

ROSTOCKER

MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

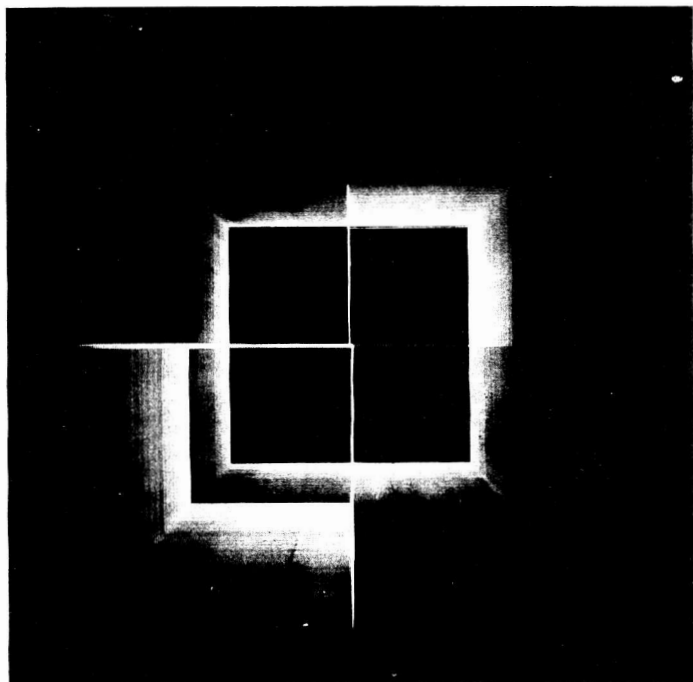
Heft 46

UNIVERSITÄT



ROSTOCK

Die neue Sicht der Dinge: Partnerschaft



Große Aufgaben verlangen eine neue Sicht der Dinge. Sind die gesteckten Ziele mit eigener Kraft nicht zu erreichen, ist Gemeinsamkeit gefordert.

Partnerschaft ermöglicht die Vereinigung der Mittel und der Möglichkeiten. Partnerschaft schafft die Voraussetzungen für

die Erreichung des sonst Unerreichbaren. Eine Philosophie, mit der man nicht nur in Gesellschaft, Kultur und Wissenschaft, sondern auch in der Wirtschaft zu neuen Erkenntnissen kommt.

Wenn Sie diesen Standpunkt mit uns teilen, sprechen Sie mit uns über die neue Sicht Ihrer Projekte.

Deutsche Bank



ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 46

DIETER BETTEN; ULRIKE SCHUMACHER	<i>The ten configurations 10₃</i>	3
KONRAD ENGEL	<i>Convex hulls for intersecting-or-nonintersecting-families</i>	11
SERGEY L. BEZRUKOV; HANS-DIETER GRONAU	<i>A Kruskal-Katona type theorem</i>	17
INGO WARNEKE	<i>The Möbius-function of subword orders</i>	25
<i>Bericht über die Internationale Fachkonferenz 'Elliptic Boundary Value Problems'</i>		34
LOTHAR BERG; WOLFGANG PETERS	<i>Die linearen involutorischen Halbgruppen achter Ordnung</i>	35
S. I. KOSTADINOV	<i>Über eine notwendige Bedingung für die Existenz von Exponentialdichotomie bei Impulsdifferentialgleichungen im Banachraum</i>	45
UWE HAMANN	<i>Approximation mittels Linearkombinationen von Fundamentallösungen auf nichtglatten Gebietsrändern</i>	49
ANKE HÄNLER	<i>An error estimate for quadratic splines</i>	60
GERLIND PLONKA	<i>Nonperiodic Hermite-Spline-Interpolation</i>	65
ДИНЬ ХОАНГ АНЬ	<i>Интегральные операторы типа Абеля и их связь с сингулярным оператором</i>	75

UNIVERSITÄT ROSTOCK
FACHBEREICH MATHEMATIK

1993

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Hans-Wolfgang Stolle
(Sprecher des Fachbereichs Mathematik)
Dr. Werner Plischke

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Werner Plischke

Herstellung der Druckvorlage: Dr. Andreas Straßburg

Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Postfach 999
18051 Rostock
Bundesrepublik Deutschland

Redaktionsschluß: 15. Mai 1993

Das **Rostocker Mathematische Kolloquium** erscheint dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Postfach 999, 18051 Rostock, Bundesrepublik Deutschland, zu beziehen.

Außerdem bestehen Bezugsmöglichkeiten für Bestellungen aus Deutschland und dem Ausland über die Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Postfach 999, 18051 Rostock, Bundesrepublik Deutschland

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1993) 46



Universität Rostock
Abteilung Wissenschaftspublizistik
Postfach 999, 18051 Rostock, Bundesrepublik Deutschland
Telefon (0381) 36 95 77
Druck: Universitätsdruckerei 414/93
01000

DIETER BETTEN; ULRIKE SCHUMACHER

The ten configurations 10_3

1 Introduction

In [1] the notion of a tactical decomposition by ordering (TDO) was introduced for every non-regular incidence matrix. By this we mean a subdivision of the matrix into subrectangles each of them being a configuration. We now point out that this procedure can be used also in the regular case, for instance if the matrix to start with is a configuration itself. The procedure can also be applied to determine the automorphism group of a finite geometry. As a demonstration we consider the (well known) ten configurations 10_3 . With help of the TDO-method we determine the structure of these 10 geometries and draw figures which reflect their automorphism groups.

2 Point type distribution

A configuration 10_3 consists of 10 points and 10 blocks such that every point is incident with 3 blocks and every block is incident with 3 points. It is also assumed that every pair of points is incident with at most one block. Up to isomorphy there are ten such configurations [5; 8] listed in table 1 below. The fascinating pictures in [2] are a challenge to understand the structure of the ten configurations 10_3 . For this we note that there are three different types of points. For every point p there are three points not joined to p . These three points may be collinear (p has type I) or they form an angle (p has type V) or they form a triangle (p has type Δ). Look for instance at figure No. 3 of table 3. The point 2 is neither connected to 1 nor to 5 nor to 8. The three points 1, 5, 8, lie on a line, hence the point 2 has type I. The point 6 is not connected to 3, 5 and 7. These three points form a triangle, hence point 6 has type Δ . Point 7 is not connected to 1, 0 and 6. These three points form an angle, therefore point 7 has type V. We determine the types for all points and get: 2, 5: I; 6, 9: Δ ; 7, 4, 8, 1, 3, 0: V. Hence the configuration No. 3 has point type distribution PD: $I^2\Delta^2V^6$. We note that all ten configurations can be distinguished by their point type distribution, see Table 1.

3 Using the TDO-Method

In order to detect structural properties we apply the method of TDO's (tactical decomposition by ordering) described in [1]. Except for configuration No 1 and No 10 there are at least two point types, hence various point type domains. We form block domains according to the distribution of flags of a block to the various point type domains. Following this we refine the point type domains again according to the distribution of flags to the block domains just defined. We continue till the procedure stabilizes.

We give an example. We begin with the incidence matrix of configuration No 9, see table 2 a). Since the points 4,8,7,1 are of type Δ and the other points of type V we start with two point domains, b). The distribution of the three flags of a block to those two point domains is either 2+1 (blocks a and m) or 1+2 (the other blocks). Therefore we have two block domains, c). Now we examine the vertical distribution of flags: in the point type domain {4,8,7,1} all distributions are similar, but the point type domain {2,3,5,6,9,0} has to be split into {3,0} and {2,5,6,9}, d). Finally we split the block set {b,c,d,e,f,g,h,n} into {c,d,g,n} and {b,e,f,h} to get e) or equivalently f). Now the final TDO is reached since we have a decomposition of the incidence matrix into configurations. Note that each of these subconfigurations is preserved under the automorphism group. From the TDO we see that the points {5,9,2,6} form a distinguished quadrangle and using this quadrangle we may draw a model which displays the group Z_4 acting as a group of automorphisms. See the figure in table 3, where the "two" points 3 have to be identified and also the "two" points 0. In order to prove that Z_4 is the full collineation group it suffices to verify that the stabilizer of a point with orbit length 4, say point 5, is the identity. For this, again, we use the TDO-method. Stabilizing 5 means that {5} is a point domain for its own, so we draw a vertical separating line between 5 and 9, table 2 g). From the horizontal distribution of flags we see that {h,e,f,b} must be divided into {h,b} and {e,f}. Furthermore the block {g} has to be separated from {n,d,c}, h). Using the flag distribution in the columns one has to split {9,2,6} into {9,6} and {2}, furthermore {4,8,7,1} into {4,1}, {7} and {8}, k). Continuing one reaches the discrete TDO n). This shows that each point is an "individual" and must be fixed under the stabilizer $(Z_4)_{\{5\}}$.

4 Models for the ten 10₃

We have treated the various configurations 10₃ by the TDO-method described above. In table 3 there are pictures displaying their structures and collineation groups. Also the TDO's induced by the (I, V, Δ) -point distribution are written down.

The configurations No 2,6,7 and 8 are based on the prime 3. No 7 and No 8 have collineation group Z_3 . Configuration No 6 has in addition some reflection namely (68)(59)(23)(40). Note in the incidence matrix of No 6 we have not separated {2,5,4} from {3,0,9} which would give a finer TDO, since this separation is not forced by the (I, V, Δ) -distribution. In fact, the points {2,5,4} can be exchanged with the points {3,0,9} by the involution just described. The full collineation group of No 6 is the dihedral group D_6 . This group can be visualized

if we draw a model based on a hexagon, see table 3. Here we allow double points 4,9 and 0. The second model in table 3 reveals the collineation group in the form $D_3 \times Z_2$. This model can be imagined as a model in space, thinking of a triangular pyramid with base points 1,6 and 7 and peak 2.

The configuration No 9 has been treated in detail above. Another configuration based on a (complete) quadrangle is No 4. This configuration is exceptional being the only one which has no rational embedding into the real plane [2;6]. It can be described as follows: Begin with four points $\{1,2,3,4\}$. Every pair $\{i,j\}$ of them is completed to a 3-block $i,j,\{i,j\}$ thus defining 6 new points. Three new points are defined to be collinear if and only if they have exactly one digit in common. Since the four points $\{1,2,3,4\}$ are exactly the points of type Δ , it is clear from the description that the full collineation group is the symmetric group S_4 .

The configurations No 3 and No 5 have collineation group $Z_2 \times Z_2$ and Z_2 , respectively.

No 1 is the well known Desargues configuration. We remind the reader of the following description which also proves that the full collineation group is the symmetric group S_5 : Take five digits 1,2,3,4 and 5 and define as points all ten pairs i,j and as blocks all ten triples i,j,k , incidence being given by inclusion.

The last configuration is No 10. Here all points have type Δ and it turns out that the collineation group is transitive on points. In table 3 a model based on a 5-cycle is drawn. This model reveals the collineation group $Z_5 \times Z_2$, where the second factor interchanges the five outer points $\{1,7,3,9,5\}$ with the five inner points $\{6,2,8,4,0\}$. Since $Z_5 \times Z_2 \cong Z_{10}$ there is also a 10-cycle, which can well be seen in the model by Juriaan Simonis, namely (1234567890). This model is studied in [3] where interesting metric properties of this configuration were found.

Remark. The point types I, Δ and V can also be used to give a quick construction of the ten 10_3 thus proving that the list is complete. But, of course, there are many ways of doing this, see for instance [7].

5 Table 1

No.	Configuration	P.D.	Aut.
1.	{012, 034, 056, 359, 469, 157, 267, 138, 248, 789}	I^{10}	S_5
2.	{123, 150, 189, 257, 268, 369, 370, 456, 478, 490}	I^4V^6	D_6
3.	{139, 146, 158, 237, 240, 269, 350, 457, 680, 789}	$I^2\Delta^2V^6$	$Z_2 \times Z_2$
4.	{125, 136, 147, 238, 249, 340, 567, 589, 680, 790}	$I^6\Delta^4$	S_4
5.	{124, 138, 179, 237, 259, 350, 456, 480, 678, 690}	$I^1\Delta^6V^3$	Z_2
6.	{123, 149, 150, 248, 257, 360, 379, 456, 678, 890}	I^1V^9	D_3
7.	{123, 148, 159, 247, 260, 356, 379, 450, 678, 890}	Δ^1V^9	Z_3
8.	{123, 146, 150, 248, 279, 345, 369, 578, 670, 890}	Δ^7V^3	Z_3
9.	{138, 159, 160, 234, 268, 279, 357, 456, 470, 890}	Δ^4V^6	Z_4
10.	{123, 157, 169, 240, 258, 345, 379, 468, 670, 890}	Δ^{10}	Z_{10}

6 Table 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	x		x					x		
	x					x				x
	x						x			x
		x	x	x						
		x				x		x		
		x					x	x		
			x					x	x	
				x	x	x				
				x				x		x
									x	x
									x	x

a)

	4	8	7	1	2	3	5	6	9	0
a		x		x		x				
b				x			x		x	
c								x	x	
d	x					x	x			
e		x			x			x		
f			x		x				x	
g			x				x	x		
h	x							x	x	
m		x	x							x
n		x							x	x

b)

	4	8	7	1	2	3	5	6	9	0
a		x		x		x				
m		x		x						
b					x			x	x	
c				x					x	x
d	x				x	x				
e		x						x		
f			x		x				x	
g			x					x	x	
h	x								x	x
n		x							x	x

c)

	4	8	7	1	3	0	2	5	6	9
a		x		x	x					
m		x				x				
b				x				x		x
c					x				x	
d	x					x				x
e		x					x		x	
f			x				x			x
g		x		x				x		
h	x							x	x	
n		x			x					x

d)

	4	8	7	1	3	0	2	5	6	9
a		x		x	x					
m		x								
c				x					x	
d	x				x					x
g		x			x				x	
n		x				x				x
b				x				x	x	
e		x						x	x	
f			x					x	x	
h	x							x	x	

e)

	5	9	2	6	4	8	7	1	0	3
h		x		x	x					
e			x	x			x			
f		x	x					x		
b	x	x						x		
g		x						x		x
n		x				x				x
d			x		x					x
c				x					x	x
a						x			x	x
m				x			x	x		

f)

	5	9	2	6	4	8	7	1	0	3
h		x			x	x				
e				x	x			x		
f		x	x					x		
b	x	x							x	
g	x							x		x
n		x				x				x
d			x							x
c				x					x	x
a						x			x	x
m					x	x			x	

g)

	5	9	2	6	4	8	7	1	0	3
h		x			x	x				
b		x	x						x	
e			x	x			x			
f		x	x						x	
g	x							x		x
n		x						x		x
d			x							x
c				x					x	x
a						x			x	x
m					x		x	x		

h)

	5	9	6	2	4	1	7	8	3	0
h		x	x			x				
b		x	x							
e			x	x					x	
f		x	x						x	
g	x							x		x
n		x							x	x
d			x	x						x
c				x					x	x
a						x			x	x
m					x		x	x		

k)

	5	9	6	2	4	1	7	8	3	0
h		x	x			x				
b		x	x				x			
f			x				x			
e			x	x				x		
g	x							x		x
n		x							x	x
c			x							x
d				x					x	x
m					x		x		x	
a						x			x	x

l)

	5	9	6	2	1	4	7	8	3	0
h		x				x				
b		x	x							
f			x					x		
e			x	x					x	
g	x							x		x
n		x						x		x
c			x							x
d				x						x
m					x		x		x	
a						x		x	x	

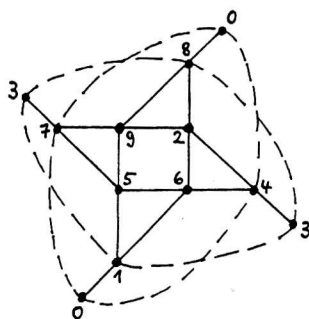
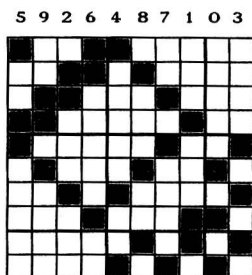
m)

	5	9	6	2	1	4	7	8	3	0
b		x	x			x				
h		x	x							
f			x					x		
e			x	x					x	
g	x							x		x
n		x							x	x
c			x							x
d				x					x	x
a						x			x	x
m					x	x			x	

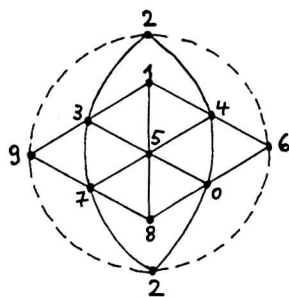
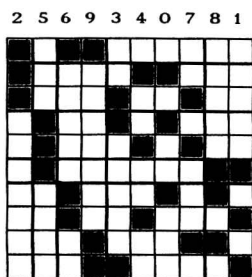
n)

7 Table 3

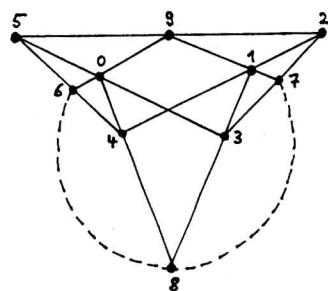
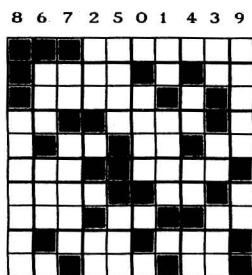
9) Z_4

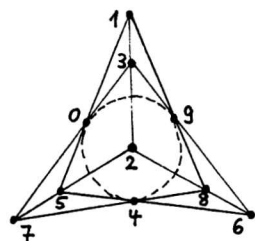
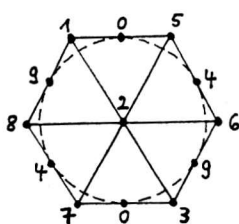
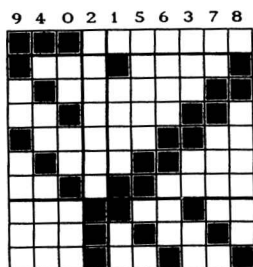
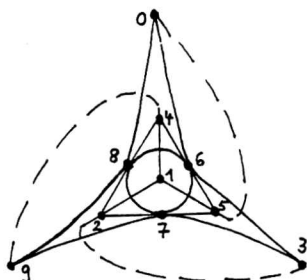
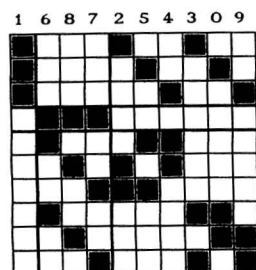
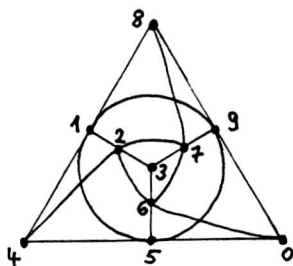
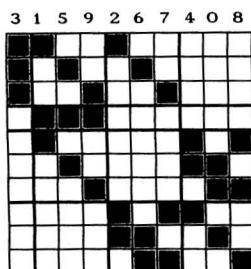
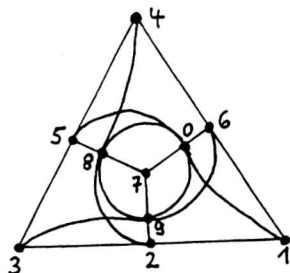
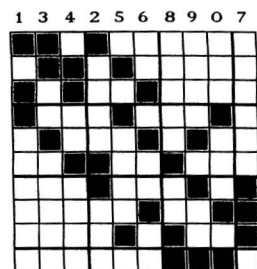


3) $Z_2 \times Z_2$

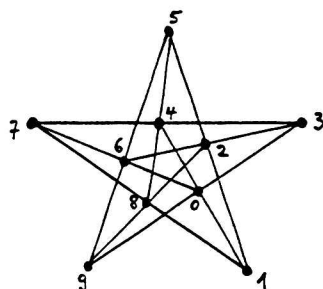
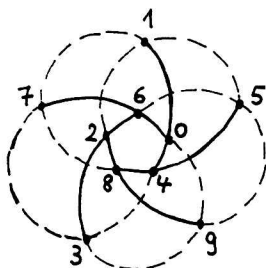
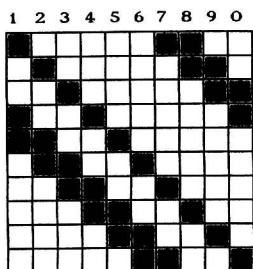


5) Z_2

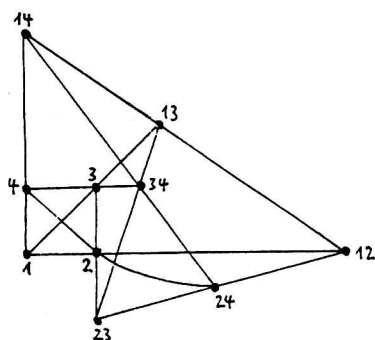
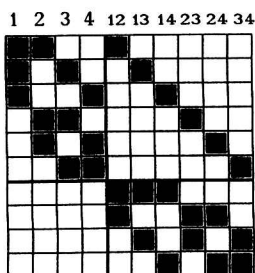


2) D_6 6) D_3 7) $Z_3(1,9)$ 8) $Z_3(7,3)$ 

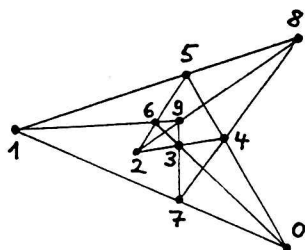
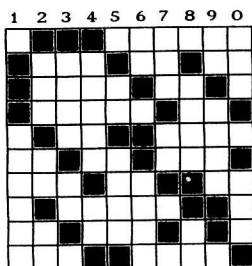
10) Z_{10}



4) S_4



1) S_5



References

- [1] **Betten, D., and Braun, M. :** *A tactical decomposition for incidence structures.* Ann. Disc. Math. **52**, 37-43 (1992)
- [2] **Bokowski, J., and Sturmfels, B. :** *Computational Synthetic Geometry.* Lecture Notes in Math. **1355**, New York 1989
- [3] **van de Craats, J. :** *On Simonis' 10_3 configuration.* Nieuw Arch. Wisk. **4**, 193-207 (1983)
- [4] **Gropp, H. :** *Configurations and the Tutte conjecture.* Ars Combin. **29A**, 171-177 (1990)
- [5] **Kantor, S. :** *Die Konfigurationen $(3,3)_{10}$.* S. Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. **84**, 1291-1314 (1881)
- [6] **Lauffer, R. :** *Die nichtkonstruierbare Konfiguration (10_3) .* Math. Nachr. **11**, 303-304 (1954)
- [7] **Martinetti, V. :** *Sulle configurazioni piane μ_3 .* Ann. Mat. Pura Appl. **15**, 1-26 (1887)
- [8] **Schröter, H. :** *Über die Bildungsweise und geometrische Construction der Configurationen 10_3 .* Nachr. Ges. der Wiss. Göttingen **1889**, 193-236

received: December 16, 1991

Authors:

Prof. Dr. D. Betten
Mathematisches Seminar
Universität Kiel
Ludewig-Meyn-Str. 4
W-2300 Kiel
Germany

Dipl.-Math. U. Schumacher
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
Universitätsplatz 1
O-2500 Rostock
Germany

KONRAD ENGEL

Convex hulls for intersecting-or-nonintersecting-families

1 Introduction

Let N be the n -element set $\{1, \dots, n\}$. A family $\mathcal{F}$ of non-empty subsets of N is called an *intersecting-or-nonintersecting-family* (briefly $(I \vee \overline{C})$ -family) if for all $X, Y \in \mathcal{F}$

$$X \cap Y \neq \emptyset \text{ or } X \cup Y = N.$$

For such a family we define the *parameters of $\mathcal{F}$* by

$$f_i := |\{X \in \mathcal{F} : |X| = i\}|$$

and the *profile of $\mathcal{F}$* to be the $(n+1)$ -tuple $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)$. Let

$$\mu_n := \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{f} \text{ is the profile of an } (I \vee \overline{C})\text{-family}\},$$

let $\langle \mu_n \rangle$ be the convex hull of μ_n and ϵ_n the set of extreme points of the polytope $\langle \mu_n \rangle$. Finally let ϵ_n^* be the set of *essential extreme points*, i.e. of those extreme points $\mathbf{p}$ for which there exists no profile $\mathbf{f} \in \mu_n$ with $\mathbf{f} \geq \mathbf{p}$ (componentwise), $\mathbf{f} \neq \mathbf{p}$. The determination of essential extreme points was initiated by P. L. ERDÖS, P. FRANKL, and G. O. H. KATONA in [3] and [4], and it is motivated by a linear optimization problem on set families.

Since that time several papers appeared on this topic, and a survey on extreme points of profile polytopes arising from Boolean expressions of certain natural conditions is given in [1]. The aim of this article is to settle one of the cases mentioned in [1]. As an application then we solve a problem of H.-D.O.F. GRONAU and C. PROSKE [7] and extend a theorem of LIGGETT [8].

