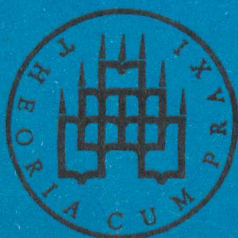


Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 37



**Wilhelm-Pieck-Universität
Rostock**

Information

Rostocker Informatik-Berichte

ISSN 0233-0784

Diese Schriftenreihe der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock erscheint seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor:

- Heft 1 (1985) 20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung
- Heft 2 (1985) DIGRA'84
(Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)
- Heft 3 (1986) Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinatn der DDR
- Heft 4 (1986) Arbeiten aus der Sektion Informatik
- Heft 5 (1987) Beiträge des Problemseminars "Graphisch-Interaktive Systeme"
- Heft 6 (1988) Problemseminar "Graphische Standardisierung" und Probleme der Modellierung und Simulation

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR-7010.

Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 37

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Sektion Mathematik

1989

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Gustav Burosch
(Sektionsdirektor)
Prof. Dr. Gerhard Maeß

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Werner Plischke

Herstellung der Druckvorlage: Dipl.-Lehrer Andreas Straßburg

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Redaktionsschluß: 24. 02. 1989

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schrifttentes über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Außerdem bestehen Bezugsmöglichkeiten für

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010.

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1989) 37.

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
Abteilung Wissenschaftspublizistik,
Vogelsang 13/14, Telefon 369 577, Rostock, DDR-2500
Genehmigungs-Nr.: C 115 /89

Druck: Ostsee-Druck Rostock BT Ribnitz II-14 • 0,50
1000

Berg, Lothar	On Danieljan's class of distribution functions	4
Häntzschel, Thomas Neßelmann, Dieter	Ein Algorithmus zur Untersuchung von Halbordnungen auf Cohen-Macaulay-Eigenschaft	11
Tervo, Jouko	On strongly coercive pseudo-differential operators	19
Liese, Friedrich Danieljan, Eduard	An estimator for the variance in the central limit theorem for dependent random variables	35
Kossow, Andreas	Formeln für die Momente der Lebensdauer zirkulärer konsekutiver k-aus-n-Systeme	55
Frischmuth, Kurt Strauß, Raimond	On the triangulation of certain plane domains	63

Autorreferate von Dissertationen

Lau, Dietinde	Funktionenalgebren über endlichen Mengen	77
Labahn, Roger	Informationsflüsse auf Hypergraphen	79

Lothar Berg

On Danieljan's class of distribution functions

In E. A. Danieljan and F. Liese [3] there was introduced a class of distribution functions $F(t) = F_{1,\gamma}(t)$, $1 < \gamma < 2$, with the Laplace transform $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \Phi_{0,\gamma}(s)$, namely

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-s^\gamma t} (1+t)^{1/\gamma-1} dt, \quad (1)$$

and $F(t) \equiv 0$ for $t < 0$. At first we assume that $s > 0$. In the case $\gamma = 2$ we find by means of the substitution $s\sqrt{t+1} = s + x/2$ that

$$f(s) = \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-sx - x^2/4} dx$$

and therefore

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2/4} dx$$

for $t \geq 0$. In the limit case $\gamma = 1$ we have $F(t) \equiv 1$ for $t > 0$.

In what follows we derive in the case $1 < \gamma < 2$ for $f(s)$ and $F(t)$ convergent and asymptotic expansions in the neighbourhood of zero and infinity, respectively. In preparation of this we obtain from (1) by means of the substitution $s^\gamma(t+1) = x$ the second representation

$$f(s) = \frac{e^{s^\gamma}}{s\Gamma(1/\gamma)} \int_{s^\gamma}^{\infty} e^{-x} x^{1/\gamma-1} dx. \quad (2)$$

In view of

$$(1+t)^{1/\gamma-1} = \frac{1}{\Gamma(1-1/\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-(1+t)x} x^{-1/\gamma} dx$$

and

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (3)$$

we moreover obtain from (1) the third representation

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\gamma} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^{-1/\gamma}}{x + s^{\gamma}} dx. \quad (4)$$

Theorem 1: The function (1) possesses for $s \rightarrow +\infty$ the asymptotic expansion

$$f(s) \sim \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \Gamma(k-1/\gamma) s^{-k\gamma}, \quad (5)$$

and the corresponding original function possesses the development

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k-1/\gamma)}{\Gamma(k\gamma)} t^{k\gamma-1}, \quad (6)$$

which converges for all $t > 0$.

Proof: By means of the elementary formula

$$\frac{1}{x+s^{\gamma}} = \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} s^{-k\gamma} + \frac{(-x)^n}{x+s^{\gamma}} s^{-n\gamma}$$

we immediately obtain (5) from (4). And formally, we obtain (6) from (5) by termwise inversion of the Laplace transform, however, only as an asymptotic expansion for $t \rightarrow +0$. The convergence of (6) follows from Stirling's formula and $\gamma > 1$.

In order to show that (6) is indeed the original function of $f(s)$ we derive from (2) the differential equation

$$(s e^{-s^{\gamma}} f(s))' = -\frac{\gamma}{\Gamma(1/\gamma)} e^{-s^{\gamma}},$$

i.e.

$$(\gamma - s^{-\gamma})f(s) - s^{1-\gamma}f'(s) = \frac{\gamma}{\Gamma(1/\gamma)} s^{-\gamma},$$

corresponding in the original domain to the Volterra integral equation

$$\Gamma(\gamma+1)F(t) + \int_0^t \frac{\gamma x - t}{(t-x)^{2-\gamma}} F(x) dx = \frac{\gamma}{\Gamma(1/\gamma)} t^{\gamma-1},$$

which is uniquely solvable according to a simple modification of Theorem 19.5 in [2]. Now it can easily be checked that (6) is the solution of this equation, what proves the theorem. ■

For $\gamma = 2$ the series (6) coincides with the foregoing integral representation.

Theorem 2: The function (1) possesses the development

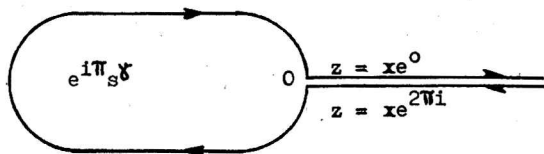
$$f(s) = \frac{1}{s} e^{s^\gamma} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k\gamma}}{\Gamma(k+1+1/\gamma)}, \quad (7)$$

which makes sense for all complex $s \neq 0$, and the corresponding original function possesses for $t \rightarrow +\infty$ the asymptotic expansion

$$F(t) \sim 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin(k\gamma\pi) \Gamma(k\gamma) t^{-k\gamma} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\gamma\pi) \Gamma(k\gamma+1)}{\Gamma(k+1+1/\gamma)} t^{-k\gamma-1}. \quad (8)$$

Proof: For the contour integral

$$J = \int \frac{e^{-z} z^{-1/\gamma}}{z+s^\gamma} dz$$



over the curve shown in the figure with $s > 0$ we obtain by the theorem of residues

$$J = -2\pi i e^{s^\gamma} (e^{i\pi\gamma})^{-1/\gamma} + (1 - e^{-2\pi i/\gamma}) \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{-1/\gamma}}{x + s^\gamma} dx$$

and by development into a power series

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (-s^\gamma)^k \int e^{-z} z^{-k-1-1/\gamma} dz = (1 - e^{-2\pi i/\gamma}) \sum_{k=0}^{\infty} (-s^\gamma)^k \Gamma(-k-1/\gamma),$$

where we have used the analytical continuation of the Γ -function and the fact that J is holomorphic with respect to the

variable s^γ . Both equations together with (4) imply (7).

From (7) with

$$e^{s^\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^{k\gamma} \quad (9)$$

we formally arrive at (8) replacing all powers s^β by $t^{-\beta-1}/\Gamma(-\beta)$ and applying (3). To justify this procedure we use Theorem 1 from pp. 142-143 of G. Doetsch [4] after some rearrangements. For this reason let us write (7) with (9) in the form

$$f(s) = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^n a_k s^{\beta_k} + o(s^{\beta_n})$$

uniformly for $s \rightarrow 0$ in any angular sector. Such expansion can be differentiated termwise, so that we obtain for any m

$$f^{(m)}(s) = (-1)^m \frac{m!}{s^{m+1}} + \sum_{k=1}^n a_k m! \binom{\beta_k}{m} s^{\beta_k-m} + o(s^{\beta_n-m}), \quad (10)$$

in particular uniformly in $|\arg s| \leq \pi/2$. With regard to the theorem from [4] we choose $m > \beta_n + 1$. For $0 \leq \operatorname{re} s \leq a$ with $a > 0$ and suitable large $|\operatorname{im} s|$ we have in view of $x > 0$ and $1 < \gamma < 2$ the inequality

$$|x + s^\gamma| \geq |s|^\gamma,$$

so that from (4) we easily find that

$$f^{(m)}(s) = O(s^{-\gamma-m})$$

for $|\operatorname{im} s| \rightarrow \infty$ uniformly in $0 \leq \operatorname{re} s \leq a$. Hence by the above mentioned theorem from [4] we can transform (10) into

$$(-t)^m F(t) = (-t)^m + \sum_{k=1}^n a_k m! \binom{\beta_k}{m} \frac{t^{m-\beta_k-1}}{\Gamma(m-\beta_k)} + o(t^{m-\beta_k-1}),$$

what implies according to (3)

$$F(t) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{-\beta_k-1}}{\Gamma(-\beta_k)} + o(t^{-\beta_k-1})$$

for all n . This proves the theorem. ■

Remarks: 1°. In (7) there appears a constant term with $k = 0$ and possibly further terms with integer powers $k\gamma$, but all these terms disappear in (8) in view of the factor $\sin(k\gamma\pi)$. In pp. 150-151 of G. Doetsch [4] you find another Theorem 1, where such cases are excluded, cf. also Theorem 45.4 in [2], which is a weak version of it. Our foregoing proof shows a general possibility to overcome this deficiency.

2°. Let us emphasize that, in the proof we have rearranged the convergent development (7) by means of (9) into an asymptotic expansion for $s \rightarrow 0$.

3°. Using once more (3) we can write (5) in the form

$$f(s) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{s^{k\gamma}}{\Gamma(k+1+\gamma)}.$$

Comparing this expansion with (7) we see a connection to a generalization of Theorem III from p. 60 of W. B. Ford [5], cf. also Theorem 28.4 in [1]. Analogously, the ~~sum~~ in (6) is nothing else than the last sum in (8) for $k = -1, -2, \dots$. The term with $k = 0$ and the terms of the other sum with $k < 0$ are equal to zero.

4°. Formula (7) implies that the first moment of the density function $F'(t)$ equals to $m_1 = \gamma/\Gamma(1/\gamma)$ whereas (8) shows that all higher moments do not exist.

Supplement from Oktober 24, 1988. In the case that $\gamma = 3/2$ the function $F(t) = F_{1,3/2}(t)$ can be expressed by hypergeometric functions, c.f. O. I. Maričev [6]. In particular, the corresponding density function reads

$$F'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} {}_2F_2\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; \frac{4}{3}, \frac{5}{6}; \frac{4}{27}t^3\right) - \frac{t}{3} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right) \right\},$$

where the parameters are the six numbers $\frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{8}{6}$. The function $F_{1,3/2}(t)$ was calculated by W. Peters [7] for $t < 4.35$ by means of (6) and for $t > 3.75$ by means of (8), where in the over-lapping domain the results are equal within 6 decimals. The author wants to express his thanks to Dr. Peters for the permission to publish some of his results in the following table.

t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)
0.00	0.000000	2.00	0.879231	10.00	0.990213
0.05	0.186023	2.10	0.887078	10.50	0.990940
0.10	0.262289	2.20	0.894210	11.00	0.991582
0.15	0.320001	2.30	0.900705	11.50	0.992151
0.20	0.367836	2.40	0.906634	12.00	0.992660
0.25	0.408169	2.50	0.912051	12.50	0.993116
0.30	0.445739	2.60	0.917022	13.00	0.993527
0.35	0.478590	2.70	0.921582	13.50	0.993899
0.40	0.508409	2.80	0.925776	14.00	0.994236
0.45	0.535681	2.90	0.929640	14.50	0.994544
0.50	0.560767	3.00	0.933206	15.00	0.994825
0.55	0.583942	3.10	0.936504	16.00	0.995320
0.60	0.605428	3.20	0.939559	17.00	0.995741
0.65	0.625404	3.30	0.942393	18.00	0.996103
0.70	0.644020	3.40	0.945027	19.00	0.996416
0.75	0.661402	3.50	0.947479	20.00	0.996690
0.80	0.677659	3.60	0.949764	21.00	0.996930
0.85	0.692888	3.70	0.951898	22.00	0.997143
0.90	0.707169	3.80	0.953893	23.00	0.997332
0.95	0.720579	3.90	0.955761	24.00	0.997501
1.00	0.733183	4.00	0.957512	25.00	0.997654
1.05	0.745040	4.10	0.959156	26.00	0.997791
1.10	0.756204	4.20	0.960701	27.00	0.997915
1.15	0.766724	4.30	0.962155	28.00	0.998028
1.20	0.776645	4.40	0.963526	29.00	0.998132
1.25	0.786007	4.50	0.964819	30.00	0.998226
1.30	0.794848	4.60	0.966040	31.00	0.998313
1.35	0.803202	4.70	0.967194	32.00	0.998393
1.40	0.811102	4.80	0.968287	33.00	0.998467
1.45	0.818576	4.90	0.969322	34.00	0.998535
1.50	0.825651	5.00	0.970304	35.00	0.998599
1.55	0.832353	5.50	0.974531	40.00	0.998857
1.60	0.838705	6.00	0.977861	50.00	0.999186
1.65	0.844729	6.50	0.980535	60.00	0.999383
1.70	0.850444	7.00	0.982719	70.00	0.999511
1.75	0.855870	7.50	0.984527	80.00	0.999601
1.80	0.861024	8.00	0.986044	90.00	0.999666
1.85	0.865923	8.50	0.987330	100.00	0.999715
1.90	0.870581	9.00	0.988432	200.00	0.999900
1.95	0.875013	9.50	0.989384	300.00	0.999946

For $t > 200$ we can use the simple approximation

$$F(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2}.$$

References

1. Berg, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin 1968
2. Berg, L.: Operatorenrechnung I. Algebraische Methoden, II. Funktionentheoretische Methoden. Berlin 1972, 1974
3. Danieljan, E.A., and Liese, F.: M/G/1/ ∞ -queuing-model with unit traffic-intensity in continuous time. Rostock. Math. Kolloq. 32, 67-86 (1987)
4. Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation II. Basel 1955
5. Ford, W.B.: Studies on Divergent Series and Summability and The Asymptotic Developments of Functions Defined by Maclaurin Series. New York 1960
6. Маричев, О.И.: Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск 1978
7. Peters, W.: Pascal-program for the calculation of $F_{1,3/2}(t)$ (unpublished).

received: October 10, 1988

Author:

Prof. Dr. L. Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Thomas Häntzschel

Dieter Neßelmann

Ein Algorithmus zur Untersuchung von Halbordnungen auf Cohen-Macaulay-Eigenschaft

0. Einführung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Algorithmus bereitgestellt, der entscheidet, ob eine vorgegebene Halbordnung über dem Bereich der ganzen Zahlen oder einem Körper der Charakteristik $p > 0$ die Cohen-Macaulay-Eigenschaft besitzt oder nicht. Für diesen Algorithmus wurde ein Turbo-Pascal-Programm für Personalcomputer angefertigt und an einfachen Beispielen getestet.

In [2] führt K. Baclawski den Begriff der Cohen-Macaulay-Halbordnung ein. Ist $\mathcal{P}$ eine Halbordnung mit maximaler Kettenlänge d , dann sei $K(\mathcal{P})$ der abstrakte Simplicialkomplex, dessen Simplexe die Ketten von $\mathcal{P}$ sind, einschließlich des leeren Simplexes, das der leeren Kette entspricht. $K(\mathcal{P})$ ordnen wir in üblicher Weise reduzierte Homologiegruppen $\tilde{H}_i(K(\mathcal{P}), K)$ über dem Körper K zu. Wir sagen, $\mathcal{P}$ ist ein Homologie-Bouquet über K , wenn

$$\tilde{H}_i(K(\mathcal{P}), K) = 0 \quad \text{für alle } i \text{ mit } 0 < i < d,$$

d.h., $K(\mathcal{P})$ ist aus topologischer Sicht die Vereinigung d -dimensionaler Sphären. Fügen wir zu $\mathcal{P}$ zusätzlich ein kleinstes Element $\hat{0}$ und ein größtes Element $\hat{1}$ hinzu, dann sei $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$. $\hat{\mathcal{P}}$ heißt nun Cohen-Macaulay-Halbordnung, wenn jedes offene Intervall (x, y) in $\hat{\mathcal{P}}$ ein Homologie-Bouquet ist. Es erweist sich ([2], Prop. 3.3), daß diese Definition gleichwertig mit der von A. Reisner [8], Theorem 1, gegebenen Charakterisierung von Cohen-Macaulay-Komplexen ist.

Cohen-Macaulay-Halbordnungen besitzen eine Rangfunktion ([2], Prop. 3.1), d.h., in jedem offenen Intervall (x, y) von $\hat{\mathcal{P}}$ besitzt jede maximale Kette dieselbe Länge $r(x, y)$. Wir nennen $r(\hat{0}, x)$ den Rang von x und bezeichnen ihn kurz mit $r(x)$.

Für weitere Eigenschaften von Cohen-Macaulay-Halbordnungen sei u.a. auf die Arbeiten [2] und [3] verwiesen.

1. Algebraische Vorbereitungen

Sei $\mathcal{P}$ eine Halbordnung auf der Menge $V = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann ordnen wir entsprechend wie Reisner [6] jedem Element $a_i \in V$ eine Unbestimmte x_i über dem Körper K zu.

Sei $R = K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in $x_1, \dots, x_n$ über K . Der Halbordnung $\mathcal{P}$ ordnen wir das Ideal $I(\mathcal{P}, K)$ zu, das von allen quadratfreien Produkten $x_i \cdot x_j$ erzeugt wird, so daß a_i und a_j in $\mathcal{P}$ nicht vergleichbar sind:

$$I(\mathcal{P}, K) = (\{x_i \cdot x_j : a_i \neq a_j \wedge -a_i < a_j \wedge -a_j < a_i\}) \cdot R.$$

Ist $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ eine Teilhalbordnung von $\mathcal{P}$, die auf einer Teilmenge V' von V definiert ist, müssen wir die Unbestimmten x_i für die $a_i \notin V'$, ebenfalls hinzufügen. Dann entspricht einer Kette $\mathcal{P}' = \{a_{i_0} \mathcal{P}' \dots \mathcal{P}' a_{i_m}\}$ in $\mathcal{P}$ das Ideal

$$I(\mathcal{P}', K) = (\{x_j : 1 \leq j \leq n \wedge j \notin \{i_0, \dots, i_m\}\}) \cdot R.$$

Es gilt ([6], Prop. 1, Proof)

$$I(\mathcal{P}, K) = \bigcap I(\mathcal{P}', K) : \quad \{\mathcal{P}' \text{ ist maximale Kette (der Länge } m) \text{ in } \mathcal{P}\}.$$

$I(\mathcal{P}', K)$ hat die Krull-Dimension $m+1$, die wir mit $\dim I(\mathcal{P}', K)$ bezeichnen. Es gilt (vgl. [4], 131.7)

$$\dim I(\mathcal{P}, K) = \max \{\dim I(\mathcal{P}', K) : \mathcal{P}' \text{ ist Kette in } \mathcal{P}\} = d+1.$$

$\mathcal{P}$ ist nach den oben angeführten Ergebnissen von Baclawski und Reisner genau dann Cohen-Macaulay-Halbordnung, wenn es d Formen $F_0, \dots, F_{d-1} \in R$ gibt, so daß das Ideal $(I(\mathcal{P}, K), F_0, \dots, F_{d-1})R$ ungemischt von der Krull-Dimension 1 ist. Letztere Bedingung wird in der Theorie der Polynomringe als Definition für die Cohen-Macaulay-Eigenschaft genommen und liegt der Arbeit [6] zugrunde. Man sagt auch, $I(\mathcal{P}, K)$ ist perfekt über K . Ist $I(\mathcal{P}, K)$ perfekt, dann ist für alle Formen $F'_0, \dots, F'_d$ so daß

$$\dim (I(\mathcal{P}, K), F'_0, \dots, F'_{i-1}) = n - \dim I(\mathcal{P}, K) - i,$$

das Ideal $(I(\mathcal{P}, K), F'_0, \dots, F'_i)$ ungemischt für $i = 1, \dots, d-1$.

