2 B_2 A_1, A_2 B_2^3 A_1, A_2^2 B_1 A_1, A_2^2 B_1^2 A_1, A_2^2 B_1^3 A_1 \}, \\ c_7 &= \{ B_1 A_1, B_2^3 A_1, A_2 B_1 B_2 A_1, A_2^2 B_2 A_1, A_2 B_1^3 A_1, A_2^2 B_1 B_2^3 A_1 \}, \\ c_8 &= \{ B_1^3 A_1, B_2 A_1, A_2 B_1 A_1, A_2^2 B_1 B_2 A_1, A_2 B_1 B_2^3 A_1, A_2^2 B_2 A_1 \}. \end{aligned}$$

Die Klassensummen von c_i im Gruppenring $K\mathcal{G}$ werden mit C_i bezeichnet. Dabei sei k ein Körper der Charakteristik 3. Dann sind

$$\begin{aligned} b_0 &= -C_1 - C_2 - C_3, \\ b_1 &= -C_1 + C_2, \\ b_2 &= -C_3 - C_6 + C_7 + C_8, \\ b_3 &= -C_3 + C_6 - C_7 - C_8 \end{aligned}$$

die Blöcke von \mathcal{Q} in $K\mathcal{G}$. Die Defektgruppe von b_0 und b_1 ist 3-Sylowgruppe von \mathcal{Q} . Die Defektgruppe von b_2 und b_3 ist \mathcal{Q} .

Beweis: Man rechnet leicht nach, daß $c_1, c_2, c_3, c_6, c_7, c_8$ die p regulären Konjugiertheitsklassen von \mathcal{Q} sind. Um das Produkt der Klassensummen C_i und C_j zu berechnen, kann man wie folgt vorgehen: Man wähle $D_i \in c_i$ und bilde das Komplexprodukt $D_i c_j$. Für beliebiges k bestimme man die Anzahl b_k der Elemente von $D_i c_j$, welche in c_k liegen. Deren Anzahl ist unabhängig von der Wahl von D_i .

Nun gilt

$$C_i C_j = \sum_{k=1}^8 \frac{b_k |c_i|}{|c_k|} C_k.$$

Auf diese Weise wurde folgende Multiplikationstafel berechnet.

	C_1	C_2	C_3	C_6	C_7	C_8
C_1	C_1	C_2	C_3	C_6	C_7	C_8
C_2	C_2	C_1	C_3	C_6	C_8	C_7
C_3	C_3	C_3	C_3	$-C_6+C_7+C_8$	$-C_6+C_7+C_8$	$-C_6+C_7+C_8$
C_6	C_6	C_6	$-C_6+C_7+C_8$	C_3	C_3	C_3
C_7	C_7	C_8	$-C_6+C_7+C_8$	C_3	C_3	C_3
C_8	C_8	C_7	$-C_6+C_7+C_8$	C_3	C_3	C_3

Es ist $N_{\mathfrak{G}}(\langle A_2 \rangle) \cong \langle A_1 \rangle \times \langle A_2 \rangle \times \langle B_1^2 \rangle$.

Da der Normalisator einer Sylowgruppe sein eigener Normalisator ist, kann $N_{\mathfrak{G}}(\langle A_2 \rangle)$ in \mathfrak{G} nicht den Index 2 haben. Deshalb gilt oben das Gleichheitszeichen. Nach Folgerung 1 aus Abschnitt 2 sind die Blöcke von $N_{\mathfrak{G}}(\langle A_2 \rangle)$ im Körper K der Charakteristik 3

$$b'_0 = -E - B_1^2 \quad \text{und} \quad b'_1 = -E + B_1^2.$$

Aus dem ersten Hauptsatz von Brauer und dem Satz von Osima folgt, daß die Blöcke mit Defektgruppe $\mathfrak{g} = \langle A_2 \rangle$ die Gestalt

$$e_0 = -E - B_1^2 + a_3 C_3 + a_6 C_6 + a_7 C_7 + a_8 C_8 \quad \text{mit} \quad a_3, a_6, a_7, a_8 \in K$$

und

$$e_1 = -E + B_1^2 + b_3 C_3 + b_6 C_6 + b_7 C_7 + b_8 C_8 \quad \text{mit} \quad b_3, b_6, b_7, b_8 \in K$$

haben. Wegen

$$\begin{aligned} e_0^2 &= -E - B_1^2 + (a_3^2 - a_3 + a_6^2 - a_6 a_7 - a_6 a_8 + a_7^2 - a_7 a_8 + a_8^2) C_3 \\ &\quad + (a_3 a_6 + a_3 a_7 + a_3 a_8 - a_6) C_6 \\ &\quad - (a_3 a_6 + a_3 a_7 + a_3 a_8 + a_7) C_7 \\ &\quad - (a_3 a_6 + a_3 a_7 + a_3 a_8 + a_8) C_8 = e_0 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$a_3 a_6 + a_3 a_7 + a_3 a_8 = -a_6,$$

$$-a_3 a_6 - a_3 a_7 - a_3 a_8 + a_8 + a_7 = a_7,$$

$$-a_3 a_6 - a_3 a_7 - a_3 a_8 + a_7 + a_8 = a_8.$$

$$\text{Folglich ist } -a_6 = a_7 = a_8 \quad \text{und} \quad -a_3 a_6 = -a_6.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $a_6 = a_7 = a_8 = 0$.

Hier folgt $a_3^2 - a_3 = a_3$ und somit $a_3 = -1$ oder $a_3 = 0$.

2. Fall: $a_6 \neq 0$.

Jetzt gilt $a_3 = -1$ und $a_8^2 = 1$, also $a_6 = 1$ oder $a_6 = -1$.

Es gibt damit folgende mögliche Blöcke von \mathfrak{Q} mit Defektgruppe $\mathfrak{d} = \langle A_2 \rangle$:

$$e_{01} = -C_1 - C_2 - C_3,$$

$$e_{02} = -C_1 - C_2,$$

$$e_{03} = -C_1 - C_2 - C_3 - C_6 + C_7 + C_8,$$

$$e_{04} = -C_1 - C_2 - C_3 + C_6 - C_7 - C_8,$$

$$e_{11} = -C_1 + C_2,$$

$$e_{12} = -C_1 + C_2 + C_3,$$

$$e_{13} = -C_1 + C_2 - C_3 + C_6 - C_7 - C_8,$$

$$e_{14} = -C_1 + C_2 - C_3 - C_6 + C_7 + C_8.$$

Blöcke mit Defektgruppe \mathfrak{K} haben wegen Hilfssatz 2 aus Abschnitt 2 die Form

$$e_2 = d_3 C_3 + d_6 C_6 + d_7 C_7 + d_8 C_8.$$

Aus $e_2^2 = e_2$ ergibt sich

$$e_{21} = C_3,$$

$$e_{22} = -C_3 - C_6 + C_7 + C_8,$$

$$e_{23} = -C_3 + C_6 - C_7 - C_8.$$

Unter obigen Idempotenten scheidet wir nun die zerfallenden aus.
Es gilt

$$\begin{array}{ll}
e_{02} = e_{01} + e_{21}, & e_{01}e_{21} = 0, \\
e_{03} = e_{01} + e_{23}, & e_{01}e_{23} = 0, \\
e_{04} = e_{01} + e_{22}, & e_{01}e_{22} = 0, \\
e_{12} = e_{11} + e_{21}, & e_{11}e_{21} = 0, \\
e_{13} = e_{11} + e_{23}, & e_{11}e_{23} = 0, \\
e_{14} = e_{11} + e_{22}, & e_{11}e_{22} = 0, \\
e_{21} = e_{22} + e_{23}, & e_{22}e_{23} = 0.
\end{array}$$

Da es nach Brauers 1. Hauptsatz genau zwei Blöcke mit der Defektgruppe $\mathfrak{f} = \langle A_2 \rangle$ geben muß, müssen diese mit den verbleibenden Idempotenten e_{01} und e_{11} übereinstimmen. Das Idempotent e_{22} läßt sich nicht aus diesen und e_{23} bilden, ist also auch primitives zentrales Idempotent. Analoges gilt für e_{23} . ■

Literatur:

1. Burrow, M.: Representation Theory of Finite Groups. New York 1965
2. Huppert, B.: Endliche Gruppen I. Heidelberg 1967
3. Osima, M.: Notes on blocks of group characters. Math. J. Okayama Univ. 4, 175-188 (1955)
4. Pazderski, G: Blöcke und Defektgruppen, Skript 1984

eingegangen: 11. 06. 1987

Überarbeitete Fassung: 01. 10. 1987

Verfasser:

Dipl.-Math. Gunter Tiedt
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitätsplatz 1
 Rostock
 DDR-2500

Wolfgang Peters

Berechnung der linearen involutorischen Halbgruppen sechster und siebenter Ordnung

Eine Halbgruppe ist bekanntlich eine nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. Selbst im Fall einer endlichen Ordnung n (der Anzahl ihrer Elemente) sind Halbgruppen von einer kaum übersehbaren Vielfalt (vgl. etwa den Fall $n=4$ bei G. G. Forsythe [4]), so daß es sinnvoll ist, sich bei ihrer Untersuchung auf bestimmte Teilklassen zu beschränken. Eine solche Teilklassen bilden die von L. Berg [2] eingeführten linearen involutorischen Halbgruppen, die ihrerseits einen Spezialfall der komplementären Halbgruppen aus L. Berg [1] darstellen und daher insbesondere additiv geschriebene kommutative Halbgruppen mit einem Nullelement sind. Außerdem ist in den linearen komplementären Halbgruppen eine totale Ordnungsrelation erklärt, die mit der Addition verträglich ist, d.h., bezüglich der die Addition monoton ist. In [2] wurden alle linearen involutorischen Halbgruppen n -ter Ordnung mit $n \leq 5$ angegeben, und es ergab sich für die Anzahl k_n dieser Halbgruppen (bis auf Isomorphie) im Fall $2 \leq n \leq 5$ die Formel

$$k_n = 2^{n-2} \quad (1)$$

In der vorliegenden Arbeit werden die entsprechenden Halbgruppen für $n=6$ und $n=7$ aufgestellt, wobei sich zeigt, daß

$$k_6 = 17 \quad \text{und} \quad k_7 = 36 \quad (2)$$

ist und damit (1) in diesen Fällen durch $k_n \geq 2^{n-2}$ zu ersetzen ist. Insbesondere ergibt sich für die Zahl l_n^m der betrachteten Halbgruppen n -ter Ordnung mit m erzeugenden Elementen in den Fällen $n = 5$ und $n = 6$

$$l_n^m \geq \binom{n-2}{m-1},$$

wobei das Gleichheitszeichen in folgenden Fällen verletzt ist:

$$1_6^3 = 7, 1_7^2 = 6, 1_7^3 = 11, 1_7^4 = 12.$$

Die Ermittlung der erwähnten Halbgruppen erfolgte mit Hilfe eines BASIC-Programms auf einem Kleinrechner unter Beachtung der folgenden

Charakterisierung [2]:

Bezeichnet man die Elemente einer Halbgruppe n-ter Ordnung mit $1, 2, \dots, n$ und verwendet man die übliche Ordnungsrelation sowie die Involution $a^* = n+1-a$, so sind die linearen involutorischen Halbgruppen im Fall $n=6$ diejenigen linearen kommutativen Halbgruppen, in deren Additionstabellen als Zeilen und Spalten lediglich folgende 32 Möglichkeiten auftreten können:

Nr.						Nr.							
1	1	1	1	1	1	6	17	2	2	2	2	6	6
2	1	1	1	1	2	6	18	2	2	2	3	6	6
3	1	1	1	2	3	6	19	2	2	3	4	6	6
4	1	1	1	3	3	6	20	2	2	4	4	6	6
5	1	1	2	2	4	6	21	2	3	3	5	6	6
6	1	1	2	3	4	6	22	2	3	4	5	6	6
7	1	1	3	4	4	6	23	2	4	5	5	6	6
8	1	1	4	4	4	6	24	2	5	5	5	6	6
9	1	2	2	2	5	6	25	3	3	3	6	6	6
10	1	2	2	3	5	6	26	3	3	4	6	6	6
11	1	2	3	4	5	6	27	3	4	5	6	6	6
12	1	2	4	4	5	6	28	3	5	5	6	6	6
13	1	3	3	5	5	6	29	4	4	6	6	6	6
14	1	3	4	5	5	6	30	4	5	6	6	6	6
15	1	4	5	5	5	6	31	5	6	6	6	6	6
16	1	5	5	5	5	6	32	6	6	6	6	6	6

Dabei muß die 11. Möglichkeit, die zum Nullelement gehört, stets vorkommen und trivialerweise die 32. ebenfalls. Umgekehrt können die Möglichkeiten mit den Nummern 8, 17 und 18 nicht auftreten, da sie wegen der Monotonie der Addition weder vor noch hinter dem Nullelement stehen können.