2 The result

Theorem 1 *The set ϵ_n^* of essential extreme points for $(I \vee \overline{C})$ -families consists exactly of the points*

$$\mathbf{d}_i := \left(\underset{\hat{0}}{0}, \dots, \underset{\hat{i-1}}{0}, \underset{\hat{i}}{\binom{n-1}{i-1}}, \underset{\hat{i+1}}{\binom{n-1}{i}}, \dots, \underset{\hat{n-i-1}}{\binom{n-1}{n-i-2}}, \underset{\hat{n-i}}{\binom{n}{n-i}}, \underset{\hat{n-i+1}}{\binom{n}{n-i+1}}, \dots, \underset{\hat{n}}{\binom{n}{n}} \right),$$

$1 \leq i < \frac{n}{2}$, and, if n is even, of the point

$$\mathbf{d}_{\frac{n}{2}} := \left(\underset{\hat{0}}{0}, \dots, \underset{\hat{\frac{n}{2}-1}}{0}, \underset{\hat{\frac{n}{2}}}{\binom{n}{\frac{n}{2}}}, \underset{\hat{\frac{n}{2}+1}}{\binom{n}{\frac{n}{2}+1}}, \dots, \underset{\hat{n}}{\binom{n}{n}} \right).$$

Proof. First let us note that $\mathbf{d}_i$ is indeed a profile of an $(I \vee \overline{C})$ -family, namely

$$\{X \subseteq N : 1 \in X \text{ and } i \leq |X| < n-i\} \cup \{X \subseteq N : |X| \geq n-i\}, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Though the theorem can also be proved by the method of cyclic permutations (see [4]) we use here the direct method by applying results in extremal set theory as it was done in [6] and [2].

Let $\mathcal{F}$ be an (inclusion-)maximal $(I \vee \overline{C})$ -family with profile $\mathbf{f}$. As in the paper of P. FRANKL and G. O. H. KATONA [6] we have to find coefficients α_i with $\alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ and $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_i = 1$, such that

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_i \mathbf{d}_i. \quad (1)$$

We set

$$\alpha_1 := f_1,$$

$$\alpha_i := \frac{f_i}{\binom{n-1}{i-1}} - \frac{f_{i-1}}{\binom{n-1}{i-2}}, \quad 2 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1,$$

$$\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} := 1 - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \alpha_i = 1 - \frac{f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}}.$$

Let $\mathcal{F}_k := \{X \in \mathcal{F} : |X| = k\}$ and $R(\mathcal{F}_k) := \{X \subseteq N : |X| = k+1, X \supset Y \text{ for some } Y \in \mathcal{F}_k\}, 1 \leq k < \frac{n}{2}$.

By the ERDÖS-KO-RADO theorem [5]

$$|\mathcal{F}_k| \leq \binom{n-1}{k-1},$$

and from the LOVÁSZ theorem [9] (Exercise 13.31) it follows

$$\frac{|\mathcal{F}_k|}{\binom{n-1}{k-1}} \leq \frac{|R(\mathcal{F}_k)|}{\binom{n-1}{k}}, \quad 1 \leq k < \frac{n}{2}, \quad (2)$$

see [6]. By the maximality of $\mathcal{F}$ we have $R(\mathcal{F}_k) \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$, hence

$$\frac{f_k}{\binom{n-1}{k-1}} \leq \frac{f_{k+1}}{\binom{n-1}{k}},$$

so it follows $0 \leq \alpha_i \leq 1$ for $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Since the equality $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_i = 1$ is clear we have only to prove (1).

Our family $\mathcal{F}$ is an $(I \vee \overline{C})$ -family, consequently no element of $R(\mathcal{F}_k)$ can be a complement of an element of $\mathcal{F}_{n-k-1}$, hence by (2)

$$\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} f_k + f_{n-k-1} \leq \binom{n}{k+1}, \quad 1 \leq k < \frac{n}{2}. \quad (3)$$

Let us now verify (1) for the j -th component. We have for $1 \leq j < \frac{n}{2}$

$$f_j = \binom{n-1}{j-1} (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) = \binom{n-1}{j-1} \frac{f_j}{\binom{n-1}{j-1}} = f_j,$$

so let $j \geq \frac{n}{2}$.

On the RHS of (1) we have in the j -th component

$$\binom{n-1}{j-1} (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-j-1}) + \binom{n}{j} (\alpha_{n-j} + \dots + \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$

which is with $k = n - j - 1$ equal to

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{k+1} (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + \binom{n}{k+1} (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = \\ & \binom{n-1}{k+1} \frac{f_k}{\binom{n-1}{k-1}} + \binom{n}{k+1} \left(1 - \frac{f_k}{\binom{n-1}{k-1}}\right) = \binom{n}{k+1} - \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} f_k \geq f_{n-k-1} = f_j \end{aligned}$$

by (3). ■

3 Two applications

In the following we need twice that for $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$

$$\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i = \left(\underset{\hat{0}}{0}, \dots, \underset{\hat{i}}{0}, -\binom{n-1}{i-1}, 0, \dots, 0, \binom{n-1}{i}, 0, \dots, \underset{\hat{n}}{0} \right). \quad (4)$$

In [7] H.-D. O. F. GRONAU and C. PROSKE studied among other questions the maximum size of an $(I \vee \overline{C})$ -family having only elements of sizes between a and b (in fact they considered complements of such families). The case $a \leq \frac{n}{2} \leq b, a + b < n$ they leaved unsettled (Problem 2).

Corollary 1 Let $a \leq \frac{n}{2} \leq b, a + b < n$ and let $\mathcal{F}$ be an $(I \vee \overline{C})$ -family with the property $a \leq |X| \leq b$ for all $X \in \mathcal{F}$. Let

$$r := \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even,} \\ \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}-1} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Then

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{cases} \sum_{i=a}^b \binom{n-1}{i-1} & \text{if } \sum_{i=a}^{n-b-2} \binom{n-1}{i} \geq \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}, \\ \sum_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^n \binom{n}{i} + r & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and the bound is best possible.

Proof. Let

$$\mathbf{s} := (\underset{\hat{0}}{0}, \dots, \underset{\hat{a}}{0}, \underset{\hat{b}}{1}, \dots, \underset{\hat{n}}{1}, 0, \dots, 0).$$

Obviously, the maximum size of the $(I \vee \overline{C})$ -families in question is given by

$$\max\{\mathbf{s} \mathbf{f}^T : \mathbf{f} \in \mu_n\} = \max\{\mathbf{s} \mathbf{d}_i^T : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}.$$

We have for $1 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (note (4))

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \mathbf{d}_{i+1}^T - \mathbf{s} \mathbf{d}_i^T &= \mathbf{s} (\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i)^T \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } i < a, \\ -\binom{n-1}{i-1} & < 0 \text{ if } a \leq i < n - b - 1, \\ \binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} & > 0 \text{ if } i > n - b - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Thus

$$\max\{\mathbf{s} \mathbf{d}_i^T : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \max\{\mathbf{s} \mathbf{d}_a^T, \mathbf{s} \mathbf{d}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^T\} =$$

$$\max\{\sum_{i=a}^b \binom{n-1}{i-1}, \sum_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^n \binom{n}{i} + r\},$$

and an easy calculation shows that the first number is maximum iff $\sum_{i=a}^{n-b-2} \binom{n-1}{i} \geq \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$. Finally let us note that the families corresponding to the extreme point $\mathbf{d}_a$ resp. $\mathbf{d}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ are extremal families, i.e. families for which the bound in the statement of the corollary is attained. ■

Let $\xi_1, \dots, \xi_n$ be independent random variables each taking value 1 with probability p and value 0 with probability $1 - p$. Liggett [8] proved the following lower bound for a convex combination of the ξ_i 's: For $p \geq \frac{1}{2}, \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

$$P(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \geq \frac{1}{2}) \geq p.$$

Now we are able to provide an upper bound:

Corollary 2 Let $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ be positive real numbers with $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ and let $p \geq \frac{1}{2}$. Let

$$R := \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even,} \\ \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} (1-p)^{\frac{n+1}{2}} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Then

$$P(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \geq \frac{1}{2}) \leq \sum_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} + R,$$

and the bound is best possible.

Proof. Let

$$\mathcal{F} := \{X \subseteq N : \sum_{i \in X} \alpha_i \geq \frac{1}{2}\} \quad (5)$$

and let $\mathbf{f}$ be its profile. Since $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ and $\alpha_i > 0$ for all i , $\mathcal{F}$ is an $(I \vee \overline{C})$ -family. Let

$$\mathbf{w} := (\underbrace{(1-p)^n}_0, \dots, \underbrace{p^i(1-p)^{n-i}}_i, \dots, \underbrace{p^n}_n).$$

Obviously,

$$\begin{aligned} P(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n \geq \frac{1}{2}) &= \sum_{X \in \mathcal{F}} p^{|X|} (1-p)^{n-|X|} = \\ &= \sum_{i=1}^n f_i p^i (1-p)^{n-i} = \mathbf{w} \mathbf{f}^T \leq \max\{\mathbf{w} \mathbf{d}_i^T : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}. \end{aligned}$$

Analogously to the proof of Corollary 1 we obtain for $1 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (note (4))

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \mathbf{d}_{i+1}^T - \mathbf{w} \mathbf{d}_i^T &= \mathbf{w}(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i)^T = -\binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} + \binom{n-1}{i} p^{n-i-1} (1-p)^{i+1} \\ &= \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i} \left(\left(\frac{p}{1-p} \right)^{n-2i-1} - \frac{i}{n-i} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

since $\frac{p}{1-p} \geq 1$ (because of $p \geq \frac{1}{2}$) and $\frac{i}{n-i} \leq 1$ (because of $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Hence

$$\max\{\mathbf{w} \mathbf{d}_i^T : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \mathbf{w} \mathbf{d}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^T$$

which is equal to the RHS of the inequality in the statement of the corollary. To see that the bound is best possible take

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \dots = \alpha_n &= \frac{1}{n} && \text{if } n \text{ is even,} \\ \alpha_1 = \frac{2}{n+1}, \alpha_2 = \dots = \alpha_n &= \frac{1}{n+1} && \text{if } n \text{ is odd.} \end{aligned}$$

References

- [1] **Derbala, A., and Engel, K.** : *Algorithmic investigation of the weighted extremal set problem.* Submitted to the Proceedings of the conference on extremal problems for finite sets, Visegrád 1991
- [2] **Engel, K., and Erdős, P.L.** : *Polytopes determined by complementfree Sperner families.* Discrete Math. **81**, 165-169 (1990)
- [3] **Erdős, P.L., Frankl, P., and Katona, G.O.H.** : *Intersecting Sperner families and their convex hulls.* Combinatorica **4**, 21-34 (1984)
- [4] **Erdős, P.L., Frankl, P., and Katona, G.O.H.** : *Extremal hypergraph problems and convex hulls.* Combinatorica **5**, 11-26 (1985)
- [5] **Erdős, P., Ko, C., and Rado, R.** : *Intersection theorems for systems of finite sets.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **12**, 313-320 (1961)
- [6] **Frankl, P., and Katona, G.O.H.** : *Polytopes determined by hypergraph classes.* European J. Combin. **6**, 233-243 (1985)
- [7] **Gronau, H.-D.O.F., and Proske, Chr.** : *Maximal families of restricted subsets of a finite set.* Acta Cybernetica **5**, 441-451 (1982)
- [8] **Liggett, T.M.** : *Extensions of the Erdős-Ko-Rado theorem and a statistical application.* J. Combin. Theory Ser. A **23**, 15-21 (1977)
- [9] **Lovász, L.** : *Combinatorial Problems and Exercises.* Budapest 1979

received: September 9, 1991

Author:

Prof. Dr. K. Engel
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
O-2500 Rostock
Germany

SERGEY L. BEZUKOV; HANS-DIETRICH GRONAU

A Kruskal-Katona type theorem

Abstract. In this paper we present an analog of the well-known Kruskal-Katona theorem for the infinite poset of words over a finite alphabet ordered by the subword relation. For given t and m the problem is to find among all possible choices of families of m words each of length t such a family, whose words contain together a minimal number of subwords of length $t-1$. We introduce an order of all words of length t and show that the collection of the first m of them taken in this order forms a solution. Some related problems are considered as well.

1 Introduction

Let k be a fixed integer. Denote

$$\Omega_k = \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

Let $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \Omega_k^*$, i.e. $\tilde{a}$ is a finite sequence such that $a_i \in \Omega_k$, $i = 1, \dots, p$. We say that $\tilde{b} = (b_1, b_2, \dots, b_q) \in \Omega_k^*$ is a subword of $\tilde{a}$ iff there exist indices $i_1, i_2, \dots, i_q$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq p$, such that

$$b_1 = a_{i_1}, b_2 = a_{i_2}, \dots, b_q = a_{i_q}.$$

Denote by S^k the poset of all finite words of Ω_k^* ordered by the subword relation. Further, denote by S_t^k the collection of all words of Ω_k^* of length t . For $A \subseteq S_t^k$ denote by $T(A)$ the shadow of A , i.e. the collection of all subwords of elements of A of length $t-1$. The main aim of our paper is to find for a given integer m , $1 \leq m \leq |S_t^k|$, an m -element subset $A^* \subseteq S_t^k$ such that $|T(A^*)|$ is minimal among all of the m -element subsets of S_t^k . It is a Kruskal-Katona type problem [2,3].

In order to answer the question how to choose the subset A^* we introduce two orderings $\mathcal{H}$ and $\mathcal{L}$ of elements of S_t^k . Let $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_t), \tilde{b} \in S_t^k$. Denote $\|\tilde{a}\| = \sum_{i=1}^t a_i$. We say $\tilde{a} >_{\mathcal{H}} \tilde{b}$ iff

(i) $\|\tilde{a}\| > \|\tilde{b}\|$, or

(ii) if $\|\tilde{a}\| = \|\tilde{b}\|$ holds, then $\tilde{b}$ is greater than $\tilde{a}$ in the lexicographic order.

Denote $[\tilde{a}] = \max_{1 \leq i \leq t} a_i$, $[\tilde{a}] = \min_{1 \leq i \leq t} a_i$ and $\chi(\tilde{a}) = \max_{1 \leq i \leq t} \{i : a_i = [\tilde{a}]\}$. For $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_t) \in S_t^k$ denote $\tilde{a} \setminus i$ the vector of S_{t-1}^k which is obtained from $\tilde{a}$ by deleting the i -th entry. We define the order $\mathcal{L}$ inductively on t . Let $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ if $t = 1$. For $t \geq 2$ let $\tilde{a} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ iff

(i) $[\tilde{a}] > [\tilde{b}]$, or

(ii) if $[\tilde{a}] = [\tilde{b}]$ holds, then $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b})$ in S_{t-1}^k , or

(iii) if $[\tilde{a}] = [\tilde{b}]$ and $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) = \tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b})$ holds, then $\tilde{a} >_{\mathcal{H}} \tilde{b}$.

As an example we present below the list of S_3^3 written in increasing order $\mathcal{L}$. To simplify the notations the commas and parentheses in sequences are omitted:

000 100 010 001 110 101 011 111 200 020 002 210 201 021 211 120 102 012 121 112 220 202
022 221 212 122 222.

Denote by C the operator of compression such that for $A \subseteq S_t^k$, CA is the collection of the first $|A|$ elements of S_t^k , ordered by $\mathcal{L}$.

Theorem 1 $|T(CA)| \leq |T(A)|$ for any $A \subseteq S_t^k$.

2 Proof of the Theorem

Denote by E^t the t -dimensional k -valued cube, i.e.

$$E^t = \{(x_1, \dots, x_t) : x_i \in \{0, \dots, k-1\}, i = 1, \dots, t\},$$

and let

$$E_i^t(j) = \{(x_1, \dots, x_t) \in E^t : x_i = j\}, i = 1, \dots, t, j = 0, \dots, k-1,$$

be its sections normal to the i -th coordinate axis. We may consider $E_i^t(j)$ as a $(t-1)$ -dimensional subcube of E^t . Each element of S_t^k corresponds to some element of E^t and vice versa. Notice that we consider the cubes as collections of their vertices only.

Denote by G_{t-1}^t the bipartite subgraph of the Hasse graph of S^k induced by the vertex set $S_t^k \cup S_{t-1}^k$. The following representation of G_{t-1}^t will be very convenient for us. Let us consider the decomposition $E^t = \bigcup_{j=0}^{k-1} E_i^t(j)$ for some fixed i and one more separate cube E^{t-1} . For a vector $\tilde{a} \in E_i^t(j)$ denote by $\pi_{ij}(\tilde{a})$ the vector of E^{t-1} obtained from $\tilde{a}$ by deleting its i -th entry. Connect now by an edge the vectors $\tilde{a}$ and $\pi_{ij}(\tilde{a})$ for all $\tilde{a} \in E_i^t(j)$ and $j = 0, \dots, k-1$. Repeating this process for $i = 1, \dots, t$, we obtain the graph G_{t-1}^t .

Let $A \subseteq S_t^k$, i.e. $A \subseteq E^t$. In order to imagine the set $T(A)$ denote

$$A_i(j) = A \cap E_i^t(j) \text{ for } i = 1, \dots, t \text{ and } j = 0, \dots, k-1.$$

By this notation it follows that

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^t \bigcup_{j=0}^{k-1} \pi_{ij}(A_i(j)), \quad (1)$$

$$\text{where } \pi_{ij}(A_i(j)) = \bigcup_{\tilde{a} \in A_i(j)} \pi_{ij}(\tilde{a}).$$

For $A \subseteq S_t^k$ denote by $C_i A$ the subset obtained by replacing $A_i(j)$ with the collection of the first $|A_i(j)|$ elements of $E_i^t(j)$ in order $\mathcal{L}$ for all $j = 0, \dots, k-1$. A set A is said to be i -compressed if $C_i A = A$. We need some properties of the order $\mathcal{L}$.

Lemma 1 $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) \geq_{\mathcal{L}} \tilde{a} \setminus i$ for any $\tilde{a} \in S_t^k$ and $i = 1, \dots, t$.

Proof. We prove the Lemma by induction on t . For $t = 2$ the statement is obviously true. Let $t \geq 3$. Define $\tilde{b} = \tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a})$ and $\tilde{c} = \tilde{a} \setminus i$ and let $i \neq \chi(\tilde{a})$. If $\tilde{b} = \tilde{c}$, then $\|\tilde{b}\| = \|\tilde{c}\|$ implies $a_{\chi(\tilde{a})} = a_i$, and the Lemma is true because $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) \geq_{\mathcal{H}} \tilde{a} \setminus i$ by the definition of $\chi(\tilde{a})$ and the case (ii) of the definition of $\mathcal{H}$.

Let $\tilde{b} \neq \tilde{c}$. Without loss of generality we assume $]\tilde{b}[=]\tilde{c}[$, since in opposite case the Lemma is obviously true. Define $\tilde{d} = \tilde{b} \setminus i$. By induction $\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}) \geq_{\mathcal{L}} \tilde{d}$. On the other hand, $\tilde{c} \setminus \chi(\tilde{c}) = (\tilde{a} \setminus i) \setminus \chi(\tilde{a}) = \tilde{d}$.

Therefore $\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}) \geq_{\mathcal{L}} \tilde{c} \setminus \chi(\tilde{c})$. If we have a strict inequality here, then $\tilde{b} >_{\mathcal{L}} \tilde{c}$ by the case (ii) of the definition of $\mathcal{L}$ and the Lemma is true. If equality holds, then since $a_{\chi(\tilde{a})} < a_i$, then $\|\tilde{b}\| > \|\tilde{c}\|$ and $\tilde{b} >_{\mathcal{H}} \tilde{c}$ by the case (i) of the definition of $\mathcal{H}$. Consequently, $\tilde{b} >_{\mathcal{L}} \tilde{c}$ by the case (iii) of the definition of $\mathcal{L}$. ■

Lemma 2 Let $\tilde{a}, \tilde{b} \in S_t^k$, $\tilde{a} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ and $a_i = b_i$ for $i = 1$ or $i = t$. Then $\tilde{a} \setminus i >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus i$.

Proof. We use induction on t . For $t = 2$ the Lemma is true. Let $t \geq 3$. If $]\tilde{a}[>]\tilde{b}[$ then the Lemma is true since $]\tilde{a} \setminus i[>]\tilde{b} \setminus i[$. So let $]\tilde{a}[=]\tilde{b}[$.

Assume $\chi(\tilde{a}) \neq i$ and $\chi(\tilde{b}) \neq i$. Since $\tilde{a} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ then $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) \geq_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b})$ and the following equalities hold

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{a} \setminus i) &= \chi(\tilde{a}), & \chi(\tilde{b} \setminus i) &= \chi(\tilde{b}), \\ (\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a})) \setminus i &= (\tilde{a} \setminus i) \setminus \chi(\tilde{a} \setminus i), & (\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b})) \setminus i &= (\tilde{b} \setminus i) \setminus \chi(\tilde{b} \setminus i), \\ (\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}))_i &= (\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}))_i & \text{for } i &= 1 \text{ or } i = t-1. \end{aligned}$$

If $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) > ea \setminus i = (\tilde{b} \setminus i) \setminus \chi(\tilde{b} \setminus i)$. Since in our case $\tilde{a} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ implies $(\tilde{a} \setminus i) >_{\mathcal{L}} (\tilde{b} \setminus i)$, the inequality $\tilde{a} \setminus i >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus i$ holds either.

Assume now $\chi(\tilde{a}) = i$ and $\chi(\tilde{b}) = i$. Then $\tilde{a} \setminus i >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus i$ by the definition of $\mathcal{L}$.

Assume $\chi(\tilde{a}) = i$ and $\chi(\tilde{b}) \neq i$. By Lemma 1, $\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}) \geq_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus i$. Consequently, if $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b})$ or $\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}) >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus i$, then $\tilde{a} \setminus i = \tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) >_{\mathcal{L}} \tilde{b} \setminus i$. If $\tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) = \tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b})$ and $\tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}) = \tilde{b} \setminus i$, then $b_i = [\tilde{b}] = b_{\chi(\tilde{b})} = a_{\chi(\tilde{a})}$, and so $\tilde{a} = \tilde{b}$, which contradicts our assumptions.

Finally, assume $\chi(\tilde{a}) \neq i$ and $\chi(\tilde{b}) = i$. By the definition of $\mathcal{L}$ in order to decide whether $\tilde{a} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ we should delete the minimal coordinates of $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$. Let us consider this process until we delete a_i from $\tilde{a}$. Suppose that n steps are necessary for this action and on the p -th step we deleted a_{i_p} from $\tilde{a}$, $1 \leq p \leq n-1$, and b_{j_p} from $\tilde{b}$, $2 \leq p \leq n$. Introduce the following notations:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \tilde{a} \setminus i, & \tilde{d} &= \tilde{b} \setminus i, \\ \tilde{a}_1 &= \tilde{a} \setminus i_1, & \tilde{a}_2 &= \tilde{a}_1 \setminus i_2, & \dots & \tilde{a}_n &= \tilde{a}_{n-1} \setminus i, \\ \tilde{b}_1 &= \tilde{b} \setminus i, & \tilde{b}_2 &= \tilde{b}_1 \setminus j_2, & \dots & \tilde{b}_n &= \tilde{b}_{n-1} \setminus j_n, \\ \tilde{c}_1 &= \tilde{c} \setminus i_1, & \tilde{c}_2 &= \tilde{c}_1 \setminus i_2, & \dots & \tilde{c}_{n-1} &= \tilde{c}_{n-2} \setminus i_{n-1} = \tilde{a}_n, \\ \tilde{d}_1 &= \tilde{d} \setminus j_2, & \tilde{d}_2 &= \tilde{d}_1 \setminus j_3, & \dots & \tilde{d}_{n-1} &= \tilde{d}_{n-2} \setminus j_n = \tilde{b}_n, \end{aligned}$$

where $\tilde{c}_{n-2} = \tilde{c}$, $\tilde{d}_{n-2} = \tilde{d}$ if $n = 2$. In order to decide whether $\tilde{c} >_{\mathcal{L}} \tilde{d}$ we should delete the minimal coordinates of $\tilde{c}$ and $\tilde{d}$ either. Consider the first $n-1$ steps of this process. Notice that $i_1, \dots, i_{n-1}$ is the sequence of minimal coordinates for $\tilde{c}$ in this process and the sequence $j_2, \dots, j_n$ is same for $\tilde{d}$. Assume that $\tilde{a}_1 >_{\mathcal{L}} \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_n >_{\mathcal{L}} \tilde{b}_n$ holds. Then, using the definition of $\mathcal{L}$, we derive $\tilde{c}_{n-1} >_{\mathcal{L}} \tilde{d}_1$, and so $\tilde{c} >_{\mathcal{L}} \tilde{d}$. Assume now that $\tilde{a}_p = \tilde{b}_p$ for some p , $1 \leq p \leq n$. We are going to show that this situation is impossible. Let p be the minimal number for which $\tilde{a}_p = \tilde{b}_p$. Then by the definition of $\mathcal{L}$, $\tilde{a}_{p-1} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}_{p-1}$ (we mean that $\tilde{a}_0 = \tilde{a}$ and $\tilde{b}_0 = \tilde{b}$ if $p = 1$). Consider the two cases.