Es sei im folgenden $\mathcal{P}$ eine Halbordnung mit Rangfunktion, I_j

die Indexmenge $I_j = \{i : r(a_i) = j\}$ und L_j die Linearform $L_j = \sum x_i : i \in I_j$.

Satz 1: Sei $\mathfrak{A} = (x_1, \dots, x_n) \cdot R$ das maximale homogene Ideal in R , $d = \dim I(\mathcal{P}, K) - 1$ und $I^*(\mathcal{P}, K) = (I(\mathcal{P}, K), L_0, \dots, L_d)$. Dann gilt $\mathfrak{A}^{d+2} \subset I^*(\mathcal{P}, K)$.

Beweis: $I^*(\mathcal{P}, K)$ enthält alle Quadrate der Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$, denn wenn $r(a_i) = j$, tritt x_i in L_j als Summand auf. In der Summe $x_k \cdot L_j = \sum_{i \in I_j} x_k \cdot x_i$ ist $x_k \cdot x_i \in I(\mathcal{P}, K)$ für

$i \neq k$, da a_i und a_k unvergleichbar sind. Daher ist auch $x_k^2 \in I^*(\mathcal{P}, K)$. Ist $x_{i_0} \dots x_{i_{d+1}}$ ein Produkt aus $d+2$ paarweise verschiedenen Unbestimmten, so sind sicher zwei der Elemente $a_{i_0}, \dots, a_{i_{d+1}}$ unvergleichbar, da d die maximale Kettenlänge ist, also $x_{i_0} \dots x_{i_{d+1}} \in I^*(\mathcal{P}, K)$. ■

Wegen Satz 1 gibt es eine endliche Kompositionsreihe homogener Ideale von $I^*(\mathcal{P}, K)$ bis $\mathfrak{A}$ der Länge μ :

$$I^*(\mathcal{P}, K) = \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_\mu = \mathfrak{A}.$$

Satz 2: Sei $\mathcal{P}$ eine Halbordnung mit Rangfunktion, d.h., $I(\mathcal{P}, K)$ ist ungemischt. $I(\mathcal{P}, K)$ ist genau dann perfekt, wenn μ gleich der Anzahl der maximalen Ketten in $\mathcal{P}$ ist.

Beweis: Wir betrachten die Hilbertfunktion $H(t, I(\mathcal{P}, K))$ des Ideals $I(\mathcal{P}, K)$. $H(t, I(\mathcal{P}, K))$ ist für genügend großes t ein Polynom in t , das man folgendermaßen angeben kann:

$$H(t, I(\mathcal{P}, K)) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \dots + h_d, \quad h_0 > 0, \quad h_0, \dots, h_d \in \mathbb{Z}.$$

Der höchste Koeffizient $h_0 = h_0(I(\mathcal{P}, K))$ ist die Ordnung des Ideals $I(\mathcal{P}, K)$. Nach [2], 6., Satz 24, ist wegen

$$I(\mathcal{P}, K) = \bigcap I(\mathcal{P}', K) : \{\mathcal{P}' \text{ ist maximale Kette in } \mathcal{P}\},$$

da $\mathcal{P}$ eine Rangfunktion besitzt,

$$h_0(I(\mathcal{P}, K)) = \sum h_0(I(\mathcal{P}', K)).$$

Die Ideale $I(\mathcal{P}', K)$ haben die Ordnung 1, da sie von Linearformen erzeugt werden. Folglich ist $h_0(I(\mathcal{P}, K))$ gleich der Anzahl der maximalen Ketten von $\mathcal{P}$.

Sei andererseits x_{n+1} eine Unbestimmte über R . Mit α^* bezeichnen wir das von $\alpha \cdot R$ in $R[x_{n+1}]$ erzeugte Erweiterungsideal. Nach [5], (6.6), gilt $\alpha = \alpha^* \cap R$, und α ist genau dann prim (primär), wenn α^* prim (primär) ist. Die Hilbertfunktion $H(t, I^*(P, K)^*)$ des Ideals $I^*(P, K)^*$ ist für genügend großes t eine Konstante, die Ordnung $h_0(I^*(P, K)^*)$. Nach [8], Satz, ist $I(P, K)$ genau dann perfekt, wenn

$$h_0(I^*(P, K)^*) = h_0(I(P, K)) \cdot h_0(L_0, \dots, L_d),$$

also $h_0(I^*(P, K)^*) = h_0(I(P, K))$, da $h_0(L_0, \dots, L_d) = 1$. Weiterhin ist $h_0(I^*(P, K)^*) = \mu \cdot h_0(\mathfrak{M}^*)$ nach [4], 143.5, wobei μ die Länge einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{M}^*$ -primären Idealen von $I(P, K)^*$ nach $\mathfrak{M}^*$, also gleich der Länge einer Kompositionsreihe von homogenen Idealen von $I^*(P, K)$ nach $\mathfrak{M}$ ist. ■

2. Algorithmische Realisierung

Der Algorithmus besteht im wesentlichen aus zwei Teilen. Zum einen werden nach der Eingabe der miteinander in Relation stehenden Elemente die maximalen Ketten bestimmt (und damit ihre Anzahl), und zum anderen wird eine Kompositionsreihe von $I^*(P, K)$ bis $\mathfrak{M}$ konstruiert. Wegen $\mathfrak{M}^{d+1} \subset I^*(P, K)$ gibt es ein r mit $1 < r \leq d$, so daß $\mathfrak{M}^{r+1} \subset I^*(P, K)$, aber $\mathfrak{M}^r \not\subset I^*(P, K)$. Die Kompositionsreihe kann man so aufbauen, daß die Ideale $(I^*(P, K), \mathfrak{M}^s)$ für $s = 1, \dots, r$ darin auftreten:

$$I^*(P, K) \subset (I^*(P, K), \mathfrak{M}^r) \subset \dots \subset (I^*(P, K), \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}.$$

Nach [9], Ch. III, §6, ist der Faktormodul

$$(I^*(P, K), \mathfrak{M}^s) / (I^*(P, K), \mathfrak{M}^{s+1})$$

ein Vektorraum über $K = R/\mathfrak{M}$, dessen Dimension μ_s sei, und für den wir eine Basis bestimmen wollen. Als Basiselemente können wir Restklassen von Potenzprodukten $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ wählen, so daß $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_s}$ eine Kette der Länge $s-1$ ist. Sind $p_1, \dots, p_{r_s}$ die Potenzprodukte vom Grad s und $q_1, \dots, q_{r_{s-1}}$ diejenigen vom Grad $s-1$, die Ketten der Länge $s-1$ bzw. $s-2$ in P repräsentieren, dann entstehe G aus $q_i L_j$, indem wir alle Potenzprodukte in $q_i L_j$ streichen, die bereits in $I(P, K)$ auftreten. Bezeichnen wir diese Formen mit $G_1, \dots, G_{s_1}$, so gilt $G_j = \sum e_{ij} p_i$ mit $e_{ij} \in \{0, 1\}$, $j=1, \dots, s_1$.

Die Koeffizienten e_{ij} aller dieser Formen werden zu einer

Matrix $M = (e_{ij})$ zusammengefaßt. Nun ist $p_i \in I^*(P, K)$ genau dann, wenn es $y_1, \dots, y_{s_1} \in K$ gibt, so daß $p_i = \sum y_j G_j$, wenn also das lineare Gleichungssystem $M \xi = \eta_i$ lösbar ist, wobei wir p_i durch den Vektor η_i repräsentieren, der als i -te Komponente die 1 und sonst 0 besitzt. Offenbar ist $M \xi = \eta_i$ genau dann unlösbar, wenn die i -te Zeile von M linear abhängig von den vorherigen ist, also $\mu_s = s - \text{Rang } M$. Da M eine ganzzahlige Matrix ist, können wir bei der Rangbestimmung in $\mathbb{Z}$ rechnen. Ist daher $p > 0$ eine Primzahl, so ergibt sich durch das Rechnen modulo p eine Aussage darüber, ob P über einem Körper K der Charakteristik p eine Cohen-Macaulay-Halbordnung ist oder nicht.

3. Bemerkungen zur rechentechnischen Umsetzung

Dem realisierten Algorithmus liegt folgende Programmstruktur zugrunde:

I Eingabe der Halbordnung: Zur Beschreibung von P reicht es aus, diejenigen Elementepaare anzugeben, die unmittelbar zueinander in Relation stehen. Es sind $A[1..n]$, $B[1..n]$ Stringvektoren, in denen Erzeugendenpaare $A[i]/B[i]$ des Hasse-Diagramms gespeichert werden.

II Überprüfung der Antisymmetrie: Dieser Schritt ist notwendig, da ansonsten auf Grund von Eingabefehlern im weiteren Programmablauf endlose Schleifen entstehen können.

```
| i := 1 (1) n
|| j := i+1 (1) n
|| if A[j] = B[i] and A[i] = B[j] then Programmabbruch
```

III Bestimmung der Kettenanfänge: Es werden diejenigen Elemente gesucht, die nur im Vektor A , nicht aber in B auftreten.

```
| i := 1 (1) n
| if A[i] not in B[1..n] then A[i] Anfangselement
```

IV Suche der maximalen Ketten: Ausgehend von allen in III gefundenen Anfangspaaren werden durch Suche von Anschlußelementen Ketten gebildet.

$K' := A[i] + B[i]$ (Kettenbildung durch Stringaddition)

```

repeat
K := K'
j := 1 (1) n
if A[j] = B[i] then K' = K + B[j]
until K' = K

```

Durch rückwärtiges-Suchen muß nach eventuell verschiedenen Anschlußelementen gesucht werden, um Verzweigungen in der Halbordnung zu berücksichtigen.

```

Speicherung aller K im Vektor V1[1..p]
j := 1 (1) p-1
if Länge V1[j] <> Länge V1[j+1] then Programmabbruch
(nicht Cohen-Macaulay !)
l := Länge V1[1] (maximale Kettenlänge)
max := p (Anzahl der maximalen Ketten)

```

V. Bestimmen der Ränge/Aufstellen der Linearformen:

```

C[1..m] (Elemente der Halbordnung)
i := 1 (1) m
r := Position von C[i] in V1[j] (beliebige Kette, die
C[i] enthält)
L[r, nr] := C[i] (L[1..1, 1..nr] - Linearformen,
nr-Anzahl der Elemente vom Rang r)
nr := nr + 1

```

VI Bestimmung der Länge μ der Idealkette: Es ist zu untersuchen, welche Potenzprodukte vom Grad s ($1 \leq s \leq 2$) sich nicht als Linearkombinationen von Potenzprodukten vom Grad $s-1$ mit den Linearformen L_i darstellen lassen. Da nur die Ketten untersucht werden müssen, die keine nichtvergleichbaren Elemente enthalten, können die kürzeren Ketten durch sukzessiven Abbau aus den maximalen Ketten gewonnen werden.

```

μ := 1 (Ausgangsideal)
s := 1 (-1) 2
i := 1 (1) p
s-maliges Streichen jeweils eines Elementes aus V1[i]
Speicherung der so gewonnenen Ketten der Länge s-1 in
V2[1..q]
lexikographisches Ordnen von V2
Aufstellen der Koeffizientenmatrix
M[1..p, 1..t] ganzzahlige Matrix, alle Elemente gleich 0
t := 1

```

```

i := 1 (1) q
j := 1 (1) l
k := 1 (1) nj
K := V2[i] + L[j,k] (evtl. Umordnen zur Kette !)
u := 1 (1) p
if K=V1[u] then M[u,t] := 1
t := t+1 (falls Kette aus V1 in V2[i]*L[j] gefunden
wurde)
Anwendung des Gauß-Algorithmus auf M
Anzahl  $\mu_s$  der gestrichenen Zeilen ist t - Rang M
 $\mu := \mu + \mu_s$ 
V1 := V2
V2 löschen
 $\mu := \mu + (m-1)$  (m-1 : Anzahl der nicht im Ausgangsideal
enthaltenen Potenzprodukte vom Grad 1)
if  $\mu = \max$  then Cohen-Macaulay-Eigenschaft ist erfüllt !

```

4. Anmerkungen zur Realisierung des Algorithmus

Auf der Grundlage des hier verkürzt beschriebenen Algorithmus wurde ein Programm in einer Turbo-Pascal-Variante für einen 16-bit-Personalcomputer geschrieben. Bei der Umsetzung sollte folgendes beachtet werden:

- Es ist mit Problemen hinsichtlich der Speicherkapazität zu rechnen. Nach Möglichkeit wurden Stringvektoren mehrfach genutzt (z.B. werden die Vektoren der Erzeugenden nach Schritt V nicht mehr benötigt). Der Gauß-Algorithmus ist günstig ganzzahlig zu realisieren, so daß M keine speicherplatzintensivere Real-Matrix sein muß. Die ganzzahlige Rechnung bietet darüber hinaus die Möglichkeit, über Koeffizientenkörper mit einer Charakteristik größer 0 Aussagen zu treffen.

- Zur Vermeidung allzu langer Rechenzeiten wurden auftretende Vektoren lexikographisch geordnet, um bei der häufig vorkommenden Suche nach bestimmten Elementen nach Überschreiten bestimmter Schranken abbrechen zu können.

- Beispiele zum Testen des Programms lassen sich leicht durch baryzentrische Unterteilung einfacher simplizialer Komplexe gewinnen. So ergibt z.B. ein Tetraeder eine Halbordnung mit 14 Elementen und 24 Ketten der Länge 3. Diese Halbordnung ist Cohen-Macaulay; die Laufzeit unseres Programms beträgt dafür 2 Minuten.

Literatur

1. Baclawski, K.: Whitney numbers of geometric lattices. Adv. in Math. 16, 125-138 (1975)
2. Baclawski, K.: Cohen-Macaulay ordered sets. J. Algebra 63 226-258 (1980)
3. Björner, A.: Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. 260, 159-183 (1980)
4. Gröbner, W.: Moderne algebraische Geometrie. Wien 1949
5. Nagata, M.: Local Rings. New York 1962
6. Reisner, G.: Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings. Adv. in Math. 21, 30-49 (1976)
7. Renschuch, B.: Elementare und praktische Idealtheorie. Berlin 1976
8. Renschuch, B., und Vogel, W.: Zum Nachweis arithmetischer Cohen-Macaulay-Varietäten. Monatsh. Math. 85, 201-210 (1978)
9. Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1960

eingegangen: 29. 3. 1988

revidierte Fassung: 10. 8. 1988

Verfasser:

stud. paed. Thomas Häntzschel
Dr. sc. nat. Dieter Neßelmann
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Jouko Tervo

On strongly coercive pseudo-differential operators

1. Introduction

Let G be an open set in $\mathbb{R}^n$ and let L be a linear operator from $C_0^\infty(G)$ into the Schwartz class S . Furthermore, let K^* denote the totality of positive continuous weight functions k such that for each $k \in K^*$ one finds $C > 0$ and $s \in \mathbb{R}$ with

$$k(\xi) \leq C(1+|\xi|^2)^{s/2} =: Ck_s(\xi) \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Let k and $\tilde{k}$ be in K^* . We say that the operator L is strongly $\tilde{k}$ -coercive on G , when the estimate

$$\operatorname{Re}(L\varphi, \varphi)_k \geq C_1 \|\varphi\|_{k\sqrt{\tilde{k}}}^2 - C_2 \|\varphi\|_k^2 \quad (1.2)$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(G)$ holds with $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$. Here the scalar product $(\dots)_k: S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ is defined by

$$(\varphi, \psi)_k := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (F\varphi)(\xi) \overline{(F\psi)(\xi)} k^2(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

where $F: S \rightarrow S$ is the Fourier transform.

Various classes of partial differential operators satisfy the estimate (1.2) with certain weight functions k and $\tilde{k}$. For the elliptic case we refer to [3] and [1, pp. 78-90]. For the semi-elliptic case cf. [8]. For a certain non-hypoelliptic class of operators the estimate (1.2) is established in [5]. For strongly 2t-coercive operators with constant coefficients we refer to [6] (cf. also [10]). The estimates (1.2) are also obtained for classes of pseudo-differential operators (cf. [1, 7] and [9, pp. 54-55]).

We shall give an algebraic characterization of (1.2) in the case when G belongs to a certain subclass A of open sets in $\mathbb{R}^n$ and when L is a translation invariant pseudo-differential operator with smooth (tempered) symbol (cf. Theorem 3.1).

Furthermore, we shall show a sufficient condition for the vali-

dity of (1.2) in the case when $G = \mathbb{R}^n$ and when L is a pseudo-differential operator, whose symbol $L(\dots)$ lies in the Beals and Fefferman class $S_{\Phi, \varphi}^{M, m}$ of symbols (cf. Theorem 4.5). Specifically, we obtain that (1.2) holds with $k = k_s$, $s \in \mathbb{R}$ and $k^* = k_t$, when the symbol $L(\dots)$ of L lies in the Hörmander class $S_{\varphi, \delta}^m$, $0 < \delta < \varepsilon < 1$, $m \in \mathbb{R}$ of symbols and when (with $r > 0$ and $R > 0$)

$\operatorname{Re} L(x, \xi) \geq r k_t(\xi)$ for $x \in \mathbb{R}^n$ and $|\xi| > R$
where $t \in]m - (\varepsilon - \delta), m]$.

2. Preliminary notations

2.1. Let K^* be a totality of positive continuous weight functions $k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such that for each $k \in K^*$ there exist constants $C > 0$ and $s \in \mathbb{R}$ with

$$k(\xi) \leq C(1 + |\xi|^2)^{s/2}, \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

In the following we denote $k_s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$; $s \in \mathbb{R}$. The function k_s is clearly an element of K^* . We also remark that the totality K of weight functions given in [4, p. 4] is a subset of K^* .

Suppose that p is a number in the interval $[1, \infty[$. In the Schwartz class S we define a norm and a scalar product with the requirements

$$\|\varphi\|_{p, k} = \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |(F\varphi)(\xi) k(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \quad (2.2)$$

and

$$(\varphi, \psi)_k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (F\varphi)(\xi) \overline{(F\psi)(\xi)} k^2(\xi) d\xi, \quad (2.3)$$

where F denotes the Fourier transform from the Schwartz class S into S . We write $\|\varphi\|_k = \|\varphi\|_{2, k}$.

The integral $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x) dx$ is denoted by $\varphi(\psi)$. We recall the Parseval identity

$$\varphi(\psi) = (2\pi)^{-n} (F\varphi)(\overline{F\psi}). \quad (2.4)$$

2.2. In the sequel we shall consider strongly coerciveness results for the linear pseudo-differential operators $L(x, D)$ defined by

$$(L(x, D)\varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} L(x, \xi) (F\varphi)(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi, \quad (2.5)$$

for $\varphi \in S$.

Here the mapping $L(\dots): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ lies in $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ and obeys certain (which we shall make explicit below) tempered conditions.

Let (Φ, ϕ) form a pair of weight functions $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in the sense of Beals and Fefferman [2], that is, Φ and ϕ are positive continuous functions $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such that with some $c > 0$, $C > 0$ and $\varepsilon > 0$ one has

- (i) $c \leq \Phi(x, \xi) \leq Ck_1(\xi)$ and $ck_{\varepsilon-1}(\xi) \leq \phi(x, \xi) \leq C$ for all $x, \xi \in \mathbb{R}^n$,
- (ii) $c \leq \phi(x, \xi)\Phi(x, \xi)$ for all $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) For each $q > 0$ there exists a constant $C_q > 0$ such that the estimate

$$\frac{\Phi(x, \xi)}{\phi(x, \xi)} \frac{\phi(y, \eta)}{\Phi(y, \eta)} + \frac{\phi(x, \xi)}{\Phi(x, \xi)} \frac{\Phi(y, \eta)}{\phi(y, \eta)} < C_q$$

holds for all $(x, (\xi, \eta)), (y, (\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^n \times E_q$, where E_q is defined by

$$E_q = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n: \frac{|\xi|}{|\eta|} + \frac{|\eta|}{|\xi|} < q\}.$$

- (iv) For each $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ there exists a constant $C_{x, \xi} > 0$ such that the estimates

$$\frac{\Phi(y, \eta)}{\phi(x, \xi)} + \frac{\phi(x, \xi)}{\Phi(y, \eta)} < C_{x, \xi} \quad \text{and} \quad \frac{\phi(y, \eta)}{\phi(x, \xi)} + \frac{\phi(x, \xi)}{\phi(y, \eta)} < C_{x, \xi}$$

hold for all $(y, \eta) \in U(x, \xi) := \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n: |y-x| < c\phi(x, \xi) \text{ and } |\eta-\xi| < c\Phi(x, \xi)\}$.