Durch systematische Auswahl von jeweils n Zeilen aus den 2^{n-1} möglichen lassen sich unter Beachtung der Kommutativität, der Assoziativität und der Ordnungsrelation mit Hilfe des Computerprogramms [7] alle entsprechenden Halbgruppen ermitteln. Im folgenden werden sie für die Ordnung 6 und 7 angegeben.

Außerdem wurden mit Hilfe zweier neuer Erzeugungsregeln einige lineare involutorische Halbgruppen der Ordnung 8 und 9 ermittelt.

Um eine platzsparende Darstellung zu erhalten, sollen immer nur so viele der Zeilen der Additionstabellen angegeben werden, wie zur eindeutigen Vervollständigung mit Hilfe der Symmetrie- und Ordnungsrelation notwendig sind. Die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen werden wegen der Symmetrie nicht angeführt.

Am linken Rand jeder Additionstafel wird durch die Ziffer 0 die Position des Nullelements gekennzeichnet, die am oberen Rand stehenden Zahlen sind die erzeugenden Elemente der Halbgruppe.

Bei der Betrachtung der Halbgruppen kann man feststellen, daß es Paare gibt, deren Additionstabellen sich voneinander nur in einer Position unterscheiden. Im folgenden fassen wir solche "Zwillinge" stets zusammen. Die in den Tabellen auftretenden Variablen bedeuten $x=2, 3$; $y=3, 4$; $z=4, 5$; $u=5, 6$ und $v=6, 7$, wobei der erste Wert stets zum ersten Zwilling, der zweite zum zweiten Zwilling gehören soll. (a) bedeutet Erzeugende beim ersten, /a/ beim zweiten Zwilling.

Die linearen involutorischen Halbgruppen H_i^6

i	H_i^6	i	H_i^6	i	H_i^6																																																								
1/2	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>(3)4</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 1 1 1 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1 1 1 2 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1 2 3 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>x 4 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5 6</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		(3)4	6	1	1 1 1 1 1 6			1 1 1 2 6			1 2 3 6			x 4 6		0	5 6	6	3	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2 3 4</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 1 1 1 1</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1 1 1 2 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1 3 3 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>4 4 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5 6</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		2 3 4	6	1	1 1 1 1 1 1			1 1 1 2 6			1 3 3 6			4 4 6		0	5 6	6	4	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2</th> <th>5 6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 1 1 1 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1 1 2 3 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>1 3 3 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>4 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5 6</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		2	5 6	1	1 1 1 1 1 6			1 1 2 3 6			1 3 3 6			4 5 6		0	5 6	6		
	(3)4	6																																																											
1	1 1 1 1 1 6																																																												
	1 1 1 2 6																																																												
	1 2 3 6																																																												
	x 4 6																																																												
0	5 6	6																																																											
	2 3 4	6																																																											
1	1 1 1 1 1 1																																																												
	1 1 1 2 6																																																												
	1 3 3 6																																																												
	4 4 6																																																												
0	5 6	6																																																											
	2	5 6																																																											
1	1 1 1 1 1 6																																																												
	1 1 2 3 6																																																												
	1 3 3 6																																																												
	4 5 6																																																												
0	5 6	6																																																											
5	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>1</th> <th>3</th> <th>5 6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 1 1 1 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 2 2 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 3 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>4 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5 6</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		1	3	5 6	1	1 1 1 1 1 6			2 2 2 5 6			2 3 5 6			4 5 6		0	5 6	6	6	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>1 2</th> <th>4 5 6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 1 1 1 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 2 2 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>3 4 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>4 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5 6</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		1 2	4 5 6	1	1 1 1 1 1 6			2 2 2 5 6			3 4 5 6			4 5 6		0	5 6	6	7/8	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>1</th> <th>3(4)</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 1 1 1 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 3 4 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>y 5 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>5 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>5 6</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>		1	3(4)	6	1	1 1 1 1 1 6			2 3 4 5 6			y 5 5 6			5 5 6		0	5 6	6
	1	3	5 6																																																										
1	1 1 1 1 1 6																																																												
	2 2 2 5 6																																																												
	2 3 5 6																																																												
	4 5 6																																																												
0	5 6	6																																																											
	1 2	4 5 6																																																											
1	1 1 1 1 1 6																																																												
	2 2 2 5 6																																																												
	3 4 5 6																																																												
	4 5 6																																																												
0	5 6	6																																																											
	1	3(4)	6																																																										
1	1 1 1 1 1 6																																																												
	2 3 4 5 6																																																												
	y 5 5 6																																																												
	5 5 6																																																												
0	5 6	6																																																											
9/10	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>1</th> <th>3</th> <th>5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 1 3 4 4 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 3 4 5 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>y 6 6 6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		1	3	5	1	1 1 3 4 4 6			2 3 4 5 6			y 6 6 6		0				11/12	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2 3(4)5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 2 3 4 5 6</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 3 4 6 6</td> </tr> <tr> <td></td> <td>y 6 6 6</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		2 3(4)5	1	1 2 3 4 5 6		2 3 4 6 6		y 6 6 6	0		13	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1 2 3 4 5 6</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2 4 4 6 6</td> </tr> <tr> <td></td> <td>5 6 6 6</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		2 3	1	1 2 3 4 5 6		2 4 4 6 6		5 6 6 6	0																				
	1	3	5																																																										
1	1 1 3 4 4 6																																																												
	2 3 4 5 6																																																												
	y 6 6 6																																																												
0																																																													
	2 3(4)5																																																												
1	1 2 3 4 5 6																																																												
	2 3 4 6 6																																																												
	y 6 6 6																																																												
0																																																													
	2 3																																																												
1	1 2 3 4 5 6																																																												
	2 4 4 6 6																																																												
	5 6 6 6																																																												
0																																																													

	2 4		2		2 3/4/			
14	O	1 2 3 4 5 6 3 3 5 6 6 3 6 6 6	15	O	1 2 3 4 5 6 3 4 5 6 6 5 6 6 6	16/17	O	1 2 3 4 5 6 z 5 5 6 6 5 6 6 6

Die letzten drei Halbgruppen lassen sich in Klassen aus [2] einordnen:

H_{15}^6	H_{16}^6	H_{17}^6
A_5	B_{23}	B_{33}

Die linearen involutorischen Halbgruppen H_i^7

Durch Anwendung von Satz 4 aus [2] kann man für $k=1, \dots, 17$ aus den Halbgruppen H_k^6 die Halbgruppen H_{18-k}^7 (z.B. mit dem Programm [6]) erzeugen. Deshalb werden die ersten siebzehn Halbgruppen 7. Ordnung hier nicht angegeben. Wenn wir wie im Fall $n=6$ zunächst mit Hilfe des Programms [5] die zugehörigen Zeilen und Spalten erzeugen, lauten die Additionstabeln der übrigen Halbgruppen:

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 5%; text-align: center;">H_i^7</td> <td style="width: 40%;"></td> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 5%; text-align: center;">H_i^7</td> <td style="width: 40%;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">2 6</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">1 2 5 6</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td style="border-right: 1px solid black;">O</td> <td>1 1 1 4 4 4 7 1 2 4 4 5 7 3 4 5 6 7 7 7 7 7</td> <td>19</td> <td style="border-right: 1px solid black;">O</td> <td>1 1 1 4 4 4 7 2 2 4 4 6 7 3 4 5 6 7 7 7 7 7</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">1 3 5</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">1 4</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td style="border-right: 1px solid black;">O</td> <td>1 1 1 4 4 4 7 2 3 4 5 6 7 3 4 6 6 7 7 7 7 7</td> <td>21</td> <td style="border-right: 1px solid black;">O</td> <td>1 1 3 3 5 5 7 2 3 4 5 6 7 5 5 7 7 7 6 7 7 7</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">1 3 4 6</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">1 3/4/ 6</td> </tr> <tr> <td>22</td> <td style="border-right: 1px solid black;">O</td> <td>1 1 3 4 5 5 7 2 3 4 5 6 7 3 4 7 7 7 7 7 7 7</td> <td>23/24</td> <td style="border-right: 1px solid black;">O</td> <td>1 1 3 4 5 5 7 2 3 4 5 6 7 z 5 7 7 7 7 7 7 7</td> </tr> </table>		H_i^7			H_i^7				2 6			1 2 5 6	18	O	1 1 1 4 4 4 7 1 2 4 4 5 7 3 4 5 6 7 7 7 7 7	19	O	1 1 1 4 4 4 7 2 2 4 4 6 7 3 4 5 6 7 7 7 7 7			1 3 5			1 4	20	O	1 1 1 4 4 4 7 2 3 4 5 6 7 3 4 6 6 7 7 7 7 7	21	O	1 1 3 3 5 5 7 2 3 4 5 6 7 5 5 7 7 7 6 7 7 7			1 3 4 6			1 3/4/ 6	22	O	1 1 3 4 5 5 7 2 3 4 5 6 7 3 4 7 7 7 7 7 7 7	23/24	O	1 1 3 4 5 5 7 2 3 4 5 6 7 z 5 7 7 7 7 7 7 7	
	H_i^7			H_i^7																																							
		2 6			1 2 5 6																																						
18	O	1 1 1 4 4 4 7 1 2 4 4 5 7 3 4 5 6 7 7 7 7 7	19	O	1 1 1 4 4 4 7 2 2 4 4 6 7 3 4 5 6 7 7 7 7 7																																						
		1 3 5			1 4																																						
20	O	1 1 1 4 4 4 7 2 3 4 5 6 7 3 4 6 6 7 7 7 7 7	21	O	1 1 3 3 5 5 7 2 3 4 5 6 7 5 5 7 7 7 6 7 7 7																																						
		1 3 4 6			1 3/4/ 6																																						
22	O	1 1 3 4 5 5 7 2 3 4 5 6 7 3 4 7 7 7 7 7 7 7	23/24	O	1 1 3 4 5 5 7 2 3 4 5 6 7 z 5 7 7 7 7 7 7 7																																						

	2 3 4 5 6				2 3/4/ 6
25	<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 2 3 4 5 7 7 3 4 7 7 7 7 7 7 7	26/27			<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 2 3 4 5 7 7 z 5 7 7 7 7 7 7 7
	2 3 4				2 4 5
28	<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 2 5 5 5 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7 7	29			<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 3 3 4 6 7 7 3 4 7 7 7 7 7 7 7
	2				2 4
30	<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 3 4 5 6 7 7 5 6 7 7 7 7 7 7 7	31			<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 3 5 5 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7 7
	2 3 (5)				2 3
32/33	<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 4 4 6 6 7 7 z 6 7 7 7 7 7 7 7	34			<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 4 5 6 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7 7
	2 3 4/5/				
35/36	<hr/> O 1 2 3 4 5 6 7 u 6 6 6 7 7 6 6 7 7 7 7 7 7 7				

Die letzten sieben Halbgruppen lassen sich in Klassen aus [2] einordnen:

H_{30}^7	H_{31}^7	H_{32}^7	H_{33}^7	H_{34}^7	H_{35}^7	H_{36}^7
A_6	D_{21}	C_{41}	C_{31}	B_{24}	B_{34}	B_{44}

Zwei neue Erzeugungsregeln

Aus jeder Halbgruppe H_n der Ordnung n lassen sich zwei lineare involutorische Halbgruppen \hat{H}_n und \check{H}_n der Ordnung $n+2$ konstruieren, indem man - grob gesprochen - in der Additionstafel von H_n die Zeilen 0 und 0^* verdoppelt und einmal die "kleinere", zum anderen die "größere" der "Nullzeilen" als neue Zeile festlegt.