Case 1. Assume $i = t$. Then

$$\begin{aligned} a_{i_1} &\leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{n-1}} < a_{i_n} = a_t, \\ a_t &= b_t \leq b_{j_2} \leq \dots \leq b_{j_{n-1}} \leq b_{j_n}, \end{aligned}$$

where the strict inequality in the $\tilde{a}$ -sequence is because a_{i_n} is the rightmost coordinate of $\tilde{a}$. Since $\|\tilde{a}_{p-1}\| = \|\tilde{a}_p\| + a_{i_p}$ and $\|\tilde{b}_{p-1}\| = \|\tilde{b}_p\| + b_{i_p}$, then $\|\tilde{a}_{p-1}\| - \|\tilde{b}_{p-1}\| = a_{i_p} - b_{i_p} < a_{i_n} - b_t = 0$, which for $p < n$ contradicts to $\tilde{a}_{p-1} >_{\mathcal{H}} \tilde{b}_{p-1}$. Therefore, $p = n$, and so $\|\tilde{a}_{p-1}\| = \|\tilde{b}_{p-1}\|$ and $b_t = b_{j_2} = \dots = b_{j_n}$. Consequently, $\tilde{a}_{n-1}$ and $\tilde{b}_{n-1}$ must be of the form:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n-1} &= (a'_1, \dots, a'_q, \dots, a'_{t-n}, c), \\ \tilde{b}_{n-1} &= (a'_1, \dots, c, \dots, a'_{t-n-1}, a'_{t-n}) \end{aligned}$$

with $c \leq a'_q$, since the last entry should be the minimal one. But since $\tilde{a}_{n-1} >_{\mathcal{H}} \tilde{b}_{n-1}$, then $\tilde{c} > \tilde{a}$ by the definition of $\mathcal{H}$. A contradiction.

Case 2. Assume $i = 1$. Then

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n} = a_1,$$

$$a_1 = b_1 < b_{j_2} \leq \dots \leq b_{j_n},$$

where the strict inequality in the $\tilde{b}$ -sequence is because b_1 is the leftmost coordinate of $\tilde{b}$. Then similarly, $\|\tilde{a}_{p-1}\| - \|\tilde{b}_{p-1}\| = a_{i_p} - b_{i_p} < a_{i_n} - b_1 = 0$. But since $\tilde{a}_{p-1} >_{\mathcal{H}} \tilde{b}_{p-1}$, we get $p = 1$. Therefore, $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ must be of the form:

$$\tilde{a} = (c, a_2, \dots, a_{i_t}, \dots, a_t),$$

$$\tilde{b} = (c, c, a_2, \dots, a_t),$$

and $\chi(\tilde{b}) \neq 1$, which contradicts our assumptions. ■

Lemma 3 *If $CA = A$, then $C_i A_i(j) = A_i(j)$ for $i = 1, t$ and $j = 0, \dots, k-1$.*

Proof. Let $\tilde{a}$ be the greatest vector of $A_i(j)$ in order $\mathcal{L}$ and $\tilde{b} <_{\mathcal{L}} \tilde{a}$, $b_i = j = a_i$. By Lemma 2, $\tilde{b} \setminus i <_{\mathcal{L}} \tilde{a} \setminus i$. On the other hand, $CA = A$ implies $\tilde{b} \in A$. Taking into account $\tilde{b} \in A_i(j)$ one gets $C_i A_i(j) = A_i(j)$. ■

Let $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_{t-1}) \in S_{t-1}^k$. Then by the definition of $\mathcal{L}$, $\tilde{d} = (c_1, \dots, c_{t-1}, 0)$ is the least in order $\mathcal{L}$ vector of S_t^k for which $\tilde{c} \in T(\{\tilde{d}\})$. Denote $\tilde{d} = L(\tilde{c})$. Furthermore, for $\tilde{d} \in S_t^k$ denote by $G(\tilde{d})$ the greatest in order $\mathcal{L}$ vector of $T(\{\tilde{d}\})$. By Lemma 1, simply $G(\tilde{d}) = \tilde{d} \setminus \chi(\tilde{d})$.

Lemma 4 *Let $\tilde{a} \in A \subseteq S_t^k$, $t \geq 3$ and let A be i -compressed for $i = 1, t$.*

Then $L(G(\tilde{a})) \in A$.

Proof. Denote $\tilde{b} = L(G(\tilde{a}))$. Then $\tilde{b} \leq_{\mathcal{L}} \tilde{a}$ and we assume $\tilde{a} \neq \tilde{b}$. Now if $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{\chi(\tilde{a})}, \dots, a_t)$, then $\tilde{b} = (a_1, a_2, \dots, a_{\chi(\tilde{a})-1}, a_{\chi(\tilde{a})+1}, \dots, a_t, 0)$.

If $\chi(\tilde{a}) \neq 1$, then the first entries of $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ are equal, and so $\tilde{b} \in A$ by Lemma 2 since A is 1-compressed.

If $\chi(\tilde{a}) = 1$, then denoting $\tilde{d} = (a_2, a_1, a_3, \dots, a_t) \in S_t^k$ one has $\tilde{d} <_{\mathcal{L}} \tilde{a}$, and the t -th entries of $\tilde{d}$ and $\tilde{a}$ are equal. Therefore, $\tilde{d} \in A$ by Lemma 2 as A is t -compressed, and so $\tilde{b} \in A$ by the same Lemma, since $\tilde{b} <_{\mathcal{L}} \tilde{d}$ and the first entries of $\tilde{b}$ and $\tilde{d}$ are equal. ■

Since we proceed the proof of Theorem 1 by induction on t and our technique works for $t \geq 3$ only, we need the following proposition:

Lemma 5 *Theorem 1 is true for $t = 2$.*

Proof. Consider $A \subseteq E^2$, $|A| = m$. We say that A is monotone if for any pair of vectors $\tilde{a} = (a_1, a_2)$ and $\tilde{b} = (b_1, b_2)$ of E^2 the conditions $\tilde{a} \in A$, $b_1 \leq a_1$, $b_2 \leq a_2$ imply $\tilde{b} \in A$. Without loss of generality we may assume that A is monotone, since $|T(A)| \geq \max_{i,j} |A_i(j)| = |T(C_2C_1(A))|$ and $C_2C_1(A)$ is monotone.

Furthermore, for a monotone subset $A \subseteq E^2$ one has

$$|T(A)| = \max\{|A_1(0)|, |A_2(0)|\}$$

since A is included in the $|A_1(0)| \times |A_2(0)|$ rectangular area. The minimal side of rectangular area with m points is $\sqrt{m}$, that is equal to $\max\{|B_1(0)|, |B_2(0)|\}$. Here B is the collection of the m first points of E^2 ordered by $\mathcal{L}$, and the Lemma follows. ■

Proof of Theorem 1.

For $t = 2$ the Theorem 1 is true by Lemma 5, so let us proceed the inductive step. Consider the decomposition of E^t by its i -th entry. Then using (1) one has

$$T(A) = \bigcup_{j=0}^{k-1} T(A_i(j)) \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} \pi_{ij}(A_i(j)), \quad (2)$$

where we mean that the operator T in the right hand side of (2) is applied to the words of length $(t-1)$. Now replace $A_i(j)$ with $CA_i(j)$ for $j = 0, \dots, k-1$ and let us check that for the obtained set B we get $|T(A)| \geq |T(B)|$.

Indeed, notice that

$$|T(A)| \geq \max \left\{ \left| \bigcup_{j=0}^{k-1} T(A_i(j)) \right|, \left| \bigcup_{j=0}^{k-1} \pi_{ij}(A_i(j)) \right| \right\} \quad (3)$$

for any $A \subseteq S_t^k$, and that in the same inequality (3) for B one has in fact equality. Furthermore,

$$\left| \bigcup_{j=0}^{k-1} T(A_i(j)) \right| \geq \left| \bigcup_{j=0}^{k-1} T(B_i(j)) \right| \quad (4)$$

by induction, and

$$\left| \bigcup_{j=0}^{k-1} \pi_{ij}(A_i(j)) \right| \geq \left| \bigcup_{j=0}^{k-1} \pi_{ij}(B_i(j)) \right| \quad (5)$$

because all $B_i(j)$ are the initial segments of the same order. Hence from (3)–(5) it follows that $|T(A)| \geq |T(B)|$.

For $\tilde{a} \in S_t^k$ denote by $l(\tilde{a})$ the number of the vector $\tilde{a}$ in the order $\mathcal{L}$ and let $l(A) = \sum_{\tilde{a} \in A} l(\tilde{a})$. Using Lemma 3 it is easy to show that in our case $l(A) > l(B)$ if $A \neq B$ and $i \in \{1, t\}$.

Therefore we may repeat the transformation described above for $i = 1, t, 1, t, \dots$. Since the value of l for the new sets cannot decrease infinitely, we shall obtain at the end the subset $D \subseteq S_t^k$ satisfying $C_i D = D$ for $i = 1, t$. In order to complete the proof of the whole Theorem 1 we have to prove that one can convert D into the initial segment (of the order $\mathcal{L}$) of the same length without increasing F .

In order to prove it, denote by $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_t)$ the last vector from the set D in order $\mathcal{L}$, and by $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_t)$ the first vector from $S_t^k \setminus D$ in $\mathcal{L}$. If $\tilde{a} <_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ then the Theorem 1 is true. Assume that $\tilde{a} >_{\mathcal{L}} \tilde{b}$. Since $L(G(\tilde{a})) \in A$ by Lemma 4, it is no loss of generality to assume $\tilde{b} \neq L(G(\tilde{a}))$.

We are going to show that $T(D) = T(D \cup \tilde{b})$. Indeed, consider a vector $\tilde{c} \in T(\{\tilde{b}\})$. If $\tilde{c} \neq G(\tilde{b})$, then $\tilde{c} \in T(\{L(\tilde{c})\})$, where $L(\tilde{c}) <_{\mathcal{L}} \tilde{b}$ and so $L(\tilde{c}) \in D$ by the definition of $\tilde{b}$.

Let $\tilde{c} = G(\tilde{b})$ and $\tilde{c} \notin T(\{a\})$. If now $\tilde{b} \neq L(\tilde{c})$, we may use the above arguments, so assume $\tilde{b} = L(\tilde{c})$. We are going to prove that this is impossible. But first notice that the t -th entry of $\tilde{b}$ is 0 and let us show $\tilde{c} <_{\mathcal{L}} G(\tilde{a})$. Indeed, if $\tilde{c} >_{\mathcal{L}} G(\tilde{a})$, then we are done due to the case (i) of the definition of the order $\mathcal{L}$. If the equality holds, then since $\tilde{b} <_{\mathcal{L}} \tilde{a}$, one has by the case (ii) of the definition of the order $\mathcal{L}$ that $\tilde{c} = \tilde{b} \setminus \chi(\tilde{b}) <_{\mathcal{L}} \tilde{a} \setminus \chi(\tilde{a}) = G(\tilde{a})$.

Let us show now that $\tilde{b} <_{\mathcal{L}} L(G(\tilde{a}))$. Indeed, otherwise by Lemma 2 one gets $\tilde{c} >_{\mathcal{L}} G(L(G(\tilde{a}))) = G(\tilde{a})$ since the t -th entries of $\tilde{b}$ and $L(G(\tilde{a}))$ equal to 0, i.e. one has a desired contradiction.

Therefore in our case $\tilde{b} \in D$, since $L(G(\tilde{a})) \in D$ by Lemma 4 and D is t -compressed, which contradicts to the definition of $\tilde{b}$.

Consequently, $T(D) = T(D \cup \tilde{b})$ and so $|T((D \setminus \tilde{a}) \cup \tilde{b})| \leq |T(D)|$. Repeating sufficiently many times the replacement $D := (D \setminus \tilde{a}) \cup \tilde{b}$, one gets $CD = D$. ■

3 Concluding remarks

For $A \subseteq S_t^k$ denote by $P(A)$ the upper shadow of A , i.e. the collection of all vectors of $\tilde{v} \in S_{t+1}^k$, such that, for some $\tilde{u} \in A$, $\tilde{u}$ is a subword of $\tilde{v}$. Consider the problem of finding for a given integer m , $1 \leq m \leq |S_t^k|$, an m -element subset $A^* \subseteq S_t^k$ such that $|P(A^*)|$ is minimal among all the m -element subsets of S_t^k .

Using the general property of posets proved in ([1], Theorem 3) and denoting by LA the collection of the last $|A|$ elements of S_t^k ordered by $\mathcal{L}$, we obtain the following result:

Theorem 2 $|P(LA)| \leq |P(A)|$ for any $A \subseteq S_t^k$. ■

As the second consequence let us consider the problem of finding for a given integer m , $1 \leq m \leq |S_t^k|$, an m -element subset $A^* \subseteq S_t^k$ with minimal value $|T(T(A^*))|$. Using Lemma 4, it is easy to show that if $CA = A$ then $CT(A) = T(A)$. Now applying Theorem 1 to

the set $T(A)$ we conclude that CA is a solution of this problem. Similarly one can show that CA has the minimal value of $|T(\dots T(A)\dots)|$ (n times) and LA has the minimal value of $|P(\dots P(A)\dots)|$ (n times) for any $n \geq 1$.

References

- [1] **Bezrukov, S.L.:** *Minimization the shadows of subsets of the partial mappings semilattice* (in Russian). *Diskretny analiz* **47**, 3–18 (1988)
- [2] **Katona, G.O.H.:** *A theorem of finite sets*. In: **Erdős, P.**, and **Katona, G.** (eds.): *Theory of graphs*. Proc. of the Colloquium held at Tihany, pp. 187–207, Academia Kiado, Budapest 1968
- [3] **Kruskal, J.B.:** *The number of simplices in a complex*. In: *Math. Optim. Techniques*, pp. 251–278, Univ. of California Press, Berkeley, Calif. 1963

received: May 26, 1990

reviced: March 15, 1992

Authors:

Dr. Sergey L. Bezrukov
 Institut for Problems of Information Transmission
 Ermolova Str. 19
 101447 Moscow
 Russia

Prof. Dr. H.-D.O.F. Gronau
 Universität Rostock
 Fachbereich Mathematik
 Universitätsplatz 1
 O-2500 Rostock
 Germany

INGO WARNKE

The Möbius-function of subword orders

1 Introduction

The aim of this paper is to formulate and to prove a formula for the Möbius-function of subword orders. A subword order is defined as follows:

We consider *words* of arbitrary length over the alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $m \geq 2$ and fixed. The *length* of a word a is denoted by $|a|$. the set of those words including the empty word λ is denoted by W_m . An *embedding* into the word $a = a_1 a_2 \dots a_n$ is an ordered pair $(\{j_1, j_2, \dots, j_t\}, a)$ with $j_1, j_2, \dots, j_t \in \mathbb{N}$ and $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$. We will say that it is an embedding of b into a iff $b = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_t}$. An embedding of b into a can be understood as a certain distribution of the letters of b in the right order in a . We say that the letter a_k of a ($1 \leq k \leq n$) is *chosen* by the embedding iff $k = j_i$ for some i . A word b is called a *subword* of the word a iff b has an embedding into a . A word can have more than one embedding into another. The empty word λ is embeddable into every word a with embedding $(\emptyset, a)$. The relation " a is a subword of b " for two words $a, b \in W_m$ is an order relation denoted by $a \leq b$. The Möbius-function $\mu(x, y)$ can be defined for every locally finite poset $(P, \leq)$ by

$$\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{Z} \text{ and}$$

$$\forall x, z \in P : \sum_{\substack{y \in P \\ x \leq y \leq z}} \mu(y, z) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = z, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

The Möbius-function is explicitly known only for a small number of standard posets. Its importance is due to the existence of an inversion formula for posets generalizing the well known Möbius Inversion Formula in number theory. We now define some concepts and give the result of this paper.

A *block* is a maximal sequence of consecutive, equal letters in a word. Let $b \neq \lambda$. An embedding into b is uniquely determined if for every letter of b it is known whether the letter

is chosen by the embedding or not. An embedding into b is called *good* iff for every block of b at most one letter of that block is not chosen by the embedding. We call two good embeddings into b *equivalent* iff the numbers of letters chosen from every block of b are the same. It is trivial that the just defined relation over all good embeddings into b is indeed an equivalence relation. When we use the phrase "equivalence class for b " we refer always to an equivalence class of that relation. We omit b if it is obvious. For example, for $a=22$ and $b=2022$ we have 3 good embeddings of a into b , namely $\alpha_1=(\{1,3\},2022)$, $\alpha_2=(\{1,4\},2022)$ and $\alpha_3=(\{3,4\},2022)$. Obviously, α_1 and α_2 belong to one equivalence class but α_3 belongs to another since α_3 does not choose a letter from the first block of b whereas α_1 and α_2 do so. Since λ has no blocks it is reasonable to say that the "empty embedding" of λ into λ is good as well. Obviously it holds:

If two good embeddings of a into b and a' into b are equivalent then

$$a = a'. \quad (2)$$

For $x, y \in W_m$ let

$$ge(x, y) := \text{set of all good embeddings of } x \text{ into } y.$$

The relation (2) implies that every equivalence class for y is either disjoint to or completely contained in $ge(x, y)$.

We define a function $s : W_m^2 \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$s(x, y) := (-1)^{|y|-|x|} * \left(\begin{array}{l} \text{number of equivalence classes for } y \text{ which are} \\ \text{contained in } ge(x, y) \end{array} \right).$$

The poset $(W_m, \leq)$ is locally finite and therefore the Möbius-function of the poset exists. The aim of the paper is to prove the following

Theorem For $x, y \in W_m$ we have $\mu(x, y) = s(x, y)$.

The result was found first by BJÖRNER and he stated it in [2]. As a hint for the proof he gave only the lexicographical shellability of the investigated poset without any further comments. The formula was independently rediscovered by BUROSCH and proved by the author using only the elementary definition of the Möbius-function. The formulation used by Björner is only slightly different to our one. We count special equivalence classes of good embeddings whereas Björner uses a special representative of that equivalence class called *normal embedding*. As $\mu(x, y)$ depends only on the interval between a and b the Möbius-function in an interval of $(W_m, \leq)$, considered as an independent poset, is the same as stated in the Theorem. This solves the problem of finding the Möbius-function of the poset $B_{m,n}$ defined in [3].

2 Proof of the Theorem

To prove the theorem it is sufficient to verify (1) with s instead of μ . For fixed $b \neq \lambda$ we will now describe equivalence classes for b using delete vectors. Let l denote the number of blocks of b . Let the blocks of b be consecutively numbered from 1 to l . For every good embedding into b we define a *delete vector* $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l) \in \{0, 1\}^l$ as follows:

$$q_k = \begin{cases} 1, & \text{if the embedding chooses all letters of the } k\text{-th block but one,} \\ 0, & \text{if the embedding chooses all letters of the } k\text{-th block,} \end{cases}$$

$$(k = 1, \dots, l).$$

In order to enumerate equivalence classes for b the following statement is important:

The delete vectors of two good embeddings into b are equal iff the good embeddings are equivalent. (3)

In our example $a=22$ and $b=2022$ the good embeddings α_1 and α_2 have the common delete vector $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = (011)$ whereas α_3 has the delete vector $\mathbf{q}_3 = (110)$. From the definition it follows easily that every $\mathbf{q} \in \{0, 1\}^l$ occurs as delete vector. Using (3) we obtain :

The equivalence classes for b are in $(1,1)$ -correspondence with the vectors of $\{0, 1\}^l$.

We define a function $f_b : \{0, 1\}^l \rightarrow W_m$. We consider a certain $\mathbf{q} \in \{0, 1\}^l$ and $f_b(\mathbf{q})$ can than be obtained from b by deleting q_k letters from the k -th block of b , $k = 1, \dots, l$. Thus, $\mathbf{q}$ corresponds to an equivalence class of good embeddings of $f_b(\mathbf{q})$ into b .

The following lemma is an immediate consequence of the definition of delete vectors.

Lemma 1 *Let $b = b_1 b_2 \dots b_n \neq \lambda$, $\mathbf{q} = (1, q_2, \dots, q_l) \in \{0, 1\}^l$ and $\mathbf{q}' = (0, q_2, \dots, q_l)$. Then $f_b(\mathbf{q}') = b_1 f_b(\mathbf{q})$.*

We now investigate $s(x, y)$. We have immediately

$$s(x, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = \lambda, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

If $y \neq \lambda$ we can use delete vectors to reformulate $s(x, y)$. Obviously, an equivalence class for y is contained in $ge(x, y)$ iff for the corresponding delete vector $\mathbf{q}$ it holds $f_y(\mathbf{q}) = x$. Let $|\mathbf{q}|$ denote the number of units in $\mathbf{q}$. Because of $|\mathbf{q}| = |y| - |x|$ we get finally

$$s(x, y) = \sum_{\substack{\mathbf{q} \\ f_y(\mathbf{q}) = x}} (-1)^{|\mathbf{q}|} \quad \text{if } y \neq \lambda. \quad (5)$$

For $z \neq \lambda$ we obtain from (5)

$$\sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) = \sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \\ f_z(\mathbf{q}) = y}} (-1)^{|\mathbf{q}|} = \sum_{\substack{\mathbf{q} \\ f_z(\mathbf{q}) \geq x}} (-1)^{|\mathbf{q}|} \quad (6)$$

since $z \geq f_z(\mathbf{q})$ for all $\mathbf{q}$.

(If z has l blocks then $\mathbf{q} \in \{0, 1\}^l$ during the summation.)

We define

$$Q(x, z) := \{\mathbf{q} \in \{0, 1\}^l : f_z(\mathbf{q}) \geq x\}$$

and reformulate (6):

$$\sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) = \sum_{\substack{\mathbf{q} \\ \mathbf{q} \in Q(x, z)}} (-1)^{|\mathbf{q}|}. \quad (7)$$

Let $\mathbf{q}$ and $\mathbf{q}'$ be defined as in Lemma 1. Lemma 1 shows that $\mathbf{q} \in Q(x, z)$ implies $\mathbf{q}' \in Q(x, z)$.

We ask when the reverse implication holds. We consider the following condition

$$x \text{ and } z \neq \lambda \text{ do not start with the same letter.} \quad (8)$$

Lemma 2 *If x and z satisfy (8) we have*

$$\mathbf{q} \in Q(x, z) \iff \mathbf{q}' \in Q(x, z).$$

Proof. We only have to show the implication from right to left. The case $x = \lambda$ is trivial. Let $x \neq \lambda$. We assume $\mathbf{q}' \in Q(x, z)$, i.e. $f_z(\mathbf{q}') \geq x$. Set $y = y_1 \dots y_k := f_z(\mathbf{q}')$, i.e. it exists an embedding $(\{j_1, \dots, j_t\}, y)$ with $x = y_{j_1} \dots y_{j_t}$. By Lemma 1 we know that y_1 equals the first letter of z . Because x and z do not start with the same letter we have $j_1 \neq 1$ and therefore $j_1 > 1$. Hence the following ordered pair is an embedding:

$$(\{j_1 - 1, j_2 - 1, \dots, j_t - 1\}, y_2 \dots y_k).$$

But it is an embedding of $y_{j_1} \dots y_{j_t} (= x)$ into $y_2 \dots y_k (= f_z(\mathbf{q}))$ according to Lemma 1), i.e. $f_z(\mathbf{q}) \geq x$. ■

Let us now assume that there are $x, z \in W_m$, $x \leq z$, for which

$$\sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) \neq \begin{cases} 1 & \text{iff } x = z, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

Easily from (9) results $x < z$ and therefore $z > \lambda$. $x < z$ implies $|z| - |x| > 0$. Among all pairs satisfying (9) we consider those having minimal $|z| - |x|$. If there is more than one pair (x, z) with minimal $|z| - |x|$ we select one pair with minimal $|x|$. That pair is fixed from now on. We assume that z consists of l blocks. Since $z > \lambda$ let

$$z = iz' \quad (i \in \mathcal{A}; z' \in W_m).$$

Case 1: x does not start with i

In that case, according to Lemma 2, $Q(x, z)$ is the disjoint union of pairs $(q_1, q'_1), (q_2, q'_2), \dots$ (the notation corresponds to that in Lemma 1). Obviously $|q_i| - |q'_i| = 1$ and therefore $(-1)^{|q_i|} + (-1)^{|q'_i|} = 0$. Using (7) we obtain

$$\sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) = 0$$

in contradiction to (9).

