

Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 36



**Wilhelm-Pieck-Universität
Rostock**

Information

Rostocker Informatik-Berichte

ISSN 0233-0784

Diese Schriftenreihe der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock erscheint seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor:

Heft 1 (1985): 20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung

Heft 2 (1985): DIGRA'84
(Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)

Heft 3 (1986): Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinat der DDR

Heft 4 (1986): Arbeiten aus der Sektion Information

Heft 5 (1987): Beiträge des Problemseminars "Graphisch-Interaktive Systeme"

Heft 6 (1988): Problemseminar "Graphische Standardisierung" und Probleme der Modellierung und Simulation

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR-7010.

Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 36

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

1989

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Gustav Burosch
(Sektionsdirektor)

Prof. Dr. Gerhard Maeß

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Werner Plischke

Herstellung der Druckvorlage: Dipl.-Lehrer Andreas Straßburg

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

Universitätsplatz 1

Rostock

DDR-2500

Redaktionsschluß: 06. 10. 1988

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Außerdem bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010.

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1989) 36

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,

Abteilung Wissenschaftspublizistik,

Vogelsang 13/14, Telefon 369 577, Rostock, DDR 2500

Genehmigungs-Nr.: C 103/89

Druck: Ostsee-Druck Rostock BT Ribnitz II 14 • 0,50
1000

Wanka, Gert	Approximationsprobleme bei Randkontakt-	
Wanka, Johanna	aufgaben II. (parabolische Probleme)	4
Sändig, Anna-Margarete	The Regularity of Boundary Value	
Richter, Uwe	Problems for the Lamé Equations in	
Sändig, Rainer	a Polygonal Domain	21
Frischmuth, Kurt	On locally D-optimal experimental	
	design	51
Fisher, Brian	A result on the beta function	65
Denecke, Klaus	Eine Charakterisierung der funktio-	
	naln Vollständigkeit in kongruenz-	
	vertauschbaren Varietäten durch	
	Hyperidentitäten	73

Gert Wanka

Johanna Wanka

Approximationsprobleme bei Randkontaktaufgaben II
(parabolische Probleme)

Mit der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung von Approximationseigenschaften bei elliptischen Randkontaktproblemen (vgl. [22]) auf parabolische Randkontaktprobleme ausgedehnt. Randkontaktprobleme verallgemeinern Randwertprobleme in der Weise, daß das zugrundegelegte Gebiet aus mehreren Teilgebieten zusammengesetzt ist. Längs der Trennflächen dieser Teilgebiete haben die Lösungen der Randkontaktprobleme gewisse Kontaktbedingungen zu befriedigen, z. B. kann der stetige Durchgang der Funktionswerte durch die Trennfläche und ein Sprung der Konormalenableitungen gefordert werden. Bei verschiedenen physikalischen Erscheinungen, die mittels Randkontaktproblemen modelliert werden können, treten unterschiedliche Typen von Kontaktbedingungen auf. Beispielsweise führt das Wärmeleitungsproblem in stückweise homogenen Körpern (hinsichtlich der Wärmeleitungseigenschaften, z. B. des Wärmeleitungskoeffizienten) auf ein Randkontaktproblem. Bei stationären Problemen ergeben sich elliptische Randkontaktprobleme (vgl. [18]), bei instationären Problemen resultieren Kontaktaufgaben für parabolische Randanfangswertprobleme (vgl. [19]).

In diesen beiden Arbeiten findet man auch weitere, die Randkontaktprobleme betreffende Literaturhinweise.

Bei den zur Diskussion stehenden Approximationseigenschaften handelt es sich um die Frage der Approximation von längs Hyperflächen F im Innern des Regularitätsgebietes der Differentialgleichung gegebenen Funktionen mittels der auf F eingeschränkten Lösungen des Randwertproblems bei Variation der Randdaten.

Diese Aufgabenstellung geht auf H. Beckert [2] zurück, der Dichtheit in $L_2(F)$ beim Dirichletproblem für eine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung unter gewissen Voraussetzungen (Glattheit, eindeutige Lösbarkeit, F zerlegt das Regularitätsgebiet nicht) gezeigt hat.

Dieses grundlegende Resultat wurde in den darauffolgenden Jahren bis in die heutige Zeit von mehreren Autoren verallgemeinert. Dies betrifft z. B. Arbeiten von F. E. Browder [4], A. Göpfert [6], G. Anger [1], G. Wildenhain [23], K. Beyer [3], U. Hamann [9], J. und G. Wanka [20], [17]. Bezüglich weiterer Literaturangaben vergleiche man etwa [8], [22]. In jüngster Zeit ist mit der Arbeit [10] von U. Hamann eine weitgehende und in gewissem Sinne abschließende Charakterisierung der Approximationseigenschaften (Dichtheitsaussagen) für elliptische Operatoren beliebiger Ordnung mit glatten Koeffizienten geschaffen worden.

Bei der Betrachtung von Approximationsproblemen bei parabolischen Gleichungen ergibt sich gegenüber elliptischen Gleichungen auf Grund der Zeitabhängigkeit (bei entsprechender physikalischer Interpretation) eine größere Vielfalt möglicher Aufgabenstellungen, insbesondere können außer den Randdaten auch die Anfangsbedingungen variiert werden. Bei Randkontaktproblemen entsteht die Frage nach Dichtheitsaussagen bei Variation der Kontaktbedingungen.

In [22] wurde ein Dirichletsches Randkontaktproblem bei einem elliptischen Operator behandelt. Nachfolgend betrachten wir das Neumannsche Randanfangswertproblem mit Kontaktbedingungen für einen linearen parabolischen Operator zweiter Ordnung und L_2 -Approximation. Eine Ausdehnung der Resultate auf andere Randbedingungen und Approximation in anderen Räumen (z. B. gleichmäßige Approximation) ist unter geeigneten Voraussetzungen möglich (vgl. [20]).

1. Randkontaktproblem

Gegeben sei ein beschränktes offenes zusammenhängendes Gebiet D , welches in folgender Weise zerlegt wird (vgl. Abb. 1):

Im Innern von D seien geschlossene Hyperflächen $S_1, \dots, S_l$ gegeben, die sich nicht gegenseitig umschließen, disjunkt sind und einfach zusammenhängende Gebiete $D_1, \dots, D_l$ beranden:

$\partial D_i = S_i$, $i = 1, \dots, l$. Weiter sei $D_0 = D \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_l)$ das

zusammenhängende Gebiet mit $\partial D_0 = R \cup S$, wobei $S = \bigcup_{i=1}^l S_i$ und

$R = \partial D$, $\underline{D} = \bigcup_{i=0}^l D_i$, $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Wir fordern, daß sämtliche auftretenden Randflächen (bzw. Randkurven im $\mathbb{R}^2$) aus der Klasse $C^{(2,\lambda)}$ sind.

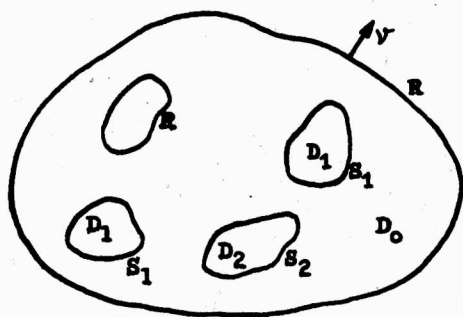


Abb. 1

Es ist im zylindrischen Gebiet $D_0 \times [0, T]$ eine Funktion $u(x, t)$ gesucht ($u(x, t) := u_i(x, t)$ in $D_i \times [0, T]$), die in $D_0 \times (0, T]$ einer linearen parabolischen Gleichung

$$Lu = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = K(x, t) \quad (1)$$

genügt, auf dem Rand R vorgegebene Neumannsche Randbedingungen

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial n} \Big|_{R \times (0, T]} = f(x, t) \quad (2)$$

erfüllt und zum Zeitpunkt $t=0$ eine Anfangsbedingung befriedigt:

$$u(x, t) \Big|_{\bar{D}} = \psi(x). \quad (3)$$

Auf den Trennflächen seien Kontaktbedingungen der Art

$$u_0(x, t) \Big|_{S_i \times (0, T]} = u_i(x, t) \Big|_{S_i \times (0, T]} \quad (4)$$

und

$$\lambda_0 \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial n} \Big|_{S_1 \times (0,T]} - \lambda_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial n} \Big|_{S_i \times (0,T]} = g_i(x,t) \Big|_{S_i \times (0,T]}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (5)$$

gestellt. $u_i(x,t) \Big|_{S_i \times (0,T]}$ symbolisiert den Grenzwert von $u(x,t)$ auf $S_i \times (0,T]$ vom Gebiet $D_i \times (0,T]$ her. $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ ist der entsprechende Grenzwert der Konormalenableitung,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x,t)} = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x,t) \cos(v, x_j) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i},$$

v ist der bezüglich D_0 äußere Normaleneinheitsvektor auf $S \cup R$.

Bemerkung: Für $Lu = a \Delta u - u_t = 0$ und $g_i \equiv 0$, $i=1, \dots, l$,

läßt sich Aufgabe (1) - (5) als ein Problem der nichtstationären Wärmetheorie auffassen. Wir betrachten den Körper D , der sich aus den Teilstücken $D_0, D_1, \dots, D_l$ zusammensetzt. Die einzelnen D_i sollen sich unterscheiden durch physikalische Größen: Dichte (e_i), spezifische Wärme (c_i) und Wärmeleitzahl (λ_i). Dabei

lassen wir nur solche Medien zu, für die $\frac{\lambda_i}{e_i c_i} = a$ für $i=0, 1, \dots, l$ gilt. Bei Vorgabe einer Temperatur im Körper zum Zeitpunkt Null (3) und eines Wärmestroms auf der Körperoberfläche bis zum Zeitpunkt T (2), stellt sich im Körper eine Temperaturverteilung $u(x,t)$ ein. Bedingung (4) beschreibt einen stetigen Temperaturverlauf durch die Trennflächen $S_i (i=1, \dots, l)$, der zu erwarten ist, wenn die unterschiedlichen Medien in so inniger Berührung stehen, daß kein Wärmeübergangswiderstand zwischen ihnen auftritt. Der Wärmestrom $\lambda_0 \frac{\partial u_0}{\partial n}$, der aus dem Medium D_0 kommt, ist dann gleich dem Wärmestrom aus $D_i (i=1, \dots, l)$, vgl. (5). Wird $g_i \neq 0$, so bedeutet das eine Wärmespeicherung.

Kamynin [11, 12] untersuchte im räumlich eindimensionalen Fall eine relativ allgemeine Kontaktaufgabe, wobei in den zwei thermisch homogenen Gebieten unterschiedliche parabolische Gleichungen erfüllt sein müssen. Parabolische Randkontaktaufgaben in einer schwachen Form wurden z. B. von Olejnik [15] gelöst.

Wir haben die Aufgabe (1) - (5) mit Mitteln der Potentialtheorie behandelt [19].

2. Lösbarkeit und Lösungsdarstellung

Die Lösung $u(x, t)$ der Aufgabe (1) - (5) setzen wir als Potential an:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_D \Gamma(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_D \Gamma(x, t; \xi, \tau) K(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial D} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\delta_\xi d\tau \\ &=: P(x, t) + J(x, t) + V(x, t). \end{aligned} \quad (6)$$

$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ bezeichnet die Fundamentallösung des Operators L in $D \times [0, T]$. $P(x, t)$ ist das Poisson-Weierstraß-Integral. Es erfüllt die homogene parabolische Gleichung (1) und sichert die Annahme der Anfangswerte $\psi(x)$. Bei $J(x, t)$ handelt es sich um das Volumenpotential. $V(x, t)$ ist das parabolische Einfachschichtpotential mit unbekannter Dichte $\varphi(x, t)$, erstreckt sich über die "Mantelfläche" des zylindrischen Gebietes ($d\delta$ symbolisiert das Oberflächenelement, der Index ξ deutet auf die Integrationsvariable hin). Der Potentialansatz (6) führt auf eine Fredholmsche Integralgleichung, deren Lösung in [19] untersucht wurde. Es ergibt sich der folgende Existenzsatz.

Satz 1: Für die Aufgabe (1) - (5) existiert eine Lösung, die sich in der Form (6) darstellen läßt, wenn der Operator L die Bedingungen (A0) - (A2) erfüllt:

(A0) die Matrix $\{a_{ij}\}$ $\begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$ ist symmetrisch,

(A1) L ist parabolisch in $\bar{D} \times [0, T]$,

(A2) die Koeffizienten von L sind stetige Funktionen in $\bar{D} \times [0, T]$, und es gilt für alle Punkte

$(x, t), (x_0, t_0) \in \bar{D} \times [0, T]$:

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x_0, t_0)| \leq A(|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2}),$$

$$|b_i(x, t) - b_i(x_0, t)| \leq A|x - x_0|^\alpha,$$

$$|c(x, t) - c(x_0, t)| \leq A|x - x_0|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1,$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_1 \partial x_j}(x, t), \quad \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(x, t) \in C(\bar{D} \times (0, T]),$$

$$S \cup R \in C(2, \lambda).$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung (1) sei hölderstetig bez. x in $D \times [0, T]$ unabhängig von t , und $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ seien positive Konstanten. Die Kontakt- und Randdaten seien stetig:

$$f \in C(R \times [0, T]), \quad g_i \in C(S_i \times [0, T]), \quad i=1, \dots, l.$$

Für die Anfangsvorgaben verlangen wir neben der Stetigkeit ($\psi \in C(D)$), daß ψ gleich Null in einer R^m -Umgebung von ∂D_0 ist. Unter diesen Voraussetzungen ist die Dichte $\varphi(x, t)$ des Einfachschichtpotentials eine eindeutig bestimmte stetige Funktion, die darstellbar ist mittels der entsprechenden Neumannschen Reihe.

Die für viele Betrachtungen und Anwendungen nützliche Lösungsdarstellung linearer Randwertprobleme mittels Greenscher Funktion ist auch für das beabsichtigte Studium der Approximationseigenschaften der Lösungen parabolischer Kontaktaufgaben sehr günstig. Das bekannte Konzept der Greenschen Funktion als spezieller Fundamentallösung wurde auf das parabolische Randkontaktproblem mit selbstadjungiertem elliptischen Operator übertragen [20]. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit lassen wir für das Folgende nur einen Einschluß D_1 zu.

Für die Greensche Funktion machen wir den Ansatz:

$$G(x, t; \xi, \tau) = G_i(x, t; \xi, \tau) \quad \text{für } (x, t) \in D \times [0, T], \quad (7) \\ (\xi, \tau) \in D_1 \times [0, T],$$

$$G_i(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) - v_i(x, t; \xi, \tau), \quad i=0, 1. \quad (8)$$

Der reguläre Anteil $v_i(x, t; \xi, \tau)$ ergibt sich durch die Definition der Greenschen Funktion.

Die Greensche Funktion muß folgenden Bedingungen genügen:

$$L_{(\xi, \tau)}^* G(x, t; \xi, \tau) = 0, \quad (x, t) \in D \times (0, T], \quad (9) \\ (\xi, \tau) \in D \times (0, t), \quad (x, t) \neq (\xi, \tau),$$

$$G(x, t; \xi, \tau) = 0, \quad x, \xi \in D, \quad x \neq \xi, \quad (10)$$

$$\frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial n_\xi} = 0, \quad (x, t) \in D \times (0, T]; \quad (\xi, \tau) \in R \times (0, t), \quad (11)$$

$$G_0(x, t; \xi, \tau) = G_1(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t) \in D \times [0, T], \quad (12)$$

$$(\xi, \tau) \in S_1 \times [0, t].$$

$$\lambda_0 \frac{\partial G_0(x, t; \xi, \tau)}{\partial n_\xi} = \lambda_1 \frac{\partial G_1(x, t; \xi, \tau)}{\partial n_\xi} \quad (13)$$

L^* ist der formal adjungierte Operator. Der Index (ξ, τ) bei L^* soll symbolisieren, daß es sich um die Anwendung von L^* bezüglich (ξ, τ) handelt. n_ξ sei die Konormale im Punkt (ξ, τ) , und die auftretenden Ableitungen in dieser Richtung beziehen sich ebenfalls auf ξ . Die Existenz der Greenschen Funktion wird gezeigt, wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 1 noch gilt

$$b_k - \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j} = 0, \quad k=1, \dots, m,$$

und $c(x, t) \leq 0$ für alle $(x, t) \in D \times [0, T]$.

Dann läßt sich für eine eindeutige Lösung $u(x, t)$ der Aufgabe (1) - (5) ($u \in C(\bar{D} \times [0, T])$, $u_{xx}, u_t \in C(D \times [0, T])$) folgende Darstellungsformel unter Benutzung der Greenschen Funktion zeigen [20]:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) = & \int_{D_0} G_0(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi \\ & + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \int_{D_1} G_1(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi \\ & + \int_0^t \int_R G_0(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t \int_{S_1} G_0(x, t; \xi, \tau) g_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & - \int_0^t \int_{D_0} G_0(x, t; \xi, \tau) K(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \int_0^t \int_{D_1} G_1(x, t; \xi, \tau) K(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \int_{D_0} G_0(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi \\
& + \int_{D_1} G_1(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi \\
& + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \int_0^t \int_R G_1(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
& + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \int_{S_1} G_1(x, t; \xi, \tau) g_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
& - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \int_0^t \int_{D_0} G_0(x, t; \xi, \tau) K(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
& - \int_0^t \int_{D_1} G_1(x, t; \xi, \tau) K(\xi, \tau) d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{15}$$

3. Approximation

In der Einleitung wurde schon darauf hingewiesen, daß die Möglichkeiten zur Variation der Eingangsdaten (Anfangs-, Randvorgaben u.a.) vielfältig sind. Wir variieren die Rand- bzw. Kontaktbedingungen. Das Approximationsgebiet sei die "Mantelfläche" eines zylindrischen Gebietes im Innern des Ausgangsgebietes. Wählt man einen beschränkten Steuerbereich, so kann man unter genügend starken Voraussetzungen zeigen, daß ein Element bester Approximation bezüglich einer geeigneten Norm existiert. Dies ist auch von technischem Interesse bei Wärme- und Stoffaustauschprozessen. Es bedeutet, den Einfluß z. B. der Temperatur auf dem Rand des Körpers auf den Temperaturverlauf auf einem Flächenstück im Innern des Körpers abzuschätzen. Man kann vermuten, daß bei einer Vergrößerung des Steuerbereiches die Approximation (bezüglich der Norm) genauer wird. Wir lassen einen freien Steuerbereich zu und versuchen zu ermitteln, wann eine quadratintegrable Funktion beliebig genau in der L_2 -Norm von den Lösungen des parabolischen Randanfangswertproblems approximiert wird.

In einem Zeitintervall (t_1, t_2) werden die Rand- und Kontaktvorgaben auf $R \cup S_1$ variiert. Alle übrigen Eingangsdaten der Aufgabe (Anfangsbedingung, Quellfunktion) werden konstant gehalten bzw. o.B.d.A. Null gesetzt. Die variierenden Funktionen müssen stetig an die Null außerhalb des Variationsbereiches anschließen. Die bei der Variation entstehende Linearmannigfaltigkeit M schränken wir auf die Hyperfläche F ein. Diese Einschränkung bezeichnen wir mit $M(F)$. Von F fordern wir

Bedingung B: $F = F \times [t_1, t_2]$. $F \subset D_i$, $F \cap \partial D_i = \emptyset$, $i=0$ oder $i=1$, $\dim F = m-1$, $f \in C^{(1,\lambda)}$. F sei zusammenhängend, abgeschlossen (kann auch D zerlegen, wobei innerhalb F nur Teilgebiete von D_0 oder D_1 liegen).

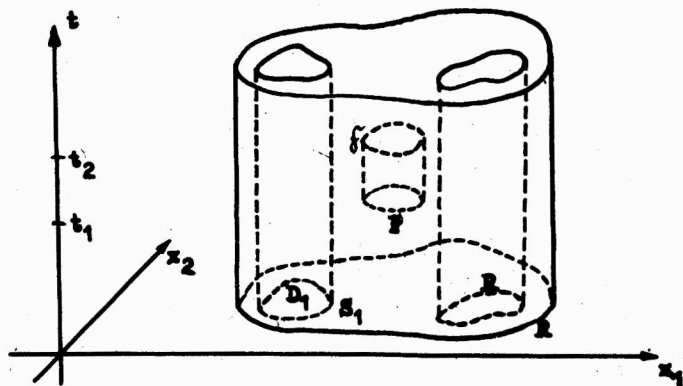


Abb. 2

Bei der Approximation werden wir auf parabolische Einfachschichtpotentiale mit L_2 -Dichten geführt. Potentiale mit den Grundlösungen allgemeiner parabolischer Gleichungen als Kern und wenigstens beschränkten Dichten untersuchen u.a. Friedman [5],

Pogorzelski [16], Ladyženskaja [13]. Es muß untersucht werden, in welchem Umfang die bekannten Eigenschaften erhalten bleiben, wenn die Dichte eine quadratintegrable Funktion ist und für die Raumdimension $n \geq 1$ gilt. Für $n=1$ bei der Wärmeleitungsgleichung findet man entsprechende Untersuchungen bei Göpfert [7]. Es gilt der folgende Satz (Beweis in [20] und [21]).

Satz 2: Wenn der Operator L die Bedingungen (A0), (A1) und (A2) erfüllt, die geschlossene Hyperfläche $(E \in \mathbb{R}^m, \partial E = S)$ $S \in C^{(1,\lambda)}$ ($0 < \lambda \leq 1$) und $\varphi(x, t) \in L_2(S \times [0, T])$ ist, gelten für das Einfachschichtpotential

$$V(x, t) = \int_0^t \int_S \Gamma(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (16)$$

die folgenden Eigenschaften:

$LV(x, t) = 0$ für alle $(x, t) \in D \times (0, T]$,

$V(x, t)$ existiert für alle (x, t) mit $x \notin S$ und für fast alle (x, t) mit $x \in S$,

$V(x, t)$ ist stetig für alle (x, t) mit $x \notin S$, und es gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in S \\ x \in \mathbb{R}^m \setminus S}} V(x, t) = V(x_0, t) \quad \text{f.ü.}$$

Weiterhin gilt für fast alle Punkte (x_0, t) mit $x_0 \in S$, $0 < t \leq T$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in S \\ x \in \mathbb{R}^m \setminus S}} \frac{\partial V(x, t)}{\partial n(x_0, t)} = \frac{1}{2} \varphi(x_0, t) + \int_0^t \int_S \frac{\partial \Gamma(x_0, t; \xi, \tau)}{\partial n(x_0, t)} \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Satz 3: Es seien die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt. Alle Koeffizienten der Differentialgleichung und der Hyperfläche $\partial D \times [t_1, t_2]$ seien unendlich oft differenzierbar, und außerdem gelte

$$c(x, t) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in D \times [0, T],$$

$$b_k - \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j} = 0, \quad k=1, \dots, m.$$

Die Hyperfläche f erfülle die Bedingung B.
 Unter diesen Voraussetzungen liegt für die Randkontaktaufgabe
 (1) - (5) die Menge $M(f)$ dicht in $L_2(f)$.