One sees easily that the functions $\Phi(x, \xi) := k_e(\xi)$ and $\phi(x, \xi) := k_{\frac{1}{e}}(\xi)$ form a pair of weight functions, when $0 < \varepsilon \leq e < 1$; $\varepsilon < 1$.

Let M and m be in $\mathbb{R}$. Suppose that $L(\dots)$ is a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ -mapping such for each $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$ there exists

a constant $C_{\alpha, \beta} > 0$ with

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta L(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \Phi^{M-|\beta|}(x, \xi) \phi^{m-|\alpha|}(x, \xi) \quad (2.6)$$

for all $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Then we say that $L(\dots)$ lies in $S_{\Phi, \phi}^{M, m}$ (and

the mapping $L(\dots)$ is called a symbol lying in $S_{\Phi, \phi}^{M, m}$). We

remark that $S_{\Phi, \phi}^{M, m}$ is the Hörmander class $S_{e, \delta}^{Me-m\delta}$ of

symbols. For the basic calculus of pseudo-differential operators

(2.5) with symbols in $S_{\Phi, \phi}^{M, m}$ we refer to [2, pp.1-19]. We recall

that $L(x, D)$ maps S into itself when $L(\dots)$ belongs to $S_{\Phi, \phi}^{M, m}$ (Lemma 1 of [2]).

Suppose that L is a linear operator from S into S . We say that the formal transpose of L exists if one can find a linear operator $L': S \rightarrow S$ such that

$$(L\varphi)(\psi) = \varphi(L'\psi) \quad \text{for all } \varphi, \psi \in S. \quad (2.7)$$

The operator L' is the formal transpose of L . In the case when

$L(\dots)$ lies in $S_{\Phi, \phi}^{M, m}$, the formal transpose $L'(x, D)$ of $L(x, D)$ exists and the symbol $L'(\dots)$ of $L'(x, D)$ is of the form

$$L'(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha L)(x, -\xi) + S_N(x, \xi), \quad (2.8)$$

where $S_N(\dots) \in S_{\Phi^N, \phi^N}^{M-N, m-N}$ (cf. [2], Theorem 1, p. 4). Here the

weight functions Φ^N and ϕ^N are defined by $\Phi^N(x, \xi) = \Phi(x, -\xi)$ and $\phi^N(x, \xi) = \phi(x, -\xi)$.

2.3. Let $L(\cdot)$ be a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -mapping such that for each $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ there exist constants $C_\beta > 0$ and $\mu_\beta \in \mathbb{R}$ with

$$|D_\xi^\beta L(\xi)| \leq C_\beta k_{\mu_\beta}(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

Then the (translation invariant) pseudo-differential operator $L(D)$ defined by

$$(L(D)\varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} L(\xi) (F\varphi)(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi \quad (2.10)$$

maps S into S . This follows from the fact that one has

$$L(\cdot)F\varphi \in S$$

$$(2.11)$$

and from the Fourier inversion formula. In addition, one has

$$F(L(D)\varphi)(\xi) = L(\xi)(F\varphi)(\xi), \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.12)$$

From the Parseval identity and from Fubini Theorem one sees that the formal transpose $L'(D)$ of $L(D)$ exists and $L'(D)$ is given by

$$(L'(D)\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} L(-\xi)(F\varphi)(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi. \quad (2.13)$$

One sees easily that every translation invariant symbol $L(x, \xi) \equiv L(\xi)$ which belongs to $S_{\Phi, \varphi}^{M, m}$ satisfies the estimate (2.9).

3. On coercivity of a translation invariant operator

Denote by A a subclass of open sets in $\mathbb{R}^n$ such that

$$A := \{G \subset \mathbb{R}^n: \text{ for any } l \in \mathbb{N} \text{ there exists } x_l \in \mathbb{R}^n \text{ so that the open ball } B(x_l, 1) \subset G\}.$$

For example, the open cone in $\mathbb{R}^n$ belongs to A . Specifically, the whole space $\mathbb{R}^n$ is an element of A .

Let k and $k^\sim$ be in K^* . Suppose that $L(\cdot)$ lies in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that (2.9) holds. Then $L(D)$ maps S into S and so we are able to consider the validity of the following estimate:

$$\operatorname{Re}(L(D)\varphi, \varphi)_k \geq C_1 \|\varphi\|_{k\sqrt{k}}^2 - C_2 \|\varphi\|_k^2 \quad (3.1)$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(G)$, where $C_1 > 0$ and $C_2 \geq 0$. In fact, we establish the characterization

Theorem 3.1: Suppose that G belongs to A and that $L(\cdot)$ obeys the estimate (2.9). Then the inequality (3.1) holds if and only if

$$\operatorname{Re} L(\xi) + C_2 \geq C_1 k^\sim(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Proof: A. At first we show that (3.1) implies (3.2). Choose $\theta \in C_0^\infty$ such that $\theta(x) = 1$ for

$x \in B(0, 1/2) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/2\}$ and that $\text{supp } \theta \subset B(0, 1)$. Fix $\xi \in \mathbb{R}^n$. For any $l \in \mathbb{N}$ we define

$$\theta_1(x) := l^{-n/2} \theta((x-x_1)/l) e^{i(\xi, x)}. \quad (3.3)$$

Then one sees that $\theta_1 \in C_0^\infty(G)$ (since $\text{supp } \theta_1 \subset B(x_1, 1) \subset G$). Furthermore, one obtains (by (2.12))

$$\begin{aligned} (F\theta_1)(\eta) &= l^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \theta((x-x_1)/l) e^{i(\xi-\eta, x)} dx \\ &= l^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y) e^{i(\xi-\eta, ly+x_1)} dy \\ &= l^{n/2} (F\theta)(l(\xi-\eta)) e^{i(\xi-\eta, x_1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

and

$$\begin{aligned} F(L(D)\theta_1)(\eta) &= L(\eta)(F\theta_1)(\eta) \\ &= l^{n/2} L(\eta)(F\theta)(l(\xi-\eta)) e^{i(\xi-\eta, x_1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

for any $\eta \in \mathbb{R}^n$. Thus we have

$$\begin{aligned} \|\theta_1\|_k^2 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} l^n |(F\theta)(l(\xi-\eta))|^2 k^2(\eta) d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |(F\theta)(\tau)|^2 k^2(\xi-(\tau/l)) d\tau, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\|\theta_1\|_{k\sqrt{k}}^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |(F\theta)(\tau)|^2 (k^2 k^\sim)(\xi-(\tau/l)) d\tau, \quad (3.7)$$

and

$$\begin{aligned} \text{Re}(L(D)\theta_1, \theta_1)_k &= \text{Re}[(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} F(L(D)\theta_1)(\eta) \overline{(F\theta_1)(\eta)} k^2(\eta) d\eta] \\ &= \text{Re}[(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} l^n L(\eta) |(F\theta)(l(\xi-\eta))|^2 k^2(\eta) d\eta] \\ &= \text{Re}[(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} L(\xi-(\tau/l)) k^2(\xi-(\tau/l)) |F\theta(\tau)|^2 d\tau]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Since $k \in K^*$ is continuous, one has $|F\theta(\tau)| k(\xi-(\tau/l)) \rightarrow |F\theta(\tau)| k(\xi)$. Furthermore, one has (by (2.1))

$$\begin{aligned} &|F\theta(\tau)|^2 k^2(\xi-(\tau/l)) \\ &\leq C^2 2^{|s|} k_s^2(\xi) (1 + |\tau/l|^2)^{|s|} |F\theta(\tau)|^2 \\ &\leq C^2 2^{|s|} k^2(\xi) (1 + |\tau|^2)^{|s|} |F\theta(\tau)|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

for all $l \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}^n$. Hence in virtue of the Lebesgue Dominated Convergence Theorem we get the convergence

$$\|\theta_1\|_k^2 \rightarrow k^2(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2 \quad (3.10)$$

(note that $k_0 \equiv 1$). Similarly one sees that

$$\|\theta_1\|_{k\sqrt{k}}^2 \rightarrow k^2(\xi) k^\sim(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2. \quad (3.11)$$

In view of the estimates (2.9) and (2.1) we have

$$\begin{aligned} & |L(\xi - \frac{\tau}{l}) k^2(\xi - \frac{\tau}{l})| |(F\theta)(\tau)|^2 \\ & \leq C C_0 2^{|s|} (1 + |\xi - \frac{\tau}{l}|^2)^{\mu_0/2} k(\xi) (1 + |\tau/l|^2)^{|s|} |(F\theta)(\tau)|^2 \\ & \leq C C_0 2^{|s| + |\mu_0/2|} (1 + |\xi|^2)^{|\mu_0/2|} k(\xi) (1 + |\tau/l|^2)^{|s| + |\mu_0/2|} |(F\theta)(\tau)|^2 \\ & \leq C C_0 2^{|s| + |\mu_0/2|} k_{\mu_0} |\xi| k(\xi) (1 + |\tau|^2)^{|s| + |\mu_0/2|} |(F\theta)(\tau)|^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

for all $l \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}^n$.

Since $L(\cdot)$ and k are continuous the integrand

$L(\xi - \frac{\tau}{l}) k^2(\xi - \frac{\tau}{l}) |(F\theta)(\tau)|^2$ is covering to $L(\xi) k^2(\xi) |(F\theta)(\tau)|^2$ for each $\tau \in \mathbb{R}^n$. Hence the Lebesgue Dominated Convergence Theorem implies that

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L(D)\theta_1, \theta_1)_k & \rightarrow \operatorname{Re}[L(\xi) k^2(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2] \\ & = (\operatorname{Re} L(\xi)) k^2(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituting θ_1 in the estimate (3.1) and letting $l \rightarrow \infty$, we obtain

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} L(\xi)) k^2(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2 \\ & > C_1 k^2(\xi) k^\sim(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2 - C_2 k^2(\xi) \|\theta\|_{k_0}^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

and then one has

$$\operatorname{Re} L(\xi) + C_2 > C_1 k^\sim(\xi),$$

that is, the estimate (3.2) holds.

B. Conversely, suppose that (3.2) holds. Then we obtain for all $\varphi \in S$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} L(\xi)(F\varphi)(\xi) \overline{(F\varphi)(\xi)} k^2(\xi) + C_2 |(F\varphi)(\xi)|^2 k^2(\xi) \\ & > C_1 |(F\varphi)(\xi)|^2 (k\sqrt{k})^2(\xi) \end{aligned} \quad (3.15)$$

and then one has

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}[F(L(D)\varphi)(\xi) \overline{(F\varphi)(\xi)} k^2(\xi)] d\xi \\ & > C_1 \|\varphi\|_{k\sqrt{k}}^2 - C_2 \|\varphi\|_k^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

which yields the estimate (3.1). This finishes the proof. $\blacksquare$

Remark 3.2: A. In the case when $k^\sim(\xi) \rightarrow \infty$ with $|\xi| \rightarrow \infty$, one sees that (by Theorem 3.1) the inequality (3.1) is valid if and only if there exist constants $E > 0$ and $R > 0$ such that

$$\operatorname{Re} L(\xi) > E k^\sim(\xi) \quad \text{for } |\xi| > R. \quad (3.17)$$

B. As one sees from the proof of Theorem 3.1 (Part B), the inequality (3.2) implies the strongly $k^\sim$ -coercivity on any open set $G \subset \mathbb{R}^n$. Thus, specifically one gets that $L(D)$ is strongly $k^\sim$ -coercive on an open set, which belongs to $\mathcal{A}$, if and only if $L(D)$ is strongly $k^\sim$ -coercive on $\mathbb{R}^n$.

C. In the case when $G = \mathbb{R}^n$ one gets the characterization of Theorem 3.1 more easily: One finds that (3.1) holds if and only if

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} L(\xi) k^2(\xi) |(F\varphi)(\xi)|^2 d\xi \\ & > C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (k^2 k^\sim)(\xi) |(F\varphi)(\xi)|^2 d\xi - C_2 \int_{\mathbb{R}^n} k^2(\xi) |(F\varphi)(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

for $\varphi \in S$, and so (3.1) is valid if and only if

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Re} L(\xi) - C_1 k^\sim(\xi) - C_2) k^2(\xi) |\psi|^2(\xi) d\xi > 0 \quad (3.18)$$

for any $\psi \in S$ (here one must note that since $F: S \rightarrow S$ is an isomorphism, for any $\varphi \in S$ we find one $\psi \in S$ so that $F\varphi = \psi^\vee$). The validity of the inequality (3.18) is clearly equivalent to (3.2), and so the characterization of the Theorem 3.1 is proved.

4. Sufficient criteria for strongly coercivity

4.1. In the sequel we denote $\|\cdot\|_{k_0} = \|\cdot\|_0$ and $(\dots)_{k_0} = (\dots)_0$, that is, $\|\cdot\|_0$ is the L_2 -norm and $(\dots)_0$ is the L_2 -scalar product. We recall from [2] the following two theorems.

Theorem 4.1: Suppose that $L(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{0,0}$. Then there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|L(x, D)\varphi\|_0 \leq C\|\varphi\|_0 \quad \text{for all } \varphi \in S. \quad (4.1)$$

Theorem 4.2: Suppose that $L(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M,m}$ such that

$$L(x, \xi) > 0 \quad \text{for all } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

Then there exists a symbol $l(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M-1, m-1}$ such that

$$\operatorname{Re}((L(x, D) + l(x, D))\varphi, \varphi)_0 > 0 \quad \text{for all } \varphi \in S. \quad (4.3)$$

The proof of Theorem 4.1 is given in [2, p. 12] and the proof of the Theorem 4.2 is given in [2, p. 19].

Let $L(\dots)$ be in $S_{\Phi, \emptyset}^{M,m}$. Then it is clear that the mapping $L_{\operatorname{Re}}(\dots)$ defined by $L_{\operatorname{Re}}(x, \xi) = \operatorname{Re} L(x, \xi)$ is in $S_{\Phi, \emptyset}^{M,m}$. We show

Lemma 4.3: Suppose that $L(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M,m}$ such that

$$\operatorname{Re} L(x, \xi) > 0 \quad \text{for all } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

Then there exists a symbol $a(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M-1, m-1}$ such that

$$\operatorname{Re}((L(x, D) + a(x, D))\varphi, \varphi)_0 > 0 \quad \text{for all } \varphi \in S. \quad (4.5)$$

Proof: Due to Theorem 4.2 one finds a symbol $l(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M-1, m-1}$ such that

$$\operatorname{Re}((L_{\operatorname{Re}}(x, D) + l(x, D))\varphi, \varphi)_0 > 0 \quad \text{for all } \varphi \in S. \quad (4.6)$$

Furthermore, we obtain

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L(x, D)\varphi, \varphi)_0 &= \frac{1}{2}((L(x, D)\varphi, \varphi)_0 + (\overline{L(x, D)\varphi}, \varphi)_0) \\ &= \frac{1}{2}(L(x, D)\varphi + \overline{L'(x, D)\overline{\varphi}}, \varphi)_0 \quad \text{for } \varphi \in S, \end{aligned} \quad (4.7)$$

where $L'(x, D)$ is the formal transpose of $L(x, D)$. The formal transpose $L'(x, D)$ is a pseudo-differential operator with symbol $L'(\dots) \in S_{\Phi, \varphi}^{M, m}$ (cf. Section 2.2). In addition, by (2.8) one finds a symbol $b(\dots) \in S_{\Phi, \varphi}^{M-1, m-1}$ such that

$$L'(x, \xi) = L(x, -\xi) + b(x, -\xi) \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Thus one has

$$\begin{aligned} &(L(x, D)\varphi + \overline{L'(x, D)\overline{\varphi}})(x) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (L(x, \xi)(F\varphi)(\xi)e^{i(\xi, x)} + \overline{L'(x, \xi)(F\varphi)(\xi)}e^{-i(\xi, x)})d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (L(x, \xi) + \overline{L'(x, -\xi)})(F\varphi)(\xi)e^{i(\xi, x)}d\xi \\ &= 2(L_{\operatorname{Re}}(x, D)\varphi)(x) + (\overline{b}(x, D)\varphi)(x), \end{aligned} \quad (4.9)$$

where $\overline{b}(\dots) \in S_{\Phi, \varphi}^{M-1, m-1}$ such that $\overline{b}(x, \xi) = \overline{b(x, -\xi)}$. (In (4.9) we used the relation $(F\overline{\varphi})(\xi) = \overline{(F\varphi)(-\xi)}$). Hence we get from (4.6), (4.7), and (4.9)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((L(x, D) + l(x, D) - \frac{1}{2}\overline{b}(x, D))\varphi, \varphi)_0 \\ = \operatorname{Re}((L_{\operatorname{Re}}(x, D) + l(x, D))\varphi, \varphi)_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

and then (4.5) holds with $a(\dots) = l(\dots) - \frac{1}{2}\overline{b}(\dots)$. This finishes the proof. ■

4.2. Suppose that $L(\cdot) \in S_{\Phi, \varphi}^{M, m}$ is a translation invariant symbol, that is, $L(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ obeys the estimate

$$|D_\xi^\beta L(\xi)| \leq C_\beta \varphi^{M-|\beta|}(x, \xi) \varphi^m(x, \xi) \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.11)$$

In addition, we assume that $L(\cdot)$ is real-valued and that one finds a constant $\gamma > 0$ such that

$$L(\xi) \geq \gamma \varphi^M(x, \xi) \varphi^m(x, \xi) \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.12)$$

Then for each $s \in \mathbb{R}$ the mapping $L^s(\cdot)$ defined by

$L^S(\xi) = (L(\xi))^S$ lies in $S_{\Phi, \phi}^{Ms, ms}$ (cf. [2, p. 3]). We denote (as above) by $L^S(D)$ the pseudo-differential operator (2.5) corresponding the symbol $L^S(\cdot)$. Especially we write $L^1(D) = L(D)$.

Lemma 4.4: Suppose that $P(\cdot) \in S_{\Phi, \phi}^{M, m}$ such that

$$P(\xi) > 0 \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.13)$$

Furthermore, suppose that there exists a symbol $q(\cdot) \in S_{\Phi, \phi}^{M-1, m-1}$ such that with some $\gamma > 0$

$$q(\xi) > \gamma \Phi^{M-1}(x, \xi) \phi^{m-1}(x, \xi) \text{ for all } x, \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

and that

$$\frac{q(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0 \text{ with } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Then for each $l(\dots) \in S_{\Phi, \phi}^{M-1, m-1}$, $\epsilon > 0$, and $N \in \mathbb{N}$ there exists a constant $C > 0$ so that

$$|(l(x, D)\varphi, \varphi)_0| \leq \epsilon \|\varphi\|_{\sqrt{P}}^2 + C \|\varphi\|_{K-N}^2 \text{ for } \varphi \in S. \quad (4.16)$$

Proof: For the first instance we remark that using the property (i) of weight functions Φ and ϕ one sees that $\sqrt{P}$ belongs to K^* .

Let $l(\dots)$ be in $S_{\Phi, \phi}^{M-1, m-1}$ and let $\epsilon > 0$, and $N \in \mathbb{N}$ be arbitrary numbers. The composite operator $q^{-1/2}(D) \circ l(x, D) \circ q^{-1/2}(D)$ is a pseudo-differential operator with the symbol $a(\dots)$, which lies in $S_{\Phi, \phi}^{0, 0}$ (cf. [2, pp. 3-4]). Hence in virtue of Theorem 4.1 one finds a constant $C' > 0$ so that

$$\|a(x, D)\varphi\|_0 \leq C' \|\varphi\|_0, \text{ for all } \varphi \in S. \quad (4.17)$$

Thus one has

$$\begin{aligned} & |(l(x, D) \circ q^{-1/2}(D))\varphi, q^{-1/2}(D)\varphi|_0 \\ &= |(q^{-1/2}(D) \circ l(x, D) \circ q^{-1/2}(D))\varphi, \varphi|_0 \\ &= |(a(x, D)\varphi, \varphi)_0| \leq C' \|\varphi\|_0^2, \text{ for } \varphi \in S. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Let R be a positive number such that

$$\frac{q(\xi)}{P(\xi)} < \varepsilon \quad \text{for } |\xi| > R.$$

Since $q^{1/2}(D)\varphi \in S$ when $\varphi \in S$, we get from (4.18)

$$\begin{aligned} |(L(x, D)\varphi, \varphi)_0| &\leq C' \|q^{1/2}(D)\varphi\|_0^2 \\ &= C' (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} q(\xi) |(F\varphi)(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C' (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| > R} \varepsilon P(\xi) |(F\varphi)(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + C' (2\pi)^{-n} \sup_{|\xi| < R} (q(\xi) k_N^2(\xi)) \int_{|\xi| < R} |(F\varphi)(\xi) k_{-N}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C' (2\pi)^{-n} \varepsilon \|\varphi\|_{\sqrt{P}}^2 + C' (2\pi)^{-n} \sup_{|\xi| < R} (q(\xi) k_N^2(\xi)) \|\varphi\|_{k_{-N}}^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

which implies the estimate (4.16). ■

4.3. In this section we establish a sufficient criterion for the validity of the following estimate

$$\operatorname{Re}(L(x, D)\varphi, \varphi)_k \geq C_1 \|\varphi\|_{k\sqrt{P}}^2 - C_2 \|\varphi\|_k^2, \quad \varphi \in S. \quad (4.20)$$

Theorem 4.5: Suppose that $L(\dots) \in S_{\Phi, \varnothing}^{M, m}$, $P(\dots) \in S_{\Phi, \varnothing}^{M, m}$, $M, m \in \mathbb{R}$, and $k(\dots) \in S_{\Phi, \varnothing}^{M', m'}$, $M', m' \in \mathbb{R}$ such that with some $\gamma > 0$

$$\operatorname{Re} L(x, \xi) \geq \gamma P(\xi) \quad \text{for all } x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4.21)$$

$$P(\xi) > 0 \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4.22)$$

and that

$$k(\xi) \geq \gamma \Phi^{M'}(x, \xi) \varnothing^{m'}(x, \xi) \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.23)$$

Furthermore, suppose that one can find a symbol $q(\dots) \in S_{\Phi, \varnothing}^{M-1, m-1}$ such that with $\gamma > 0$

$$q(\xi) \geq \gamma \Phi^{M-1}(x, \xi) \varnothing^{m-1}(x, \xi), \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4.24)$$

and that

$$\frac{q(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0 \text{ with } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

Then there exist constants $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that estimate (4.20) holds.