Case 2: x starts with i

We have $x = ix'(x' \in W_m)$. On account of $x < z$ we have $z' \neq \lambda$. Let k be the first letter of z' . We distinguish again two cases:

Case 2.1: $k = i$

In that case the first letter of z' belongs to the first block of z and z' has therefore l blocks as well. That means that for $\mathbf{q} \in \{0, 1\}^l$ both terms $f_z(\mathbf{q})$ and $f_{z'}(\mathbf{q})$ make sense. We aim to prove $Q(x, z) = Q(x', z')$ in this case. We take any $\mathbf{q} \in Q(x, z)$. Let $y = y_1 \dots y_t := f_z(\mathbf{q})$ and let $\alpha = (\{j_1, \dots, j_t\}, z)$ be any embedding of the equivalence class for z corresponding to $\mathbf{q}$. Since the first block of z (consisting of i 's) contains at least 2 letters α chooses at least one letter of the first block. Without loss of generality we choose α so that $j_1 = 1$. Hence, we have $y_1 = z_{j_1} = z_1 = i$. How can z' be described? Using the representations $z = z_1 z_2 \dots z_r$ and $z' = z'_1 z'_2 \dots z'_{r-1}$ we have

$$z'_{s-1} = z_s \quad (s = 2, 3, \dots, r). \quad (10)$$

We consider the embedding $\alpha' = (\{j_2 - 1, \dots, j_t - 1\}, z')$. Regarding (10) we see that α' chooses the same number of letters in the non-first blocks of z' as α does in the corresponding blocks of z . In the first block α' chooses one letter less than α does in the first block of z . However, the numbers of letters in every block are the same in z and z' with one exception: the number for the first block is for z' by one less than for z . Consequently, we obtain: The numbers of letters which are not chosen by α and α' , respectively, are the same in corresponding blocks.

Since α is a good embedding α' is good as well and has $\mathbf{q}$ as delete vector. Since $y_1 = z_{j_1}, y_2 = z_{j_2}, \dots, y_t = z_{j_t}$ and on account of (10) we get $y_2 = z'_{j_2-1}, \dots, y_t = z'_{j_t-1}$ and thus, $f_{z'}(\mathbf{q}) = y_2 \dots y_t$. Since $\mathbf{q} \in Q(x, z)$ it follows $iy_2 \dots y_t = y = f_z(\mathbf{q}) \geq x = ix'$ and consequently, $f_{z'}(\mathbf{q}) = y_2 \dots y_t \geq x'$. We proved $\mathbf{q} \in Q(x, z) \implies \mathbf{q} \in Q(x', z')$ or, equivalently, $Q(x, z) \subseteq Q(x', z')$. The reverse relation can be proved analogously: For $\mathbf{q}' \in Q(x', z')$ we have an embedding $\alpha' = (\{j_1, \dots, j_t\}, z')$ with delete vector $\mathbf{q}'$ and $y' = f_{z'}(\mathbf{q}') \geq x'$. The embedding $\alpha = (\{1, j_1 + 1, \dots, j_t + 1\}, z)$ is then good and has delete vector $\mathbf{q}'$ and it holds $f_z(\mathbf{q}') = iy' \geq ix' = x$. We obtain finally the announced result $Q(x, z) = Q(x', z')$. Using (7) we obtain

$$\sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) = \sum_{\substack{\mathbf{q} \\ \mathbf{q} \in Q(x, z)}} (-1)^{|\mathbf{q}|} = \sum_{\substack{\mathbf{q}' \\ \mathbf{q}' \in Q(x', z')}} (-1)^{|\mathbf{q}'|} = \sum_{\substack{y \in W_m \\ x' \leq y \leq z'}} s(y, z').$$

Since $|z'| - |x'| = |z| - |x|$ and $|x'| < |x|$ we know that the last sum equals 0. This is a contradiction to (9).

Case 2.2: $k \neq i$

For $h \in \{0, 1\}$; $a, b \in W_m$; b has p blocks, we set

$$hQ(a, b) := \{(h, q_1, \dots, q_p) : (q_1, \dots, q_p) \in Q(a, b)\}.$$

In this case the first letter of z forms an own block and z' has $l - 1$ blocks. We will now prove $Q(x, z) = 0Q(x', z') \cup 1Q(x, z')$. Let $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l) \in Q(x, z), y = y_1 \dots y_t := f_z(\mathbf{q})$ and $\mathbf{q}' := (q_2, \dots, q_l)$. With analogous methods as in case 2.1 we get

$$f_{z'}(\mathbf{q}') = \begin{cases} y & \text{if } q_1 = 1, \\ y_2 \dots y_t & \text{if } q_1 = 0 \text{ (in this case it is } y_1 = i) \end{cases}$$

and furthermore

$$f_{z'}(\mathbf{q}') \geq \begin{cases} x & \text{if } q_1 = 1, \\ x' & \text{if } q_1 = 0. \end{cases}$$

Hence we have $Q(x, z) \subseteq 0Q(x', z') \cup 1Q(x, z')$. The reverse relation is also true and can be proved similarly, thus

$$Q(x, z) = 0Q(x', z') \cup 1Q(x, z').$$

Relation (7) leads to

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) &= \sum_{\substack{\mathbf{q}' \\ \mathbf{q}' \in Q(x', z')}} (-1)^{|\mathbf{q}'|+0} + \sum_{\substack{\mathbf{q}' \\ \mathbf{q}' \in Q(x, z')}} (-1)^{|\mathbf{q}'|+1} \\ &= \sum_{\substack{y \in W_m \\ x' \leq y \leq z'}} s(y, z') - \sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z'}} s(y, z'). \end{aligned}$$

Since $|z'| - |x| < |z| - |x|$ and $|z'| - |x'| = |z| - |x|$ and $|x'| < |x|$ we know that the last two sums have the values $\delta_{x',z'}$ and $\delta_{x,z'}$, respectively. Since $ix' = x \neq z = iz'$ we have $x' \neq z'$ and since x starts with i and z' starts with $k \neq i$ we have $x \neq z'$. Therefore we obtain

$$\sum_{\substack{y \in W_m \\ x \leq y \leq z}} s(y, z) = 0$$

in opposite to (9).

All cases lead to contradictions. Our assumption that (9) is satisfied for some x, z is therefore false and the Theorem is proved.

References

- [1] **Aigner, M.** : *Combinatorial Theory*. Berlin 1979
- [2] **Björner, A.** : *The Möbius function of subword order*. In: D. Stanton (Ed.): *Invariant Theory and Tableaux*. IMA Vol. Math. Appl. **19**, 118–124, New York 1990
- [3] **Burosch, G., Gronau, H.-D., Laborde, J.-M., and Warnke, I.** :
On posets of m-ary words. to appear in *Discrete Mathematics*
- [4] **Burosch, G.** : *private communication* 1991

received: July 19, 1990

revised: April 22, 1992

Author:

Dipl.-Math. Ingo Warnke
 Universität Rostock
 Fachbereich Mathematik
 Universitätsplatz 1
 O-2500 Rostock
 Germany

Research Institute for Biology of Farm Animals Dummerstorf - Rostock

University Rostock - Department of Mathematics

German Statistical Society

3rd SCHWERIN CONFERENCE

ON

MATHEMATICAL STATISTICS

- Selection procedures -

September 5 - 10, 1993

Bad Doberan - Germany

Scientific Programme Committee

D. Rasch, Chairman (Wageningen - Netherlands)

P. van der Laan (Eindhoven - Netherlands)

F. Liese (Rostock - Germany)

K. J. Miescke (Chicago - USA)

A. Rizzi (Rome - Italy)

M. L. Tiku (Hamilton - Canada)

Provisional programme

Session 1: Selection of Population (Organiser: K. J. Miescke)

Invited Speakers: G. Giani (Düsseldorf), V. Guiard (Rostock-Dummerstorf),
Shanti. S. Gupta (West Lafayette), K. J. Miescke (Chicago)

Session 2: Robustness of Selection Procedures (Organiser: P. van der Laan)

Invited Speakers: P. van der Laan (Eindhoven), K. Mengersen,
S. Panchapakesan (USA)

Session 3: Asymptotic and Nonparametric Methods (Organiser: F. Liese)

Invited Speakers: Pinyuen Chen (Syracuse), F. Liese (Rostock),
G. Salinetti (Rome), A. Wienke (Rostock)

Special Invited Paper: G. Herrendörfer / A. Tuchscherer (Dummerstorf - Rostock)

Location of Conference: Bad Doberan, nearby Rostock (at the Baltic Sea)
Hotel „Kurhaus“, Am Kamp (Tel: 038203/3036, Fax: 2126)

Registration: Conference fee for Conference participant: DM 150
Invited Speakers: free
Students: DM 50
Fees should be paid in the Organising Office.

Accommodations: Is available in the Hotel „Kurhaus “ in double rooms mainly.
The number of single rooms is limited.
Price incl. breakfast per night/per conference participant:
single room: DM 110
double room: DM 85

Local Organising Committee

3rd CMS - Secretariat
Frau Heidrun Pichmann
Forschungsinstitut für die Biologie landwirtschaftlicher Nutztiere
Forschungsbereich Biometrie
Wilhelm - Stahl - Allee 2
18196 Dummerstorf - Rostock
Germany

Tel: 038208/7460
Fax: 038208/7531

Bericht über die Internationale Fachkonferenz 'Elliptic Boundary Value Problems'

Vom 16. bis 20. März 1992 fand an der Außenstelle Wustrow der Universität Rostock eine von den drei Analysis-Lehrstühlen des Fachbereichs Mathematik vorbereitete Fachkonferenz statt, auf der die neuesten Ergebnisse auf dem Gebiet der elliptischen Randwertprobleme vorgestellt und diskutiert wurden. Im Mittelpunkt standen Probleme, die im Zusammenhang mit nicht glatt berandeten Gebieten auftreten, Methoden der Potentialtheorie und der komplexen Analysis. Der Bogen der Vorträge spannte sich von konkreten Anwendungen (Navier-Stokes-Gleichungen, Interface-Probleme) bis zu den abstrakten Pseudodifferentialgleichungen. Ein wesentlicher Schwerpunkt war das asymptotische Verhalten der Lösungen in der Umgebung von Punkt- und Kantensingularitäten. Ein ganzer Tag war den numerischen Approximationen gewidmet (FEM, Kollokationsmethoden und Wavelets).

Den Eröffnungsvortrag hielt Prof. Dr. V. G. Mazya aus Linköping über neue Maximumprinzipien. Mit ihm als Ehrendoktor der Universität Rostock verbinden uns langjährige fruchtbare Arbeitskontakte. Der Numerik-Vortrag von Prof. Dr. W. Wendland aus Stuttgart ging sowohl auf konkrete Fehlerabschätzungen als auch auf die effektive Realisierung der Verfahren auf dem Computer ein (schnelle Fourier-Transformation und Multigrid-Technik). Der Altmeister der Potentialtheorie Prof. Dr. G. Anger aus Halle sprach über sein gegenwärtiges Arbeitsgebiet, die inversen Probleme.

Unter den mehr als fünfzig Teilnehmern vorwiegend aus Ost- und Westeuropa, aber auch aus Israel, Japan, USA und Zaire traten auch fünf Rostocker mit Vorträgen auf. Die Nützlichkeit der Tagung als Stätte der Begegnung zwischen profilierten Fachleuten und Nachwuchswissenschaftlern zeigte sich insbesondere in der Diskussion nach den Übersichts- und Spezialvorträgen, die oft den Zeitrahmen zu sprengen drohten und daher in den Pausen fortgesetzt wurden. Die familiäre, aufgeschlossene und konstruktive Atmosphäre wurde auch durch eine 'Welcome Party' am ersten Tag und durch verschiedene Ausflüge am Mittwoch Nachmittag gefördert.

Insgesamt kann die Fachkonferenz als ein erfolgreicher Beitrag zur Entwicklung der Theorie der Elliptischen Randwertprobleme angesehen werden. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft ist für eine finanzielle Unterstützung der Gäste aus den osteuropäischen Ländern zu danken, deren Beiträge ein besonderer Gewinn waren. Eine Auswahl der Vorträge soll in der Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen veröffentlicht werden.

LOTHAR BERG; WOLFGANG PETERS

Die linearen involutorischen Halbgruppen achter Ordnung

Die linearen involutorischen Halbgruppen bis zur fünften Ordnung wurden in L. BERG [1] und diejenigen sechster und siebenter Ordnung in W. PETERS [6] angegeben. In beiden Arbeiten findet man auch die Definition dieser Halbgruppen. Die Verknüpfung ist stets kommutativ, so daß die additive Schreibweise benutzt wird, und *linear* ist im Sinne von *total geordnet* zu verstehen. Inzwischen wurden mit dem Programm W. PETERS [7], das eine auf PASCAL übertragene Erweiterung des in [6] zitierten BASIC-Programms W. PETERS [7] ist, alle linearen involutorischen Halbgruppen achter Ordnung berechnet. Die Ergebnisse sollen hier zusammen mit zwei allgemeinen Aussagen mitgeteilt werden.

Die Anzahlen l_n der linearen involutorischen Halbgruppen achter Ordnung mit n Erzeugenden lauten

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 6, \quad l_3 = 20, \quad l_4 = 26, \quad l_5 = 19, \quad l_6 = 6, \quad l_7 = 1,$$

so daß die Anzahl aller dieser Halbgruppen $k_8 = 79$ ist.

1 Die Halbgruppen mit negativen Elementen

Zunächst bezeichnen wir die acht Elemente der uns interessierenden Halbgruppen mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 8 und verwenden auch die übliche Ordnung. Die ersten 36 Halbgruppen mit der Eigenschaft $1 + a = 1$ für alle $a \neq 8$ brauchen wir nicht anzugeben, da diese sich aus den linearen involutorischen Halbgruppen siebenter Ordnung leicht mit Hilfe von Satz 4 aus [1] gewinnen lassen.

Hinzu kommen 12 weitere lineare involutorische Halbgruppen achter Ordnung mit mindestens einem negativen Element, von denen lediglich die Halbgruppe 41 mit der Additionstafel

41:	1	4 5						
	1	1	3	3	3	6	6	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
	3	3	6	6	6	8	8	8
	3	4	6	6	7	8	8	8
	3	5	6	7	7	8	8	8
	6	6	8	8	8	8	8	8
	6	7	8	8	8	8	8	8
	8	8	8	8	8	8	8	8

Tafel 1

neu ist. Die 0 am linken Rand kennzeichnet das Nullelement, und die Zahlen am oberen Rand sind die Erzeugenden.

Die übrigen 11 Halbgruppen sind bereits aus W. PETERS [6] bekannt, und zwar sind dies die 9 Halbgruppen $\hat{H}_i^6$ mit $i = 9, \dots, 17$ sowie die beiden Halbgruppen $\hat{H}_9^6$ und $\hat{H}_{10}^6$. Die beiden Regeln zur Erzeugung dieser Halbgruppen wurden in [6] noch ohne Beweis ihrer Allgemeingültigkeit benutzt. Inzwischen wurden aber diese Beweise von I. JAGNOW [5] sogar für wesentlich allgemeinere Erzeugungsregeln, die die alten als Spezialfälle enthalten, nachgeholt.

2 Die Halbgruppen ohne negative Elemente

Von den noch verbleibenden 31 Halbgruppen mit ausschließlich nichtnegativen Elementen findet man die ersten sieben ebenfalls bereits in W. PETERS [6] als $\hat{H}_{11}^6$ bis $\hat{H}_{17}^6$.

Um die neu hinzugekommenen Halbgruppen platzsparend darstellen zu können, betrachten wir zunächst die archimedischen, d.h. diejenigen Halbgruppen, die zusätzlich das folgende Axiom erfüllen.

Archimedisches Axiom *Zu zwei beliebigen Elementen a, b der Halbgruppe, die nicht gleich dem Nullelement sind, gibt es eine natürliche Zahl n mit $na \geq b$.*

Die archimedischen Halbgruppen sollen jetzt durch homomorphe Bilder numerischer Halbgruppen dargestellt werden, wobei eine numerische Halbgruppe eine Unterhalbgruppe der um Null erweiterten additiven Halbgruppe der natürlichen Zahlen ist. Zu diesem Zweck untersuchen wir, wann eine solche Halbgruppe mit der üblichen Anordnung eine involutorische Halbgruppe ist.

Es sei $N(q_1, \dots, q_k)$ mit $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ und $k \geq 1$ diejenige numerische Halbgruppe, die die natürlichen Zahlen $q_1, \dots, q_k$ als minimale Erzeugende besitzt, vgl. J. HERZOG [4], insbesondere im Fall $k = 3$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir die Erzeugenden als relativ prim an, da wir andernfalls nach Kürzung des größten gemeinsamen Teilers eine isomorphe Darstellung der gewünschten Art erhalten.

Nach L. RÉDEI [8] gibt es eine kleinste natürliche Zahl f_0 , so daß alle natürlichen Zahlen $l \geq f_0$ zur Halbgruppe gehören. Wir führen die Zahl $f = \text{Max}(f_0, q_k + 1)$ ein.

Definition 1 Es sei r eine ganze Zahl und $m = f_0 + f + r - 1$. Mit $N^r(q_1, \dots, q_k)$ bezeichnen wir diejenige Menge, die aus $N(q_1, \dots, q_k)$ durch Hinzunahme folgender Identifizierung entsteht: Für zwei benachbarte Zahlen a und $a - 1$ aus $N(q_1, \dots, q_k)$ setzen wir $a = a - 1$ genau dann, wenn $m - a$ nicht zu $N(q_1, \dots, q_k)$ gehört.

In jeder Klasse identifizierter Elemente nennen wir das vorher kleinste Element den *Repräsentanten*. Diesen Begriff verwenden wir auch bei den nur aus einem einzigen Element bestehenden Klassen.

Die Identifizierung eines Elements mit einer Erzeugenden schließen wir im Fall $k > 1$ aus, da wir andernfalls bereits mit einem kleineren k ein isomorphes Ergebnis bekommen können.

Satz 1 Mit der aus $N(q_1, \dots, q_k)$ vererbten Addition und der vererbten Ordnung ist $N^r(q_1, \dots, q_k)$ im Fall $r \geq 1$ eine lineare involutorische Halbgruppe mit dem maximalen Element m und der Involution $a^* = m - a$ für Repräsentanten a .

Beweis: Im folgenden schreiben wir N und N^r der Einfachheit halber ohne Parameter $q_1, \dots, q_k$. Gehören $a, a - 1$ und b zu N , so auch $a + b$ und $a + b - 1$. Zunächst zeigen wir, daß aus $a = a - 1$ in N^r stets $a + b = a + b - 1$ folgt. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann müßte $m - (a + b)$ zu N gehören und $m - a = [m - (a + b)] + b$ wäre ein Element von N im Widerspruch zur Definition von $a = a - 1$. Dies zeigt, daß unsere Identifizierung eine in N mit der Addition verträgliche Relation ist, so daß N^r ein homomorphes Bild von N und damit ebenfalls eine Halbgruppe ist.

Die Linearität von N^r ist unmittelbar klar. Die Maximalität von m ergibt sich daraus, daß N keine negativen Elemente enthält.

Ist a ein Repräsentant, so gehört $m - a$ zu N und ist ebenfalls ein Repräsentant, denn andernfalls wäre $m - a = m - a - 1$ und a dürfte nicht zu N gehören, was unserer Annahme widerspricht.

Um schließlich zu beweisen, daß N^r eine involutorische Halbgruppe ist, haben wir nach einem Lemma aus [2] die Gültigkeit von

$$a^* + \underline{a} < m = a^* + a$$

für alle $a \neq 0$ nachzuweisen, wobei $\underline{a}$ den Vorgänger von a bezeichnet. Die hierin enthaltene Gleichung ist wegen $a^* = m - a$ erfüllt, und die Ungleichung ebenfalls, da $\underline{a} \leq a - 1$ gilt und $m = m - 1$ nicht möglich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Zusatz: In Sonderfällen kann Satz 1 auch für endlich viele $r \leq 0$ richtig sein.

Im Fall $k = 1$ und somit $q_1 = 1$ ist $f_0 = 0$ und $f = 2$, so daß r neben den natürlichen Zahlen auch noch den Wert $r = 0$ annehmen kann.

Im Fall $k \geq 2$ ist $f_0 - 1$ die größte natürliche Zahl, die nicht zu N gehört. Für $m - a = f_0 - 1$ ist daher $a = f + r$ die kleinstmögliche Zahl, die mit $a - 1$ identifiziert werden kann. Der Fall $r = 0$ kann jetzt nicht vorkommen, da dann $a - 1 = f - 1 = \text{Max}(f_0 - 1, q_k)$ entweder nicht zu N gehören würde oder ein erzeugendes Element wäre. Dagegen kann r jetzt neben den natürlichen Zahlen unter Umständen auch endlich viele negative Werte annehmen, wie wir gleich sehen werden.

Bei einer Vergrößerung von r um 1 erhöht sich übrigens auch die Ordnung der Halbgruppe stets um 1.

Die bereits in [1] und [2] eingeführten Klassen von Halbgruppen hängen mit den N^r folgendermaßen zusammen:

$$A_p = N^{p-1}(1),$$

$$B_{pq} = N^{q-p+1}(p, p+1, \dots, 2p-1),$$

$$C_{pq} = N^1(p, \dots, p+q) \quad \text{für } p \leq 2q+1,$$

$$C_{pq} = N^{1-p}(p, \dots, p+q, 2p+2q+1, \dots, 3p-1) \quad \text{für } p > 2q+1,$$

$$D_{pq} = N^q(2, 2p+1),$$

$$S_{2qr} = N^{r-2}(2, q) \quad \text{für } r \geq 3,$$

$$S_{pqr} = N^r(p, q) \quad \text{für } p > 2.$$

Zusätzlich zu den in [2] angegebenen Halbgruppen mit zwei Erzeugenden gibt es beispielsweise noch die involutorischen Halbgruppen $N^{4-3p}(3, 3p+1)$ der Ordnung $3p+4$ mit $r = 4-3p < 0$ für $p \geq 2$.

Die mit dem Programm [7] berechneten Halbgruppen 67 bis 79 sind mit Ausnahme von 70 gerade die folgenden 12 archimedischen Halbgruppen:

- 67: N_1^6 : 0 1 2 3 4 5 6 7
- 68: N_2^2 : 0 · 2 · 4 5 6 7 = 8 9 = 10 11
- 69: N_3^1 : 0 · · 3 · · 6 7 8 9 = 10 = 11 12 = 13 = 14 15
- 71: N_3^{-9} : 0 · · · · 5 6 · · · 10 = 11 = 12 · ·
15 = 16 = 17 = 18 19 20 = 21 = 22 = 23 = 24 25
- 72: N_2^2 : 0 · · 3 4 · 6 7 = 8 9 10 = 11 = 12 13
- 73: N_2^4 : 0 · 2 3 4 5 6 7 = 8 9
- 74: N_3^1 : 0 · · 3 · 5 6 7 8 = 9 10 = 11 = 12 13
- 75: N_4^{-3} : 0 · · · · 5 6 · · 9 10 = 11 = 12 13
14 = 15 = 16 = 17 = 18 19
- 76: N_3^1 : 0 · · · 4 5 · 7 8 = 9 10 11 = 12 = 13 = 14 15
- 77: N_3^3 : 0 · · 3 4 5 6 7 8 = 9 = 10 11
- 78: N_4^2 : 0 · · · 4 5 6 7 8 9 = 10 = 11 = 12 13
- 79: N_5^1 : 0 · · · · 5 6 7 8 9 10 = 11 = 12 = 13 = 14 15

Die Erzeugenden q_i wurden jeweils unterstrichen, der untere Index bei N_k^r gibt ihre Anzahl k an. Die letzte Zahl einer Zeile ist immer das maximale Element m mit $m = m + 1 = m + 2 = \dots$.