In H_n sei $a = 0$ und $b = 0^* = n+1-a > a$. Die Erzeugungsprinzipien lauten im einzelnen folgendermaßen:

Regel 1 zur Erzeugung von \hat{H}_n

1. Die Elemente x mit $x < a$ bleiben unverändert.
2. Die Elemente x mit $a \leq x < b$ werden durch $x+1$ ersetzt.
3. Die Elemente x mit $b \leq x$ werden durch $x+2$ ersetzt.
4. Für alle Elemente x wird $a+x = x$ gesetzt, a wird also Nullelement von \hat{H}_n .
5. Für alle von a verschiedenen Elemente x wird $x+(b+1) := x+(b+2)$ gesetzt.
Insbesondere gilt $(b+1)+(b+1) := (b+2)+(b+2)$.

Regel 2 zur Erzeugung von \hat{H}_n

1. Die Elemente x mit $x \leq a$ bleiben unverändert.
2. Die Elemente x mit $a < x < b$ werden durch $x+1$ ersetzt.
3. Die Elemente x mit $b \leq x$ werden durch $x+2$ ersetzt.
4. Für alle Elemente x wird $(a+1)+x = x$ gesetzt, $(a+1)$ wird also Nullelement von \hat{H}_n .
5. Für alle von $a+1$ verschiedenen Elemente x wird $(b+1)+x := b+x$ gesetzt.
Insbesondere gilt $(b+1)+(b+1) := b+b$.

Beispiel:

Ausgehend von H_4^5 mit $0 = 2$, $0^* = 4$ werden die Ersetzungen $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 6$, $5 \rightarrow 7$ in beiden Fällen sowie $2 \rightarrow 3$ bei Regel 1 vorgenommen,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} & \cong & \begin{array}{cccc} 1 & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & . & 3 & 4 \\ 1 & . & 4 & 6 \\ . & . & . & . \\ 1 & . & 6 & 6 \\ 7 & . & 7 & 7 \end{array} \\
 & & \cong & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 2 & . & 4 \\ . & . & . & . \\ 1 & 4 & . & 6 \\ . & . & . & . \\ 1 & 6 & . & 6 \\ 7 & 7 & . & 7 \end{array}
 \end{array}$$

und man erhält

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{array} & = & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}
 \end{array}$$

mit $0=2$, $0^*=6$ bzw. $0=3$, $0^*=5$. Sieht man von 0 und 0^* im ersten Fall ab, so bleibt die Involution erhalten. Im ersten Fall ist das alte Element 0^* zugleich das neue Element 0^* .

Diese Erzeugungsregeln lassen sich derart programmieren, daß man sowohl \hat{H}_n als auch \tilde{H}_n auf dem Speicherplatz nur einer Matrix der Ordnung $n+2$ erzeugen kann (vgl. BASIC-Programm [7]). In allen durchgerechneten Beispielen wurde überprüft, ob wirklich lineare involutorische Halbgruppen entstanden sind; der allgemeine Beweis dafür steht jedoch noch aus.

Wendet man diese Erzeugungsregeln auf die in [2] angegebenen und auf die in dieser Arbeit neu berechneten Halbgruppen an, so bekommt man bei Beschränkung auf diejenigen Halbgruppen, deren erste Zeile nicht $1\ 1\ \dots\ 1\ n$ lautet, die bekannten Halbgruppen

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= H_3^4, \hat{H}_2^3 = H_6^5, \tilde{H}_2^3 = H_5^5, \hat{H}_3^4 = H_{11}^6, \tilde{H}_3^4 = H_9^6, \hat{H}_4^4 = H_{12}^6, \\ \hat{H}_4^4 &= H_{10}^6, \hat{H}_5^5 = H_{20}^7, \tilde{H}_5^5 = H_{19}^7, \hat{H}_6^5 = H_{25}^7, \tilde{H}_6^5 = H_{22}^7, \hat{H}_7^5 = H_{26}^7, \\ \hat{H}_7^5 &= H_{23}^7, \hat{H}_8^5 = H_{27}^7, \tilde{H}_8^5 = H_{24}^7 \end{aligned}$$

sowie die folgenden neuen Halbgruppen achter und neunter Ordnung, wobei an die Vereinbarung $z = 4, 5$; $u = 5, 6$; und $v = 6, 7$ erinnert sei:

Einige lineare involutorische Halbgruppen der Ordnung 8

i	\hat{H}_i^6				\tilde{H}_i^6			
	1	3	4	6	1	2	4	6
9/10	$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 & 5 & 8 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 & 8 \\ & & & z & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$				$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 & 5 & 8 \\ & 2 & 2 & 4 & 5 & 5 & 7 & 8 \\ & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & z & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$			
	$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & (5) & 6 & 7 \end{array}$				$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & (5) & 7 \end{array}$			
11/12	$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 8 \\ & & 3 & 4 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ & & & z & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$				$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 8 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & 3 & 4 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ & & & z & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$			
	$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}$				$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 7 \end{array}$			
13	$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 8 \\ & & 3 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ & & & 6 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$				$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 8 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & 3 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ & & & 6 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$			
	$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}$				$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 7 \end{array}$			

	1	3	5	7		1	2	5	7	
21		1	1	4	4	6	6	6	6	9
	0	2	3	4	5	6	7	8	9	9
			3	4	5	6	8	8	9	9
				6	6	9	9	9	9	9
					8	9	9	9	9	9

	1	3	4	5	7		1	2	4	5	7	8
22		1	1	4	5	6	6	6	6	6	9	9
	0	2	3	4	5	6	7	8	9	9	9	9
			3	4	5	6	8	8	9	9	9	9
				4	5	9	9	9	9	9	9	9
					9	9	9	9	9	9	9	9

	1	3	4/5/	7		1	2	4/5/	7	8
23/24		1	1	4	5	6	6	6	6	9
	0	2	3	4	5	6	7	8	9	9
			3	4	5	6	8	8	9	9
				u	6	9	9	9	9	9
					9	9	9	9	9	9

	2	3	4	5	6	7	8		1	3	4	5	6	8
25		1	2	3	4	5	6	7	7	7	9	9	9	9
	0		2	3	4	5	6	7	8	9	9	9	9	9
				3	4	5	6	9	9	9	9	9	9	9
					4	5	9	9	9	9	9	9	9	9
						9	9	9	9	9	9	9	9	9

	2	3	4/5/	7	8		1	3	4/5/	8	
26/27		1	2	3	4	5	6	7	7	7	9
	0		2	3	4	5	6	7	8	9	9
				3	4	5	6	9	9	9	9
					u	6	9	9	9	9	9
						9	9	9	9	9	9

	2	3	4	5	8		3	4	5	8	
28		1	2	3	4	5	6	7	7	7	9
	0		2	3	4	5	6	7	8	9	9
				3	6	6	6	9	9	9	9
					7	7	9	9	9	9	9
						9	9	9	9	9	9

			2	3	5	8													
29	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
			2	3	4	5	6	7	8	9									
			4	4	5	7	9	9	9	9									
				4	5	9	9	9	9	9									
					9	9	9	9	9	9									
			2	3		8													
30	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
			2	3	4	5	6	7	8	9									
				4	5	6	7	9	9	9									
				6	7	9	9	9	9	9									
					9	9	9	9	9	9									
			2	3	5	8													
31	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
			2	3	4	5	6	7	8	9									
				4	6	6	7	9	9	9									
					7	7	9	9	9	9									
						9	9	9	9	9									
			2	3	4	(6)	8												
32/33	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
			2	3	4	5	6	7	8	9									
				5	5	7	7	9	9	9									
					u	7	9	9	9	9									
						9	9	9	9	9									
			2	3	4		8												
34	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
			2	3	4	5	6	7	8	9									
				5	6	7	7	9	9	9									
					7	7	9	9	9	9									
						9	9	9	9	9									
			2	3	4	5/6/	8												
35/36	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
			2	3	4	5	6	7	8	9									
				v	7	7	7	9	9	9									
					7	7	9	9	9	9									
						9	9	9	9	9									
			2	3	4	5/6/	8												
			2	3	4	5	6	7	8	9									
				v	7	7	7	9	9	9									
					7	7	9	9	9	9									
						9	9	9	9	9									

Die vorhergehenden numerischen Ergebnisse sollen abschließend durch zwei theoretische Aussagen ergänzt werden.

Hilfssatz : Ist $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ die k -te Zeile der Additionstafel einer beliebigen Halbgruppe mit den Elementen $1, 2, \dots, n$ und gilt $a_{kk} = k$, so kommen unter den a_{kj} dieser Zeile nur diejenigen Zahlen j mit $a_{kj} = j$ vor.

Beweis : Aus $k + k = k$ und $k + i = j$ folgt wegen der Assoziativität $k + j = k + (k + i) = k + i = j$, also $a_{kj} = j$.

Dieser Hilfssatz ist beim Assoziativitätstest sehr nützlich.

Satz : Die erste Zeile der Additionstabelle einer linearen involutorischen Halbgruppe n -ter Ordnung mit $0 = a \geq b = n+1-a = 0^*$ hat immer die Gestalt $1 \ 1 \ \dots \ 1 \ n$.

Beweis : Aus der Voraussetzung $a \geq n+1-a$ folgt $a \geq (n+1)/2$. Aufgrund der Ordnungsrelation für die ersten a Zahlen der ersten Zeile der Additionstafel gilt $a_{1i} = 1$, $i = 1, \dots, a$. Nach Hilfssatz 4 aus [2] tritt das Element $a_{1n} = n$ in dieser Zeile genau einmal auf, während die Zahlen $n-1+a, \dots, n-1$ dort nicht erscheinen können. Wäre nun in dieser Zeile eine Zahl m mit $2 \leq m \leq n-a$ vorhanden, so müßte nach dem vorhergehenden Hilfssatz $a_{1m} = m$ sein. Wegen $m \leq (n-1)/2 < a$ gilt aber $a_{1m} = 1 \neq m$. Somit ist $a_{1i} = 1$ für $i = a+1, \dots, n-1$.

Dieser Satz besagt, daß die Voraussetzung $a < b$ der beiden Erzeugendenregeln keine wesentliche Einschränkung bedeutet, da die nicht angeführten Halbgruppen bereits nach Satz 4 aus [2] berechnet werden können.

Bezugnehmend auf [2] sei noch bemerkt, daß

$$\mathbb{H}_9^6 = \mathbb{H}_2^{4(2)}, \mathbb{H}_{15}^6 = \mathbb{E}_8', \mathbb{H}_{15}^6 = \mathbb{E}_8'', \mathbb{H}_{30}^7 = \mathbb{E}_9' \text{ und } \mathbb{H}_{30}^7 = \mathbb{E}_9'' \text{ ist.}$$

Herrn Prof. Dr. L. Berg, der diese Untersuchungen anregte und betreute, möchte ich hiermit herzlich dafür danken.