Beweis: 1. Fall: $f \subset D_0 \times [0, T]$. Die Elemente von $M(f)$ haben
 nach (14) die Gestalt

$$u(x, t) = \int_{t_1}^t \int_R G_0(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau - \frac{1}{\lambda_0} \int_{t_1}^t \int_{S_1} G_1(x, t; \xi, \tau) g_1(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (18)$$

für $x \in D_0$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Für den Beweis der Dichtheit genügt es zu
 zeigen, daß $h=0$ aus $\langle h, u \rangle_{L_2(f)} = 0 \quad \forall u \in M(f)$ folgt
 ($h \in L_2(f)$).

$$0 = \langle h, u \rangle_{L_2(f)} \quad (19)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_F h(x, t) \left(\int_{t_1}^t \int_R G_0 f d\xi d\tau - \frac{1}{\lambda_0} \int_{t_1}^t \int_{S_1} G_1 g_1 d\xi d\tau \right) d\xi d\tau.$$

Da $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = 0$ für $t \leq \tau$, $x \neq \xi$ ($F \cap \partial D = \emptyset$) und $V(\xi, t) = 0$
 nach (10), kann man $G(x, t; \xi, \tau)$ durch Null für $\tau \geq t$, $x \neq \xi$ fort-
 setzen. Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_R f(\xi, \tau) \left(\int_{\tau}^{t_2} \int_F G_0(x, t; \xi, \tau) h(x, t) d\xi d\tau \right) d\xi d\tau - \frac{1}{\lambda_0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_1} g_1(\xi, \tau) \left(\int_{\tau}^{t_2} \int_F G_1(x, t; \xi, \tau) h(x, t) d\xi d\tau \right) d\xi d\tau. \quad (20)$$

(20) soll für alle stetigen f, g_1 gelten. Da f und g_1
 unabhängig voneinander variieren, müssen die Ausdrücke in den
 Klammern verschwinden:

$$0 = \int_{\tau}^{t_2} \int_F G_0(x, t; \xi, \tau) h(x, t) d\xi d\tau = w_0(\xi, \tau) \quad \text{für alle } (\xi, \tau) \in R \times [t_1, t_2], \quad (21)$$

$$0 = \int_{\tau}^{t_2} \int_F G_1(x, t; \xi, \tau) h(x, t) d\delta_x dt = w_1(\xi, \tau) \\ \text{für alle } (\xi, \tau) \in S_1 \times [t_1, t_2]. \quad (22)$$

Wir setzen

$$w_i(\xi, \tau) = \int_{\tau}^{t_2} \int_F \Gamma(x, t; \xi, \tau) h(x, t) d\delta_x dt - \int_{\tau}^{t_2} \int_F v_i h d\delta_x dt.$$

Der erste Summand ist ein parabolisches Einfachschichtpotential mit summierbarer Dichte. Satz 2 ist anwendbar bei Beachtung der Integration nach (x, t) . Der zweite Summand ist eine Integralfunktion mit stetigem Kern.

Nach (10) und (9) gilt $G(x, t; \xi, \tau) = 0$ und $L_{(\xi, \tau)}^* G = 0$ für alle $\xi \notin F$. Auf Grund der Eigenschaften des parabolischen Einfachschichtpotentials ist damit $L_{(\xi, \tau)}^* w_i = 0$ für alle $\xi \notin F$,

$\xi \in D_i, i=0, 1$.

Aus dem Verhalten von G_0 auf dem Rand $\partial D \times [0, T]$ (vgl. (11)) folgt

$$\frac{\partial w_0}{\partial n_{\xi}} \Big|_{\partial D \times [t_1, t_2]} = 0.$$

$w_0(\xi, \tau)$ ist also Lösung des Problems

$$L_{(\xi, \tau)}^* w_0 = 0 \quad \text{für alle } (\xi, \tau) \in \{D_0 \times [t_1, t_2]\} \setminus F, \\ w_0 \Big|_{\partial D \times [t_1, t_2]} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n_{\xi}} \Big|_{\partial D \times [t_1, t_2]} = 0. \quad (23)$$

Diese Aufgabe ist ein nichtsachgemäßes Problem, das nichtcharakteristische Cauchyproblem. Wir haben mit $w_0(\xi, \tau)$ eine Lösung der homogenen Aufgabe gefunden. Eine Unitätsaussage stellt der Satz von Mizohata zur Verfügung.

Satz von Mizohata: (vgl. [14]) Gegeben sei die parabolische Gleichung

$$u_t = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u,$$

wobei die Koeffizienten unendlich oft differenzierbar sein müssen und

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \delta(x,t) |\xi|^2, \quad \delta(x,t) > 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m).$$

Sei u eine Lösung der parabolischen Gleichung, und es gelte auf einer unendlich oft differenzierbaren Hyperfläche S mit nicht horizontalen Tangentialhyperflächen im Innern des Regularitätsgebietes von $u(x,t)$:

$$u(x,t)|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0,$$

dann ist $u(x,t) = 0$ in einer Umgebung von S .

$w_0(\xi, \tau)$ erfüllt die Bedingungen des Satzes, wenn wir noch begründen, daß $\partial D \times [t_1, t_2]$ im Regularitätsgebiet von w_0 liegt. Unter den gemachten Glattheitsanforderungen an die Koeffizienten von L und den Rand des Gebietes ist der Operator L gleichmäßig parabolisch mit entsprechend glatten Koeffizienten über D hinaus für $0 \leq t \leq T$ fortsetzbar, und die Lösung der Differentialgleichung ist auf $\partial D \times [0, T]$ fortsetzbar (nach [5] Kapitel III, Theorem 12, § 7, Lemma 1). Wir können w_0 über das Gebiet D hinaus für $t_1 \leq t \leq t_2$ mit Null fortsetzen. Aus dem Satz von Mizohata folgt

$w(\xi, \tau) = 0 \quad \forall (\xi, \tau) \in \{D \times [t_1, t_2]\} \setminus f$, wenn F eine nichtgeschlossene Hyperfläche (zerlegt D nicht) ist. Wir bilden die Differenz der Konormalenableitung $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ von beiden "Seiten" von f . Nach Anwendung der Sprungrelation (17) ergibt sich für die Dichte $h(x, t) = 0$ f. ü. auf f . (Wesentlich ist im Kern von w_0 die Grundlösung $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$. $\frac{\partial}{\partial n_\xi} \int_{\tau}^{t_2} \int_F h(x, t) v(x, t; \xi, \tau) d\delta_x dt$ geht stetig durch f .)

Ist F geschlossen (zerlegt D), so nennen wir das Gebiet des $\mathbb{R}^m$, welches durch F berandet wird, D_F . Es wäre dann nach Anwendung des Satzes von Mizohata $w_0(\xi, \tau) = 0$, $(\xi, \tau) \in (D_0 \setminus D_F) \times [t_1, t_2]$.

Durch Anwendung der Sprungrelation erhalten wir

$$\frac{\partial w_0}{\partial n_\xi}|_f = 0 = \frac{1}{2} h(\xi, \tau) + \int_{\tau}^{t_2} \int_F \frac{\partial g_0(x, t; \xi, \tau)}{\partial n_\xi} h(x, t) d\delta_x dt.$$

Diese Fredholmsche Integralgleichung mit schwach singulärem Kern kann höchstens beschränkte Eigenlösungen $h \in L_2(f)$ haben. Für beschränktes h ist jedoch $w_0(\xi, \tau)$ als Einfeldschichtpotential stetig auf der Belegungsfläche f und somit

$w_0(\xi, \tau)|_F = 0$. Da zudem $w_0(\xi, t_2) = 0$ für alle $\xi \in D_F$ und $L^* w_0 = 0$ in $D_F \times [t_1, t_2]$, ist w_0 Lösung der homogenen 1. Randwertaufgabe für L^* , und wir können $w_0 = 0$ in $D_F \times [t_1, t_2]$ folgern. Jetzt erhalten wir mittels Sprungrelation wieder $h|_F = 0$.

2. Fall: $F \subset D_1$. Es gilt nach (15)

$$u_1(x, t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \int_{t_1}^t \int_R G_0(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ - \frac{1}{\lambda_1} \int_{t_1}^t \int_{S_1} G_1(x, t; \xi, \tau) g_1(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Nach Wiederholung der obigen Überlegungen erhält man $w_1|_S = 0$, $w_0|_R = 0$. Für w_0 ergibt sich das nichtcharakteristische Cauchyproblem, und der Satz von Mizohata erbringt $w_0(\xi, \tau) = 0$ in $D_0 \times [t_1, t_2]$.

Wegen (12) und (13) erhalten wir für die Funktion w_1 :

$$w_1(\xi, \tau)|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n_\xi}|_{S_1} = 0.$$

Nach dem Satz von Mizohata ist $w_1(\xi, \tau) = 0 \quad \forall \xi \in D_1$ und $\xi \notin F$ bzw. $\xi \notin D_F$ und $t_1 \leq \tau \leq t_2$. Jetzt können wir weiter wie im Fall 1 schließen.

Bemerkung: Werden f und g_1 jeweils auf einem kleinen Stück der Rand- und Kontaktfläche variiert, so bleibt Satz 3 gültig, da der Satz von Mizohata eine lokale Aussage enthält. Es muß in diesem Fall auch nicht der ganze Rand ∂D bzw. S_1 beliebig oft differenzierbar sein, sondern nur das Stück, auf dem man variiert.

Das Resultat, daß bei Variation der Rand- und Kontaktbedingungen die Lösungen dicht liegen im Raum $L_2(F)$, war in Analogie zum einfachen Randwertproblem zu erwarten. Interessant ist die Frage, ob es genügt, nur auf einem kleinen Stück der Rand- oder Kontaktfläche zu variieren, um eine L_2 -Funktion auf F im quadratischen Mittel zu approximieren.

Satz 4: Unter den Voraussetzungen des Satzes 3 liegt $\mathfrak{M}(f)$ dicht in $L_2(f)$, wenn nur die Randvorgabe auf einem kleinen Randstück $R' \times [t_1, t_2]$ variiert wird.

Beweis: Der Beweis von Satz 3 ist wiederholbar.

Satz 5: Unter den Voraussetzungen des Satzes 3 liegt $\mathfrak{M}(f)$ dicht in $L_2(f)$, wenn die Kontaktvorgabe g_1 auf der ganzen Kontaktfläche $S_1 \times [t_1, t_2]$ variiert wird.

Beweis: 1. Fall: $F \subset D_0$. Für $(x, t) \in D_0 \times [t_1, t_2]$ gilt

$$u(x, t) = \int_{t_1}^t \int_{S_1} G_1(x, t; \xi, \tau) g_1(\xi, \tau) d\xi d\tau. \text{ Durch Wiederholung}$$

der ersten Beweisschritte von Satz 3 erhalten wir für w_1 (vgl. [22]):

$$L^* w_1 = 0 \text{ in } D_1 \times [t_1, t_2],$$

$$w_1(\xi, t_2) = 0 \text{ für } \xi \in D_1,$$

$$w_1|_S = 0.$$

w_1 als Lösung dieser 1. Randwertaufgabe für L^* ist wegen der Unität gleich Null, also ist $\frac{\partial w_1}{\partial n}|_S = 0$.

Aufgrund der Eigenschaften (12), (13) von G_0 und G_1 auf S erhalten wir für w_0 : $w_0|_S = 0$ und $\frac{\partial w_0}{\partial n}|_S = 0$. Der Satz von Mizohata und die Nutzung der Sprungrelation erbringen $h = 0$ f. ü. auf f .

2. Fall: $F \subset D_1$. Bei Variation von g_1 auf ganz S ergibt sich $w_1|_S = 0$. Für w_0 gilt dann ebenfalls $w_0|_S = 0$.

Wegen $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}|_R = 0$ folgt $\frac{\partial w_0}{\partial n}|_R = 0$, und da $x \in D_1$, ist

$w_0(\xi, t_2)|_{D_0} = 0$. Damit genügt w_0 in $D_0 \times [t_1, t_2]$ einer homogenen

Randwertaufgabe für L^* . Somit ist $w_0 = 0$ in $D_0 \times [t_1, t_2]$.

Weiter können wir wie im Beweis von Satz 3 schließen.

Bemerkung: 1. Alle Sätze dieses Abschnittes bleiben gültig, wenn einerseits mehrere Einschlüsse zugelassen werden und andererseits F aus (endlich vielen) verschiedenen Komponenten besteht

sowie im Falle der Zerlegung von D durch F mehrere Gebiete D_i , $i=1, \dots, l$, im Innern des von F berandeten Gebietes liegen.

2. Nutzt man zur Untersuchung der Dichtigkeit von $M(F)$ nicht die Darstellungsformel mit Greenscher Funktion, sondern die Potentialdarstellung (6), so wird man auf äußere Randkontaktaufgaben, d.h. Randkontaktaufgaben für unbeschränkte Gebiete geführt. Es können auch für das parabolische Einfachschichtpotential Dichtheitsaussagen gewonnen werden, wobei die λ_i auch Funktionen $\lambda_i = \lambda_i(x, t)$ sein können.

Literatur

1. Anger, G.: Eindeutigkeitsätze und Approximationssätze für Potentiale II. Math. Nachr. 50, 229-244 (1971)
2. Beckert, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletproblems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. 139, 255-264 (1960)
3. Beyer, K.: Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme. Rostock. Math. Kolloq. 26, 27-34 (1984)
4. Browder, F.E.: Approximation by solutions of partial differential equations. Amer. J. Math. 84, 134-160 (1962)
5. Friedman, A.: Uravnenija s častnymi proizvodnymi paraboliceskogo tipa. Moskva 1968
6. Göpfert, A.: Über L_2 -Approximationssätze - eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Nachr. 31, 1-24 (1966)
7. Göpfert, A.: Optimierungsprobleme bei parabolischen und elliptischen Differentialgleichungen. Diss. B, Karl-Marx-Universität Leipzig 1972
8. Göpfert, A., und Wanka, J. und G.: Approximation durch Lösungen partieller Differentialgleichungen. Z. Anal. Anwendungen 4 (4), 291-303 (1985)
9. Hamann, U.: Zur Approximation in Sobolev-Räumen durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme. Math. Nachr. 123, 73-82 (1985)
10. Hamann, U.: Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung. Diss. B, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1986
11. Kamynin, L.J.: O suščestvovanii rešenija kraevych zadač dlja paraboliceskogo uravnenija s razryvnymi koefficientami. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 28, 721-744 (1964)
12. Kamynin, L.J.: Metod teplovych potencialov dlja paraboliceskogo uravnenija s razryvnymi koefficientami. Sibirsk. Mat. Z. IV (5), 1071-1105 (1963)

13. Ladyženskaja, O.A., Solonnikov, N.A., i Ural'ceva, N.N.:
Linejnye i kvazilinejnye uravnenija paraboliceskogo
tipa. Moskva 1967
14. Mizohata, S.: Unicité du prolongement des solutions pour
quelques opérateurs différentielles paraboliques.
Mém. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A 31, 219-239 (1958)
15. Olejnik, O.A.: Rešenje osnovnyh kraevykh zadač dlja
uravnenij vtorogo pojadka s razryvnymi koefficientami.
Dokl. Akad. Nauk SSSR 124, 1219-1222 (1959)
16. Pogorzelski, W.: Integral Equations and Their Applications.
Warszawa 1966
17. Wanka, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösungen von
Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen
zweiter Ordnung. Beitr. Anal. 17, 19-29 (1981)
18. Wanka, G.: Ein Existenztheorem für eine Klasse von allgemei-
nen Dirichletschen Randkontaktproblemen bei linearen
elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
Math. Nachr. 110, 215-229 (1983)
19. Wanka, J.: Lösung von Kontaktaufgaben bei parabolischen
Randanfangswertproblemen. Z. Anal. Anwendungen 2,
459-471 (1983)
20. Wanka, J.: Lösung von Kontakt- und Steuerproblemen mit
potentialtheoretischen Mitteln.
Dissertation A, TH Leuna-Merseburg 1980
21. Wanka, J.: Die Sprungrelation des parabolischen Einfach-
schichtpotentials mit summierbarer Dichte. Wiss. Z.
Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg 21 (1), 31-41 (1979)
22. Wanka, G., und Wanka, J.: Approximationsprobleme bei Rand-
kontaktaufgaben I (elliptische Probleme). Rostock.
Math. Kolloq. 29, 61-77 (1986)
23. Wildenhain, G.: Uniform approximation by solutions of
general boundary value problems for elliptic equations
of arbitrary order, I. Z. Anal. Anwendungen 2 (6),
511-521 (1983)
24. Wildenhain, G., und Hamann, U.: Approximation by solutions
of elliptic equations. Z. Anal. Anwendungen 5 (1),
59-69 (1986)

eingegangen: 17. 1. 1988

überarbeitete Fassung: 12. 5. 1988

Verfasser:

Dr. Gert Wanka
Dr. Johanna Wanka
Technische Hochschule "Carl Schorlemmer"
Leuna-Merseburg
Sektion Mathematik
Otto-Nuschke-Straße
Merseburg
DDR-4200

Anna-Margarete Sändig

Uwe Richter

Rainer Sändig

The Regularity of Boundary Value Problems for the Lamé Equations in a Polygonal Domain

1. Introduction

In the linear theory of elasticity, where the usual relations are satisfied, the displacements $\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}), u_2(\underline{x}))^T$ of a twodimensional body Ω with the boundary $\partial\Omega$ are given by the following system:

$$\mu \Delta \underline{u}(\underline{x}) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u}(\underline{x}) = -\underline{f}(\underline{x})$$

$$\text{for } \underline{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{x})$$

$$\text{for } \underline{x} \in \Gamma \subset \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{G}(\underline{u}(\underline{x})) \underline{n}(\underline{x}) + R(\underline{x}) \underline{u}(\underline{x}) = \underline{t}(\underline{x})$$

$$\text{for } \underline{x} \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad (1.3)$$

where $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}))^T$ is the vector of the volume forces, $\underline{t}(\underline{x}) = (t_1(\underline{x}), t_2(\underline{x}))^T$ is the vector of the surface forces, λ and μ are the Lamé's constants, which are independent of $\underline{x}$ (for simplicity), $\underline{n}(\underline{x}) = (n_1(\underline{x}), n_2(\underline{x}))^T$ is the unit vector of the outward normal to $\partial\Omega \setminus \Gamma$ at the point $\underline{x}$, $\mathcal{G}(\underline{u}(\underline{x})) = (\mathcal{G}_{ij}(\underline{u}(\underline{x})))_{i,j=1,2}$ is the stress tensor with the components

$$\mathcal{G}_{ij}(\underline{u}(\underline{x})) = \mu \left(\frac{\partial u_i(\underline{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\underline{x})}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div} \underline{u}(\underline{x}) \mathcal{G}_{ij},$$

where $\mathcal{G}_{ij}$ denotes the Kronecker symbol, $R(\underline{x}) = (R_{ik}(\underline{x}))_{i,k=1,2}$ is a matrix with nonnegative elements which describes some kind of elastic resistance to the movement of $\underline{x}$ and $\underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}))^T$ are the prescribed displacements on Γ .

Ω is a polygonal domain with the boundary $\partial\Omega = \bigcup_{j \in J_1} \Gamma_j \cup \bigcup_{j \in J_2} \Gamma_j$,

where Γ_j are the sides or pieces of the sides of the polygon $\partial\Omega$ such that $\Gamma = \bigcup_{j \in J_1} \Gamma_j$, $\partial\Omega \setminus \Gamma = \bigcup_{j \in J_2} \Gamma_j$

(see Fig. 1 where $J_1 = \{1, 2\}$, $J_2 = \{3, 4, 5\}$).

Besides that plane problems are of their own interest, their study is also very important if Ω is a three-dimensional domain with edges, e.g., if Ω is a polyhedral domain (see [9]).

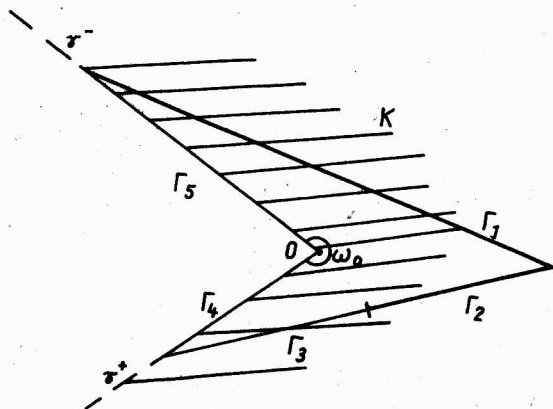


Fig. 1

P. Grisvard [1] already studied the behavior of a solution u of (1.1), (1.2), (1.3) in a neighborhood of a corner point or of a point, where the boundary conditions change. He formulated his results without proofs in form of expansions near these "bad" boundary points. In this paper we prove the regularity results using the theory of V.A. Kondrat'ev [4], [3] and of V.G. Maz'ja and B.A. Plamenevskij [8], [9]. Moreover we calculate numerically the generalized eigenvalues of a parameter problem, which determine the regularity properties of the solution.

In particular we are interested in the investigation of the regularity of the weak solution of problem (1.1), (1.2), (1.3). In order to introduce the definition of a weak solution we restrict ourselves to the case that $g(\underline{x}) = 0$ on Γ . We consider the classical Sobolev space

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u: \|u\| = (\sum_{|\gamma| \leq 1} \int_{\Omega} |D^{\gamma} u|^2 dx)^{1/2} < \infty\},$$

where $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ is a multiindex of the length $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2$.

$\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ are integers and $D^{\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2}}$ denotes the derivative in

the distribution sense. Let be

$$V = \text{closure of } \{v \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \times C^{\infty}(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma} = 0\} \quad (1.4)$$

$$\text{in } W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega).$$

We introduce a symmetric bilinear form on $V \times V$ for the system (1.1) considering the scalar product of (1.1) and of an arbitrary element $v \in V$ in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ and integrating by parts:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1,2} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \text{div} u \text{div} v \right] dx \quad (1.5)$$

Definition 1: The vector function $u \in V$ is a weak solution of the problem (1.1), (1.2), (1.3) if

$$a(u, v) = (H, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1,2} f_i(x) v_i(x) dx + \int_{\partial \Omega \cap \Gamma} \sum_{i=1,2} t_i(x) v_i(x) ds - \int_{\partial \Omega \cap \Gamma} \sum_{i,k=1,2} R_{ik}(x) u_k(x) v_i(x) ds \quad \text{for all } v \in V, \quad (1.6)$$

provided f_i , t_i and R_{ik} are such functions that H is from the dual space of V .

It is well known [12] that an uniquely determined weak solution $u \in V$ exists, if the bilinear form $a(u, v)$ is bounded on $V \times V$ and if it is V -coercive. These assumptions are satisfied if $\text{mes} \Gamma > 0$. If $\text{mes} \Gamma = 0$ then we consider instead of V the factor space V/N , where N consists of all possible rigid movements of the body Ω ,

$$N = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.7)$$

In this case there exists an uniquely determined solution $u \in V/N$ if the solvability condition

$$\int_{\Omega} (\underline{f} \cdot \underline{v}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} [(\underline{t} \cdot \underline{v}) - (R \underline{u} \cdot \underline{v})] ds = 0 \quad \text{is satisfied for all } \underline{v} \in N.$$

The regularity problem is now: How smooth is the weak solution $\underline{u} \in V$ of (1.6), if $\underline{f}$, $\underline{t}$ and R are sufficiently smooth?