Die 19 nichtarchimedischen involutorischen Halbgruppen mit nichtnegativen Elementen lassen sich ebenfalls mit Hilfe ganzer Zahlen und der gewöhnlichen Addition beschreiben. Die Ergebnisse lauten, wenn wir bei identifizierten Elementen jeweils nur das kleinste und das größte aufschreiben und auch auf die Hervorhebung der Lücken verzichten:

- 49: 0 1 = 2 | 3 = 6 | 7 = 14 | 15 = 18 19 = 20 21 22
- 50: 0 1 = 2 | 3 = 6 | 7 = 10 14 = 17 18 = 19 20 21
- 51: 0 1 = 2 | 3 = 6 | 7 = 8 10 = 13 14 = 15 16 17
- 52: 0 1 = 2 | 3 = 4 6 = 12 | 13 = 14 16 = 17 18 19
- 53: 0 1 = 2 | 3 = 4 6 = 7 9 = 10 12 = 13 14 15
- 54: 0 1 = 2 | 4 = 5 6 = 7 8 = 9 10 = 12 13 14
- 55: 0 1 = 2 | 6 = 7 8 = 9 10 = 11 12 = 16 17 18
- 56: 0 1 = 2 | 3 = 6 | 7 8 = 11 12 = 13 14 15
- 57: 0 1 = 2 | 3 = 4 5 6 = 7 8 = 9 10 11
- 58: 0 1 = 2 | 5 = 6 7 8 = 9 10 = 13 14 15
- 59: 0 1 = 2 | 3 4 = 8 | 9 10 = 11 12 13

60:	0	<u>1</u> = 2	<u>3</u>	4 = 5	6	7 = 8	9	10
61:	0	<u>1</u> = 2	<u>4</u>	5 = 6	<u>7</u>	8 = 10	11	12
62:	0	<u>3</u> = 6	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	10 = 13	14 = 16	17
63:	0	<u>1</u>	2 = 4	<u>5</u> = 10	<u>11</u> = 13	<u>14</u>	15	16
64:	0	<u>1</u>	2 = 4	<u>5</u> = 7	10 = 12	<u>13</u>	14	15
65:	0	<u>1</u>	2 = 4	<u>5</u>	6 = 8	<u>9</u>	10	11
66:	0	<u>1</u>	2	3 = 6	<u>7</u>	8	9	10
70:	0	<u>2</u>	<u>3</u>	4 = 8	<u>9</u>	<u>10</u>	11 = 12	13

Die Striche unter den Zahlen kennzeichnen wieder die Erzeugenden und die senkrechten Striche nach den Zahlen die nichttrivialen idempotenten Elemente. Die 7 bereits bekannten Halbgruppen $\hat{H}_{11}^6$ bis $\hat{H}_{17}^6$ aus [6] wurden hier noch einmal in der alten Reihenfolge unter den Nummern 49 bis 55 in der neuen Darstellung angegeben. Es sei betont, daß im Gegensatz zum archimedischen Fall jetzt nur mit den Repräsentanten gerechnet werden darf, die auch hier wieder die kleinsten Zahlen ihrer Klasse sind. Bei einer mehrfachen Summe bedeutet dies, daß jede durch gewöhnliche Addition zu bildende Summe von zwei Summanden vor dem Weiterrechnen durch den zugehörigen Repräsentanten zu ersetzen ist. Aus diesem Grunde ist es nicht ohne weiteres möglich, mit Hilfe dieser Darstellung die Gültigkeit des Assoziativgesetzes nachzuweisen.

3 Die Halbgruppenelemente als Operatoren

Neben dem Programm [7] gibt es auch eine andere Möglichkeit, alle linearen involutorischen Halbgruppen einer vorgegebenen Ordnung p zu erzeugen, die hier am Beispiel $p = 5$ vorgeführt werden soll. Bezeichnen wir die Elemente einer Halbgruppe wie früher mit 1, 2, 3, 4, 5, so können in den Additionstafeln nach [1] höchstens folgende 15 Zeilen auftreten:

a	11115	d	11335	f	13445	i	23455	l	34555
b	11125	e	12245	g	14445	j	24455	n	45555
c	11235	o	12345	h	22355	k	33555	m	55555,

wobei die Nullzeile o und die maximale Zeile m stets vorkommen müssen. Den Sonderfall 22255 haben wir gleich weggelassen. Wir fassen jetzt jede Zeile $x = x_1x_2x_3x_4x_5$ als einen Operator auf, der i für $i = 1, \dots, 5$ in x_i überführt und schreiben hierfür bei Bedarf ausführlicher

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin definieren wir für zwei Operatoren x und $y = y_1y_2y_3y_4y_5$ eine Multiplikation durch Nacheinanderanwendung, wobei der rechtsstehende Operator zuerst anzuwenden ist, d.h.

$$xy = x_{y_1}x_{y_2}x_{y_3}x_{y_4}x_{y_5}.$$

Beispielsweise ist $ai = 11155$ und $ia = 22225$, d.h., die Multiplikation ist i. a. nichtkommutativ und braucht auch nicht einen der bereits definierten Operatoren als Ergebnis zu haben. Jedoch gilt der folgende

Satz 2 *Das Produkt zweier Operatoren, die den möglichen Zeilen der Additionstafeln linearer involutorischer Halbgruppen einer festen Ordnung p zugeordnet sind, ist genau dann kommutativ, wenn das Ergebnis ein ebensolcher Operator ist.*

Beweis: Nach Hilfssatz 3 von [1] sind die uns interessierenden Operatoren $x = x_1x_2 \dots x_p$ dadurch charakterisiert, daß bei ihnen jede Zahl $p-i$ mit $i = 0, 1, \dots, p-1$ genau $(x_{i+1} - x_i)$ -mal auftritt, wobei $x_0 = 0$ zu setzen ist. Hieraus folgt, daß in $x_1x_2 \dots x_p$ jede Zahl $p-i$ genau bei den Indizes $p - x_{i+1} + 1$ bis $p - x_i$ auftritt, was im Fall $x_{i+1} = x_i$ wie üblich bedeutet, daß $p-i$ nicht auftritt. In $y = y_1 \dots y_p$ tritt somit $p - x_{i+1} + 1$ genau von $p - y_{x_{i+1}} + 1$ bis $p - y_{x_{i+1}-1}$ und $p - x_i$ genau von $p - y_{x_{i+1}} + 1$ bis $p - y_{x_i}$ auf, wegen der Monotonie tritt daher $p-i$ in xy genau von $p - y_{x_{i+1}} + 1$ bis $p - y_{x_i}$ auf. Diese Zahlen sind aber genau dann von der Reihenfolge von x und y unabhängig, wenn $y_{x_i} = x_{y_i}$ ist für alle i , wenn also die Operatoren x und y vertauschbar sind. Sind x und y nicht vertauschbar, so gibt $y_{x_{i+1}} - y_{x_i}$ offenbar die Anzahl an, wie oft $p-i$ in yx auftritt, und $x_{y_{i+1}} - x_{y_i}$ die Anzahl, wie oft $p-i$ in xy auftritt. Damit können die Ergebnisse nichtvertauschbarer Produkte nicht als Zeilen linearer involutorischer Halbgruppen auftreten, und der Satz ist bewiesen.

In dem zuvor behandelten Fall $p = 5$ sind die vertauschbaren Ergebnisse bis auf den bereits erwähnten Sonderfall 22255 aus der Multiplikationstafel 2 zu entnehmen.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>o</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>n</i>	<i>m</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	.	.	.	.	.	.	<i>m</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	<i>m</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	.	.	<i>c</i>	.	.	.	.	.	.	.	.	<i>m</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	.	<i>d</i>	.	<i>d</i>	.	.	.	.	.	<i>k</i>	<i>k</i>	.	<i>m</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	.	.	<i>e</i>	<i>e</i>	.	<i>g</i>	.	.	<i>j</i>	.	.	<i>n</i>	<i>m</i>
<i>o</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>o</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>n</i>	<i>m</i>
<i>f</i>	<i>a</i>	.	.	.	.	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	.	.	.	.	.	<i>n</i>	<i>m</i>
<i>g</i>	<i>a</i>	.	.	.	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	.	.	.	.	.	<i>n</i>	<i>m</i>
<i>h</i>	.	.	.	.	.	<i>h</i>	.	.	<i>h</i>	.	.	<i>k</i>	.	<i>m</i>	<i>m</i>
<i>i</i>	.	.	.	.	.	<i>i</i>	.	.	.	<i>l</i>	.	.	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
<i>j</i>	.	.	.	.	<i>j</i>	<i>j</i>	.	.	.	.	<i>n</i>	.	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
<i>k</i>	.	.	.	<i>k</i>	.	<i>k</i>	.	.	<i>k</i>	.	.	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
<i>l</i>	.	.	.	<i>k</i>	.	<i>l</i>	.	.	.	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
<i>n</i>	.	.	.	.	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>
<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>

Tafel 2

Die acht linearen involutorischen Halbgruppen H_i^5 aus [1] sind die kommutativen Unterhalbgruppen von Tafel 2

$$H_1^5 = \{a, b, c, o, m\}, \quad H_2^5 = \{a, b, d, o, m\}, \quad H_3^5 = \{a, e, o, g, m\}, \quad H_4^5 = \{a, o, f, g, m\},$$

$$H_5^5 = \{d, o, k, l, m\}, \quad H_6^5 = \{o, h, k, n, m\}, \quad H_7^5 = \{o, i, l, n, m\}, \quad H_8^5 = \{o, j, l, n, m\},$$

die durch folgende Bedingungen gekennzeichnet sind:

1. Die Halbgruppen enthalten stets die Elemente o und m .
2. Ersetzt man die fünf Buchstaben der Halbgruppe unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge durch die Zahlen $1, 2, \dots, 5$, so muß sich für die Operatoren wieder ihre ursprüngliche Definition ergeben.

Während diese Ersetzung bei c, h und i eindeutig ist, gibt es mit der weiter oben eingeführten Bezeichnungsweise beispielsweise für

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad d = \begin{pmatrix} a & b & d & o & k & l & m \\ a & a & d & d & k & k & m \end{pmatrix}$$

die beiden Zuordnungsmöglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & d & o & m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ d & o & k & l & m \end{pmatrix},$$

die zu den Halbgruppen H_2^5 bzw. H_5^5 führen.

Andererseits erfüllt die kommutative Halbgruppe $\{o, f, g, n, m\}$ zwar die Bedingung 1, aber nicht die Bedingung 2, so daß sie zwar eine komplementäre, aber keine involutorische Halbgruppe ist.

Die Multiplikationstafel für die Operatoren wurde der Arbeit I. ERTELT [3] entnommen, in der auch die entsprechenden Rechnungen bis zur Ordnung $p = 7$ durchgeführt wurden. Mit steigender Ordnung wächst aber der Aufwand beträchtlich, so daß die neue Methode für den hier betrachteten Fall $p = 8$ nicht zu empfehlen ist. Abschließend sei erwähnt, daß die unvollständige Multiplikationstafel 2 als Teil der nichtkommutativen Multiplikationstafel für alle $70 = \binom{8}{4}$ isotonen Operatoren von $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ auf N_5 mit 5 als Fixpunkt aufgefaßt werden kann.

Berichtigung: Es sei noch darauf hingewiesen, daß in [6] auf S. 47 in der ersten Zeile von H_3^6 die letzte 1 durch 6 zu ersetzen ist und daß auf S. 53 bei $\tilde{H}_{28}^7$ die 1 zu den Erzeugenden hinzuzufügen ist.

Literatur

- [1] **Berg, L.** : *Erzeugung linearer involutorischer Halbgruppen*. Rostock. Math. Kolloq. **32**, 25–38 (1987)
- [2] **Berg, L.** : *Linear involutory semigroups with two generators*. Rostock. Math. Kolloq. **33**, 49–56 (1988)
- [3] **Ertelt, I.** : *Berechnung linearer involutorischer Halbgruppen*. Diplomarbeit Univ. Rostock 1990
- [4] **Herzog, J.** : *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings*. Manuskripta Math. **3**, 175–193 (1970)
- [5] **Jagnow, I.** : *Erweiterung linearer involutorischer Halbgruppen*. Beiträge Algebra Geometrie **31**, 103–119 (1990)
- [6] **Peters, W.** : *Berechnung der linearen involutorischen Halbgruppen sechster und siebenter Ordnung*. Rostock. Math. Kolloq. **35**, 45–56 (1988)
- [7] **Peters, W.** : *PASCAL-Programm zur Erzeugung aller linearen involutorischen Halbgruppen der Ordnung 8*. (unveröffentlicht)
- [8] **Rédei, L.** : *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*. Würzburg 1963

eingegangen: 21. Februar 1991

Verfasser:

Prof. Dr. L. Berg; Dr. W. Peters

Fachbereich Mathematik

Universität Rostock

Universitätsplatz 1

O-2500 Rostock

Germany

S. I. KOSTADINOV

Über eine notwendige Bedingung für die Existenz von Exponentialdichotomie bei Impulsdifferentialgleichungen im Banachraum

Die Impulsdifferentialgleichungen sind ein adäquater mathematischer Apparat zur Modellierung von Evolutionsprozessen in der Natur, die in ihrer Entwicklung kurzzeitig wirkenden sprungartigen Störungen unterworfen sind.

Die Untersuchungen dieser Gleichungen beginnen mit [1]. In [2] bis [4] findet man die ersten Resultate in abstrakten Räumen.

In der vorliegenden Arbeit wird eine notwendige Bedingung für die Existenz von Exponentialdichotomie bei Impulsdifferentialgleichungen im Banachraum angegeben. In den Veröffentlichungen [5] bis [7] werden hinreichende bzw. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Exponentialdichotomie bei Differentialgleichungen ohne Impulswirkung formuliert.

Es sei X ein beliebiger Banachraum und $L(X)$ der Raum der linearen beschränkten Operatoren von X in sich mit der Identität I . Wir betrachten die Impulsleichung

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \Big|_{t \neq t_n}, \quad (1)$$

$$\Delta x(t_n) = I_n x(t_n - 0), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

wobei gilt:

- $A : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow L(X)$ ist eine stetige Funktion.
- Die Folge (t_n) genügt der Bedingung $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$.
- $\Delta x(t_n) = x(t_n + 0) - x(t_n - 0)$.
- $I_n \in L(X), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Definition Die Impulsgleichung (1), (2) heißt *exponentialdichotom*, wenn positive Konstanten $M_1, M_2, \delta_1, \delta_2$ existieren, so daß die Ungleichungen

$$\|U(t)P_1U^{-1}(\tau)\| \leq M_1e^{-\delta_1(t-\tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \quad (3)$$

$$\|U(t)P_2U^{-1}(\tau)\| \leq M_2e^{-\delta_2(\tau-t)}, \quad 0 \leq t \leq \tau < \infty, \quad (4)$$

erfüllt sind. Dabei ist $U(t)$ der Evolutionsoperator der Gleichung (1), (2). Weiterhin sind P_1, P_2 Projektionen in X mit $P_1 + P_2 = I$.

Die Impulsgleichung (1), (2) heißt *dichotom*, wenn die Ungleichungen (3), (4) mit $\delta_1 = \delta_2 = 0$ gelten.

Satz Die Impulsgleichung (1), (2) sei *exponentialdichotom*. Dann gilt mit gewissen positiven Konstanten M, δ die Beziehung

$$\exp \left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds \right) \prod_{n:t_0 < t_n < t} (1 + \|I_n\|) \geq Me^{\delta(t-t_0)}, \quad t_0 \geq 0.$$

Beweis. Aus naheliegenden Überlegungen folgt, daß die Lösung $x(t)$ der Impulsgleichung (1), (2) sich durch die Formel

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds + \sum_{n:t_0 < t_n < t} I_n x(t_n), & t > t_0 \\ x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds - \sum_{n:t \leq t_n \leq t_0} I_n x(t_n), & t \leq t_0 \end{cases}$$

darstellen läßt. Mit Hilfe einer Modifizierung des Lemmas von Gronwall-Bellman [8] bekommt man die Abschätzung

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \prod_{n:t_n \in \Delta} (1 + \|I_n\|) \exp \left(\int_{\Delta} \|A(s)\| ds \right), \quad t_0, t \in \Delta, \quad (5)$$

wobei Δ ein beliebiges kompaktes Intervall in R_+ ist.

Die Impulsgleichung (1), (2) hat bekanntlich entweder eine von Null verschiedene Lösung $y(t)$, die für irgendeine Konstante $D_1 > 0$ der Ungleichung

$$\|y(t)\| \leq D_1 e^{-\delta_1(t-t_0)} \|y(t_0)\|, \quad 0 \leq t_0 \leq t < \infty$$

genügt, oder eine von Null verschiedene Lösung $z(x)$, die für irgendeine Konstante $D_2 > 0$ die Ungleichung

$$\|z(t)\| \geq D_2 e^{-\delta_2(t-t_0)} \|z(t_0)\|, \quad 0 \leq t_0 \leq t < \infty,$$

erfüllt.

Es sei $0 \leq t_0 \leq t$. Aus (5) erhält man im ersten Fall, wenn man dort die Plätze von t_0 und t tauscht,

$$\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right)}{\prod_{n:t_0 < t_n < t} (1 + \|I_n\|)} \leq \|y(t)\| \|y(t_0)\|^{-1} \leq D_1 e^{-\delta_1(t-t_0)},$$

d.h.

$$\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) \prod_{n:t_0 < t_n < t} (1 + \|I_n\|) \geq \frac{1}{D_1} e^{\delta_1(t-t_0)}.$$

Für den zweiten Fall folgt wieder aus (5)

$$\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) \prod_{n:t_0 < t_n < t} (1 + \|I_n\|) \geq \|z(t)\| \|z(t_0)\|^{-1} \geq D_2 e^{\delta_2(t-t_0)}.$$

Somit ist Satz 1 bewiesen. ■

Bemerkung. Ist die Gleichung (1), (2) dichotom, so gilt

$$\exp\left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right) \prod_{n:t_0 < t_n < t} (1 + \|I_n\|) \geq M$$

mit $M = \max\{\frac{1}{D_1}, D_2\}$.

Literatur

- [1] Мильман, В. Д., и Мышкис, А. Д.: Об устойчивости движения при наличии толчков. Сиб. мат. Ж. 1, 2, 233–237 (1960)
- [2] Bainov, D. D., Zabreiko, P. P., and Kostadinov, S. I.: Characteristic exponents of impulsive differential equations in a Banach space. Internat.J. Theoret. Phys. 27, 6, 731–743 (1988)
- [3] Bainov, D. D., Zabreiko, P. P., and Kostadinov, S. I.: Stability of the general exponent of nonlinear impulsive differential equations in a Banach space Internat. J. Theoret. Phys. 27, 3, 373–380 (1988)
- [4] Bainov, D. D., Kostadinov, S. I., and Myshkis, A. D.: Bounded and periodic solutions of differential equations with impulse effect in a Banach space. Differential Integral Equations 1, 2, 223–230 (1988)

- [5] Данцкий, Ю. Л., и Крейн, М. Г. : *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве*. Москва 1970
- [6] Palmer, K. J. : *A characterization of exponential dichotomy in terms of topological equivalence*. J. Math. Anal. Appl. **69**, 1, 8–16 (1979)
- [7] Массера, Х., и Шеффер, Х. : *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*. Москва 1970
- [8] Самойленко, А., и Перестюк, Н. : *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*. Киев 1987

eingegangen: 14. Juni 1991

Verfasser:

Doz. Dr. S. I. Kostadinov

Universität Plovdiv

Zar Asen 24

Plovdiv

Bulgarien

UWE HAMANN

Approximation mittels Linearkombinationen von Fundamentallösungen auf nichtglatten Gebietsrändern

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit einem zusammenhängenden Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ braucht nicht glatt zu sein. L sei ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$ mit konstanten Koeffizienten und E eine Fundamentallösung von L . Weiterhin sei $(y_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ eine vorgegebene Punktfolge. Zu einer Funktion $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ wird mittels $\hat{f} := \{D^\beta f|_\Gamma\}_{|\beta| \leq m-1}$ ein Tupel stetiger Funktionen auf Γ (ein Whitney-Taylor-Feld) definiert. Wir betrachten nun endliche Linearkombinationen aus Funktionen der Gestalt $D^\alpha E(x - y_k)$ und wollen damit $\hat{f}$ approximieren. Etwas genauer geht es um die Frage, unter welchen Voraussetzungen für die durch

$$u_l(x) := \sum_{k=1}^l \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} c_{k,\alpha}^{(l)} D^\alpha E(x - y_k) \quad (1)$$

definierte Folge $(u_l)_1^\infty$ die Beziehung

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D^\beta f|_\Gamma - D^\beta u_l|_\Gamma\|_{C(\Gamma)} = 0$$

gilt.

Es stellt sich dabei heraus, daß dazu Forderungen zu stellen sind, und zwar

1. an die Lage der Punkte y_k ,
2. an die Lösbarkeit eines Randwertproblems bezüglich Ω und
3. an die sogenannte Stabilität des Gebietes Ω .

Insbesondere von der Lage der Punkte y_k hängt es ab, wie weit in (1) bezüglich α summiert werden muß. Bei bestimmten Konstellationen der Punkte y_k braucht nämlich bezüglich α nur bis $|\alpha| = m - 1$ oder sogar nur bis $|\alpha| = 0$ (also gar nicht) summiert zu werden.

Die betrachtete Approximation ist noch unter einem weiteren Aspekt interessant. Wenn nämlich eine a-priori-Ungleichung der Gestalt

$$\|u\|_{C^{m-1}(\Omega)} \leq C \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D^\beta u|_\Gamma\|_{C(\Gamma)}$$

für alle $u \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$ mit $Lu = 0$ in Ω gilt, so eröffnet sich die Möglichkeit der näherungsweisen Lösung des Dirichlet-Problems.

1 Bezeichnungen, Voraussetzungen

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige beschränkte, offene Menge, deren Rand $\Gamma = \partial\Omega$ nicht glatt zu sein braucht und für die das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend ist.

$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha$ sei ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Dann ist $L^* = \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$ der im Sinne der Distributionentheorie formal duale Operator zu L . Weiterhin sei E eine Fundamentallösung von L . Die durch $E^*(x) = E(-x)$ definierte Funktion E^* ist dann eine Fundamentallösung von L^* . Es gilt also $LE = \delta$ und $L^*E^* = \delta$.

Es ist noch zu bemerken, daß Fundamentallösungen nicht eindeutig bestimmt sind. Für jede Lösung w von $Lw = 0$ im $\mathbb{R}^n$ ist mit E auch $E + w$ eine Fundamentallösung von L .

Für ganze Zahlen $s \geq 0$ und kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$W^s(K) = \left\{ f = \{f_\beta\}_{|\beta| \leq s} \in \prod_{|\beta| \leq s} C(K) : \begin{array}{l} \text{es existiert ein } f \in C^s(\mathbb{R}^n) \text{ mit} \\ D^\beta f|_K = f_\beta \text{ für } |\beta| \leq s \end{array} \right\}$$

die Menge der Whitney-Taylor-Felder der Ordnung s auf K mit der Norm

$$\|\dot{f}\|_{W^s(K)} = \sum_{|\beta| \leq s} \|f_\beta\|_{C(K)}.$$

2 Hauptergebnis

Wir formulieren jetzt das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit. Anschließend folgen einige Bemerkungen dazu.

Satz *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ein C^1 -glattes, $(n-1)$ -dimensionales, abgeschlossenes Flächenstück. Jeder Punkt von K sei Häufungspunkt der Folge $(y_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Weiterhin existiere eine reelle Zahl p' mit $1 \leq p' < \frac{n}{n-1}$, so daß gilt:*

(a) Die Gleichung $L^*v = 0$ in Ω besitzt im Sobolev-Raum $\overset{\circ}{W}_{p'}^m(\Omega)$ nur die triviale Lösung $v \equiv 0$.

(b) Es ist $\{g \in W_{p'}^m(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subseteq \overline{\Omega}\} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ (Abschließung in der Norm des Sobolev-Raumes $W_{p'}^m(\mathbb{R}^n)$).

Dann existieren zu jedem $\hat{f} = \{f_\beta\}_{|\beta| \leq m-1} \in W^{m-1}(\Gamma)$ solche Zahlen $c_{k,\alpha}^{(l)}$ ($1 \leq l < \infty$, $1 \leq k \leq l$, $|\alpha| \leq 2m-1$), so daß für

$$u_l(x) = \sum_{k=1}^l \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} c_{k,\alpha}^{(l)} D^\alpha E(x - y_k) \quad (2)$$

die Beziehung

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D^\beta u_l|_\Gamma - f_\beta\|_{C(\Gamma)} = 0 \quad (3)$$

gilt.

Nun einige Bemerkungen zu diesem Satz.

Bemerkung 1. Bei der Voraussetzung (a) ist $p' < \frac{n}{n-1}$ zu beachten. Selbst wenn die Gleichung $L^*v = 0$ in $\overset{\circ}{W}_2^m(\Omega)$ nur trivial lösbar ist, kann diese Gleichung in $\overset{\circ}{W}_{p'}^m(\Omega) \supset \overset{\circ}{W}_2^m(\Omega)$ für ein $p' < 2$ nichttriviale Lösungen besitzen.

Dazu ein Beispiel:

Es sei $\Omega = \{(r, \varphi) : r < 1, 0 < \varphi < \varphi_0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ ((r, φ) : Polarkoordinaten) und $\psi_0 \in C^\infty(0, 1)$ eine Funktion mit $\psi_0(t) \equiv 1$ für $0 < t < \frac{1}{3}$ und $\psi_0(t) \equiv 0$ für $\frac{2}{3} < t < 1$.

Wir definieren

$$v(r, \varphi) = \psi_0(r) r^{-\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin\left(\frac{\pi}{\varphi_0} \varphi\right).$$

Es ist $v \in W_{p'}^1(\Omega)$ für $p' < \frac{2}{\frac{\pi}{\varphi_0} + 1}$.