Literatur

1. Berg, L.: Every commutative semigroup can be embedded into a complementary semigroup with involution. Math. Nachr. (im Druck)
2. Berg, L.: Erzeugung linearer involutorischer Halbgruppen. Rostock. Math. Kolloq. 32, 25-38 (1987)
3. Berg, L.: Linear involutory semigroups with two generators. Rostock. Math. Kolloq. 33, 49-56 (1988)
4. Forsythe, G.E.: SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. Proc. Amer. Math. Soc. 6, 443-447 (1955)
5. Peters, W.: BASIC-Programm zur rekursiven Berechnung aller möglichen Zeilen für Additionstabellen linearer involutorischer Halbgruppen nach [2]. (unveröffentlicht)
6. Peters, W.: BASIC-Programm zur rekursiven Anwendung der Erzeugungsregel von Satz 4 aus [2]. (unveröffentlicht)
7. Peters, W.: BASIC-Programm zur Erzeugung aller linearen involutorischen Halbgruppen der Ordnung 6 bzw. 7. (unveröffentlicht)
8. Peters, W.: BASIC-Programm für die Erzeugungsregeln 1 und 2 dieser Arbeit. (unveröffentlicht)

Auf Wunsch können die Programme [5] - [8] vom Autor angefordert werden.

eingegangen: 15. 09. 1987

Verfasser:

Dr. Wolfgang Peters
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Gerhard Maeß

An error estimation for quadratic splines with minimal curvatureAbstract

Quadratic splines were investigated by several authors (cf. for instance [1, 2, 3] and the references, given there). Mettke, Pfeifer and Neuman [1] gave convergence results for the case of monotone or convex interpolation, respectively. The problem of minimal curvature (in the context of cubic splines) was considered by Dietze and Schmidt [2].

In an earlier paper (cf. [3]) we derived interpolating quadratic splines with a minimal total curvature. The aim of this paper is to give an error estimation

$$|p(x) - f(x)| \leq Ch^2$$

for the case that the interpolated function f is sufficiently smooth.

Introduction

Let be given an ordered set of nodes $x_n, n=0(1)N$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

and a set of corresponding values $f_n := f(x_n), n=0(1)N$. By $p(x)$ we denote the interpolating quadratic spline

$$p(x) := \bigcup_{n=1}^N p_{2,n}(x),$$

with

$$p_{2,n}(x) := f_{n-1} + h_n d_{n-1} s + (g_n - d_{n-1}) h_n s^2, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (1)$$

Here (as in [3]) we use the substitution $x = x_{n-1} + sh_n$ and the abbreviations

$$h_n := x_n - x_{n-1}, \quad g_n := (f_n - f_{n-1})/h_n$$

and compute the parameters d_n recursively by

$$d_n = 2g_n - d_{n-1}, \quad n=1(1)N-1, \quad (2)$$

using the optimal (in the sense of a minimal total curvature) starting parameter

$$d_0 = g_1 - \frac{1}{a_1} \sum_{j=2}^N (-1)^j a_j (g_j - g_{j-1}),$$

$$a_j = \sum_{n=j}^N b_n, \quad b_n = 1/(h_n(1+g_n^2)^3). \quad (3)$$

The error estimation

Let us assume $f \in C^2[a, b]$ with

$$|f''(x)| \leq M_2, \quad |f''(\xi) - f''(\eta)| \leq L|\xi - \eta|, \quad x, \xi, \eta \in [a, b]. \quad (4)$$

Then by Taylor's formula we obtain in each subinterval $[x_{n-1}, x_n]$

$$f(x) = f(x_{n-1} + sh_n) = f_{n-1} + sh_n f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2} s^2 h_n^2 f''(\xi_n),$$

$$0 \leq s \leq 1, \quad \xi_n \in [x_{n-1}, x_n],$$

and with (1) moreover the error function

$$r_{2,n}(x) := p_{2,n}(x) - f(x)$$

$$= h_n s (d_{n-1} - f'_{n-1} + (g_n - d_{n-1})s) - \frac{1}{2} s^2 h_n^2 f''(\xi_n). \quad (5)$$

Again by Taylor's formula we get

$$g_n = (f(x_{n-1} + h_n) - f(x_{n-1}))/h_n = f'_{n-1} + \frac{1}{2} h_n f''(\eta_n),$$

$$\eta_n \in [x_{n-1}, x_n], \quad (6)$$

and therefore from (5)

$$r_{2,n}(x) = h_n s (1-s) (d_{n-1} - f'_{n-1}) + \frac{1}{2} h_n^2 s^2 (f''(\eta_n) - f''(\xi_n)).$$

With the Lipschitz condition from (4) this implies the following estimation

$$|r_{2,n}(x)| \leq \frac{1}{4}h_n |d_{n-1} - f'_{n-1}| + \frac{1}{2}h_n^3. \quad (7)$$

Now we show that the difference $d_n - f'_n$ is of order $O(h)$, where h denotes the maximal steplength

$$h := \max_n |x_n - x_{n-1}|.$$

Using (6) one obtains for $d_0 - f'_0$ by rearranging the g_k in (3)

$$d_0 - f'_0 = \frac{1}{2}h_1 f''(\eta_1) - \frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^N b_k \sum_{j=2}^k (-1)^j (g_j - g_{j-1}). \quad (8)$$

Since second order divided differences can be replaced by second order derivatives (cf. for instance [4], p. 98),

$$\frac{g_j - g_{j-1}}{h_j + h_{j-1}} = \frac{1}{2!} f''(\zeta_j), \quad \zeta_j \in [x_{j-2}, x_j],$$

we get for the inner sum in (8)

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^k (-1)^j (g_j - g_{j-1}) &= \frac{1}{2}h_1 f''(\zeta_2) + \frac{(-1)^k}{2} h_k f''(\zeta_k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{j-1} h_j (f''(\zeta_{j+1}) - f''(\zeta_j)), \end{aligned}$$

and with (4) the estimation

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=2}^k (-1)^j (g_j - g_{j-1}) \right| &\leq hM_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} h_j (h_{j-1} + h_j + h_{j+1})L \\ &\leq h(M_2 + \frac{3}{2}(b-a)L). \end{aligned}$$

Hence, it follows from (8)

$$|d_0 - f'_0| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^N b_k h(M_2 + \frac{3}{2}(b-a)L) \leq \frac{3}{2}(M_2 + (b-a)L)h. \quad (9)$$

The other $d_n - f'_n$ can be estimated recursively. From (2) and (6) we obtain again by Taylor's formula

$$\begin{aligned} d_n - f'_n &= 2g_n - f'_n - f'_{n-1} - (d_{n-1} - f'_{n-1}) \\ &= - (d_{n-1} - f'_{n-1}) + \frac{1}{2}h_n (f''(\eta_n) - f''(\xi_n)), \end{aligned}$$

and therefore

$$|d_n - f'_n| \leq |d_{n-1} - f'_{n-1}| + \frac{1}{2}h_n^2 L.$$

Together with (9) we get

$$|d_n - f'_n| \leq \frac{3}{2} (M_2 + (b-a)L)h + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n h_k^2 \leq (\frac{3}{2}M_2 + 2(b-a)L)h,$$

and finally for $r_{2,n}(x)$ the required result

$$|r_{2,n}(x)| \leq \frac{1}{4}(\frac{3}{2}M_2 + 2(b-a)L)h^2 + \frac{1}{2}(b-a)h^2 = Ch^2$$

with

$$C := \frac{3}{8}M_2 + (b-a)L.$$

References

1. Mettke, H., Pfeifer, E., and Neuman, E.: Quadratic spline interpolation with coinciding interpolation and spline grids. *J. Comput. Appl. Math.* 8, 57-62 (1982)
2. Dietze, S., and Schmidt, J.W.: Determination of shape preserving spline interpolants with minimal curvature via dual programs. *J. Approx. Theory* 52, 43-57 (1988)
3. Maeß, B., and Maeß, G.: Interpolating quadratic splines with norm-minimal curvature. *Rostock. Math. Kolloq.* 26, 83-88 (1984)
4. Maeß, G.: *Vorlesungen über numerische Mathematik II.* Berlin 1988

received: January 19, 1988

Author:

Prof. Dr. Gerhard Maeß
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Peter Möller

Zur Berechnung stabiler Oberflächenformen ferromagnetischer Flüssigkeiten

Im Rahmen der Untersuchung stabiler Oberflächenformen magnetischer Flüssigkeiten unter dem Einfluß eines homogenen Vertikalfeldes (vgl. [2]) stellt sich das Problem des Auffindens der kritischen Stellen eines über noch näher zu beschreibenden Räumen definierten Energiefunctionals. Mit dieser Teilaufgabe soll sich die folgende Arbeit beschäftigen.

1. Die Problemstellung

Wir betrachten das Energiefunctional

$$F(f, \lambda; \varepsilon, \alpha) = 1/2 (A^2 f, f) + 2/3 \lambda^2 (f, f) - 2/\sqrt{3} \lambda (1 + \varepsilon)(Af, f) + \alpha/\sqrt{3} E_3(f) + E_4(f) \quad (1.1)$$

mit variablem $(f, \lambda) \in H_g^S \times \mathbb{R}^+$ und den reellen Parametern ε und α . Zur Beschreibung der Räume H_g^S bezeichnen wir mit G_1 das durch die Vektoren

$$w_1 = 2\pi(1; 0), \quad w_2 = \pi(1; \sqrt{3})$$

erzeugte zweidimensionale Gitter

$$\{k_1 w_1 + k_2 w_2 : k_1, k_2 \text{ ganzzahlig}\}.$$

Die Sobolevräume aller bezüglich G_1 periodischen Funktionen mit über dem Periodenparallelogramm

$$P_1(0, w_1, w_2, w_1 + w_2)$$

quadratisch summierbaren Ableitungen bis zur Ordnung s sollen für natürliche Zahlen s die Bezeichnung H^S tragen. Die Ableitungen bis zur Ordnung $s-1$ dieser Funktionen sollen dabei ebenfalls G_1 -periodisch sein. Ferner möge für die Elemente aus H^S die Beziehung

$$\int_{P_1} f dx_1 dx_2 = 0 \quad (1.2)$$

Gültigkeit besitzen.

Die Funktionen aus H^S lassen sich in Fourierreihen entwickeln:

$$f = \sum_{w \in G_1^s} f_w e^{iwx}, \quad x = (x_1; x_2), \quad f_{-w} = \bar{f}_w, \quad f_{(0;0)} = 0.$$

Hierbei kennzeichne G_1^s das zu G_1 duale Gitter:

$$G_1^s = \{ k_1 w_1' + k_2 w_2' : k_1, k_2 \text{ ganzzahlig} \}, \\ w_1' = (1; -1/\sqrt{3}) ; \quad w_2' = (0; 2/\sqrt{3}).$$

Führen wir nun die Norm

$$|f|_S^2 = |P_1| \sum_{0 \neq w \in G_1^s} |w|^{2s} |f_w|^2 \quad (1.3)$$

und das Skalarprodukt

$$(u, v)_S = |P_1| \sum_{0 \neq w \in G_1^s} |w|^{2s} u_w \bar{v}_w$$

ein und definieren die Räume H^S auch für ganzzahlige negative s als die Räume aller G_1 -periodischen Funktionen, für die (1.2) erfüllt und (1.3) endlich ist, so erhalten wir eine Skala separabler Hilberträume (vgl. [1]).

Schließlich benennen wir mit H_g^S die Teilräume von H^S aller bezüglich Drehungen (um den Gitterwinkel 60°) von G_1 invarianten H^S -Elemente. Wir stellen fest, daß eine Funktion f aus H^S genau dann zu H_g^S gehört, wenn ihre Fourierkoeffizienten f_w nur von den Äquivalenzklassen $[w]$ aller $w \in G_1^s$ gleichen Betrages abhängen, also

$$f = \sum_{[w]} f_{[w]} \sum_{w \in [w]} e^{iwx}$$

gilt. Wir vereinbaren für die folgenden Betrachtungen $s \geq 3$.