Proof: One sees that k belongs to K^* . At first we show that there exists a constant $C > 0$ such that

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} ((k(D) \circ L(x, D) \circ k^{-1}(D)) \varphi, \varphi)_0 \\ & > \left(\frac{\gamma}{2}\right) \|\varphi\|_{\sqrt{P}}^2 - C \|\varphi\|_0^2 \quad \text{for } \varphi \in S. \end{aligned} \quad (4.26)$$

The symbol of the composite operator $L(x, D) \circ k^{-1}(D)$ is $L(\dots)k^{-1}(\cdot)$, which lies in $S_{\Phi, \emptyset}^{M-M', m-m'}$. Furthermore the symbol $A(\dots)$ of the composite operator $A(x, D) := k(D) \circ L(x, D) \circ k^{-1}(D)$ lies in $S_{\Phi, \emptyset}^{M, m}$ and $A(\dots)$ is of the form

$$A(x, \xi) = k(\xi)L(x, \xi)k^{-1}(\xi) + l(x, \xi) = L(x, \xi) + l(x, \xi), \quad (4.27)$$

where $l(\dots)$ belongs to $S_{\Phi, \emptyset}^{M-1, m-1}$.

Let $T(x, \xi) := L(x, \xi) - \gamma P(\xi)$. Then $T(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M, m}$ and by (4.21) one has

$$\operatorname{Re} T(x, \xi) > 0 \quad \text{for all } x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.28)$$

Due to Lemma 4.3 there exists $a(\dots) \in S_{\Phi, \emptyset}^{M-1, m-1}$ so that

$$\operatorname{Re}(T(x, D) + a(x, D)\varphi, \varphi)_0 > 0 \quad \text{for all } \varphi \in S. \quad (4.29)$$

Thus one has

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(L(x, D)\varphi, \varphi)_0 > \gamma(P(D)\varphi, \varphi)_0 - \operatorname{Re}(a(x, D)\varphi, \varphi)_0 \\ & = \gamma \|\varphi\|_{\sqrt{P}}^2 - \operatorname{Re}(a(x, D)\varphi, \varphi)_0, \quad \text{for } \varphi \in S. \end{aligned} \quad (4.30)$$

In virtue of (4.28) and (4.30) we obtain

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(A(x, D)\varphi, \varphi)_0 = \operatorname{Re}(L(x, D)\varphi, \varphi)_0 + \operatorname{Re}(l(x, D)\varphi, \varphi)_0 \\ & > \gamma \|\varphi\|_{\sqrt{P}}^2 + \operatorname{Re}((l(x, D) - a(x, D))\varphi, \varphi)_0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Due to Lemma 4.4 we find a constant $C > 0$ so that

$$|\operatorname{Re}(l(x, D) - a(x, D)\varphi, \varphi)_0| \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right) \|\varphi\|_{\sqrt{F}}^2 + C\|\varphi\|_0^2, \quad \text{for all } \varphi \in S. \quad (4.32)$$

Thus the inequality (4.26) follows from (4.31).

Since $k(D)\varphi \in S$ when $\varphi \in S$, we obtain by (4.26)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L(x, D)\varphi, \varphi)_k &= \operatorname{Re}((k(D) \circ L(x, D) \circ k^{-1}(D))(k(D)\varphi), k(D)\varphi)_0 \\ &> \left(\frac{\gamma}{2}\right) \|k(D)\varphi\|_{\sqrt{F}}^2 - C\|k(D)\varphi\|_0^2 \\ &= \left(\frac{\gamma}{2}\right) \|\varphi\|_{k\sqrt{F}}^2 - C\|\varphi\|_k^2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

which completes the proof. ■

4.4. Let δ and e be numbers such that $0 \leq \delta < e \leq 1$. Denote by $S_{e, \delta}^m$, $m \in \mathbb{R}$, the Hörmander class of symbols, that is, $L(\dots) \in S_{e, \delta}^m$ if and only if for each $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$ there exists a constant $C_{\alpha, \beta} > 0$ with

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta L(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{(m-e|\beta|+\delta|\alpha|)/2} \quad (4.34)$$

for all $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

One sees that the function $\Phi(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{e/2}$ and $\phi(x, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\delta/2}$ form a pair of weight functions (in the sense of [2]). Furthermore, one has

$$(1 + |\xi|^2)^{(m-e|\beta|+\delta|\alpha|)/2} = \Phi^{(m/e)-|\beta|}(x, \xi) \phi^{-|\alpha|}(x, \xi) \quad (4.35)$$

and then $S_{e, \delta}^m = S_{\Phi, \phi}^{m/e, 0}$.

Corollary 4.6: Let $L(\dots)$ be in $S_{e, \delta}^m$; $0 \leq \delta < e \leq 1$ such that with some constants $\gamma > 0$, $R > 0$ and $t \in [m-(e-\delta), m]$ the estimate

$$\operatorname{Re} L(x, \xi) \geq \gamma(1 + |\xi|^2)^{t/2} \quad \text{for all } |\xi| \geq R \quad (4.36)$$

holds. Then for any $s \in \mathbb{R}$ there exist constants $C_1 > 0$,

$C_2 > 0$ so that

$$\operatorname{Re}(L(x, D)\varphi, \varphi)_{k_s} > C_1 \|\varphi\|_{k_s + (t/2)}^2 - C_2 \|\varphi\|_{k_s}^2 \quad \text{for } \varphi \in S. \quad (4.37)$$

Proof: Suppose that $m > 0$. Let C' be a constant such that $C' := (\gamma + C_{0,0})(1 + R^2)^{m/2}$. Then one sees that

$$\operatorname{Re}(L(x, \xi) + C') > \gamma(1 + |\xi|^2)^{t/2} \quad \text{for all } x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Choose $P(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{t/2}$, $q(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{(m-e+5)/2}$ and $k(\xi) := k_s(\xi)$. We have

$$\begin{aligned} |D_\xi^\beta q(\xi)| &\leq C_\beta (1 + |\xi|^2)^{(m-e+5-|\beta|)/2} \\ &\leq C_\beta (1 + |\xi|^2)^{(m-e+5-e|\beta|)/2} = C_\beta \Phi^{m/e-1-|\beta|}(x, \xi) \Phi^{-1}(x, \xi) \end{aligned}$$

and then $q(\cdot) \in S_{\Phi, \emptyset}^{m/e-1, -1}$. In addition, we obtain $P(\cdot) \in S_{1,0}^t \subset S_{e,5}^t = S_{\Phi, \emptyset}^{t/e, 0} \subset S_{\Phi, \emptyset}^{m/e, 0}$, $k(\cdot) \in S_{1,0}^s \subset S_{\Phi, \emptyset}^{s/e, 0}$, and $L(\dots) + C' \in S_{e,5}^m = S_{\Phi, \emptyset}^{m/e, 0}$ (note that $m > 0$). Finally, we find that

$$q(\xi) = \Phi^{m/e-1}(x, \xi) \Phi^{-1}(x, \xi)$$

and that

$$q(\xi)/P(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{(m-t+5-e)/2} \rightarrow 0 \quad \text{with } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Hence Theorem 4.5 gives the estimate (4.37).

In the case when $m < 0$, then operator $k_s(D) \circ L(x, D) \circ k_{-s}(D)$ lies in $S_{\Phi, \emptyset}^{0,0}$, and so the estimate (4.37) is easily seen. ■

References

1. Agmon, S.: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Princeton, New Jersey 1965.
2. Beals, R., and Fefferman, C.: Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27, 1-24 (1974)
3. Gårding, L.: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential operators. Math. Scand. 1, 55-72 (1953)
4. Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators II. Berlin 1983

5. Jacob, N., and Schomburg, B.: On Gårding's inequality. *Aequationes Math.* 31, 7-17 (1986)
6. Louhivaara, I.S., and Simader, C.G.: Über nichtelliptische lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 2, 327-343 (1976)
7. Melin, A.: Lower bounds for pseudodifferential operators. *Ark. Math.* 9, 117-140 (1971)
8. Stummel, F.: Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. *Lecture Notes in Mathematics* 102, Berlin 1969
9. Taylor, M.: *Pseudo-differential Operators*. Princeton, New Jersey 1981
10. Tervo, J.: On algebraic characterization of coercive linear partial differential operators with constant coefficients. *Ann. Polon. Math.* (to appear)

received: September 12, 1988

Author:

Dr. Jouko Tervo
 University of Jyväskylä
 Department of Mathematics
 Seminaarinkatu 15
 Jyväskylä
 SF-40100
 Finland

F. Liese

E. Danieljan

An estimator for the variance in the central limit theorem for dependent random variables

0. Introduction

The central limit theorem is a powerful tool for dealing with a large number of problems in statistics. Imagine we want to test a hypothesis on the expectation. Then the classical central limit theorem can be directly applied for constructing an asymptotic test. If the variance is unknown then it is substituted by an estimator in the test procedure. The central limit theorem holds not only for sums of independent random variables. For instance, if $X_0, X_1, \dots$ is a stationary process with the property that the dependence between X_i and X_j is small for $|i - j|$

large then with $\mu = EX_0$ the distributions of $N^{-1/2} \sum_{i=0}^{N-1} (X_i - \mu)$ converge to a normal distribution with mean zero and variance $\sigma^2 = V(X_0) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \text{cov}(X_0, X_l)$. In applications of this result the covariances and consequently σ^2 are unknown. In the present paper an estimator for σ^2 is established and it is shown that under some mixing and moment conditions the estimator is consistent and under additional assumptions asymptotically normally distributed. The results are applied for constructing a sequence of tests for testing the hypothesis $\mu = \mu_0$ versus $\mu \neq \mu_0$. Further applications concern the sign test for dependent random variables and a test for the hypothesis $\text{cov}(X_0, X_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, versus $\text{cov}(X_0, X_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots$, and $\sum_{k=1}^{\infty} \text{cov}(X_0, X_k) > 0$.

1. Mixing conditions and moments of sums

Mixing conditions are often used for proving consistency and limit theorems for estimates of parameters if the random variables in the sample are not independent. There are several concepts of mixing where each of them has certain advantages in

special cases. For a discussion and a survey of mixing concepts we refer to Bradley [2] and Withers [9, 10]. We will employ the coefficients of strong mixing and uniformly strong mixing. More precisely, let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sub- σ -algebras of $\mathcal{F}$.

$$\alpha(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \sup_{A \in \mathcal{G}_1, B \in \mathcal{G}_2} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$$

and

$$\varphi(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = \sup_{A \in \mathcal{G}_1, B \in \mathcal{G}_2, P(A) > 0} |P(B|A) - P(B)|$$

are called the coefficients of strong mixing and uniformly strong mixing, respectively. The following relations between the covariance $\text{cov}(X_1, X_2)$ of the random variables X_1, X_2 and the mixing coefficients are well-known (see Ibragimov, Linnik [4], Billingsley [1]). If the real random variable X_i is $\mathcal{G}_i$ -measurable and $|X_i| \leq c_i$ with real numbers $c_i, i = 1, 2$, then

$$|\text{cov}(X_1, X_2)| \leq 4c_1c_2\alpha(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2). \quad (1.1)$$

If X_i is not bounded but the moment of order $2 + \delta$ is finite then

$$|\text{cov}(X_1, X_2)| \leq D(c_1, c_2, \delta)(\alpha(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2))^{\delta/(2+\delta)}, \quad (1.2)$$

where $\delta > 0, E|X_i|^{2+\delta} < c_i$, and

$$D(c_1, c_2, \delta) = 4 + 3(c_1^{1/(2+\delta)}c_2^{(1+\delta)/(2+\delta)} + c_1^{(1+\delta)/(2+\delta)}c_2^{1/(2+\delta)}).$$

A similar inequality holds for the coefficient φ of uniformly strong mixing. If X_i is $\mathcal{G}_i$ -measurable, $E|X_i|^{p_i} < \infty, 1/p_1 + 1/p_2 = 1, p_i > 1, i = 1, 2$, then

$$|\text{cov}(X_1, X_2)| \leq 2(\varphi(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2))^{1/p_1}(E|X_1|^{p_1})^{1/p_1}(E|X_2|^{p_2})^{1/p_2}. \quad (1.3)$$

The distinction between (1.2) and (1.3) is that in (1.3) only moments of second order ($p_1=p_2=2$) are needed for estimating the covariance whereas moments of higher order are necessary for estimating the covariance in terms of $\alpha(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. This fact is due to the inequality $\alpha \leq \varphi$, which says that the concept of uniformly strong mixing is stronger than that of strong mixing.

Given a finite or infinite sequence $U = (U_0, U_1, \dots)$ of real random variables, we denote by $\mathcal{G}(U_a, \dots, U_b), 0 \leq a \leq b$, the

smallest sub- σ -algebra of $\mathcal{F}$ with respect to which all U_i , $a \leq i \leq b$, are measurable. Put for $k = 0, 1, \dots$

$$\alpha_U(k) = \sup \alpha(6(U_a, \dots, U_b), 6(U_c, \dots, U_d)),$$

$$\varphi_U(k) = \sup \varphi(6(U_a, \dots, U_b), 6(U_c, \dots, U_d)),$$

where the supremum is taken over all $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ with $|c-d| \geq k$. Immediately from this definition we obtain

$$1 = \alpha_U(0) \geq \alpha_U(1) \geq \dots, \quad (1.4)$$

$$1 = \varphi_U(0) \geq \varphi_U(1) \geq \dots. \quad (1.5)$$

We now summarize estimates of the moments of sums of possibly dependent random variables. Such bounds have been obtained by Longecker, Serfling [6], Yokoyama [11], Yoshihara [12, 13] and Utev [8]. For the proof of the statements which will be established in the next lemma we refer to Utev [8].

Given a sequence of random variables $U = (U_0, U_1, \dots)$ we set for $v \geq 2$, $\delta \geq 0$

$$a(\varphi_U, v, \delta) = 4v(v-1)v!3^{v-2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_U^{(1+\delta)/(v+\delta)}(k)(k+1)^{(v/2)-1}, \quad (1.6)$$

$$b(\alpha_U, v, \delta) = 12v(v-1)v!3^{v-2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_U^{(\delta(v+\delta)}(k)(k+1)^{(v/2)-1}. \quad (1.7)$$

Here we used the convention $0^0 = 0$. Hence $b(\alpha_U, v, 0) < \infty$ iff the process U is m -dependent, i.e., there exists a natural m so that $\alpha_U(k) = 0$ for every $k > m$.

We set

$$M_{v,\delta}(U) = \sup_{0 \leq i < \infty} (E|U_i|^{v+\delta})^{v/(v+\delta)}. \quad (1.8)$$

Lemma 1: If $EU_i = 0$ for $i = 0, 1, 2, \dots$ and $\delta \geq 0$ then for every $r = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} U_i\right)^{2r} \leq n^r a(\varphi_U, 2r, \delta) M_{2r,\delta}^2(U), \quad (1.9)$$

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} U_i\right)^{2r} \leq n^r b(\alpha_U, 2r, \delta) M_{2r,\delta}^2(U). \quad (1.10)$$

If Y is a random variable with finite second moment, then $V(Y)$ denotes its variance.

For proving asymptotic normality of estimators we need a central limit theorem for dependent random variables forming a double

array. In dependence what concepts are utilized to express the weak dependence in the double array there are different kinds of assumptions. We employ the results of Withers [9]. But in contradiction to the approach there we use the more restrictive concept of α -mixing for simplicity.

Consider a series of random processes $U = \{U_N, N \geq 1\}$ where $U_N = \{U_{j,N}, 1 \leq j \leq n_N\}$. Set $\alpha_U(k) = \max_{\{N: k \leq n_N\}} \alpha_{U_N}(k)$,

$$W_N(a, b) = \sum_{j=a+1}^{a+b} (U_{j,N} - EU_{j,N}), \quad \sigma^2 = V(\sum_{j=1}^{n_N} U_{j,N}),$$

$$c_N(k) = \sup |\text{cov}(U_{l,N}, U_{m,N})|, \text{ where the supremum is taken over } \{l, m : |l-m| \geq k, 1, k \leq n_N\}, \text{ and put } c_k = \max_{\{N: k \leq n_N\}} c_N(k).$$

The following lemma is a special case of Theorem 2.1 in Withers [9].

Lemma 2: Suppose that for some $\gamma > 0$

$$\sup_{a, N} E[W_N(a, b)]^4 = O(b^{2+\gamma}) \quad \text{as } b \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

$$\alpha_U(k) = o(k^{-\gamma}). \quad (1.12)$$

If

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^2 = \infty \quad (1.13)$$

and

$$\sum_{j=0}^{\infty} c(j) < \infty \quad (1.14)$$

then the distribution of the normalized sum $\frac{1}{\sigma_N} \sum_{j=1}^{n_N} (U_{j,N} - EU_{j,N})$ converges weakly to the standard normal distribution.

2. Consistency and asymptotic normality of estimators

Let $X_0, X_1, \dots$ be a stationary process with finite fourth moments. Set $\mu = EX_1$, $W_N = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{i=0}^{N-1} (X_i - \mu)$ and assume that $\sum_{i=0}^{N-1} (\varphi_X(i))^{1/2} < \infty$. Then (see Billingsley [1]) the series $\sum_{k=0}^{\infty} E(X_0 - \mu)(X_k - \mu)$ is absolutely convergent, and it holds

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(W_N) = V(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E(X_0 - \mu)(X_k - \mu) = \sigma^2. \quad (2.1)$$

If $\lim_{N \rightarrow \infty} V(W_N) = 6^2 > 0$ then the distribution of W_N converges weakly to a normal distribution with mean zero and variance 6^2 . The statistics W_N appear in several statistical tests. For example, imagine we want to test the hypothesis $H_0: \mu = 0$ versus $H_A: \mu \neq 0$. In general the covariances $\text{cov}(X_0, X_k)$ are unknown. Consequently, for constructing an asymptotic test based on the sequence W_N one needs a consistent estimation of 6^2 .

Let $[x]$ denote the integer part of the real number x . Given a sequence k_N , $0 < k_N \leq N$, of naturals we set $m_N = [N/k_N]$, $J(1) = \{1k_N, \dots, (1+1)k_N-1\}$. The stationarity of the process $X_0, X_1, \dots$ yields that the random variables $\sum_{i \in J(1)} X_i$, $l = 0, \dots, m_N-1$, are identically distributed. Furthermore the variance of $Y_{1,N} = \frac{1}{k_N^{1/2}} \sum_{i \in J(1)} (X_i - \mu)$ is approximately 6^2

for k_N large. Therefore we estimate 6^2 by S_N^2 where

$$S_N^2 = \frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} \left(\frac{1}{k_N^{1/2}} \left(\sum_{i \in J(1)} (X_i - \bar{X}_N) \right) \right)^2 \quad (2.2)$$

and

$$\bar{X}_N = \frac{1}{k_N m_N} \sum_{i=0}^{k_N m_N - 1} X_i.$$

A simple calculation shows that

$$S_N^2 = \frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} Y_{1,N}^2 - (\bar{X}_N - \mu)^2. \quad (2.3)$$

Given any sequence $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ of random variables with finite moments of fourth order and constant expectation $\mu = EX_i$ for $i = 1, \dots, N-1$, we set $R(i, j) = \text{cov}(X_i, X_j)$ and $K(i, j, k, l) = E(X_i - \mu)(X_j - \mu)(X_k - \mu)(X_l - \mu)$.