We will give an answer in the following.

2. A special problem in an infinite cone

The analysis of the existence, uniqueness and regularity of the boundary value problem (1.1), (1.2), (1.3) is well developed, if the domain Ω is sufficiently smooth. Results in this direction are related to the work of many authors, in particular, to the publications of A.G. Fichera [2], A.I. Košelev [5], O.A. Ladyženskaja and N.N. Ural'tseva [7]. The investigation of the regularity is a local problem. If Ω is a polygonal domain, a regularity principle works in the interior of the domain and on $\partial\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^J U(O_j)$, where $U(O_j)$ is a neighborhood of a corner point or of a point O_j , where the boundary condition changes. Let us say that these points $\{O_j\}_{j=1, \dots, J}$ are singular points of $\partial\Omega$.

Thus we have only to investigate the behavior of the solution of (1.1), (1.2), (1.3) near the singular points and to transfer the results to weak solutions. To this aim we choose one of the points $O = O_{j_0} \in \{O_j\}_{j=1, \dots, J}$ with the interior angle ω_0 , and we multiply the solution $\underline{u}$ with a cut-off function $\eta(|\mathbf{x}|) = \eta(r)$, where $0 \leq \eta(r) \leq 1$,

$$\eta(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq r \leq \delta, \\ 0 & \text{for } r \geq 2\delta, \end{cases} \quad (2.1)$$

and $\eta(r) \in C^\infty(0, \infty)$. The number δ is so small that no other singular point on $\partial\Omega$ lies in the circle $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leq 3\delta\}$. We denote $\underline{w} = \eta \underline{u} = (\eta u_1, \eta u_2)^T$. Let K be the infinite plane cone with the vertex O , the angle ω_0 and the sides γ^+ and γ^- (see Fig. 1). Then we have

$$\mu \Delta \underline{w}(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{w}(\mathbf{x}) = \underline{F}(\mathbf{x}, \underline{u}(\mathbf{x})) \quad \text{in } K, \quad (2.2)$$

$$\underline{w}(\mathbf{x}) = \underline{G}(\mathbf{x}, \underline{u}(\mathbf{x})) \quad \text{on } \gamma^+ \cup \gamma^-, \quad (2.3)$$

or

$$\underline{w}(\underline{x}) = \underline{G}(\underline{x}, \underline{u}(\underline{x})) \quad \text{on } \gamma^+, \quad (2.4)$$

$$G(\underline{w}(\underline{x}))\underline{u}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}, \underline{u}(\underline{x})) - R(\underline{x})\underline{w}(\underline{x}) \quad \text{on } \gamma^-,$$

or

$$G(\underline{w}(\underline{x}))\underline{u}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}, \underline{u}(\underline{x})) - R(\underline{x})\underline{w}(\underline{x}) \quad \text{on } \gamma^+ \cup \gamma^-. \quad (2.5)$$

The right hand sides $\underline{F}$, $\underline{G}$ and $\underline{T}$ are given by $\underline{f}$, $\underline{g}$ and $\underline{t}$ and by terms depending on the unknown functions u_1 and u_2 ; e.g.

$$\begin{aligned} F_1 &= \mu(\eta \Delta u_1 + u_1 \Delta \eta + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) + (\lambda + \mu) (\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ &+ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + u_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \\ &= \eta f_1 + C(u_i \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_l}). \end{aligned}$$

We now forget for some theoretical considerations the special type of the right hand sides of (2.2), (2.3), (2.4) and (2.5) and consider for arbitrary given right hand sides the following special problem in the infinite cone K :

$$\mu \Delta \underline{w}(\underline{x}) + (\lambda + \mu) \text{grad div } \underline{w}(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x}) \quad \text{in } K, \quad (2.6)$$

$$\underline{w}(\underline{x}) = \underline{G}(\underline{x}) \quad \text{on } \gamma^+ \cup \gamma^-, \quad (2.7)$$

or

$$\left. \begin{aligned} \underline{w}(\underline{x}) &= \underline{G}(\underline{x}) \quad \text{on } \gamma^+, \\ G(\underline{w}(\underline{x}))\underline{u}(\underline{x}) &= \underline{T}(\underline{x}) \quad \text{on } \gamma^-, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

or

$$G(\underline{w}(\underline{x}))\underline{u}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}) \quad \text{on } \gamma^+ \cup \gamma^-. \quad (2.9)$$

We now introduce the polar coordinates $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, set $r = e^t$ and use the complex Fourier transform

$$f(\tau)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\tau} f(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

These transforms (joining together we have the Mellin transform) yield $r \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow iz = \alpha$. The transformed boundary value problems (2.6), (2.7), (2.8) and (2.9) have the following form:

$$\begin{aligned} & \mu(\alpha^2 h_1 + h_1'') + (\lambda + \mu) \{ h_1 [(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha) \cos 2\omega + \frac{\alpha^2}{2}] + h_1' (1 - \alpha) \sin 2\omega \\ & + h_1'' (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega) + h_2 (\frac{\alpha^2}{2} - \alpha) \sin 2\omega \\ & + h_2' (\alpha - 1) \cos 2\omega + h_2'' (-\frac{1}{2} \sin 2\omega) \} = K_1(\alpha, \omega), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \mu(\alpha^2 h_2 + h_2'') + (\lambda + \mu) \{ h_2 [(-\frac{\alpha^2}{2} + \alpha) \cos 2\omega + \frac{\alpha^2}{2}] + h_2' (\alpha - 1) \sin 2\omega \\ & + h_2'' (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega) + h_1 (\frac{\alpha^2}{2} - \alpha) \sin 2\omega + h_1' (\alpha - 1) \cos 2\omega - h_1'' \frac{1}{2} \sin 2\omega \} \\ & = K_2(\alpha, \omega) \quad \text{for } 0 < \omega < \omega_0. \end{aligned}$$

$$\underline{h}(\alpha, \omega) = \underline{L}^\pm(\alpha, \omega) \quad ("-" \text{ for } \omega=0 \text{ and } "+" \text{ for } \omega=\omega_0), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \underline{h}(\alpha, \omega) = \underline{L}^+(\alpha, \omega), \quad h_1' + \alpha h_2 = -\frac{1}{\mu} \underline{L}_1^-(\alpha, \omega), \\ & \lambda(\alpha h_1 + h_2') + 2\mu h_2' = -\underline{L}_2^-(\alpha, \omega), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & h_1' + \alpha h_2 = \frac{1}{\mu} \underline{L}_1^-(\alpha, \omega), \quad \lambda(\alpha h_1 + h_2') + 2\mu h_2' = -\underline{L}_2^-(\alpha, \omega), \\ & \alpha h_1 (\lambda + \mu) \cos \omega_0 \sin \omega_0 + \alpha h_2 ((\lambda + \mu) \sin^2 \omega_0 - \mu) + h_1' (-(\lambda + \mu) \sin^2 \omega_0 - \mu) \\ & + h_2' (\lambda + \mu) \cos \omega_0 \sin \omega_0 = \underline{L}_1^+(\alpha, \omega), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & \alpha h_1 (\mu - (\lambda + \mu) \cos^2 \omega_0) + \alpha h_2 (-(\mu + \lambda) \cos \omega_0 \sin \omega_0) \\ & + h_1' (\lambda + \mu) \sin \omega_0 \cos \omega_0 + h_2' (-(\lambda + \mu) \cos^2 \omega_0 - \mu) = \underline{L}_2^+(\alpha, \omega), \end{aligned}$$

where $\underline{h} = \underline{h}(\alpha, \omega) = \mathcal{F}(\underline{\hat{w}})$ with $\underline{\hat{w}} = \underline{\hat{w}}(\tau, \omega) = \underline{w}(\underline{x})$,

$$\underline{K}(\alpha, \omega) = \mathcal{F}(r^2 \underline{\hat{f}}) \quad \text{with} \quad \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{f}}(\tau, \omega) = \underline{F}(\underline{x})$$

$$\underline{L}^\pm(\alpha, \omega) = \mathcal{F}(r \underline{\hat{t}}^\pm) \quad \text{with} \quad \underline{\hat{t}}^\pm = \underline{\hat{t}}^\pm(\tau, \omega) = \underline{T}^\pm(\underline{x}) \quad \text{in (2.13) or (2.14),}$$

$$\underline{L}^\pm(\alpha, \omega) = \mathcal{F}(\underline{\hat{g}}^\pm) \quad \text{with} \quad \underline{\hat{g}}^\pm = \underline{\hat{g}}^\pm(\tau, \omega) = \underline{G}^\pm(\underline{x}) \quad \text{in (2.12) or (2.13),}$$

$$\underline{T}^{\pm}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x})|_{\gamma^{\pm}}, \quad G^{\pm}(\underline{x}) = G(\underline{x})|_{\gamma^{\pm}},$$

and $\underline{h}' = \frac{\partial \underline{h}(\alpha, \omega)}{\partial \omega}$, $\underline{h}'' = \frac{\partial^2 \underline{h}(\alpha, \omega)}{\partial \omega^2}$. γ^+ denotes the side of K with $\omega = \omega_0$, γ^- denotes the side of K with $\omega = 0$.

3. The regularity theory in weighted Sobolev spaces

In section 2 the following questions occur: In which spaces is the complex Fourier transform (or the Mellin transform) well defined? What can we say about the inverse transforms? Which properties of the transformed problems (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) determine such properties as solvability and regularity of the problems (2.6), (2.7), (2.8), (2.9)?

The introduction of weighted Sobolev spaces is useful for answering these questions (see [3, 4, 8, 9]).

Let be

$$V^{k, P}(K, \beta) \quad (3.1)$$

the closure of the set $C_M^{\infty}(K) = \{v \in C^{\infty}(K), \text{ supp } v \text{ bounded, } \text{supp } v \cap M = \emptyset\}$ for $M = \{0\}$ with respect to the norm

$$\|v; V^{k, P}(K, \beta)\| = \left(\sum_{|\gamma| \leq k} \int_K |D^{\gamma} v(\underline{x})| P_{\gamma} P(\beta - k + |\gamma|) d\underline{x} \right)^{1/P} \quad (3.2)$$

and let be

$$V^{k-1/P, P}(\gamma^+, \beta) \text{ or } V^{k-1/P, P}(\gamma^-, \beta) \quad (3.3)$$

the spaces of traces, defined as the factor spaces

$V^{k, P}(K, \beta) / V^{k, P}(K, \beta, \gamma^{\pm})$, where $V^{k, P}(K, \beta, \gamma^{\pm})$ is the closure of $C_{\gamma^{\pm}}^{\infty}(K)$ with respect to the norm (3.2).

The space $V^{k, P}(\Omega, \beta)$ is defined analogously to $V^{k, P}(K, \beta)$.

Furthermore we use the notation $\bar{X} \times X = X^2$ for a space X .

We denote by $A(D_X)$ the matrix-differential operator of the system (2.6), that means

$$A(D_x) = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & (\lambda+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (\lambda+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & (\lambda+2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

and by $B(D_x)$ the boundary operators of (2.7) or (2.8) or (2.9); e.g. for (2.9) we have on γ^+ and γ^-

$$B^\pm(D_x) = \begin{pmatrix} (2\mu+\lambda)n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} n_1 + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} n_2 \\ \mu \frac{\partial}{\partial x_2} n_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} n_2 & \mu \frac{\partial}{\partial x_1} n_1 + (2\mu+\lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} n_2 \end{pmatrix}.$$

We consider the operator

$$\alpha(D_x) = \{A(D_x), B^\pm(D_x)\}: [V^{1+2, P(K, \beta)}]^2 \longrightarrow [V^{1, P(K, \beta)}]^2 \times [V^{1+2-m^+-1/p, P(\gamma^+, \beta)}]^2 \times [V^{1+2-m^--1/p, P(\gamma^-, \beta)}]^2, \quad (3.5)$$

where $1 < p < \infty$, $1 \geq 0$, m^+ and m^- are the orders of the corresponding boundary operators on γ^+ or γ^- . Furthermore we write for the system (2.11) shortly

$$A(\alpha, D_\omega) \underline{h}(\alpha, \omega) = \underline{K}(\alpha, \omega)$$

and for the boundary conditions (2.12), (2.13) or (2.14)

$$B^\pm(\alpha, D_\omega) \underline{h}(\alpha, \omega) = \underline{L}^\pm(\alpha, \omega) \quad \text{for } \omega = 0 \quad \text{and } \omega = \omega_0.$$

We consider the corresponding operator

$$\alpha(\alpha, D_\omega) = \{A(\alpha, D_\omega), B^\pm(\alpha, D_\omega)\}: [W^{2, 2}(I)]^2 \longrightarrow [L^2(I)]^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, \quad \text{where } I = (0, \omega_0). \quad (3.6)$$

The inverse Fourier transform is given by

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\hbar}^{\infty+i\hbar} e^{iz\tau} f(f)(z) dz, \quad (3.7)$$

where $\hbar = \text{Im } z = -\text{Re } \alpha$.

It is well defined for solutions of the boundary value problem $\alpha(\alpha, D_\omega) \underline{h}(\alpha, \omega) = \{\underline{K}(\alpha, \omega), \underline{L}^\pm(\alpha, \omega)\}$ provided no "eigenvalue" of

$\alpha(\alpha, D_\omega)$ is situated on the line $\operatorname{Re} \alpha = -h = -\beta - 2/p + 2 + 1$ (see [6] for one equation or [8] for a system). Let us give the definition of an eigenvalue of $\alpha(\alpha, D_\omega)$:

Definition 2: The complex number $\alpha = \alpha_0$ is an eigenvalue of $\alpha(\alpha, D_\omega)$ if there exists a nontrivial solution $\underline{e}^0(\alpha_0, \omega) \in [W^{2,2}(I)]^2$ of $\alpha(\alpha, D_\omega) \underline{e}(\alpha, \omega)|_{\alpha=\alpha_0} = 0$; $\underline{e}^0(\alpha_0, \omega)$ is an eigenvector function of $\alpha(\alpha, D_\omega)$ with respect to α_0 . The vector function $\underline{e}^1(\alpha_0, \omega)$ is an associate vector function to α_0 and $\underline{e}^0$ if

$$\frac{d\alpha(\alpha_0, D_\omega)}{d\alpha} \underline{e}^0(\alpha_0, \omega) + \alpha(\alpha_0, D_\omega) \underline{e}^1(\alpha_0, \omega) = 0. \quad (3.8)$$

The following solvability and regularity theorems are formulated in [8].

Theorem 1 (Solvability): The operator (3.5) is an isomorphism if and only if no eigenvalue of $\alpha(\alpha, D_\omega)$ lies on the line $\operatorname{Re} \alpha = -\beta - 2/p + 2 + 1$.

Theorem 2 (Regularity): Assume that the right hand side of (2.6) $\underline{F}(\underline{x})$ from $[V^{1,p}(K, \beta)]^2 \cap [V^{1',p'}(K, \beta')]^2$, the right hand side of (2.7) or (2.8) $\underline{G}(\underline{x})$ from $[V^{1+2-1/p,p}(\gamma^\pm, \beta)]^2 \cap [V^{1'+2-1/p',p'}(\gamma^\pm, \beta')]^2$ and the right hand side of (2.8) or (2.9) $\underline{T}(\underline{x})$ from $[V^{1+1-1/p,p}(\gamma^\pm, \beta)]^2 \cap [V^{1'+1-1/p',p'}(\gamma^\pm, \beta')]^2$. If no eigenvalues of $\alpha(\alpha, D_\omega)$ lie on the lines $\operatorname{Re} \alpha = -h = -\beta - 2/p + 1 + 2$ and $\operatorname{Re} \alpha = -h' = -\beta' - 2/p' + 1 + 2$ and if the eigenvalues $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ are situated in the strip $-h < \operatorname{Re} \alpha < -h'$, then the solution of (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) $\underline{w} \in [V^{1+2,p}(K, \beta)]^2$ allows the following expansion:

$$\underline{w}(r, \omega) = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\delta=1}^{I_\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_{\delta k \nu} \underline{u}_{k, \nu}^{(\delta)}(r, \omega) + \underline{v}(r, \omega), \quad (3.9)$$

where $\underline{v}(r, \omega) \in [V^{1'+2,p'}(K, \beta')]^2$, $I_\nu = \dim N(\alpha(\alpha_\nu, D_\omega)) = \dim \operatorname{span}\{\underline{e}_1^0(\alpha_\nu, \omega), \dots, \underline{e}_{I_\nu}^0(\alpha_\nu, \omega)\}$ is the number of the linearly independent eigenvector functions to α_ν ,

$$\varepsilon_{6\nu} = \begin{cases} 1 & \text{if an associate vector function exists} \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \quad \text{for } \alpha_\nu \text{ and } \underline{e}^0(\alpha_\nu, \omega),$$

c_{6kv} are constants and

$$\underline{u}_{k,\nu}^{(6)}(r, \omega) = r^{\alpha_\nu} \sum_{s=0}^k (\log r) \underline{s}_{\varepsilon_6}^{k-s}(\alpha_\nu, \omega) \quad (3.10)$$

are the so-called "singular" vector functions.

Remarks to the proof of Theorem 2: The structure of the singular vector functions can be explained by the following consideration ([4, 6]): The inverse Fourier transform of the right hand sides of (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) or shortly of (3.6) can be written as

$$\begin{aligned} \hat{\underline{u}}(\tau, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ih}^{\infty+ih} e^{iz\tau} \underline{\alpha}^{-1}(\alpha, D_\omega) [\underline{K}(\alpha, \omega), \underline{L}^\pm(\alpha, \omega)] dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-M+ih}^{-M+ih'} e^{iz\tau} \underline{\alpha}^{-1}(\alpha, D_\omega) [\underline{K}(\alpha, \omega), \underline{L}^\pm(\alpha, \omega)] dz \right. \\ &\quad + \int_{-M+ih'}^{M+ih'} e^{iz\tau} \underline{\alpha}^{-1}(\alpha, D_\omega) [\underline{K}(\alpha, \omega), \underline{L}^\pm(\alpha, \omega)] dz \\ &\quad \left. + \int_{M+ih'}^{M+ih} e^{iz\tau} \underline{\alpha}^{-1}(\alpha, D_\omega) [\underline{K}(\alpha, \omega), \underline{L}^\pm(\alpha, \omega)] dz \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \sum_{\nu=1}^N \text{Res}(e^{\alpha\tau} \underline{\alpha}^{-1}(\alpha, D_\omega) [\underline{K}(\alpha, \omega), \underline{L}^\pm(\alpha, \omega)] |_{\alpha=\alpha_\nu}). \end{aligned}$$

The first and third integrals tend to 0 for $M \rightarrow \infty$; the second integral yields $\underline{v}(r, \omega)$ and the calculation of the residues yields the singular terms. ■

We now go back to the problem (1.1), (1.2), (1.3). The following lemma can be proved analogously to that which is formulated in [6] for one equation:

Lemma 1: Let $\underline{u}$ be a solution of (1.1), (1.2), (1.3) for the right hand sides $\underline{f}$, $\underline{g}$ and $\underline{t}$. Assume $\underline{w} = \underline{u} \in [V^{1+2, P(K, \beta)}]^2$, $\underline{u} \in [V^{1, P(K, \beta)}]^2 \cap [V^{1', P'(K, \beta')}]^2$, $\underline{u} \in [V^{1+2-1/P, P(\gamma^\pm, \beta)}]^2 \cap [V^{1'+2-1/P', P'(\gamma^\pm, \beta')}]^2$, $\underline{u} \in [V^{1+1-1/P, P(\gamma^\pm, \beta)}]^2 \cap [V^{1'+1-1/P', P'(\gamma^\pm, \beta')}]^2$. If

$$0 \leq h - h' \leq 1 \quad (3.11)$$

or

$$h - h' > 1 \text{ and } R(\underline{x}) \text{ is the O-matrix,} \quad (3.12)$$

then the right hand sides of (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) satisfy the suppositions of Theorem 2, provided no eigenvalue of $\Omega(\alpha, D_\omega)$ lies on the lines $\operatorname{Re} \alpha = -h$ and $\operatorname{Re} \alpha = -h'$.

We get as corollary from Lemma 1

Theorem 3: Let $\underline{u}$ be a solution of the boundary value problem (1.1), (1.2), (1.3) for which the suppositions of Lemma 1 are satisfied. Then the expansion (3.9) near the singular point $\underline{Q}$ holds:

$$\eta^2 \underline{u}(r, \omega) = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\sigma=1}^{I_\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_{\sigma k \nu} \underline{u}_{k, \nu}^{(6)}(r, \omega) + \eta \underline{v}(r, \omega), \quad (3.13)$$

where $\eta \underline{v} \in [V^{1+2, p(K, \beta)}]^2$.

4. The regularity of the weak solutions

Let us consider the weak solution $\underline{u} \in V$ defined by (1.6). Again let be $\underline{Q}$ a singular point of $\partial\Omega$ and η the corresponding cut-off function defined by (2.1). We can use the results of section 3, if we can show that $\eta \underline{u} \in V \cap [V^{1+2, p(K, \beta)}]^2$ for appropriate right hand sides $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{t}$ and for some l , p and β .

Lemma 2: Let be $\underline{f} \in [L^2(\Omega, 1+\epsilon)]^2$, $\underline{g} = \underline{Q}$ and $\underline{t} = \underline{Q}$ on $\partial\Omega$ for a small real number $\epsilon > 0$. Then it holds for a weak solution $\underline{u} \in V$ of (1.6) that $\eta \underline{u} \in [V^{2, 2}(K, 1+\epsilon)]^2$.