Berücksichtigt man

$$\Delta(r^{-\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin(\frac{\pi}{\varphi_0} \varphi)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

sowie die Eigenschaften von ψ_0 , so erhält man

$$\Delta v =: g \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{und} \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Da das Dirichlet-Problem

$$\Delta w = g \quad \text{in } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0$$

stets eine Lösung aus $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ besitzt, ist $u := v - w$ eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Wegen $v \in \mathring{W}_{p'}^1(\Omega)$ für $p' < \frac{2}{\frac{n}{p_0} + 1} < \frac{4}{3}$ und $w \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ ist $u \in \mathring{W}_{p'}^1(\Omega)$ eine Eigenlösung des Dirichlet-Problems (4).

Die Voraussetzung (a) beinhaltet also auch eine Forderung an Ω .

Bemerkung 2. Will man statt Tupel aus $W^{m-1}(\Gamma)$ nur Tupel aus $W^s(\Gamma)$ mit $0 \leq s \leq m-1$ approximieren, so ist zu ersetzen:

(a) durch (a'): $L^*v = 0$ ist in $\mathring{W}_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)$ nur trivial lösbar,

und

(b) durch (b'): $\{g \in W_{p'}^{2m-s-1}(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subseteq \overline{\Omega}\} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}.$

Wegen $\mathring{W}_{p'}^{2m-s-1}(\Omega) \subset \mathring{W}_{p'}^m(\Omega)$ ist (a') eine schwächere Voraussetzung als (a). Die Bedingung (a') enthält eine Forderung an ein überbestimmtes Dirichlet-Problem.

Bemerkung 3. Die Voraussetzung (b) stellt eine schwache Forderung an Γ dar. Ist $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$, so wird $\overline{\Omega}$ in der Literatur als (r, p) -stabil ($r \geq 1$, ganz) bezeichnet, wenn

$$\{g \in W_p^r(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subseteq \overline{\Omega}\} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

gilt ([1, 13, 14]). Mit Hilfe von Begriffen aus der L_p -Kapazitätstheorie kann man zahlreiche Kriterien für die (r, p) -Stabilität angeben (s. z.B. [2, 14]). Analoge Kriterien gibt es auch für den Fall $\partial\Omega \neq \partial\overline{\Omega}$ (s. [9]).

Bemerkung 4. Die C^1 -Glattheit des Flächenstückes K ist keineswegs notwendig. Es genügen auch die beiden folgenden Forderungen an die kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ (vgl. [12]):

1. Es gibt eine offene Kugel B , welche durch K in zwei nichtleere disjunkte offene Mengen zerlegt wird.
2. $H_{n-1}(K \cap B) < \infty$ (H_{n-1} : $(n-1)$ -dimensionales Hausdorff-Maß).

Bemerkung 5. Bei der im Satz angegebenen Lage der Punkte y_k wird in (2) bezüglich α bis $|\alpha| = 2m - 1$ summiert. Jetzt werden fünf andere Konstellationen der Punkte y_k angegeben, bei denen die Summation bezüglich α reduziert werden kann (Erläuterungen dazu sowie die Beweise findet man in [12]).

1. Es sei $U \subset \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ eine solche beschränkte, offene Menge, für die das Dirichlet-Problem

$$L^*v = 0 \text{ in } U, \quad D^\alpha v|_{\partial U} = 0 \text{ für } |\alpha| \leq m - 1$$

in $C^\infty(\overline{U})$ nur trivial lösbar ist. Wenn dann jeder Punkt des Randes ∂U Häufungspunkt der Folge $(y_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ist, so reicht die Summation bezüglich α in (2) bis $|\alpha| = m - 1$.

2. Vom beschränkten Gebiet $\Omega_1 \supset \overline{\Omega}$ mit $\partial\overline{\Omega}_1 = \partial\Omega_1$ und vom Differentialoperator L^* werde vorausgesetzt:

L^* besitzt eine derartige Fundamentallösung E^* , so daß das Außenraum-Dirichlet-Problem

$$L^*v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_1, \quad D^\alpha v|_{\partial\Omega_1} = 0 \text{ für } |\alpha| \leq m - 1$$

in der Menge der Funktionen $\{v = g * E^* : g \in D'(\mathbb{R}^n), \text{ supp } g \subseteq \Gamma\}$ nur $v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_1$ als Lösung besitzt.

Wenn dann jeder Punkt von $\partial\Omega_1$ Häufungspunkt der Folge $(y_k)_1^\infty$ ist, so reicht ebenfalls die Summation bezüglich α bis $|\alpha| = m - 1$. (E muß hier jene Fundamentallösung von L sein, für die $E(x) = E^*(-x)$ gilt.)

3. Jeder Punkt einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ sei Häufungspunkt der Folge $(y_k)_1^\infty$. Dann braucht bezüglich α nicht summiert zu werden, d.h., für

$$u_l(x) = \sum_{k=1}^l c_k^{(l)} \cdot E(x - y_k)$$

gilt (3).

4. Es sei $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ein beliebiger Punkt. Weiterhin sei für jedes i , $i = 1, \dots, n$, $(x_i^{(l)})_{l=1}^\infty \subset \mathbb{R}^1$, $x_i^{(l)} \neq y_{0,i}$ für alle l , eine reelle Zahlenfolge mit $y_{0,i}$ als Häufungspunkt, und zwar derart, daß $(x_1^{(l_1)}, x_2^{(l_2)}, \dots, x_n^{(l_n)}) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ für alle $l_1 = 1, 2, \dots$; $l_2 = 1, 2, \dots$; ...; $l_n = 1, 2, \dots$ gilt. Die Punktfolge $(y_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ durchlaufe alle Punkte von

$$M = \{(x_1^{(l_1)}, \dots, x_n^{(l_n)}) : l_1 = 1, 2, \dots; \dots; l_n = 1, 2, \dots\}.$$

Dann braucht bezüglich α ebenfalls nicht summiert zu werden.

5. Es sei $y_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt die Aussage des Satzes mit

$$u_l(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} c_{\alpha}^{(l)} D^{\alpha} E(x - y_1).$$

Bemerkung 6. Den Approximationssatz kann man zur näherungsweise Lösung des Dirichlet-Problems benutzen, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Das Dirichlet-Problem

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega, \quad D^{\beta} u|_{\Gamma} = f_{\beta} \text{ für } |\beta| \leq m-1 \quad (5)$$

ist für beliebige $\{f_{\beta}\}_{|\beta| \leq m-1} \in W^{m-1}(\Gamma)$ eindeutig in $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ lösbar.

2. Es existiert eine Konstante $C < \infty$, so daß

$$\|u\|_{C^{m-1}(\Omega)} \leq C \cdot \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D^{\beta} u|_{\Gamma}\|_{C(\Gamma)}$$

für alle $u \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$ mit $Lu = 0$ in Ω gilt.

Ist dann $(u_l)_1^{\infty}$ eine das Element $\hat{f} = \{f_{\beta}\}_{|\beta| \leq m-1} \in W^{m-1}(\Gamma)$ approximierende Folge (entsprechend des Approximationssatzes), so gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u - u_l\|_{\Omega} = 0,$$

wenn u die exakte Lösung des Dirichlet-Problems (5) ist. Für alle Näherungslösungen u_l gilt dabei $Lu_l = 0$ in Ω . Für die praktische Durchführung ist es günstig, die Punkte y_k gleichmäßig um $\overline{\Omega}$ herum zu verteilen, weil dann Basisfunktionen zur Verfügung stehen, die „stärker voneinander linear unabhängig“ sind. Die Funktionen f_{β} könnte man z.B. mittels Interpolation annähern, wodurch für die Koeffizienten $c_{k,\alpha}^{(l)}$ ein lineares Gleichungssystem entsteht.

3 Literaturüberblick

Die vorliegenden Untersuchungen stehen in einem Zusammenhang zu den Approximationssätzen von H. BECKERT [3] sowie zu den Weiterentwicklungen von K. BEYER [4], A. GÖPFERT [7], U. HAMANN [10] und G. WILDENHAIN [19]. Dort wurden auf einer Fläche Γ vorgegebene Funktionen allerdings durch Lösungen von Randwertproblemen bezüglich eines Γ umfassenden Gebietes approximiert.

Für einige Randwertprobleme der Mathematischen Physik (auch für Differentialgleichungssysteme) wurden von K. BEYER [5], W. FREEDEN und R. REUTER [6], K. GÜRLEBECK

[8], P. HERMANN und H. KERSTEN [15], H. KERSTEN [16], W.D. KUPRADZE [17] und L. WENNEMAR [18] in ähnlicher Weise wie im vorherigen Abschnitt aus Fundamentallösungen vollständige Funktionensysteme konstruiert, die dann in einem Teil dieser Arbeiten auch zur näherungsweisen Lösung von Randwertproblemen herangezogen wurden.

Das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem stellt eine Synthese zwischen den von U. HAMANN in [11] und G. WILDENHAIN in [19, 20] einerseits sowie andererseits den von U. HAMANN in [12] untersuchten Fragestellungen dar. In [11], [19] und [20] geht es in erster Linie um die Approximation von Elementen aus $W^{m-1}(\Gamma)$ und in [12] um die Approximation mittels Linearkombinationen von Fundamentallösungen. Diese beiden Aspekte werden in der vorliegenden Arbeit vereinigt, wobei das Wesentliche darin besteht, daß der Rand Γ nicht glatt zu sein braucht.

4 Beweis des Satzes

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Lemma 1 *Es sei $r \geq 0$ eine ganze Zahl, $1 < p < \infty$ und Ω eine beliebige offene, beschränkte Menge mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Aus $\{g \in W_p^r(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subseteq \overline{\Omega}\} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ (Abschließung in der $W_p^r(\mathbb{R}^n)$ -Norm) folgt dann:*

(i) Für $u \in W_p^r(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } u \subseteq \overline{\Omega}$ ist $u|_\Omega \in \overset{\circ}{W}_p^r(\Omega)$.

(ii) $\{g \in W_p^r(\mathbb{R}^n) : \text{supp } g \subseteq \Gamma\} = \{0\}$.

Beweis. (i) Es sei $u \in W_p^r(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Funktion mit $\text{supp } u \subseteq \overline{\Omega}$. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz einer Folge $(\psi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ (ψ_l im ganzen $\mathbb{R}^n$ definiert, $\text{supp } \psi_l \subset \Omega$) mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u - \psi_l\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Aus $\psi_l|_\Omega \in C_0^\infty(\Omega)$ ($\psi_l|_\Omega \in C_0^\infty(\Omega)$ hier nur in Ω definiert) und $\|u|_\Omega - \psi_l|_\Omega\|_{W_p^r(\Omega)} \leq \|u - \psi_l\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)}$ ergibt sich $u|_\Omega \in \overset{\circ}{W}_p^r(\Omega)$.

(ii) Es sei $g \in W_p^r(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Funktion mit $\text{supp } g \subseteq \Gamma \subset \overline{\Omega}$. Laut Voraussetzung existiert eine Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|u - \varphi_l\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)} = 0. \quad (6)$$

Wegen $\text{supp } g \subseteq \Gamma$ und $\text{supp } \varphi_l \cap \Gamma = \emptyset$ ist

$$\begin{aligned} \|\varphi_l - g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi_l(x) - D^\alpha g(x)|^p dx \\ &\geq \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\Gamma} |D^\alpha \varphi_l(x) - D^\alpha g(x)|^p dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\Gamma} |D^\alpha g(x)|^p dx = \|g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

Mittels (6) folgt daraus $\|g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)} = 0$, also $g = 0$.

Wir führen jetzt noch einige Bezeichnungen ein.

Ist X ein normierter Raum, so wird mit X' sein Dualraum und mit $\langle F, f \rangle$ die Anwendung eines Funktional $F \in X'$ auf $f \in X$ bezeichnet. Für normierte Räume X, Y sei $L(X, Y)$ die Menge aller stetigen und linearen Operatoren von X in Y . Für $A \in L(X, Y)$ sei $A' \in L(Y', X')$ der duale Operator.

Der Beweis des Satzes beruht auf der nachstehenden Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach.

Lemma 2 *Es sei X ein normierter Raum, und X_0, X_1 seien lineare Teilmengen von X mit $X_0 \subset X_1$. Ist für jedes $T \in X'$ mit $\langle T, f_0 \rangle = 0$ für alle $f_0 \in X_0$ auch $\langle T, f_1 \rangle = 0$ für alle $f_1 \in X_1$, so gilt $\overline{X_0} \supseteq X_1$.*

Nun kommen wir zum Beweis des Satzes. Da sich dabei einige Parallelen zum Beweis des Satzes 1 in [12] ergeben, werden der Kürze halber nur jene Beweisschritte dargestellt, die sich von denen des Satzes 1 in [12] unterscheiden.

Der Beweis gliedert sich in vier Schritte.

1. Der Operator R_{m-1} sei für in einer Umgebung von Γ $(m-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen u durch

$$R_{m-1}u = \{D^\beta u|_\Gamma\}_{\beta \leq m-1}$$

definiert.

Es sei $T \in (W^{m-1}(\Gamma))'$ ein stetiges und lineares Funktional mit

$$\langle T(x), R_{m-1,x}(D^\alpha E(x - y_k)) \rangle = 0$$

Wir werden zeigen, daß für dieses T dann $\langle T, \dot{f} \rangle = 0$ für alle $\dot{f} \in W^{m-1}(\Gamma)$ gilt. Mittels Lemma 2 folgt daraus die Approximierbarkeit aller Elemente von $W^{m-1}(\Gamma)$ durch endliche Linearkombinationen von $D^\alpha E(x - y_k)|_{x \in \Gamma}$ ($k = 1, 2, \dots; |\alpha| \leq 2m - 1$).

2. $\overset{\circ}{C}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ sei die Abschließung von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in der Norm von $C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$R_{m-1} \in L(\overset{\circ}{C}^{m-1}(\mathbb{R}^n), W^{m-1}(\Gamma))$$

und

$$R'_{m-1} \in L((W^{m-1}(\Gamma))', (\overset{\circ}{C}^{m-1}(\mathbb{R}^n))').$$

$R'_{m-1}T$ liegt also in $(\overset{\circ}{C}^{m-1}(\mathbb{R}^n))'$. Wegen $\langle R'_{m-1}T, \psi \rangle = \langle T, R_{m-1}\psi \rangle = 0$ für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

mit $\psi \equiv 0$ in einer Umgebung von Γ ist $\text{supp } R'_{m-1}T \subseteq \Gamma$.

3. Durch Überlegungen, die mit denen in den Beweisschritten 4, 5, und 6 des Satzes 1 in [12] übereinstimmen (es braucht lediglich B durch R_{m-1} ersetzt zu werden), erhält man $R'_{m-1}T * E^* \in W_{p'}^m(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p' < \frac{n}{n-1}$ sowie $\text{supp}(R_{m-1}T * E^*) \subseteq \overline{\Omega}$ (* bezeichnet die Faltung).

4. Aus der Voraussetzung (b) folgt mittels Lemma 1(i) $(R'_{m-1}T * E^*)|_\Omega \in \overset{\circ}{W}_{p'}^m(\Omega)$. Weiterhin gilt wegen $\text{supp } R'_{m-1}T \subseteq \Gamma$ die Gleichung $L^*(R'_{m-1}T * E^*) = 0$ in Ω . Aus der Voraussetzung (a) erhält man $(R'_{m-1}T * E^*)|_\Omega = 0$. Somit ist $\text{supp}(R'_{m-1}T * E^*) \subseteq \Gamma$. Mittels Lemma 1(ii) kann daraus $R'_{m-1}T * E^* = 0$ im ganzen $\mathbb{R}^n$ gefolgert werden, woraus sich $L^*(R'_{m-1}T * E^*) = R'_{m-1}T = 0$ ergibt. Ist nun $\dot{f} \in W^{m-1}(\Gamma)$ ein beliebiges Whitney-Taylor-Feld, so existiert eine Funktion $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $R_{m-1}f = \dot{f}$. Aus $\langle T, \dot{f} \rangle = \langle T, R_{m-1}f \rangle = \langle R'_{m-1}T, f \rangle = 0$ folgt $T = 0$ und damit die Behauptung des Satzes.

Literatur

- [1] Бабушка, И.: Устойчивость областей определения по отношению к задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости. I, II Чех. мат. журнал **11**, (86), 76-105, 165-203 (1961)

- [2] **Bagby, T.** : *Approximation in the mean by solutions of elliptic equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **281**, 761–784 (1984)
- [3] **Beckert, H.** : *Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen.* Math. Ann. **139**, 255–264 (1960)
- [4] **Beyer, K.** : *Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme.* Rostock. Math. Kolloq. **26**, 27–34 (1984)
- [5] **Beyer, K.** : *Zur Approximation durch Multipolpotentiale der Laméschen Gleichungen.* Rostock. Math. Kolloq. **40**, 29–34 (1990)
- [6] **Freedden, W., and Reuter, R.** : *A constructive method for solving the displacement boundary-value problem of elastostatics by use of global basis systems.* Heidelberg Scientific Center TR **89.03.007** (1989)
- [7] **Göpfert, A.** : *Über L_2 -Approximationssätze – eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.* Math. Nachr. **31**, 1–24 (1966)
- [8] **Gürlebeck, K.** : *Über die optimale Interpolation verallgemeinert analytischer quaternionenwertiger Funktionen und ihre Anwendung zur näherungsweise Lösung wichtiger räumlicher Randwertaufgaben der Mathematischen Physik.* Dissertation, TH Karl-Marx-Stadt 1984
- [9] **Hamann, U.** : *Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung.* Dissertation B, Universität Rostock 1986
- [10] **Hamann, U.** : *Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme auf geschlossenen Hyperflächen.* Math. Nachr. **136**, 285–301 (1988)
- [11] **Hamann, U.** : *Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf nichtglatten Gebietsrändern.* Z. Anal. Anwendungen **9**, 213–220 (1990)
- [12] **Hamann, U.** : *Approximation mittels Linearkombinationen von Fundamentallösungen elliptischer Differentialoperatoren.* Math. Nachr. **154**, 265–284 (1991)
- [13] **Hedberg, L.I.** : *Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces.* Lecture Notes in Math. **779**, 73–103 (1980)
- [14] **Hedberg, L.I.** : *Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem.* Acta Math. **147**, 161–187 (1981)
- [15] **Hermann, P. und Kersten, H.** : *Die Lösung der Prae-Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe vollständiger Lösungssysteme.* Math. Methods Appl. Sci. **2**, 410–418 (1980)

- [14] **Hedberg, L.I.** : *Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem.* Acta Math. **147**, 161–187 (1981)
- [15] **Hermann, P. und Kersten, H.**: *Die Lösung der Prae-Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe vollständiger Lösungssysteme.* Math. Methods Appl. Sci. **2**, 410–418 (1980)
- [16] **Kersten, H.** : *Über die gleichmäßige Approximierbarkeit harmonischer Funktionen in regulären Gebieten einschließlich des Randes.* Dissertation, Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen 1977
- [17] **Купрадзе, В.Д.** : *Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.* Москва 1976
- [18] **Wennemar, L.** : *Die gleichmäßige Approximierbarkeit der Lösung des Dirichletschen Problems für die Prae-Maxwellschen Gleichungen – Theorie und numerische Anwendung.* Dissertation, Rhein.-Westf. Technische Hochschule Aachen 1988
- [19] **Wildenhain, G.** : *Approximation in Sobolev-Räumen durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung.* Rostock. Math. Kolloq. **22**, 43–56 (1983)
- [20] **Wildenhain, G.** : *Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order I.* Z. Anal. Anwendungen **2**, 511–521 (1983)
- [21] **Wildenhain, G.** : *Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order II.* Math. Nachr. **113**, 225–235 (1983)

eingegangen: 21. Februar 1991

Verfasser:

Prof. Dr. U. Hamann
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock
Universitätsplatz 1
O-2500 Rostock
Germany

ANKE HÄNLER

An error estimate for quadratic splines

In [1] MAESS proved an error estimate for quadratic splines with minimal total curvature using the Taylor-formula. In this paper we get an estimate for quadratic splines, which minimize the linear curvature functional

$$\int_a^b (p''(x))^2 dx. \quad (1)$$

We obtain the error estimate by the use of Peano-kernels (see [3]). With this technique we are able to prove the results by weaker assumptions.

Let be given an ordered set of knots $\{x_n\}$ and a set of corresponding values $\{f_n\}$ with

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad f_n := f(x_n), \quad n = 0(1)N.$$

By $p(x)$ we denote the interpolating quadratic spline

$$p(x) := p_n(x) \quad \text{for } x \in [x_{n-1}, x_n]$$

with

$$p_n(x_{n-1} + sh_n) := f_{n-1} + h_n b_{n-1} s + (\Delta f_n - b_{n-1}) h_n s^2, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (2)$$

Here we use the abbreviations

$$h_n := x_n - x_{n-1}, \quad \Delta f_n := \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}$$

and compute (as in [3]) the parameters b_n recursively by the formula

$$b_n = 2\Delta f_n - b_{n-1}, \quad n = 1(1)N - 1, \quad (3)$$

using the optimal (in the sense of minimal linearized total curvature) starting parameter

$$b_0 = \Delta f_1 - \frac{1}{a_1} \sum_{j=2}^N (-1)^j a_j (\Delta f_j - \Delta f_{j-1}), \quad a_j = \sum_{n=j}^N \frac{1}{h_n}. \quad (4)$$

By

$$r_n(x) := p_n(x) - f(x), \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad (5)$$

we denote the error function. Then for a sufficiently smooth function f it holds (see [1])

$$r_n(x) = h_n s(1-s)(b_{n-1} - f'_{n-1}) + \frac{h_n^2}{2} s^2 (f''(\eta_n) - f''(\xi_n)) \quad (6)$$

with $\eta_n, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$. In the following we use the functional

$$R^{(N)}f := b_0 - f'_0. \quad (7)$$

Obviously $R^{(N)}f$ is linear since

$$R^{(N)}(\alpha f + \beta g) = \alpha R^{(N)}f + \beta R^{(N)}g, \quad \alpha, \beta \in R,$$

as we see easily.

Lemma 1 *Suppose $N \in \mathbb{N}$ is even. Then it holds $R^{(N)}f = 0$ for all $f \in IP_2$ and for any partition of $[a, b]$. Here IP_2 denotes the space of all quadratic polynomials.*

Proof. Obviously it holds $R^{(N)}f = 0$ for $f(x) = x$ and $f(x) = 1$. Because $R^{(N)}$ is a linear functional, we only have to show $R^{(N)}f = 0$ for $f(x) = x^2$. It holds

$$\begin{aligned} \Delta f_j - \Delta f_{j-1} &= \frac{x_j^2 - x_{j-1}^2}{h_j} - \frac{x_{j-1}^2 - x_{j-2}^2}{h_{j-1}} \\ &= x_j + x_{j-1} - x_{j-1} - x_{j-2} = h_{j-1} + h_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Together with (4) we obtain

$$b_0 = \Delta f_1 - \frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^N \frac{1}{h_k} \sum_{j=2}^k (-1)^j (h_j + h_{j-1}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta f_1 - \frac{1}{a_1} \left(\sum_{k=2}^N \frac{h_1}{h_k} + \sum_{k=2}^N (-1)^k \right) \\ &= \Delta f_1 - \frac{h_1}{a_1} a_1 = x_0 + x_1 - (x_1 - x_0) = 2x_0 = f'_0. \end{aligned} \quad (10)$$

■

Now we show that in Lemma 1 the condition 'N is even' is necessary.