Put

$$6_{i,N}^2 = V(Y_{i,N}), \quad 6_N^2 = \frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} 6_{1,N}^2.$$

Then $ES_N^2 = 6_N^2$. We now deal with the variance of S_N^2 .

Proposition 1: If $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ is a sequence of random variables with finite moments of fourth order, constant expectation μ , and S_N^2 is defined by (2.2) then

$$(E(S_N^2 - 6_N^2)^2)^{1/2} < (E(X_{N-\mu}^4)^{1/2} + \frac{1}{m_N} (E \sum_{l=0}^{m_N-1} (Y_{1,N}^2 - 6_{1,N}^2))^2)^{1/2} \\ < (E(X_{N-\mu}^4)^{1/2} + \frac{1}{k_N m_N} \sum_{l,l'=0}^{m_N-1} \sum_{i,j \in J(1), i',j' \in J(1')} (K(i,j,i',j') - R(i,j)R(i',j')))^{1/2}$$

Proof: By relation (2.3) and Minkowski's inequality we get

$$(E(S_N^2 - 6_N^2)^2)^{1/2} < (E(X_{N-\mu}^4)^{1/2} + (E(\frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} (Y_{1,N}^2 - 6_{1,N}^2))^2)^{1/2}.$$

The square of the second term equals to

$$\frac{1}{m_N^2} \sum_{l,l'=0}^{m_N-1} E(Y_{1,N}^2 - 6_{1,N}^2)(Y_{1',N}^2 - 6_{1',N}^2) \\ = \frac{1}{m_N^2} \sum_{l,l'=0}^{m_N-1} (E Y_{1,N}^2 Y_{1',N}^2 - 6_{1,N}^2 6_{1',N}^2).$$

$$\text{As } E Y_{1,N}^2 Y_{1',N}^2 = \frac{1}{k_N^2} \sum_{i,j \in J(1), i',j' \in J(1')} K(i,j,i',j')$$

and

$$6_{1,N}^2 = \frac{1}{k_N} \sum_{i,j \in J(1)} R(i,j), \quad 6_{1',N}^2 = \frac{1}{k_N} \sum_{i',j' \in J(1')} R(i',j')$$

the statement is proved.

Now we consider special processes which have the property that the term on the right hand side in the inequality of Proposition 1 tends to zero as $N \rightarrow \infty$.

Suppose $X_0, X_1, \dots$ is a stationary Gaussian process with mean μ and covariance function

$$R(j) = E(X_{i-\mu})(X_{i+j-\mu}), \quad j \geq 0,$$

which is a function only of j in view of the stationarity of the process. Put $R(-j) = R(j)$, $j = 0, 1, \dots$ For Gaussian processes the fourth moments can be reduced to the second moments. It holds (see Shirayev [7, p. 312])

$$K(i_1, i_2, i_3, i_4) = E(X_{i_1-\mu})(X_{i_2-\mu})(X_{i_3-\mu})(X_{i_4-\mu}) \\ = R(i_1-i_2)R(i_3-i_4) + R(i_1-i_3)R(i_2-i_4) + R(i_2-i_3)R(i_1-i_4). \quad (2.4)$$

For any stationary process $X_0, X_1, \dots$ the variance of $W_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N^{1/2}} (X_i - \mu)$ may be expressed by the covariance function

$$V(W_N) = V(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) R(k). \quad (2.5)$$

If the series $\sum_{k=1}^{\infty} R(k)$ is convergent then by Kronecker's Lemma

$$V(W_N) \text{ tends to } \sigma^2 = V(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R(k) \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

Theorem 1: Let $X_0, X_1, \dots$ be a stationary Gaussian process with covariance function R . Assume

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R(k)| < \infty. \quad (2.6)$$

If S_N^2 is defined by (2.2) and $k_N \rightarrow \infty$, $m_N \rightarrow \infty$ as $N \rightarrow \infty$ then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(S_N^2 - \sigma^2)^2 = 0.$$

Proof: At first we note that $X_N = \frac{1}{k_N^{m_N}} \sum_{i=0}^{k_N^{m_N}-1} X_i$

is normally distributed with mean μ and variance

$$V(X_N) = \frac{1}{k_N^{m_N}} V(W_{m_N k_N}) < \frac{2}{k_N^{m_N}} \sum_{k=0}^{\infty} |R(k)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

As $E(X_N - \mu)^4 = 3(V(X_N))^2$ the first term in the inequality of Proposition 1 tends to zero as $N \rightarrow \infty$. For dealing with the second term we use relation (2.4)

$$\frac{1}{k_N^{2m_N}} \sum_{l, l'=0}^{m_N-1} \left(\sum_{i, j \in J(l), i', j' \in J(l')} (K(i, j, i', j') - R(i, j)R(i', j')) \right)$$

$$= \frac{2}{k_N^{2m_N}} \sum_{l, l'=0}^{m_N-1} \left(\sum_{i, j \in J(l), i', j' \in J(l')} R(i-i')R(j-j') \right)$$

$$= \frac{2}{k_N^{2m_N}} \sum_{l, l'=0}^{m_N-1} \left(\sum_{i \in J(l), i' \in J(l')} R(i-i') \right)^2$$

$$< \frac{2}{k_N^2 m_N^2} \sum_{0 < |r| < m_N} (m_N - |r|) \left(\sum_{0 < |s| < k_N} (k_N - |s|) |R(s + rk_N)| \right)^2$$

$$< \frac{2}{m_N} \sum_{0 < |r| < m_N} \left(\sum_{0 < |s| < k_N} |R(s + rk_N)| \right)^2.$$

Given $\varepsilon > 0$ we find N_0 so that $\sum_{|i| > N_0} |R(i)| < \varepsilon$ because of assumption (2.6). As $|s| < k_N$ we find $r_0 > 0$ so that $|s + rk_N| > N_0$ for every r with $|r| > r_0$ and every $0 < |s| < k_N$. Using this facts we continue the estimate

$$\frac{2}{m_N} \sum_{0 < |r| < m_N} \left(\sum_{0 < |s| < k_N} |R(s + rk_N)| \right)^2 < \frac{4r_0 + 1}{m_N} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} |R(k)| \right)^2 + 4\varepsilon^2.$$

Taking $N \rightarrow \infty$ the first term vanishes. As $\varepsilon > 0$ was arbitrary we get $\lim_{N \rightarrow \infty} E(S_N^2 - 6_N^2)^2 = 0$. In order to complete the proof we have only to show that $\lim_{N \rightarrow \infty} 6_N^2 = 6^2$. Note that in view of the stationarity of the process $X_0, X_1, \dots$

$$6_{i,N}^2 = 6_{0,N}^2 = R(0) + 2 \sum_{i=0}^{k_N-1} \left(1 - \frac{i}{k_N}\right) R(i) = 6_N^2.$$

Hence

$$|6_N^2 - 6^2| < 2 \sum_{i=1}^{k_N-1} \frac{i}{k_N} |R(i)| + 2 \sum_{i=k_N}^{\infty} |R(i)|.$$

The convergence to zero of the second term follows directly from assumption (2.6), whereas the same statement for the first term follows from (2.6) and Kronecker's Lemma. ■

We now turn to the general situation and use mixing concepts for proving consistency of the estimator S_N^2 . In dependence what kind of mixing coefficient is applied we need different moment conditions.

Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary process and

$$A) EX_0^4 < c < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X^{1/4}(k)(k+1) < \infty$$

or

B) there exists $\delta > 0$ so that $E|X_0|^{4+\delta} < \infty$ and

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_X^{\delta/(4+\delta)}(k)(k+1) < \infty.$$

Suppose condition A) is fulfilled. Then by inequality (1.3) and the stationarity of $X = (X_0, X_1, \dots)$

$$\begin{aligned} |\text{cov}(X_0, X_k)| &\leq 2\varphi_X^{1/2}(k)EX_0^2 \\ &\leq 2\varphi_X^{1/4}(k)(k+1)EX_0^2. \end{aligned}$$

If B) is satisfied then by (1.2) with $c = E|X_1|^{2+\delta} < (E|X_1|^{4+\delta})^{(2+\delta)/(4+\delta)} < \infty$

$$\begin{aligned} |\text{cov}(X_0, X_k)| &\leq D(c, c, \delta) \alpha_X^{\delta/(5+\delta)}(k) \\ &\leq D(c, c, \delta) \alpha_X^{\delta/(4+\delta)}(k)(k+1). \end{aligned}$$

Consequently both in case A) and B)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\text{cov}(X_0, X_k)| < \infty \quad (2.7)$$

so that

$$\sigma^2 = V(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{cov}(X_0, X_k) \quad (2.8)$$

is well-defined.

Theorem 2: Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary process, S_N^2 and σ^2 defined by (2.2) and (2.8), respectively. If at least one of the conditions A) or B) is fulfilled then there exist constants $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, so that

$$(E(S_N^2 - \sigma^2)^2)^{1/2} \leq c_1/k_N + c_2/k_N m_N + c_3/(m_N)^{1/2}.$$

Proof: At first we suppose condition A) to be fulfilled. We introduce a sequence of processes $X^{(i)}$ by

$$X^{(i)} = \{X_{j-\mu}, j \in J(i)\}$$

and apply (1.9) to $X^{(i)}$ with $r = 2$ and $\delta = 0$. Hence we obtain

$$E\left(\sum_{i \in J(1)} (X_i - \mu)\right)^4 \leq k_N^2 \gamma_1 \quad (2.9)$$

with a constant γ_1 . Consequently

$$E Y_{1,N}^4 = E(k_N^{-1/2} \sum_{i \in J(1)} (X_i - \mu))^4 \leq \gamma_1$$

and

$$E(Y_{1,N}^2 - 6_{1,N}^2)^2 = E Y_{1,N}^4 - 6_{1,N}^4 \leq \gamma_1. \quad (2.10)$$

Set

$$U = \{Y_{0,N}^2 - 6_{0,N}^2, Y_{1,N}^2 - 6_{1,N}^2, \dots\}.$$

Then $\varphi_U \leq \varphi_X$ and (1.9) with $r = 1$ and $\delta = 0$ yield with a suitable constant $\tilde{\gamma}_1$

$$E\left(\frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} (Y_{l,N}^2 - 6_{l,N}^2)\right)^2 \leq \frac{\tilde{\gamma}_1}{m_N}. \quad (2.11)$$

Furthermore by (1.9) again

$$\begin{aligned} E(X_{N-\mu})^4 &= k_N^{-4} m_N^{-4} E\left(\sum_{l=0}^{k_N m_N-1} (X_l - \mu)\right)^4 \\ &\leq \gamma_2 k_N^{-2} m_N^{-2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

with a constant γ_2 . Inserting (2.11) and (2.12) into the first inequality of Proposition 1 we get

$$(E(S_N^2 - 6_N^2)^2)^{1/2} \leq c_2/k_N m_N + c_3/(m_N)^{1/2} \quad (2.13)$$

with suitable constants c_2 and c_3 . The stationarity of the process $X_0, X_1, \dots$ provides $6_{1,N}^2 = 6_{0,N}^2 = V(k_N^{-1/2} \sum_{i=0}^{k_N-1} X_i)$.

Hence

$$\begin{aligned} 6_N^2 &= 6_{0,N}^2 = V(k_N^{-1/2} \sum_{i=0}^{k_N-1} X_i) \\ &= V(X_0) + 2 \sum_{l=0}^{k_N-1} \left(1 - \frac{l}{k_N}\right) \text{cov}(X_0, X_k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

and by (2.8)

$$|6_N^2 - 6^2| \leq 2 \sum_{l=1}^{k_N-1} \frac{1}{k_N} V(X_0) \varphi_X^{1/2}(1) + 2 \sum_{l=k_N}^{\infty} V(X_0) \varphi_X^{1/2}(1) \\ \leq 2c^{1/2} k_N^{-1} \left(\sum_{l=1}^{\infty} l \varphi_X^{1/2}(1) \right) \leq \frac{2c^{1/2}}{k_N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_X^{1/4}(1) (l+1) \right).$$

This inequality and the estimate (2.13) yield the statement if condition A) is fulfilled. The proof under condition B) is completely analogous. ■

Now we study the asymptotic distribution of the estimator S_N^2 . At first we suppose that the underlying process $X = (X_0, X_1, \dots)$ is a Gaussian one. $R(k)$ denotes the covariance function. Let $k_N, m_N, J(1), Y_{1,N}$ be defined as in the beginning of this chapter. We set

$$\tilde{R}(1, 1') = \text{cov}(Y_{1,N}^2, Y_{1',N}^2).$$

As in the proof of Theorem 1 one obtains from (2.4)

$$\tilde{R}(1, 1') = 2 \left(\frac{1}{k_N} \sum_{i \in J(1), i' \in J(1')} R(i - i') \right)^2. \quad (2.15)$$

We set

$$\hat{\sigma}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{m_N} \sum_{l, l'=0}^{m_N-1} \tilde{R}(1, 1') \quad (2.16)$$

if the limit on the right hand side exists.

Theorem 3: Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary Gaussian process with

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_X^{1-\epsilon} O(k)(k+1) < \infty \quad (2.17)$$

for some $\epsilon_0 > 0$. Suppose that $\lim_{N \rightarrow \infty} m_N = \infty$ and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_N^{1/2}/k_N = 0. \quad (2.18)$$

If the limit in (2.16) exists and $\hat{\sigma}^2 > 0$ then the distribution of $m_N^{1/2}(S_N^2 - 6^2)$ converges weakly to a normal distribution with mean zero and variance $\hat{\sigma}^2$ as $N \rightarrow \infty$.

Proof: We set $U_{1,N} = Y_{1,N}^2 - \sigma_{1,N}^2 = Y_{1,N}^2 - EY_{1,N}^2$ and apply Lemma 2 to the processes $U_N = \{U_{1,N}, 0 \leq 1 < m_N\}$. Put $r = 0$. The definition of α_U and α_X provides $\alpha_U \leq \alpha_X$. Hence (2.17) implies (1.12). Condition (1.13) follows from (2.16), $m_N \rightarrow \infty$ as $N \rightarrow \infty$ and $\sigma^2 > 0$ which was assumed. In order to show (1.11) and (1.14) we investigate $Y_{1,N}$. The random variable $Y_{1,N}$ is normally distributed with mean zero and variance

$$V(Y_{1,N}) = V(Y_{0,N}) = V(X_0) + 2 \sum_{j=1}^{k_N-1} (1 - \frac{j}{k_N}) R(j).$$

Hence

$$V(Y_{1,N}) \leq 2 \sum_{j=0}^{k_N-1} |R(j)|. \quad (2.19)$$

Choose $\delta = 2$, $C = EX_0^4 = EX_j^4$. Then by $\alpha_U \leq \alpha_X$ and (1.2)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |R(j)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_X^{1/2}(j) D(c, c, 2) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_X^{1/2-\varepsilon_0}(j) D(c, c, 2) = E. \end{aligned} \quad (2.20)$$

The constant E is finite in accordance with (2.17). As $Y_{1,N}$ is normally distributed with mean zero we have

$$EY_{1,N}^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} (V(Y_{1,N}))^{2k}.$$

Let r be an integer. Then by (2.19), (2.20), and $\sigma_{1,N}^2 \leq 2E$

$$E(U_{1,N})^{2r} \leq E_{2r} < \infty, \quad (2.21)$$

where the constant E_{2r} does not depend on 1 and N .

For estimating $\text{cov}(U_{1,N}, U_{1',N})$ and $c_N(k)$ we choose an integer r so that $(2r - 2)/2r > 1 - \varepsilon_0$ and put $\delta = 2r - 2$. Then by (1.2)

$$c_N(k) \leq D(E_{2r}, E_{2r}, 2r - 2) \alpha_X^{1-\varepsilon_0}(k)$$

which shows that (1.14) is satisfied. For proving (1.11) we set $r = 2$ in (1.10) and choose δ as an even natural so that $\delta/(2r + \delta) > 1 - \varepsilon_0$. Put $U = (U_{a+1,N}, \dots, U_{a+b,N})$, then by inequality (2.21) $M_{4,\delta}(U) \leq E_{2r+\delta} < \infty$. Assumption (2.17) yields

$b(\alpha_U, 4, \delta) < \infty$. Hence by (1.10)

$$E(W_N(a, b))^4 \leq (b - a)^2 \vartheta$$

with a suitable constant ϑ . Consequently all assumptions in Lemma 2 are fulfilled. This means that the distribution of

$$Z_N = m_N^{-1/2} \sum_{l=0}^{m_N-1} (Y_{1,N}^2 - \hat{\sigma}_{1,N}^2)$$

converges weakly to a normal distribution with mean zero and variance $\hat{\sigma}^2$. Relation (2.3) and $\hat{\sigma}_{1,N}^2 = \hat{\sigma}_{0,N}^2$ imply

$$m_N^{1/2} (S_N^2 - \hat{\sigma}^2) = Z_N + m_N^{1/2} (\hat{\sigma}_{0,N}^2 - \hat{\sigma}^2) - m_N^{1/2} (\bar{X}_N - \mu)^2. \quad (2.22)$$

In order to estimate the second term we choose an $\delta > 0$ so that $\delta/(2+\delta) > 1 - \varepsilon_0$. Then by inequality (1.2)

$$|R(1)| \leq \alpha_X^{\delta/(2+\delta)}(1) D(c, c, \delta)$$

where $c = E|X_0|^{2+\delta}$. Hence

$$\begin{aligned} |m_N^{1/2} (\hat{\sigma}_{0,N}^2 - \hat{\sigma}^2)| &\leq m_N^{1/2} 2 \sum_{l=1}^{k_N-1} \frac{1}{k_N} R(1) \\ &\leq 2 m_N^{1/2} / k_N D(c, c, \delta) \sum_{l=0}^{k_N-1} \alpha_X^{\delta/(2+\delta)}(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $N \rightarrow \infty$ in view of assumption (2.18).

For estimating the third term in (2.22) we note that $\bar{X}_N - \mu$ is normally distributed with mean zero and variance

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_N) = E(\bar{X}_N - \mu)^2 &\leq \frac{V(X_0)}{m_N^2 k_N^2} + \frac{2}{m_N k_N} \sum_{l=1}^{\infty} |R(l)| \\ &\leq \frac{V(X_0)}{m_N^2 k_N^2} + \frac{2E}{m_N k_N} \end{aligned}$$

in accordance with (2.20). Consequently

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E m_N^{1/2} (\bar{X}_N - \mu)^2 = 0$$

and

$$m_N^{1/2}(S_N^2 - \sigma^2) = Z_N + \eta_N,$$

where Z_N is asymptotically normally distributed with mean zero and variance σ^2 and η_N tends stochastically to zero as $N \rightarrow \infty$. This completes the proof. ■

Remark: Conditions for Gaussian processes to be α -mixing have been obtained by Kolmogorov and Rosanov [5]. Under mild conditions to the spectral density one can show that every second order stationary process is a moving average process with possibly infinite many summands. If the process under consideration is a Gaussian one, then this process $X = (X_0, X_1, \dots)$ is a linear process, i.e., X_k is a moving average of independent identically distributed random variables. The mixing coefficients of such processes have been estimated in Withers [9].

We now consider the case of m -dependent Gaussian processes, i.e., we suppose that $\alpha_X(k) = 0$ for every $k > m$. In this case $R(i-i') = 0$ if $|i-i'| > m$. Hence by the definition of $\tilde{R}$ in (2.15) it holds $R(1,1') = 0$ for every $(1,1') \neq (0,0), (0,1), (1,0)$ if N is sufficiently large. Furthermore in the sum $\sum_{i \in J(0), i' \in J(1)} R(i-i')$ at least m^2 terms are nonzero.

Hence both $\tilde{R}(0,1)$ and $\tilde{R}(1,0)$ converge to zero as $N \rightarrow \infty$. Consequently

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{R}(0) = 2 \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{k_N} \sum_{i,i'=0}^{k_N-1} R(i-i') \right)^2 \\ &= 2(R(0) + 2 \sum_{l=1}^m R(1))^2 = 2\sigma^4 \end{aligned}$$

$$\text{where } \sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} V\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} X_k\right) = R(0) + 2 \sum_{l=1}^m R(1).$$

Thus we have proved

Proposition 2: Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary m -dependent Gaussian process and k_N, m_N be defined as in Theorem 3. If $\sigma^2 = R(0) + 2 \sum_{l=1}^m R(1) > 0$ then the distribution of

$[(m_N^{1/2}) / (2^{1/2} \sigma^2)] (S_N^2 - \sigma^2)$ converges to a standard normal distribution as $N \rightarrow \infty$.