In (1.1) kennzeichne (\dots) das L_2 -Skalarprodukt über P_1 , A sei der Operator $\sqrt{-\Delta}$. Ferner bezeichnen $E_3(f)$ und $E_4(f)$ Potenzoperatoren dritten bzw. vierten Grades auf H^S mit den zugehörigen symmetrischen, beschränkten Multilinearformen $\mathbb{E}_3(\dots)$ und $\mathbb{E}_4(\dots)$ - also $\mathbb{E}_3(f, f, f) = E_3(f)$; $\mathbb{E}_4(f, f, f, f) = E_4(f)$.

Die kritischen Stellen des Funktionals (1.1) ermitteln wir gemäß

$$\frac{\partial}{\partial f} F(f, \lambda; \varepsilon, x) = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(f, \lambda; \varepsilon, x) = 0. \quad (1.5)$$

Bei der Lösung dieses Problems wollen wir schließlich noch von der Gültigkeit der folgenden beiden Voraussetzungen ausgehen :

$$E_3(f_0) \neq 0, \quad E_4(f_0) > 0 \quad \text{für } f_0 = f'_0 / |f'_0|_0 \quad \text{mit}$$

$$f'_0 := e^{iw'_1 x} + e^{iw'_2 x} + e^{i(w'_1 + w'_2)x} + e^{-iw'_1 x} + e^{-iw'_2 x} + e^{-i(w'_1 + w'_2)x}, \quad (1.6)$$

$$|E_3(f, f, h)| \leq \text{const.} |f|_S^2 |h|_{2-S}, \quad (1.7)$$

$$|E_4(f, f, f, h)| \leq \text{const.} |f|_S^3 |h|_{2-S} \quad \text{für alle } f, h \in H^S.$$

2. Lösungsverhalten im unterkritischen Parameterbereich $\varepsilon < 0$

Mit Hilfe der Formel

$$Af = \sum_{w \in G'_1} f_w e^{iw x} |w| \quad (2.1)$$

prüft man leicht die Beziehungen

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (2.2)$$

$$(Au, u) \geq \text{const.} |u|_0^2 \quad (2.3)$$

für alle u und v aus H^S .

[3] entnehmen wir den folgenden

Hilfssatz 2.1: Es seien $E : V \rightarrow R$ ein homogenes Polynom vom Grade n auf einem Banachraum V und \tilde{E} die zugehörige symmetrische n -Linearform:

$$\tilde{E}(u, \dots, u) = E(u).$$

Ist $|E(u)| \leq c = \text{const.}$ für alle $u \in V$ mit $|u|_V \leq 1$, so gilt

$$|\tilde{E}(u_1, \dots, u_n)| \leq cn^n/n! \quad \text{für alle } (u_1, \dots, u_n) \in V^n \quad \text{mit}$$

$$\text{Max}\{|u_1|_V, \dots, |u_n|_V\} \leq 1.$$

Hilfssatz 2.2: Für $s \geq 3$ gelten die Abschätzungen

$$|\tilde{E}_3(v, w, h)| \leq \text{const.} |v|_s |w|_s |h|_{2-s},$$

$$|\tilde{E}_4(u, v, w, h)| \leq \text{const.} |u|_s |v|_s |w|_s |h|_{2-s}$$

für beliebige u, v, w und h aus H^s .

Beweis: Bei fest gewähltem $h \in H^s$ betrachten wir $E(v, w) = \tilde{E}_3(v, w, h)$ als Bilinearform auf H^s . Für sie sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.1 erfüllt, so daß die Aussage

$$|E(v, w)| \leq \text{const.} 2^2 |h|_{2-s} / 2! \quad \text{für} \quad \text{Max}\{|v|_s, |w|_s\} \leq 1$$

Gültigkeit besitzt. Mithin finden wir

$$|E(v, w)| = |v|_s |w|_s |E(\frac{v}{|v|_s}, \frac{w}{|w|_s})| \leq \text{const.} |v|_s |w|_s |h|_{2-s}.$$

Der Beweis für \tilde{E}_4 erfolgt analog. ■

Satz 2.1: Der durch $F_1(f, \lambda, ; \varepsilon, \kappa) = \frac{\partial}{\partial f} F(f, \lambda; \varepsilon, \kappa)$ definierte Operator bildet $H_g^s \times R^+$ stetig ab in H^{s-2} .

Beweis: Der Operator F_1 ordnet jedem $(f, \lambda) \in H_g^s \times R^+$ das Bild

$(A^2 f + 4/3 \lambda^2 f - 4/\sqrt{3} \lambda(1+\varepsilon)Af, \dots) + \sqrt{3} \kappa \tilde{E}_3(f, f, \dots) + 4\tilde{E}_4(f, f, f, \dots)$
zu. Für festes v und w definiert $l(h) = \tilde{E}_3(v, w, h)$ nach Hilfssatz 2.2 ein lineares, beschränktes Funktional auf H^{2-s} mit dem Definitionsbereich H^s . Ist $k(\cdot)$ die stetige lineare Fortsetzung von l auf H^{2-s} , so vermittelt

$$k(h) = (\tilde{\chi}_3(v, w), h) \quad \text{für alle } h \text{ aus } H^{2-s} \quad (2.4)$$

eine isometrische und isomorphe Abbildung zwischen den Räumen $(H^{2-s})'$ und H^{s-2} . (Das eindeutig bestimmte $\tilde{\chi}_3(v, w)$ ist selber natürlich eine Abbildung des Raumes $H_g^s \times H_g^s$ in H^{s-2} .) Wir schränken (2.4) auf H^s ein,

$$l(h) = \tilde{E}_3(v, w, h) = (\tilde{\chi}_3(v, w), h) \quad \text{für alle } h \text{ aus } H^s, \quad (2.5)$$

und dürfen $\tilde{E}_3(v, w, \cdot)$ mit $\tilde{\chi}_3(v, w)$ identifizieren.

Analog finden wir für festes (u, v, w) ein eindeutig bestimmtes H^{s-2} -Element $\tilde{\chi}_4(u, v, w)$ mit

$$\tilde{E}_4(u, v, w, h) = (\tilde{\chi}_4(u, v, w), h) \quad \text{für alle } h \text{ aus } H^s \quad (2.6)$$

und identifizieren schließlich auch $(A_S..)$ mit A_S für

$$A_S(f, \lambda; \epsilon) = A^2 f + 4/3 \lambda^2 f - 4/\sqrt{3} \lambda(1+\epsilon) A f \in H^{S-2}.$$

Mithin haben die Bildelemente des Operators F_1 die Gestalt

$$A_S + \sqrt{3} \lambda \tilde{A}_3(f, f) + 4 \tilde{A}_4(f, f, f) \in H^{S-2}.$$

Es ist einfach zu sehen, daß sich die Multilinearitätseigenschaften von \tilde{E}_3 und \tilde{E}_4 auf \tilde{A}_3 bzw. \tilde{A}_4 übertragen. Darüber hinaus nutzen wir die Isometrie-eigenschaft von (2.5), (2.6) in Verbindung mit Hilfssatz 2.2 für folgende Abschätzung:

$$|\tilde{A}_3(v, w)|_{S-2} = |\tilde{E}_3(v, w, \cdot)|_{(H^{2-S})} = \sup_{|h|_{S-2} \leq 1} \{ |\tilde{E}_3(v, w, h)| \}$$

$$\leq \text{const. } |v|_S |w|_S.$$

\tilde{A}_3 ist also eine stetige, symmetrische Multilinearform und $A_3(f) = \tilde{A}_3(f, f)$ der zugehörige Potenzoperator auf H^S . Entsprechende Aussagen gelten für $A_4(f) = \tilde{A}_4(f, f, f)$. Somit ist die Stetigkeit von F_1 nachgewiesen. ■

Wir bilden nun die Fréchet-Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \epsilon', \kappa') = (A - 2/\sqrt{3} \lambda' I)^2 - 4/\sqrt{3} \lambda' \epsilon' A \quad (2.7)$$

und schreiben diese in Fourierreihendarstellung auf:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \epsilon', \kappa'), h \rangle \\ = \sum_{w \in G_1^2} h_w ((|w| - 2/\sqrt{3} \lambda')^2 - 4/\sqrt{3} \lambda' \epsilon' |w|) e^{iwx} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hieraus erhalten wir für negatives ϵ'

$$\text{Ker}(\frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \epsilon', \kappa')) = \{ 0 \}$$

und somit die Invertierbarkeit des Operators (2.7). Die Stetigkeit dieser Inversen folgern wir aus den nachstehenden Berechnungen.

$$c_1 := (-4/\sqrt{3} \lambda' \epsilon' > 0, \quad M := (\frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \epsilon', \kappa'))^{-1},$$

$$|M(\langle \frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \epsilon', \kappa'), h \rangle)|_S^2 = |h|_S^2 = |P_1| \sum_{0 \neq w \in G_1^2} |w|^{2s-4} |h_w|^2 |w|^4,$$

und infolge von $1 - 2\lambda' / (\sqrt{3}|w|) \geq 1 - 1/\sqrt{3}$ im Falle $|w| \geq 2\lambda'$ sowie $c_1/|w| > c_1/(2\lambda')$ im Falle $|w| < 2\lambda'$ gilt für $w \in G_1^2$

$$|w|^4 \leq (\text{Min}\{c_1/(2\lambda'), (1-1/\sqrt{3})^2\})^{-2} ((|w| - 2/\sqrt{3} \lambda')^2 + c_1 |w|)^2.$$

Dies führt auf

$$|M(\langle \frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \varepsilon', \alpha'), h \rangle)|_S^2 \leq \text{const} |\langle \frac{\partial}{\partial f} F_1(0, \lambda'; \varepsilon', \alpha'), h \rangle|_{S-2}^2.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert folglich ein reelles $e_0 > 0$ derart, daß sich für

$$\text{Max}\{|f|_S, |\lambda' - \lambda|, |\varepsilon' - \varepsilon|, |\alpha' - \alpha|\} < e_0 \quad (2.9)$$

die Gleichung $F_1(f, \lambda; \varepsilon, \alpha) = 0$ in eindeutiger Weise nach $f = f(\lambda, \varepsilon, \alpha)$ auflösen läßt - man beachte, daß (1.4) für $(f, \lambda; \varepsilon, \alpha) = (0, \lambda'; \varepsilon', \alpha')$ erfüllt ist. Nun ist aber unabhängig von der Wahl der Größen λ' , ε' und α' die Funktion $f = f(\lambda, \varepsilon, \alpha) \equiv 0$ eine und mithin in der Kugel (2.9) die einzige Lösung von (1.4). Es tritt folglich unter der Voraussetzung $\varepsilon < 0$ keine Bifurkation ein.