Proof: We follow the ideas of V.A. Kondrat'ev [3]. We consider a sequence of domains Ω_k , $k = 1, 2, \dots$, where $\Omega_k = \Omega \cap R_k$, $R_k = \{\underline{x} : \delta/2^{k+1} \leq |\underline{x}| \leq \delta/2^k\}$. For the real number $\delta = 2\epsilon$ we consider a cut-off function $\hat{\eta}$ defined as in (2.1). We have $\bigcup_k \Omega_k = K_0 \subset K$. The usual regularity theorems yield for $|\underline{v}| = 2$:

$$\int_{\Omega_k} |D^2 \underline{u}|^2 d\underline{x} \leq C \left[\int_{\Omega_{k-1} \cup \Omega_k \cup \Omega_{k+1}} |\underline{f}|^2 d\underline{x} + \int_{\Omega_{k-1} \cup \Omega_k \cup \Omega_{k+1}} r^{-4} |\underline{u}|^2 d\underline{x} \right], \quad (4.1)$$

where $|D^{\gamma} \underline{u}|^2 = |D^{\gamma} u_1|^2 + |D^{\gamma} u_2|^2$. We multiply (4.1) by $(\frac{\delta}{2k})^{2(1+\varepsilon)}$ and estimate (4.1)

$$\int_{\Omega_k} r^{2(1+\varepsilon)} |D^{\gamma} \underline{u}|^2 d\underline{x} \leq C \left(\int_{\Omega_{k-1} \cup \Omega_k \cup \Omega_{k+1}} r^{2(1+\varepsilon)} |\underline{f}|^2 d\underline{x} + \int_{\Omega_{k-1} \cup \Omega_k \cup \Omega_{k+1}} r^{2(-1+\varepsilon)} |\underline{u}|^2 d\underline{x} \right). \quad (4.2)$$

Summing with respect to k we get

$$\int_{K_0} r^{2(1+\varepsilon)} |D^{\gamma} \underline{u}|^2 d\underline{x} \leq C \left(\int_{K_0} r^{2(1+\varepsilon)} |\underline{f}|^2 d\underline{x} + \int_{K_0} r^{2(-1+\varepsilon)} |\underline{u}|^2 d\underline{x} \right). \quad (4.3)$$

Let us consider the term

$$\int_{K_0} r^{2(-1+\varepsilon)} |\underline{u}|^2 d\underline{x} = \int_{K_0} r^{2(-1+\varepsilon)} |\underline{u}|^2 d\underline{x}. \quad (4.4)$$

We write (4.4) in polar coordinates and use the Hardy inequality:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 t^{\varepsilon'-2} dt \leq (2/|\varepsilon'-1|)^2 \int_0^{\infty} |f'(t)|^2 t^{\varepsilon'} dt$$

for $\varepsilon' > 1$ and $f(\infty) = 0$.

We have for $\tilde{u}(r, \omega) = \underline{u}(\underline{x})$

$$\begin{aligned} \int_{K_0} r^{-2+2\varepsilon+1} |\hat{n} \tilde{u}|^2 dr d\omega &\leq \int_0^{\omega_0} \int_0^{\infty} r^{-2+2\varepsilon+1} |\hat{n} \tilde{u}|^2 dr d\omega \\ &\leq \int_0^{\omega_0} (2/2\varepsilon)^2 \int_0^{\infty} r^{2\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial r} \hat{n} \tilde{u} \right|^2 r dr d\omega \\ &\leq C \int \int_{\Omega_{\text{supp} \hat{n}}} r^{2\varepsilon} |\underline{u}|^2 + r^{2\varepsilon} (|\text{grad } u_1|^2 + |\text{grad } u_2|^2) d\underline{x} \\ &\leq C \|\underline{u}\|_{[W^{1,2}(\Omega)]^2}^2. \end{aligned}$$

We now consider the cut-off function η for $\delta = \delta/2$. Then for $|\gamma| = 2$ it holds

$$\int_{K_0} \int r^{2(1+\epsilon)} |D^\gamma \eta \underline{u}|^2 dx \leq C \sum_{|\gamma'| \leq 2} \int_{K_0} \int r^{2(1+\epsilon)} |D^{\gamma'} \underline{u}|^2 dx,$$

and therefore $\eta \underline{u} \in [V^{2,2}(K, 1+\epsilon)]^2$. ■

Remark: Lemma 2 works too if $\eta \underline{g} \in [V^{2-1/2,2}(\gamma^\pm, 1+\epsilon)]^2$ and $\eta \underline{t} \in [V^{1/2,2}(\gamma^\pm, 1+\epsilon)]^2$.

The following theorem follows immediately from Lemma 2.

Theorem 4: Let $\underline{u} \in V$ be a weak solution of (1.6). Let $\epsilon > 0$ such a small real number that no eigenvalues of $\mathcal{A}(\alpha, D_\omega)$ lie on the line $\operatorname{Re} \alpha = -\epsilon$. Furthermore we assume that no eigenvalues of $\mathcal{A}(\alpha, D_\omega)$ lie on the line $\operatorname{Re} \alpha = 1$. We assume for the right hand sides of (1.1), (1.2), (1.3) that $\eta \underline{f} \in [L^2(K)]^2$, $\eta \underline{g} \in [V^{2-1/2,2}(\gamma^\pm, 0)]^2$, and $\eta \underline{t} \in [V^{1/2,2}(\gamma^\pm, 0)]^2$. Let $R(\underline{x})$ be the 0-matrix. Then $\underline{u}$ allows the expansion (3.13) with $\eta \underline{v} \in [W^{2,2}(\Omega)]^2$.

Remarks to the proof: Theorem 3 yields that $\eta \underline{v} \in [V^{2,2}(K, 0)]^2$ and this means that $\eta \underline{v} \in [W^{2,2}(\Omega)]^2$. The condition " $R(\underline{x})$ is the 0-matrix" is unnecessary if the line $\operatorname{Re} \alpha = 0$ is free of eigenvalues of $\mathcal{A}(\alpha, D_\omega)$. In this case we have $\eta \underline{u} \in [V^{2,2}(K, 1)]^2$ and $0 \leq h-h' \leq 1$. ■

5. The calculation of the singular functions

Our goal is to calculate the functions $\underline{u}_{k,v}^{(6)}(r, \omega)$ in the expansion (3.13). Formula (3.10) shows that we need the knowledge of the eigenvalues α_v and of the corresponding eigenvector functions and associate vector functions of $\mathcal{A}(\alpha, D_\omega)$. We take the following actions: We derive the general solution of the system (2.11) with $K_1(\alpha, \omega) = K_2(\alpha, \omega) = 0$. The fundamental system consists of four linearly independent solutions, consequently, we determine the four arbitrary constants in the general solution in such a way that nontrivial solutions exist which satisfy the homogeneous boundary conditions (2.12), (2.13) or (2.14).

This leads to the calculation of the zeros of some determinates.

Let us start: Every vector function $\underline{w} = (w_1, w_2)^T$ which is solution of the system (2.6) with $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$ satisfies the biharmonic equation in the following manner: $\Delta^2 w_1 = 0$, $\Delta^2 w_2 = 0$ in K . Therefore we can use the investigations for the biharmonic operator [6]. Thus we get for the solution $\underline{h}$ of the homogeneous system (2.11):

for $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} h(\alpha, \omega) = & C_1(\alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha \omega \\ -\sin \alpha \omega \end{pmatrix} + C_2(\alpha) \begin{pmatrix} \sin \alpha \omega \\ \cos \alpha \omega \end{pmatrix} \\ & + C_3(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\alpha-2)\omega \\ -\sin(\alpha-2)\omega - A \sin \alpha \omega \end{pmatrix} + C_4(\alpha) \begin{pmatrix} \sin(\alpha-2)\omega \\ \cos(\alpha-2)\omega + A \cos \alpha \omega \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\text{where } A = \frac{2(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha},$$

for $\alpha = 0$

$$h(0, \omega) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2C + \sin 2\omega \\ -\cos 2\omega \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \cos 2\omega \\ -2C\omega + \sin 2\omega \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\text{where } C = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}. \quad (5.3)$$

5.1 The Dirichlet conditions

We consider the Dirichlet condition $\underline{h}(\alpha, \omega) = 0$ for $\omega = 0$ and $\omega = \omega_0$. There are nontrivial solutions (5.1) or (5.2) if the following determinates vanish:

for $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} D(\alpha) = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+A \\ \cos \alpha \omega_0 & \sin \alpha \omega_0 & \cos(\alpha-2)\omega_0 & \sin(\alpha-2)\omega_0 \\ -\sin \alpha \omega_0 & \cos \alpha \omega_0 & -\sin(\alpha-2)\omega_0 - A \sin \alpha \omega_0 & \cos(\alpha-2)\omega_0 + A \cos \alpha \omega_0 \end{vmatrix} \\ = & 4 \sin^2 \alpha \omega_0 - A^2 \sin^2 \omega_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Consequently, the eigenvalues of $\mathbf{A}(\alpha, D_\omega)$ are the zeros of the equation

$$\sin^2 \alpha \omega_0 = \frac{\alpha^2 G^2}{(G-2)^2} \sin^2 \omega_0, \text{ where } G = \frac{-(\lambda+\mu)}{\mu} < 0 \text{ (compare [1])},$$

for $\alpha = 0$

$$\hat{D}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2C\omega_0 + \sin 2\omega_0 & \cos 2\omega_0 & 1 & 0 \\ -\cos 2\omega_0 & -2C\omega_0 + \sin 2\omega_0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2\cos 2\omega_0 - 4C^2\omega_0^2 = 0.$$

Consequently, $\sin^2 \omega_0 = C^2\omega_0^2$ and this equation is only satisfied if $\omega_0 = 0$. Therefore $\alpha = 0$ is no eigenvalue of $\mathbf{A}(\alpha, D_\omega)$.

Figure 2 and 3 show the distribution of the eigenvalues of $\mathbf{A}(\alpha, D_\omega)$ for the materials lead ($G \approx -10$) and concrete ($G \approx -1.5$) for $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 3$. The dotted lines indicate real eigenvalues, the full lines indicate the real parts of the complex eigenvalues $\alpha_v = \operatorname{Re} \alpha_v + i \operatorname{Im} \alpha_v$ and $\bar{\alpha}_v = \operatorname{Re} \alpha_v - i \operatorname{Im} \alpha_v$. The corresponding eigenvector functions $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega), \dots, \underline{e}_I^0(\alpha_v, \omega)$ are described in the following lemma.

Lemma 3: If α_v is a zero of (5.4) for the angle ω_0 , $\omega_0 \neq \pi$, $\omega_0 \neq 2\pi$, then $I_v = 1$ and $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) = C_3(\alpha_v) \underline{y}_3(\alpha_v, \omega) + C_4(\alpha_v) \underline{y}_4(\alpha_v, \omega)$ is an eigenvector function, where

$$\begin{aligned} \underline{y}_3(\alpha_v, \omega) &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha_v \omega + \cos(\alpha_v - 2)\omega \\ (1 - A_v) \sin \alpha_v \omega - \sin(\alpha_v - 2)\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{31}(\alpha_v, \omega) \\ y_{32}(\alpha_v, \omega) \end{pmatrix}, \\ \underline{y}_4(\alpha_v, \omega) &= \begin{pmatrix} -(1 + A_v) \sin \alpha_v \omega + \sin(\alpha_v - 2)\omega \\ -\cos \alpha_v \omega + \cos(\alpha_v - 2)\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{41}(\alpha_v, \omega) \\ y_{42}(\alpha_v, \omega) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} C_3(\alpha_v) &= -\cos \alpha_v \omega_0 + \cos(\alpha_v - 2)\omega_0, \\ C_4(\alpha_v) &= -(1 - A_v) \sin \alpha_v \omega_0 + \sin(\alpha_v - 2)\omega_0 \text{ and} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$A_v = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)\alpha_v}.$$

If $\omega_0 = \pi$ or $\omega_0 = 2\pi$ then $\alpha_v = \alpha_v(\pi) = \nu$ or $\alpha_v = \alpha_v(2\pi) = \nu/2$, $\nu = 1, 2, \dots$. In this case we have $I_v = 2$ and

$$\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) = \gamma_3(\alpha_v, \omega), \quad \underline{e}_2^0(\alpha_v, \omega) = \gamma_4(\alpha_v, \omega) \quad (5.8)$$

are two linearly independent eigenvector functions.

Proof: We calculate a nontrivial solution $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ of $\mathbf{A}(\alpha_v, D_\omega)\underline{h}(\alpha_v, \omega) = \underline{0}$, where $\underline{h}(\alpha_v, \omega)$ is given by (5.1).

$(B^-(\alpha_v, D_\omega)\underline{h}(\alpha_v, \omega) = \underline{0} \quad (\omega = 0)$ implies that $C_1(\alpha_v) = -C_3(\alpha_v)$ and $C_2(\alpha_v) = -C_4(1+A_v)$. The condition $(B^+(\alpha_v, D_\omega)\underline{h}(\alpha_v, \omega) = \underline{0} \quad (\omega = \omega_0)$ leads to the system of equations for $\underline{C}(\alpha_v)$

$$M(\alpha_v, \omega_0)\underline{C}(\alpha_v) = \underline{0}, \quad (5.9)$$

where

$$M(\alpha_v, \omega_0) = \begin{pmatrix} \gamma_{31}(\alpha_v, \omega_0) & \gamma_{41}(\alpha_v, \omega_0) \\ \gamma_{32}(\alpha_v, \omega_0) & \gamma_{42}(\alpha_v, \omega_0) \end{pmatrix}$$

and $\underline{C}(\alpha_v) = (C_3(\alpha_v), C_4(\alpha_v))^T$. Since the determinate of $M(\alpha_v, \omega_0)$ is equal to $D(\alpha_v)$ in (5.4) and therefore vanishes, we can choose $C_3(\alpha_v)$ and $C_4(\alpha_v)$ as in (5.7). Thus we get for $\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)$, given by (5.6), (consider α instead of α_v) that

$$B^+(\alpha, D_\omega)\underline{e}_1^0(\alpha, \omega) = M(\alpha, \omega_0)\underline{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} D(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \text{for } \alpha = \alpha_v. \quad (5.10)$$

If $\omega_0 = \pi$ or $\omega_0 = 2\pi$, then the rank of the matrix belonging to the determinate of (5.4) is equal to two and consequently we have $I_v = 4 - 2 = 2$. We can choose $C_3(\alpha_v) = 1$, $C_4(\alpha_v) = 0$ and $C_3(\alpha_v) = 0$, $C_4(\alpha_v) = 1$ and get (5.8). ■

We now have to investigate, whether associate functions occur. M.A. Najmark [10] has proved some results about the connection between the multiplicity of the zeros of $D(\alpha)$ and the existence of associate functions for boundary value problems for ordinary differential equations. These results are also valid for our boundary value problem (3.6), namely for $\mathbf{A}(\alpha, D_\omega)\underline{h}(\alpha, \omega) = \underline{0}$. Let $m(\alpha_v)$ be the multiplicity of the zero α_v of $D(\alpha)$ (formula (5.4)).

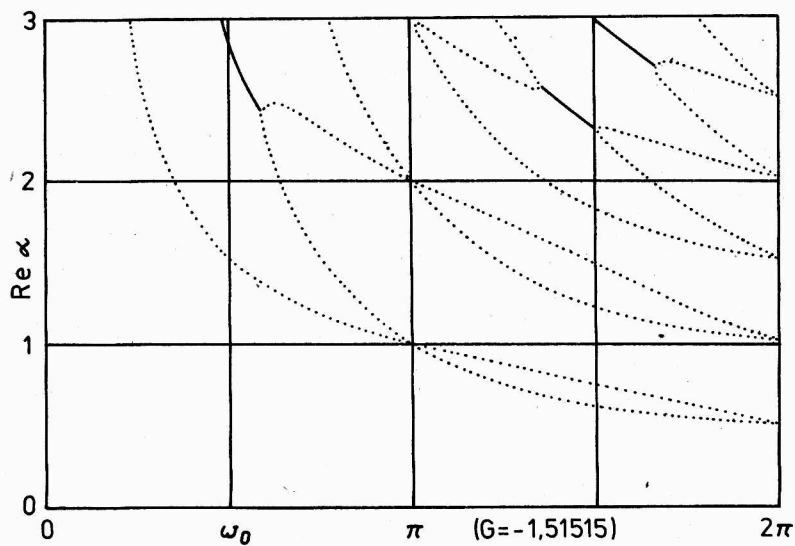


Fig. 2.

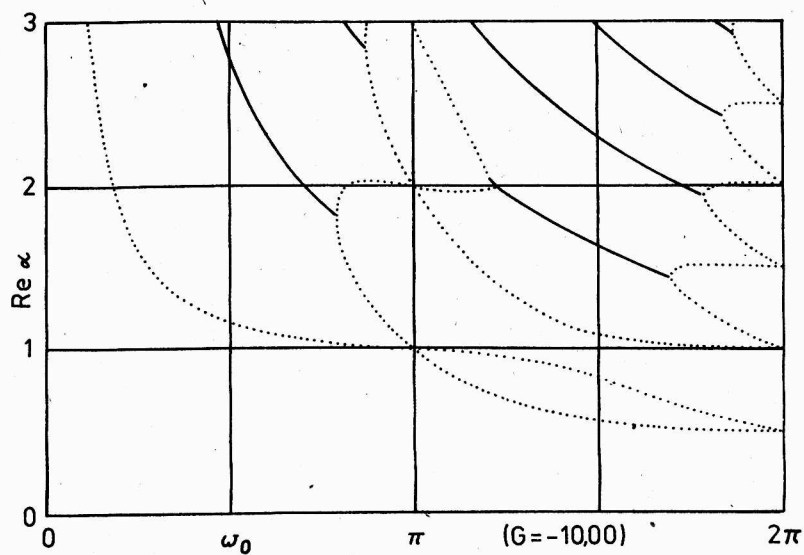


Fig. 3

Lemma 4: It holds that $I_\nu \leq \sum_{\delta=1}^{I_\nu} (\delta_{6\nu} + 1) = m(\alpha_\nu)$.

Corollary: There are only associate functions for the eigenvalue α_ν , if $m(\alpha_\nu) = 2$ and $I_\nu = 1$. If $\omega_0 = \pi$ or $\omega_0 = 2\pi$ then no associate functions exist.

Lemma 5 describes, when $m(\alpha_\nu) = 2$ and how the corresponding associate functions are to calculate.

Lemma 5: If

$$\sin \alpha_\nu \omega_0 = \tan \alpha_\nu \omega_0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{\sin \omega_0}{\omega_0} \right)^2 = \left(\frac{G-2}{G} \cos \alpha_\nu \omega_0 \right)^2, \quad (5.11)$$

$\sin \alpha_\nu \omega_0 \neq 0$, $\cos \alpha_\nu \omega_0 \neq 0$, then $m(\alpha_\nu) = 2$. The associate functions to the eigenvalue α_ν are

$$\underline{e}_1^1(\alpha_\nu, \omega) = \frac{d}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) \big|_{\alpha=\alpha_\nu},$$

where $\underline{e}_1^0(\alpha_\nu, \omega)$ is given by (5.6) with α instead of α_ν .

Proof: The equations (5.11) are valid if and only if $D(\alpha_\nu) = 0$ and $\frac{dD(\alpha)}{d\alpha} \big|_{\alpha=\alpha_\nu} = 0$ for the angle ω_0 . The associate functions $\underline{e}_1^1(\alpha_\nu, \omega)$ are solutions of the boundary value problem

$$A(\alpha_\nu, D_\omega) \underline{e}_1^1(\alpha_\nu, \omega) + \frac{dA(\alpha_\nu, D_\omega)}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha_\nu, \omega) = 0,$$

that means for $\alpha = \alpha_\nu$

$$A(\alpha, D_\omega) \underline{e}_1^1(\alpha, \omega) + \frac{dA(\alpha, D_\omega)}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) = 0 \quad \text{for } 0 < \omega < \omega_0 \quad (5.13)$$

and

$$\begin{aligned} B^\pm(\alpha, D_\omega) \underline{e}_1^1(\alpha, \omega) + 0 &= 0 & "+" & \text{ for } \omega = \omega_0, \\ & & "-" & \text{ for } \omega = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Since $A(\alpha, D_\omega) \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) = 0$ for all α from a neighborhood of α_ν , we get there

$$\frac{d}{d\alpha} [A(\alpha, D_\omega) \underline{e}_1^0(\alpha, \omega)] = \frac{dA(\alpha, D_\omega)}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) + A(\alpha, D_\omega) \frac{d\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)}{d\alpha} = 0.$$

Therefore the equation (5.13) is satisfied for

$$\underline{e}_1^1(\alpha, \omega) = \frac{d\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)}{d\alpha} \text{ at the point } \alpha = \alpha_v \text{ especially.}$$

Now we consider the equation (5.14). We have again $B^-(\alpha, D_\omega)\underline{e}_1^0(\alpha, \omega) = \underline{0}$ for all α from a neighbourhood of α_v and consequently

$$\frac{dB^-(\alpha, D_\omega)}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) + B^-(\alpha, D_\omega) \frac{d\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)}{d\alpha} = \underline{0} \text{ for } \alpha = \alpha_v.$$

Furthermore (5.10) implies

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} [B^+(\alpha, D_\omega)\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)]|_{\alpha=\alpha_v} &= \frac{dB^+(\alpha, D_\omega)}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha, \omega)|_{\alpha=\alpha_v} \\ &+ B^+(\alpha, D_\omega) \frac{d\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)}{d\alpha} |_{\alpha=\alpha_v} \\ &= \frac{d}{d\alpha} [M(\alpha, \omega_0)\underline{C}(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_v} \\ &= \frac{d}{d\alpha} (D(\alpha), 0)^T |_{\alpha=\alpha_v} \\ &= \left(\frac{dD(\alpha)}{d\alpha}, 0 \right)^T |_{\alpha=\alpha_v} = \underline{0}. \end{aligned}$$

Remarks: (i) The eigenvalues α_v with $m(\alpha_v) = 2$ and $I_v = 1$ are those points in Fig. 2 and 3, where the full curve-pieces of the complex eigenvalues start or end. In Fig. 4 there is demonstrated how these eigenvalues (we have $\operatorname{Re} \alpha = \alpha_v$ in this case) depend on different materials, $-1 \geq G > -\infty$, and on the angle ω_0 , that means $\alpha_v = \alpha_v(G, \omega_0)$. The numbering and the marked direction of the curves describe this connection.

(ii) The associate functions, which arise if $m(\alpha_v) = 2$ and $I_v = 1$, are not uniquely determined. The multiplication by constants and the addition of an eigenvector-function (5.6) lead to other associate functions. In the following we will see that this fact does not play a role.