It is an interesting and a surprising fact that a similar state-

ment holds for arbitrary m -dependent processes provided some moment conditions are fulfilled.

Theorem 4: Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary m -dependent process with $EX_0^8 < \infty$. Let k_N, m_N be defined as in Theorem 3.

If $6^2 = R(0) + 2 \sum_{l=1}^m R(l) > 0$ then the distribution of

$[(m_N^{1/2}) / (2^{1/2} 6^2)] (S_N^2 - 6^2)$ tends weakly to a standard normal distribution.

Proof: Similar as in the proof of the last theorem we obtain that the m -dependence of X implies the 1-dependence of $U_{0,N}, \dots, U_{m_N-1,N}$ for sufficiently large N . Hence by (1.9) with a suitable constant $\mathfrak{F}$

$$E(W_N(a, b))^4 \leq (b - a)^2 \mathfrak{F}$$

which implies (1.11). The relations (1.12) and (1.14) follow from the 1-dependence of $U_{0,N}, \dots, U_{m_N-1,N}$. To complete the proof we have to deal with the variance of $Y_{0,N}^2 + \dots + Y_{m_N-1,N}^2$. The 1-dependence yields

$$V\left(\frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} Y_{l,N}^2\right) = V(Y_{0,N}^2) + 2 \operatorname{cov}(Y_{0,N}^2, Y_{1,N}^2)$$

for sufficiently large N . We have

$$\begin{aligned} & \operatorname{cov}(Y_{0,N}^2, Y_{1,N}^2) \\ &= \frac{1}{k_N^2} \sum_{i, i' \in J(0), j, j' \in J(1)} E(X_{i-\mu})(X_{i'-\mu})(X_{j-\mu})(X_{j'-\mu}) - 6_{0,N}^4. \end{aligned}$$

There are at least m^4 combinations of indices i, i', j, j' in the above sum so that $(X_{i-\mu})(X_{i'-\mu})$ and $(X_{j-\mu})(X_{j'-\mu})$ are not independent. Taking $N \rightarrow \infty$ we get

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{cov}(Y_{0,N}^2, Y_{1,N}^2) = 0.$$

Hence

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(m_N^{1/2} (S_N^2 - 6_{0,N}^2)) = \lim_{N \rightarrow \infty} V(Y_{0,N}^2).$$

The central limit theorem for m -dependent processes (Billingsley [1]) implies that the distribution of $Y_{0,N}$ converges to a normal distribution with mean zero and variance

$6^2 = R(0) + 2 \sum_{l=1}^m R(l)$. Inequality (1.9) and $EX_0^8 < \infty$ imply $\sup_N EY_{0,N}^8 < \infty$. Hence both the sequence $Y_{0,N}^2$ and $Y_{0,N}^4$ are uniformly integrable. This means

$$\lim_{N \rightarrow \infty} EY_{0,N}^2 = 6^2$$

and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} EY_{0,N}^4 = 36^2.$$

Consequently

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(Y_{0,N}^2) = 26^4 > 0$$

and condition (1.3) is fulfilled. The rest of the proof is similar to those of Theorem 3. ■

3. Applications

Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary process with $EX_0^2 < \infty$. Set $\mu = EX_0$. For a given real number μ_0 we want to test the hypothesis $H_0: \mu = \mu_0$ versus $H_A: \mu \neq \mu_0$. Let Φ denote the distribution function of the standard normal distribution. For $0 < \alpha < 1$ let z_α be the α -quantile of Φ , i.e. $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Let k_N, m_N, S_N^2 be defined as in the beginning of the preceding chapter. For the above testing problem we introduce a sequence φ_N of tests by

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{if } \left| \frac{1}{S_N N^{1/2}} \sum_{i=0}^{N-1} (X_i - \mu_0) \right| > z_{1-\alpha/2}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Let E_μ denote the symbol for expectation if μ is the expectation of X_0 .

Proposition 3: Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary process which satisfies either the conditions in Theorem 1 or Theorem 2. If $6^2 > 0$ then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{\mu_0} \varphi_N = \alpha$$

and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_\mu \varphi_N = 1 \quad \text{if } \mu \neq \mu_0.$$

Proof: Suppose $\mu = EX_0$. In any case $\sigma^2 = V(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R(k)$ is well-defined. Under the conditions of Theorem 1

$$T_N = N^{-1/2} \sum_{i=0}^{N-1} (X_i - \mu)$$

is normally distributed and $V(T_N)$ converges to σ^2 as $N \rightarrow \infty$. Under the condition of Theorem 2 we obtain from the limit theorems for stationary and mixing processes in Ibragimov and Linnik [4] that T_N is asymptotically normally distributed with mean zero and variance σ^2 again. Furthermore in both cases S_N^2/σ^2 tends stochastically to 1 as $N \rightarrow \infty$. The rest is clear. ■

Let us now be given two stochastic processes $X_0, X_1, \dots$ and $Y_0, Y_1, \dots$. In order to compare the one dimensional distributions we test the symmetry of the distribution of $X_i - Y_i$. We apply the sign test and set

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i < Y_i, \\ -1 & \text{if } X_i > Y_i. \end{cases}$$

Suppose $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ is a stationary process and denote by R_ε its covariance function. Set $\sigma^2 = V(\varepsilon_0) + \sum_{k=1}^{\infty} R_\varepsilon(k)$ if the series converges. Put $\mu = E\varepsilon_0$. Then the null hypothesis reads $H_0: \mu = 0$ and the alternative is given by $H_A: \mu \neq 0$. Set

$$Y_{1,N} = \frac{1}{k_N^{1/2}} \sum_{i \in J(1)} \varepsilon_i, \quad S_N^2 = \frac{1}{m_N} \sum_{l=0}^{m_N-1} Y_{1,N}^2.$$

We introduce a sequence of tests by

$$\varphi_N = \begin{cases} 1 & \text{if } \left| \frac{1}{S_N^{1/2}} \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i \right| > z_{1-\alpha/2}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Proposition 4: Suppose the process $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ is stationary and fulfills

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_\varepsilon^{5/(4+5)}(k)(k+1) < \infty, \quad \delta > 0.$$

If $\sigma^2 > 0$ then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_0 \varphi_N = \alpha,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_\mu \varphi_N = 1 \quad \text{if } \mu \neq 0.$$

For proving of Proposition 4 one has only to apply Proposition 3 to the stationary and bounded process $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$.

We apply Theorem 4 for testing the hypothesis that the covariances in a stochastic process are zero. To come to consistent tests we denote by $\mathcal{X}^+$ the class of all stochastic processes which are stationary and have finite moments of second order and the covariance function $R(k)$ is non-negative. Denote by $\mathcal{X}_0^+$ the class of all processes from $\mathcal{X}^+$ for which $R(k) = 0$ for every $k > 0$. Then the null hypothesis is given by $\mathcal{X}_0^+$ and the alternative is the set $\mathcal{X}^+ \setminus \mathcal{X}_0^+$. For constructing a suitable test we need a consistent estimator for $V(X_0)$. Set

$$\hat{S}_N^2 = \frac{1}{k_N m_N} \sum_{i=0}^{k_N m_N - 1} (X_i - \bar{X}_N)^2.$$

Our test of covariance zero is based on the comparison of S_N^2 and $\hat{S}_N^2$. Set

$$T_N = \frac{m_N^{1/2}}{2^{1/2}} ((S_N^2 / \hat{S}_N^2) - 1)$$

and introduce a sequence of tests by

$$\varphi_N = \begin{cases} 1 & \text{if } T_N > z_{1-\alpha}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Proposition 5: Let $X = (X_0, X_1, \dots)$ be a stationary m -dependent process with $EX_0^8 < \infty$ and $\sigma^2 = V(X_0) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} R(l) > 0$. Then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \varphi_N = \alpha, \quad \text{if } X \in \mathcal{X}_0^+.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \varphi_N = 1 \quad \text{if } X \in \mathcal{X}^+ \setminus \mathcal{X}_0^+.$$

Proof: We will show that

$$m_N^{1/2} (\hat{S}_N^2 - V(X_0))$$

tends stochastically to zero as $N \rightarrow \infty$. Indeed,

$$\hat{s}_N^2 = \frac{1}{k_N m_N} \sum_{i=0}^{k_N m_N - 1} (X_i - \mu)^2 - (X_N - \mu)^2.$$

Hence by Minkowski's inequality

$$(E(\hat{s}_N^2 - V(X_0))^2)^{1/2} \leq (E(X_N - \mu)^4)^{1/2} + \frac{1}{k_N m_N} (E(\sum_{i=0}^{k_N m_N - 1} ((X_i - \mu)^2 - V(X_0)))^2)^{1/2}.$$

Applying (1.9) to the first and second term we obtain with suitable constants β_1, β_2

$$(E(\hat{s}_N^2 - V(X_0))^2)^{1/2} \leq \left(\frac{\beta_1 k_N^{2/2} m_N^{2/2}}{k_N m_N} \right)^{1/2} m_N^{1/2} + \frac{m_N^{1/2}}{k_N m_N} (\beta_2 k_N m_N)^{1/2} \rightarrow 0$$

as $N \rightarrow \infty$. Furthermore

$$T_N = \frac{m_N^{1/2}}{\sqrt{2\hat{s}_N^2}} (\hat{s}_N^2 - V(X_0)) + \frac{m_N^{1/2}}{\sqrt{2\hat{s}_N^2}} (V(X_0) - \hat{s}_N^2).$$

Hence

$$T_N = \frac{m_N^{1/2}}{\sqrt{2\hat{s}_N^2}} (\hat{s}_N^2 - V(X_0)) + \tilde{T}_N,$$

where $\tilde{T}_N$ converges stochastically to zero as $N \rightarrow \infty$.

Now we suppose $X \in \mathcal{X}_O^+$. Then $V(X_0) = \phi^2$ and $\hat{s}_N^2$ converges stochastically to ϕ^2 as $N \rightarrow \infty$. Hence by Theorem 4 the distribution of T_N tends to the standard normal distribution. This yields the first statement. For proving the second one we note that for $X \in \mathcal{X}^+ \setminus \mathcal{X}_O^+$ it holds $\phi^2 > V(X_0)$ so that by the consistency of the estimator $\hat{s}_N^2$ (see Theorem 2) the sequence

$$\frac{m_N^{1/2}}{\sqrt{2\hat{s}_N^2}} (\hat{s}_N^2 - V(X_0))$$

tends stochastically to infinity as $N \rightarrow \infty$ which completes the proof. ■

Remark: For the proof of Proposition 4 we only used Theorem 4 under the null-hypothesis. Using the statement on the alternative one can calculate asymptotically the necessary size of the sample in order to have a definite power of the test.

References

1. Billingsley, P.: Convergence of Probability Measures. New York (1968)
2. Bradley, R.C.: On the ψ -mixing condition for stationary random sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 276, 1, 55-66 (1983)
3. Heinrich, L.: Some estimates of the cumulant-generating function of a sum of m -dependent random vectors and their application to large deviation. Math Nachr. 120, 91-101 (1985)
4. Ибрагимов, И.А., и Линник, Ю.В.: Независимые и стационарно связанные величины. Москва 1965
5. Колмогоров, А.Н., и Розанов, Ю.А.: Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса. Теор. вероятн. и её примен. 5, 222-227 (1960)
6. Longecker, M., and Serfling, R.J.: Moment inequalities for S_n under general dependence restrictions, with applications. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 43, 1-21 (1978)
7. Ширяев, А.Н.: Вероятность. Москва 1980
8. Утев, С.А.: Неравенства для сумм слабо зависящих случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. Труды Инст. Мат. Акад. Наук СССР, 50-77, Сиб. Отд. 1984, стр. 50-77
9. Withers, C.S.: Central limit theorem for dependent variables. I. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57, 509-534 (1981)
10. Withers, C.S.: Conditions for linear processes to be strong mixing. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57, 477-480 (1981)
11. Yokoyama, R.: Moment bounds for stationary mixing sequences. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 52, 45-57 (1980)
12. Yoshihara, K.: Moment inequalities for mixing sequences. Kodai Math. J. 1, 316-328 (1978)
13. Yoshihara, K.: Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 43, 319-329 (1978)

received: September 10, 1988

Authors:

Prof. Dr. F. Liese
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Prof. Dr. E.A. Danieljan
State University of Erevan
Dept. of Math. and Mech.
Mrawjaka 1
375049 Erevan
USSR

Andreas Kossow

Formeln für die Momente der Lebensdauer zirkulärer
konsekutiver k-aus-n-Systeme

Herrn Prof. Dr. G. Burosch zum 50. Geburtstag gewidmet

1. Einführung

Der Begriff des konsekutiven k-aus-n-Systems wurde von Chiang und Niu [1] in die Zuverlässigkeitstheorie eingeführt.

Ein konsekutives k-aus-n-System besteht aus n stochastisch unabhängigen Komponenten $C_1, C_2, \dots, C_n$, die sich in einem der Zustände "funktionsfähig" oder "ausgefallen" befinden. Das System fällt aus, wenn k oder mehr aufeinanderfolgende Komponenten defekt sind, $k \leq n$.

Es werden lineare und zirkuläre konsekutive k-aus-n-Systeme unterschieden je nachdem, ob die Komponenten in einer Linie (C_{i+1} ist unmittelbarer Nachfolger von C_i ; $i = 1, 2, \dots, n-1$) oder im Kreis (C_{i+1} ist unmittelbarer Nachfolger von C_i ; $i = 1, 2, \dots, n-1$; und C_1 ist unmittelbarer Nachfolger von C_n) angeordnet sind. In beiden Fällen enthält das Modell für $k = 1$ bzw. $k = n$ das Serien- bzw. das Parallelsystem.

Durch ein konsekutives k-aus-n-System kann die zuverlässigkeitslogische Struktur einer ganzen Reihe realer technischer Systeme modelliert werden. Die wichtigsten Anwendungsfälle stammen aus der Fördertechnik und der Nachrichtentechnik. Beispielsweise ist ein Nachrichtenübertragungssystem mit n Relaisstationen in einer Linie oder in einem Kreis ein lineares oder zirkuläres konsekutives k-aus-n-System. Ist nämlich die Reichweite einer jeden Station ein Vielfaches der (annähernd gleichen) Distanz zwischen benachbarten Stationen, so können Nachrichten übermittelt werden, solange weniger als

$$k = \left\lfloor \frac{\text{Reichweite einer Station}}{\text{Distanz zwischen benachbarten Stationen}} \right\rfloor$$

aufeinanderfolgende Stationen ausfallen. Sind irgendwo aber k aufeinanderfolgende Stationen defekt, so ist die Informationsübertragung unterbrochen. Als weitere Anwendungsbeispiele seien Bandstraßen in Gurtbandförderern, Pipelinesysteme und Straßen-

beleuchtungsanlagen genannt [2].

In der vorliegenden Arbeit werden Formeln für die Berechnung der Momente der Lebensdauer zirkulärer konsekutiver k-aus-n-Systeme mit identischen Komponenten hergeleitet. Die Ausfallrate der Systemkomponenten sei eine positive reelle Konstante λ , d.h., die Lebensdauer der Komponenten sei nach $q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$, exponentialverteilt. Für den linearen Fall haben Kossow und Preuß in [3] auf der Basis des Booleschen Zuverlässigkeitsmodells geschlossene Formeln für die Momente der Systemlebensdauer ermittelt. Bollinger und Salvia [4] hingegen haben mit Hilfe des Markovschen Modells eine Rekursionsformel für die Berechnung der Momente der Lebensdauer linearer konsekutiver k-aus-n-Systeme gefunden. Für den zirkulären Fall soll hier ebenfalls dieser Zugang gewählt werden.

2. Beispiel. Die mittlere Lebensdauer eines zirkulären konsekutiven 2-aus-3-Systems

Zu einem zirkulären konsekutiven 2-aus-3-System, dessen Komponenten eine nach $q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$, verteilte Lebensdauer besitzen, gehört der Zustandsübergangsgraph in Abb. 1. Jedem Systemzustand ist eine 3-stellige Binärzahl $x_1 x_2 x_3$ mit

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } C_i \text{ funktionsfähig ist,} \\ 0, & \text{falls } C_i \text{ defekt ist,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

zugeordnet. Alle nichtverschwindenden Übergangsraten sind gleich der Ausfallrate λ der Systemkomponenten.

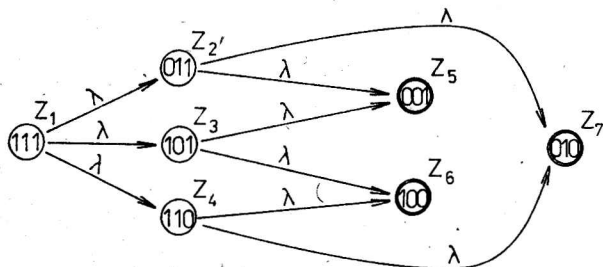


Abb. 1 Zustandsübergangsgraph eines zirkulären konsekutiven 2-aus-3-Systems

Das System einschließlich seines Ausfallverhaltens läßt sich auf Grund der konstanten Übergangsraten durch einen homogenen Markovschen Prozeß $X(t)$, $t \geq 0$, mit stetiger Zeit beschreiben. Ein solcher homogener Markovscher Prozeß mit stetiger Zeit ist durch die Angabe der Zustandsmenge, der Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung und der Übergangswahrscheinlichkeiten eindeutig bestimmt ([5], S. 531).

Im obigen Beispiel besteht die Zustandsmenge aus $Z_1, Z_2, \dots, Z_7$, wobei $M = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ die Menge der Arbeitszustände und $\bar{M} = \{Z_5, Z_6, Z_7\}$ die Menge der Ausfallzustände ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System mit der Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand Z_1 . Die Wahrscheinlichkeit des direkten Übergangs von Z_i nach Z_j im Zeitintervall $(t', t' + t)$ beträgt $Q_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t)$. Dabei ist p_{ij} die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit der eingebetteten Markovschen Kette und $F_{ij}(t)$ die Verteilung der Verweilzeit T_{ij} im Zustand Z_i , falls dieser in den Zustand Z_j übergeht. Für das Beispiel ergibt sich

$$p_{12} = p_{13} = p_{14} = 1/3 \quad \text{und}$$

$$p_{25} = p_{27} = p_{35} = p_{36} = p_{46} = p_{47} = 1/2 \quad \text{sowie}$$

$$F_{12}(t) = F_{13}(t) = F_{14}(t) = 1 - e^{-3\lambda t},$$

$$F_{25}(t) = F_{27}(t) = F_{35}(t) = F_{36}(t) = F_{46}(t) = F_{47}(t) = 1 - e^{-2\lambda t},$$

$t \geq 0$. Alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich null.

Die Verteilung der Lebensdauer T des zirkulären konsekutiven 2-aus-3-Systems ergibt sich nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit zu

$$\Pr\{T \leq t\} = \sum_{\substack{(Z_1, Z_{i_1}, Z_{i_2}) \\ Z_{i_2} \in \bar{M}}} p_{1, i_1} p_{i_1, i_2} \Pr\{T_{1, i_1} + T_{i_1, i_2} \leq t\}, \quad (1)$$

wobei über alle gerichteten Wege durch den Zustandsübergangsgraphen von Z_1 bis in einen Ausfallzustand zu summieren ist. Beim zirkulären konsekutiven 2-aus-3-System gibt es genau sechs solche gerichteten Wege, von denen jeder die Länge 2 (2 Zustandsübergänge) hat. Sei $E\{X\}$ der Erwartungswert einer Zufallsgröße X . Dann folgt für den Erwartungswert der Systemlebensdauer aus (1)

$$\begin{aligned}
 E\{T\} &= \sum_{\substack{(Z_1, Z_{i_1}, Z_{i_2}) \\ Z_{i_2} \in \bar{M}}} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} E\{T_{1,i_1} + T_{i_1,i_2}\} \\
 &= \sum_{\substack{(Z_1, Z_{i_1}, Z_{i_2}) \\ Z_{i_2} \in \bar{M}}} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} (E\{T_{1,i_1}\} + E\{T_{i_1,i_2}\}) \\
 &= 6 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \right) = \frac{5}{6} \frac{1}{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

3. Formeln für die Momente der Systemlebensdauer

Auch im allgemeinen Fall sind die Zustände Z_i des Markovschen Prozesses $X(t)$ Kombinationen der Zustände der Systemkomponenten (im Beispiel als Binärzahlen kodiert). Die Menge M der Arbeitszustände des zirkulären konsekutiven k -aus- n -Systems besteht aus den Zuständen, die keinen Block aus k oder mehr aufeinanderfolgenden ausgefallenen Komponenten besitzen. Die Menge $\bar{M}$ der Ausfallzustände wird von allen Zuständen mit genau einem Block aus k oder mehr aufeinanderfolgenden ausgefallenen Komponenten gebildet. Dieser Block umfaßt aber höchstens $2k-1$ Komponenten (vgl. dazu den Beweis des nachfolgenden Satzes).