3. "Kleine" Lösungen der notwendigen Stabilitätsgleichungen

Für den kritischen Parameterwert $\varepsilon' = 0$ existiert ein nicht-trivialer Nullraum des Operators (2.7) zu gewissen Eigenwerten λ' , von denen der kleinste gleich 1 ist. Wir stellen die Frage nach der Auflösung von (1.4), (1.5) in einer "kleinen" Umgebung von $(|f|_S, \lambda; \varepsilon, \alpha) = (0, 1; 0, \alpha')$. Aus

$$\langle \frac{\partial}{\partial f} F_1(0, 1; 0, \alpha'), h \rangle = \sum_{w \in G_1} h_w (|w| - 2/\sqrt{3})^2 e^{iwx} \quad (3.1)$$

schließen wir, daß der Operator $\frac{\partial}{\partial f} F_1(0, 1; 0, \alpha')$ den eindimensionalen Nullraum

$$N = \{ c f_0 : c \text{ reell} \} \quad (3.2)$$

Über H_S^S besitzt (vgl. (1.6)). Unser weiteres Vorgehen stützt sich auf die Methode von Ljapunov-Schmidt. Der Nullraum N ist Wertebereich eines Projektors P in H^S und eines Projektors Q in H^{S-2} . Die orthogonalen Komplemente von N in H^S bzw. in H^{S-2} werden wir mit N^+ bzw. N_-^+ bezeichnen; auf sie projizieren $(I-P)$ bzw. $(I-Q)$. Durch Ausnutzung der Eigenschaften der Fourierreihen gewinnen wir auf einfache Weise die folgenden Resultate: Für alle $v \in H^t$ mit $t \geq 3$ gilt

$$(f_0, v)_t = 0 \iff (f_0, v) = 0. \quad (3.3)$$

Es seien $f = \sum_{w \in G_1'} f_w e^{iwx} \in H_g^S$ und $g = \sum_{w \in G_1'} g_w e^{iwx} \in H_g^{S-2}$.

Dann gilt

- a) $f \in N^+ \iff f_w = 0$ für alle $w \in G_1'$ mit $|w| = 2/\sqrt{3}$,
 b) $g \in N_-^+ \iff g_w = 0$ für alle $w \in G_1'$ mit $|w| = 2/\sqrt{3}$, (3.4)
 c) $g \in N \iff g_w = 0$ für alle $w \in G_1'$ mit $|w| \neq 2/\sqrt{3}$.

Zu lösen ist das System

$$F_1(f, \lambda; \varepsilon, \alpha) = (A - 2/\sqrt{3} \lambda I)^2 f - 4/\sqrt{3} \lambda \varepsilon A f + \sqrt{3} \alpha A_3(f) + 4A_4(f) = 0 \quad (3.5)$$

$$F_2(f, \lambda; \varepsilon, \alpha) = 4/3 \lambda (f, f) - 2/\sqrt{3} (1 + \varepsilon) (A f, f) = 0 \quad (3.6)$$

Jedes Element f aus H^S ist auf eindeutige Weise in der Form

$$f = P f + (I - P) f$$

darstellbar.

Im Anschluß an die nun folgenden Rechnungen weisen wir nach, daß die gesuchte Lösung f des Systems (3.5), (3.6) keine Funktion aus N^+ sein kann (s. Satz 3.2). Unter dieser Voraussetzung dürfen wir vom Ansatz

$$f = \tilde{s}(f_0 + f_1), \quad \tilde{s} \text{ reell}, \quad f_1 \in N^+, \text{ d.h. } (f_0, f_1) = 0, \quad (3.7)$$

ausgehen.

Hilfssatz 3.1: Der Operator A bildet N in N und $H_g^S \cap N^+$ in N_-^+ ab.

Zum Beweis benutzen wir die Eigenschaften der Fourierreihen sowie (3.3).

Wir wenden nun auf beide Seiten von (3.5) Q bzw. $(I - Q)$ an und erhalten das hierzu äquivalente System

$$(A - 2/\sqrt{3} \lambda I)^2 \tilde{s} f_0 - 4/\sqrt{3} \lambda \varepsilon A \tilde{s} f_0 + \alpha \sqrt{3} Q A_3(f_0 + f_1) \tilde{s}^2 + 4Q A_4(f_0 + f_1) \tilde{s}^3 = 0, \quad (3.8)$$

$$(A-2/\sqrt{3} \lambda I)^2 \tilde{s} f_1 - 4/\sqrt{3} \lambda \varepsilon A \tilde{s} f_1 + \kappa \sqrt{3} (I-Q) A_3 (f_0 + f_1) \tilde{s}^2 + 4(I-Q) A_4 (f_0 + f_1) \tilde{s}^3 = 0. \quad (3.9)$$

Bezeichnen wir nach Kürzen von \tilde{s} (Wir suchen Lösungen $f \neq 0$.) die linken Seiten von (3.8) bzw. (3.9) mit $L(f_1, \tilde{s}, \lambda; \varepsilon, \kappa)$ bzw. $R(f_1, \tilde{s}, \lambda; \varepsilon, \kappa)$ und überführen (3.6) in

$$S(f_1, \tilde{s}, \lambda; \varepsilon, \kappa) = 4/3 \lambda ((f_1, f_1) + 1) - 2/\sqrt{3} (1+\varepsilon) ((A f_1, f_1) + 2/\sqrt{3}) = 0, \quad (3.10)$$

so gilt:

$$\frac{\partial}{\partial f_1} R(0, 0, 1; 0, \kappa') = (A - 2/\sqrt{3} I)^2 : N^\perp \rightarrow H^{s-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} R(0, 0, 1; 0, \kappa') = 0 : R \rightarrow H^{s-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial f_1} S(0, 0, 1; 0, \kappa') = 0 : N^\perp \rightarrow R,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S(0, 0, 1; 0, \kappa') = 4/3 : R \rightarrow R.$$

Es folgt

$$\text{Ker} \left(\frac{\partial}{\partial f_1} R(0, 0, 1; 0, \kappa') \right) = \{0\}$$

aufgrund der Beziehung

$$(A - 2/\sqrt{3} I)^2 v = 0 \iff \sum_{\substack{w \in G_1 \\ |w| = 2/\sqrt{3}}} v_w e^{iwx} (|w| - 2/\sqrt{3})^2 = 0 \\ \iff v = 0 \text{ für } v \in N^\perp.$$

Wegen $v_w = 0$ für $|w| = 2/\sqrt{3}$ ist auch die Ungleichung

$$|v|_s^2 \leq \text{const.} |(A - 2/\sqrt{3} I)^2 v|_{s-2}^2$$

erfüllt, so daß die stetige Invertierbarkeit des Operators $\frac{\partial}{\partial f_1} R(0, 0, 1; 0, \kappa')$ gesichert ist. Beachten wir nun noch

$$R(0, 0, 1; 0, \kappa') = 0, \quad S(0, 0, 1; 0, \kappa') = 0,$$

so läßt sich wiederum der Satz über implizite Funktionen anwenden, nach welchem ein reelles $\varepsilon_1 > 0$ existiert, so daß für

$$\text{Max}\{|f_1|_s, |\tilde{s}|, |\lambda-1|, |\varepsilon|, |\kappa-\kappa'|\} < \varepsilon_1 \quad (3.11)$$

das System (3.9), (3.10) in eindeutiger Weise nach $f_1 = f_1(\tilde{s}; \epsilon, \alpha)$, $\lambda = \lambda(\tilde{s}; \epsilon, \alpha)$ auflösbar ist. Die Lösungen sind zudem analytisch. Wir wollen dieses Ergebnis für den Fall $\alpha' = 0$ verwenden. Wird dagegen $\alpha' \neq 0$, α also nicht mehr "klein", so suchen wir auf völlig analogem Wege Lösungen $(f_1, \tilde{s}, \lambda; \epsilon)$ von (3.9), (3.10). Diese (wiederum eindeutig bestimmten) Potenzreihen $f_1 = f_1(\tilde{s}; \epsilon)$ und $\lambda = \lambda(\tilde{s}; \epsilon)$ genügen unserem System in einem Gebiet

$$\text{Max}\{|f_1|_S, |\tilde{s}|, |\lambda-1|, |\epsilon|\} < e_2 \quad (3.12)$$

für ein gewisses $e_2 > 0$.

Wir stellen diesen Fall bis zum Ende des dritten Abschnittes zunächst zurück und wenden uns dem erstgenannten zu. Hier ist

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i,j,k \geq 0} \tilde{s}^i \epsilon^j \alpha^k a'_{ijk}, \quad a'_{ijk} \in N^+, \\ \lambda &= \sum_{i,j,k \geq 0} \tilde{s}^i \epsilon^j \alpha^k b'_{ijk}, \quad b'_{ijk} \in R \end{aligned} \quad (3.13)$$

in (3.8) einzusetzen. Vorher bestimmen wir für $i+j+k \leq 2$ die Koeffizienten aus (3.13) durch Koeffizientenvergleich in (3.9) (Man beachte die Invertierbarkeit von $(A-2/\sqrt{3}I)^2$ auf N^+ für hinreichend kleines e_1 .) sowie Einsetzen in (3.10). Wir finden

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{101} \tilde{s} \alpha + a_{200} \tilde{s}^2 + \tilde{s} \sum_{i+j+k \geq 2} \tilde{s}^i \epsilon^j \alpha^k a_{ijk}, \quad a_{ijk} \in N^+ \text{ mit} \\ \lambda &= (1+\epsilon) ((Af_1, f_1) + 2/\sqrt{3}) \sqrt{3}/2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (f_1, f_1)^n \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

(Diese Reihenentwicklung konvergiert, falls nur $e_1 < 1$ gesichert ist.), also

$$\lambda = (1+\epsilon) + \tilde{s}^2 \sum_{i+j+k \geq 2} \tilde{s}^i \epsilon^j \alpha^k b_{ijk}, \quad b_{ijk} \in R. \quad (3.15)$$

Nun erhalten wir durch Einsetzen in (3.8)

$$\begin{aligned} L(f_1, \tilde{s}, \lambda; \epsilon, \alpha) &= (-4/3 \epsilon^2 - 8/3 \epsilon) f_0 + Q(\sqrt{3} \alpha \tilde{s} A_3(f_0) \\ &+ 4 \tilde{s}^2 A_4(f_0)) + \tilde{s}^2 \sum_{i+j+k \geq 2} \tilde{s}^i \epsilon^j \alpha^k c_{ijk} \end{aligned}$$

mit c_{ijk} aus N. (Man beachte dabei $Af_0 = 2/\sqrt{3} f_0$.) Schließlich ergibt sich aufgrund von

$(L(f_1, \tilde{s}, \lambda; \epsilon, \kappa), f_0) = 0$
 (vgl. (3.8)) die Beziehung

$$0 = -\epsilon^2 - 2\epsilon + 3\sqrt{3}/4 \kappa \tilde{s} E_3(f_0) + 3\tilde{s}^2 E_4(f_0) + \left(\sum_{i+j+k \geq 2} \tilde{s}^i \epsilon^j \kappa^k c'_{ijk} \right) \tilde{s}^2, \quad c'_{ijk} \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Mit

$$a := \sqrt{3} E_3(f_0) / (4 E_4(f_0)) \neq 0, \quad b := -2 / (3 E_4(f_0)) < 0 \quad (3.17)$$

(vgl. (1.6)) reduziert sich unser eingangs gestelltes Problem nunmehr auf die Auflösung der Gleichung

$$0 = \tilde{s}^2 + a \kappa \tilde{s} + b \epsilon + 1/2 b \epsilon^2 + \tilde{s}^2 P_{\tilde{s} \epsilon \kappa}^2(2) =: t(\tilde{s}, \epsilon, \kappa) \quad (3.18)$$

nach \tilde{s} . In diesem Zusammenhang wollen wir die Bezeichnung $P_{a_1 \dots a_n}^{(k)}$ für eine konvergente Potenzreihe in den reellen Variablen a_1, \dots, a_n vom Anfangsgrad $\geq k$ verwenden. Infolge des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes dürfen wir

$$t(\tilde{s}, \epsilon, \kappa) = (\tilde{s}^2 + \tilde{s}q(\epsilon, \kappa) + r(\epsilon, \kappa)) t'(\tilde{s}, \epsilon, \kappa) \quad (3.19)$$

im Konvergenzgebiet der rechten Seite von (3.18) für dort konvergente Potenzreihen $t'(\tilde{s}, \epsilon, \kappa)$, $q(\epsilon, \kappa)$ und $r(\epsilon, \kappa)$ mit den Eigenschaften

$$t'(0,0,0) \neq 0, \quad q(0,0) = 0, \quad r(0,0) = 0 \quad (3.20)$$

setzen. Aus Stetigkeitsgründen existiert folglich ein positives $\epsilon'_2 \leq \epsilon_1$ derart, daß für

$$\text{Max}\{|\tilde{s}|, |\epsilon|, |\kappa|\} < \epsilon'_2 \quad (3.21)$$

die Gleichung (3.18) äquivalent ist zu

$$0 = \tilde{s}^2 + \tilde{s}q(\epsilon, \kappa) + r(\epsilon, \kappa). \quad (3.22)$$