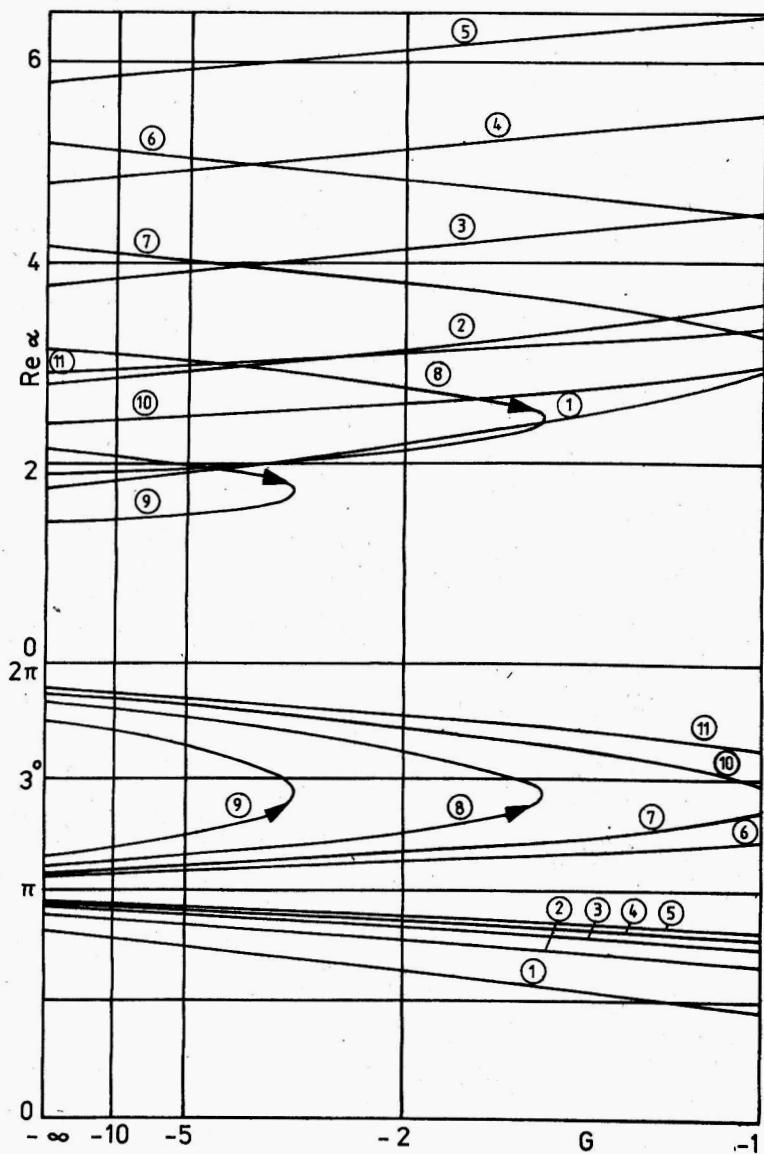


Fig. 4

Let us summarize the results:

Theorem 5: The singular functions (3.10) of the weak solution $u \in V$ of the Dirichlet problem have the following form:

- (i) If $\omega_0 \neq \pi$, $\omega_0 \neq 2\pi$ and $\alpha_v = \alpha_v(G, \omega_0) \neq 0$ is a simple zero of $D(\alpha)$ (formula (5.4)), then only the singular function

$$u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) = r^{\alpha_v} \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) \quad (5.15)$$

arises, where $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ is given by (5.6).

- (ii) If $\omega_0 \neq \pi$, $\omega_0 \neq 2\pi$ and $\alpha_v = \alpha_v(G, \omega_0) \neq 0$ is a double zero of $D(\alpha)$, then the singular functions

$$\begin{aligned} u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) &= r^{\alpha_v} \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) \quad \text{and} \\ u_{1,v}^{(1)}(r, \omega) &= r^{\alpha_v} (\underline{e}_1^1(\alpha_v, \omega) + (\log r) \dot{\underline{e}}_1^0(\alpha_v, \omega)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

occur, where $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ is given by (5.6) and $\underline{e}_1^1(\alpha_v, \omega)$ by (5.12).

- (iii) If $\omega_0 = \pi$, then $\alpha_v(G, \pi) = \alpha_v(\pi) = v$, $v = 1, 2, \dots$, and no "proper" singular functions exist.

- (iv) If $\omega_0 = 2\pi$ then $\alpha_v(G, 2\pi) = \alpha_v(2\pi) = v/2$, $v = 1, 2, \dots$, and

$$\begin{aligned} u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) &= r^{v/2} \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega), \\ u_{0,v}^{(2)}(r, \omega) &= r^{v/2} \underline{e}_2^0(\alpha_v, \omega) \end{aligned} \quad (5.17)$$

are the singular functions. Here $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ and $\underline{e}_2^0(\alpha_v, \omega)$ are given by (5.8).

Proof: We have only to look for $\omega_0 = \pi$. In this case formula (5.8) yields the eigenvector functions $\underline{e}_i^0(\alpha_v, \omega)$, $i = 1, 2$. Since $u_{0,v}^{(i)}(r, \omega) = r \underline{e}_i^0(\alpha_v, \omega)$ are smooth vector functions, we can say no "proper" singular functions occur. ■

5.2 The mixed boundary conditions

The solutions $h(\alpha, \omega)$, given by formula (5.1), have to satisfy the boundary conditions (2.12) and (2.13), namely

$$h(\alpha, \omega) = 0 \quad \text{for } \omega = \omega_0 \quad \text{and}$$

$$h_1' + \alpha h_2 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda(\alpha h_1 + h_2') + 2\mu h_2' = 0 \quad \text{for } \omega = 0.$$

If $\alpha \neq 0$, then there are nontrivial solutions if

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha \omega_0 & \sin \alpha \omega_0 & \cos(\alpha-2)\omega_0 & \sin(\alpha-2)\omega_0 \\ -\sin \alpha \omega_0 & \cos \alpha \omega_0 & -\sin(\alpha-2)\omega_0 & -\cos(\alpha-2)\omega_0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & \alpha A + 2\alpha - 2 \\ -2\mu \alpha & 0 & (\lambda+2\mu)(2-\alpha A) - 2\mu \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 16\mu \alpha^2 \sin^2 \omega_0 - 16\mu \frac{(\lambda+2\mu)^2}{(\lambda+\mu)^2} + \sin^2 \alpha \omega_0 \frac{16\mu(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)} = 0. \quad (5.18)$$

The eigenvalues α_v of $\mathbf{Q}(\alpha, D_\omega)$ are the zeros of the equation

$$\sin^2 \alpha \omega_0 = \frac{-\alpha^2 \sin^2 \omega_0 (\lambda+\mu)^2 + (\lambda+2\mu)^2}{(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)}.$$

For $\alpha = 0$ the solution (5.2) yields

$$\hat{D}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2C\omega_0 + \sin 2\omega_0 & \cos 2\omega_0 \\ 0 & 1 & -\cos 2\omega_0 & -2C\omega_0 + \sin 2\omega_0 \\ 0 & 0 & 2C + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-C)(\lambda+2\mu) \end{vmatrix}$$

$$= 4(1-C^2)(\lambda+2\mu) \neq 0.$$

Therefore $\alpha = 0$ is no eigenvalue of $\mathbf{Q}(\alpha, D_\omega)$.

Fig. 5 and 6 show the distribution of the eigenvalues of $\mathbf{Q}(\alpha, D_\omega)$ for $G = -10$ and $G \approx -1.5$ for $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 3$. Again the dotted lines indicate real eigenvalues, the full lines indicate the real parts of the complex eigenvalues α_v .

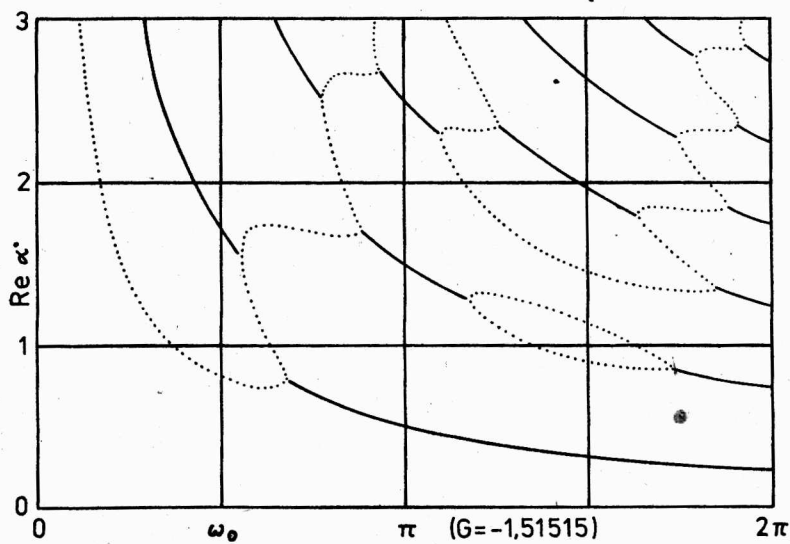


Fig. 5

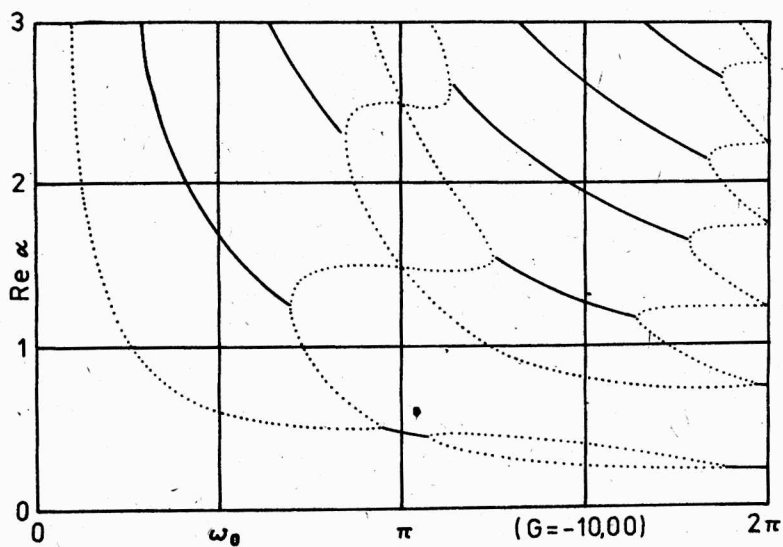


Fig. 6

Lemma 6: If $\alpha_v \doteq \alpha_v(G, \omega_0)$ is a zero of (5.18) then $I_v = 1$ and $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) = C_3(\alpha_v) \underline{y}_3(\alpha_v, \omega) + C_4(\alpha_v) \underline{y}_4(\alpha_v, \omega)$ is an eigenvector function where

$$\begin{aligned} \underline{y}_3(\alpha_v, \omega) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{-2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \cos \alpha_v \omega_0 + \cos(\alpha_v - 2)\omega_0 \\ \left(\frac{2\mu}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) (-\sin \alpha_v \omega_0) - \sin(\alpha_v - 2)\omega_0 \end{pmatrix}, \\ \underline{y}_4(\alpha_v, \omega) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{-2\mu}{\alpha_v(\lambda+\mu)} - 1 \right) \sin \alpha_v \omega_0 + \sin(\alpha_v - 2)\omega_0 \\ \left(\frac{2(\lambda+2\mu)}{\alpha_v(\lambda+\mu)} - 1 \right) \cos \alpha_v \omega_0 + \cos(\alpha_v - 2)\omega_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} C_3(\alpha_v) &= \left(\frac{2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \cos \alpha_v \omega_0 + \cos(\alpha_v - 2)\omega_0, \\ C_4(\alpha_v) &= \left(\frac{2\mu}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \sin \alpha_v \omega_0 + \sin(\alpha_v - 2)\omega_0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Proof: The rank of the matrix belonging to the determinate (5.18) is equal to three. Consequently $I_v = 4 - 3 = 1$. The ideas of the proof are the same ones as of the proof of Lemma 3. We consider $\underline{h}(\alpha_v, \omega)$, given by (5.1), and determine the constants $C_i(\alpha_v)$, $i = 1, \dots, 4$, in such a way that $B^\pm(\alpha_v, D_\omega) \underline{h}(\alpha_v, \omega) = \underline{0}$. The condition $B^-(\alpha_v, D_\omega)$ implies that

$$C_1(\alpha_v) = C_3(\alpha_v) \left(\frac{-2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \quad \text{and} \quad C_2(\alpha_v) = C_4(\alpha_v) \left(\frac{-2\mu}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right).$$

This leads to (5.19).

The condition $B^+ \underline{h}(\alpha_v, \omega) = \underline{0}$ yields $C_3(\alpha_v)$ and $C_4(\alpha_v)$ as in (5.20) and it holds that

$$B^+(\alpha, D_\omega) \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) = (D(\alpha), 0)^T = \underline{0} \quad \text{for} \quad \alpha = \alpha_v \quad \blacksquare \quad (5.21)$$

We now look for the associate functions.

Lemma 7:

- (i) If $m(\alpha_v) = 2$, then associate functions exist.
- (ii) The equations

$$\begin{aligned} \alpha_v \omega_0 \sin \alpha_v \omega_0 \cos \alpha_v \omega_0 &= \sin^2 \alpha_v \omega_0 - \frac{(G-1)^2}{G(G-2)} \\ \frac{\sin^2 \omega_0}{\omega_0^2} &= - \frac{\sin \alpha_v \omega_0 \cos \alpha_v \omega_0}{\alpha_v \omega_0} \left(\frac{G-2}{G} \right), \quad G = \frac{-(\lambda+\mu)}{\mu}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

are sufficient and necessary for $m(\alpha_v) = 2$.

(iii) Associate functions to the eigenvalues of $\alpha(\alpha_p, D_\omega)$ are

$$\underline{e}_1^1(\alpha_p, \omega) = \frac{d}{d\alpha} \underline{e}_1^0(\alpha, \omega) \Big|_{\alpha=\alpha_p}, \quad (5.23)$$

where $\underline{e}_1^0(\alpha, \omega)$ is given by (5.19) with α instead of α_p .

Proof: The assertion (i) follows immediately from Lemma 4. The equations (5.22) are satisfied if and only if $D(\alpha_p) = D'(\alpha_p) = 0$, where $D(\alpha)$ is given by (5.18). The proof of assertion (iii) is analogous to that of Lemma 5. ■

Remark: The eigenvalues α_p with $m(\alpha_p) = 2$ are again those points in Fig. 5 and 6, where the full curve-pieces of the complex eigenvalues meet the dotted curves of the real eigenvalues.

Summarizing our results we get the following theorem.

Theorem 6: The singular functions (3.10) of the weak solution $\underline{u} \in V$ of the mixed boundary value problem have the following form:

(i) If $\alpha_p = \alpha_p(G, \omega_0)$ is a simple zero of $D(\alpha)$ (formula (5.18)), then only the singular functions

$$\underline{u}_{0,p}^{(1)}(r, \omega) = r^{\alpha_p} \underline{e}_1^0(\alpha_p, \omega) \quad (5.24)$$

arise, where $\underline{e}_1^0(\alpha_p, \omega)$ is given by (5.19).

(ii) If $\alpha_p = \alpha_p(G, \omega_0)$ is a double zero of $D(\alpha)$, then the singular functions

$$\begin{aligned} \underline{u}_{0,p}^{(1)}(r, \omega) &= r^{\alpha_p} \underline{e}_1^0(\alpha_p, \omega) \quad \text{and} \\ \underline{u}_{1,p}^{(1)}(r, \omega) &= r^{\alpha_p} (\underline{e}_1^1(\alpha_p, \omega) + (\log r) \underline{e}_1^0(\alpha_p, \omega)) \end{aligned} \quad (5.25)$$

occur, where $\underline{e}_1^0(\alpha_p, \omega)$ is given by (5.19) and $\underline{e}_1^1(\alpha_p, \omega)$ by (5.23).

5.3 The Neumann conditions

In this case we consider the boundary conditions (2.14) for $\underline{L}^\pm(\alpha, \omega) = 0$. If $\alpha \neq 0$, then there are nontrivial solutions $\underline{h}(\alpha, \omega)$ (see (5.1)) under the conditions that

$$D(\alpha) = |a_{ij}(\alpha)| = 32\mu^3 \alpha^2 (\alpha^2 \sin^2 \omega_0 - \sin^2 \alpha \omega_0) = 0. \quad (5.26)$$

Here there are

$$\begin{aligned} a_{11}(\alpha) &= 0, & a_{31}(\alpha) &= 2\alpha\mu \sin \omega_0, \\ a_{12}(\alpha) &= 2\alpha, & a_{32}(\alpha) &= -2\alpha\mu \cos \omega_0, \\ a_{13}(\alpha) &= 0, & a_{33}(\alpha) &= 2\mu [\alpha \sin(\alpha-2)\omega_0 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu} \sin \alpha \omega_0], \\ a_{14}(\alpha) &= \alpha A + 2\alpha - 2, & a_{34}(\alpha) &= -2\mu [\alpha \cos(\alpha-2)\omega_0 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu} \cos \alpha \omega_0], \\ a_{21}(\alpha) &= -2\alpha\mu, & a_{41}(\alpha) &= 2\alpha\mu \cos \omega_0, \\ a_{22}(\alpha) &= 0, & a_{42}(\alpha) &= 2\alpha\mu \sin \omega_0, \\ a_{23}(\alpha) &= (\lambda+2\mu)(2-\alpha A) - 2\alpha\mu, \\ a_{24}(\alpha) &= 0, \\ a_{43}(\alpha) &= 2\mu [\alpha \cos(\alpha-2)\omega_0 + (2 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}) \cos \alpha \omega_0], \\ a_{44}(\alpha) &= 2\mu [\alpha \sin(\alpha-2)\omega_0 + (2 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}) \sin \alpha \omega_0], \quad \text{and} \\ A = A(\alpha) &= \frac{2(\lambda+3\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha}. \end{aligned}$$

For $\alpha = 0$ the solutions (5.2) yield that the corresponding determinate $D(0) = 0$ for all ω_0 . Since $I_y = 2$, we get the linearly independent regular eigenvector functions

$$e_1^0(0, \omega) = (1, 0)^T \quad \text{and} \quad e_2^0(0, \omega) = (0, 1)^T. \quad (5.27)$$

Fig. 7 shows the distribution of the eigenvalues of $Q(\alpha, D_\omega)$ for $0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq 3$. It is taken from the paper [11]. Again the dotted lines indicate the real eigenvalues, the full lines indicate the real parts of the complex eigenvalues.

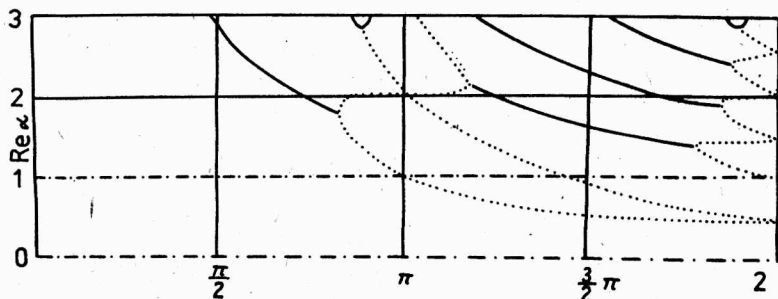


Fig. 7

Lemma 8:

- (i) Assume that $\alpha_v = \alpha_v(\omega_0)$ is a zero of $D(\alpha)$, (5.26), and $\alpha_v \neq 0$, $\alpha_v \neq 1$, $\omega_0 \neq \pi$, $\omega_0 \neq 2\pi$. Then we have $I_v = 1$ and

$$\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) = C_3(\alpha_v) \underline{y}_3(\alpha_v, \omega) + C_4(\alpha_v) \underline{y}_4(\alpha_v, \omega) \quad (5.28)$$

is an eigenvector function, where

$$\begin{aligned} \underline{y}_3(\alpha_v, \omega) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{-2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \cos \alpha_v \omega_0 + \cos(\alpha_v - 2)\omega_0 \\ \left(\frac{-2\mu}{(\lambda+\mu)\alpha_v} + 1 \right) \sin \alpha_v \omega_0 - \sin(\alpha_v - 2)\omega_0 \end{pmatrix}, \\ \underline{y}_4(\alpha_v, \omega) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{-2\mu}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \sin \alpha_v \omega_0 + \sin(\alpha_v - 2)\omega_0 \\ \left(\frac{2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right) \cos \alpha_v \omega_0 + \cos(\alpha_v - 2)\omega_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

and

$$C_3(\alpha_v) = \mu[(2 - \alpha_v) \sin \alpha_v \omega_0 + \alpha_v \sin(\alpha_v - 2)\omega_0], \quad (5.29)$$

$$C_4(\alpha_v) = \alpha_v(\cos \alpha_v \omega_0 - \cos(\alpha_v - 2)\omega_0).$$

- (ii) The number $\alpha_v = \alpha_v(\omega_0) = 1$ is for all $\omega_0 \in (0, 2\pi]$ an eigenvalue of $\mathcal{A}(\alpha, D_\omega)$ and the corresponding eigenvector function is

$$\underline{e}_1^0(1, \omega) = \begin{pmatrix} \sin \omega \\ -\cos \omega \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

- (iii) If $\omega_0 = \pi$ or $\omega_0 = 2\pi$, then $\alpha_v(\pi) = v$, $\alpha_v(2\pi) = v/2$, $v = 1, 2, \dots$, and $I_v = 2$. The eigenvector functions are for $\alpha_v = 1$ besides (5.30)

$$\underline{e}_2^0(1, \omega) = \underline{y}_3(1, \omega), \quad (5.31)$$

for $\alpha_v \neq 1$, $v = 1, 2, 3, \dots$,

$$\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega) = \underline{y}_4(\alpha_v, \omega), \quad \underline{e}_2^0(\alpha_v, \omega) = \underline{y}_3(\alpha_v, \omega). \quad (5.32)$$

Proof:

(i) We consider $\underline{h}(\alpha_v, \omega)$, given by (5.1), and determine the constants $C_i(\alpha_v)$, $i = 1, 2, \dots, 4$, in such a way that $B^{\pm}(\alpha_v, D_v)\underline{h} = \underline{0}$. The condition $B^{-}(\alpha_v, D_v)$ implies that

$$C_1(\alpha_v) = C_3(\alpha_v) \left[\frac{-2(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right] \quad \text{and} \quad C_2(\alpha_v) = C_4(\alpha_v) \left[\frac{-2\mu}{(\lambda+\mu)\alpha_v} - 1 \right].$$

Thus we get formula (5.28). The condition $B^{+}(\alpha_v, D_v)\underline{h}(\alpha_v, \omega) = \underline{0}$ yields the equations (5.29) and it holds that

$$B^{+}(\alpha, D_v)\underline{g}_1^0(\alpha, \omega) = (D(\alpha), 0)^T = \underline{0} \quad \text{for } \alpha = \alpha_v. \quad (5.33)$$

(ii) Analogously to part (i) of the proof we get (5.28) with the unknown coefficients $C_3 = C_3(1)$ and $C_4 = C_4(1)$. The boundary condition $B^{+}(1, \omega)\underline{g}_1^0(1, \omega) = \underline{0}$ yields

$$\begin{pmatrix} -4\sin\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \underline{0}. \quad (5.34)$$

Choosing $C_3 = 0$ and $C_4 = -\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}$ we get (5.30).

(iii) For $\omega_0 = \pi$ or $\omega_0 = 2\pi$ the matrix in (5.34) is the 0-matrix. Therefore we can take $C_3 = 1$, $C_4 = 0$ or $C_3 = 0$, $C_4 = 1$ in (5.28). ■

Lemma 9:

(i) If $\alpha_v \neq 1$, $I_v = 1$, and $m(\alpha_v) = 2$, then associate functions exist.

(ii) The equations $\alpha_v \omega_0 = \tan \alpha_v \omega_0$ and $\cos^2 \alpha_v \omega_0 = \frac{\sin^2 \omega_0}{\omega_0^2}$,

$\alpha_v \neq 1$, are sufficient and necessary for $m(\alpha_v) = 2$.

(iii) Associate functions to these eigenvalues of $\mathbf{A}(\alpha, D_v)$ are

$$\underline{g}_1^1(\alpha_v, \omega) = \frac{d}{d\alpha} \underline{g}_1^0(\alpha, \omega) \Big|_{\alpha=\alpha_v}, \quad (5.35)$$

where $\underline{g}_1^0(\alpha, \omega)$ is given by (5.28) with α instead α_v .

For the proof compare Lemma 5 and Lemma 7.