$M \cup \bar{M}$ ist der Zustandsraum des Markovschen Prozesses. Der Prozeß beginnt bei $t=0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand Z_1 (das ist wieder der Zustand mit n funktionsfähigen Systemkomponenten). Z_i sei ein beliebiger Zustand aus $M \cup \bar{M}$. Die im Zustand Z_i ausgefallenen Komponenten seien $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots,$

$C_{i_{n-m_i}}$. Dann gilt $X(t) = Z_i$ genau dann, wenn die Lebensdauer

der Komponenten $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_{n-m_i}}$ kleiner oder gleich t

und die Lebensdauer der übrigen Komponenten größer als t ist.

Für $Z_i \in M$ sind die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovschen Kette $p_{i,k} = 1/m_i$ und die Verteilungen

der bedingten Verweilzeiten $F_{i,k}(t) = 1 - e^{-m_i \lambda t}$, $t > 0$, falls Z_k aus Z_i durch den Ausfall einer weiteren Komponente hervorgeht, $Z_k \in M \cup \bar{M}$. Die anderen Wahrscheinlichkeiten sind wieder gleich null.

In Analogie zu den Betrachtungen im Abschnitt 2 können die Momente der Lebensdauer T eines zirkulären konsekutiven k -aus- n -Systems nach

$$E\{T^s\} = \sum_{\substack{(Z_1, Z_{i_1}, \dots, Z_{i_x}) \\ Z_{i_x} \in M}} p_{1,i_1} p_{i_1,i_2} \dots p_{i_{x-1},i_x} \quad (3)$$

$$s = 1, 2, 3, \dots, E\{(T_{1,i_1} + T_{i_1,i_2} + \dots + T_{i_{x-1},i_x})^s\},$$

berechnet werden. Summiert wird über alle gerichteten Wege $(Z_1, Z_{i_1}, Z_{i_2}, \dots, Z_{i_x})$ von Z_1 bis in einen Ausfallzustand. Die Übergangswahrscheinlichkeiten betragen $p_{1,i_1} = 1/n$ sowie $p_{i_j,i_{j+1}} = 1/(n-j)$, und die Verweilzeiten sind nach $F_{1,i_1}(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$ und $F_{i_j,i_{j+1}}(t) = 1 - e^{-(n-j)\lambda t}$, $t \geq 0$, verteilt; $j = 1, 2, 3, \dots, x-1$. $c_{x,k,n}$ sei die Anzahl aller gerichteten Wege der Länge x , die im Zustandsübergangsgraphen eines zirkulären konsekutiven k -aus- n Systems von Z_1 bis in einen Ausfallzustand führen. Für den Erwartungswert folgt dann aus (3) sowie

$$E\{T_{1,i_1}\} = 1/(n\lambda), \quad E\{T_{i_j,i_{j+1}}\} = 1/((n-j)\lambda)$$

und

$$E\{T_{1,i_1} + T_{i_1,i_2} + \dots + T_{i_{x-1},i_x}\} = E\{T_{1,i_1}\} + E\{T_{i_1,i_2}\} + \dots$$

$$\dots + E\{T_{i_{x-1},i_x}\} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{x-1} \frac{1}{n-j}$$

die Beziehung

$$E\{T\} = \frac{1}{\lambda} \sum_{x=k}^n \frac{c_{x,k,n}}{n(n-1)\dots(n-x+1)} \sum_{j=0}^{x-1} \frac{1}{n-j} \quad (4)$$

Es sind lediglich noch die Zahlen $c_{x,k,n}$ zu bestimmen.

Satz: Sei $g_k(0,0) := 1$ und $g_k(N,J)$, $N > 0$ und $N > J > 0$, die Anzahl aller N -stelligen Binärzahlen, die genau J Nullen und keine k aufeinanderfolgenden Nullen haben. Für ein zirkuläres konsekutives k -aus- n -System beträgt die Anzahl $c_{x,k,n}$ aller gerichteten Wege der Länge x von Z_1 bis in einen Ausfallzustand

$$c_{x,k,n} = (x-1)! n^{\min(2k-1,x)} \sum_{l=k}^{x-1} (2k-1) g_k(n-l-2, x-l) \quad (5)$$

für $k \leq x \leq n-2$,

$$c_{n-1,k,n} = \begin{cases} (n-2)!n(2k+1-n), & \text{falls } n \leq 2k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

und

$$c_{n,k,n} = \begin{cases} n!, & \text{falls } n = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7)$$

Beweis: Für jeden der drei Fälle erfolgt der Beweis in zwei Schritten. Zunächst wird die Anzahl aller Ausfallzustände $Z_{i_x} \in \bar{M}$ mit genau x ausgefallenen Komponenten berechnet und dann für jeden derartigen Zustand Z_{i_x} zurückverfolgt, wieviele von Z_1 ausgehende Wege in ihn einmünden.

1) $k \leq x \leq n-2$.

Da ein gleichzeitiger Ausfall von Komponenten im Modell ausgeschlossen ist, hat jeder Ausfallzustand Z_{i_x} genau einen Block aus k oder mehr aufeinanderfolgenden ausgefallenen Komponenten. Dieser Block, der aus genau l Komponenten, $k \leq l \leq x$, bestehen möge, soll mit $B(Z_{i_x})$ bezeichnet werden (vgl. Abb. 2)

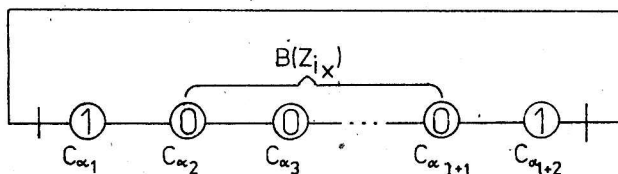


Abb. 2 Ausfallzustand Z_{i_x} mit Block $B(Z_{i_x})$ (1 bedeutet "Komponente ist funktionsfähig", 0 bedeutet "Komponente ist ausgefallen")

Da vor dem x -ten Zustandsübergang das System noch funktionsfähig war ($Z_{i_{x-1}} \in \bar{M}$), gilt $1 \leq 2k-1$. Im linearen Teilsystem aus $n-1-2$ Komponenten, das nach Entfernen von $B(Z_{i_x})$ mitsamt den beiden angrenzenden funktionsfähigen Komponenten übrigbleibt, kommen genau $x-1$ ausgefallene Komponenten vor, darunter aber höchstens $k-1$ aufeinanderfolgende. Deshalb gibt es genau $ng_k(n-1-2, x-1)$ Ausfallzustände Z_{i_x} mit einem Block aus 1

aufeinanderfolgenden ausgefallenen Komponenten. Der x -te Ausfall muß in $B(Z_{i_x})$ stattgefunden haben, andernfalls wäre bereits $Z_{i_{x-1}}$ ein Ausfallzustand. Aus dem gleichen Grund kommen die Komponenten auf den jeweils $1-k$ Randpositionen an den beiden Enden von $B(Z_{i_x})$ für den x -ten Ausfall nicht in Frage, dafür aber die $1-2(1-k) = 2k-1$ Komponenten in der Mitte von $B(Z_{i_x})$. Die ersten $x-1$ Ausfälle können dann in beliebiger Reihenfolge stattgefunden haben. Mithin gibt es $(2k-1)(x-1)!g_k(n-1-2, x-1)$ Wege der Länge x von Z_1 in einen Ausfallzustand mit einem Block aus genau 1 aufeinanderfolgenden ausgefallenen Komponenten. Die Anzahl der Wege der Länge x von Z_1 bis in einen Ausfallzustand beträgt somit

$$c_{x,k,n} = (x-1)!n \sum_{l=k}^{\min(2k-1,x)} (2k-1)g_k(n-1-2, x-1).$$

2) $x = n-1$.

In diesem Fall hat der Block $B(Z_{i_x})$ genau x Komponenten. Wegen $Z_{i_{x-1}} \in M$ folgt als Bedingung für die Blocklänge wieder $x \leq 2k-1$, d.h. $n \leq 2k$. Ist die Bedingung erfüllt, so gibt es n Ausfallzustände Z_{i_x} und analog zu 1)

$$c_{n-1,k,n} = \begin{cases} (n-2)!n(2k+1-n), & \text{falls } n \leq 2k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wege der Länge $n-1$ von Z_1 bis in einen Ausfallzustand.

3) $x = n$.

In Z_{i_x} sind alle n Komponenten ausgefallen. Nur falls $n = k$ ist, besitzt das System einen derartigen Ausfallzustand, andernfalls wäre bereits $Z_{i_{x-1}}$ ein Ausfallzustand. Dann ergibt sich

$$c_{n,k,n} = \begin{cases} n!, & \text{falls } n = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zahlen $g_k(N, J)$ können nach Bollinger [6] mit Hilfe verallgemeinerter Pascalscher Dreiecke rekursiv berechnet werden. Als geschlossene Formel wurde

$$g_k(N, J) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{[J/k]} (-1)^l \binom{N-lk}{J-lk} \binom{N-J+1}{l} & \text{für } 0 \leq J \leq N - [N/k], \\ 0 & \text{für } N - [N/k] < J \leq N \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

ermittelt [2].

Literatur:

1. Chiang, D.T., and Niu, S.C.: Reliability of consecutive - k-out-of-n:F system. IEEE Trans. Reliability R-30, 87-89 (1981)
2. Kossow, A.: Zuverlässigkeitsuntersuchungen an konsekutiven k-aus-n:F Systemen - ein Beitrag zur Zuverlässigkeitsanalyse komplizierter technischer Systeme. Dissertation (B), Technische Hochschule, Wismar 1988
3. Kossow, A., und Preuß, W.: Zuverlässigkeitsuntersuchungen an konsekutiven k-aus-n:F Systemen. Proceedings der Fachtagung "Experimentelle und theoretische Zuverlässigkeitsuntersuchungen an Hydraulikgeräten", 8.9.-11.9.1987, Wismar (in Druck)
4. Bollinger, R.C., and Salvia, A.A.: Consecutive-k-out-of-n:F system with sequential failures. IEEE Trans. Reliability R-34, 43-45 (1985)
5. Koslow, B.A., und Uschakow, I.A.: Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit. Berlin 1978
6. Bollinger, R.C.: Reliability and runs of ones. Math. Mag. 57, 34-37 (1984)

eingegangen: 12.11.1987

revidierte Fassung: 8.7.1988

Verfasser

Dr.sc.techn.Dr.rer.nat. Andreas Kossow
Technische Hochschule Wismar
Sektion Mathematik/Naturwissenschaften
Philipp-Müller-Straße 21
Wismar
DDR-2400

Kurt Frischmuth

Raimond Strauß

On the triangulation of certain plane domains

1. Introduction

Numerical methods for solving two-dimensional systems of PDE's require in many cases a decomposition of the domain in triangles (cf. for instance [1 - 5]). There are various algorithms for the construction of triangulations and grid refinement, cf. [6, 7]. In the present paper we consider the triangulation of a special class of domains Ω which are called Braess domains due to their special meaning for the multigrid algorithm presented by Braess [8]. The properties of those domains are explicitly used by the algorithm to be described in Section 3. Namely, we assume that

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^m S_j$$

with each S_j being a straight finite line satisfying

$$a_j x + b_j y = c_j, \quad a_j, b_j \in \{0, 1, -1\}, \quad c_j \text{ integer.}$$

The initial point A_j of S_j is the endpoint of S_{j-1} (with index mod m); this condition defines the vertices A_j , $j = 1, \dots, m$, uniquely.

Now, our aim is to construct a decomposition of Ω in congruent triangles with edges of length 1, 1 and $\sqrt{2}$.

Usually FEM-codes require for the definition of the domain Ω the coordinates of the vertices A_j as data. However, for our special purpose we may assume that there are given the equivalent, but more convenient data

$$(K_l, x_l), \quad l = 1, \dots, k,$$

with

$$K_l = (x_l, y_l) \in \bar{\Omega}, \quad x_l, y_l \text{ integer},$$

$$K_l \neq K_{l'}, \quad \text{for } l \neq l',$$

$$\bigcup_{l=1}^k \{K_l\} = \bar{\Omega} \cap \mathbb{Z}^2, \quad \text{and}$$

$$x_l = \begin{cases} 0 & \text{for } K_l \in \Omega, \\ \text{anti-clockwise boundary point-counter for } K_l \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is considered as an open set.

The enumeration of the boundary points starts at an arbitrary boundary point and encloses all integer boundary points. We denote the number of all integer boundary points by r , k is the number of grid points and n the number of triangles in the decomposition.

The main problem is now the nonconvexity of the domain Ω . We do not assume that $K_{l_1}, K_{l_2}, K_{l_3} \in \bar{\Omega}$ would imply $\text{conv}\{K_{l_1}, K_{l_2}, K_{l_3}\} \subset \bar{\Omega}$. Thus we need a test to decide whether a given triangle with edgelengths $1, 1, \sqrt{2}$ is contained in $\bar{\Omega}$ or not. In Sec. 2 we derive a criterion which is proper for a very economic testing procedure. This in turn is the basis for a decomposition algorithm, which is presented in Sec. 3 together with some examples demonstrating the power of the proposed criterion. The derivation of a 3-D analog of the test from Sec. 2 concludes the paper.

2. The criterion

Let us start with some simple but fundamental observations. As before Ω will be an open Braess domain.

Remark 1: A straight line with unit length and integer vertices is either entirely contained in Ω or entirely contained in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Remark 2: A straight line with length $\sqrt{2}$ and integer vertices is

- either entirely contained in Ω or
- entirely contained in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ or
- it is the union of exactly two parts of length $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, one of them lying entirely in Ω , the remaining lying entirely in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Remark 1 and 2 imply in a straightforward way

Remark 3: A unit triangle, i.e. a triangle with integer vertices and edgelengths 1, 1, $\sqrt{2}$, is

- either entirely contained in Ω or
- entirely contained in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ or
- it is the union of exactly two congruent triangles with edgelengths $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 1, one of them lying entirely in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ and the other lying entirely in Ω .

Remark 3 suggests using two testing points of the form

$$P_{\alpha} = \sum_{i=1}^3 w_{\alpha i} K_{l_i} \quad i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2,$$

e.g. with

$$w_{\alpha_i} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{near the right angle,} \\ \frac{1}{6} & \text{or } \frac{1}{2} \quad \text{else} \end{cases}$$

and

$$w_{1_i} + w_{2_i} = \frac{2}{3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

and hence reducing the problem to that of deciding whether a given point belongs to $\bar{\Omega}$ or not. This question, in turn, can be solved by calculating the index of $\partial\Omega$ with respect to the given point (cf. [12]). However, the drawback of this method is its cost. For each of the triangles to be tested two times an index must be calculated - which requires $O(r)$ operations. This motivates the following considerations which allow to avoid the use of testing points.

Lemma 1: Consider the unit triangle $\Delta = \Delta K_{1_1} K_{1_2} K_{1_3}$. If two of the x_{1_i} 's vanish, then the triangle is contained in $\bar{\Omega}$.

Proof: Assume $\Delta \not\subset \bar{\Omega}$, then according to Remark 3 two cases are possible. In the first case $\Delta \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ and hence all its vertices belong to $\partial\Omega$. In the second one a subtriangle of Δ is contained in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ which has two common vertices with Δ . Thus if the assumption $\Delta \not\subset \bar{\Omega}$ is true, then at least two vertices of Δ belong to $\partial\Omega$ and hence at most one of the x_{1_i} 's may vanish. ■

However, the converse is not true, i.e. there may be triangles contained in $\bar{\Omega}$ with one or none vanishing x_{1_i} . We study such situations in the following three lemmas.

Lemma 2: Let $x_{1_1} = 0$ and $|\overline{K_{1_1} K_{1_2}}| = |\overline{K_{1_1} K_{1_3}}| = 1$.

Then $\Delta = \Delta K_{1_1} K_{1_2} K_{1_3} \subset \Omega$.

Proof: We consider again the two under $\Delta \not\subset \Omega$ possible cases. In each of them there exists a subtriangle of Δ (in the first case Δ itself) with K_{1_1} as a vertex, which is contained in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. But this implies $x_{1_1} \neq 0$ - in contradiction to the assumption. ■

Lemma 3: Let $|\overline{K_{1_1} K_{1_2}}| = |\overline{K_{1_1} K_{1_3}}| = 1$ and $M = \frac{1}{2}K_{1_2} + \frac{1}{2}K_{1_3}$.

If $\overline{K_{1_1} M} \subset \partial\Omega$, then $\Delta \not\subset \Omega$.

If $\overline{K_{1_1} M} \not\subset \partial\Omega$, then either $\Delta \subset \Omega$ or $\Delta \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Proof: It suffices to observe that the third case of Remark 3 occurs iff $\overline{K_{1_1} M} \subset \partial\Omega$. ■

Lemma 4: Under the assumption of Lemma 3 we have $\overline{K_{1_1} M} \subset \partial\Omega$

iff $\exists l_4$ with $K_{1_4} = 2M - K_{1_1} \wedge x_{1_4} \neq 0 \wedge$

$x_{1_4} - x_{1_1} = \pm 1 \pmod{r}$.

Proof: a) Sufficiency. K_{1_1} and K_{1_4} are neighbouring boundary points, hence $\overline{K_{1_1} K_{1_4}} \subset \partial\Omega$, the more $\overline{K_{1_1} M} \subset \partial\Omega$.

b) Necessity. We have $|\overline{K_{1_1} M}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Therefore $\overline{K_{1_1} M} \subset \partial\Omega$ implies that $\overline{K_{1_1} M}$ is contained in a straight line belonging to $\partial\Omega$ with integer vertices and successive numeration. ■

Now we are ready to formulate the main result.

Theorem 1: Let $|K_{1_1} K_{1_2}| = |K_{1_1} K_{1_3}| = 1$ and $|K_{1_2} K_{1_3}| = \sqrt{2}$.

The triangle $\Delta = \Delta K_{1_1} K_{1_2} K_{1_3}$ is entirely contained in Ω iff one of the following conditions holds :

- (i) at least two of the x_{1_i} , $i = 1, 2, 3$, vanish;
- (ii) x_{1_1} vanishes;
- (iii) $x_{1_1} \neq 0$ [$\exists l_4$ with $K_{1_4} = K_{1_2} + K_{1_3} - K_{1_1}$ $x_{1_4} \neq 0$
 $x_{1_4} - x_{1_1} = \pm 1 \pmod{r}$]

$$[x_{1_2} x_{1_3} = 0 \quad \text{sgn}(x_{1_1}, x_{1_2}, x_{1_3}) \det \begin{pmatrix} 1 & x_{1_1} & y_{1_1} \\ 1 & x_{1_2} & y_{1_2} \\ 1 & x_{1_3} & y_{1_3} \end{pmatrix} = 1].$$

Proof: Due to the lemmas it remains to show that a triangle, which neither possesses two inner vertices, nor possesses K_{1_1} as an inner vertex, nor is cut up into two halves by $\partial\Omega$, lies in Ω exactly if there is an inner vertex or if the vertices (lying now all on $\partial\Omega$) form a positively oriented triangle with respect to the enumeration of the boundary. For the first case it suffices to observe that the existence of an inner vertex implies the existence of a non-empty common part of Δ and Ω - which excludes the possibility of $\Delta \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. The second case is clear due to the anti-clockwise orientation of $\partial\Omega$. ■

3. The decomposition algorithm

Consider the following simple algorithm in step 1 of which we mean by "interesting":

- $\max |l_i - l_j| < B$,
- the edgelengths are $1, 1, \sqrt{2}$,
- each new generated triple has no inner points in common with the sum of the earlier triangles.

Here B is a suitable constant - depending on the numeration of

gridpoints - which is easily obtainable.

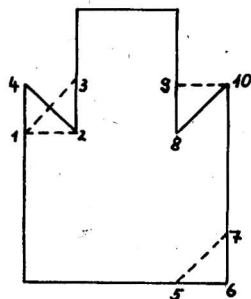
Algorithm: 1 generate all interesting triples of numbers of vertices l_1, l_2, l_3 ,
2 eliminate all triangles which are not entirely contained in Ω by using Theorem 1.

The cost of testing for interesting triangles may be reduced by prescribing the direction of hypotenuses, allowing exceptions only near $\partial\Omega$.