Koeffizientenvergleich in (3.18), (3.19) überführt (3.22) in die Form

$$0 = \tilde{s}^2 + \tilde{s}a\kappa + b\epsilon + \tilde{s}(\epsilon P_{\epsilon \kappa}(1) + P_{\epsilon \kappa}(3)) + \epsilon^2 P_{\epsilon \kappa}(0) + \epsilon P_{\epsilon \kappa}(2).$$

Es bleibt zu untersuchen, wo die Lösungen

$$\tilde{s}_{1/2} = -ax/2 + p_{\varepsilon x}^1(3) + \varepsilon p_{\varepsilon x}(1) \pm (a^2 x^2/4 + p_{\varepsilon x}(4) + \varepsilon p_{\varepsilon x}(2) + \varepsilon^2 p_{\varepsilon x}(0) - b\varepsilon)^{1/2} \quad (3.23)$$

dieser Gleichung im Gebiet (3.21) reelle Werte annehmen. Wählen wir eine beliebige positive Konstante $c < -a^2/(4b)$, so gilt das für alle (ε, x) , welche der Forderung

$$|\varepsilon| \leq c x^2 \quad (3.24)$$

genügen (falls nur ε_2' hinreichend klein gewählt wurde). Setzen wir dagegen $\varepsilon > 0$ voraus, so kann auch die Bedingung (3.24) fallengelassen werden. Darüber hinaus können keine den relevanten Parameterbereich erweiternden Feststellungen getroffen werden.

Wir entwickeln in (3.23) die auftretende Wurzel im Gebiet (3.24):

$$\tilde{s}_{1/2} = ax/2(-1 \pm \sum_{k=0}^{\infty} (-4b/a^2 \varepsilon/x^2)^k \binom{1/2}{k}) + O(|x|^3).$$

Damit gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &\approx ax/2 \sum_{k=1}^n (-4b/a^2 \varepsilon/x^2)^k \binom{1/2}{k}, \\ \tilde{s}_2 &\approx ax/2 (-2 - \sum_{k=1}^n (-4b/a^2 \varepsilon/x^2)^k \binom{1/2}{k}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Das n ist hierbei so zu wählen, daß der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^n (-4b/a^2 \varepsilon/x^2)^k$$

kein $O(|x|^2)$ darstellt. Dieser Forderung genügen wir, falls ein reelles, positives β existiert, so daß

$$|\varepsilon| \geq \text{const. } |x|^2 + 2/n - \beta \quad (3.26)$$

erfüllt ist. Jetzt soll die Entwicklung der Wurzel in (3.23) für den Fall

$$|\varepsilon| > c x^2$$

erfolgen. Wir finden

$$\tilde{s}_{1/2} \approx \pm (-be)^{1/2} - ax/2 \\ \pm (-be)^{1/2} \sum_{k=1}^n (-a^2 x^2 / (4be))^k (1/2)^k,$$

falls ein $\beta > 0$ existiert mit

$$|x| \geq \text{const.} |\epsilon|^{1/2 + 1/(2n) - \beta}, \quad (3.27)$$

$\tilde{s}_{1/2} \approx \pm (-be)^{1/2} - ax/2$, falls ein $\beta > 0$ existiert mit

$$|x| \geq \text{const.} |\epsilon|^{3/2 - \beta} \quad \text{und} \quad |x| \leq \text{const.} |\epsilon|, \quad (3.28)$$

$$\tilde{s}_{1/2} \approx \pm (-be)^{1/2}, \quad \text{falls} \quad |x| \leq \text{const.} |\epsilon|^{3/2}. \quad (3.29)$$

Wir fassen das bisherige Ergebnis zusammen. Die notwendigen Stabilitätsgleichungen haben neben $(f, \lambda) = (0, \lambda')$ für beliebiges λ' aus R^+ in einem Gebiet $(\epsilon, x) \in K$ eindeutig bestimmte Lösungen $(f, \lambda) = (f(\epsilon, x), \lambda(\epsilon, x))$, $f \neq 0$. Diese Aussage bleibt auch außerhalb von K für "große" Parameter x unter gewissen Voraussetzungen (vgl. nachstehende Rechnungen) gültig. Zur Charakterisierung des erwähnten Parametergebietes K nehmen wir an, daß K_1 eine Kreisfläche mit gewissem positivem Radius und Mittelpunkt $(0;0)$ ist und bezeichnen mit K_2 die durch

$$\{(\epsilon, x) : \epsilon < -c"x^2\}$$

definierte Fläche. Für $K_1 := K_1' \setminus \{(0,0)\}$ ist dann $K = K_1 \setminus K_2$. Ferner sei $K_3 = \{(\epsilon, x) : \epsilon > c"x^2, (\epsilon, x) \in K_1\}$. Die genannten Lösungen lassen sich unter Beachtung von (3.7), (3.14) und (3.15) näherungsweise bestimmen, und zwar

$$\text{in } K_1 \setminus (K_2 \cup K_3) \text{ gemäß } \tilde{s}_1 = 0 + \text{h.o.t.}, \quad \tilde{s}_2 = -ax + \text{h.o.t.}; \\ \text{in } K_3 \text{ gemäß } \tilde{s}_{1/2} = \pm (-be)^{1/2} + \text{h.o.t.}$$

In gewissen Untermengen von $K_1 \setminus (K_2 \cup K_3)$, bzw. K_3 können diese Näherungen mit höherer Genauigkeit angegeben werden (siehe (3.25) bis (3.28)).

Richten wir nunmehr unsere Aufmerksamkeit auf den bereits angekündigten Fall der Lösung der notwendigen Stabilitätsgleichungen für "große" Parameter x .

Im Gebiet (3.12) finden wir die eindeutig bestimmten Lösungen (f_1, λ) in Form konvergenter Potenzreihen und erhalten durch Koeffizientenvergleich in (3.9) und Einsetzen in (3.10) analog zu den bisherigen Rechnungen

$$f_1 = a_{10} \alpha \tilde{s} + \tilde{s} \sum_{i+j \geq 1} \tilde{s}^i \epsilon^j a_{ij}, \quad a_{ij} \in \mathbb{N}^1,$$

$$\lambda = 1 + \epsilon + \tilde{s} \sum_{i, j \geq 0} \tilde{s}^i \epsilon^j b_{ij}, \quad b_{ij} \in \mathbb{R},$$

was durch Einsetzen in (3.8) auf

$$0 = \tilde{s} \alpha + d\epsilon + d\epsilon^2/2 + (\tilde{s} \alpha)^2 p_\epsilon(0), \quad d := -8/(3\sqrt{3}E_3(f_0))$$

führt. Mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes überführen wir diese Gleichung in

$$0 = (\tilde{s} \alpha + \sum_{i \geq 0} e_i \epsilon^i) \sum_{j, k \geq 0} (\tilde{s} \alpha)^j \epsilon^k t_{jk}, \quad e_i, t_{jk} \in \mathbb{R}.$$

Hieraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleich für

$$|\epsilon| < e_3, \quad 0 < e_3 \leq e_2$$

die Lösung $s = -d\epsilon/\alpha + O(|\epsilon|^2)$.

Abschließend ist Satz 3.2 nachzutragen.

Satz 3.2: Es gelte $0 \neq g \in \mathbb{N}^1$. Dann ist g keine Lösung des Systems (3.5), (3.6).

Beweis: Wir untersuchen die Auflösbarkeit von (3.5) nach f . Es gilt $F_1(0, 1; 0, \alpha') = 0$, und die stetige Invertierbarkeit von $\frac{\partial}{\partial f} F_1(0, 1; 0, \alpha')$ ist auf \mathbb{N}^1 gesichert. Somit ist (3.5) nach dem Satz über implizite Funktionen für ein positives, reelles e_4 und $\text{Max}\{|\lambda|_g, |\epsilon|, |\lambda-1|, |\alpha'-\alpha|\} < e_4$ in eindeutiger Weise nach f auflösbar. Da (3.5) jedoch für beliebige λ , ϵ und α die Lösung $f(\lambda; \epsilon, \alpha) \equiv 0$ besitzt, existiert eine Umgebung von $(f, \lambda; \epsilon, \alpha) = (0, 1; 0, \alpha')$, in welcher (3.5), (3.6) über \mathbb{N}^1 nur Lösungen des Typs $(0, \lambda, \epsilon, \alpha)$ aufweisen kann. ■

Literatur

1. Bers, L., John, F., and Schlechter, M.: Partial Differential Equations. Lectures in Applied Mathematics. New York 1964
2. Beyer, K.: Oberflächeninstabilitäten magnetischer Flüssigkeiten. Z. Anal. Anwendungen 2, 385-399 (1983)
3. Douady, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16, 1, 1-95 (1966)

eingegangen: 31. 8. 1987

Verfasser

Dipl.-Math. Peter Möller
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Anna Racsmany

Über Fehler-korrigierende Codekonstruktionen

Autorreferat der Dissertation A

In der Dissertation untersuchen wir hauptsächlich Codes in der Lee-Metric und über Graphen definierte Codes.

Es gelten folgende Sätze für die erstgenannten Codes:

Satz: Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines perfekten e-Lee-Fehler-korrigierenden 2-dimensionalen Codes über dem q-elementigen Alphabet ($q > 2$) ist, daß $2e^2 + 2e + 1$ ein Teiler von q ist.

Satz: Ein perfekter 1-Lee-Fehler-korrigierender n-dimensionaler Code über dem q-elementigen Alphabet ($q > 2$) existiert dann und nur dann, wenn $q^r = (2n+1)h$ ist, wo r und h natürliche Zahlen sind.

Weiterhin wird eine Konstruktion angegeben, die durch Kombination von Codes mit kleinem Codeabstand über einem kleinen Alphabet zu Codes mit größerem Codeabstand über einem größeren Alphabet führt. Verschiedene spezielle Fälle dieser Konstruktion werden untersucht.

Im zweiten Teil der Dissertation werden Codes über Graphen untersucht. Wir betrachten einen gerichteten Graphen G mit der Knotenmenge V. Für zwei beliebige Vektoren \underline{v} und $\underline{v}' \in V^n$ defini-

nieren wir den G-Abstand $d_G(\underline{v}, \underline{v}') = \sum_{i=1}^n d_G(v_i, v'_i)$ mit

$$d_G(v_i, v'_i) = \begin{cases} 0, & \text{wenn entweder } v_i = v'_i \text{ oder der Bogen } \overrightarrow{v_i v'_i} \\ & \text{existiert,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In analoger Weise läßt sich $d_G(\underline{v}, \underline{v}')$ für ungerichtete Graphen definieren.

$A(n, e, G)$ bezeichne die maximale Anzahl von Codewörtern in einem e-Fehler-korrigierenden n-dimensionalen Code über G. $B(n, \delta, G)$

bezeichne die maximale Anzahl in einem Code der Länge n mit dem minimalen G -Abstand δ .

Satz: Es sei G ein gerichteter Graph mit der Knotenpunktmenge V , dem ein ungerichteter Graph G^M mit derselben Knotenpunktmenge V durch folgende Vorschrift zugeordnet sei: Zwei Knotenpunkte v und v' von G^M werden durch eine Kante verbunden, wenn in G der Bogen $\overrightarrow{vv'}$ oder $\overrightarrow{v'v}$ existiert, oder aber wenn es einen Knotenpunkt z von G gibt, so daß die Bögen \overrightarrow{vz} und $\overrightarrow{v'z}$ in G existieren. Dann gilt $A(e, n, G) = B(n, 2e+1, G^M)$.