Remark: The eigenvalues $\alpha_v \neq 1$ with $m(\alpha_v) = 2$ and $I_v = 1$ are those points in Fig. 7, where the full curve-pieces of the real parts of the complex eigenvalues meet the dotted lines of the real eigenvalues.

We formulate our results.

Theorem 7: The singular functions of the weak solutions $u \in V/N$ of the Neumann problem have the following form:

- (i) If $\omega_0 \neq \pi$, $\omega_0 \neq 2\pi$, and $\alpha_v = \alpha_v(\omega_0)$ is a simple zero of $D(\alpha)$ (formula (5.26)), then only the singular functions $u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) = r^{\alpha_v} \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ arise, where $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ is given by (5.28).
- (ii) If $\omega_0 \neq \pi$, $\omega_0 \neq 2\pi$, and α_v is a double zero of $D(\alpha)$, then the singular functions $u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) = r^{\alpha_v} \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ and $u_{1,v}^{(1)}(r, \omega) = r^{\alpha_v} (\underline{e}_1^1(\alpha_v, \omega) + (\log r) \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega))$ occur, where $\underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$ is given by (5.28) and $\underline{e}_1^1(\alpha_v, \omega)$ by (5.35).
- (iii) If $\omega_0 = \pi$, then no "proper" singular functions exist.
- (iv) If $\omega_0 = 2\pi$, then it follows from (5.32) that $u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) = r^{v/2} \underline{e}_1^0(\alpha_v, \omega)$, $u_{0,v}^{(2)}(r, \omega) = r^{v/2} \underline{e}_2^0(\alpha_v, \omega)$.

Remark: The singular functions $u_{0,v}^{(i)}(r, \omega) = \underline{e}_i^0(0, \omega)$, $i = 1, 2$, for $\alpha_v = 0$ (see (5.27)) and $u_{0,v}^{(1)}(r, \omega) = r(\sin \omega, -\cos \omega)^T = (x_2, -x_1)^T$ for $\alpha_v = 1$ (see (5.30)) are a basis of the space N (see (1.7)).

References

1. Grisvard, P.: Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d'emploi. EDF Bull. Direction Etudes Rech. Sér. C Math. Inform., No 1, 1986, 21-59
2. Fichera, G.: Existence theorems in elasticity: Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. In: S. Flügge and C. Truesdell (Eds.): Handbuch der Physik. Vol. 6a/2, 347-424, Berlin 1972
3. Kondrat'ev, V.A.: Boundary value problems with conical or angular points (Russ.). Trudy Moskov. Mat. Obsc. 16, 209-292 (1967)
4. Kondrat'ev, V.A., and Olejnik, O.A.: Boundary value problems for partial differential equations in non-smooth domains (Russ.). Uspechi Mat. Nauk 38, 2(230), 3-76 (1983)
5. Košelev, A.I.: Regularity of the solutions of quasilinear elliptic systems (Russ.). Uspechi Mat. Nauk 23, 4(202), 3-49 (1978)

6. Kufner, A., and Sändig, A.-M.: Some Applications of Weighted Sobolev Spaces. Teubner-Texte zur Mathematik 100, Leipzig 1987
7. Ladyženskaja, O.A., and Ural'ceva, N.N.: Linear and Quasilinear Elliptic Equations (Russ.). Moscow 1973
8. Maz'ja, V.G., and Flamenevskij, B.A.: About the coefficients in the asymptotics of the solutions of elliptic boundary value problems in domains with conical points (Russ.). Math. Nachr. 76, 29-60 (1977)
9. Maz'ja, V.G., and Flamenevskij, B.A.: The first boundary value problem for classical equations of the mathematical physics in domains with pieces of smooth boundaries (Russ.). Z. Anal. Anwendungen 2(4), 335-359 (1983)
10. Najmark, M.A.: Linear Differential Operators (Russ.). Moscow 1969
11. Melzer, H., und Rannacher, R.: Spannungskonzentrationen in Eckpunkten der Kirchhoffschen Platte. Preprint Nr. 270, SFB 72, Univ. Bonn 1979
12. Nečas, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague et Paris 1967

received: May 9, 1988

Authors:

Dr. Anna-Margarete Sändig and stud. math. Uwe Richter
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitätsplatz 1
 Rostock
 DDR-2500

Dr. Rainer Sändig
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Physik
 Universitätsplatz 1
 Rostock
 DDR-2500

Kurt Frischmuth

On locally D-optimal experimental design1. Introduction

If one is planning an experiment it is desirable to gain maximal information by a possibly low cost. In particular, if one is going to estimate the parameters of a nonlinear growth-function it is meaningful to choose the measuring points and frequencies in an appropriate manner. For a given overall number of measurements it is useful for several reasons to have a large value of the determinant of the Fisher-information matrix (cf. [1]-[3]). This so-called D-criterion proved to yield in most cases "good" experimental designs (cf. [4]). Nevertheless, one has to be aware of the drawbacks of this approach. First of all, the unknown parameters appear in the criterion, hence one has to provide some a priori estimates. Because of this we should rather use the termini "local D-criterion" and "local D-optimal design". We drop the attribute for brevity. Further the computation time for the maximization may be so expensive, that it becomes more economic to measure twice and not to plan at all. For other criterions these difficulties occur as well (cf. [3]).

However, our goal is to overcome the problems with computing the maximum of the criterion. We succeeded to find a way for reducing the dimension of the optimization from the size of the experiment to the number of unknown parameters. For an important class of growth functions with 3 parameters the remaining optimization can be solved by elegant geometric considerations. By that way it is possible to compute relative maxima of the local D-criterion very quickly. For most growth functions it could not be proved yet whether this relative maximum is always an absolute one. For exponential regression it seems to be so, but for general situations there are counter-examples. We considered a necessary condition for an absolute maximum. This condition enabled us to construct the above counter-examples as well as an example for which the relative maximum mentioned is the absolute one. It is interesting that even if that relative

maximum is not an absolute one, the value of the local D-criterion is not worse than the absolute maximum divided by 4.5. This implies that other (expensive) numerical methods, that yield the absolute maximum, provide not more than a reduction of design size by 1.7.

It should be stressed that we considered only so-called concrete designs, i.e., we restricted ourselves to integer solutions for the frequencies. It is a simple task to modify our results for discrete designs. Analytical considerations on optimum discrete designs under several criterions are contained in [5].

2. Separation of the integer and the continuous optimization

Let us assume a growth-function

$$G: [x_1, x_u] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^k,$$

$$(x, \vartheta) \longrightarrow G(x, \vartheta),$$

depending on the instant x from the time-interval $[x_1(\text{lower bound}), x_u(\text{upper bound})]$ and additionally on the parameters to be estimated. We denote the derivatives with respect to the parameters by

$$z(x) := \nabla_{\vartheta} G(x, \vartheta_0), \quad z: [x_1, x_u] \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

with ϑ_0 being a fixed a priori estimate for the wanted parameter vector ϑ .

The size of the experiment to be planned is denoted by n and is assumed to be not less than k . Now we introduce a matrix-valued function

$$V: [x_1, x_u]^n \longrightarrow \mathbb{R}^{k \times n},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (z(x_1) \ z(x_2) \ \dots \ z(x_n)).$$

Finally, the function to be maximized is given by

$$f(x) = \det(V(x) V^T(x)),$$

$$f: [x_1, x_u]^n \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

The arguments x are referred to as experimental designs of the size n . If the cardinality of the set $\{x_1, \dots, x_n\}$ is 1, then x is called a 1-point-design. The set

$$\{x_1, \dots, x_n\} =: \text{Sp}(x) = \{x_{\text{sp}_1}, \dots, x_{\text{sp}_1}\}$$

together with 1 integers $n_1, \dots, n_1$ characterizes an experimental design up to a permutation of components. Since f is

symmetric, it is sufficient to find the support $Sp(x)$ and the frequencies $n_1, \dots, n_l$ represented by an ordered table

$$\begin{array}{c|ccc|c} x_{sp_1} & & \dots & & x_{sp_l} \\ \hline n_1 & & \dots & & n_l \end{array},$$

$$x_1 \leq x_{sp_1} < x_{sp_2} < \dots < x_{sp_l} \leq x_u,$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_l = n.$$

Definition: If $f(x^*) = \max f(x)$, $x \in [x_1, x_u]^n$, then x^* is called a (locally D-)optimal experimental design (at $\vartheta = \vartheta_0$).

As a first step we look for optimal designs in a subset of all designs, namely in the set of all k -point designs. To this end we recollect ([6]) that

$$f(x) = |VV^T| = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \begin{vmatrix} v_{1i_1} & v_{1i_2} & \dots & v_{1i_k} \\ v_{2i_1} & v_{2i_2} & \dots & v_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ki_1} & v_{ki_2} & \dots & v_{ki_k} \end{vmatrix}^2.$$

Here each column of V depends on some component of x . Since there are just k different components of x all non-vanishing determinants on the right hand side must be equal; their number is the product of the frequencies $n_1 n_2 \dots n_l$. Thus we state

Lemma 1: For k -point designs the following equation is true:

$$f(x) = n_1 n_2 \dots n_k \det(z(x_{sp_1}) \dots z(x_{sp_k}))^2$$

where the n_i 's are the frequencies and the x_{sp_i} 's are the support points of x .

We conclude from this that the optimum k -point design may be found by maximizing the product $\prod_{i=1}^k n_i$ under the constraint $\sum_{i=1}^k n_i = n$ and maximizing the square of the determinant

$$\det(z(x_{sp_1}) \dots z(x_{sp_k}))$$

independently under the constraints $x_{sp_i} \in [x_1, x_u]$ for $i = 1, 2, \dots, k$.

It is not necessary to assume that $x_{sp_i} \neq x_{sp_j}$ for $i \neq j$, because $f(x)$ vanishes in such situations.

First let us treat the integer problem, of course avoiding differential calculus. We prove the following

Lemma 2: If $\prod_{i=1}^k n_i$ takes its maximum under the constraint

$$\sum_{i=1}^k n_i = n,$$

then the n_i 's are "almost equal", i.e.

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq k} \{ |n_i - n_j| \} \leq 1.$$

Proof: Assume conversely that $n_{j_2} - n_{j_1} \geq 2$ for some permutation $j \in S(n)$, then

$$(n_{j_1} + 1)(n_{j_2} - 1) \prod_{i=3}^k n_{j_i} = \prod_{i=1}^k n_{j_i} + (n_{j_2} - n_{j_1} - 1) \prod_{i=3}^k n_{j_i} > \prod_{i=1}^k n_{j_i}$$

$$\text{or } \prod_{i=3}^k n_{j_i} = 0.$$

This contradicts the maximality of $\prod_{i=1}^k n_i$.

From the Lemma 2 we infer that the optimal frequencies are given

$$\text{by } n_i = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \epsilon_i \text{ with } \epsilon_i \in \{0, 1\}, i=1, \dots, k, \text{ and}$$

$$\sum_{i=1}^k \epsilon_i = n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Consequently, there are $\binom{k}{n-k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$ different optimal k point designs for given k and n . Only if $k|n$ the optimal design may be uniquely defined.

Remark: If we allow for discrete designs, the attribute "almost" in Lemma 2 has to be dropped. Then the frequencies for the unique optimal design are exactly equal.

Now we introduce the function

$$\varphi(x_{sp_1}, \dots, x_{sp_k}) = \det(z(x_{sp_1}) \dots z(x_{sp_k}))^2$$

and denote its maximum on $[x_1, x_u]^k$ by $\varphi_{\max}$. Further we denote the maximum of f on k -point designs by f_{kpm} and the overall maximum of f on $[x_1, x_u]^n$ by $f_{\max}$. Then we obtain obviously

$$f_{\max} \geq f_{kpm} \geq \left[\frac{n}{k} \right]^k \varphi_{\max}.$$

If we want f to reach a threshold f_0 then it is sufficient to take

$$n = k \left(\left\lceil \sqrt[k]{\frac{f_0}{\varphi_{\max}}} \right\rceil + 1 \right).$$

Hence the support $sp(x)$ as well as the value $\varphi_{\max}$ can be calculated independently of the size n by solving a low-dimensional optimization problem

$$\varphi(x_{sp_1}, \dots, x_{sp_k}) = \text{Max ! on } [x_1, x_u]^k.$$

3. Special cases

In general the above problem can be easily solved by available computer routines. Here we will focus on situations in which further reduction by analytical means is possible. To this end we make the assumption :

(A) Let $k = 3$ and the graph of the function

$$z : [x_1, x_u] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

is a regular curve contained in some plane ϵ with $0 \notin \epsilon$. In ϵ there exists a basis $\{b_1, b_2\}$ such that the b_2 -component of z is a smooth convex function of the b_1 -component of z , i.e.,

$$z(x) = b_0 + z_1(x)b_1 + z_2(x)b_2,$$

$$z_2(x) = g(z_1(x))$$

with $g : [z_1(x_1), z_1(x_u)] \longrightarrow \mathbb{R}$ being a convex and nonlinear C^1 function.

Now we turn to

Theorem 1: Providing (A) holds and $x_{sp_1} < x_{sp_2} < x_{sp_3}$, then $\varphi(x_{sp_1}, x_{sp_2}, x_{sp_3})$ is a maximum iff $x_{sp_1} = x_1$, $x_{sp_3} = x_u$ and

$$g'(z_1(x_{sp_2})) = \frac{z_2(x_1) - z_2(x_u)}{z_1(x_1) - z_1(x_u)}.$$

Furthermore, the partial derivatives satisfy

$$\begin{aligned}\varphi_{,1}(x_1, x_m, x_u) &< 0, \\ \varphi_{,3}(x_1, x_m, x_u) &> 0, \\ \varphi_{,22}(x_1, x_m, x_u) &\leq 0\end{aligned}$$

for each $x_m := x_{sp_2}$ fulfilling the above equality. If g is strictly convex then x_m is unique.

Proof: Let us consider the tetrahedron with the vertices O , $z(x_{sp_i})$, $i=1,2,3$. Its volume is given by

$$V = 1/6 \sqrt{\varphi(x_{sp})}.$$

On the other hand, we have

$$V = 1/3 \operatorname{dist}(O, \varepsilon) A(z(x_{sp_1}), z(x_{sp_2}), z(x_{sp_3}))$$

with $\operatorname{dist}(O, \varepsilon)$ - the Euklidean distance between the origin and the plane ε (positive due to $0 \notin \varepsilon$)

and

$A(z(x_{sp_1}), z(x_{sp_2}), z(x_{sp_3}))$ - the area of the triangle with the vertices $z(x_{sp_i})$, $i=1,2,3$.

From the above we infer that $\varphi(x_{sp})$ is a maximum iff the area of a certain triangle is.

Hence, we obtained the equivalent but much more convenient problem of maximizing the area A of a triangle under the constraint that the vertices lie on the graph of a convex function g from an interval into the real axis.

The convexity of g yields immediately that A is an increasing function of the abscissa of the right-most vertex if the two leftmost vertices are kept constant. Moreover, the slope of that function is not less than $d \sin \alpha$ with

$$d = \operatorname{dist}(z(x_{sp_3}), \overline{z(x_{sp_1})z(x_{sp_2})}) \text{ and } \alpha = \angle(b_2, \overline{z(x_1)z(x_2)}).$$

Analogously, A is a decreasing function of the leftmost abscissa with a negative upper bound for the slope, the remaining abscissae are again assumed to be fixed.

This, together with $\varphi \sim A^2$ and the chain rule, yields the conditions

$$x_{sp_1} = x_1, x_{sp_3} = x_u, \varphi_{,x_1} < 0, \varphi_{,x_u} > 0.$$

Now, the remaining abscissa is an inner point of the interval, hence a necessary condition for the maximality of the area may be given in terms of the derivative of the triangle's heights. This yields the expression for g' and the uniqueness in the strictly convex case.

Now, we observe that the sufficiency follows from the argument that φ is continuous on the compact set $[x_1, x_u]^3$, hence it takes on its supremum. But, on the other hand, the value of φ is the same for all points satisfying the necessary conditions. This ends the proof.

Let us consider now growth-functions G of the type

$$G(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + F(x, \beta, \gamma).$$

The definition of z yields

$$z(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ F_{\beta}(x, \beta, \gamma) \\ F_{\gamma}(x, \beta, \gamma) \end{pmatrix}.$$

Hence we put $b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

and $\varepsilon = b_0 + \text{span}\{b_1, b_2\}$.

The assumption A holds if the following relations are valid for each $x \in (x_1, x_u)$:

$F_{x\beta} \neq 0$ and $\frac{F_{x\gamma}}{F_{x\beta}}$ is monotonous. (The derivatives exist and satisfy the conditions.)

Especially for $F(x, \beta, \gamma) = \beta\omega(\gamma x)$ this requirements read

$$\gamma\omega'(\gamma x) \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\omega''(\gamma x)}{\omega'(\gamma x)} \quad \text{is monotonous.}$$

Example 1: For exponential regression we have

$$\omega(\gamma x) = e^{\delta x}.$$

The above conditions turn out to be satisfied. The function g can be expressed explicitly as follows:

$$g(t) = \frac{\beta}{\delta} t \ln t.$$

As support point we obtain after some transformations:

$$x_m = \frac{x_u e^{\delta x_u} - x_l e^{\delta x_l}}{e^{\delta x_u} - e^{\delta x_l}} - \frac{1}{\delta}.$$

Unfortunately, not always we may express x_m by a formula, as shows us

Example 2: $\omega = \tanh$

Our assumptions are satisfied whenever $O((x_1, x_u))$.

The instant x_m has to be calculated from

$$x_m \tanh(\gamma x_m) = \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{2} \frac{x_u / (\cosh^2(\gamma x_u)) - x_1 / (\cosh^2(\gamma x_1))}{\tanh(\gamma x_u) - \tanh(\gamma x_1)}.$$

Of course, this nonlinear equation can be solved quickly even by a pocket calculator - but not explicitly.

Example 3: In the case of quadratic regression

$G(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ we get

$$z(x) = \left(\frac{x}{x^2} \right)^1, \quad t = x, \quad g(t) = t^2, \quad g'(t_m) = x_u + x_1.$$

Hence we obtain again the well known result $x_m = \frac{x_1 + x_u}{2}$.

Regarding the case $G(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta \omega(\gamma x)$ the differential equation

$$x \frac{\omega''(\gamma x)}{\omega'(\gamma x)} = \text{const}$$

is of some interest. For its solutions $\omega(x) = \begin{cases} A \ln x + C \\ A x^B + C \end{cases}$ the

above method fails. For all other monotonous functions we may choose a suitable interval $[x_1, x_u]$, so that x_m can be determined in the above way. It is evident that the failure of the method for the mentioned functions is connected with the dependence of the growth parameters. Consequently, those cases are not of interest.

It should be mentioned that the idea of maximizing $\varphi(x_{sp_1}, \dots, x_{sp_k})$ by maximizing the measure of a polyhedron with vertices lying on the graph of a convex function may be useful for other dimensions $k \neq 3$ as well. As an example with $k = 2$ we consider the so-called Michaelis-Menton-function

$$G(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Here one obtains the problem of choosing two points on an arc of the normal parabola in such a way that the area of the triangle formed by those two points and the origin takes a maximum. The solution of that problem is geometrically obvious and implies the nice result, that the optimal support of a 2-point design consists of x_1 and the point x_m for which

$$G(x_m, \alpha, \beta) = 1/2 G(x_1, \alpha, \beta),$$

provided x_1 is sufficiently large. Otherwise we have just the ends of the observation interval in the support.

4. Designs with larger support

Up to now we considered only designs of minimal support size. Under assumption (A) we succeeded in finding the locally D-optimal one, but we don't know whether it is possible to obtain better designs by enlarging the number of support points. A general answer to this question can not be given here, but some results should be mentioned. Since our main interest is in exponential regression, in the sequel we fix $k=3$. First we will prove the following

Theorem 2: The optimal D-value for designs with an arbitrary support cannot be better than 4.5 times the optimum for 3-point designs, i.e.

$$f_{\max} < 4.5 f_{3pm}.$$

The minimal size m for which $f_{\max}$ will be greater than f_{3pm} calculated for a given size n is greater than $n/1.7$.

Proof: The formula for determinants on page 53 Lemma 1 yields immediately

$$f_{\max} \leq \binom{m}{3} \varphi_{\max}.$$

For $n \geq 3$ and arbitrary m we have

$$\left[\frac{n+1}{3} \right]^2 (n - 2 \left[\frac{n+1}{3} \right]) > \frac{1}{27} (n-1)^3,$$

$$\binom{m}{3} < \frac{1}{6} (m-1)^3.$$

Since $f_{3pm} = \left[\frac{n+1}{3}\right](n-2\left[\frac{n+1}{3}\right])\varphi_{\max}$ we conclude $(m-1)^3 > \frac{2}{9}(n-1)^3$ and hence

$$m > \sqrt[3]{\frac{2}{9}n + (1 - \sqrt[3]{\frac{2}{9}})} > n/1.7.$$

On the other hand, for $n \geq 3$ the following inequality is true

$$\binom{n}{3} < \left[\frac{n+1}{3}\right]^2 (n - 2\left[\frac{n+1}{3}\right]) \frac{27}{6}.$$

Consequently, $f_{\max} < 4.5 f_{3pm}$. This completes the proof.

Remark: It should be pointed out that the above estimates are very pessimistic. I could not construct any example with $f_{\max} > 2f_{3pm}$. For

$$G(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta e^{\gamma x}, \quad \gamma < 0,$$

and

$$G(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha e^{-\exp(\beta x - \gamma)}$$

the factor is assumed to be equal to 1, i.e. $f_{\max} = f_{3pm}$ (cf. [3]).

Now we make use of the assumption (A) once more.

Lemma 3: The points x_1 and x_u belong to the support of the optimal design.

The proof runs like that of Theorem 1 applied to each of the terms in the sum - which now may differ from each other.

Let us now introduce a family of functions

$$\begin{aligned} \psi_i(u, v) = & \sum_{\substack{j < k \\ j \neq i+k}} \det(z(x_j) \quad z(x_k) \quad b_0 + ub_1 + vb_2)^2 \\ & + \sum_{\substack{j < k < l \\ j, k, l \neq i}} \det(z(x_j) \quad z(x_k) \quad z(x_l))^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Substituting $u = z_1(x_i)$, $v = z_2(x_i) = g(z_1(x_i))$ we obtain

$$\psi_i(u, v) = f(x).$$

Note that the functions ψ_i are quadratic semi-definite forms in (u, v) . ψ_i is positive definite iff the points $\{z(x_j) : j+i\}$ are not collinear. Otherwise x is of no interest because it cannot yield a better f than f_{3pm} . Similar functions have been used in [7] for the formulation of a sufficient criterion for $f_{\max} = f_{kpm}$.

Lemma 4: If x is an optimal design then

$$\epsilon_i := \{ (u, v) : \psi_i(u, v) \leq f(x) \}$$

is an ellipse for each i .

Theorem 3: If (A) holds and x is an optimal design then

$$a) \{x_1, x_u\} \subset \text{sp}(x),$$

$$b) \{(t, g(t)) : t \in [z_1(x_1), z_1(x_u)]\} = \bigcap_{i=1}^n \epsilon_i.$$

As immediate consequences of this criterion we can state the following corollaries.