Lemma 2 *Assuming $R^{(N)}p = 0$ for all $p \in IP_2$ and any partition of $[a, b]$, then $N \in \mathbb{N}$ is even.*

Proof. We assume that $N = 2k + 1$ is an odd integer. Then we show that there is a function $p \in \mathcal{P}_2$ and a partition of $[a, b]$ with $R^{(N)}p \neq 0$. For this purpose we take $p(x) = x^2$ and $h_i = \frac{b-a}{N}$ for all $i = 1(1)N$. Together with (9) we obtain

$$\begin{aligned} b_0 &= x_0 + x_1 - \frac{h_1 a_2}{a_1} = x_0 + x_1 - \frac{h_1}{a_1} \left(a_1 - \frac{1}{h_1} \right) \\ &= 2x_0 + \frac{1}{a_1} \neq f'_0. \end{aligned}$$

■

Now we prove the following

Theorem 1 *Let $f \in W_1^3[a, b] \cap C^{2,\alpha}[a, b]$, and N even. Then it holds $|r_n(x)| \leq Ch^{1+\alpha}$, where h denotes the maximal steplength.*

Proof. Because of Lemma 1 and Peanos Theorem (see [3] p.25 theorem 43) we get

$$R^{(N)}f = \int_a^b f^{(3)}(t)K(t)dt \quad \text{for} \quad t \neq x_i \quad (11)$$

where

$$K(t) = R^{(N)} \left(\frac{(s-t)_+^2}{2} \right).$$

Because of the formula (4) it holds

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{a_1} \left((-1)^n (a_n q_n(t) - a_{n+1} p_{n+1}(t)) + \sum_{j=n+2}^N (-1)^j a_j \bar{h}_j \right) & : x_{n-1} < t < x_n, n < N \\ -\frac{1}{a_1} (-1)^N a_N q_N(t) & : x_{N-1} < t < x_N \end{cases} \quad (12)$$

with

$$\begin{aligned} \bar{h}_j &:= \frac{h_j + h_{j-1}}{2}, \\ \bar{x}_{n+1} &:= \frac{x_{n+1} + x_n}{2}, \\ q_n(t) &:= \frac{(x_n - t)^2}{2h_n}, \\ p_{n+1}(t) &:= \bar{x}_{n+1} - t - q_n(t) \end{aligned}$$

1. Let $x_{n-1} < t < x_n$, $n < N$.

Then we can estimate the Peano-kernel by

$$|K(t)| \leq \frac{h_n}{2} + \frac{h_n + h_{n+1}}{2} + \frac{h_{n+1} + h_n}{2} \leq \frac{5}{2}h. \quad (13)$$

2. Finally let $x_{N-1} < t < x_N$.

Then we have

$$|K(t)| \leq \frac{h}{2}. \quad (14)$$

From (13),(14) together with (11) we can derive

$$|b_0 - f'_0| = |R^{(N)}f| = |K(\xi)| \int_a^b |f^{(3)}(t)| dt \leq \frac{5}{2} \|f^{(3)}\|_{L_1} h. \quad (15)$$

In [1] it was shown that

$$|b_n - f'_n| \leq |b_{n-1} - f'_{n-1}| + \frac{1}{2} h_n |f''(\eta_n) - f''(\xi_n)|. \quad (16)$$

Consequently, (16) together with (15) leads to

$$\begin{aligned} |b_n - f'_n| &\leq \frac{5}{2} \|f^{(3)}\|_{L_1} h + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n h_i^{1+\alpha} \\ &\leq \left(\frac{5}{2} \|f^{(3)}\|_{L_1} h^{1-\alpha} + \frac{L}{2} (b-a) \right) h^\alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

where L denotes the Hölder-constant. Together with (6) we finally get

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{4} |b_{n-1} - f'_{n-1}| h_n + \frac{L}{2} h_n^{2+\alpha} \leq C h^{1+\alpha} + \mathcal{O}(h^{2+\alpha}) \quad (18)$$

with

$$C = \frac{5}{8} \|f^{(3)}\|_{L_1} + \frac{L}{8} (b-a). \quad (19)$$

■

Remark. The assumption 'N is even' is only for technical reasons. The same result can easily be shown for odd N .

Basic Ideas of the Proof. Suppose $N \in \mathbb{N}$ is even and

$$\Omega_{N+1} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$$

any partition. Consequently,

$$\Omega_N : a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_N = b$$

with $\tilde{x}_0 = x_0$ and $\tilde{x}_n = x_{n+1}$ for $n \geq 1$ is the partition, which was considered before.

Let $\tilde{b}_0$ and b_0 the starting parameter with respect to Ω_N and Ω_{N+1} . We have to show $|b_0 - \tilde{b}_0| \leq C h^\alpha$ for all $f \in C^{2,\alpha} \cap W_1^3$. Since (4) and $\Delta f_{n+1} = \Delta f_n$ for all $n \geq 2$ we get

$$\begin{aligned} b_0 - \tilde{b}_0 &= \Delta f_1 - \tilde{\Delta f}_1 - \frac{1}{a_1} (a_2(\Delta f_2 - \Delta f_1) - a_3(\Delta f_3 - \Delta f_2)) + \frac{1}{\tilde{a}_1} \tilde{a}_2(\tilde{\Delta f}_2 - \tilde{\Delta f}_1) \\ &\quad + \frac{1}{a_1} \sum_{n=3}^N (-1)^n (\tilde{\Delta f}_n - \Delta \tilde{f}_{n-1})(a_{n+1} - \tilde{a}_n) + \left(\frac{1}{\tilde{a}_1} + \frac{1}{a_1} \right) \sum_{n=3}^N (-1)^n \tilde{a}_i (\tilde{\Delta f}_n - \Delta \tilde{f}_{n-1}). \end{aligned}$$

We have $a_{n+1} = \tilde{a}_n$ for $n \geq 2$ and $\frac{a_i}{a_1}, \frac{\tilde{a}_i}{a_1}, \frac{\tilde{a}_i}{a_1} \leq 1$. Furthermore we know from [1]

$$\left| \sum_{n=3}^N (-1)^n (\Delta \tilde{f}_n - \Delta \tilde{f}_{n-1}) \right| \leq (M_2 + \frac{3}{2}(b-a)L)h^\alpha$$

where $M_2 := \|f''\|_\infty$. Using these facts the remark is shown.

References

- [1] **Maeß, G.** : *An error estimation for quadratic splines with minimal curvature.*
Rostock. Math. Kolloq. **35**, 57–60 (1988)
- [2] **Sard, A.** : *Linear Approximation.* Providence 1963
- [3] **Maeß, G.** : *Smooth interpolation of curves and surfaces by quadratic splines with minimal curvature.* In: **Sendov, B., Lazarov, R., and Vasilevski, P.** (eds.): *Proc. Internat. Conf. Numer. Math. Appl.*, pp. 75–81, Sofia 1985

received: March 30, 1992

Author:

Dipl.-Math. Anke Hänler
 Universität Rostock
 FB Mathematik
 Universitätsplatz 1
 O-2500 Rostock
 Germany

GERLIND PLONKA

Nonperiodic Hermite-Spline-Interpolation

Abstract Nonperiodic Hermite-spline interpolants on an equidistant lattice $\mathcal{L} := \{0, 1, \dots, N\}$ are represented in the form of vectorial Bézier polynomials. New explicit formulas of the vectorial Bézier coefficients for Hermite-splines of degree m ($2 \leq m \leq 5$) and defect r ($2 \leq r \leq m$) are given. Especially, these formulas are very simple in the cases $2r \leq m + 1$. Further we obtain an efficient algorithm for the nonperiodic Hermite-spline interpolation based on the de Casteljau algorithm. The described method of nonperiodic Hermite-spline interpolation requires only $O(N)$ arithmetical operations.

0 Introduction

Recently we have described an efficient algorithm for the periodic Hermite-spline interpolation [5]. Using circulant matrices and Bézier technique, new explicit formulas of the vectorial Bézier coefficients for the periodic Hermite-spline interpolants could be given. Now we consider the nonperiodic Hermite-spline interpolation on the equidistant lattice $\mathcal{L} := \{0, 1, \dots, N\}$ of the interval $[0, N]$ for a fixed integer $N \geq 1$. An efficient algorithm of this problem has been unknown up to now.

Similar to REIMER [6] we prefer a real-algebraic method for the nonperiodic Hermite-spline interpolation. Beginning with an idea of MEINARDUS and MERZ [4], the nonperiodic splines are represented in a transparent form as polynomial vectors defined on $[0, 1]$. Applying the Bézier technique we obtain a new algorithm for the nonperiodic Hermite-spline interpolation. Our method is based on the de Casteljau-algorithm, works parallel, is numerically stabil [2] and possesses a low arithmetical complexity.

1 Hermite-spline interpolation on an equidistant lattice

Let $N, m \in \mathbb{N}$ ($N, m \geq 1$) and $r \in \{2, \dots, m\}$ be fixed. Further let $\mathcal{L} := \{0, 1, \dots, N\}$ and

$$I_k := \begin{cases} [0, 1) & \text{for } k = 0, \dots, N - 2, \\ [0, 1] & \text{for } k = N - 1. \end{cases}$$

We denote by $S_{m,r}(\mathbb{L})$ the linear space of all real functions $s \in C^{m-r}([0, N])$ with

$$p_k(t) := s(k+t) \quad (t \in I_k; k = 0, \dots, N-1),$$

where p_k ($k = 0, \dots, N-1$) are real polynomials of degree $\leq m$. The elements of $S_{m,r}(\mathbb{L})$ are called (nonperiodic) polynomial spline functions of degree m and defect r on the equidistant lattice $\mathbb{L}$. Note that

$$\dim S_{m,r}(\mathbb{L}) = (m+1) + (N-1)r.$$

Let $\mathcal{P}_m$ denote the set of all real polynomials of degree $\leq m$ restricted on $[0, 1]$. Obviously, a spline $s \in S_{m,r}(\mathbb{L})$ can be characterized by the polynomial vector $\mathbf{p} := (p_0, \dots, p_{N-1})^T \in \mathcal{P}_m^N$ with the spline-conditions

$$p_k^{(j)}(1) = p_{k+1}^{(j)}(0) \quad (k = 0, \dots, N-2; j = 0, \dots, m-r). \quad (1)$$

In the following we set $l := \min(r-1, m-r)$.

We consider the nonperiodic Hermite-spline interpolation problem: For given data $y_0^{(j)} \in \mathbb{R}$ ($j = 0, \dots, l$) and $y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, N; j = 0, \dots, r-1$) we wish to find a splinefunction $s \in S_{m,r}(\mathbb{L})$ satisfying the Hermite-interpolation conditions

$$\begin{aligned} s^{(j)}(k+0) &= y_k^{(j)} & (k = 0, \dots, N-1; j = 0, \dots, l), \\ s^{(j)}(k-0) &= y_k^{(j)} & (k = 1, \dots, N; j = 0, \dots, r-1). \end{aligned} \quad (2)$$

This Hermite-interpolation problem can be simplified. Setting $\mathbf{y}_1^{(j)} := (y_0^{(j)}, \dots, y_{N-1}^{(j)})^T \in \mathbb{R}^N$ ($j = 0, \dots, l$) and $\mathbf{y}_2^{(j)} := (y_1^{(j)}, \dots, y_N^{(j)})^T \in \mathbb{R}^N$ ($j = 0, \dots, r-1$), the Hermite-interpolation problem is equivalent to the computing of a polynomial vector $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m^N$ such that the spline-conditions (1) and the Hermite-interpolation conditions (2), i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(j)}(0+0) &= \mathbf{p}^{(j)}(0) = \mathbf{y}_1^{(j)} & (j = 0, \dots, l), \\ \mathbf{p}^{(j)}(1-0) &= \mathbf{p}^{(j)}(1) = \mathbf{y}_2^{(j)} & (j = 0, \dots, r-1), \end{aligned} \quad (3)$$

are satisfied.

Remark Often the above Hermite-spline interpolation problem was considered under the assumption $2r \leq m+1$. In the case $2r \geq m$, one cannot prescribe r Hermite-data at all nodes. Therefore by (2) in the case $2r \geq m+1$, we have $m-r+1$ one-sided Hermite-data

at the left endpoints of all subintervals and r one-sided Hermite-data at the right endpoints. This generalized Hermite-spline interpolation problem was considered firstly by REIMER [7] for periodic splines.

Representation by Bezier polynomials:

Every $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_m^N$ can be expressed in the form

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^m \mathbf{a}_i B_i^m \quad (4)$$

with the Bernstein polynomials (with respect to $[0, 1]$)

$$B_i^m(t) := \binom{m}{i} (1-t)^{m-i} t^i \quad (i = 0, \dots, m; t \in [0, 1])$$

and with vectors $\mathbf{a}_i = (a_{0i}, \dots, a_{N-1,i})^T \in \mathbb{R}^N$. The representation (4) is called a Bézier polynomial of degree m with respect to $[0, 1]$. The vectors $\mathbf{a}_i$ are the Bézier coefficients of $\mathbf{p}$ (see for instance [1, pp. 33 - 40]). From (4) it follows that the j -th derivative of $\mathbf{p}$ is given by

$$\mathbf{p}^{(j)} = \frac{m!}{(m-j)!} \sum_{i=0}^{m-j} (\Delta^j \mathbf{a}_i) B_i^{m-j} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (5)$$

with the j -th differences

$$\Delta^j \mathbf{a}_i := \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \mathbf{a}_{i+k} \quad (i = 0, \dots, m-j). \quad (6)$$

We arrange that $\Delta^j \mathbf{a}_i = (\Delta^j a_{0i}, \dots, \Delta^j a_{N-1,i})^T$. As an immediate consequence of (5) we obtain that

$$\mathbf{p}^{(j)}(0) = \frac{m!}{(m-j)!} \Delta^j \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{p}^{(j)}(1) = \frac{m!}{(m-j)!} \Delta^j \mathbf{a}_{m-j}. \quad (7)$$

By (7) it follows from the Hermite-interpolation conditions (3)

$$\begin{aligned} \Delta^j \mathbf{a}_0 &= \frac{(m-j)!}{m!} \mathbf{y}_1^{(j)} & (j = 0, \dots, l), \\ \Delta^j \mathbf{a}_{m-j} &= \frac{(m-j)!}{m!} \mathbf{y}_2^{(j)} & (j = 0, \dots, r-1). \end{aligned}$$

Hence we get by (6)

$$\sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \mathbf{a}_k = \frac{(m-j)!}{m!} \mathbf{y}_1^{(j)} \quad (j = 0, \dots, l), \quad (8)$$

$$\sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \mathbf{a}_{m-k} = \frac{(m-j)!}{m!} \mathbf{y}_2^{(j)} \quad (j = 0, \dots, r-1). \quad (9)$$

Since the inverse of the triangular matrix $((-1)^{j-k} \binom{j}{k})_{j,k=0}^l$ is equal to the triangular matrix $(\binom{k}{j})_{k,j=0}^l$, the system (8) possesses the solution

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=0}^k \frac{(m-j)!}{m!} \binom{k}{j} \mathbf{y}_1^{(j)} \quad (k = 0, \dots, l). \quad (10)$$

Analogously, the system (9) has the solution

$$\mathbf{a}_{m-k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(m-j)!}{m!} \binom{k}{j} \mathbf{y}_2^{(j)} \quad (k = 0, \dots, r-1). \quad (11)$$

Then in the case $2r \geq m+1$, i.e. $l = m-r \leq r-1$, the spline-conditions (11) are satisfied by

$$p_{k+1}^{(j)}(0) = s^{(j)}(k+1+0) = y_{k+1}^{(j)} = s^{(j)}(k+1-0) = p_k^{(j)}(1) \quad (12)$$

$$(k = 0, \dots, N-2; j = 0, \dots, l).$$

Further all vectors $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{m-r}, \mathbf{a}_{m-r+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ are uniquely determined by (10) and (11). Hence the considered Hermite-spline interpolation problem is uniquely solvable.

If $2r \leq m$, i.e. $l = r-1 < m-r$, then $2r$ vectors $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{r-1}, \mathbf{a}_{m-r+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ are determined by (10) and (11) and it holds again (12). Thus it remains the condition

$$p_{k+1}^{(j)}(0) = p_k^{(j)}(1) \quad (k = 0, \dots, N-2; j = r, \dots, m-r) \quad (13)$$

by (1). Substituting the known vectors (10) – (11) into (13), the system (13) can be reduced. For the unknown vectors $\mathbf{a}_r, \dots, \mathbf{a}_{m-r}$ with $N(m-2r+1)$ components we have only $(N-1)(m-2r+1)$ conditions (13). Thus we can demand $m-2r+1$ additional conditions. First we consider the case $2r \geq m+1$. For practical reasons we assume that $m \leq 5$. We summarize our results:

Theorem 1 *Let $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 1$), $m \in \{2, 3, 4, 5\}$ and $r \in \{2, \dots, m\}$ with $2r \geq m+1$ be given. The nonperiodic Hermite-spline interpolation problem on the equidistant lattice $\mathbb{L}$ possesses a unique solution $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_m^N$ of the form (4). The Bézier coefficients of $\mathbf{p}$ are given by (10) and (11).*

2 The case $(m, r) = (4, 2)$

Assume that $(m, r) = (4, 2)$. By $m - 2r + 1 = 1$ we have to require one additional condition for the uniqueness of the nonperiodic Hermite-interpolation problem. Let $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$). For given $\tau \in I_l$ ($0 \leq l \leq N - 1$) and $\eta, \eta', \eta'' \in \mathbb{R}$, we consider pointwise additional conditions of following types for the nonperiodic Hermite-spline interpolation problem:

- (i) $p_l(\tau) = \eta$ with $\tau \neq 0, 1$,
- (ii) $p'_l(\tau) = \eta'$ with $\tau \neq 0, \frac{1}{2}, 1$,
- (iii) $p''_l(\tau) = \eta''$ with $\tau \neq \frac{1}{2} \pm 3^{-1/2}$,

where $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{N-1})^T \in \mathbb{P}_4^N$ denotes a Hermite-spline interpolant. We obtain the following

Theorem 2 *Let $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$), $(m, r) = (4, 2)$ and $\tau \in I_l$ ($0 \leq l \leq N - 1$). If one condition of above type (i) – (iii) is satisfied, then the nonperiodic Hermite-spline interpolation problem on the equidistant lattice $\mathbb{L}$ possesses a unique solution $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_4^N$ of the form (4). The Bézier coefficients of $\mathbf{p}$ are given by*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{y}_1^{(0)}, & \mathbf{a}_1 &= \mathbf{y}_1^{(0)} + \frac{1}{4}\mathbf{y}_1^{(1)}, \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{y}_2^{(0)} - \frac{1}{4}\mathbf{y}_2^{(1)}, & \mathbf{a}_4 &= \mathbf{y}_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (14)$$

and by $\mathbf{a}_2 = (a_{02}, \dots, a_{N-1,2})^T$ with

$$a_{k2} = \begin{cases} a_{k+1,2} - y_{k+1}^{(1)} & \text{for } k = l - 1 \text{ down to } 0, \text{ if } l \geq 0, \\ a_{k-1,2} + y_k^{(1)} & \text{for } k = l + 1, \dots, N - 1, \text{ if } l \leq N - 1. \end{cases} \quad (15)$$

Hereby a_{l2} is given by

$$a_{l2} = \begin{cases} (\eta - \beta)/(6\tau^2(1 - \tau)^2) & \text{in the case (i),} \\ (\eta'/4 - \beta')/(3\tau(1 - \tau)(1 - 2\tau)) & \text{in the case (ii),} \\ (\eta''/12 - \beta'')/(6\tau^2 - 6\tau + 1) & \text{in the case (iii),} \end{cases} \quad (16)$$

where

$$\beta := \sum_{j=0}^4 b_{lj} B_j^4(\tau)$$

with $b_{lj} := a_{lj}$ ($j = 0, 1, 3, 4$), $b_{l2} := 0$,

$$\beta' := \sum_{j=0}^3 b'_{lj} B_j^3(\tau)$$

with $b'_{l0} := y_l^{(1)}/4$, $b'_{l1} := -a_{l1}$, $b'_{l2} := a_{l3}$, $b'_{l3} := y_{l+1}^{(1)}/4$, and

$$\beta'' := \sum_{j=0}^2 b''_{lj} B_j^2(\tau)$$

with $b''_{l0} := -y_l^{(0)} - y_l^{(1)}/2$, $b''_{l1} := y_l^{(0)} + y_{l+1}^{(0)} + (y_l^{(1)} - y_{l+1}^{(1)})/4$, $b''_{l2} := -y_{l+1}^{(0)} + y_{l+1}^{(1)}/2$.

Proof By (10) – (11) we obtain (14). From (13) it follows

$$p_k''(1) = p_{k+1}''(0) \quad (k = 0, \dots, N-2),$$

i.e., by (7)

$$\Delta^2 a_{k2} = \Delta^2 a_{k+1,0} \quad (k = 0, \dots, N-2),$$

where the difference operator Δ acts on the second index. Since (14) yields

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_{k2} &= a_{k2} - 2(y_{k+1}^{(0)} - y_{k+1}^{(1)}/4) + y_{k+1}^{(0)}, \\ \Delta^2 a_{k+1,0} &= y_{k+1}^{(0)} - 2(y_{k+1}^{(0)} + y_{k+1}^{(1)}/4) + a_{k+1,2}, \end{aligned}$$

we obtain the recurrence

$$a_{k+1,2} = a_{k2} + y_{k+1}^{(1)} \quad (k = 0, \dots, N-2).$$

If a_{l2} is known, then the others a_{k2} can be calculated recursively by the above recurrence. The computation of a_{l2} is now straightforward. We sketch this only in the case (iii). Then we obtain by (5) and (14)

$$\begin{aligned} \eta''/12 &= \Delta^2 a_{l0} B_0^2(\tau) + \Delta^2 a_{l1} B_1^2(\tau) + \Delta^2 a_{l2} B_2^2(\tau) \\ &= \beta'' + a_{l2}(6\tau^2 - 6\tau + 1). \end{aligned}$$

Since $\tau \neq 1/2 \pm 3^{-1/2}$, a_{l2} is uniquely determined. ■

Finally we discuss the nonperiodic Hermite-interpolation problem for $(m, r) = (4, 2)$ under an additional smoothing condition. For given $\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)} \in \mathbb{R}$ we seek such a polynomial vector $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_4^N$ satisfying the properties (1), (3) and the smoothing condition

$$(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'') = \inf(\mathbf{q}'', \mathbf{q}''), \quad (17)$$

where the infimum is taken over all $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_4^N$ with satisfied conditions (1) and (3). By $(\mathbf{q}'', \mathbf{q}'')$ we denote

$$(\mathbf{q}'', \mathbf{q}'') := \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 q_j''(t)^2 dt$$

for $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_{N-1})^T \in \mathbb{P}_4^N$.

Theorem 3 *Let $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$) and $(m, r) = (4, 2)$. Under the smoothing condition (17), the nonperiodic Hermite-interpolation problem on the equidistant lattice $\mathbb{L}$ possesses a unique solution $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_4^N$ of the form (4). The Bézier coefficients of $\mathbf{p}$ are given by (13) and*

$$a_{k2} = a_{k-1,2} + y_k^{(1)} \quad (k = 1, \dots, N-1) \quad (18)$$

with

$$a_{02} = \frac{1}{2N}(y_0^{(0)} + y_N^{(0)}) + \frac{1}{6N}(y_0^{(1)} - y_N^{(1)}) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (y_i^{(0)} - (N-i)y_i^{(1)}). \quad (19)$$

3 The case $(m, r) = (5, 2)$

Assume that $(m, r) = (5, 2)$. By $m - 2r + 1 = 2$ we have to require two additional conditions for the uniqueness of the nonperiodic Hermite-interpolation problem. Let $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$). For the sake of simplicity, we choose as additional conditions

$$p_0''(0) = p_{N-1}''(1) = 0, \quad (20)$$

where $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{N-1})^T \in \mathbb{P}_5^N$ denotes a Hermite-spline interpolant.

Remark Other possibilities for such additional conditions are $p_0''(0) = y_0^{(2)}$, $p_{N-1}''(1) = y_N^{(2)}$ with given $y_0^{(2)}, y_N^{(2)} \in \mathbb{R}$ or $p_0^{(3)}(0) = p_{N-1}^{(3)}(1) = 0$.

Theorem 4 *Let $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq 2$) and $(m, r) = (5, 2)$. If the condition (20) is satisfied, then the nonperiodic Hermite-spline interpolation problem on the equidistant lattice $\mathbb{L}$ possesses a unique solution $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_5^N$ of the form (4). The Bézier coefficients of $\mathbf{p}$ are given by*

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1^{(0)}, & a_1 &= y_1^{(0)} + \frac{y_1^{(1)}}{5}, \\ a_4 &= y_2^{(0)} - \frac{y_2^{(1)}}{5}, & a_5 &= y_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (21)$$

and by $\mathbf{a}_j = (a_{0j}, \dots, a_{N-1,j})^T$ ($j = 2, 3$) with

$$a_{k3} = \begin{cases} a_k & \text{for } k = 0, \dots, N-2, \\ y_N^{(0)} - 2y_N^{(1)}/5 & \text{for } k = N-1, \end{cases} \quad (22)$$

$$a_{k2} = \begin{cases} y_0^{(0)} + 2y_0^{(1)}/5 & \text{for } k = 0, \\ a_{k-1,3} + 4y_k^{(1)}/5 & \text{for } k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (23)$$

The coefficients a_k ($k = 0, \dots, N-2$) are the solutions of the difference equation

$$a_{k-1} - 6a_k + a_{k+1} = f_k \quad (k = 0, \dots, N-2) \quad (24)$$

with $a_{-1} = a_{N-1} := 0$ and

$$f_k = \begin{cases} -4y_1^{(0)} + 12y_1^{(1)}/5 - y_0^{(0)} - 2y_0^{(1)}/5 & \text{for } k = 0, \\ -4y_{N-1}^{(0)} + 12y_{k+1}^{(1)}/5 - 4y_k^{(1)}/5 & \text{for } k = 1, \dots, N-3, \\ -4y_{N-1}^{(0)} + 12y_{N-1}^{(1)}/5 - 4y_{N-2}^{(1)}/5 - y_N^{(0)} + 2y_N^{(1)}/5 & \text{for } k = N-2. \end{cases} \quad (25)$$

Remark Using the results of the Theorems 1 – 4 and the de Casteljau algorithm we obtain an efficient algorithm for the computation of nonperiodic Hermite-spline interpolants on an equidistant lattice. In the case $(m, r) = (4, 2)$ at least $2N + 6$ real multiplications and $3N + 2$ real additions for the computation of the coefficients $a_0, \dots, a_4$ are required. In the case $(m, r) = (5, 2)$ we have to solve the tridiagonal system (24) which requires only $5N - 9$ real multiplications and $4N - 8$ real additions (cf.[3]). Finally the de Casteljau algorithm incurs $m(m+1)N$ real multiplications and $m(m+1)N/2$ real additions. Note that our procedure can be extended to a nonequidistant lattice too.