Man kann ausgehend von "guten" Codes bezüglich der Hamming-Metrik auch "gute" Codes über gewissen Graphen G konstruieren.

Wir führen die Größe $\Theta(G, \delta) = \limsup_n \sqrt[n]{B(n, \delta, G)}$ ein, die als eine Verallgemeinerung der Shannon-Kapazität von G angesehen werden kann.

Satz: Es gilt für einen beliebigen Graphen G und eine beliebige natürliche Zahl δ die Gleichheit $\Theta(G, \delta) = \Theta(G, 1)$.

Zum Schluß wird eine gewisse Klasse von Codes über Graphen betrachtet, die für praktische Anwendungen von Interesse sind.

eingereicht: 09. 10. 1985

verteidigt: 08. 05. 1986

Gutachter: Prof. Dr. G. Burosch (Rostock),
Prof. Dr. H. Harborth (Braunschweig),
Doz. Dr. J. Dassow (Magdeburg).

Verfasser:

Dr. Anna Racsmány
Karl-Marx-Universität Budapest
Institut für Mathematik

Kinizsi u. 1-7

Levelcim 1828 Bp. 5 Pf. 489
Budapest
H-1093

Jürgen Prestin

Approximation in periodischen Lipschitzräumen

Autorreferat der Dissertation A

In der Arbeit werden klassische Konvergenzaussagen der Approximation einer periodischen Funktion durch trigonometrische Polynome in den Grundräumen C und L^p auf Aussagen in Lipschitznormen, insbesondere mit Angabe von expliziten Konstanten, erweitert. Erste Resultate in dieser Richtung stammen von Prößdorf (1975), Prößdorf/Silbermann (1977), Leindler (1979, 1985) und Stypifski (1979).

Eine Funktion f liege in einem Lipschitzraum $X^{r,\beta}$ ($r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \beta \leq 1$, $X = L^p$, $1 \leq p < \infty$, oder $X = C$), falls die r -te Ableitung von f in X existiert und eine Lipschitzbedingung mit dem Exponenten β erfüllt. Wir betrachten die dazugehörige Lipschitznorm, gegeben durch

$$\|f\|_{p,r,\beta} = \sum_{k=0}^r \|f^{(k)}\|_p + \sup_{h>0} h^{-\beta} \|f^{(r)}(\cdot+h) - f^{(r)}(\cdot)\|_p.$$

Neben der Fourier-Summe $S_n f$ und deren de la Vallée Poussin-Mitteln

$$\sigma_{n,1} f = \frac{1}{l+1} \sum_{k=n-1}^n S_k f \quad (0 \leq l \leq n)$$

interessieren für die Approximation der Funktion $f \in X^{m,\alpha}$ speziell Interpolationspolynome $L_{n,1} f = \sigma_{n,1} L_n f$ über äquidistanten Knoten x_k ($k=0, \dots, 2n$) mit $L_n f(x_k) = f(x_k)$.

Solche Fragestellungen bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit in einer Norm $\|\cdot\|_{p,r,\beta}$ spielen in numerischen Anwendungen, z. B. beim näherungsweise Lösen von singulären Integralgleichungen, eine besondere Rolle.

Es zeigt sich, daß die Konvergenzordnung wesentlich von $m + \alpha - r - \beta \geq 0$ abhängt. Ein typisches Resultat ist der folgende

Satz: Es seien $0 \leq l \leq n$, $1 < p < \infty$, $a = m + \alpha - r - \beta \geq 0$ und $f \in X^{m, \alpha}$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\|f - \sigma_{n,l} f\|_{p,r,\beta} = \begin{cases} O(n^{-a}) & \text{für } 0 \leq a \leq 1, \\ O\left(\frac{1}{n}(n-l+1)^{1-a}\right) & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

Ferner werden Ergebnisse für die beste Approximation in Lipschitzräumen angegeben. Mit Hilfe eines Jackson-Typ-Satzes und einer Bernstein-Typ-Ungleichung kann die Glattheit einer Funktion durch verschiedene Aussagen über beste Approximation in Lipschitzräumen äquivalent umschrieben werden. Dabei werden Klassen von Polynomfolgen angegeben, die in Lipschitzräumen größenordnungsmäßig bestapproximierend sind. Weiterhin sind einige Ergebnisse auf den Fall verallgemeinert, daß die Glattheit der Funktion f über dem Grundraum Y gegeben ist und in einer Lipschitznorm über X gemessen wird. Diese Resultate werden in Kapitel 4 auf die schon betrachteten Polynomfolgen angewandt. Für die de la Vallée Poussin-Mittel der Fourier-Summe heißt das, daß die Konvergenzordnung von $f \in Y^{m, \alpha}$ in der Norm von $X^{r, \beta}$ für alle Parameter $Y = L^q$, $X = L^p$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 \leq r \leq m$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ und $r + \beta \leq m + \alpha + d(p, q)$ angegeben wird.

Für die Polynome $L_{n,l} f$ ergeben sich auch in dieser allgemeinen Form größenordnungsmäßig gleich gute Resultate, falls zusätzlich $m \geq 1$ gefordert wird. Für $m=0$ erhält man erwartungsgemäß nur Ergebnisse für Funktionen mit einer Lipschitzbedingung über C . Aber auch für Funktionen beschränkter Variation erzielt man entsprechende Aussagen, die z. B. ein Resultat von Zacharias (1981) wesentlich verallgemeinern.

eingereicht: 03. 12. 1985

verteidigt: 20. 06. 1986

Gutachter: Doz. Dr. M. Tasche (Rostock),
Prof. Dr. S. Pröbldorf (Berlin),
Prof. Dr. H. Triebel (Jena).

Verfasser:

Dr. Jürgen Prestin
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Hartmut Domröse

Die Robustheit von Auswahlverfahren zum Indifferenzbereichsproblem gegen Nichtnormalität

Autorreferat der Dissertation A

In der Arbeit werden Entscheidungsvorschriften zum Bechhofer'schen Indifferenzbereichsproblem zur Auswahl der Populationen mit den t größten Mittelwerten aus einer Menge von $a > t$ unabhängigen Populationen unter verschiedenen Nichtnormalverteilungen verglichen.

Bechhofer entwickelte 1954 eine Stichprobenplanung für eine auf den Stichprobenmitteln basierende Auswahlregel unter den Voraussetzungen der Normalverteilung und der Varianzhomogenität für folgende Aufgabenstellung. Sind $\mu_{(1)} \leq \dots \leq \mu_{(a)}$ die der Größe nach geordneten Mittelwerte, so soll unter der Indifferenzbereichsbedingung $\mu_{(a-t+1)} - \mu_{(a-t)} \geq d \geq 0$ die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Entscheidung (RA) einen vorgegebenen Wert $1-\beta$ ($0 < \beta < 1$) nicht unterschreiten. Eine Auswahlentscheidung heißt richtig, wenn die t ausgewählten Populationen genau diejenigen mit den Mittelwerten $\mu_{(a-t+1)}, \dots, \mu_{(a)}$ sind.

Wir nennen in der Verteilungsmenge G ein Verfahren $\epsilon(\beta)$ -robust gegen Abweichungen von einer vorausgesetzten Verteilung F , wenn unter $P(RA/F) = 1-\beta$ gilt $\inf_{g \in G} P(RA/g) \geq 1-\beta-\epsilon(\beta)$.

In unseren Robustheitsuntersuchungen wurden bis auf den Mittelwert identische Verteilungen in allen a Populationen und die für das Mittelwertverfahren unter der Normalverteilung ungünstigste Parameterkonfiguration

$\mu_{(1)} = \dots = \mu_{(a-t)} = \mu_{(a-t+1)} - d = \dots = \mu_{(a)} - d$ benutzt.

Diese Konfiguration minimiert $P(RA)$ über alle der Indifferenzbereichsbedingung genügenden Konfigurationen.

Als die einer Auswahlvorschrift zugrundeliegenden Lageschätzfunktionen betrachten wir den Mittelwert, zwei getrimmte Mittel, zwei Schätzfunktionen, die auch einen Teil der kleinsten und größten Stichprobenwerte verwerfen, den kleinsten und größten noch akzeptierten aber Gewichte über Eins zuordnen, den Median und eine Linearkombination aus Median und den Quartilschätzungen. Weiterhin wurden zwei in der Literatur beschriebene adaptive Verfahren, die vor der Auswahlentscheidung eine Klassifikation der Verteilung vornehmen, und ein Rangsummenverfahren in die Untersuchungen einbezogen.

Die betrachteten Nichtnormalverteilungen werden durch die Maßzahlen Schiefe γ_1 und Exzeß γ_2 charakterisiert und liegen in einem praktisch relevanten Bereich mit $0 \leq \gamma_1 \leq 2$ und $-1.2 \leq \gamma_2 \leq 6$. Als Untersuchungsverfahren wurden Simulationsexperimente mit 6.000 Simulationswiederholungen je (γ_1, γ_2) -Punkt und für geeignete Verfahren exakte Berechnungen unter mehreren äquidistanten Dreipunktverteilungen und der Exponentialverteilung eingesetzt.

Als Ergebnis konnte eine relativ gute Robustheit des klassischen Mittelwertverfahrens gegen Abweichungen von der für die existierenden Tabellen zur Stichprobenplanung vorausgesetzten Normalverteilung nachgewiesen und weitere Empfehlungen bez. einer Auswahlregel unter gewissen Vorinformationen über die jeweilige Nichtnormalverteilung bzw. zum Schutz gegen Ausreißer abgeleitet werden.

eingereicht: Januar 1985

verteidigt: 28. 06. 1985

Gutachter: Prof. Dr. D. Rasch (Rostock),
Prof. Dr. L. Berg, (Rostock),
Doz. Dr. R. Zielinski (Warschau)

Verfasser:

Dr. rer. nat. Hartmut Dornöse
Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR
Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf-Rostock
Dummerstorf
DDR-2551

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock, Math. Kolloq. /~~Leerzeile/~~ ~~Vorname Name/~~ ~~Leerzeile/~~ Titel der Arbeit / 1 Zeilenumschaltung / Unterstreichung / Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen / Zwischenüberschrift / Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung) / 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sparren möglich. AnKündigungen wie Setz, Definition, Bemerkung, Beweis u. a. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Setzpiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben einzuplanen: die Abbildungen selbst sind in der dem eugegebenen Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist in Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- ~~7/~~ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra, Princeton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper, J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, In: Reicherdt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkbund anlässlich des 100. Todesjahres, S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen: bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers: Titel Initialen der Vorname Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße-Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort. Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

- Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg ISSN 0518-3189
- Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge ISSN 0138-3299
- Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte ISSN 0232-3066
- Rostocker Mathematisches Kolloquium ISSN 0138-3248
- Rostocker Philosophische Manuskripte ISSN 0557-3599
- Rostocker Physikalische Manuskripte ISSN 0138-3140
- Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte ISSN 0138-3191
- Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerikawissenschaften ISSN 0458-7944
- Erziehungswissenschaftliche Beiträge ISSN 0138-2373
- Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus ISSN 0138-3396
- Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock ISSN 0232-539X
- Beiträge zur Geschichte der FDJ ISSN 0233-0830
- Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus ISSN 0233-0636
- Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogie ISSN 0233-0539
- Rostocker Informatik-Berichte ISSN 0233-0784
- Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen ISSN 0233-0687
- Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft ISSN 0233-0644
- Rostocker Universitätsreden

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR - 2500.
 - Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR - 7010.
- Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR - 2500 zu beziehen.