Corollary 1: Let (A) be valid and x be optimal. If $I \subset [x_1, x_u]$ is such that $z|_I$ is a straight line then $\text{sp}(x) \cap \text{int } I = \emptyset$.

Corollary 2: We cancel the smoothness of g in (A) and assume g to be continuous in $[x_1, x_u]$, nonlinear, but linear in $[x_1, x_m]$ as well as in $[x_m, x_u]$ for some $x_m \in (x_1, x_u)$. Then

$$a) f_{\max} = f_{3pm} \text{ and}$$

$$b) f_{\max} = f(\overbrace{x_1 \dots x_1}^{[\frac{n+1}{3}]}, \overbrace{x_m \dots x_m}^{[\frac{n+1}{3}]}, \overbrace{x_u \dots x_u}^{n-2[\frac{n+1}{3}]})$$

In order to show that the equality $f_{\max} = f_{3pm}$ in general doesn't hold let us consider the special case $n = 4$. Let z be

continuous, lie in a plane $\epsilon \neq 0$ and be linear in $[x_1, x_1]$, $[x_1, x_2]$ and $[x_2, x_u]$. If

$$\overline{z(x_1)z(x_2)} \parallel \overline{z(x_1)z(x_u)}$$

then $x = (x_1, x_1, x_2, x_u)$ is optimal. Furthermore, if $x_1 \neq x_2$ then $f_{\max} > f_{3pm}$.

Remark 1: From the above we see that the curvature of z in the neighbourhood of x_m is essential for $f_{\max}$ to be greater or equal to f_{3pm} . Certain ellipses state indifferent cases between large curvature ($f_{\max} = f_{3pm}$) and small curvature ($f_{\max} > f_{3pm}$).

Remark 2: The examples with piecewise linear z seem to be artificial, but they occur naturally if one takes C^1 -splines of powers and logarithms as growth-functions. For an instance

$$\omega(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2\sqrt{x} - 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$G(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta\omega(\gamma x), \quad \gamma > 0$$

fits the assumptions of Corollary 1.

Finally, we want to make the observation from Remark 1 above more precise. By calculating the eigenvalues of a matrix of second order derivatives we are able to give a sufficient criterion for f_{3pm} to be a relative optimum of the function f on the cube $[x_1, x_u]^n$. We remain it to the sceptical readers to do the cumbersome algebra and present here only the result. To this end the notions are introduced

$$a = \varphi_{,22}(x_1, x_m, x_u),$$

$$b_u = 2[\det(z(x_m) \ z(x_m) \ z(x_u)),_1]^2,$$

$$b_l = 2[\det(z(x_m) \ z(x_m) \ z(x_1)),_1]^2.$$

Now we can formulate

Theorem 4: Let $\varphi : [x_1, x_u]^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \det(z(x_1) \ z(x_2) \ z(x_3))^2$$

takes a relative maximum in (x_1, x_m, x_u) , and the derivatives satisfy

$$\varphi_{,1}(x_1, x_m, x_u) < 0$$

and

$$\varphi_{,2}(x_1, x_m, x_u) > 0.$$

An experimental design x with $sp(x) = \{x_1, x_m, x_u\}$ and the

corresponding frequencies n_1, n_m, n_u is relatively optimal, if

$$\lambda := n_u n_1 a + n_m (n_1 b_1 + n_u b_u) < 0.$$

Remark: In the case of exponential regression with negative γ it is possible to show that this inequality is valid for the previously constructed relative maximum. Then the eigenvalue depends only on the ratio $\gamma/(x_u - x_1)$ and, for all n with $3|n$ or large enough, it can be proved to be negative by asymptotic expansion for arguments near zero, by limit considerations for large negative values and by numerical evaluations for the remaining case. Indeed, we have

$$a = 2\gamma e^{\gamma x_m} [e^{\gamma(\gamma - \gamma x_m - 2)} + \gamma x_m + 2] [(1 - x_m)e^{\gamma(1 + x_m)} - e^{\gamma + x_m} e^{\gamma x_m}],$$

$$b_u = 2e^{2\gamma x_m} [e^{\gamma(1 - \gamma x_m - \gamma)} - e^{\gamma x_m}]^2,$$

$$b_1 = 2e^{2\gamma x_m} [1 + \gamma x_m - e^{\gamma x_m}]^2$$

with $x_m = e^{\gamma}/(e^{\gamma} - 1) - 1/\gamma$. Using $|n_i - n_j| \leq 1$ we obtain

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \lambda(\gamma) = -2e^{-2}(1 - 2e^{-2})\frac{n^2}{9} (+ O(n) \text{ if } 3 \nmid n)$$

and

$$\lambda(\gamma) \sim -\frac{2}{9}n^2\gamma^2 e^{1/\gamma} - 1/2 (+ O(n) \text{ if } 3 \nmid n)$$

for γ near zero.

5. Final comment

The above considerations affirm that designs of minimal size of the support yield good values of the local D-criterion and that the ends of the observation interval should belong to the support. Further it turned out that other choices of frequencies to the optimal support give us relative maxima, too. Moreover those maxima are more peak-like. On the other hand, we don't know, whether there are further maxima. But if there are such maxima, then they cannot be much better than the 3-point maximum. Problems of this kind are called frustrated. In [8], [9] we discuss algorithms for the numerical treatment of this problem. The results of that papers suggest that the above conclusions are typical for experimental design in general, not only for D-optimality.

References

1. Chernoff, H.: Locally optimal designs for estimating parameters. Ann. Math. Statist. 24, 586-602 (1953)
2. Box, G.E.P., and Lucas, H.L.: Design of experiments in non-linear estimations. Biometrika 49, 77-99 (1959)
3. Rasch, D., Rudolph, P.R., und Schimke, E.: Optimale Versuchspläne in der nichtlinearen Regression. In: Rasch, D. (Ed.): Robustheit IV. Probleme der angew. Statist. 13, 93-121 (1985)
4. Mitchell, T.: An algorithm for the construction of "D-optimal" experimental designs. Technometrics 16, 2, 203-210 (1974)
5. Frischmuth, K.: An analytical result in experimental design. Rostock. Math. Kolloq. 31, 95 - 101 (1987)
6. Smirnov, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Band III, 1. Berlin 1964
7. Atkinson, A.C., and Hunter, W.G.: The design of experiments for parameter estimation. Technometrics 10, 2, 271-289 (1968)
8. Duchrau, P., Frischmuth, K., Rasch, D., and Schimke, E.: Optimum experimental designs in growth curve analysis. Rostock. Math. Kolloq. 30, 93-104 (1986)
9. Duchrau, P., and Frischmuth, K.: A numerical search algorithm for experimental design. (to appear)

received: January 14, 1988

revised: May 6, 1988

Author:

Dr. Kurt Frischmuth
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Brian Fisher

A result on the beta function

The gamma function $\Gamma(x)$ and its derivatives were defined in [2] by

$$\Gamma^{(r)}(x) = N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{x-1} \ln^r t e^{-t} dt \quad (1)$$

for all x and $r = 0, 1, 2, \dots$. Here N is the neutrix, see van der Corput [1], having the domain $N' = \{\varepsilon : 0 < \varepsilon < \infty\}$ and range the real (or complex) numbers with negligible functions finite linear sums of the functions

$$\varepsilon^{\lambda} \ln^{r-1} \varepsilon, \quad \ln^r \varepsilon : \lambda < 0, \quad r = 1, 2, \dots$$

and all functions $f(\varepsilon)$ which converge to zero in the normal sense as ε tends to zero.

It was shown that this definition is equivalent to the usual definition of $\Gamma^{(r)}(x)$ for $x \neq 0, -1, -2, \dots$ and $r = 0, 1, 2, \dots$ and so equation (1) was used to define $\Gamma^{(r)}(x)$ for $x = 0, -1, -2, \dots$ and $r = 0, 1, 2, \dots$. In particular, it was shown in [4] that

$$\Gamma^{(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!} [\Phi(n) - \gamma] \quad (2)$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$, where

$$\Phi(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

and γ denotes Euler's constant. The following theorem was also proved in [4].

Theorem 1: $\Gamma^{(r)}(x) = N\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma^{(r)}(x + \epsilon)$

for all x and $r = 0, 1, 2, \dots$

The beta function $B(\lambda, \mu)$ was defined in [3] by

$$B(\lambda, \mu) = N\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} t^{\lambda-1} (1-t)^{\mu-1} dt \quad (3)$$

for all λ, μ . Here the neutrix N is as above but with its domain restricted to $\{\epsilon : 0 < \epsilon < \frac{1}{2}\}$.

It was shown that this definition is equivalent to the usual definition of $B(\lambda, \mu)$ for $\lambda, \mu \neq 0, -1, -2, \dots$ and so equation (3) was used to define $B(\lambda, \mu)$ for $\lambda, \mu = 0, -1, -2, \dots$. It was then proved that

$$B(0, n) = B(n, 0) = -\Phi(n-1) \quad (4)$$

for $n = 1, 2, \dots$,

$$B(-n, \mu) = B(\mu, -n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\mu)}{n! \Gamma(\mu - n)} \left[\Phi(n) - \gamma - \frac{\Gamma'(\mu - n)}{\Gamma(\mu - n)} \right] \quad (5)$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$ and $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$B(-n, m) = B(m, -n) = \frac{(-1)^n (m-1)!}{n! (m-n-1)!} [\Phi(n) - \Phi(m-n-1)] \quad (6)$$

for $m = n+1, n+2, \dots$ and $n = 1, 2, \dots$, (note that there was an error in [3] for this result),

$$B(-n, m) = B(m, -n) = \frac{(-1)^m (m-1)! (n-m)!}{n!} \quad (7)$$

for $m = 1, 2, \dots, n$ and $n = 1, 2, \dots$ and

$$B(-n, -m) = \frac{(m+n)!}{m! n!} [\Phi(n) + \Phi(m) - 2\Phi(m+n)] \quad (8)$$

for $m, n = 0, 1, 2, \dots$.

It now follows from equation (2) that

$$B(\lambda, \mu) \neq \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

if λ or $\mu = 0, -1, -2, \dots$. However, the following theorem does hold.

$$\text{Theorem 2: } B(\lambda, \mu) = N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\lambda + \varepsilon) \Gamma(\mu + \delta)}{\Gamma(\lambda + \mu + \varepsilon + \delta)} \right] \quad (9)$$

$$= N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\lambda + \varepsilon) \Gamma(\mu + \delta)}{\Gamma(\lambda + \mu + \varepsilon + \delta)} \right] \quad (10)$$

for all λ, μ .

Proof: Equations (9) and (10) follow immediately for $\lambda, \mu \neq 0, -1, -2, \dots$ on noting that $\Gamma(x)$ is continuous for $x \neq 0, -1, -2, \dots$.

Now, because of the continuity of Γ at $n + \delta$ and $n + \varepsilon + \delta$, we have

$$\begin{aligned} N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(n + \delta)}{\Gamma(n + \varepsilon + \delta)} &= \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(n)}{\Gamma(n + \varepsilon)} \\ &= \frac{(n-1)!}{\varepsilon} \prod_{i=1}^{n-1} (i + \varepsilon)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} [1 - \varepsilon \Phi(n-1) + \dots] \end{aligned}$$

and it follows that

$$N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(n + \delta)}{\Gamma(n + \varepsilon + \delta)} \right] = -\Phi(n-1).$$

Comparing this equation with equation (4) we see that we have proved equation (9) for $\lambda = 0$ and $\mu = 1, 2, \dots$.

To prove equation (10) we note that

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(n + \varepsilon + \delta)} &= \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon \Gamma(n + \varepsilon + \delta)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon \Gamma(n + \delta)} [1 + \varepsilon \Gamma'(1) + \dots] [1 - \frac{\varepsilon \Gamma'(n + \delta)}{\Gamma(n + \delta)} + \dots] \end{aligned}$$

and it follows that

$$N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(n + \varepsilon + \delta)} = -\frac{\gamma}{\Gamma(n + \delta)} - \frac{\Gamma'(n + \delta)}{[\Gamma(n + \delta)]^2},$$

since $\Gamma'(1) = -\gamma$. Thus

$$N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\varepsilon) \Gamma(n + \delta)}{\Gamma(n + \varepsilon + \delta)} \right] = -\gamma - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}. \quad (11)$$

It is well known that

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Phi(n-1) - \gamma. \quad (12)$$

Substituting in equation (11), we see that equation (10) is proved for $\lambda = 0$ and $\mu = 1, 2, \dots$

Now suppose that $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Then

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\mu + \varepsilon)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon + \varepsilon)} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon)},$$

provided that $\mu - n + \varepsilon \neq 0, -1, -2, \dots$. Further

$$\frac{\Gamma(-n + \varepsilon)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon)} = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon \Gamma(\mu - n + \varepsilon)} \prod_{i=1}^n (\varepsilon - i)^{-1}$$

and expanding in powers of ε it follows that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n + \varepsilon)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon)} = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\mu - n)} \left[\Phi(n) - \gamma - \frac{\Gamma'(\mu - n)}{\Gamma(\mu - n)} \right].$$

Thus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n + \varepsilon) \Gamma(\mu + \delta)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon + \delta)} \right] = \frac{(-1)^n \Gamma(\mu)}{n! \Gamma(\mu - n)} \left[\Phi(n) - \gamma - \frac{\Gamma'(\mu - n)}{\Gamma(\mu - n)} \right]$$

and comparing this equation with equation (5) we see that we have proved equation (9) for $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ and $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Next it follows as above that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n + \varepsilon)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon + \delta)} = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\mu - n + \delta)} \left[\Phi(n) - \gamma - \frac{\Gamma'(\mu - n + \delta)}{\Gamma(\mu - n + \delta)} \right]$$

provided that $\mu - n + \delta \neq 0, -1, -2, \dots$ and so

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n + \varepsilon) \Gamma(\mu + \delta)}{\Gamma(\mu - n + \varepsilon + \delta)} \right] = \frac{(-1)^n \Gamma(\mu)}{n! \Gamma(\mu - n)} \left[\Phi(n) - \gamma - \frac{\Gamma'(\mu - n)}{\Gamma(\mu - n)} \right]$$

from the continuity of Γ at μ and $\mu - n$, proving equation (10) for $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ and $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

With $m = n+1, n+2, \dots$ and $n = 1, 2, \dots$ we have

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(m + \delta)}{\Gamma(m - n + \varepsilon + \delta)} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m - n + \varepsilon)}$$

because of the continuity of Γ at m and $m-n+\epsilon$. Further

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(-n+\epsilon)}{\Gamma(m-n+\epsilon)} &= \prod_{i=1}^m (m-n-i+\epsilon)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\epsilon} \prod_{i=1}^{m-n-1} (m-n-i+\epsilon) \prod_{i=m-n+1}^m (n-m+i-\epsilon)^{-1}.\end{aligned}$$

Expanding in powers of ϵ , it follows that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\epsilon)}{\Gamma(m-n+\epsilon)} = \frac{(-1)^n}{n!(m-n-1)!} [\Phi(n) - \Phi(m-n-1)]$$

and so

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\epsilon)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m-n+\epsilon+\delta)} \right] = \frac{(-1)^n(m-1)!}{n!(m-n-1)!} [\Phi(n) - \Phi(m-n-1)].$$

Comparing this equation with equation (6) we see that we have proved equation (9) for $\lambda = -1, -2, \dots$ and $\mu = -\lambda+1, -\lambda+2, \dots$.

Next we have

$$\frac{\Gamma(-n+\epsilon)}{\Gamma(m-n+\epsilon+\delta)} = \frac{(-1)^n \Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon \Gamma(m-n+\epsilon+\delta)} \prod_{i=1}^n (i-\epsilon)^{-1}$$

and expanding in powers of ϵ , it follows that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\epsilon)}{\Gamma(m-n+\epsilon+\delta)} = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m-n+\delta)} \left[-\gamma - \frac{\Gamma'(m-n+\delta)}{\Gamma(m-n+\delta)} + \Phi(n) \right].$$

Thus

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\epsilon)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m-n+\epsilon+\delta)} \right] &= \frac{(-1)^n(m-1)!}{n!(m-n-1)!} [\Phi(n) - \gamma - \frac{\Gamma'(m-n)}{\Gamma(m-n)}] \\ &= \frac{(-1)^n(m-1)!}{n!(m-n-1)!} [\Phi(n) - \Phi(m-n-1)]\end{aligned}$$

on using equation (12), proving equation (10) for $\lambda = -1, -2, \dots$ and $\mu = -\lambda+1, -\lambda+2, \dots$.

With $m = 1, 2, \dots, n$ and $n = 1, 2, \dots$ we have as above

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m-n+\epsilon+\delta)} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-n+\epsilon)}.$$

Further

$$\begin{aligned} N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\varepsilon)}{\Gamma(m-n+\varepsilon)} &= N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^m (m-n-i+\varepsilon)^{-1} \\ &= - \frac{(-1)^m (n-m)!}{n!} \end{aligned}$$

and it follows that

$$N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\varepsilon)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m-n+\varepsilon+\delta)} \right] = \frac{(-1)^m (m-1)!(n-m)!}{n!}.$$

Comparing this with equation (7) we see that we have proved equation (9) for $\lambda = -1, -2, \dots$ and $\mu = 1, 2, \dots, -\lambda$.

Next we have as above

$$N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\varepsilon)}{\Gamma(m-n+\varepsilon+\delta)} = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m-n+\delta)} \left[-\gamma - \frac{\Gamma'(m-n+\delta)}{\Gamma(m-n+\delta)} + \Phi(n) \right].$$

Now

$$\Gamma(1+x) = \prod_{i=0}^{n-m} (x-i) \Gamma(m-n+x)$$

and it follows that

$$\frac{\Gamma'(m-n+\delta)}{\Gamma(m-n+\delta)} = \frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{1}{\delta-i} - \frac{1}{\delta}.$$

Further

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m-n+\delta)} &= \prod_{i=1}^n (m-i+\delta) \\ &= (-1)^{n-m} \delta (m-1)!(n-m)! \prod_{i=1}^{m-1} \left(1 + \frac{\delta}{m-i}\right) \prod_{i=m+1}^n \left(1 + \frac{\delta}{m-i}\right) \end{aligned}$$

and it follows that

$$N\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[N\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\varepsilon)\Gamma(m+\delta)}{\Gamma(m-n+\varepsilon+\delta)} \right] = \frac{(-1)^m (m-1)!(n-m)!}{n!},$$

proving equation (10) for $\lambda = -1, -2, \dots$ and $\mu = 1, 2, \dots, -\lambda$.

With $m, n = 0, -1, -2, \dots$ we have

$$\frac{\Gamma(-m+\delta)}{\Gamma(-m-n+\varepsilon+\delta)} = \delta \Gamma(-m-n+\varepsilon+\delta) \prod_{i=1}^m (\delta-i)^{-1}$$

and expanding in powers of δ , it follows that

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-m+\delta)}{\Gamma(-m-n+\delta)} = \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-m-n)} \left[-\gamma + \Phi(m) - \frac{\Gamma'(-m-n)}{\Gamma(-m-n)} \right].$$

Now

$$\Gamma(1+x) = \prod_{i=0}^{m+n} (x-i) \Gamma(-m-n+x),$$

and it follows that

$$\frac{\Gamma'(-m-n)}{\Gamma(-m-n)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \sum_{i=1}^{m+n} \frac{1}{i-1} = -\frac{1}{1}$$

Further

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m-n)} &= \prod_{i=1}^m (-n-i) \\ &= \frac{(-1)^m (m+n)!}{n!} \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{\epsilon}{n+i}\right) \end{aligned}$$

and it follows that

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\delta)\Gamma(-m+\delta)}{\Gamma(-m-n+\delta)} \right] \\ = \frac{(m+n)!}{m!n!} \left[-\gamma + \Phi(m) + \gamma - \Phi(m+n) - \Phi(m+n) + \Phi(n) \right] \\ = \frac{(m+n)!}{m!n!} \left[\Phi(m) + \Phi(n) - 2\Phi(m+n) \right]. \end{aligned}$$

Comparing this equation with equation (8) we see that we have proved equation (8) for $\lambda, \mu = 0, -1, -2, \dots$

Because of the symmetry of this result, it follows that

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-n+\delta)\Gamma(-m+\delta)}{\Gamma(-m-n+\delta)} \right] = \frac{(m+n)!}{m!n!} [\Phi(m) + \Phi(n) - 2\Phi(m+n)].$$

This completes the proof of the theorem.

We finally correct the proof of equation (6) as given in [3]. It was proved correctly that

$$B(-n, m) = \frac{(-1)^n (m-1)!}{n! (m-n-1)!} - \frac{m-1}{n} B(-n+1, m-1), \quad (13)$$

$$B(-1, m-n+1) = -(m-n)[1 + B(0, m-n)] \quad (14)$$

for $m = n+1, n+2, \dots$ and $n = 1, 2, \dots$. Assume that

$$B(-n, m) = \frac{(-1)^n (m-1)!}{n! (m-n-1)!} [\Phi(n) + B(0, m-n)] \quad (15)$$

for some n and $m = n+1, n+2, \dots$. It follows from equation (14) that

$$B(-1, m) = -(m-1)[\Phi(1) + B(0, m-1)]$$

for $m = 2, 3, \dots$ and so equation (15) is true for $n = 1$. We now have from equations (13) and (15)

$$\begin{aligned} B(-n-1, m+1) &= \frac{(-1)^{n+1} m!}{(n+1)(n+1)!(m-n-1)!} - \frac{m}{n+1} B(-n, m) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} m!}{(n+1)!(m-n-1)!} \left[\frac{1}{n+1} + \Phi(n) + B(0, m-n) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} m!}{(n+1)!(m-n-1)!} [\Phi(n+1) + B(0, m-n)] \end{aligned}$$

and equation (15) follows by induction. Using equation (4), equation (6) follows for $m = n+1, n+2, \dots$ and $n = 1, 2, \dots$.

References

1. van der Corput, J.G.: Introduction to the neutrix calculus. J. Analyse Math. 7, 291-398 (1959-60)
2. Fisher, B., and Kuribayashi, Y.: Neutrices and the gamma function. J. Fac. Ed. Tottori Univ. Nat. Sci. 36, 1-7 (1987)
3. Fisher, B., and Kuribayashi, Y.: Neutrices and the beta function. Rostock. Math. Kolloq. 32, 56-68 (1987)
4. Fisher, B., and Kuribayashi, Y.: Some results on the gamma function. J. Fac. Ed. Tottori Univ. Nat. Sci. (to appear)

received: June 8, 1988

Author:

Dr. Brian Fisher
Department of Mathematics
The University
Leicester
England-LE1 7RH

Klaus Denecke

Eine Charakterisierung der funktionalen Vollständigkeit in kongruenzvertauschbaren Varietäten durch Hyperidentitäten

Herrn Prof. Dr. G. Burosch zum 50. Geburtstag gewidmet.