Our numerical tests have shown that the Hermite-spline interpolants oscillate very often in the case $(m, r) = (5, 2)$. Moreover, changing the additional conditions (20) and considering $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_5^N$ under the smoothing condition (17) (but with $m = 5$) and $p_0''(0) = 0$, the Hermite-spline oscillates too. For that reason, quintic C^3 -splines are not convenient for the Hermite-interpolation.

In figures 1 and 2 one can see two examples of nonperiodic Hermite-splines satisfying the Hermite-interpolation conditions (2) for $r = 2$ and

$$y_k^{(j)} := f^{(j)}(k) \quad (k = 0, \dots, N; j = 0, 1) \quad (26)$$

with $f(x) := \cos(4\pi x/N)/(1 + 12x/N)$ ($x \in [0, N]$). We obtain good approximation results (without oscillating effects) in the cases $(m, r) = (3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, and also for $(m, r) = (4, 2)$ with the smoothing condition (17).

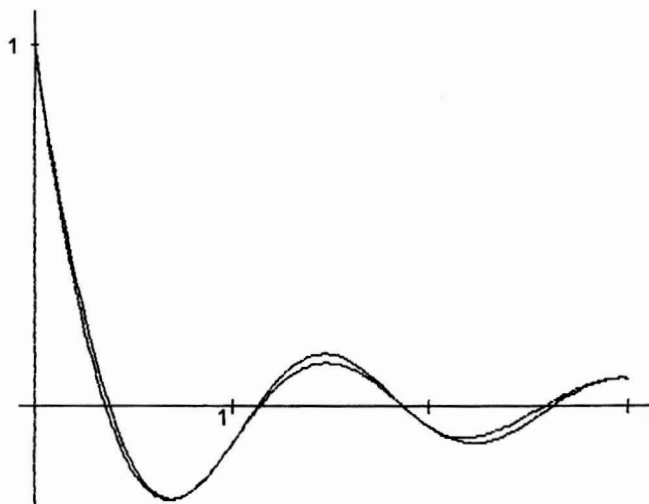


Figure 1 Nonperiodic Hermite-spline interpolation in the case $N = 3$ and $(m, r) = (3, 2)$

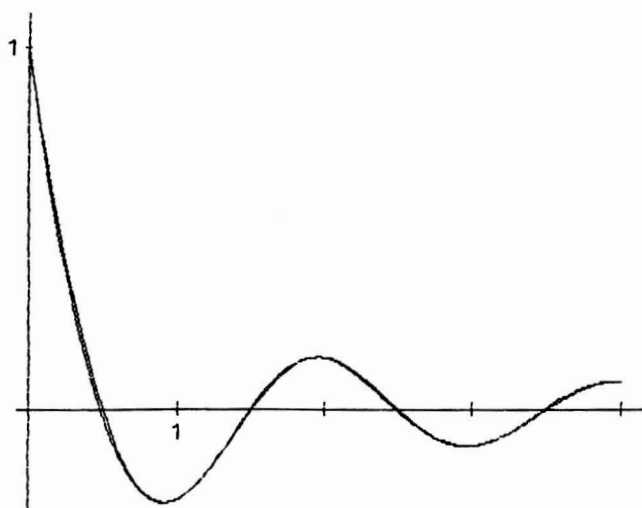


Figure 2 Nonperiodic Hermite-spline interpolation in the case $N = 4$ and $(m, r) = (4, 2)$ with smoothing condition (17)

References

- [1] **Farin, G.** : *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*. Boston 1988
- [2] **Farouki, R.T., and Rajan, V.T.** : *On the numerical condition of polynomials in Bernstein form*. *Comput. Aided Geom. Design* **4**, 191–216 (1987)
- [3] **Maeß, G.** : *Vorlesungen über numerische Mathematik I*. Berlin 1984
- [4] **Meinardus, G., und Merz, G.**: *Zur periodischen Spline-Interpolation*. In: Böhmer, K., Meinardus, G., und Schempp, W. (Hrsg.): *Spline-Funktionen*, pp. 177 – 195. Mannheim 1974
- [5] **Plonka, G., and Tasche, M.** : *Efficient algorithms for the periodic Hermite-spline interpolation*. *Math. Comp.* **58**, 693–703 (1992)
- [6] **Reimer, M.** : *Cardinal Hermite-spline-interpolation on the equidistant lattice*. *Numer. Math.* **56**, 345 – 357 (1989)
- [7] **Reimer, M.** : *Zur reellen Darstellung periodischer Hermite-Spline-Interpolierender bei äquidistantem Gitter mit Knotenshift*. In: Schmidt, J.W., and Späth, H. (eds.): *Splines in Numerical Analysis*, pp. 125 – 134. Berlin 1989

received: May 5, 1991

Author:

Dr. G. Plonka
 Universität Rostock
 Fachbereich Mathematik
 Universitätsplatz 1
 O- 2500 Rostock
 Germany

Динь Хоанг Ань

Интегральные операторы типа Абеля и их связь с сингулярным оператором

В настоящей работе рассматриваются такие интегральные операторы:

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x-t)) f(t) dt, \quad (1)$$

$$(I_{-}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(x) = \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t-x)) f(t) dt, \quad (2)$$

$$(A_{0+}^{\alpha, \lambda} f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{J}_{(\alpha-1)/2}(\lambda(x-t)) f(t) dt, \quad (3)$$

$$(A_{-}^{\alpha, \lambda} f)(x) = \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{J}_{(\alpha-1)/2}(\lambda(t-x)) f(t) dt, \quad (4)$$

где $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Операторы (1), (3) часто называют левосторонними, а (2), (4) - правосторонними операторами. Каждый из перечисленных операторов обобщает соответствующий интегральный оператор Лиувилля-Риманна дробного порядка:

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (5)$$

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) = \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (6)$$

В монографии ([1], §37) операторы такого типа, как (1)-(4) были рассмотрены достаточно подробно, но с интегралами по отрезкам (a, x) и (x, b) при $-\infty < a < x < b < +\infty$. Там были установлены разных видов операторные формулы, описаны образы пространства $L_p(0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, при действии этих операторов и решены вопросы об обратных операторах. Тем не менее случай $b = +\infty$ не рассматривался.

Настоящая работа посвящена изучению операторов (1)-(4) в пространстве $L_p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$, и установлению формул связи каждой из двух этих пар операторов с сингулярным оператором S . Такого рода формулы S - связи между интегральными операторами дробного порядка были приведены и исследованы в ([1], §11). Они, как и приведенные ниже формулы дают возможность выявить новые классы интегральных уравнений, которые сводятся к полным сингулярным уравнениям, что имеет методологию конкретного изучения ([1], §30, [2], §54).

Введем следующие определения функций, операторов и пространств:

1. ${}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\beta)_n n!}$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.
2. $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{(\nu+1)_n n!}$.
3. $D_{0+}^\alpha = I_{0+}^{-\alpha}$, $D_-^\alpha = I_-^\alpha$, $Re\alpha > 0$ - операторы дробных производных Маршо, которые определяются в ([1], §13), причем $D_{0+}^0 = D_-^0 = E$, где E является тождественным оператором.
4. S - сингулярный оператор: $(Sf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t-x} dt$, $0 < x < \infty$.
5. $L_{p,\omega} = \left\{ f(x) : \int_0^\infty |f(x)|^p e^{\omega x} dx < \infty \right\}$.
6. $H(L_{p,\omega})$ - образ пространства $L_{p,\omega}$ при действии линейного оператора H , причем $\|\varphi\|_{H(L_{p,\omega})} = \|H^{-1}\varphi\|_{L_{p,\omega}}$.

Известно из ([1], §11), что при $0 < Re\alpha < 1/p$ пространства $I_{0+}^\alpha(L_p)$ и $I_-^\alpha(L_p)$ совпадают, $D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha \varphi = D_-^\alpha I_-^\alpha \varphi = \varphi$ если $\varphi \in L_p$, и $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha \varphi = I_-^\alpha D_-^\alpha \varphi = \varphi$ если $\varphi \in I^\alpha(L_p) \stackrel{def}{=} I_{0+}^\alpha(L_p) = I_-^\alpha(L_p)$.

Лемма 1: Пусть $0 < Re\beta < Re\alpha < 1/p$, тогда имеют место равенства:

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda}(L_p) = I_-^{\alpha,\beta,\lambda}(L_p) = I^\alpha(L_p) \cap I^{\alpha-\beta}(L_p), \quad Re\lambda < 0, \quad (7)$$

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda}(L_{p,-\lambda p}) = (e^{\lambda x} I_{0+}^\alpha)(L_p) \cap (e^{\lambda x} I_{0+}^\beta)(L_p), \quad Re\lambda > 0, \quad (8)$$

$$I_-^{\alpha,\beta,\lambda}(L_{p,\lambda p}) = (e^{-\lambda x} I_-^\alpha)(L_p) \cap (e^{-\lambda x} I_-^\beta)(L_p), \quad Re\lambda > 0, \quad (9)$$

и при этих пространствах операторы (1), (2) имеют обратные операторы:

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda})^{-1} = D_{0+}^{\alpha-\beta} e^{\lambda x} D_{0+}^\beta e^{-\lambda x} = e^{\lambda x} D_{0+}^\beta e^{-\lambda x} D_{0+}^{\alpha-\beta}, \quad (10)$$

$$(I_-^{\alpha,\beta,\lambda})^{-1} = D_-^{\alpha-\beta} e^{-\lambda x} D_-^\beta e^{\lambda x} = e^{-\lambda x} D_-^\beta e^{\lambda x} D_-^{\alpha-\beta}. \quad (11)$$

Доказательство проведем только для оператора $I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda}$, т.к. для $I_{-}^{\alpha,\beta,\lambda}$ лемма доказывается аналогично. Из ([1], 10.52) известно, что

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda} = I_{0+}^{\alpha-\beta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha-\beta} \quad (12)$$

при выполнении условия леммы. Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ то по аналогии с теоремой 18.2 [1] можно доказать, что

$$(e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x})(L_p) = I_{0+}^{\beta}(L_p) \cap L_p, \quad (13)$$

отсюда и вытекает (7). Если $\operatorname{Re} \lambda > 0$ то имеем:

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda} f)(x) = (e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha,\alpha-\beta,-\lambda} e^{-\lambda x} f)(x); \quad f(x) e^{-\lambda x} \in L_p,$$

и тогда (8) следует прямо из (7). Равенства (10), (11) следуют из (12). Лемма доказана. ■

Следствие 1: Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha_1 < \operatorname{Re} \alpha_2 < 1/p$, тогда имеют место следующие вложения

$$(I_{0+}^{\alpha_2}(L_p) \cap L_p) \subset (I_{0+}^{\alpha_1}(L_p) \cap L_p),$$

$$(I_{-}^{\alpha_2}(L_p) \cap L_p) \subset (I_{-}^{\alpha_1}(L_p) \cap L_p).$$

Доказательство: Имеем, что $e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha_2} e^{-\lambda x} = (e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha_1} e^{-\lambda x})(e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha_2-\alpha_1} e^{-\lambda x})$. Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ то используя (13), можем сразу установить первое вложение. Второе вложение доказывается подобным образом. ■

Следствие 2: Если $\operatorname{Re} \omega < 0$, $\operatorname{Re}(\omega + \lambda) < 0$ то справедливы равенства:

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda}(L_{p,\omega p}) = (e^{-\omega x} I_{0+}^{\alpha})(L_p) \cap L_{p,\omega p}, \quad (14)$$

$$I_{-}^{\alpha,\beta,\lambda}(L_{p,-\omega p}) = (e^{\omega x} I_{-}^{\alpha})(L_p) \cap L_{p,-\omega p}. \quad (15)$$

Это следствие прямо вытекает из Следствия 1 и Леммы 1.

Лемма 2: Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1/p$, $\omega + |i\lambda| < 0$, тогда имеют место равенства:

$$A_{0+}^{\alpha,\lambda}(L_{p,-|i\lambda|p}) = (e^{|i\lambda|x} I_{0+}^{\alpha})(L_p) \cap (e^{|i\lambda|x} I_{0+}^{\alpha/2})(L_p), \quad (16)$$

$$A_{-}^{\alpha,\lambda}(L_{p,|i\lambda|p}) = (e^{-|i\lambda|x} I_{-}^{\alpha})(L_p) \cap (e^{-|i\lambda|x} I_{-}^{\alpha/2})(L_p), \quad (17)$$

$$A_{0+}^{\alpha,\lambda}(L_{p,\omega p}) = (e^{-\omega x} I_{0+}^{\alpha})(L_p) \cap L_{p,\omega p}, \quad (18)$$

$$A_{-}^{\alpha,\lambda}(L_{p,-\omega p}) = (e^{\omega x} I_{-}^{\alpha})(L_p) \cap L_{p,-\omega p}, \quad (19)$$

и в этих пространствах операторы (3), (4) имеют обратные операторы:

$$(A_{0+}^{\alpha,\lambda})^{-1} = e^{-i\lambda x} D_{0+}^{\alpha/2} e^{2i\lambda x} D_{0+}^{\alpha/2} e^{-i\lambda x}, \quad (20)$$

$$(A_{-}^{\alpha,\lambda})^{-1} = e^{-i\lambda x} D_{-}^{\alpha/2} e^{2i\lambda x} D_{-}^{\alpha/2} e^{-i\lambda x}. \quad (21)$$

Эта лемма следует из Леммы 1 и следующей формулы ([3], с. 12)

$$\bar{J}_{\nu+1}(z) = {}_1F_1(\nu + 3/2; 2\nu + 3; 2iz)e^{-iz}.$$

Теперь приступим к изучению формул S -связи между операторами (1), (3) и (2), (4) соответственно. Имеются следующие равенства, которые справедливы на достаточно хороших функциях:

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda} &= (\cos \pi \alpha E - \sin \pi \alpha x^\alpha S x^{-\alpha})(E - K_1)I_-^{\alpha,\beta,-\lambda}, \\ (K_1 f)(x) &= c_1 \int_0^\infty f(t) K_1(x, t) dt, \quad c_1 = \frac{(-\lambda)^{1-\alpha} \Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(2 - \alpha) \Gamma(\beta)}, \\ K_1(x, t) &= t^{-\alpha} \int_0^1 \tau^{-\alpha} {}_1F_1\left(\frac{\beta - \alpha + 1}{1 - \alpha}; \lambda \tau x\right) {}_1F_1\left(\frac{1 - \beta}{1 - \alpha}; -\lambda \tau t\right) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A_{0+}^{\alpha,\lambda} &= (\cos \pi \alpha E - \sin \pi \alpha x^\alpha e^{-i\lambda x} S e^{i\lambda x} x^{-\alpha})(E - e^{-i\lambda x} K_2 e^{i\lambda x}) A_-^{\alpha,-\lambda}, \\ (K_2 f)(x) &= c_2 \int_0^\infty f(t) K_2(x, t) dt, \quad c_2 = \frac{(-\lambda)^{1-\alpha} \Gamma(1 - \alpha/2)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha/2)}, \\ K_2(x, t) &= t^{-\alpha} \int_0^1 \tau^{-\alpha} {}_1F_1\left(\frac{1 - \alpha/2}{1 - \alpha}; \lambda \tau x\right) {}_1F_1\left(\frac{1 - \alpha/2}{1 - \alpha}; -\lambda \tau t\right) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Изложим доказательство формулы (22). Из ([4], 2.19.5.14) имеем:

$$\begin{aligned} (\cos \pi \alpha E + \sin \pi \alpha S) I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda} &= I_-^{\alpha,\beta,-\lambda} + G_1, \\ (G_1 f)(x) &= c_1 \int_0^\infty {}_1F_1\left(\frac{1 + \beta - \alpha}{2 - \alpha}; \lambda(x - t)\right) f(t) dt. \end{aligned} \quad (24)$$

При исследовании образов преобразования Лапласа от операторов $(G_1 f)(x)$ и $(K_1 I_-^{\alpha,\beta,-\lambda} f)(x)$ можно показать, что $(G_1 f)(x) = (K_1 I_-^{\alpha,\beta,-\lambda} f)(x)$. Тогда (22) следует из (24) и Леммы 11.1 [1]. Формула (23) вытекает из (22). Итак, установили формулы связи двух пар операторов (1)-(2) и (3)-(4) с сингулярным оператором S . Теперь рассмотрим в каких классах функций они имеют место.

Теорема: Формулы (22), (23) имеют место для функций $f(x)$ из пространства $L_{p,\omega p}$, если соответственно выполняются условия:

$$0 < \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \alpha < 1/p; \quad \operatorname{Re} \lambda < 0; \quad \operatorname{Re}(\omega + \lambda) \geq 0, \quad (25)$$

$$0 < \operatorname{Re} \alpha < 1/p; \quad \operatorname{Im} \lambda > 0; \quad \operatorname{Re} \omega - \operatorname{Im} \lambda \geq 0, \quad (26)$$

причем операторы K_1, K_2 являются компактными из $L_{p,\omega p}$ в L_p .

Доказательство: Рассмотрим оператор K_1 . Т.к. функция ${}_1F_1(a; c; z)$ ограничена на любом отрезке и при $z \rightarrow +\infty$ имеет асимптотику ${}_1F_1(\frac{a}{c}; z) \stackrel{z \rightarrow \infty}{=} O(e^z z^{a-c})$ (см. [5], 6.13) то без труда можно проверить, что при каждом фиксированном x интеграл в операторе $(K_1 f)(x)$ сходится. Теперь сделаем замену переменных:

$$t = \frac{\tau}{1-\tau}, \quad x = \frac{s}{1-s}; \quad \tau \in [0, 1]; \quad s \in [0, 1]; \quad \tilde{K}_1(s, \tau) = K_1(x, t),$$

$$f(t) \xrightarrow{A} f_1(\tau) = f(\tau/(1-\tau)) e^{-\omega\tau/(1-\tau)} (1-\tau)^{-2/p},$$

$$(K_1 f)(x) \xrightarrow{B} (\tilde{K}_1 f_1)(s) = \left[(K_1 f_1)\left(\frac{s}{1-s}\right) \right] (1-s)^{-2/p}.$$

Тогда $\tilde{K}_1 = B^{-1} K_1 A$, A – изоморфизм из $L_{p,\omega p}$ на L_p . Легко проверить, что ядро $\tilde{K}_1(s, \tau)$ непрерывно в $[0, 1) \times [0, 1)$, а при $s \rightarrow 1$ или $\tau \rightarrow 1$ оно стремится к нулю. По критерию Рисса ([6], с. 135) можно доказать, что $\tilde{K}_1$ компактен в $L_p(0, 1)$. С другой стороны, оператор B – изоморфизм в L_p , отсюда и вытекает компактность K_1 из $L_{p,\omega p}$ в L_p .

Из Теоремы 11.3 [1] и непрерывного вложения $L_{p,\omega p} \subset L_{p,\omega_2}$, $\omega_1 > \omega_2$, следует ограниченность оператора $x^\alpha S x^{-\alpha}$ из L_p в $L_{p,\omega' p}$, $\omega' < 0$, и поэтому из Теоремы 5.7 [1] обе части равенства (22) ограничено действуют из $L_{p,\omega p}$ в $L_{p,\omega' p}$. Тем самым по теореме Банаха ([1], с. 28) справедливость (22) для $f(x) \in L_{p,\omega p}$ установлена. Вторая часть теоремы доказывается таким же образом.

Установленные формулы имеют приложение в решение интегральных уравнений. Например, следующие уравнения:

$$a(x)(I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda} f)(x) + b(x)(I_{-}^{\alpha,\beta,-\lambda} f)(x) = g(x), \quad (27)$$

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\lambda} a(x) f^*(x) + I_{-}^{\alpha,\beta,-\lambda} b(x) f^*(x) = g^*(x) \quad (28)$$

с помощью доказываемой теоремы сводятся к равносильным им системам уравнений:

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\lambda} f)(x) = h(x), \quad (29)$$

$$(a(x) \cos \pi \alpha + b(x)) h(x) - (\sin \pi \alpha b(x) x^\alpha S x^{-\alpha}) h(x) + a(x) (K_1 h)(x) = g(x),$$

$$(I_{-}^{\alpha, \beta, \lambda} h^*)(x) = g^*(x), \quad (30)$$

$$(\cos \pi \alpha a(x) + b(x)) f^*(x) - (\sin \pi \alpha x^{\alpha} S x^{-\alpha})(a(x) f^*(x)) + K_1(a(x) f^*(x)) = g^*(x),$$

где первое из двух уравнений этих систем можно решить в явном виде с помощью Леммы 1, а второе является полным сингулярным уравнением.

Литература

- [1] Самко, С.Г., Килбас, А.А., и Маричев, О.И.: *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Наука и техника, Минск 1987
- [2] Гахов, Ф.Д.: *Краевые задачи*. Наука, Москва 1977
- [3] Бейтмен, Г., и Эрдейи, А.: *Высшие трансцендентные функции. Т 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*. Наука, Москва 1966
- [4] Прудников, А.П., Брычков, Ю.А., и Маричев, О.И.: *Интегралы и ряды: Дополнительные главы*. Наука, Москва 1986
- [5] Маричев, О.И.: *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)*. Наука и техника, Минск 1978
- [6] Антонович, А.Б., и Радько, Я.В.: *Функциональный анализ и интегральные уравнения*. Издательство "Университетское", Минск 1984

поступило: 14.02.1990

переработано: 15.11.1990

Адрес автора:

Динь Хоанг Ань

Белорусский университет

МехМат

Кафедра теории функций

Минск

Белоруссия

Hinweise für Verfasser

Um die redaktionelle Bearbeitung und die Herstellung der Druckvorlage zu erleichtern, wären wir den Verfassern dankbar, sich betreffs der Form der Manuskripte an den in **Rostock. Math. Kolloq.** (ab Heft 43) veröffentlichten Beiträgen zu orientieren.

Insbesondere beachte man:

1. Manuskripte sollten grundsätzlich **maschinengeschrieben** (Schreibmaschine, Drucker) in **deutscher oder englischer Sprache** abgefaßt sein.
2. Zur inhaltlichen Einordnung der Arbeit sind **1–2 Klassifizierungsnummern** (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Mathematical Reviews) anzugeben.
3. **Textbreite/Texthöhe** des Manuskripts sollten sich an den Maßen **160mm/230mm** orientieren.
4. Der Manuskripttext ist **eineinhalbzeilig, linksbündig**, wenn möglich, links- und rechtsbündig zu schreiben. Beim Auftreten von Formeln im laufenden Text ist der Zeilenabstand entsprechend zu vergrößern.
5. Der Platz für **Abbildungen** sollte beim Schreiben ausgespart werden; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert beizufügen.
6. **Literaturzitate** sind im Text durch laufende Nummern (vgl. [3], [4] ; [7, 8, 10]) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift **Literatur** bzw. **References** zusammenzustellen. Hierbei ist die durch die nachfolgenden Beispiele veranschaulichte Form einzuhalten (die Zeitschriftenabkürzungen erfolgen nach Mathematical Reviews).

[3] Zariski, O., and Samuel, P.: *Commutative Algebra*. Princeton 1958

[4] Steinitz, E.: *Algebraische Theorie der Körper*. J. Reine Angew. Math. **137**, 167–309 (1920)

[8] Gnedenko, B.W.: *Über die Arbeiten von C.F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*. In: Reichard, H. (Ed.): C.F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193–204, Leipzig 1967

Die Angaben erfolgen in Originalsprache; bei kyrillischen Buchstaben sollte die bibliothekarische Transkription bzw. eine Übersetzung lt. Mathematical Reviews verwendet werden.

7. Die aktuelle, vollständige Adresse des Verfassers sollte enthalten: Titel / Vornamen Name / Institution / Struktureinheit / Straße Hausnummer / Postleitzahl Ort / Land.

Weiterhin besteht die Möglichkeit, mit dem Satzsystem **LaTeX** erstellte Manuskripte auf unter **MS-DOS** formatierten Disketten (**3.5"**, **0.72MB**, **1.44MB**; **5.25"**, **0.36MB**, **0.72MB**, **1.2MB**) einzureichen.