Step 2 of that algorithm is based on Theorem 1 from Sec. 2. Note that only if the case (iii) occurs the test will be rather expensive, in the worst case the position of two boundary points with given numbers $\pi_1 \pm 1 \pmod{r}$ have to be checked for their position ($= K_{l_2} + K_{l_3} - K_{l_1}$?), the sign of a permutation and a determinant of order 3×3 are to be calculated.

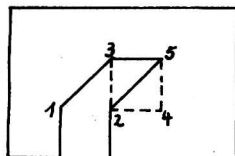
Now, let us pass to some examples.

Examples:



$\Delta K_2K_3K_1$ is cut into 2 parts. K_2 and K_4 are neighbouring boundary points. The Δ is eliminated by (iii), first condition.

$\Delta K_6K_7K_5$ is accepted because it corresponds to the first case of Remark 3. $\Delta K_9K_8K_{10}$ corresponds to the second case and is hence eliminated by (iii), second condition.



Here $\Delta K_2K_3K_1$ is eliminated by (iii), second condition, $\Delta K_2K_4K_3$ by (iii), first condition, while $\Delta K_4K_5K_6$ is accepted.

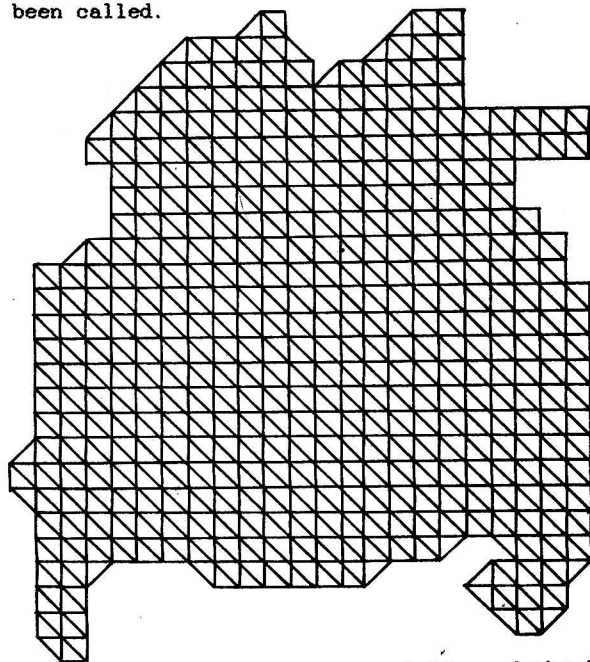
Our main interest was in the following example. Here Ω is an idealization of the Greifswald Bay containing 486 grid points and 869 triangles (cf [10]). The algorithm generated 287526 triples satisfying $\max |l_i - l_j| \leq B = 25$, rejecting 286648 candidates as not interesting in step 1. From the remaining 878 were 764 accepted after testing (i),

28 accepted after testing (ii),

70 accepted after testing (iii), first condition,

9 rejected and 7 accepted after testing (iii), second condition.

Hence, even if an index test would have been applied only in "doubtful" cases, i.e. if Lemma 1 and Lemma 2 do not give a decision, then $2 \cdot 86$ times a routine for index calculation would have been called.



Triangulation of the Greifswald Bay

4. Generalization to the 3-D case

Assume that the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is bounded by a surface composed of pieces satisfying

$$c_{\alpha}^T x = b_{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (*)$$

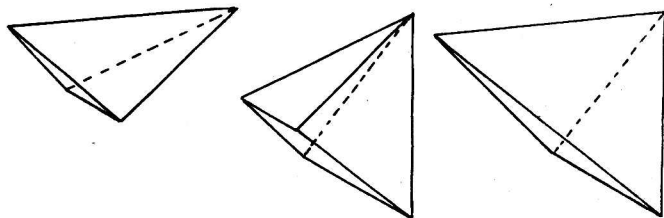
with

$$c_{\alpha} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad b_{\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Then the 3-D analog of the problem from Sec. 2 is that of deciding whether a unit tetrahedron with edgelengths 1, 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ and integer vertices is contained in $\bar{\Omega}$.

A tetrahedron of that type may be cut by a surface satisfying (*) in 6 different ways so that the discussion becomes a little more cumbersome. Possible cutting planes have unit normals from

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$



Decomposition of unit tetrahedron by plane with normal vector $(1, 1, -1)^T$.

A reinspection of Sec. 2 suggests that Lemma 1 and Lemma 2 should be easy to modify for the present case. However, the remainder of that section uses essentially the enumeration of the boundary, i.e. an explicitly given homeomorphism of $\partial\Omega$ with $\mathbb{R}/\text{mod } r$ or S^1 . An analog of that would be an homeomorphism with S^2 in the spacial case. Unfortunately, it is rather unrealistic to assume such homeomorphism to be given or to be easy to calculate in cases of practical interest. Thus we are going to make weaker assumptions here, expecting in turn weaker results, i.e. at the outcome we shall have more expensive testing procedures. So we assume here that $\partial\Omega$ is connected and that an orientation of $\partial\Omega$ is given by assigning to each triangle $\Delta K_{1_1} K_{1_2} K_{1_3} \in \partial\Omega$ an outer normal $n_{1_1, 1_2, 1_3}$ of unit length.

Now we are going to prove two lemmas. This time we start with a 3-D counterpart of Lemma 2.

Lemma 2': Let $|K_{1_1} K_{1_i}| = 1$, $|K_{1_i} K_{1_j}| = \sqrt{2}$,

$i, j \in \{2, 3, 4\}$ and K_{1_1} be an inner point of Ω .

Then $\text{conv}\{K_{1_i}, i = 1, \dots, 4\}$ is contained in $\bar{\Omega}$.

Proof: We observe that three of the faces of $\text{conv}\{K_{1_i}\}$ are triangles of the type considered in Lemma 2. Under the present assumptions the former ones are satisfied for these triangles, hence none of them may be cut by the boundary $\partial\Omega$, neither can not the tetrahedron $\text{conv}\{K_{1_i}\}$. ■

Remark 4: A direct proof can be carried out analogously as in Lemma 2 considering the six possibilities of cutting up the tetrahedrons. K_{1_1} is always a vertex of each of the pieces.

Now it is easy to verify

Lemma 1': If no more than one of the points K_{1_i} is a boundary point, then $\text{conv}\{K_{1_i}\} \subset \bar{\Omega}$.

Proof: If again K_{1_1} is the distinguished vertex as in Lemma 2', then two cases are to be considered:

- (a) K_{1_1} is an inner point - then Lemma 2' yields the thesis,
- (b) K_{1_1} is not an inner point - then $K_{1_2}, K_{1_3}, K_{1_4}$ are inner points and hence the assumptions of Lemma 1 are fulfilled for the faces with edgelengths 1, 1, $\sqrt{2}$. Thus none of them is cut by the surface, consequently, the same is true for the tetrahedron. ■

In order to complete the discussion we need now a criterion deciding whether a unit tetrahedron with two or more boundary points among the vertices is cut by the surface or not, and another one deciding whether a tetrahedron lies inside or outside if the previous answer is no. For a better understanding imagine that we are considering e.g. the elasticity problem for RUBIC's cube twisted by $\frac{\pi}{4}$ per layer.

The first question may be solved introducing the six possible cutting triangles (with vertices from $\{K_{1_i}, i = 1, \dots, 4, K_{1_i} + K_{1_j} - K_{1_1}, i \neq j = 2, 3, 4, K_{1_2} + K_{1_3} + K_{1_4} - 2K_{1_1}\}$) and checking, whether one of them belongs to the surface or not. We omit the details.

If the tetrahedron is not cut, and one of the K_{1_i} is an inner point, then again $\text{conv}\{K_{1_i}\} \subset \bar{\Omega}$. The remaining case is that of all K_{1_i} being boundary points. Now we are lacking the analog of the enumeration used in Theorem 1. Instead, we use the

assumed to be given outer normal. We have the obvious

Theorem 2: Let $\text{conv}\{K_{1_i}\}$ be a tetrahedron which is not cut by the surface $\partial\Omega$. Let $\Delta K_{1_1}K_{1_2}K_{1_3}$ be part of $\partial\Omega$. Then $\text{conv}\{K_{1_i}\}$ is an inner tetrahedron iff

$$(n_{1_1, 1_2, 1_3}, \overrightarrow{K_{1_4}K_{1_1}}) > 0.$$

In the remaining case we are forced to use rather a generalization of the testing point approach mentioned in Sec. 2. Namely we use then

Theorem 3: Let $\text{conv}\{K_{1_i}\}$ be a tetrahedron which is not cut by the surface $\partial\Omega$, then it belongs to $\bar{\Omega}$ iff

$$- \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x - y|} d\omega(y) = 4\pi \quad (**)$$

with $x = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n K_{1_i}$ and $n_y = n_{1_1', 1_2', 1_3'}$ for $y \in \Delta K_{1_1}K_{1_2}K_{1_3}$.

Proof: The theorem is a direct consequence of the theorem on spacial angles, cf. [9, 11]. ■

Remark 5: For the criterion of a tetrahedron to be cut or not as well as for Theorems 2 and 3 it is essential to have an array of all boundary triangles together with the corresponding outer unit normals. To obtain those data we may use piecewise the modified plane decomposition procedure for each part of $\partial\Omega$. Doing this it is easy to incorporate the rule that

$$\vec{n} = \overrightarrow{K_{1_1}K_{1_2}} \times \overrightarrow{K_{1_1}K_{1_3}} / \|\overrightarrow{K_{1_1}K_{1_2}} \times \overrightarrow{K_{1_1}K_{1_3}}\|.$$

However, the 3-D case is essentially more complicated than the plane case since we are forced to avoid using global informations on the orientation. Fortunately, Theorem 3 must be used only in the case of very slender domains or domains with thin holes. Hence one may expect that the numerical approximation of (**) does not affect the overall costs of the decomposition algorithm to much.

Note that Theorems 2 and 3 are true for arbitrary tetrahedrons. In general a domain of the considered type cannot be decomposed using just unit tetrahedrons. Consequently, a 3-D-decomposition algorithm needs further tests. However, in most cases one can avoid using Theorem 3, especially, if further properties of Ω are used. So we have in many applications

$$\Omega = \{ -h(x,y) < z < 0, (x,y) \in \Omega^{2D} \}$$

with a piecewise linear h . This makes a layer-by-layer decomposition possible which reduces the necessity of testing.

Acknowledgement

Helpful discussions with Dr. K. Engel and Prof. L. Berg in the course of preparing respectively revising this paper are gratefully acknowledged.

References

1. Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method. New York 1977
2. Oden, J.T.: Finite Elements of Nonlinear Continua. New York 1977
3. Yserentant, H.: On the multilevel splitting of finite element spaces for indefinite elliptic boundary value problems. Bericht Nr. 26, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen 1984
4. Berg, L.: Lineare Gleichungssysteme mit Bandstruktur. Berlin 1986

5. Kufner, A., and Sändig, A.-M.: Some Applications of Weighted Sobolev Spaces. Teubner-Texte zur Mathematik, 100, Leipzig 1977
6. Dwyer, R.A.: A faster divide-and-conquer algorithm for constructing Delaunay triangulations. Algorithmica 2, 137-151 (1987)
7. Thomson, J.F. (Ed): Numerical Grid Generation. New York 1982
8. Braess, D.: The convergence rate of a multigrid method with Gauss-Seidel relaxation for the Poisson equation. In: Hackbusch, W., and Trottenberg, U. (eds): Multigrid Methods. Lecture Notes in Mathematics 960, pp. 368-386, Berlin 1982
9. Vladimierov, V.S.: Equations of Mathematical Physics. Moscow 1984
10. Stoyan, G., Müller, W., and Baumert, H.: Numerische Simulation von wind- und durchflußinduzierten Strömungen in Flachgewässern auf der Basis des Ekman-Modells (Rechenprogramm Lake). Acta Hydrophysica 30, 1, 51-67 (1986)
11. Fenyő, S., and Stolle, H.W.: Theorie und Praxis der Integralgleichungen, Band 4. Berlin 1984
12. Narasimhan, R.: Complex Analysis in One Variable. Boston 1985

received: July 25, 1988

Authors:

Dr. rer. nat. Kurt Frischmuth
 Dr. rer. nat. Raimond Strauß
 Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
 Sektion Mathematik
 Universitätsplatz 1
 Rostock
 DDR-2500

Dietlinde Lau

Funktionenalgebren über endlichen Mengen

Autorreferat der Dissertation B

Sei $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$, P_k^n die Menge aller n -stelligen Funktionen f^n , die das n -fache kartesische Produkt E_k^n in E_k abbilden, und $P_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^n$. Zusammen mit den Operationen

- Umnummerieren und Identifizieren von Variablen,
- Hinzufügen von fiktiven Variablen und
- Einsetzen von Funktionen in Funktionen

(ausdrückbar durch gewisse elementare Operationen $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \kappa$) bildet P_k eine Algebra, die Algebra der Funktionen der k -wertigen Logik.

Die Menge aller mittels $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \kappa$ aus Funktionen einer Menge $A \subseteq P_k$ in endlich vielen Schritten konstruierbaren Funktionen sei mit $[A]$ bezeichnet. Ist $A = [A]$, so heißt A abgeschlossene Menge bzw. Teilklasse von P_k . Die Menge aller Teilklassen von P_k bildet zusammen mit der mengentheoretischen Inklusion einen Verband, der hier mit V_k bezeichnet werden soll.

Im Rahmen der Untersuchung von Funktionenalgebren erweist sich bei der Lösung einer Reihe von Problemen (u. a. dem Vollständigkeitsproblem) bzw. bei der Klassifikation von universalen Algebren (E_k, F) , $F \subseteq P_k$, oder Varietäten solcher Algebren eine genaue Kenntnis von V_k als sehr nützlich. Für $k = 2$ ist V_2 (bestehend aus abzählbar vielen Elementen) seit den Arbeiten von E. L. Post bekannt.

Für $k \geq 3$ gibt es dagegen kontinuum-viele Teilklassen von P_k , wie man durch das Auffinden von abgeschlossenen Mengen mit unendlichen Basen in P_k für $k \geq 3$ beweisen konnte, womit eine vollständige Beschreibung von V_k fast unmöglich erscheint.

Trotzdem kann man versuchen (in Blickrichtung auf gewisse Anwendungen), durch Beschränkung auf abzählbare oder strukturell durchschaubare Bereiche von V_k , sich eine gewisse Vorstellung von V_k zu verschaffen. Die vorliegende Arbeit versucht, anknüpfend an die Untersuchungen einer Reihe von Mathematikern (u. a. I. G. Rosenberg, A. I. Mal'cev, I. A. Mal'cev, J. Demetrovics, Á. Szendrei, V. V. Gorlov), einige Beiträge dazu zu liefern. Sie beginnt mit einem neuen kürzeren Beweis für die bekannten Resultate von E. L. Post über V_2 . Daran anknüpfend wird der Verband der Teilklassen von

$$P_{k,2} := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \in P_k \mid f^n: E_k^n \rightarrow E_2\}$$

untersucht. Insbesondere wird für jedes $A \in V_2$ geklärt, ob die

$$\text{Menge } \mathcal{K}(A) := \{B \mid B = [B] \subseteq P_{3,2} \wedge \text{pr } B = A\}$$

($\text{pr } B := \{g \in P_2 \mid \exists f^n \in B: \forall \underline{a} \in E_2^n: f(\underline{a}) = g(\underline{a})\}$) endlich, abzählbar unendlich ist oder die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Weiterhin werden Eigenschaften einer Klasse autodualer Funktionen ermittelt, ein Kriterium für den Nachweis der Abzählbarkeit gewisser Teilverbände für V_k vorgestellt, sämtliche Klassen quasilinearer Funktionen von P_3 bestimmt, gezeigt, daß es genau 1434 Teilklassen von $[P_3^1]$ gibt, Klassen linearer Funktionen von P_k untersucht (u. a. werden neue Beweise für Resultate über lineare Funktionen in Primzahllogiken vorgestellt, alle Teilklassen linearer Funktionen in P_4 charakterisiert und die maximalen Klassen der Klasse L der linearen Funktionen von P_k bestimmt) sowie submaximale Klassen von P_k (dabei alle 158 für $k = 3$) angegeben.

Abschließend werden Kongruenzen und Automorphismen auf Funktionalgebren studiert.

eingereicht: 09. 05. 1984

verteidigt: 29. 03. 1985

Gutachter: Prof. Dr. G. Buros (Rostock),
Prof. Dr. B. Csákány (Szeged),
Prof. Dr. I. G. Rosenberg (Montreal).

Verfasser: Dr. sc. nat. Dietlinde Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Informationsflüsse auf Hypergraphen

Autorreferat der Dissertation A

We deal with combinatorial (extremal) problems of transmitting information: Let a set of n points and two subsets X and Y be given. Provided that every point of X knows one unit of information at the beginning which is not known to all of the other points, we arrange a stepwise exchange of information such that each point of Y knows all the information at the end. Every step (round) consists of some parallel conference calls each including exactly k points ($k \geq 2$, fixed). During a call all the participants completely exchange all the information they learned before. Every point can take part in at most one call per step. Moreover, let the information exchange be minimal with respect to the above defined (X, Y) -completeness, i.e. if any of the calls is deleted there is a point in Y which does not longer learn all the information.

Let the number of calls and steps be denoted by L and T , resp. Our main results are:

$$(1) \quad L \geq \left\lceil \frac{|X| - k}{k-1} \right\rceil + \left\lceil \frac{|Y| - k}{k-1} \right\rceil$$

$$L \leq \begin{cases} n^2/k - (2-2/k)n & \text{if } n \geq N, \\ 2(n-k)+1 & \text{if } n < N, \text{ where } N \approx (2+\sqrt{2})k. \end{cases}$$

$$(2) \quad L \cdot k^T \geq \frac{1}{k} |X| |Y| \lceil \log_k |Y| \rceil - \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right) |X| |Y|,$$

$$\text{where } m := |Y| / (k^{\lceil \log_k |Y| \rceil - 1}),$$

and $|X| \leq |Y|$ without loss of generality.

The results of the first part are based on the new-defined reduced minimal order, i.e. a modification of the well-known minimal order of the calls. Its investigation and the extension to posets of a special kind, which are not necessarily related to reduced minimal orders of information exchanges, are a central topic of this part.

A new method, which analyses the connection between the transmission of one unit of information and the entire process, yields the results of the second part. Using this tool we get more precise results on the mutual dependence of L and T in the cases when T is minimal ($T = \lceil \log_k n \rceil$ for $|X| = |Y| = n$). For $k = 2$ and even n , we prove that there is an information exchange minimizing both L and T iff $n \leq 8$.

We use several examples and constructions to discuss whether the given bounds can be achieved or not.

Remark: Recently, together with D.J.Kleitman we were able to prove

$$\lfloor n/k \rfloor^2 + 2(n - k \lfloor n/k \rfloor) + (k-1)^2 \leq \max L \leq 2(n/k)^2.$$

These results improve the above mentioned bounds (1).

eingereicht: 2. 10. 1987

verteidigt: 21. 12. 1987

Gutachter:

Prof. Dr. G. Burosch (Rostock)
Prof. Dr. H.-D. Gronau (Greifswald)
Prof. Dr. V. K. Leontjev (Moskau)

Verfasser:

Dr. rer. nat. Roger Labahn
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock, Math. Kolloq./ Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichungs/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist einzeilbündig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichungs (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. ä. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzpiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem zugehörigen Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparenzpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenstellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

- /8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra.
Priceton 1958
- /9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)
- /10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichard, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort. Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

- | | |
|---|----------------|
| - Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg | ISSN 0518-3189 |
| - Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge | ISSN 0138-3299 |
| - Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte | ISSN 0232-3066 |
| - Rostocker Mathematisches Kolloquium | ISSN 0138-3248 |
| - Rostocker Philosophische Manuskripte | ISSN 0557-3599 |
| - Rostocker Physikalische Manuskripte | ISSN 0138-3140 |
| - Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte | ISSN 0138-3191 |
| - Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerikawissenschaften | ISSN 0458-7944 |
| - Erziehungswissenschaftliche Beiträge | ISSN 0138-2373 |
| - Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus | ISSN 0138-3396 |
| - Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock | ISSN 0232-539X |
| - Beiträge zur Geschichte der FDJ | ISSN 0233-0830 |
| - Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus | ISSN 0233-0636 |
| - Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogik | ISSN 0233-0539 |
| - Rostocker Informatik-Berichte | ISSN 0233-0784 |
| - Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen | ISSN 0233-0687 |
| - Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft | ISSN 0233-0644 |
| - Rostocker Universitätsreden | |

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR - 2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR - 7010.

Ferner sind die Hefte im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR - 2500 zu beziehen.