1. Einleitung

In der Universellen Algebra nimmt die Untersuchung der aus den Fundamentaloperationen einer Algebra $\underline{A} = (A; F)$ durch Superposition abgeleiteten Operationen bedeutenden Raum ein. Die Verwendung der Begriffe Klon der Termfunktionen bzw. Klon der Polynomfunktionen einer endlichen Algebra gestattet es, dem Problem der funktionalen Vollständigkeit in mehrwertigen Logiken eine universalalgebraische Fassung zu geben. Klone von Funktionen über einer Menge A können als Mengen von Funktionen aufgefaßt werden, die bezüglich Komposition abgeschlossen sind und alle Projektionen $p_i: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ enthalten. Es ist klar, daß die Menge aller auf A definierten Funktionen ein Klon ist. Er soll hier durch O_A bezeichnet werden. $T(\underline{A})$ sei der von den Fundamentaloperationen F der Algebra $\underline{A} = (A; F)$ erzeugte Teilkлон von O_A . Die Funktionen aus $T(\underline{A})$ heißen Termfunktionen von $\underline{A}$. Die Algebra $\underline{A}$ heißt primal, wenn $T(\underline{A}) = O_A$ ist. Eine Funktion $f \in O_A$ heißt Sheffer-Funktion, wenn die Algebra $(A; f)$ primal ist. (Wir schreiben $(A; f)$ an Stelle von $(A; \{f\})$.) Die Vorteile einer solchen universalalgebraischen Fassung des Vollständigkeitsproblems werden deutlich, wenn man von den Algebren $\underline{A} = (A; F)$ zu den von ihnen erzeugten Varietäten $V(\underline{A})$ (gleichungsdefinierten Klassen von Algebren) übergeht und nach dem Zusammenhang zwischen der Gültigkeit gewisser Identitäten in $V(\underline{A})$ und der Primalität in $\underline{A}$ fragt. Dabei erweist sich allerdings der Begriff der Hyperidentität als besser geeignet als der einer Identität ([7]). Hyperidentitäten $\sigma = \tau$ sind formal dasselbe wie gewöhnliche Identitäten. σ und τ sind Terme in der Sprache der Varietät V bestehend aus Operationsvariablen und Individuenvariablen. Eine Algebra $\underline{A} = (A; F)$ (oder der Klon

$T(A) \subseteq O_A$) erfüllt die Hyperidentität $\delta = \tau$, wenn bei jeder Belegung der in $\delta = \tau$ vorkommenden n -stelligen Operationsvariablen mit n -stelligen Termfunktionen aus $T(A)$ und bei jeder Belegung der in $\delta = \tau$ vorkommenden Individuenvariablen mit Elementen aus A $\delta = \tau$ identisch in A erfüllt ist. In diesem Fall schreibt man $A \models \delta = \tau$ bzw. $T(A) \models \delta = \tau$. In dieser Arbeit spielen Hyperidentitäten der Form $\varphi^n(x) = \varphi^m(x)$ und eine Hyperidentität der Form

$$\psi(\varphi^n(\psi(\varphi^m(x)))) = \psi(\varphi^{n'}(\psi(\varphi^m(x))))$$

mit einstelligen Operationssymbolen φ und ψ eine Rolle, wobei $\varphi^n(x) = \varphi(\varphi(\dots(\varphi(x)\dots))$ die n -fache Komposition von φ ist. $A \models \varphi^n(x) = \varphi^m(x)$ bedeutet also, daß für alle einstelligen Termfunktionen $f \in T(A)$ $f^n = f^m$ gilt. Daher sind $\varphi^n = \varphi^m$ und $\psi(\varphi^n(\psi(\varphi^m))) = \psi(\varphi^{n'}(\psi(\varphi^m)))$ gewöhnliche Identitäten in der vollen symmetrischen Halbgruppe H_A aller einstelligen Funktionen $f: A \rightarrow A$.

Wir setzen hier voraus, daß die betrachteten Varietäten universaler Algebren kongruenzvertauschbar sind, d.h., daß die Kongruenzen jeder Algebra der Varietät bezüglich des Relationsprodukts paarweise vertauschbar sind. Mal'cev hat in [3] bewiesen, daß eine Varietät V universaler Algebren genau dann kongruenzvertauschbar ist, wenn es in V einen Term p gibt, der die Identitäten $p(x, x, y) = p(y, x, x) = y$ erfüllt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\kappa(n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots, n$. Dann können wir unser Hauptergebnis in folgender Weise formulieren:

Sei $A = (A; F)$ eine nichttriviale endliche Algebra, die eine kongruenzvertauschbare Varietät erzeugt. Dann ist A genau dann primal, wenn A die folgende Hyperidentität nicht erfüllt:

$$\varphi_2(\varphi_1^{n-2}(\varphi_2(\varphi_1^{n-1}(x)))) = \varphi_2(\varphi_1^{n-2+\kappa(n)}(\varphi_2(\varphi_1^{n-1}(x)))). \quad (1)$$

2. Grundbegriffe

Für eine endliche Menge A mit $|A| = n$ sei $O_A^{(m)} = \{f: A^m \rightarrow A\}$ die Menge aller m -stelligen, auf A definierten Funktionen. $O_A = \bigcup_{m=1}^{\infty} O_A^{(m)}$ der Klon aller auf A definierten Funktionen ([4]). Sei $H_A = O_A^{(1)}$ die volle symmetrische Halbgruppe und $S_A = \{f: A \rightarrow A \text{ bijektiv}\}$ die volle symmetrische Gruppe. Für eine Funktion $f \in H_A$ sei $\text{Im} f = \{f(a) | a \in A\}$ das Bild von f und $\lambda(f)$ die kleinste

ganze Zahl $q \in \{1, 2, \dots\}$, so daß $\text{Imf}^q = \text{Imf}^{q+1}$ gilt. Dabei ist $f^0 := e$ die identische Funktion und f^q als q -fache Komposition von f definiert. Sei $n_f = |\text{Imf}|$. Dann gilt:

$$\lambda(f) \leq n-1, \quad \lambda(f) \leq n_f,$$

$$f^{\lambda(f)} = f^{\lambda(f)+\kappa(n_f)} \quad ([2]). \text{ Weiter gilt}$$

Lemma 2.1 ([6]): Seien f, g Funktionen aus H_A , für die $f^1 = f^{1+p}$ und $g^{1'} = g^{1'+p'}$ erfüllt sind. Sei $1'' = \max\{1, 1'\}$, $p'' = \text{g.g.T.}\{p, p'\}$ und $h \in \{f, g\}$. Dann gilt $h^{1''} = h^{1''+p''}$ ■

Insbesondere folgt für alle $1' \geq 1$ und alle $n' \geq n$ aus $f^1 = f^{1+\kappa(n)}$ die Identität $f^{1'} = f^{1'+\kappa(n')}$, womit (1) für beliebige f_2 und alle f_1 mit $\lambda(f_1) \leq n-2$ stets erfüllt ist.

Lemma 2.2: Sei $f \in H_A$ eine Funktion mit $\lambda(f) = n-1$ und $|A| = n$. Dann kann A in der Form $A = \{i_1, \dots, i_n\}$ und f in der Form

$$f(i_k) = \begin{cases} i_{k-1} & \text{für } 2 \leq k \leq n, \\ i_1 & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

dargestellt werden.

Beweis: Aus $\lambda(f) = n-1$ folgt $|\text{Imf}^1| = n-1$, $1 = 1, \dots, n-1$.

Außerdem gilt $\text{Imf} \supset \text{Imf}^2 \supset \dots \supset \text{Imf}^{n-1}$. Daher ist $\text{Imf}^{n-1} = \{i_1\}$, $\text{Imf}^{n-2} = \{i_1, i_2\}, \dots, \text{Imf} = \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$ und

$$f(i_k) = \begin{cases} i_{k-1} & \text{für } 2 \leq k \leq n, \\ i_1 & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

Bemerkung: $i_n, f(i_n), f^2(i_n), \dots, f^{n-1}(i_n)$ sind genau die Elemente von A .

In [2] wurde die folgende Aussage bewiesen:

Lemma 2.3 ([2]):

- (a) $S_A \models \varphi^m(x) = \varphi^{m'}(x)$ genau dann, wenn $m \equiv m' \pmod{\kappa(n)}$;
- (b) $H_A \models \varphi^m(x) = \varphi^{m'}(x)$ genau dann, wenn $m, m' \geq n-1$ und $m \equiv m' \pmod{\kappa(n)}$, insbesondere gilt:
 $H_A \models \varphi^{n-1}(x) = \varphi^{n-1+\kappa(n)}(x)$;
- (c) $(H_A \setminus S_A) \models \varphi^{n-1}(x) = \varphi^{n-1+\kappa(n-1)}(x)$.

3. Die Hyperidentität (1)

Wir weisen die Gültigkeit der angegebenen Hyperidentität in universalen Algebren mit bestimmten Eigenschaften nach. Sei $\underline{A} = (A; F)$ eine endliche universale Algebra mit $|A| = n \geq 2$.

Aussage 3.1: Hat $\underline{A} = (A; F)$ eine nichttriviale Teilalgebra $\underline{B}$ ($1 < |B| < n$), so gilt in $\underline{A}$ die Hyperidentität (1).

Beweis: Seien $f_1, f_2 \in H_A \cap T(\underline{A})$. Ist $\lambda(f_1) \leq n-2$, so ist (1) erfüllt. Andernfalls ist f_1 von der in Lemma 2.2 angegebenen Form, und es gilt $f_1^{n-1}(x) = i_1$ für alle x . Weiter ist $i_1 \in B$, denn da $\underline{B}$ eine Teilalgebra von $\underline{A}$ und f_1^{n-1} eine Termfunktion von $\underline{A}$ ist, folgt aus $i_k \in B$ für ein k mit $1 \leq k \leq n$ auch $f_1^{n-1}(i_k) = i_1 \in B$. Daher muß für alle $x \in A$ auch $f_2(f_1^{n-1}(x)) = f_2(i_1) \in B$ gelten. Weiter ist $i_n \notin B$, denn sonst hätten wir nach der Bemerkung im Anschluß an Lemma 2.2 $\{i_n, f(i_n), \dots, f^{n-1}(i_n)\} = A \subseteq B$, also $A = B$ im Widerspruch dazu, daß $\underline{B}$ eine echte Teilalgebra von $\underline{A}$ ist. Daher haben wir $f_2(i_1) = i_s$ für ein $s < n$ und $f_1^{n-2}(f_2(f_1^{n-1}(x))) = i_1$. $f_1^{n-2+\alpha(n)}(f_2(f_1^{n-1}(x)))$ ist für alle $x \in A$ wegen $\alpha(n) \geq 1$ ebenfalls gleich i_1 . Daraus ergibt sich die Gültigkeit von (1). ■

Aussage 3.2: Hat $\underline{A} = (A; F)$ eine nichttriviale Kongruenz θ , so gilt in $\underline{A}$ die Hyperidentität (1).

Beweis: Für $f_1, f_2 \in H_A \cap T(\underline{A})$ ist der Fall $\lambda(f_1) = n-1$ zu untersuchen. Wir zeigen, daß θ in diesem Fall genau eine Kongruenzklasse B mit mehr als einem Element hat, während alle übrigen Kongruenzklassen einelementig sind. Aus der Darstellung von f_1 in der Form

$$f_1(i_k) = \begin{cases} i_{k-1} & \text{für } 2 \leq k \leq n, \\ i_1 & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

ergibt sich $f_1^m(i_k) = i_{k-m}$, wenn $m < k$ ist, und $f_1^m(i_k) = i_1$ für $m \geq k$. Da θ eine nichttriviale Kongruenz ist, gibt es zwei Elemente $i_j, i_1 \in A$ mit $j > 1$ und $(i_j, i_1) \in \theta$. Ist $j-1 \geq 1$, so erhält man aus $(i_j, i_1) \in \theta$

$$(f_1^{j-1}(i_j), f_1^{j-1}(i_1)) = (i_1, i_1) \in \theta.$$

Ist $j-1 < 1$, so gibt es eine natürliche Zahl r mit $(r-1)(j-1) < 1$ und $r(j-1) \geq 1$. Daher ist $j-1 < (r-1)1-(r-2)j$ und $j-1 \geq r1-(r-1)j$.

Aus $(i_j, i_1) \in \theta$ folgt $(f_1^{j-1}(i_j), f_1^{j-1}(i_1)) = (i_1, i_{21-j}) \in \theta$ und $(f_1^{j-1}(i_1), f_1^{j-1}(i_{21-j})) = (i_{21-j}, i_{31-2j}) \in \theta$. In dieser Weise fortfahrend erhält man schließlich

$$(i_{(r-1)1-(r-2)j}, i_{r1-(r-1)j}) = (i_{(r-1)1-(r-2)j}, i_1) \in \theta,$$

und aus der Transitivität folgt $(i_1, i_1) \in \theta$. Jede Kongruenzklasse von θ mit mehr als einem Element enthält also i_1 , und daher ist θ von der angegebenen Form. Weiter haben wir $f_1^{n-1}(x) = i_1$ für alle $x \in A$, und (1) ist erfüllt, falls $f_2(i_1) = i_s$ für ein $s < n$ gilt. Ist $f_2(i_1) = i_n$, so ist $f_1^{n-2}(f_2(f_1^{n-1}(x))) = i_2$. Aus $(i_j, i_1) \in \theta$ für ein j mit $1 < j \leq n$ folgt $(f_1^{j-2}(i_j), f_1^{j-2}(i_1)) = (i_2, i_1) \in \theta$ und daraus $(f_2(i_2), f_2(i_1)) = (f_2(i_2), i_n) \in \theta$.

Man sieht, daß $i_n \notin B$ ist, denn sonst würde aus $(i_n, i_1) \in \theta$ folgen $(f^1(i_n), i_1) \in \theta$ ($l = 1, \dots, n-1$), und θ wäre trivial. Daher ist $f_2(i_2) = i_n$. Die rechte Seite von (1) lautet $f_2(f_1^{n-2+\alpha(n)}(f_2(f_1^{n-1}(x)))) = f_2(i_1)$, stimmt also mit der linken überein. Das zeigt die Gültigkeit von (1). ■

Aussage 3.3: Hat $\underline{A} = (A; F)$ einen nichtidentischen Automorphismus s , so gilt in $\underline{A}$ die Hyperidentität (1).

Beweis: Hat s Fixpunkte oder besteht die Permutation s nicht aus Zyklen gleicher Länge, hat also eine gewisse Potenz von s Fixpunkte, so ist (1) erfüllt, da die Fixpunkte eines Automorphismus von $\underline{A}$ eine Teilalgebra von $\underline{A}$ bilden und Aussage 3.1 angewendet werden kann. Wir können also voraussetzen, daß s keine Fixpunkte hat und die Permutation s aus r Zyklen gleicher Länge u besteht.

Für alle $f \in H_{\underline{A}} \cap T(\underline{A})$ gilt die Identität $f^{n-2} = f^{n-2+\alpha(n)}$. Ist $f \in S_{\underline{A}}$, so ist diese Aussage klar. Sei also $f \in T(\underline{A}) \cap (H_{\underline{A}} \setminus S_{\underline{A}})$. Wir zeigen, daß $\lambda(f) \leq r-1$ ist. Als erstes stellen wir dazu fest, daß f jeden Zyklus von s auf einen Zyklus von s abbildet, denn aus $b = s^i(a)$ folgt $f(b) = f(s^i(a)) = s^i(f(a)) + f(a)$ für $1 \leq i \leq u$. Da s nur

aus Zyklen der gleichen Länge u besteht, erhält man $\text{Im}f^{r-1} = \text{Im}f^r$, daher ist $\lambda(f) \leq r-1$, und wegen $r-1 \leq n-2$ haben wir $f^{n-2} = f^{n-2+\alpha(n)}$ für alle $f \in H_A \cap T(\underline{A})$. Daher ist auch $f_1^{n-2}(f_2(f_1^{n-1}(x))) = f_1^{n-2+\alpha(n)}(f_2(f_1^{n-1}(x)))$, und daraus folgt die Gültigkeit von (1). ■

Die nächste Aussage bezieht sich auf Algebren, die affin bezüglich einer elementar-abelschen p -Gruppe sind. Eine m -stellige Funktion $g: A^m \rightarrow A$ heißt affin bezüglich einer elementar-abelschen p -Gruppe $\underline{G} = (A; +)$, wenn gilt

$$f(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n) - f(0, \dots, 0),$$

wobei 0 das Nullelement der Gruppe $\underline{G}$ ist. Ist jede Termfunktion von $\underline{A} = (A; F)$ affin bezüglich der elementar-abelschen p -Gruppe $\underline{G} = (A; +)$, so heißt $\underline{A}$ affin bezüglich $\underline{G}$.

Aussage 3.4: Ist $\underline{A} = (A; F)$ affin bezüglich einer elementar-abelschen p -Gruppe, so ist (1) erfüllt.

Beweis: Wir zeigen, daß für alle $f \in H_A \cap T(\underline{A})$ die Identität $f^{n-2} = f^{n-2+\alpha(n)}$ gilt. Dazu definieren wir $f' \in H_A$ durch $f'(x) = f(x) - f(0)$. Dann ist f' ein Endomorphismus der Gruppe $\underline{G}$, d.h. $f'(x+y) = f'(x) + f'(y)$, $f'(0) = 0$. Nach dem Homomorphiesatz gilt $|\text{Im}f'| \cdot |\ker f'| = n$, ($\ker f' = \{a \mid f'(a) = 0\}$). Wenn $|\ker f'| = 1$ ist, so sind f' und f Permutationen, und die Identität ist erfüllt. Ist $|\ker f'| > 1$, so ist

$$\lambda(f) \leq |\text{Im}f| = |\text{Im}f'| \leq p^{m-1} = \frac{n}{p} < n-2, \text{ und wir erhalten}$$

$f^{n-2} = f^{n-2+\alpha(n)}$ nach der Bemerkung vor Lemma 2.1. Daher ist die Hyperidentität (1) erfüllt. ■

4. Charakterisierung der Primalität

Wir benutzen folgende Charakterisierung der Primalität von Algebren, die kongruenzvertauschbare Varietäten erzeugen:

Theorem 4.1 ([1]): Sei $\underline{A} = (A; F)$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine kongruenzvertauschbare Varietät erzeugt.

Dann ist $\underline{A}$ genau dann primal, wenn $\underline{A}$ keine echten Teilalgebren hat, einfach ist, keine nichtidentischen Automorphismen hat und nicht affin bezüglich jeder elementar-abelschen p -Gruppe ist. ■

Daraus erhalten wir

Theorem 4.2: Sei $\underline{A} = (A; F)$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine Kongruenzvertauschbare Varietät erzeugt. Dann ist $\underline{A}$ genau dann primal, wenn $\underline{A}$ die Hyperidentität (1) nicht erfüllt.

Beweis: Ist $\underline{A}$ nicht primal, so hat $\underline{A}$ nach Theorem 4.1 eine echte Teilalgebra oder einen nichtidentischen Automorphismus oder eine nichttriviale Kongruenz oder ist affin bezüglich einer elementar-abelschen p-Gruppe. Nach den Aussagen 3.1 bis 3.4 ist in jedem dieser Fälle die Hyperidentität (1) erfüllt.

Sei nun $\underline{A}$ primal. Dann sind die durch

$$f_1(i_k) = \begin{cases} i_{k-1} & \text{für } 2 \leq k \leq n, \\ i_1 & \text{für } k = 1, \end{cases}$$

$$f_2(i_1) = i_n, f_2(i_2) \neq i_n$$

definierten Funktionen f_1, f_2 Termfunktionen von $\underline{A}$. Da

$$\begin{aligned} f_2(f_1^{n-2}(f_2(f_1^{n-1}))) &= f_2(f_1^{n-2}(f_2(i_1))) = f_2(f_1^{n-2}(i_n)) \\ &= f_2(i_2) \neq i_n \end{aligned}$$

und

$$f_2(f_1^{n-2+\kappa(n)}(f_2(f_1^{n-1}))) = f_2(i_1) = i_n$$

gilt, erfüllt $\underline{A}$ nicht die Hyperidentität (1). ■

Für den Fall, daß die betrachtete Algebra nur eine Fundamentaloperation besitzt, gilt nach Rousseau

Theorem 4.3 ([5]): Eine endliche nichttriviale Algebra $\underline{A} = (A; f)$ ist genau dann primal (d.h., f ist genau dann eine Sheffer-Funktion), wenn $\underline{A}$ keine echten Teilalgebren und keinen nichtidentischen Automorphismus besitzt und einfach ist.

Daraus folgt

Theorem 4.4: Eine endliche nichttriviale Algebra $\underline{A} = (A; f)$, $f \in O_A$, ist primal (d.h., f ist eine Sheffer-Funktion) genau dann, wenn $\underline{A}$ die Hyperidentität (1) nicht erfüllt.

(Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 4.2.) ■

Literatur

1. Denecke, K.: Preprimal Algebras. Berlin 1982
2. Denecke, K, and Pöschel, R.: A characterization of Sheffer functions by hyperidentities. Semigroup Forum 37, 3, 351-362 (1988)
3. Mal'cev, A.I.: On the general theory of algebraic systems (Russ.). Mat. Sb. 35 (77), 3-20 (1954)
4. Pöschel, R., und Kaluznin, L.A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1978
5. Rousseau, G.: Completeness in finite algebras with a single operation. Proc. Amer. Math. Soc. 18, 1009-1013 (1967)
6. Schweigert, D.: Clones of term functions of lattices and abelian groups. Algebra Universalis 20, 27-33 (1985)
7. Taylor, W.: Hyperidentities and hypervarieties. Aequat. Math. 23, 30-49 (1981)

eingegangen: 4. 1. 1988

revidierte Fassung: 13. 5. 1988

Verfasser:

Doz. Dr. sc. Klaus Denecke
Pädagogische Hochschule "Karl Liebknecht" Potsdam
Sektion Mathematik/Physik
Am Neuen Palais
Potsdam
DDR-1571

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linkebündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock, Math. Kolloq./ Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichungs-/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichungs- (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. ä. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben einzuzuplanen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- /8/ Zierli, O., and Samuel, P.: Commutative Algebras.
Priceton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedon, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reicher, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkbuch anlässlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliographische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingetragen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

– Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg	ISSN 0518-3189
– Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge	ISSN 0138-3299
– Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte	ISSN 0232-3066
– Rostocker Mathematisches Kolloquium	ISSN 0138-3248
– Rostocker Philosophische Manuskripte	ISSN 0557-3599
– Rostocker Physikalische Manuskripte	ISSN 0138-3140
– Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte	ISSN 0138-3191
– Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerikawissenschaften	ISSN 0458-7944
– Erziehungswissenschaftliche Beiträge	ISSN 0138-2373
– Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus	ISSN 0138-3396
– Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock	ISSN 0232-539X ISSN 0233-0830
– Beiträge zur Geschichte der FDJ	
– Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus	ISSN 0233-0636 ISSN 0233-0539
– Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogik	ISSN 0233-0784
– Rostocker Informatik-Berichte	ISSN 0233-0687
– Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen	ISSN 0233-0644
– Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft	ISSN 0233-0539
– Rostocker Universitätsreden	

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR-7010.

Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.